МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Частина І

Харків – 2022

УДК 517(075)
П 16

Рекомендовано вченою радою Українського державного університету залізничного транспорту як навчальний посібник (витяг з протоколу № 4 від 08.08.2022 р.)

Рецензенти:

Dr. Ariinas URBSYS (Ph.D. Technology Sciences, Measure111ents Engineering-lOT), Projects Development Director, IN RE, UAB (Lithuania);
доктор фіз-мат. наук, професор, член-кореспондент НАН України, академік ТАУ Р. В. Вовк (ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

П 16 Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: Навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с., рис. 96, табл. 2.

ISBN

Навчальний посібник «Вища математика. Частина І» призначений для студентів спеціальності «Організація перевезень і управління на транспорті (залізничний транспорт)», а також може бути корисним для здобувачів вищої освіти технічних спеціальностей закладів вищої освіти.

У першій частині розглядаються такі розділи вищої математики, як лінійна алгебра, елементи векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї та кількох змінних і його застосування.

УДК 517(075)

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

При написанні навчального посібника авторами використано багаторічний досвід викладання вищої математики здобувачам вищої освіти різних спеціальностей і форм навчання в Українському державному університеті залізничного транспорту.

Необхідність видання цього навчального посібника пов’язана зі збільшенням частки самостійної роботи здобувачів вищої освіти і одночасним зменшенням кількості аудиторних годин.

Навчальний посібник складається з двох частин, кожна з яких має кілька розділів. Кожний розділ містить необхідний теоретичний матеріал (визначення, формули, теореми), супроводжуваний значною кількістю детально розібраних прикладів, а також задачі для самостійного опрацювання. У посібнику нумерація формул, рисунків і таблиць подано в межах кожного розділу. Деякі теми не розглядаються (операційне числення, теорія поля тощо), оскільки вони не вивчаються здобувачами вищої освіти спеціальності «Організація перевезень і управління на транспорті (залізничний транспорт)», окремі теми викладаються стисло. Посібник містить додатки, де наведено основні необхідні відомості.

Перша частина охоплює лінійну і векторну алгебру, аналітичну геометрію, диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних. Елементам лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії присвячено перші три розділи [1-39]. Поняття функції та способи її задавання, класифікація функцій, границя і неперервність функції розглянуто в четвертому розділі «Вступ до математичного аналізу» [1-6, 10, 16, 17, 25, 29, 31-33, 38-43]. Поняття похідної та диференціала функції однієї змінної, правила диференціювання, основні теореми диференціального числення та застосування диференціального числення до дослідження функцій розглядаються в п’ятому розділі «Диференціальне числення функцій однієї змінної» [1-6, 10, 16, 17, 25, 29, 31-33, 38, 42-48]. Шостий розділ присвячено функції кількох змінних [1-6, 10, 16, 17, 25, 29, 31-33, 38, 43, 47-50]. Усі додаткові дані та відомості подано в дод. 1-10.

Навчальний посібник призначений у першу чергу для здобувачів вищої освіти спеціальності «Організація перевезень і управління на транспорті (залізничний транспорт)», а також може бути корисним для здобувачів вищої освіти інших технічних спеціальностей закладів вищої освіти.

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Матриці

1.1.1. Основні поняття

Визначення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця, яка містить m рядків і n стовпців.

Матриці позначають великими латинськими літерами і записують у такому вигляді:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначення. Числа $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, де i - номер рядка, а j - номер стовпця, називаються *елементами матриці*.

Місце кожного елемента однозначно визначається номером рядка і стовпця, на перетині яких він знаходиться.

Визначення. Розмірністю матриці називається добуток кількості рядків на кількість стовпців і позначається символом $m\times n$.

При посиланні на матрицю A розмірності $m\times n$ зазвичай використовують запис $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Визначення. Матриця називається *квадратною матрицею порядку* n (розмірності $n\times n$), якщо кількість стовпців матриці дорівнює кількості рядків $(m=n)$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначення. Сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ утворюють *головну діагональ*, а $a_{1n}, \dots, a_{n1}$ - *побічну діагональ.*

Визначення. Квадратну матрицю називають *трикутною*, якщо всі елементи, розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися, є ненульові.

Визначення. Квадратна матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається *діагональною матрицею.*

Визначення. Квадратна матриця $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ називається *одиничною матрицею*.

Визначення. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то вона називається *нульовою,* і її позначають літерою O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця може складатися як з одного рядка, так і одного стовпця. Матриця може складатися навіть з одного елемента.

Визначення. Матриця розмірності $1 \times n$, яка складається з одного рядка, називається *матрицею-рядком.*

Визначення. Матриця розмірності $m \times 1$, яка складається з одного стовпця, називається *матрицею-стовпцем.*

Визначення. Дві матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ і $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$ називаються *рівними*, якщо рівні їхні відповідні елементи:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

1.1.2. Дії над матрицями

Визначення. *Сумою (різницею)* матриць $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ і $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$ однакової розмірності $m \times n$ називається матриця

$C = A \pm B$ тієї самої розмірності $m \times n$, елементи якої дорівнюють $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$. Тобто

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \tag{1.1}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначення. Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ на дійсне число k називається матриця $C = kA$, елементи якої обчислюють за формулою $c_{ij} = k\,a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$:

$$C = kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Тобто потрібно кожний елемент матриці A помножити на k.

Визначення. Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times p}$ розмірності $m \times p$ на матрицю $B = \left(b_{ij}\right)_{p \times n}$ розмірності $p \times n$ називається матриця $C = AB$ розмірності $m \times n$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\,,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Правило «*рядок на стовпець*»: елемент матриці c_{ij}, який стоїть на перетині i-го та j-го рядків дорівнює сумі попарних добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

! *Дві матриці можна множити, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Добуток матриць некомутативний (непереставновочний), тобто в загальному випадку*

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Визначення. Матриця A^T, утворена з матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ заміною її рядків відповідними за номером стовпцями, називається *транспонованою* до матриці A.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Властивості дій над матрицями

1. $A + B = B + A$.
2. $A + \left(B + C\right) = \left(A + B\right) + C$.
3. $\left(\alpha + \beta\right) A = \alpha A + \beta A$.
4. $\alpha\left(A + B\right) = \alpha A + \alpha B$.
5. $\alpha\left(\beta A\right) = \left(\alpha\beta\right) A$.
6. $\left(\alpha A\right) B = A\left(\alpha B\right)$.
7. $\left(A + B\right) C = AC + BC$.
8. $\left(AB\right) C = A\left(BC\right)$.
9. $\left(A^T\right)^T = A$.
10. $\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$.
11. $\left(AB\right)^T = A^T B^T$.

Приклад 1.1. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ і $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. Знайти:

1) $A - 3B$;
2) $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$;
3) $C^T \cdot \left(A + 5E\right)$.

Розв’язання:

1) використовуючи формули (1.1), (1.2), одержимо

$$A-3B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}6 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}18 & 12\\ 0 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2-18 & 3-12\\ 5-0 & 1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & -9\\ 5 & 4\end{pmatrix};$$

2) за формулою (1.3),

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 6+3\cdot 0 & -2\cdot 4+3\cdot(-1)\\ 5\cdot 6+1\cdot 0 & 5\cdot 4+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -11\\ 30 & 19\end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\cdot(-2)+4\cdot 5 & 6\cdot 3+4\cdot 1\\ 0\cdot(-2)+(-1)\cdot 5 & 0\cdot 3+(-1)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 22\\ -5 & -1\end{pmatrix};$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 1 & 2\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot(-5)+3\cdot 3 & -2\cdot 1+3\cdot 4 & -2\cdot 2+3\cdot(-5)\\ 5\cdot(-5)+1\cdot 3 & 5\cdot 1+1\cdot 4 & 5\cdot 2+1\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 10 & -19\\ -22 & 9 & 5\end{pmatrix}.$$

Добуток $C\cdot A$ не існує, оскільки матриця C має три стовпці, а матриця A - два рядки;

3) за формулами (1.2) - (1.4),

$$C^T\cdot(A+5E)=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & -5\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & -5\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 23 & 27\\ -19 & -24\end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) $A-3B=\begin{pmatrix}-20 & -9\\ 5 & 4\end{pmatrix}$;

2) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-12 & -11\\ 30 & 19\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}8 & 22\\ -5 & -1\end{pmatrix}$;

$A\cdot C=\begin{pmatrix}19 & 10 & -19\\ -22 & 9 & 5\end{pmatrix}$; добуток $C\cdot A$ не існує;

3) $C^T\cdot(A+5E)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 23 & 27\\ -19 & -24\end{pmatrix}$.

1.2. Визначники

Визначення. Будь-якій квадратній матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ можна поставити у відповідність певне число, яке називається її *визначником (детермінантом)* і позначається символом $detA$ або Δ, тобто

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначення. Числа a_{ij}, де i - номер рядка, а j - номер стовпця, називаються *елементами визначника*.

Визначення. Діагональ, яка з'єднує лівий верхній і правий нижній кути визначника, називається *головною*, а діагональ, яка з'єднує правий верхній і лівий нижній кути визначника, називається *побічною*.

Визначення. Кількість рядків або стовпців визначника визначають його *порядок.* Так, наприклад

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - визначник другого порядку,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - визначник третього порядку.

1.2.1. Деякі способи обчислення визначників

Визначник другого порядку знаходять за формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (1.5)$$

Тобто для його обчислення потрібно *від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = 17,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 5 \cdot (-3) = 20.$$

Визначник третього порядку можна обчислити за правилом трикутників (рис. 1.1).

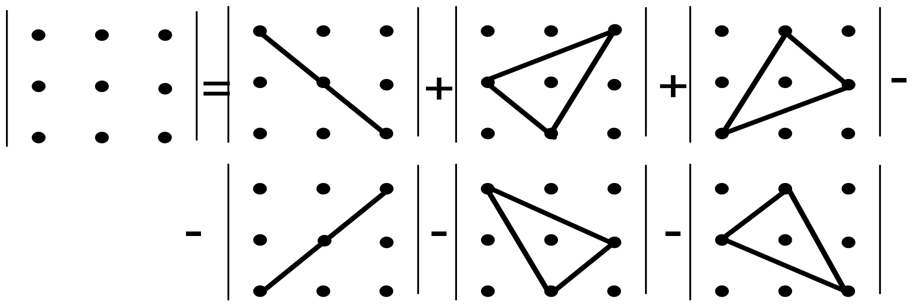


Рис. 1.1. Правило трикутників

Визначення. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного шляхом викреслювання i-го рядку та j-го стовпця.

Визначення. Вираз $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ називається *алгебраїчним доповненням* елемента a_{ij}.

Так, для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ маємо

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 9 \cdot 6 - 3 \cdot (-2) = 60, \; A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -60;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -5 \cdot 6 - 0 \cdot (-2) = -30, \; A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -30;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -5 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = -16, \; A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 16.$$

Для обчислення визначників будь-якого порядку застосовують **теорему Лапласа**: визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення.

Наприклад:

- розклад по елементах i-го рядка, $i=\overline{1,n}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \dots + a_{in}\cdot A_{in}; \qquad (1.6)$$

- розклад по елементах j-го стовпця, $j=\overline{1,n}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \dots + a_{nj}\cdot A_{nj}. \qquad (1.7)$$

Порада. Зручно обирати той рядок або стовпець, що містить нульові елементи.

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$:

а) за правилом трикутників;
б) розкривши по елементах першого рядка;
в) розкривши по елементах другого стовпця.

Розв'язання:

а) за правилом трикутників,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -5\cdot(-1)\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot(-2) + 9\cdot 4\cdot 0 - 0\cdot(-1)\cdot(-2) -$$
$$-2\cdot 9\cdot 6 - 4\cdot 3\cdot(-5) = -30.$$

б) розкриваючи по елементах першого рядка за формулою (1.6), маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix} \boxed{-5 \quad 2 \quad 0} \\ 9 \quad -1 \quad 3 \\ -2 \quad 4 \quad 6 \end{vmatrix}=-5\cdot A_{11}+2\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}=$$

$$=-5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$=-5(-6-12)-2(54+6)=-30;$$

в) розкривши по елементах другого стовпця за формулою (1.7), отримаємо

$$\Delta=\begin{vmatrix} -5 & \boxed{2} & 0 \\ 9 & \boxed{-1} & 3 \\ -2 & \boxed{4} & 6 \end{vmatrix}=2\cdot A_{12}+(-1)\cdot A_{22}+4\cdot A_{32}=$$

$$=2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=-2(54+6)-(-30-0)-4(-15-0)=-30.$$

Відповідь: $\Delta=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=-30.$

1.2.2. Властивості визначників

1. При транспонуванні визначник не змінюється.

2. Визначник дорівнює нулю, якщо всі елементи будь-якого рядка дорівнюють нулю.

3. Визначник дорівнює нулю, якщо має два однакових стовпці або рядки.

4. Визначник дорівнює нулю, якщо визначник має два стовпці або рядки, елементи яких пропорційні.

5. Визначник змінить знак, якщо поміняти місцями два рядки або два стовпці.

6. Спільний множник елементів будь-якого рядка або стовпця можна виносити за знак визначника.

7. Якщо елементи будь-якого рядка або стовпця подати як суму двох доданків, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a & a_{22}+b & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.3. Обернена матриця

Визначення. Матриця називається *невиродженою*, якщо $detA \neq 0$, і *виродженою*, якщо $detA = 0$.

Визначення. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A, якщо

! $$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \qquad (1.8)$$

Для виродженої матриці оберненої не існує.

Схема знаходження оберненої матриці:

1. Обчислити визначник матриці A. Якщо $detA = 0$, то оберненої матриці не існує, якщо $detA \neq 0$, переходять до п. 2.

2. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів матриці A і скласти матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\tilde{A}$ називається *приєднаною* до матриці A.

3. Транспонувати *приєднану* матрицю:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Записати обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \tilde{A}^T. \qquad (1.9)$$

Приклад 1.3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обернена матриця існує, оскільки

$$detA=\begin{vmatrix}-1 & 10\\ -2 & 7\end{vmatrix}=-7+20=13\neq 0.$$

Алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 7=7,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-2)=2,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 10=-10,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(-1)=-1.$$

Тоді $\tilde{A}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -10 & -1\end{pmatrix}$ і $\tilde{A}^T=\begin{pmatrix}7 & -10\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Використовуючи формулу (1.9), запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}7 & -10\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{13} & -\frac{10}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13}\end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність розрахунків, використовуючи визначення (формула (1.8)):

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}7 & -10\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -2 & 7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}7\cdot(-1)+(-10)\cdot(-2) & 7\cdot 10+(-10)\cdot 7\\ 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot 10+(-1)\cdot 7\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{13} & -\frac{10}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13}\end{pmatrix}.$

1.4. Матричні рівняння

Нехай задано матриці A, B, C, причому $\det A\neq 0, \det C\neq 0$. Розглянемо основні види матричних рівнянь відносно невідомої матриці X.

1. $A\cdot X=B$.

Множачи обидві частини цього рівняння зліва на A^{-1}, отримаємо $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$ і, враховуючи формулу (1.8), отримаємо (за умови, що $A^{-1}B$ існує)

$$X = A^{-1}B. \tag{1.10}$$

2. $X\cdot C = B$.

Для знаходження розв'язку такого рівняння потрібно помножити обидві частини цього рівняння на C^{-1} праворуч. Тоді за умови, що $B\cdot C^{-1}$ існує),

$$X\cdot C\cdot C^{-1} = B\cdot C^{-1} \Leftrightarrow X = B\cdot C^{-1}. \tag{1.11}$$

3. $A\cdot X\cdot C = B$.

Множачи ліворуч на A^{-1}, а праворуч на C^{-1}, одержимо розв'язок матричного рівняння за умови, що $A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$ існує:

$$X = A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}. \tag{1.12}$$

Приклад 1.4. Розв'язати матричне рівняння

$$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -2 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 6\\ -4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Позначимо через $C = \begin{pmatrix}-1 & 10\\ -2 & 7\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 6\\ -4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ і запишемо рівняння в матричному вигляді $X\cdot C = B$. За формулою (1.11),

$$X = B\cdot C^{-1}.$$

Матриця, обернена до $C = \begin{pmatrix}-1 & 10\\ -2 & 7\end{pmatrix}$, має вигляд (див. приклад 1.3)

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{7}{13} & -\frac{10}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13}\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X\cdot=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{7}{13} & -\frac{10}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & -\frac{6}{13}\\ -\frac{24}{13} & \frac{38}{13}\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & -\frac{6}{13}\\ -\frac{24}{13} & \frac{38}{13}\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$

1.5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

1.5.1. Основні поняття

Визначення. Система m рівнянь з n невідомими $x_1,x_2,...,x_n$ вигляду

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\,;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\,;\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.13}$$

називається *системою лінійних алгебраїчних рівнянь*.

Визначення. Числа $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ називаються *коефіцієнтами* системи, а числа $b_1,b_2,...,b_m$ - *вільними членами* системи.

Визначення. Якщо $b_1=b_2=...=b_m=0$, то система рівнянь (1.13) є *однорідною*.

Визначення. Система рівнянь (1.13) називається *неоднорідною*, якщо хоча б один з вільних членів $b_1,b_2,...,b_m$ відмінний від нуля.

Визначення. Якщо $m=n$, то система називається *квадратною*.

Визначення. Сукупність чисел $C_1,C_2,...,C_n$ називається *розв'язком* системи (1.13), якщо при підстановці до формули (1.13)

$x_1 = C_1, x_2 = C_2, ..., x_n = C_n$ кожне рівняння перетворюється на тотожність.

Визначення. Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв’язок:

- сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв’язок;
- сумісна система називається *невизначеною*, якщо вона має безліч розв’язків.

Визначення. Система називається *несумісною*, якщо вона не має розв’язків.

1. Система

$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

визначає пару прямих, які перетинаються в одній точці (рис. 1.2).

Така система має єдиний розв’язок $x = 1, y = 2$.

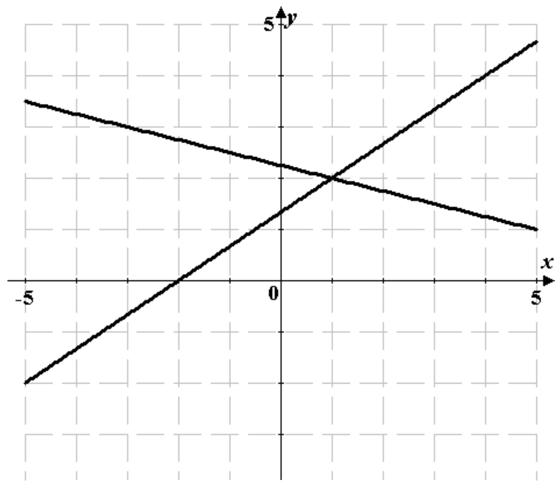


Рис. 1.2. Визначена СЛАР

2. Система

$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 2x + 8y = 18 \end{cases}$$

має безліч розв’язків.

Прямі, які відповідають рівнянням, збігаються, тобто кожна точка першої прямої належить і другій прямій (рис. 1.3). Система має безліч розв'язків, оскільки будь-яка точка першої прямої належить і другій.

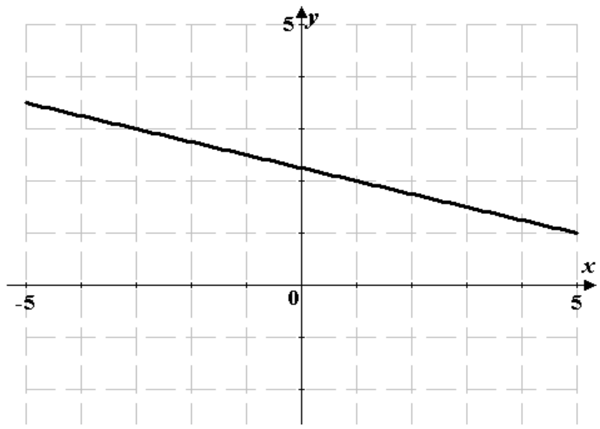


Рис. 1.3. Невизначена СЛАР

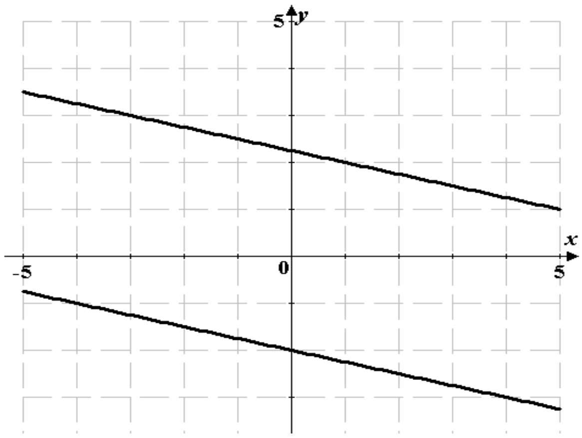


Рис. 1.4. Несумісна СЛАР

3. Система

$$\begin{cases} x+4y=9 \\ 2x+8y=-16 \end{cases}$$

визначає пару паралельних прямих. Оскільки вони не перетинаються, то система не має розв'язків (рис. 1.4).

1.5.2. Методи розв'язання неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

1.5.2.1. Правило Крамера

Нехай задано систему n рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Визначення. Головним визначником системи (1.14) називається визначник, складений з коефіцієнтів $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.15)$$

Визначення. Допоміжними визначниками системи (1.14) називаються визначники $\Delta_j, j=\overline{1,n}$, які отримують заміною в головному визначнику стовпця, що відповідає змінній x_j, стовпцем вільних членів системи рівнянь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, ...,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix}. \qquad (1.16)$$

Теорема Крамера. Якщо головний визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (1.14) має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (1.17)$$

Формули (1.17) називаються *формулами Крамера*.

1.5.2.2. Матричний метод

Для системи (1.14) введемо позначення:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих $a_{ij}, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець, складена з невідомих;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець, складена з вільних членів рівнянь.

Тоді систему (1.14) можна переписати в матричному вигляді $A \cdot X = B$.

Якщо головний визначник системи відмінний від нуля (матриця A не вироджена), то розв'язок системи знаходять за формулою (1.10), а саме

$$X = A^{-1}B.$$

1.5.2.3. Метод Гаусса

Одним з найзручніших методів розв'язання систем є метод Гаусса, заснований на елементарних перетвореннях системи. Він застосовується до будь-яких СЛАР і дозволяє досліджувати систему на сумісність і в разі сумісності знайти її розв'язок.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими (формула (1.13)).

Застосування методу Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих у рівняннях системи (1.13) з метою приведення її до еквівалентної системи трикутного або трапецієподібного вигляду. При цьому допускаються такі елементарні перетворення системи:

а) перестановка рівнянь у системі;

б) множення обох частин рівнянь на одне і те саме ненульове число;

в) додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на одне і те саме число.

Після перетворень системи можливі три випадки:

$$1)\quad \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n; \\ \qquad\qquad 0 = 0; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad 0 = 0; \end{cases} \tag{1.18}$$

де $c_{rr} \neq 0, r = \overline{1,n}$.

У випадку формули (1.13) система має єдиний розв'язок, а її невідомі знаходять послідовно, розв'язуючи її знизу вгору. З останнього рівняння (1.18) знаходять $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$, потім, підставляючи значення x_n до $(n-1)$ рівняння, знаходять x_{n-1}. Процес продовжують доти, доки не буде знайдена змінна x_1 з першого рівняння;

$$2)\quad \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k; \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0; \end{cases} \qquad (1.19)$$

де $c_{rr} \neq 0, r = \overline{1,n}$, $k < n$.

Тоді система (1.13) має безліч розв'язків. У системі (1.19) невідомі $x_1, x_2, ..., x_k$ називаються *головними невідомими*, а $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ - *вільними*. Для знаходження розв'язку системи (1.13) потрібно всі вільні члени перенести в праву частину рівнянь (1.19) і розв'язати її аналогічно формулі (1.18), виражаючи змінні $x_1, x_2, ..., x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$.

$$3)\quad \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots c_{kn}x_n = d_k; \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{k+1}; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_m; \end{cases}$$

де хоча б один з вільних членів $d_r \neq 0, r = \overline{k+1,m}$.

У цьому випадку система (1.13) несумісна.

Зауваження. На практиці при застосуванні методу Гаусса зручніше використовувати розширену матрицю системи (1.13)

$$\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Приклад 1.5. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) допомогою оберненої матриці;
в) методом Гаусса.

Розв'язання:

а) за правилом Крамера.

Обчислюємо головний (формула (1.15)) і допоміжні (формула (1.16)) визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \text{(система має єдиний розв'язок),}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 13 & 1 & 3 \\ 16 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 28, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 13 & 3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = -42,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 16 \end{vmatrix} = 56.$$

Використовуючи формули Крамера (1.17), знайдемо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{42}{14} = -3, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{56}{14} = 4;$$

б) допомогою оберненої матриці. Перепишемо систему у вигляді *матричного рівняння* $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix},$$

і знайдемо розв'язок системи за формулою (1.10), для чого потрібно знайти обернену матрицю A^{-1}.

$$detA=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=14\neq 0$$ (обернена матриця існує).

Обчислимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=7, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-7, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3$$

і запишемо приєднану матрицю $\tilde{A}=\begin{pmatrix}7 & 7 & -7\\ 5 & 7 & -1\\ -1 & -7 & 3\end{pmatrix}$.

Отже, за формулою (1.9), маємо $A^{-1}=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}7 & 5 & -1\\ 7 & 7 & -7\\ -7 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

За формулою (1.10) знайдемо розв'язок системи:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}7 & 5 & -1\\ 7 & 7 & -7\\ -7 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 13\\ 16\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-21+65-16\\ -21+91-112\\ 21-13+48\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}28\\ -42\\ 56\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix};$$

в) методом Гаусса.

Складемо розширену матрицю системи

$$\overline{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 3 & 13\\ 3 & -2 & 1 & 16\end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 3 & -2 & 1 & 16 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} \textit{Перший рядок залишаємо без змін,} \\ \textit{віднімаємо від другого рядка перший,} \\ \textit{помножений на 2,} \\ \textit{а від третього - перший,} \\ \textit{помножений на 3} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & 7 & 25 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} \textit{Перший і другий рядки залишаємо} \\ \textit{без змін, а від третього рядка} \\ \textit{віднімаємо другий, помножений на } \dfrac{1}{3} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & \dfrac{14}{3} & \dfrac{56}{3} \end{array}\right).$$

Отримаємо систему рівнянь, яка має єдиний розв'язок,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_2 + 7x_3 = 19, \\ \dfrac{14}{3} x_3 = \dfrac{56}{3}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо розв'язок для початкової:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_2 + 7x_3 = 19, \\ x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_2 + 7 \cdot 4 = 19, \\ x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - (-3) - 2 \cdot 4 = -3, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 4$.

Приклад 1.6. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + x_3 = 10. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + x_3 = 4. \end{cases}$

Розв'язання:

а) для системи $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + x_3 = 10. \end{cases}$ маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 19 \\ 0 & 3 & 7 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримаємо систему рівнянь, яка має безліч розв'язків,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ \quad 3x_2 + 7x_3 = 19, \\ \qquad\qquad 0 = 0, \end{cases}$$

оскільки останнє рівняння виконується при будь-яких значеннях невідомих.

Позначимо $x_3 = t$, $t \in R$ і запишемо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 + 2t, \\ 3x_2 = 19 - 7t, \\ x_3 = t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 2t + \left(\dfrac{19}{3} - \dfrac{7}{3}t\right), \\ x_2 = \dfrac{19}{3} - \dfrac{7}{3}t, \\ x_3 = t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3}t, \\ x_2 = \dfrac{19}{3} - \dfrac{7}{3}t, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

б) застосуємо метод Гаусса для системи $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + x_3 = 4. \end{cases}$

Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 19 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Відповідна система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ \quad 3x_2 + 7x_3 = 19, \\ \qquad\qquad 0 = -6 \end{cases}$$

несумісна (не існує значень невідомих, для яких виконується останнє рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -6$).

Відповідь: а) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3}t, \\ x_2 = \dfrac{19}{3} - \dfrac{7}{3}t, \\ x_3 = t,\ t \in R. \end{cases}$

б) розв’язків нема.

1.5.3. Однорідні системи лінійних рівнянь

Однорідна система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

завжди сумісна, оскільки вона має розв’язок $x_1 = \ldots = x_n = 0$, що називається *тривіальним*.

Якщо головний визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Якщо ж $\Delta = 0$, то система має безліч розв'язків.

Приклад 1.7. Розв’язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

Розв’язання:

а) для системи $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,$$

тому система рівнянь має єдиний розв’язок $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

б) головний визначник системи $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$ дорівнює нулю. Це означає, що система має безліч розв’язків (невизначена). Для їх знаходження скористаємося методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Відповідна система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ \qquad 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Аналогічно прикладу 1.6 маємо

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3}t, \\ x_2 = -\dfrac{7}{3}t, \\ x_3 = t,\ t \in R. \end{cases}$$

Відповідь: а) $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

б) $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3}t, \\ x_2 = -\dfrac{7}{3}t, \\ x_3 = t,\ t \in R. \end{cases}$

Питання до розділу

1. Визначення матриці.
2. Види матриць.
3. Розмірність матриці.
4. Яка матриця називається одиничною?
5. Дії над матрицями.
6. Визначник матриці.
7. Чим відрізняється поняття матриці від поняття визначника?
8. Властивості визначників.
9. Що таке мінор M_{ij}?
10. Чим відрізняється мінор M_{ij} від алгебраїчного доповнення A_{ij}?
11. Формули, за допомогою яких можна обчислити визначник третього порядку.
12. Обчислення визначників, які мають порядок вище третього.
13. Яка матриця називається невиродженою?
14. Які умови має задовольняти матриця A, щоб мати обернену матрицю?
15. Алгоритм знаходження оберненої матриці.
16. Матричні рівняння.

17. Визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

18. Яка система називається однорідною?

19. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

20. Яка система називається сумісною?

21. Яка система називається несумісною?

22. Визначення сумісної визначеної та сумісної невизначеної системи.

23. Правило Крамера розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

24. Метод Гаусса розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

25. Як записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді? Як розв'язати відповідне матричне рівняння?

26. Чи може однорідна система бути несумісною?

27. За якою умовою однорідна система має єдиний нульовий розв'язок?

28. За якою умовою однорідна система має ненульовий розв'язок?

Завдання

1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 8\\ 7 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Знайти:

1) $A+2B$;
2) $3A-2B$;
3) $0{,}5A^T+B^T$;
4) $(A+B)^T$.

2. Обчислити:

1) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$;
2) $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 1\\ -5 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -7 & 8\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти:

1) AB;

2) $(AB)^T - 3E$.

4. Підприємство виробляє три типи виробів, використовуючи для цього чотири види сировини. Норми затрат a_{ij}, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,3}$ сировини i-го виду для виробництва одиниці продукції j-го виду задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. План випуску виробів кожного виду задано матрицею $X = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1800 \\ 900 \end{pmatrix}$. Вартість одиниці сировини кожного виду в грошових одиницях (грош. од.) задано матрицею $C = \begin{pmatrix} 60 & 95 & 170 & 90 \end{pmatrix}$. Знайти:

1) матрицю S витрат сировини при заданому плані випуску виробів;

2) загальну вартість необхідної сировини W.

5. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти:

1) A^2;

2) B^3;

3) $A^2 + \left(B^3\right)^T$;

4) $\left(2A^2 + 3B\right)^T$;

5) $\left(2A^2 + 3B\right)^T - 4E$;

6) $A^2\left(B^3 + A - E\right)$;

7) $\left(B^3 + A - E\right) \cdot A^2$.

6. Обчислити визначники матриць:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 32 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^T$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

7. Обчислити визначник матриці $\begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ a^2 - 2a + 2 & a \end{pmatrix}$.

8. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_a b^2 \\ \log_b a & \log_b a^2 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_{a^2} b \\ \log_{b^2} a & \log_b a \end{vmatrix}$.

9. Для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ обчислити всі мінори та алгебраїчні доповнення.

10. Обчислити всі мінори та алгебраїчні доповнення визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

11. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$:

1) за правилом трикутників;
2) розкривши по елементах першого рядка;
3) розкривши по елементах другого стовпця;
4) розкривши по елементах третього рядка;
5) розкривши по елементах третього стовпця.

12. Обчислити визначник четвертого порядку:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

13. Знайти обернену матрицю до матриці:

1) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$;

2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

14. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ 11x_1 - 5x_2 = 1 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) допомогою оберненої матриці;
в) методом Гаусса.

15. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + ax_2 = 10, \\ 6x_1 - 8x_2 = 20 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

16. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + ax_2 = 3, \\ ax_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ не має розв'язків?

17. Вкладник поклав до банку 10000 грош. од. на два різних депозитних рахунки. По першому з них банк виплачує 8 % річних, а по другому 10 %. Через рік дохід від депозитів склав 840 грош. од. Скільки було покладено грошових одиниць на кожний рахунок?

18. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 18, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) допомогою оберненої матриці;
в) методом Гаусса.

19. Розв'язати систему лінійних рівнянь :

$$1)\ \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 = 1; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

20. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 \quad = 0, \\ 3x_1 + \quad 4x_3 = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

21. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні характеристики виробництва зазначені в таблиці. Потрібно визначити обсяг продукції кожного виду при заданих запасах сировини (запас сировини використовується повністю).

Зауваження. Задачі такого роду типові при прогнозах і оцінках функціонування підприємств, а також плануванні мікроекономічних процесів.

Тип сировини	Витрати сировини на виробництво одиниці продукції, ваг. од.			Запас сировини, ваг. од.
	I вид	II вид	III вид	
1	2	4	5	8650
2	4	3	1	6700
3	5	6	3	11650

22. Розв'язати матричне рівняння:

1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

2) $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

23. Розв'язати матричне рівняння

$$4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 2X = 3\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

25. Розв’язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + 5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 3 & 5 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповіді

1. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 17 \\ 16 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -15 & 22 & -13 \\ -8 & -8 & -8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 8 \\ -3 & 0 \\ 8{,}5 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$.

2. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 13 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -18 & 16 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 42 & -40 \end{pmatrix}$; 3) (-11); 4) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 5 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

;

5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 18 & 13 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. **3.** 1) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

4. 1) $S = AX = \begin{pmatrix} 27100 \\ 15700 \\ 18600 \\ 22100 \end{pmatrix}$; 2) $W = CS = (8268500)$.

5. 1) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ -65 & -27 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 71 & -66 \\ 2 & -25 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 26 & -11 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$;
5) $\begin{pmatrix} 22 & -11 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 525 & 23 \\ 6 & -62 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 196 & -64 \\ -249 & 123 \end{pmatrix}$.

6. 1) 19; 2) 304; 3) 19; 4) 361. **7.** $a^2 - 2$. **8.** 1) 0; 2) $3/4$.

9. $M = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $M_{11} = 6$, $M_{12} = 5$, $M_{21} = 4$, $M_{22} = -3$;

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $A_{11} = 6$, $A_{12} = -5$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = -3$.

10. $M=\begin{pmatrix}10 & -5 & -6\\ 11 & -11 & -11\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $M_{11}=10$, $M_{12}=-5$, $M_{13}=-6$, $M_{21}=11$, $M_{22}=-11$, $M_{23}=-11$, $M_{31}=-2$, $M_{32}=1$, $M_{33}=-1$;

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}10 & 5 & -6\\ -11 & -11 & 11\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $A_{11}=10$, $A_{12}=5$, $A_{13}=-6$, $A_{21}=-11$, $A_{22}=-11$, $A_{23}=11$, $A_{31}=-2$, $A_{32}=-1$, $A_{33}=-1$.

11. -11. **12.** 1) 837; 2) 24.

13. 1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{19} & \frac{2}{19}\\ \frac{5}{38} & \frac{3}{38}\end{pmatrix}$; 2) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{10}{11} & 1 & \frac{2}{11}\\ -\frac{5}{11} & 1 & \frac{1}{11}\\ \frac{6}{11} & -1 & \frac{1}{11}\end{pmatrix}$.

14. $(1;2)$. **15.** $a=-4$.

16. $a=3$. *Вказівка.* Система не має розв'язків, коли виконуються умови $\frac{3}{a}=\frac{a}{3}\neq\frac{3}{3}$, тобто $\begin{cases}a^2=9,\\ \frac{a}{3}\neq 1.\end{cases}$

17. I – 8000 грош. од., II – 2000 грош. од. **18.** $(2;-3;1)$.

19. 1) система невизначена. $\left(-\frac{2}{11}+\frac{t}{11};\frac{10}{11}-\frac{5t}{11};t\right), t\in R$;

2) система невизначена. $\left(t;-\frac{1}{3}+\frac{2t}{3};0\right), t\in R$;

3) система несумісна.

20. 1) $(0;0;0)$; 2) система має безліч розв'язків. $\left(-\frac{7t}{5};-\frac{3t}{5};t\right), t\in R$. **21.** $(800;950;650)$.

22. 1) $X=\begin{pmatrix}0,6 & 2,2\\ 0,7 & 0,4\end{pmatrix}$; 2) $X=\begin{pmatrix}-0,7 & -1,1\\ -0,1 & 1,7\end{pmatrix}$; 3) $X=\begin{pmatrix}1,95 & -1,1\\ 0,65 & -0,2\end{pmatrix}$.

23. $X=\begin{pmatrix}8 & -4,5 & 2,5\\ 2,5 & -2 & -1\end{pmatrix}$. **24.** $X=\begin{pmatrix}67/46\\ 33/46\\ 95/46\end{pmatrix}$. **25.** $X=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & \frac{33}{8}\\ \frac{7}{2} & -\frac{29}{8}\\ -\frac{3}{2} & \frac{71}{8}\end{pmatrix}$.

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Поняття вектора

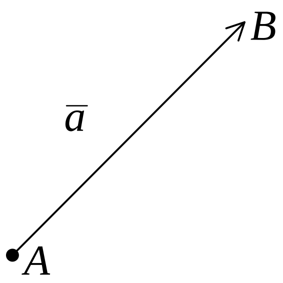


Рис. 2.1. Вектор

Визначення. Спрямований відрізок з початком у точці A і кінцем у точці B називається *вектором* і позначається символом $\overline{AB}$ (рис. 2.1).

Визначення. Довжина відрізка $\overline{AB}$ називається *модулем вектора* і позначається $\left|\overline{AB}\right|$.

Вектори також позначаються малими латинськими літерами $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ ..., а їхні модулі - $|\overline{a}|, |\overline{b}|, |\overline{c}|$ ...

Визначення. Якщо точки A і B співпадають, то вектор називається *нульовим.*

Нульовий вектор не має напрямку, і довжина його дорівнює нулю.

Визначення. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним вектором*.

Визначення. Одиничний вектор, напрямок якого збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, називається *ортом* вектора $\overline{a}$ і позначається символом $\overline{a^0}$.

Визначення. Два вектори називаються *колінеарними* $(\overline{a} \parallel \overline{b})$, якщо вони лежать на одній прямій або паралельних прямих.

Колінеарні вектори можуть бути спрямовані однаково, а можуть бути протилежно спрямованими:

- якщо колінеарні вектори мають один напрямок, то їх називають *однаково спрямованими;*
- якщо колінеарні вектори мають протилежні напрямки, то їх називають *протилежно спрямованими*.

Визначення. Два вектори називаються *рівними* $\overline{a} = \overline{b}$, якщо вони колінеарні, мають однаковий напрямок і довжину.

Визначення. Два ненульові вектори називаються *протилежними*, якщо вони мають однакову довжину і протилежно спрямовані.

Визначення. Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або паралельних площинах.

2.2. Лінійні операції над векторами

1. Додавання векторів.

   Правило паралелограма: якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ починаються з однієї точки, то їхньою сумою є більша діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 2.2, *а*).

   Правило трикутника: сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\bar{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\bar{b}$ за умови, що вектор $\bar{b}$ спрямований з кінцевої точки вектора $\bar{a}$ (рис. 2.2, *б*).

   Сумою декількох векторів називається замикання ламаної, утвореної з цих векторів (рис. 2.2, *в*).

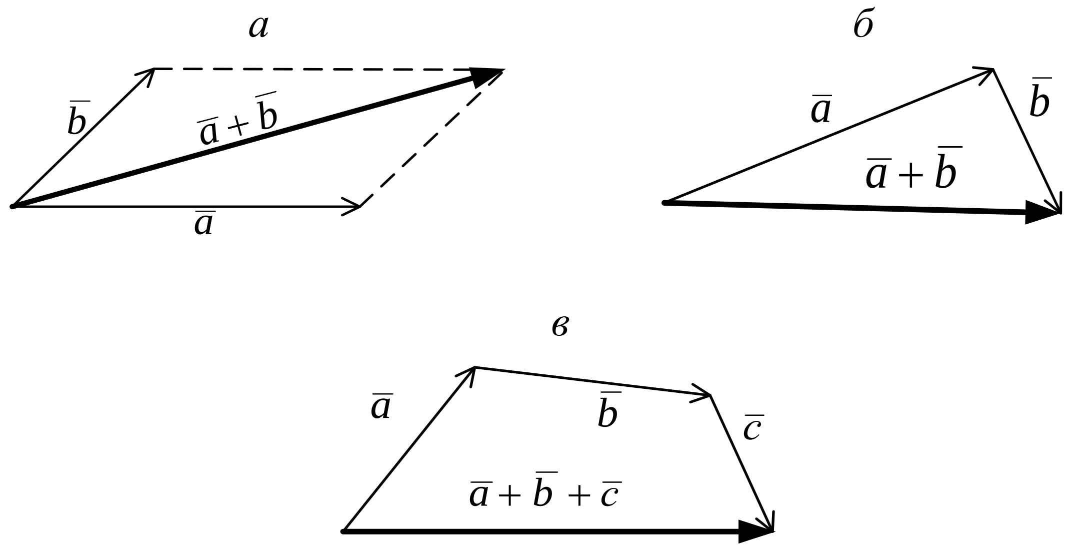


Рис. 2.2. Сума векторів

2. Різниця векторів. Різниця $\bar{a}-\bar{b}$ двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ - це сума вектора $\bar{a}$ і вектора, протилежного вектору $\bar{b}$ (рис. 2.3).

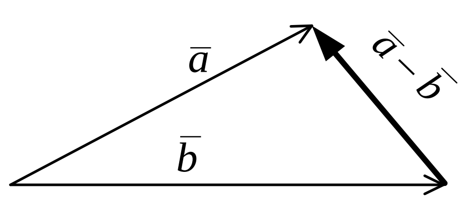


Рис. 2.3. Різниця векторів

Різницю векторів можна визначити також рівністю $\bar{a}+\left(-\bar{b}\right)$.

3. Множення вектора на число. *Добутком* $\lambda\bar{a}$ вектора $\bar{a}$ на дійсне число λ називається вектор $\bar{b}$, такий що:

1) $\left|\bar{b}\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\bar{a}\right|$;

2) напрямок вектора $\bar{b}$ співпадає з напрямком вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda>0$ (рис. 2.4, а), і протилежний напрямку вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda<0$ (рис. 2.4).

Рис. 2.4. Множення вектора на число

Властивості лінійних операцій над векторами:

1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;
2) $\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}$;
3) $\lambda_1\left(\lambda_2\bar{a}\right)=\left(\lambda_1\lambda_2\right)\bar{a}$;
4) $\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\bar{a}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{a}$;
5) $\lambda\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$.

2.3. Проєкція вектора на вісь

Визначення. Проєкцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l називається:

- додатне число $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь l однаково спрямовані (рис. 2.5, *а*);
- від'ємне число $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь l протилежно спрямовані (рис. 2.5, *б*).

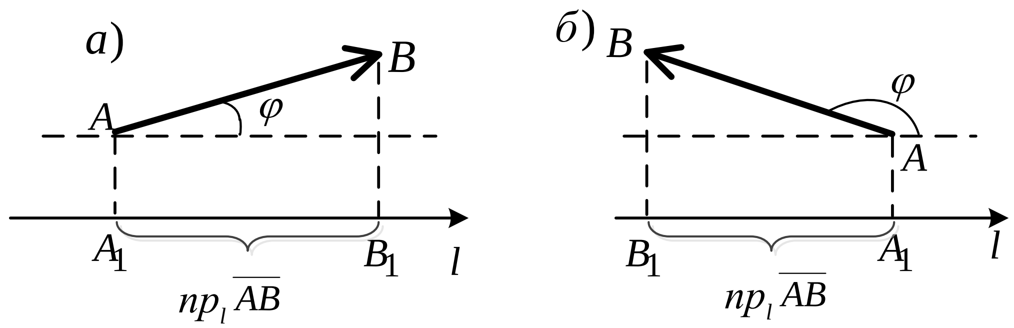


Рис. 2.5. Проєкція вектора на вісь

Позначається проєкція вектора $\overline{AB}$ на вісь l символом $np_l\overline{AB}$ і обчислюється за формулою

$$np_l\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi, \tag{2.1}$$

де φ - кут між вектором $\overline{AB}$ і віссю l.

Властивості проєкцій:

1) $np_l(\overline{a} + \overline{b}) = np_l\overline{a} + np_l\overline{b}$;
2) $np_l(\lambda\overline{a}) = \lambda np_l\overline{a}$.

2.4. Координати вектора. Координатний запис вектора

Розглянемо декартову систему координат і задамо в ній вектор $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$.

Визначення. Проєкції вектора $\overline{a}$ на осі координат називаються *координатами вектора* (рис. 2.6):

$$a_x = np_{Ox}\overline{a},\ a_y = np_{Oy}\overline{a},\ a_z = np_{Oz}\overline{a}. \tag{2.2}$$

Вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – орти осей координат Ox, Oy, Oz відповідно (рис. 2.6).

Координатний запис вектора $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ через орти осей координат має вигляд

$$\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right) = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}.$$

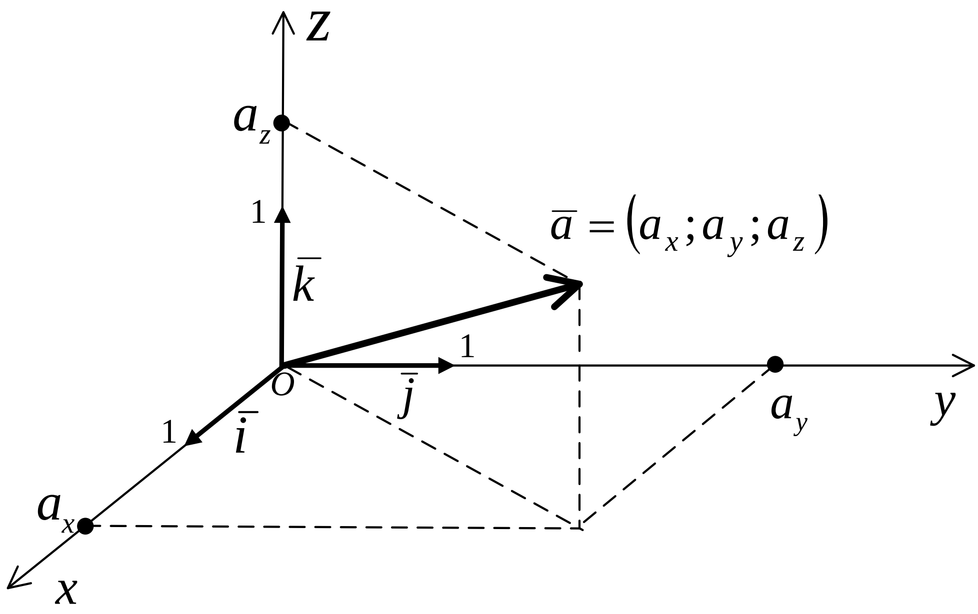


Рис. 2.6. Вектор у декартовій системі координат

Координати вектора $\overline{AB}$ з початком у точці $A(x_A;y_A;z_A)$ і кінцем у точці $B(x_B;y_B;z_B)$ знаходять за формулою

$$\overline{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A) \tag{2.3}$$

(*з координат кінця вектора віднімають відповідні координати початку вектора*).

Для знаходження модуля вектора використовують формулу

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}\,. \tag{2.4}$$

Властивості координат векторів:

1) $\overline{a}\pm\overline{b}=\left(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\right)$;

2) $\lambda\overline{a}=\left(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\right)$;

3) $\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$ (*рівні вектори мають рівні координати*);

4) умова колінеарності векторів, заданих своїми координатами,

$$\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\,. \tag{2.5}$$

2.5. Напрямні косинуси

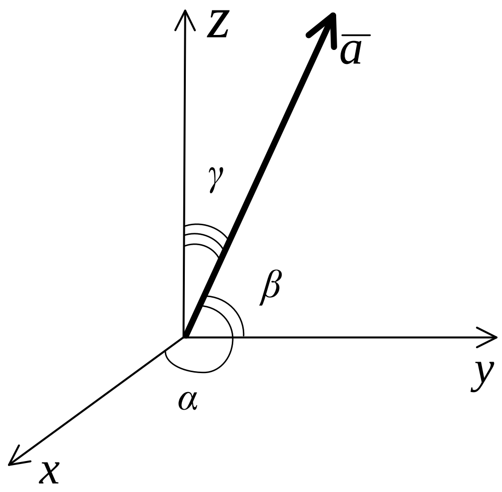


Рис. 2.7. Кути, утворювані вектором $\overline{a}$ з осями координат

Позначимо через α, β, γ кути, утворювані вектором $\overline{a}$ з осями Ox, Oy, Oz відповідно (рис. 2.7).

Визначення. Величини $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\overline{a}$.

За властивістю проєкції вектора на вісь отримаємо

$$a_x = |\overline{a}|\cos\alpha \;,\; a_y = |\overline{a}|\cos\beta,$$
$$a_z = |\overline{a}|\cos\gamma.$$

Тоді

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\; \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \tag{2.6}$$

Сума квадратів напрямних косинусів для будь-якого вектора завжди дорівнює одиниці:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\overline{a}|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \quad \Rightarrow$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.7}$$

Координати орта вектора $\overline{a}$ співпадають з напрямними косинусами.

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a} = \left(\frac{a_x}{|\overline{a}|}, \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \frac{a_z}{|\overline{a}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{2.8}$$

Приклад 2.1. Задано точки $A(3;0;-7)$, $B(3;-8;-1)$.

Знайти:

1) модуль вектора $\overline{AB}$;

2) напрямні косинуси та орт вектора $\overline{AB}$;

3) вектор $\bar{d}$, колінеарний вектору $\overline{AB}+2\bar{i}$, довжина якого дорівнює $\sqrt{26}$.

Розв'язання:

1) знайдемо координати $\overline{AB}$ за формулою (2.3):

$$\overline{AB}=\left(3-3;-8-0;-1-(-7)\right)=(0;-8;6).$$

Тоді його модуль (формула (2.4)) дорівнює $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-8)^2+6^2}=10$;

2) за формулами (2.6), (2.8) маємо

$$\overline{AB}^0=\frac{1}{\left|\overline{AB}\right|}\cdot\overline{AB}=\left(\frac{0}{10},-\frac{8}{10},\frac{6}{10}\right)=\left(0,-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$

$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=-\frac{4}{5},\ \cos\gamma=\frac{3}{5};$$

3) оскільки $\overline{AB}=(0;-8;6)$, $\bar{i}=(1;0;0)$, то, за властивостями координат векторів,

$$\overline{AB}+2\bar{i}=(0;-8;6)+2(1;0;0)=(0;-8;6)+(2;0;0)=(2;-8;6).$$

Знайдемо вектор $\bar{d}=\left(d_x;d_y;d_z\right)$ за умовою колінеарності векторів (формула (2.5))

$$\frac{d_x}{2}=\frac{d_y}{-8}=\frac{d_y}{6}.$$

Введемо параметр k:

$$\frac{d_x}{2}=\frac{d_y}{-8}=\frac{d_y}{6}=k\Rightarrow\begin{cases}d_x=2k,\\ d_y=-8k,\\ d_z=6k\end{cases}$$

і знайдемо його значення, використовуючи умову $\left|\bar{d}\right|=\sqrt{26}$:

$$\left|\bar{d}\right|=\sqrt{(2k)^2+(-8k)^2+(6k)^2}=\pm k\sqrt{4+64+36}=\pm 2k\sqrt{26}=\sqrt{26},\ k=\pm\frac{1}{2}.$$

Звідси

$$\begin{cases} d_x = 1, \\ d_y = -4, \Rightarrow \bar{d}_1 = (1;-4;3) \\ d_z = 3; \end{cases} \text{або} \quad \begin{cases} d_x = -1, \\ d_y = 4, \Rightarrow \bar{d}_2 = (-1;4;-3) \\ d_z = -3; \end{cases}$$

Відповідь: 1) $\left|\overline{AB}\right| = 10$;

2) $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = -\frac{4}{5}$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, $\overline{AB}^0 = \left(0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$;

3) $\bar{d}_1 = (1;-4;3)$, $\bar{d}_2 = (-1;4;-3)$.

Приклад 2.2. Чи існує вектор, який утворює з осями координат кути $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$?

Розв'язання

Такий вектор не існує, оскільки не виконуються умова (2.7):

$$\cos^2 45^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2 90^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{3}{4} \neq 1.$$

Відповідь: не існує.

2.6. Добутки векторів

2.6.1. Скалярний добуток векторів

Визначення. *Скалярним добутком* векторів $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Позначають $\bar{a} \cdot \bar{b}$ або $(\bar{a}, \bar{b})$:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\varphi, \qquad (2.9)$$

де φ - кут між векторами $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$.

Якщо вектори $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ задано в координатній формі, то їхній скалярний добуток знаходять за формулою

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (2.10)$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1) якщо $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ ($\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0$), то $\bar{a} \perp \bar{b}$ (φ прямий кут);

$\bar{a} \cdot \bar{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ - гострий кут;

$\bar{a} \cdot \bar{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ - тупий кут;

2) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;

3) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$;

4) $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

5) $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$.

Геометричний зміст скалярного добутку

З визначення скалярного добутку випливає, що

1) $$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}, \tag{2.11}$$

де φ - кут між векторами $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$;

2) $$np_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \tag{2.12}$$

$$np_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}; \tag{2.13}$$

3) умова перпендикулярності векторів

$$\bar{a}\perp\bar{b} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{a}\cdot\bar{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0. \tag{2.14}$$

4) скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з них на проєкцію на нього іншого.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b}\ ,\ \bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{b}|np_{\bar{b}}\bar{a}\ .$$

2.6.2. Векторний добуток векторів

Визначення. Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ із спільним початком називається *правою*, якщо з кінця вектора $\bar{c}$ найкоротший поворот від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ видно проти годинникової стрілки. Якщо найкоротший поворот видно за годинниковою стрілкою, то трійка векторів називається *лівою*.

Визначення. *Векторним добутком* $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається третій *вектор* $\overline{c}$, який задовольняє умови:

а) $|\overline{c}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

б) вектор $\overline{c}$ перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

в) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Позначають $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ або $\overline{c}=[\overline{a},\overline{b}]$.

Для векторів $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$, $\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$, заданих у координатній формі, векторний добуток обчислюють за формулою

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}. \qquad (2.15)$$

***Властивості векторного добутку векторів*:**

1) $\overline{a}\times\overline{b}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a}\ i\ \overline{b}$ – колінеарні вектори;

2) $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$;

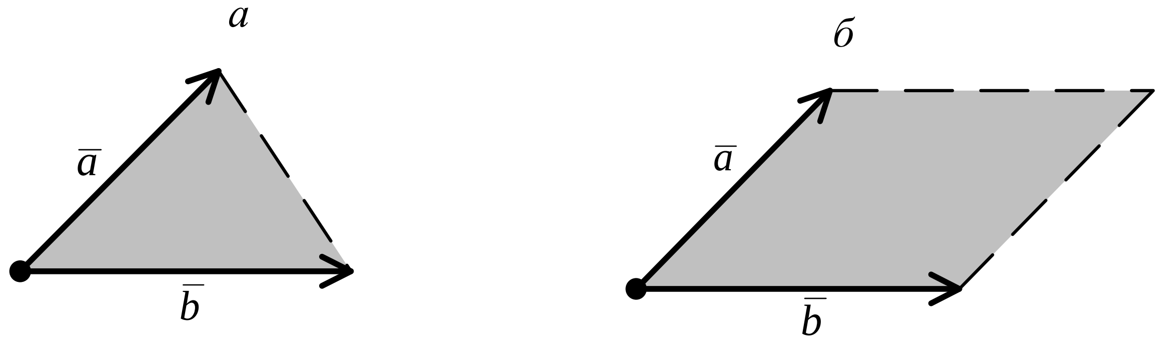
3) $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$;

4) $(\lambda\overline{a})\times\overline{b}=a\times(\lambda\overline{b})=\lambda(\overline{a}\times\overline{b})$;

5) $\overline{a}\times\overline{a}=0$.

Геометричний зміст векторного добутку

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 2.8).



$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\overline{a}\times\overline{b}|$ $\qquad$ $S_{пар}=|\overline{a}\times\overline{b}|$

Рис. 2.8. Геометричний зміст векторного добутку

2.6.3. Мішаний добуток векторів

Визначення. Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\bar{a}$ на векторний добуток векторів $\bar{b}\times\bar{c}$, тобто $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$.

Позначають $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Властивості мішаного добутку векторів:

1) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$ (мішаний добуток змінює знак при перестановці будь-яких векторів);

2) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ (знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями);

3) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=b\times\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$ (при циклічній перестановці множників добуток не змінюється);

4) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0\Leftrightarrow$ $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ - компланарні вектори.

Для векторів $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$, $\bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}$, заданих у координатній формі, мішаний добуток знаходять за формулою

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Геометричний зміст мішаного добутку

Модуль *мішаного добутку* трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, а об'єм трикутної піраміди складає шосту частину об'єму паралелепіпеда (рис. 2.9).

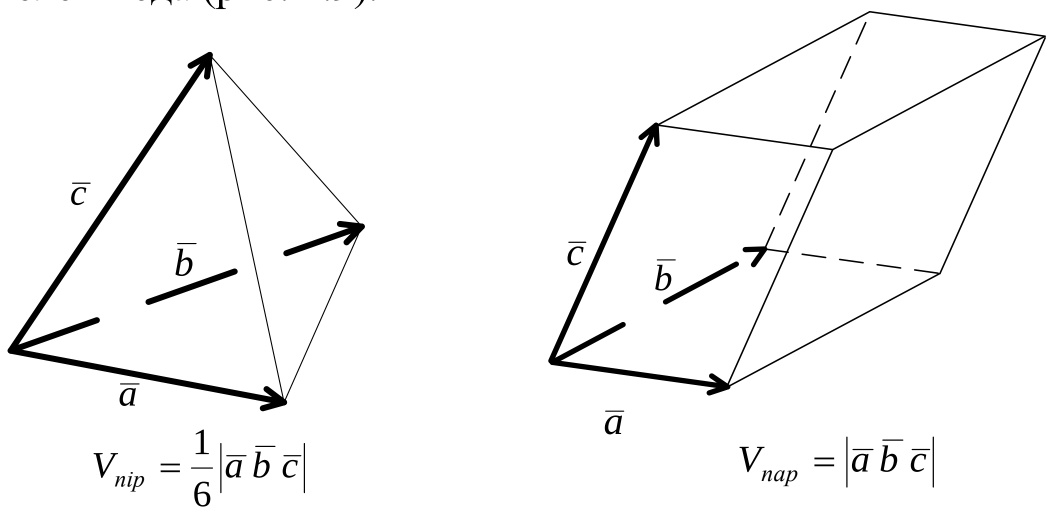


Рис. 2.9. Геометричний зміст мішаного добутку

Приклад 2.3. Задано точки $A(3;0;-7)$, $B(3;-8;-1)$, $C(-2;3;5)$, $D(3;4;-7)$.

Знайти:

1) косинус кута φ між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$;

2) проєкцію вектора $2\overline{AC}-3\overline{CB}$ на вісь вектора $\overline{AB}$;

3) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$;

4) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$.

Розв'язання:

1) косинус кута між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ знайдемо за формулою (2.11), попередньо знайшовши координати зазначених векторів за формулою (2.3):

$$\overline{AB}=\left(3-3;-8-0;-1-(-7)\right)=(0;-8;6),$$

$$\overline{AC}=\left(-2-3;3-0;5-(-7)\right)=(-5;3;12),$$

$$\cos\varphi=\frac{0\cdot(-5)+(-8)\cdot 3+6\cdot 12}{\sqrt{0^2+(-8)^2+6^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+3^2+12^2}}=\frac{48}{10\sqrt{178}}\approx 0{,}36;$$

2) для знаходження проєкції вектора $2\overline{AC}-3\overline{CB}$ на вісь вектора $\overline{AB}$ потрібно спочатку знайти координати вектора $2\overline{AC}-3\overline{CB}$, використовуючи властивості координат векторів:

$$\overline{CB}=\left(3-(-2);-8-3;-1-5\right)=(5;-11;-6),$$

$$2\overline{AC}-3\overline{CB}=2(-5;3;12)-3(5;-11;-6)=(-10;6;24)-(15;-33;-18)=$$
$$=(-25;39;42).$$

За формулою (2.12),

$$np_{\overline{AB}}\left(2\overline{AC}-3\overline{CB}\right)=\frac{-25\cdot 0+(-8)\cdot 39+6\cdot 42}{10}=-6;$$

3) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, знаходять за допомогою векторного добутку (формула (2.15)):

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & -8 & 6\\ -5 & 3 & 12\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-8 & 6\\ 3 & 12\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}0 & 6\\ -5 & 12\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}0 & -8\\ -5 & 3\end{vmatrix}=$$
$$=-114\bar{i}-30\bar{j}-40\bar{k}=(-114;-30;-40).$$

$$S_{пар} = \left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{(-114)^2+(-30)^2+(-40)^2} =$$
$$= \sqrt{15496} \approx 124{,}483 \text{ (кв. од.)};$$

4) для знаходження об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, використовують мішаний добуток (формула (2.16)):

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -5 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = -120.$$

Звідси об’єм паралелепіпеда дорівнює $V_{пар} = 120$ (куб. од.).

Відповідь: 1) $\cos\varphi \approx 0{,}36$;

2) $пр_{\overline{AB}}\left(2\overline{AC} - 3\overline{CB}\right) = -6$;

3) $S_{пар} \approx 124{,}483$ (кв. од.);

4) $V_{пар} = 120$ (куб. од.).

Приклад 2.4. Знайти вектор $\overline{c}$, перпендикулярний до векторів $\overline{a}(4;5;-2)$ і $\overline{b}(0;2;-1)$, довжина якого дорівнює 27.

Розв’язання

Оскільки $\overline{a}\perp\overline{c}$, $\overline{b}\perp\overline{c}$, то $\overline{c}$ колінеарний векторному добутку $\overline{a}\times\overline{b}$, який дорівнює

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\overline{i} + 4\overline{j} + 8\overline{k} = (-1;4;8).$$

За умовою колінеарності двох векторів (2.5), для $\overline{c}(c_x;c_y;c_z)$ і $\overline{a}\times\overline{b}$ маємо

$$\frac{c_x}{-1} = \frac{c_y}{4} = \frac{c_z}{8} = k \Rightarrow \overline{c} = (-k;\ 4k;\ 8k),$$

причому $|\overline{c}| = 27$. Звідси

$$|\overline{c}| = \sqrt{(-k)^2+(4k)^2+(8k)^2} = \pm 9k = 27 \Rightarrow k = \pm 3.$$

Отже, $\overline{c}_1 = (-3;\ 12;\ 24)$ і $\overline{c}_2 = (3;\ -12;\ -24)$.

Відповідь: $\overline{c}_1 = (-3;\ 12;\ 24)$, $\overline{c}_2 = (3;\ -12;\ -24)$.

Питання до розділу

1. Визначення, геометричне зображення та позначення вектора.
2. Модуль вектора.
3. Нульові, одиничні, рівні, протилежні вектори.
4. Колінеарні та компланарні вектори.
5. Визначення проєкції вектора на вісь.
6. Координати вектора.
7. Лінійні операції над векторами, заданими в координатній формі.
8. Модуль вектора.
9. Визначення та властивості скалярного добутку двох векторів.
10. Обчислення скалярного добутку.
11. Умова перпендикулярності двох векторів.
12. Визначення векторного добутку.
13. Властивості векторного добутку.
14. Геометричний зміст векторного добутку.
15. Умова колінеарності двох векторів.
16. Обчислення векторного добутку.
17. Визначення мішаного добутку.
18. Геометричний зміст мішаного добутку.
19. Властивості мішаного добутку.
20. Обчислення мішаного добутку.
21. Умова компланарності трьох векторів..

Завдання

1. Обчислити довжину векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, якщо $A(2;-3;1)$, $B(-4;-5;0)$, $C(3;5;1)$.

2. Обчислити довжину вектора $2\overline{a}+3\overline{b}$, якщо $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$.

3. Знайти довжину діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо $A(2;-3;0)$, $B(-6;8;2)$, $D(0;-7;0)$.

4. Відрізок з кінцями $A(-2;6;0)$ і $B(4;10;-4)$ ділиться точкою M навпіл. Обчислити довжину відрізка MK, якщо $K(0;12;7)$.

5. Знайти координати точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні 3:4, якщо $A(3;-2;-4)$ і $B(12;-8;0)$.

6. Точка $C(2;3;-1)$ ділить відрізок AB у відношенні 7:11. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, якщо $A(-2;-6;-3)$.

7. Обчислити значення m і n, при яких вектори $\overline{a}(2;m;7)$ і $\overline{b}(6;-3;n)$ колінеарні.

8. Дано $пр_l\,\overline{a}=3$, $пр_l\,\overline{b}=-2$. Обчислити:

1) $пр_l\left(2\overline{a}+3\overline{b}\right)$;

2) $пр_l\left(\overline{a}-3\overline{b}\right)$.

9. Дано два вектори $\overline{a}(3;-1;4)$ і $\overline{b}(5;-4;2)$. Обчислити скалярний добуток $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

10. Задано вектори $\overline{a}(3;5;7)$ і $\overline{b}(-1;2;3)$. Знайти:

1) $2\overline{a}+\overline{b}$;

2) $3\overline{a}-2\overline{b}$;

3) $\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)$;

4) $пр_{\overline{b}}\,\overline{a}$;

5) $пр_{\overline{a}}\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)$.

11. Обчислити кут між векторами $\overline{a}(1;2;3)$ і $\overline{b}(-2;1;4)$.

12. При якому значенні m вектори $\overline{a}(2;m;-1)$ і $\overline{b}(m;-3;4)$ перпендикулярні?

13. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Відомо, що $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$. Обчислити:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$;

2) $\overline{a}^2$;

3) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2$;

4) $\left(3\overline{a}+2\overline{b}\right)^2$.

14. Дано вершини чотирикутника $A(2;-3;1)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

15. Знайти вектор $\overline{x}$, колінеарний вектору $\overline{a}(2;-3;1)$, який задовольняє умову $\overline{x}\cdot\overline{a}=28$.

16. Дано два вектори $\bar{a}(2;3;-1)$ і $\bar{b}(5;-1;-2)$. Обчислити:

1) $\bar{a}\times\bar{b}$;

2) $\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{b}$;

3) $\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-2\bar{b}\right)$.

17. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(2;-3;1)$ і $\bar{b}(4;2;-3)$.

18. Обчислити площу ΔABC, якщо $A(-1;2;5)$, $B(3;-4;-6)$, $C(0;2;7)$.

19. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $\bar{a}=2\bar{p}+3\bar{q}$, $\bar{b}=\bar{p}-\bar{q}$, $|\bar{p}|=4$, $|\bar{q}|=5$, $\left(\widehat{\bar{p},\bar{q}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

20. Дано вектори $\bar{a}=7\bar{p}+3\bar{q}$, $\bar{b}=5\bar{p}+8\bar{q}$. Відомо, що $|\bar{p}|=3$, $|\bar{q}|=2$ та $\bar{p}\perp\bar{q}$. Обчислити:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$;

2) $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

21. Задано координати вершин трикутної піраміди $A(1;-2;1)$, $B(2;3;2)$, $C(1;1;5)$, $D(3;4;6)$. Обчислити висоту піраміди, опущеної з вершини D на площину ABC.

22. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є вектори:

1) $\bar{a}(2;2;-3)$, $\bar{b}(1;-2;1)$, $\bar{c}(-2;3;5)$;

2) $\bar{a}(-2;-2;-3)$, $\bar{b}(-1;-2;-1)$, $\bar{c}(-2;-3;-5)$;

3) $\bar{a}(2;-2;-3)$, $\bar{b}(1;-2;-1)$, $\bar{c}(-2;-3;5)$.

23. Три вершини піраміди розташовані в точках $A(2;1;-3)$, $B(4;0;1)$, $C(3;-5;4)$. Знайти координати четвертої вершини D, яка належить осі Oy, якщо об'єм піраміди дорівнює 5 куб. од.

24. Довести, що чотири точки $A(2;4;-2)$, $B(0;2;10)$, $C(-2;4;2)$, $D(4;2;6)$ лежать в одній площині.

25. Знайти вектор $\bar{x}$, який перпендикулярний до векторів $\bar{a}=3\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$ і $\bar{b}=-3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ та задовольняє умову $\bar{x}\cdot\left(2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}\right)=10$.

26. Обчислити $|\bar{m}+\bar{n}|^2$, якщо $|\bar{m}|=|\bar{n}|=1$, $\left(\widehat{\bar{m},\bar{n}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

27. Відомо, що $\bar{a} = -3\bar{m} + 4\bar{n}$, $\bar{b} = 5\bar{m} - 6\bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 5$, $(\widehat{\bar{m},\bar{n}}) = \frac{2\pi}{3}$. Обчислити $|\bar{a} \times 2\bar{b}|$.

28. Обчислити $|\bar{a} - \bar{b}|^2$, якщо $|\bar{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 4$ $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{2\pi}{3}$.

29. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$, $(\widehat{\bar{m},\bar{n}}) = \frac{\pi}{3}$.

30. Обчислити синус кута між векторами $\bar{p}(2;1;3)$ і $\bar{q}(3;4;-1)$.

Відповіді

1. $|\overline{AB}| = \sqrt{41}$; $|\overline{AC}| = \sqrt{65}$. **2.** $\sqrt{118}$. **3.** $3\sqrt{17}$. **4.** $7\sqrt{2}$.

5. $M\left(\frac{48}{7};-\frac{32}{7};-\frac{16}{7}\right)$. **6.** $\overline{AB}\left(\frac{72}{7};\frac{162}{7};\frac{36}{7}\right)$. **7.** $m = -1,\ n = 21$.

8. 1) 0; 2) 9. **9.** 27.

10. 1) $(5;12;17)$; 2) $(11;11;15)$; 3) 442; 4) $2\sqrt{14}$; 5). $\frac{194\sqrt{83}}{83}$.

11. $\varphi = \arccos\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right) \approx 46^\circ$. **12.** $m = -4$. **13.** 1) -6; 2) 9; 3) 13; 4) 73.

15. $\bar{x}(4;-6;2)$. **16.** 1) $(-7;-1;-17)$; 2) $(-14;-2;-34)$; 3) $(35;5;85)$.

17. $9\sqrt{5}$ кв. од.

18. $\frac{\sqrt{541}}{2}$ кв. од. **19.** $50\sqrt{2}$ кв. од. **20.** 1) 411; 2) 246.

21. $\frac{25\sqrt{314}}{314}$. **22.** 1) ліва; 2) ліва; 3) права.

23. $D(0;-8{,}7;0)$ або $D(0;-2{,}7;0)$. **25.** $\bar{x}\left(\frac{80}{7};\frac{180}{7};\frac{30}{7}\right)$.

26. $2 + \sqrt{3}$. **27.** $40\sqrt{3}$. **28.** $24 + 8\sqrt{2}$.

29. $\sqrt{13}$; $\sqrt{7}$. **30.** $\sqrt{\frac{45}{52}}$.

3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Визначення. Рівнянням кривої на площині називається рівняння вигляду $F(x;y)=0$, яке задовольняють координати будь-якої точки $M(x;y)$ кривої і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на кривій.

Підстановка координат точки $M_0(x_0;y_0)$, яка належить кривій, до рівняння кривої, перетворює його на тотожність $(F_0(x_0;y_0)\equiv 0)$. Якщо $F_0(x_0;y_0)\neq 0$, то $M_0(x_0;y_0)$ не належить кривій.

Для того щоб знайти точки перетину двох кривих $F_1(x;y)=0$ і $F_2(x;y)=0$, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0. \end{cases}$$

Якщо система не має розв'язків, то криві не мають точок перетину.

3.1. Пряма на площині

Пряма є найпростішою лінією на площині.

Визначення. Пряма задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x,y.

Розглянемо на площині Oxy довільну пряму l.

Пряма однозначно визначається:

- точкою і вектором, перпендикулярним до l (нормальним вектором);
- точкою і вектором, паралельним l (напрямним вектором);
- двома точками;
- кутовим коефіцієнтом і початковою ординатою;
- довжиною перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, і кутом α між перпендикуляром і віссю Ox.

Оскільки пряма однозначно визначається двома точками, то для її побудови достатньо знайти координати будь-яких двох точок, що належать заданій прямій.

3.1.1. Види рівнянь прямої

Розглянемо різні види рівнянь на площині.

3.1.1.1. Загальне рівняння прямої

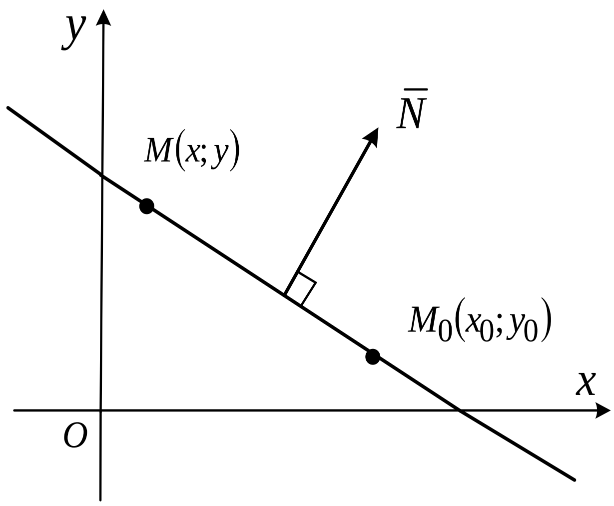


Рис. 3.1. Загальне рівняння прямої

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до ненульового вектора $\bar{N}=(A;B)$ (рис. 3.1).

Для цього розглянемо на прямій довільну точку $M(x;y)$ і запишемо вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$.

Оскільки $\overline{M_0M}\perp\bar{N}$, то за формулою (2.14) отримаємо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad (3.1)$$

Визначення. Рівняння (3.1) називається *рівнянням прямої, що проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *перпендикулярно до вектора* $\bar{N}=(A;B)$.

Розкривши дужки в рівнянні $Ax+By-Ax_0-By_0=0$ і позначивши $C=-Ax_0-By_0$, отримаємо *загальне рівняння прямої*

$$Ax+By+C=0. \quad (3.2)$$

Визначення. Вектор $\bar{N}=(A;B)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у загальному рівнянні прямої, називається *нормальним вектором прямої*.

Якщо $C=0$, то пряма l проходить через початок координат.

Якщо $A=0$ ($B\neq0$, $C\neq0$), то рівняння набуває вигляду $y=-\dfrac{C}{B}$, тобто пряма l паралельна осі Ox і проходить через точку $\left(0;-\dfrac{C}{B}\right)$.

Якщо $B=0$ ($A\neq 0$, $C\neq 0$), то рівняння набуває вигляду $x=-\dfrac{C}{A}$, тобто пряма l параллельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\dfrac{C}{A};0\right)$.

Рівняння $y=0$ ($A=C=0$) - рівняння осі Ox, а рівняння $x=0$($B=C=0$) – рівняння осі Oy.

3.1.2.2. Канонічне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\bar{s}(m;n)$ (рис. 3.2).

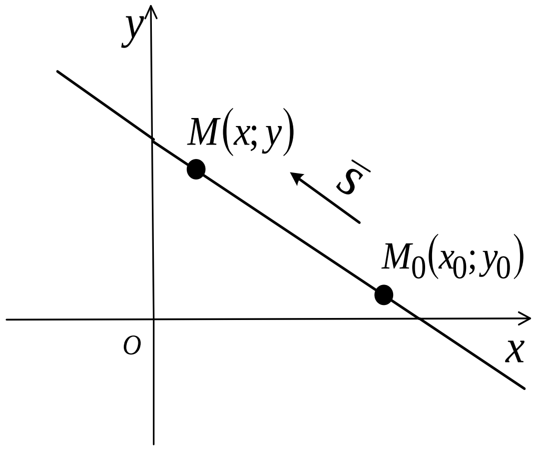


Рис. 3.2. Канонічне рівняння прямої

Тоді вектори $\bar{s}(m;n)$ і $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$ колінеарні і, за формулою (2.5),

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \tag{3.3}$$

Визначення. Рівняння (3.3) називається *канонічним рівнянням прямої*, а вектор $\bar{s}(l;m)$ називається *напрямним вектором прямої*.

У випадку, коли вектор $\bar{s}(m;n)$ перпендикулярний до координатної осі, рівняння прямої набуває вигляду:

- $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{n}$ $(\bar{s}\perp Ox)$;
- $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{0}$ $(\bar{s}\perp Oy)$.

3.1.2.3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

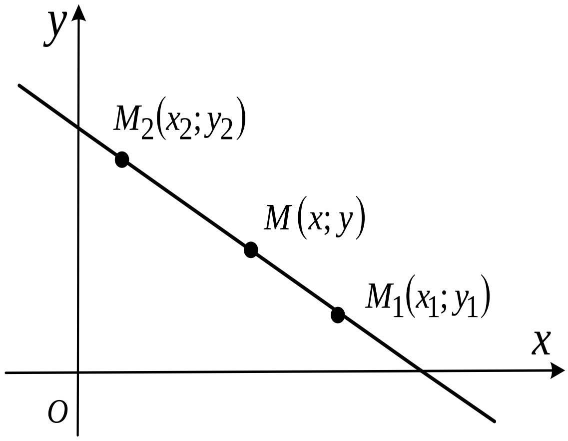


Рис. 3.3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Позначимо дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ на площині XOY (рис. 3.3). Оскільки вектори $\overline{M_1M}=(x-x_1;y-y_1)$ і $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$ колінеарні, то

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (3.4)$$

Визначення. Рівняння (3.4) називається *рівнянням прямої, що проходить через дві точки.*

3.1.2.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

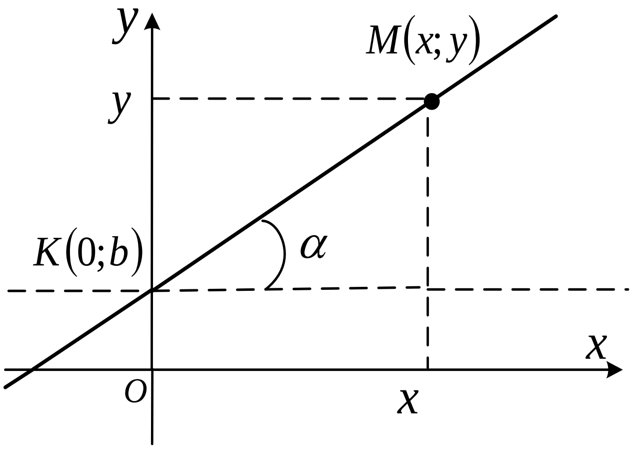


Рис. 3.4. Рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом

Розглянемо на прямій довільну точку $M(x;y)$ (рис. 3.4).

З рис. 3.4 випливає, що $tg\alpha=\dfrac{y-b}{x}$, тобто $y=tg\alpha\cdot x+b$.

Позначивши через $k=tg\alpha$, отримаємо

$$y=kx+b. \qquad (3.5)$$

Визначення. Рівняння (3.5) називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом (або з кутовим коефіцієнтом і початковою ординатою)*, а число $k=tg\alpha$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої:*

- якщо пряма проходить через початок координат ($b=0$), то $y=kx$;
- якщо пряма паралельна осі Ox ($k=tg\alpha=0$), то $y=b$ (b - ордината точки перетину прямої з віссю Oy);

• якщо пряма паралельна осі Oy ($\alpha = \frac{\pi}{2}$, кутовий коефіцієнт k не існує), то рівняння прямої має вигляд $x=a$ (a - точка перетину прямої з віссю Ox).

Визначення. Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$.

3.1.2.5. Рівняння прямої «у відрізках»

Нехай пряма перетинає осі координат Ox і Oy у точках $M_1(a;0)$ і $M_2(0;b)$ відповідно (рис. 3.5).

Використовуючи формулу (3.4), отримаємо $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$ або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (3.6)$$

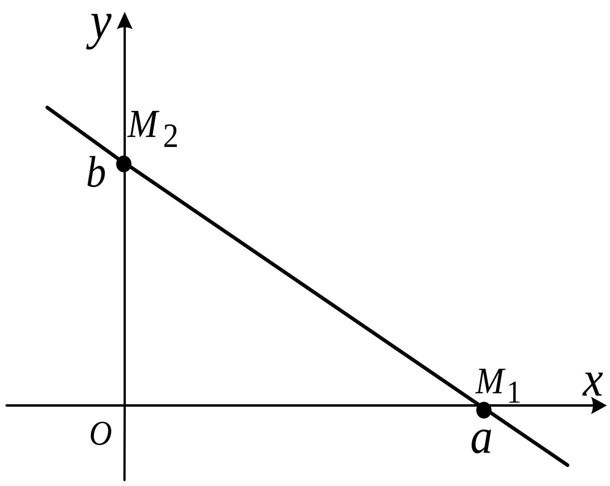


Рис. 3.5. Рівняння прямої «у відрізках»

Визначення. Рівняння (3.6) називається *рівнянням прямої «у відрізках»*.

Числа a і b - це відрізки, які пряма відтинає від координатних осей.

3.1.2.6. Параметричне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\bar{s}(m;n)$ (рис. 3.6).

Після перетворень канонічного рівняння (3.3) $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = t, t \in R$ отримаємо

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \ t \in R. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Визначення. Рівняння (3.7) називається *параметричним рівнянням прямої*, а змінна t - *параметром*.

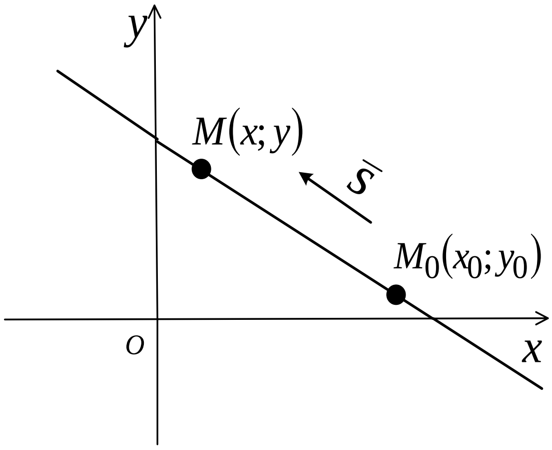


Рис. 3.6. Параметричне рівняння прямої

3.1.2.7. Нормальне рівняння прямої

Опустимо перпендикуляр OP з початку координат на пряму (рис. 3.7). Позначимо його довжину через $\rho\ (\rho \geq 0)$, а кут між ним і додатним напрямком осі Ox через α. Тоді $\overline{OP} = (\rho\cos\alpha; \rho\sin\alpha)$.

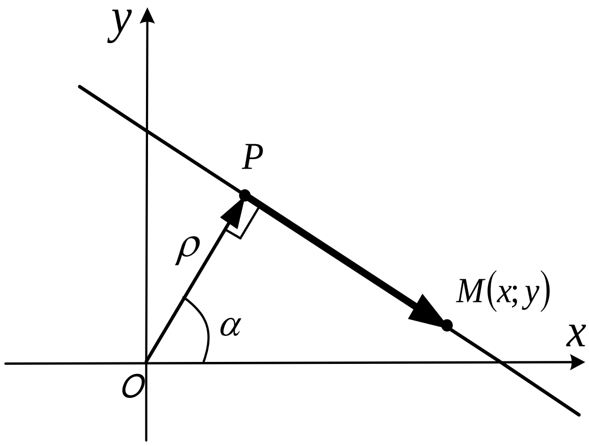


Рис. 3.7. Нормальне рівняння прямої

Взявши довільну точку $M(x;y)$ прямої, отримаємо вектор $\overline{PM} = (x - \rho\cos\alpha; y - \rho\sin\alpha)$. Оскільки $\overline{PM} \perp \overline{OP}$, то за формулою (2.14)

$$\overline{PM} \cdot \overline{OP} = (x - \rho\cos\alpha)\cdot\rho\cos\alpha + (y - \rho\sin\alpha)\cdot\rho\sin\alpha =$$

$$= x\rho\cos\alpha - \rho^2\cos^2\alpha + y\rho\sin\alpha - \rho^2\sin^2\alpha =$$

$$= x\rho\cos\alpha + y\rho\sin\alpha - \rho^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) =$$
$$= x\rho\cos\alpha + y\rho\sin\alpha - \rho^2 = 0.$$

Отже,
$$\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - \rho = 0, \qquad (3.8)$$

Визначення. Рівняння (3.8) називається *нормальним рівнянням прямої*.

Приклад 3.1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;3)$ і $M_2(2;-5)$ (рис. 3.8). Записати різні види рівнянь цієї прямої.

Розв'язання

Використовуючи формулу (3.4), отримаємо

$$\frac{x-(-2)}{2-(-2)} = \frac{y-3}{-5-3}.$$

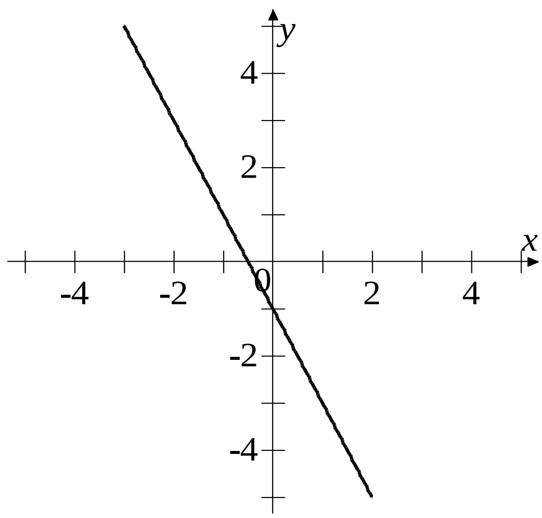


Рис. 3.8. Приклад 3.1

Отже, канонічне рівняння прямої має вигляд
$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-8}.$$

Після алгебраїчних перетворень одержимо
$-8(x+2) = 4(y-3)$ або
$8(x+2) + 4(y-3) = 0$.

Це рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(-2;3)$ перпендикулярно до вектора $\bar{N} = (8;4)$.

Спрощуючи, отримаємо загальне рівняння прямої

$$8x + 4y + 4 = 0 \text{ або } 2x + y + 1 = 0.$$

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $(k = -2)$ і початковою ординатою $(b = -1)$, виразивши y з останнього рівняння:

$$y = -2x - 1.$$

Запишемо рівняння прямої «у відрізках»:

$$2x+y+1=0 \Leftrightarrow 2x+y=-1\big| \div(-1) \Leftrightarrow \frac{2x}{-1}+\frac{y}{-1}=1,$$

$$\frac{x}{-1/2}+\frac{y}{-1}=1.$$

Отже, $a=-\dfrac{1}{2}, b=-1$.

Відповідь:

- $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-3}{-8}$ - канонічне рівняння прямої;
- $8(x+2)+4(y-3)=0$ - рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно до вектора;
- $y=-2x-1$ - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
- $\dfrac{x}{-1/2}+\dfrac{y}{-1}=1$ - рівняння прямої «у відрізках».

3.1.2. Взаємне розміщення прямих на площині

Розглянемо дві прямі l_1 і l_2, задані загальними рівняннями
$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$
$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$

Для визначення взаємного розміщення цих прямих на площині необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Якщо система (3.9) має єдиний розв'язок, то прямі l_1 і l_2 перетинаються в точці $M_0(x_0;y_0)$.

Якщо система (3.9) не має розв'язку, то прямі l_1 і l_2 не перетинаються, тобто $l_1 \| l_2$.

Якщо система (3.9) має безліч розв'язків, то прямі l_1 і l_2 співпадають.

Визначити взаємне розміщення прямих на площині можна також за допомогою їхніх нормальних векторів $\overline{N_1}(A_1;B_1)$, $\overline{N_2}(A_2;B_2)$ або кутових коефіцієнтів $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$:

а) розглянемо нормальні вектори $\overline{N_1}(A_1;B_1)$ і $\overline{N_2}(A_2;B_2)$:

- якщо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то прямі мають точку перетину;
- якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, то:
  - ✓ якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямі l_1 і l_2 паралельні;
  - ✓ якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямі l_1 і l_2 співпадають.

Кут φ (рис. 3.9) між прямими співпадає з кутом між їхніми векторами нормалі $\overline{N_1}(A_1;B_1)$ і $\overline{N_2}(A_2;B_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|} \Leftrightarrow \varphi = \arccos\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|}.$$

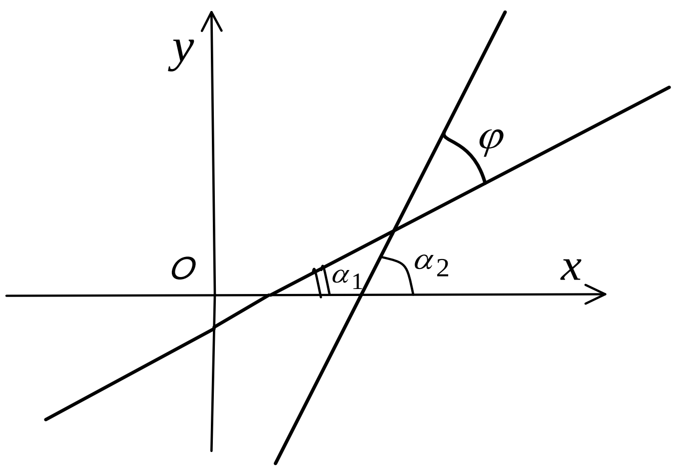


Рис. 3.9. Кут між прямими

Умова перпендикулярності прямих:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Leftrightarrow \overline{N_1}\cdot\overline{N_2} = A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$$

б) розглянемо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$l_1 : y = k_1x + b_1,$$
$$l_2 : y = k_2x + b_2.$$

Знайдемо кут φ між прямими l_1 і l_2 (рис. 3.9), де $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$. Оскільки $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$, то

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},\ \varphi \neq \frac{\pi}{2}.$$

Отже, для знаходження гострого кута між прямими використовують формулу

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|. \tag{3.10}$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

- якщо $k_1 = k_2$, то:
  - ✓ якщо $b_1 \neq b_2$ то прямі l_1 і l_2 паралельні;
  - ✓ якщо $b_1 = b_2$, то прямі l_1 і l_2 співпадають;
- якщо $k_1 \cdot k_2 = -1$, то прямі l_1 і l_2 перпендикулярні.

3.1.3. Обчислення відстані і відхилення від точки до прямої

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.11}$$

Доведемо вираз (3.11). Для цього оберемо довільну точку $M_1(x_1; y_1)$, що належить прямій $Ax + By + C = 0$ (рис. 3.10).

Як видно з рис. 3.10,

$$d = \left|np_{\overline{N}}\overline{M_0M_1}\right| = \frac{\overline{N} \cdot \overline{M_0M_1}}{\left|\overline{N}\right|}.$$

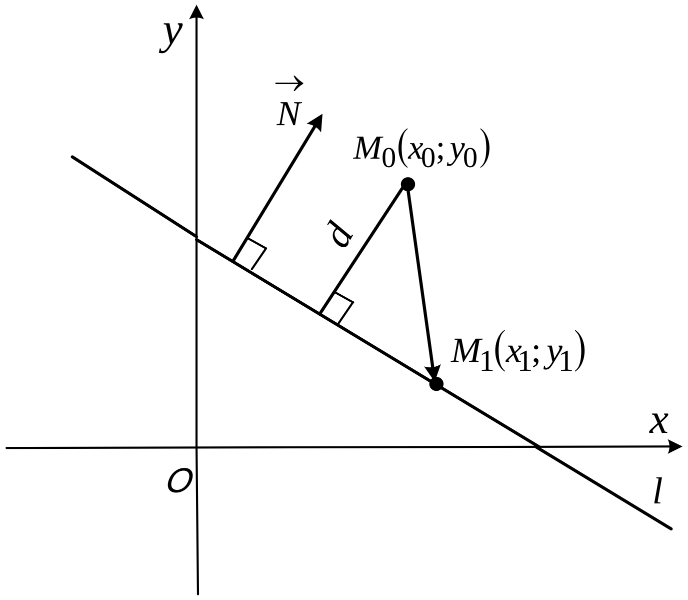


Рис. 3.10. Відстань від точки до прямої

Враховуючи, що $\overline{M_0M_1}=(x_1-x_0;y_1-y_0)$, $\overline{N}=(A;B)$, а $Ax_1+By_1+C=0$ ($M_1(x_1;y_1)$ належить прямій $Ax+By+C=0$), отримаємо

$$d=\frac{\left|A\left(x_1-x_0\right)+B\left(y_1-y_0\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|Ax_1-Ax_0+By_1-By_0\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$
$$=\frac{\left|Ax_1+By_1+C-\left(Ax_0+By_0+C\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Відстань завжди визначається невід'ємним числом. Для того щоб з'ясувати взаємне розміщення точки $M_0(x_0;y_0)$ і прямої $Ax+By+C=0$, використовують поняття *відхилення* δ точки від прямої:

- $\delta=d$, якщо точка $M_0(x_0;y_0)$ і початок координат $O(0;0)$ лежать по різні боки від прямої $Ax+By+C=0$;
- $\delta=-d$, якщо точка $M_0(x_0;y_0)$ і початок координат $O(0;0)$ лежать по один бік від прямої $Ax+By+C=0$ (рис. 3.10).

Приклад 3.2. Для прямих, заданих загальними рівняннями

$$l_1:\ 3x-y+1=0,\quad l_2:\ x+y-9=0,\quad l_3:\ 4x+2y+3=0,$$

потрібно:

1) визначити кут між прямими l_1 і l_3;

2) знайти відстань від точки перетину прямих l_1 і l_2 до прямої l_3.

Розв'язання:

1) кут між прямими l_1 і l_3 визначимо за їхніми нормальними векторами $\overline{N_1}(3;-1)$ і $\overline{N_3}(4;2)$:

$$\varphi = \arccos\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_3}}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_3}|} = \arccos\frac{3\cdot 4-1\cdot 2}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4};$$

2) точку перетину прямих l_1 і l_2 знайдемо, розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} 3x-y+1=0; \\ x+y-9=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=7.$$

Тобто прямі l_1 і l_2 перетинаються в точці $M_0(2;7)$. За формулою (3.11) визначимо відстань від $M_0(2;7)$ до прямої $4x+2y+3=0$:

$$d = \frac{|4\cdot 2+2\cdot 7+3|}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{25}{\sqrt{20}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Зауваження. Оскільки вираз у чисельнику більше нуля, то точка $M_0(2;7)$ і початок координат лежать по різні боки від прямої l_3.

Відповідь: 1) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $d = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

3.1.4. Поділ відрізка в заданому відношенні

Якщо точка $A(x_A;y_A)$ лежить на прямій, що проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, і ділить відрізок M_1M_2 у відношенні

λ $\left(\frac{AM_1}{AM_2}=\lambda\right)$, то координати точки $A(x;y)$ визначають за формулами

$$x_A=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y_A=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Зокрема для координат середини відрізка маємо $\lambda=1$, тобто

$$x_A=\frac{x_1+x_2}{2},\ y_A=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3.2. Криві другого порядку

Визначення. Лінією або *кривою* другого порядку називається множина точок площини, координати яких задовольняють рівняння

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0,$$

причому $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Розглянемо найпростіші (канонічні) рівняння ліній другого порядку.

3.2.1. Еліпс

Визначення. Еліпсом називається множина всіх точок площини, для яких сума відстаней від кожної до двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є сталою величиною (більшою, ніж відстань між фокусами).

Введемо декартову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокуси $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$, а вісь Oy поділяла відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 3.11). Позначимо суму відстаней від довільної точки еліпса $M(x;y)$ до фокусів $2a,\ 2a>2c$.

За визначенням еліпса,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Введемо позначення $b^2 = a^2 - c^2$. Оскільки $a^2 - c^2 > 0$, то $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.12)$$

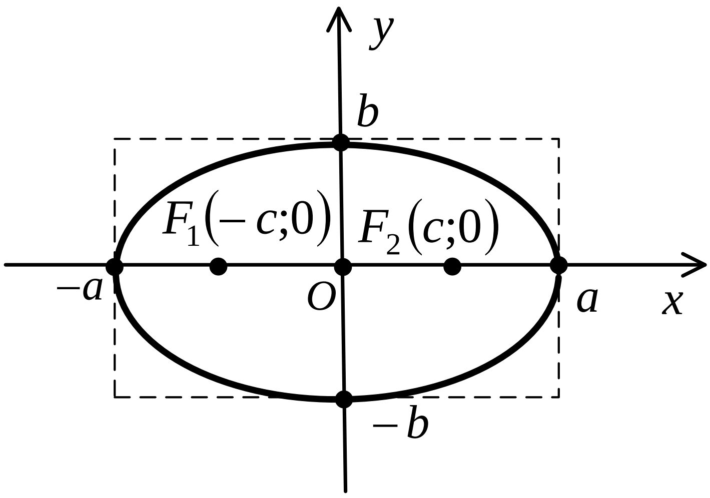


Рис. 3.11. Еліпс, $a > b$

Визначення. Рівняння (3.12) називається *канонічним* рівнянням еліпса.

Визначення. Відрізки $2a$ і $2b$ називаються відповідно *великою* та *малою* осями еліпса.

Визначення. Точки з координатами $(a;0)$, $(0;b)$, $(-a;0)$, $(0;-b)$ називаються ***вершинами*** еліпса (рис. 3.11).

Визначення. Відношення половини фокусної відстані до довжини великої півосі називають *ексцентриситетом* еліпса:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad (3.13)$$

де $c^2 = a^2 - b^2$, $a > b$.

! Ексцентриситет еліпса характеризує ступінь витягнутості еліпса, причому для еліпса $0 < \varepsilon < 1$.

Рівняння еліпса з центром у точці $C(x_0; y_0)$ має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (3.14)$$

Зауваження. Фокуси F_1, F_2 завжди розташовані на більшій осі. У випадку, коли $2b$ - більша вісь еліпса, $2a$ - менша вісь еліпса, фокуси F_1, F_2 розташовані на осі Oy (рис. 3.12), причому

$$c^2=b^2-a^2,\ b>a,\ \varepsilon=\frac{c}{b}. \qquad (3.15)$$

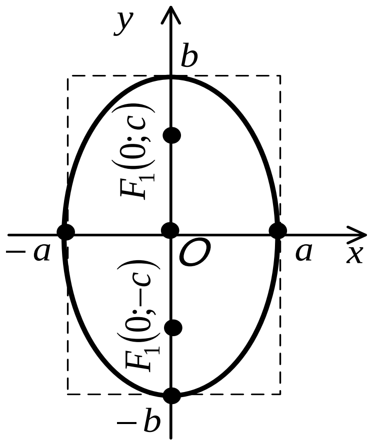


Рис. 3.12. Еліпс, $b>a$

У випадку, коли $a=b$, з формули (3.12) отримаємо $x^2+y^2=a^2$, що визначає рівняння кола. Отже, коло є частинним випадком еліпса, у якого фокуси збігаються.

! Очевидно, для кола ексцентриситет $\varepsilon=0$.

Визначення. Колом називається множина точок площини, відстань від яких до заданої точки (*центра кола*) дорівнює сталому числу (*радіусу*).

Рівняння кола з центром у точці $C(x_0;y_0)$ і радіусом R має вигляд

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (3.16)$$

Зауваження. Якщо центр кола знаходиться в початку координат (рис. 3.13), то рівняння (3.16) набуває *канонічного* вигляду

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (3.17)$$

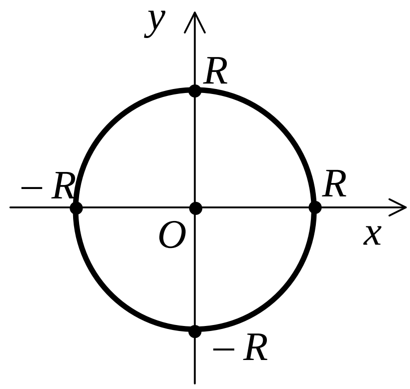


Рис. 3.13. Коло з центром у точці $O(0;0)$ і радіусом R

3.2.2. Гіпербола

Визначення. Гіперболою називається множина всіх точок площини, для яких абсолютне значення різниці відстаней до двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є сталою величиною (меншою за відстань між фокусами).

Розмістимо декартову систему координат так само, як і для еліпса (рис. 3.14), де точки $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ - фокуси гіперболи.

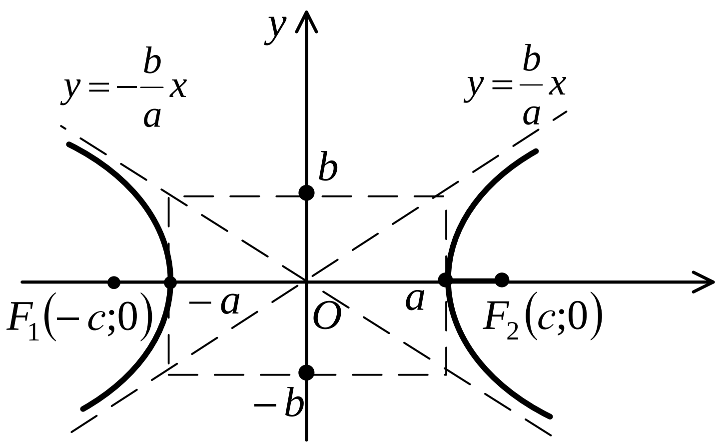


Рис. 3.14. Гіпербола

Позначимо модуль різниці відстаней від довільної точки $M(x;y)$ гіперболи до фокусів $2a, 2a<2c$. Тоді, за визначенням гіперболи, отримаємо

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо *канонічне* рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.18}$$

де $b^2=c^2-a^2$.

Визначення. Точки з координатами $(a;0)$, $(-a;0)$ називаються *вершинами* гіперболи.

Визначення. Відрізок $2c$ називається *фокусної* відстанню, вісь Ox – *дійсною* віссю, а вісь Oy – *уявною* віссю.

Визначення. Відношення половини фокусної відстані до довжини дійсної півосі називається *ексцентриситетом* гіперболи і визначається за формулою

$$\varepsilon=\frac{c}{a}, \tag{3.19}$$

де $c^2=a^2+b^2$.

! Для гіперболи $\varepsilon>1$.

Асимптоти гіперболи задаються рівняннями

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{3.20}$$

Рівняння гіперболи з центром у точці $C(x_0;y_0)$ має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{3.21}$$

Визначення. Якщо $a=b$, то гіпербола називається *рівнобічною*.

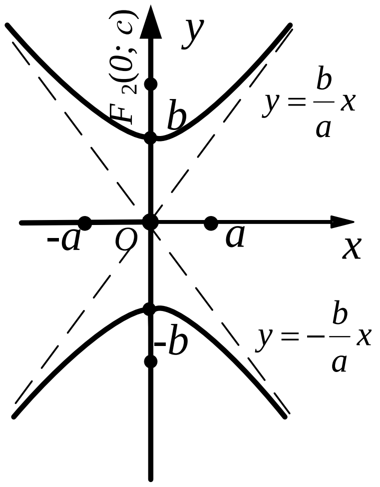


Рис. 3.15. Спряжена гіпербола

Зауваження. Рівняння

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.22)$$

визначає гіперболу, що називається *спряженою* до гіперболи за формулою (3.18).

Для спряженої гіперболи:

$2c$ – *фокусна* відстань,

Oy – дійсна вісь,

Ox – уявна вісь.

Вершини спряженої гіперболи знаходяться в точках $(0;b)$ і $(0;-b)$, а фокуси – у точках $(0;c)$ і $(0;-c)$ (рис. 3.15).

Ексцентриситет спряженої гіперболи визначається за формулою

$$\varepsilon=\frac{c}{b}.$$

Порада. Гіперболу легше будувати, якщо спочатку побудувати її асимптоти.

3.2.3. Парабола

Визначення. Параболою називається множина точок площини, рівновіддалених від заданої точки (*фокуса*) і даної прямої, що не проходить через фокус (*директриса*).

Визначення. Відстань від фокуса до директриси називається *параметром* параболи і позначається $p,\ p>0$.

Виберемо систему координат так, як зображено на рис 3.16.

Для отримання рівняння параболи відмічаємо фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ на осі Ox і будуємо директрису $x=-\frac{p}{2}$ перпендикулярно до осі Ox (рис. 3.16).

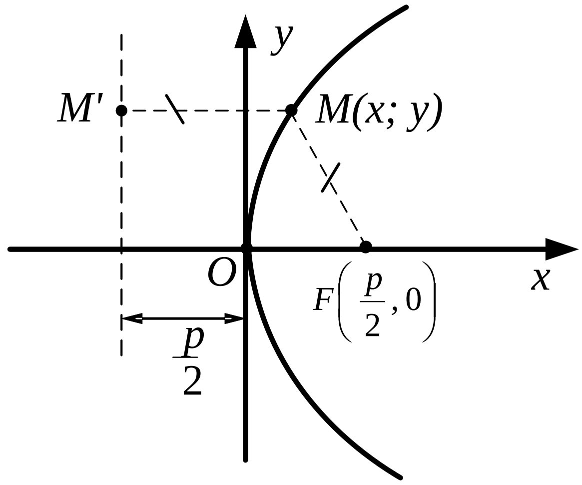


Рис. 3.16. Парабола

Розглянемо довільну точку параболи $M(x;y)$. З визначення параболи маємо

$$\frac{p}{2}+x=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\,.$$

Піднесемо обидві частини до квадрата і зробимо тотожні перетворення:

$$\frac{p^2}{4}+px+x^2=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2,$$

$$y^2=2px,\, p>0. \qquad (3.23)$$

Визначення. Рівняння (3.23) називається *канонічним* рівнянням параболи, де p $(p>0)$– параметр параболи, що чисельно дорівнює відстані від фокуса до директриси.

Визначення. Точка $O(0;0)$ називається *вершиною* параболи, а вісь Ox - віссю симетрії параболи.

! Для параболи $\varepsilon=1$.

Рівняння параболи з центром у точці $C(x_0;y_0)$ має вигляд

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0). \qquad (3.24)$$

На рис. 3.17 подано ще три параболи з центром у точці $O(0;0)$ і осями симетрії, які співпадають з координатними осями.

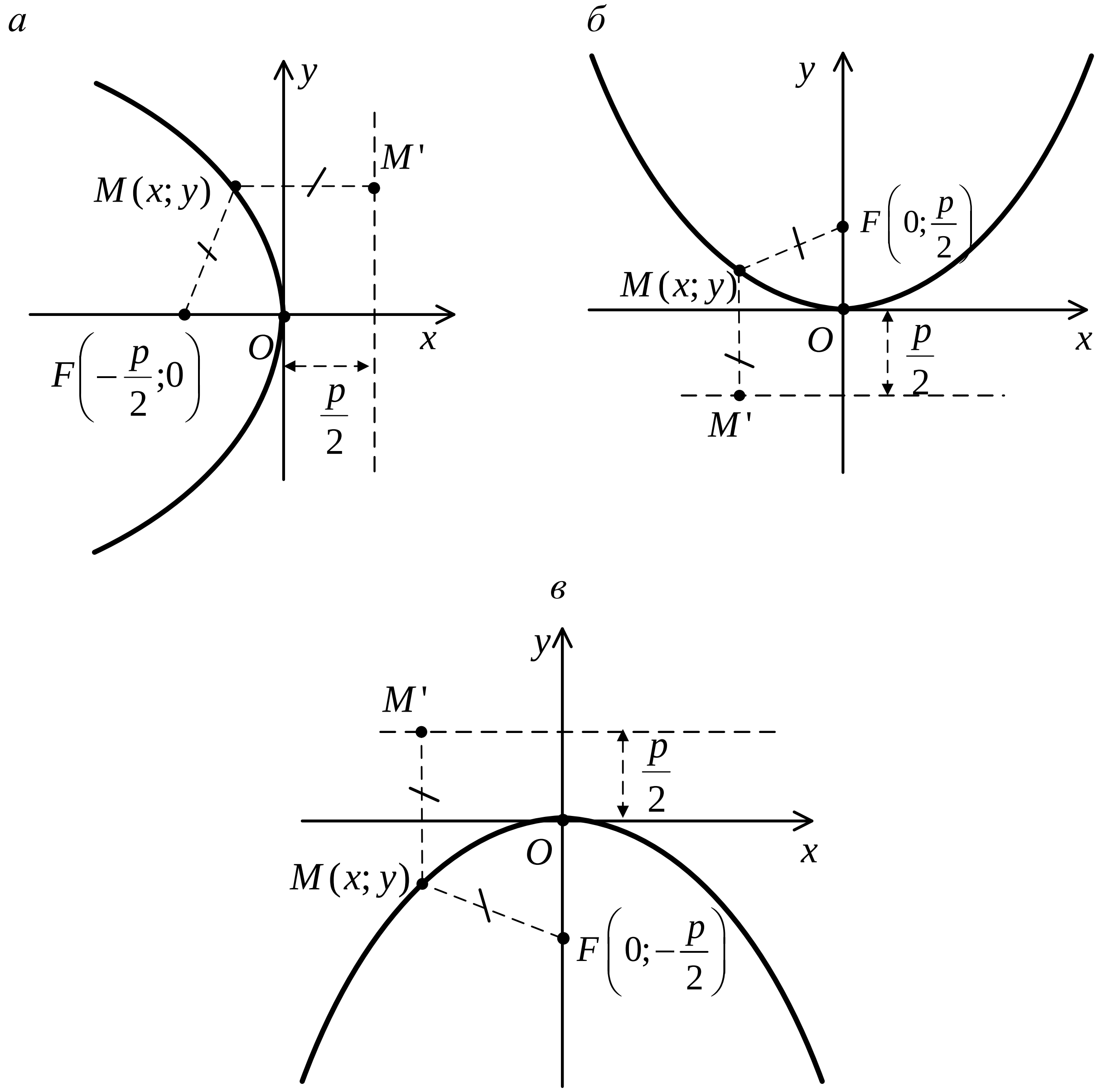


Рис. 3.17. Параболи, що визначаються рівняннями
$y^2 = -2px$ (а), $x^2 = 2py$ (б), $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ (в)

Зауваження. Поняття директриси визначено також для еліпса та гіперболи. Ці криві мають дві директриси.

Для еліпса директриси – це прямі, що перпендикулярні до більшої осі і розташовані поза вершинами еліпса (рис. 3.18). Рівняння директрис мають вигляд:

- $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ $(a > b)$;
- $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ $(b > a)$.

Директриси гіперболи – це прямі, які перпендикулярні до дійсної осі і розташовані між вершинами гіперболи (рис. 3.19). Їхні рівняння:

- $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ (Ox – дійсна вісь);
- $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ (Oy – дійсна вісь).

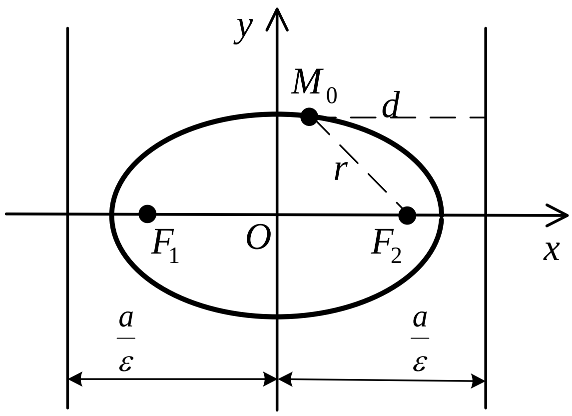


Рис. 3.18. Директриси еліпса

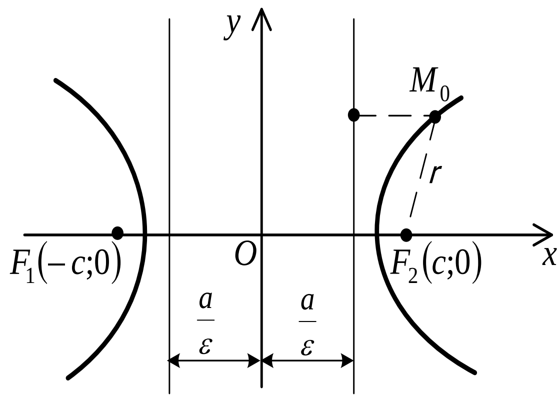


Рис. 3.19. Директриси гіперболи

Директриси еліпса і гіперболи мають таку властивість (рис. 3.18, 3.19):

$$\varepsilon = \frac{r}{d},$$

де r - відстань від довільної точки кривої $M_0(x_0;y_0)$ до фокуса,

d - відстань від тієї самої точки кривої $M_0(x_0;y_0)$ до директриси, що відповідає цьому фокусу.

Приклад 3.3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його більша вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$.

Розв'язання

За умовою, $2a=20 \Rightarrow a=10$. Використовуючи формулу (3.13), знайдемо меншу вісь еліпса:

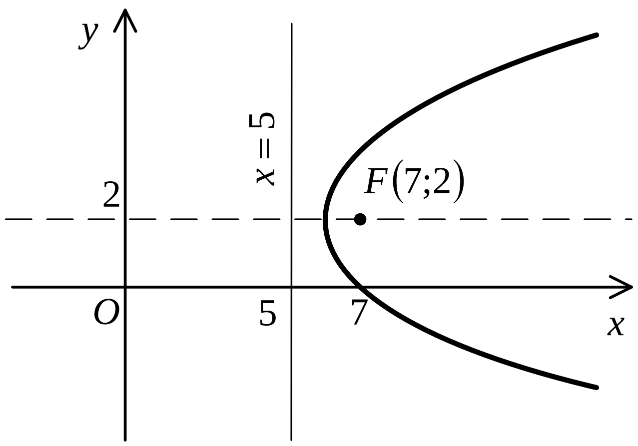
$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{100-b^2}}{10}=\frac{3}{5},\ \sqrt{100-b^2}=6\Rightarrow b=8.$$

Тоді канонічне рівняння еліпса (3.12) має вигляд $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

Приклад 3.4. Скласти рівняння параболи, якщо відомі її фокус $F(7;2)$ і директриса $x-5=0$.

Розв'язання



Параметр параболи (відстань від фокуса до директриси) $p=2$.

Вершина параболи знаходиться в точці (6;2). Тоді, за формулою (3.24), рівняння параболи має вигляд

$$(y-2)^2=2\cdot 2(x-6),$$

$$(y-2)^2=4(x-6).$$

Відповідь: $(y-2)^2=4(x-6)$.

3.3. Площина в просторі

3.3.1. Види рівнянь площини

3.3.1.1. Загальне рівняння площини

Розглянемо у просторі довільну площину P (рис. 3.21).

Нехай задано точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, що належить площині P, і вектор $\bar{N}=(A;B;C)\perp P$. Виберемо точку $M(x;y;z)\in P$.

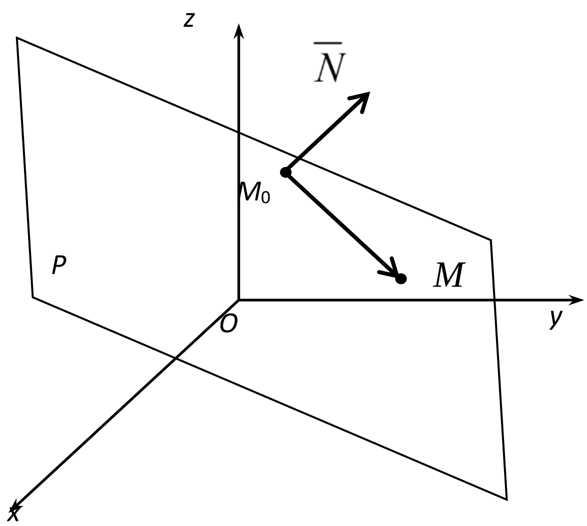


Рис. 3.21. Загальне рівняння

Оскільки вектор $\overline{M_0M_1}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ перпендикулярний до $\overline{N}=(A;B;C)$, то, за формулою (2.14), маємо $\overline{M_0M}\cdot\overline{N}=0$.

Тоді

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{3.25}$$

Визначення. Рівняння (3.25) називається *рівнянням площини, що проходить через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *перпендикулярно до вектора* $\overline{N}=(A;B;C)$.

Після перетворень (аналогічно пп. 3.1.1.1) отримаємо

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3.26}$$

Визначення. Рівняння (3.26) називається *загальним рівнянням площини,* а вектор $\overline{N}=(A;B;C)$ - *вектором нормалі.*

3.3.1.2. Рівняння площини, що проходить через три точки

Площина однозначно визначається трьома точками, що не лежать на одній прямій. Розглянемо три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, що належать площині P. Виберемо точку $M(x;y;z)\in P$ і розглянемо вектори

$$\overline{M_1M}=(x-x_1;\,y-y_1;\,z-z_1),\quad \overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1),$$

$$\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1;\,y_3-y_1;\,z_3-z_1).$$

Оскільки ці вектори компланарні, то, за властивістю мішаного добутку (пп. 2.6.3), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.27)$$

Визначення. Рівняння (3.27) називається рівнянням площини, *що проходить через три точки.*

3.3.1.3. Рівняння площини «у відрізках»

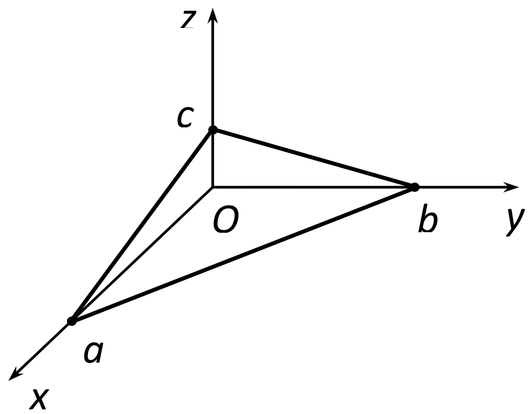


Рис. 3.22. Рівняння площини у відрізках

Нехай площина проходить через точки $M_1(a;0,0)$, $M_2(0;b,0)$, $M_3(0;0;c)$ (рис. 3.22).

Підставляючи їхні координати у формулу (3.27), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0.$$

Звідси

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3.28)$$

Визначення. Рівняння (3.28) називається *рівнянням площини «у відрізках».*

3.3.2. Умови паралельності і перпендикулярності. Кут між площинами

Нехай задано загальні рівняння двох площин

$$P_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Розглянемо нормальні вектори $\overline{N_1}(A_1;B_1;C_1)$ і $\overline{N_2}(A_2;B_2;C_2)$:

- якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, то:
  - ✓ якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$, то площини P_1 і P_2 паралельні;
  - ✓ якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, то площини P_1 і P_2 співпадають;
- якщо $\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, то площини перпендикулярні.

Кут між площинами P_1 і P_2 визначають за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right|\cdot\left|\overline{N_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3.29}$$

Приклад 3.5. Скласти рівняння площини P, що проходить через точку $M(0;-4;1)$ паралельно площині P_1: $x-3y-z+4=0$.

Розв'язання

Оскільки нормальні вектори паралельних площин також паралельні, то вектор $\overline{N_1}=(1;-3;-1)$ площини P_1 є нормальним вектором площини P_2. Тоді, за формулою (3.26), маємо

$$1\cdot(x-0)-3\big(y-(-4)\big)-1\cdot(z-1)=0,\ x-3(y+4)-z+1=0.$$

Відповідь: $x-3y-z-11=0$ - загальне рівняння площини.

3.3.3. Обчислення відстані від точки до площини

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини P: $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.30}$$

3.4. Пряма у просторі

1. *Рівняння прямої, що проходить через дві точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.31)$$

2. Якщо пряма проходить через точку $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$ паралельно вектору $\bar{s}(m;n;p)$, то її рівняння має вигляд

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \qquad (3.32)$$

і називається *канонічним рівнянням прямої,* а $\bar{s}(m;n;p)$ - *напрямним вектором*.

3. *Параметричне рівняння*

$$\begin{cases} x=mt+x_1, \\ y=nt+y_1, \\ z=pt+z_1,\ t\in R. \end{cases} \qquad (3.33)$$

визначає пряму, що проходить через точку $M_1\left(x_0;y_0;z_0\right)$ паралельно вектору $\bar{s}(m;n;p)$.

4. Можна задати пряму l як лінію перетину двох непаралельних площин (рис. 3.23):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (3.34)$$

Визначення. Рівняння (3.34) називається *загальним рівнянням прямої у просторі.*

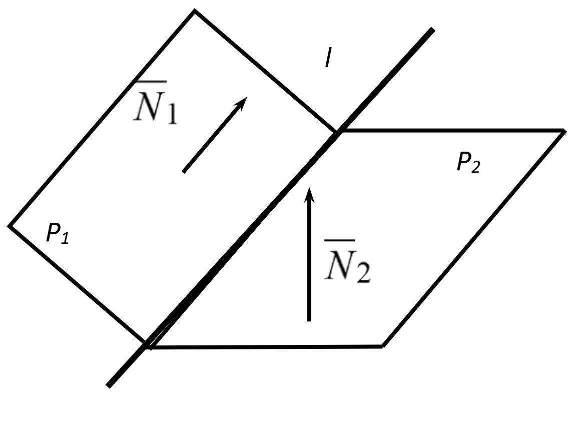


Рис. 3.23. Загальне рівняння прямої у просторі

Приклад 3.6. Записати канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x - y + 5z + 4 = 0, \\ x - 2y - 3z + 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Оскільки нормальні вектори площин $\overline{N_1} = (3; -1; 5)$ і $\overline{N_2} = (1; -2; -3)$ перпендикулярні до прямої, то як її напрямний вектор беремо векторний добуток $\overline{N_1} \times \overline{N_2}$ (2.15):

$$\overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 13\overline{i} + 14\overline{j} - 5\overline{k}.$$

Для знаходження точки, що належить прямій, покладемо в задану систему рівнянь, наприклад, $z = 0$:

$$\begin{cases} 3x - y + 4 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = -1,\ y = 1.$$

Тобто точка $M(-1;1;0)$ належить цій прямій. Підставляючи координати знайденої точки і напрямного вектора до формули (3.32), одержимо канонічне рівняння прямої у просторі

$$\frac{x - (-1)}{13} = \frac{y - 1}{14} = \frac{z - 0}{-5}.$$

Відповідь: $\dfrac{x + 1}{13} = \dfrac{y - 1}{14} = \dfrac{z}{-5}$.

3.5. Взаємне розміщення двох прямих, прямої і площини

3.5.1. Паралельність і перпендикулярність прямих. Кут між прямими

Розглянемо прямі l_1 і l_2, задані канонічними рівняннями з напрямними векторами $\overline{s_1}(m_1; n_1; p_1)$ і $\overline{s_2}(m_2; n_2; p_2)$ відповідно:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Тоді:

- умова паралельності прямих

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} \| \overline{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

- умова перпендикулярності прямих

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} \perp \overline{s_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0;$$

- кут між прямими

$$\cos\varphi = \frac{\overline{s_1} \cdot \overline{s_2}}{\left|\overline{s_1}\right| \left|\overline{s_2}\right|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Для визначення взаємного розташування двох прямих у просторі достатньо розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}; \\ \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}. \end{cases} \tag{3.35}$$

Якщо система (3.35) має єдиний розв'язок, то прямі l_1 і l_2 перетинаються в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Якщо система (3.35) не має розв'язку, то прямі l_1 і l_2 не перетинаються.

Якщо система (3.35) має безліч розв'язків, то прямі l_1 і l_2 співпадають.

3.5.2. Паралельність і перпендикулярність прямої та площини. Кут між прямою та площиною

Нехай пряма і площина задані рівняннями

$$l: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},\ \overline{s}(m; n; p),$$

$$P:\ Ax + By + Cz + D = 0,\ \overline{N}(A; B; C).$$

Тоді:

- умова паралельності прямої і площини

$$l \parallel P \Leftrightarrow \bar{s} \perp \overline{N} \Leftrightarrow \ \bar{s} \cdot \overline{N} = mA + nB + pC = 0;$$

- умова перпендикулярності прямої і площини

$$l \perp P \Leftrightarrow \bar{s} \parallel \overline{N} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.;$$

- кут між прямою і площиною дорівнює гострому куту між прямою та її проєкцією на площину і розраховується за формулою

$$\sin\varphi = \frac{\bar{s} \cdot \overline{N}}{\left|\bar{s}\right|\left|\overline{N}\right|} = \frac{\left| mA + nB + pC \right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад 3.7. З’ясувати розміщення прямої $l: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{0}$ і площини $P: \ \ x + 4y - 3z + 13 = 0$.

Розв’язання

Перейдемо до рівняння прямої в параметричній формі

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{0} = t, t \in R,$$

$$\begin{cases} x = 2t + 1; \\ y = -3t; \\ z = -2. \end{cases}$$

Підставимо отримані x, y, z в рівняння площини $P: \ \ x + 4y - 3z + 13 = 0$:

$$2t + 1 + 4(-3t) - 3(-2) + 13 = 0, \quad 2t + 1 - 12t + 6 + 13 = 0,$$

$$-10t + 20 = 0, \ t = 2.$$

Підставляючи знайдене значення параметра $t = 2$ в параметричне рівняння прямої, отримаємо $x = 5, \ y = -6, \ z = -2$.

Відповідь: пряма перетинає площину в точці $M(5; -6; -2)$.

Питання до розділу

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
2. Загальне рівняння прямої на площині.
3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
4. Як записати рівняння прямої, що паралельна осі Ox (осі Oy).
5. Канонічне рівняння прямої.
6. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
7. Рівняння прямої «у відрізках».
8. Як обчислити кут між двома прямими?
9. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих.
10. Нормальне рівняння прямої.
11. Як знайти відстань від точки до прямої?
12. Визначення еліпса. Вершини, фокуси, осі та ексцентриситет еліпса.
13. Визначення гіперболи. Вершини, фокуси, осі, асимтоти і ексцентриситет гіперболи.
14. Визначення параболи. Вершина, фокус, ексцентриситет і директриса параболи.
15. Різні види рівнянь площини.
16. Взаємне розмішення двох площин. Кут між площинами.
17. Умови паралельності та перпендикулярності площин.
18. Види рівнянь прямої у просторі.
19. Взаємне розміщення прямої і площини.
20. Як знайти кут між прямими у просторі?
21. Як знайти кут між прямою та площиною?

Завдання

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;1)$ і $M_2(5;6)$.

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-2;4)$ паралельно прямій $2x+3y-4=0$.

3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-5)$ і нахилена під кутом $\frac{\pi}{4}$ до осі абсцис.

4. Скласти рівняння прямої, рівновіддаленої від точок $M_1(3;5)$ і $M_2(7;9)$.

5. Загальне рівняння прямої $4x-3y+12=0$ записати у вигляді:

1) рівняння з кутовим коефіцієнтом;

2) рівняння «у відрізках».

Побудувати пряму.

6. Скласти рівняння прямої, що утворює з віссю Ox кут 120° і відсікає на осі Oy відрізок довжиною 6.

7. Задано точки $A(1;-2), B(2;3), C(-5;9)$. Необхідно:

1) скласти рівняння сторін ΔABC;

2) обчислити $\angle A$ трикутника ABC;

3) площу трикутника ABC.

8. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(3;-2)$ перпендикулярно до прямої $2x+7y-5=0$.

9. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;3)$ паралельно прямій $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{5}$.

10. Знайти проєкцію точки $M_0(-5;6)$ на пряму, що проходить через точки $A(2;-4)$ і $B(-6;1)$.

11. Скласти рівняння прямої в параметричному вигляді, що проходить через точку $M_0(1;-2)$ паралельно вектору $\overline{s}=3\overline{i}-2\overline{j}$.

12. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(3;-5)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N}(2;1)$.

13. Задано координати вершин трикутника $A(-4;1), B(0;6), C(3;-5)$. Необхідно:

1) скласти рівняння сторони AB;

2) скласти рівняння висоти, опущеної з точки C на сторону AB;

3) скласти рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB.

14. Пряма задана загальним рівнянням $3x-2y+5=0$. Необхідно:

1) записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;

2) записати рівняння прямої «у відрізках»;

3) записати канонічне рівняння прямої;

4) записати параметричне рівняння прямої.

15. Обчислити кут між прямими $\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{5}$ та $2x-y+9=0$.

16. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;6)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{7}$.

17. Обчислити довжину висоти CH трикутника з вершинами $A(-2;1)$, $B(3;-4)$, $C(6;0)$.

18. Знайти точку A, симетричну точці $B(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

19. Визначити центр і радіус кола, заданого рівнянням $x^2+y^2-4x+6y-23=0$.

20. Обчислити довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2+9y^2=144$.

21. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат, відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{4}{5}$.

22. Обчислити меншу піввісь b еліпса, якщо більша піввісь $a=5$ і параметр $c=4{,}8$.

23. Обчислити фокуси еліпса $50x^2+34y^2=1700$.

24. Обчислити ексцентриситет кривої, заданої рівнянням:

1) $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{21}=1$;

2) $\frac{(x+6)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$;

3) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{45}=1$;

4) $\frac{(x-1)^2}{12}-\frac{(y-10)^2}{15}=1$;

5) $-\frac{(x+9)^2}{21}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$;

6) $(y-8)^2=5(x-2)$;

7) $(x-1)^2=-7(y+9)$;

8) $(x-7)^2+(y-3)^2=12$.

25. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\frac{5}{12}x$, фокуси знаходяться на осі Ox, а відстань між вершинами дорівнює 48.

26. Скласти канонічне рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $8\sqrt{34}$.

27. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо дійсна піввісь дорівнює 3, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

28. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус $F(2;0)$.

29. За рівнянням параболи $y^2=-12x$ необхідно:

1) знайти координати її фокуса;
2) скласти рівняння її директриси.

30. Визначити тип кривої другого порядку $y^2+3x+4y-5=0$. Знайти основні характеристики.

31. Записати загальне рівняння площини $6x+2y-3z+12=0$ у вигляді:

1) рівняння «у відрізках»;
2) нормального рівняння.

32. Звести загальне рівняння прямої $\begin{cases} x+y-2z+3=0, \\ 3x-y+4z-5=0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

33. Знайти координати точки, симетричної точці $M_1(3;-2;1)$ відносно площини $x-2y+3z-6=0$.

34. Задано точку $M(-1;2;5)$ і пряму $L: \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z}{-1}$.

Необхідно:

1) скласти рівняння площини P, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L;
2) знайти проєкцію точки M на пряму L.

35. Побудувати площини та вказати нормалі до них:

1) $3x-2y+z-6=0$;
2) $3x-2y-6=0$;
3) $3x-2y+z=0$;

4) $3x+z-6=0$;

5) $z-6=0$;

6) $2y+z=0$.

36. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(2;-3;1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$, якщо $M_2(-5;2;7)$.

37. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3;2;-4)$ і вісь Ox.

38. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-3;-2)$ і $M_2(4;-5;3)$ паралельно осі Oz.

39. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;-3;4)$ і відсікає на осях Ox та Oy відрізки -4 та 5 відповідно.

40. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-2;3;0)$, $M_2(1;-4;-5)$ і $M_3(1;2;3)$.

41. Обчислити кут між площинами $2x+3y-5z+11=0$ і $3x-4y+z-7=0$.

42. Задано дві площини $P_1: 3x-2y+6z=0$ та $P_2: x+2y-5z+7=0$. З'ясувати, чи будуть площини перпендикулярними.

43. Задано дві площини $P_1: 3x-2y+6z=0$ та $P_2: 6x-4y+12z+7=0$. З'ясувати, чи будуть площини паралельними.

44. Скласти:

1) рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;-3;5)$ паралельно площині $3x-2y+4z-1=0$;

2) рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-3;5)$ перпендикулярно до площини $3x-2y+4z-1=0$.

45. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;3;-5)$ перпендикулярно до площин $2x-y+3z=0$ та $x+y-z-1=0$.

46. Обчислити відстань від точки $M_0(2;0;-1)$ до площини $3x-4y+z-7=0$.

47. Обчислити відстань між паралельними площинами $x+2y-3z+1=0$ і $2x+4y-6z-7=0$.

48. Записати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;1;-1)$ і $M_2(1;-1;2)$ перпендикулярно до площини $x-y+2z-1=0$.

49. Задано рівняння прямої в загальному вигляді $\begin{cases} 5x-y+3z-1=0, \\ x+2y-z+4=0 \end{cases}$. Необхідно:

1) записати рівняння прямої в канонічному вигляді;

2) записати рівняння прямої в параметричному вигляді.

50. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(-2;-3;0)$ і $M_2(4;5;-7)$.

51. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-1;3;-5)$ паралельно прямій $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-3}$.

52. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(0;-2;3)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{5}$ та $\frac{x-2}{4}=y+1=\frac{z-1}{3}$.

53. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3;0;0)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+6}{-1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{-4}$.

54. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(4;0;-2)$ перпендикулярно до площини $3x-2y-4z+1=0$.

55. Знайти гострий кут між прямими:

1) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ та $\frac{x+2}{-3}=\frac{y}{-5}=\frac{z+4}{2}$;

2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ та $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=-4+2t, \\ z=10-t, t\in R. \end{cases}$

56. Обчислити кут між прямими

$$\begin{cases} 2x-y-4z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x-6y-z=0, \\ 2x+3y+5z=0. \end{cases}$$

57. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$ і площини $x+2y-z+4=0$.

58. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{3}$ і точку $M_0(0;-1;2)$.

59. Скласти рівняння площини, що проходить через дві прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{1}$ та $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z}{1}$.

60. Скласти рівняння перпендикуляра, проведеного з точки $M_0(3;1;2)$ до прямої $\frac{x+2}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z}{4}$.

Відповіді

1. $\frac{x+2}{7}=\frac{y-1}{5}$ або $5x-7y+17=0$. **2.** $2x+3y-8=0$.

3. $y=x-7$. **4.** $x+y-12=0$. **5.** 1) $y=\frac{4}{3}x+4$; 2) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$.

6. $y=-\sqrt{3}x\pm 6$.

7. 1) $AB:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{5}$ або $5x-y-7=0$;

$AC:\frac{x-1}{-6}=\frac{y+2}{11}$ або $11x+6y+1=0$;

$BC:\frac{x-2}{-7}=\frac{y-3}{6}$ або $6x+7y-33=0$;

2) $\angle A=arctg\left(\frac{41}{49}\right)\approx 40^\circ$; 3) 20,5 кв. од.

8. $7x-2y-25=0$. **9.** $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{5}$. **10.** $\left(-\frac{670}{89};\frac{174}{89}\right)$.

11. $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=-2-2t, \quad t\in R. \end{cases}$ **12.** $2x+y-1=0$.

13. 1) $5x-4y+24=0$; 2) $4x+5y+13=0$; 3) $5x-4y-35=0$.

14. 1) $y=1{,}5x+2{,}5$; 2) $\frac{x}{-5/3}+\frac{y}{5/2}=1$; 3) $\frac{x}{1/3}=\frac{y-\frac{5}{2}}{1/2}$;

4) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t, \\ y = 2,5 + 0,5t, \quad t \in R. \end{cases}$

15. $\approx 58^\circ$. **16.** $3x + 7y - 45 = 0$. **17.** $3,5\sqrt{2}$. **18.** $A(11;-11)$.

19. $C(2;-3)$, $R = 6$.

20. $2a = 12;\ 2b = 8;\ \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3};\ F_1(-2\sqrt{5};0);\ F_2(2\sqrt{5};0)$.

21. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **22.** $b = 1,4$. **23.** $F_1(0;4)$, $F_2(0;-4)$.

24. 1) $\varepsilon = 0,4$; 2) $\varepsilon = 0,6$; 3) $\varepsilon = 0,25$; 4) $\varepsilon = 1,5$; 5) $\varepsilon = 2,5$; 6) $\varepsilon = 1$;

7) $\varepsilon = 1$; 8) $\varepsilon = 0$.

25. $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$. **26.** $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{400} = 1$. **27.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

28. $y^2 = 8x$. **29.** 1) $F(-3;0)$; 2) $x = 3$.

30. $(y+2)^2 = -3(x-3)$ - парабола; $F\left(\frac{9}{4};-2\right)$ $F\left(\frac{9}{4};-2\right)$- фокус; $\varepsilon = 1$, $x = \frac{15}{4}$ - директриса.

31. 1) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{4} = 1$; 2) $\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z + \frac{12}{7} = 0$.

32. $\frac{x-0,5}{2} = \frac{y+3,5}{-10} = \frac{z}{-4}$. **33.** $\left(\frac{17}{7};-\frac{6}{7};-\frac{5}{7}\right)$.

34. 1) $2x + 5y - z - 3 = 0$; 2) $\left(\frac{31}{15};-\frac{1}{3};-\frac{8}{15}\right)$.

35. 1) $\overline{N}(3;-2;1)$; 2) $\overline{N}(3;-2;0)$; 3) $\overline{N}(3;-2;1)$; 4) $\overline{N}(3;0;1)$; 5) $\overline{N}(0;0;1)$;

6) $\overline{N}(0;2;1)$.

36. $-7x + 5y + 6z + 23 = 0$. **37.** $2y + z = 0$. **38** $x + y + 1 = 0$.

39. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{40/21} = 1$. **40.** $13x + 12y - 9z - 10 = 0$. **41.** $\approx 70^0$.

42. ні. **43.** так.

44. 1) $3x-2y+4z-32=0$; 2) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{4}$.

45. $2x-5y-3z-4=0$. **46.** $\frac{\sqrt{26}}{13}$. **47.** $\frac{9\sqrt{56}}{56}$.

48. $-x+5y+3z=0$.

49. 1) $\frac{x+2/11}{-5}=\frac{y+21/11}{8}=\frac{z}{11}$; 2) $\begin{cases} x=-\frac{2}{11}-5t, \\ y=-\frac{21}{11}+8t, \\ z=11t, \quad t\in R \end{cases}$.

50. $\frac{x+2}{6}=\frac{y+3}{8}=\frac{z}{-7}$. **51.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{-3}$.

52. $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{13}=\frac{z-3}{-7}$. **53.** $x-5y+4z-3=0$.

54. $\frac{x-4}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{-4}$. **55.** 1) $\approx 67^0$; 2) $\approx 67^0$.

56. $\approx 49^0$. **57.** $(2;-2;2)$. **58.** $x-y-z+1=0$.

59. $7x+10y-4z-19=0$.

60. $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$ або $\begin{cases} 2x+3y+z-11=0, \\ x-2y+4z-9=0. \end{cases}$

4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

4.1. Функції. Основні поняття

Визначення. Якщо кожному числу x з деякої множини X за деяким законом f можна поставити у відповідність єдине значення y, то кажуть, що y є *функцією* від x і позначають $y = f(x)$.

Визначення. Змінна y називається *функцією* (*залежною змінною)*, а змінна x – *аргументом* (*незалежною змінною*) .

Визначення. Областю визначення $D(f)$ називається множина X, на якій визначена функція.

Визначення. Областю значень $E(f)$ називається множина всіх значень, яких може набувати залежна змінна y.

Графіки і властивості основних елементарних функцій наведено в дод. 8.

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$.

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а графік непарної функції – відносно початку координат (рис. 4.1).

Якщо ці умови не виконуються, то функція називається функцією загального вигляду (рис. 4.1).

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається *періодичною*, якщо існує таке число T, що справедлива рівність $f(x+T) = f(x)$, при цьому найменше додатне число T називається *періодом функції* (рис. 4.1).

Визначення. Складеною функцією (або *функцією від функції*) називається функція $y = f(u(x))$, де $u = f(x)$ визначена на множині X, $y = f(u)$ визначена на множині A.

Наприклад, $y = \sin\left(x^2\right)$, $y = e^{2x-5}$.

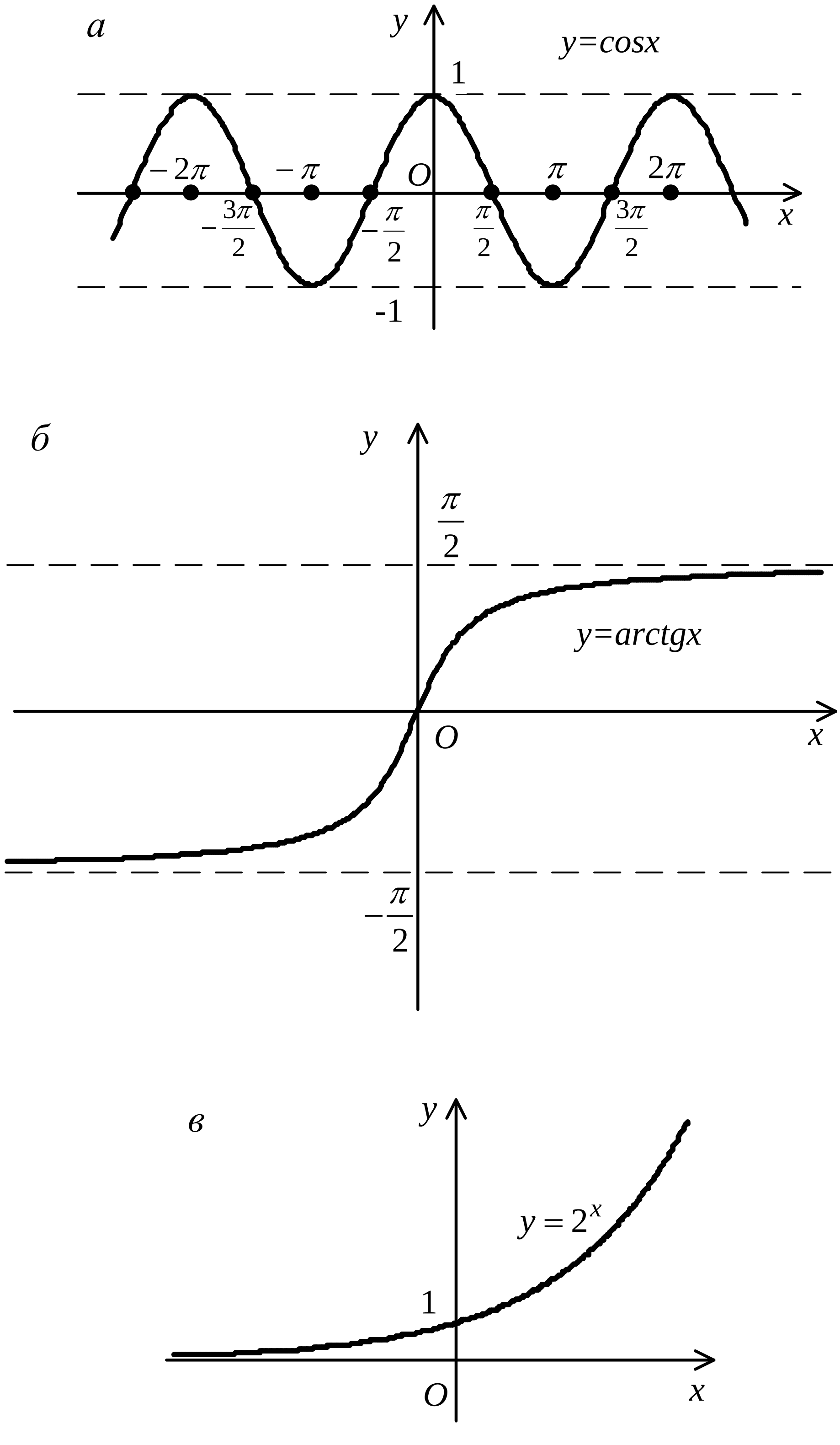


Рис. 4.1. Функція:

а – парна, періодична;

б – непарна;

в – загального вигляду

4.2. Явне, неявне, параметричне задавання функції

Визначення. Функція $y = f(x)$, рівняння якої розв'язано відносно залежної змінної y, називається *явно заданою*.

Визначення. Функція $F(x;y)=0$, рівняння якої не розв'язано відносно залежної змінної y, називається *неявно заданою*.

Наприклад, $y = x^2$ - явно задана функція, а $y - x^2 = 0$ - неявно задана функція.

Визначення. Параметрично заданою функцією називається функція однієї незалежної змінної t, що називається *параметром*:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta .$$

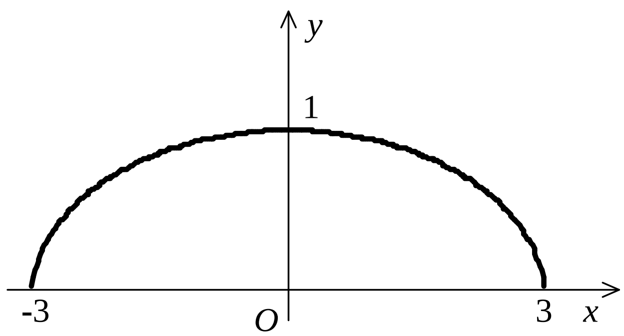


Рис. 4.2. Функція
$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

Наприклад, вираз

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

визначає верхню половину еліпса (рис. 4.2).

4.3. Границя функції

Визначення. Інтервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ називається ε- околом $U_\varepsilon(x_0)$ (рис. 4.3) точки x_0, а число $\varepsilon > 0$ називається радіусом цього околу:

$$U_\varepsilon(x_0) = \{ x \in R : |x - x_0| < \varepsilon \} .$$

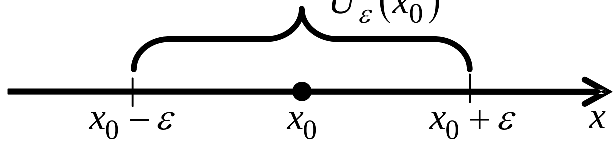


Рис. 4.3. $U_\varepsilon(x_0)$

Визначення. Виколотим ε - околом точки x_0 називається множина $U_\varepsilon^0(x_0)$ (рис. 4.4), отримана з $U_\varepsilon(x_0)$ шляхом виключення точки x_0:

$$U_\varepsilon^0(x_0)=\left\{x\in R: 0<\left|x-x_0\right|<\varepsilon\right\}.$$

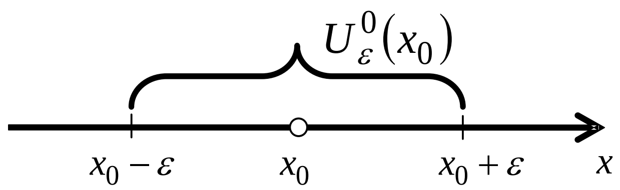


Рис. 4.4. $U_\varepsilon^0(x_0)$

Розглянемо функцію $y=f(x)$, визначену в деякому околі точки x_0, окрім, мабуть, самої точки x_0.

Визначення. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх x, які належать $U_\delta^0(x_0)$, виконується умова $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. Позначається $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ (рис. 4.5).

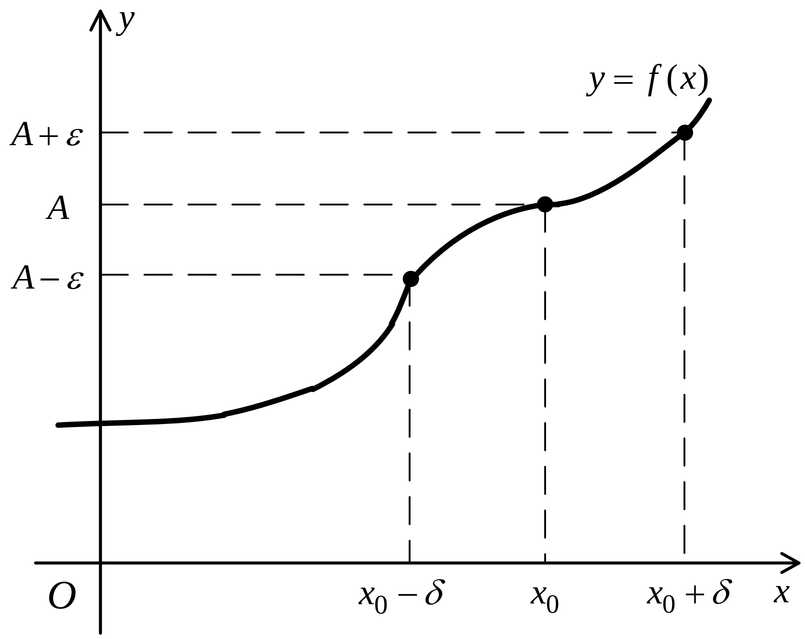


Рис. 4.5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Визначення. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $x > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 4.6).

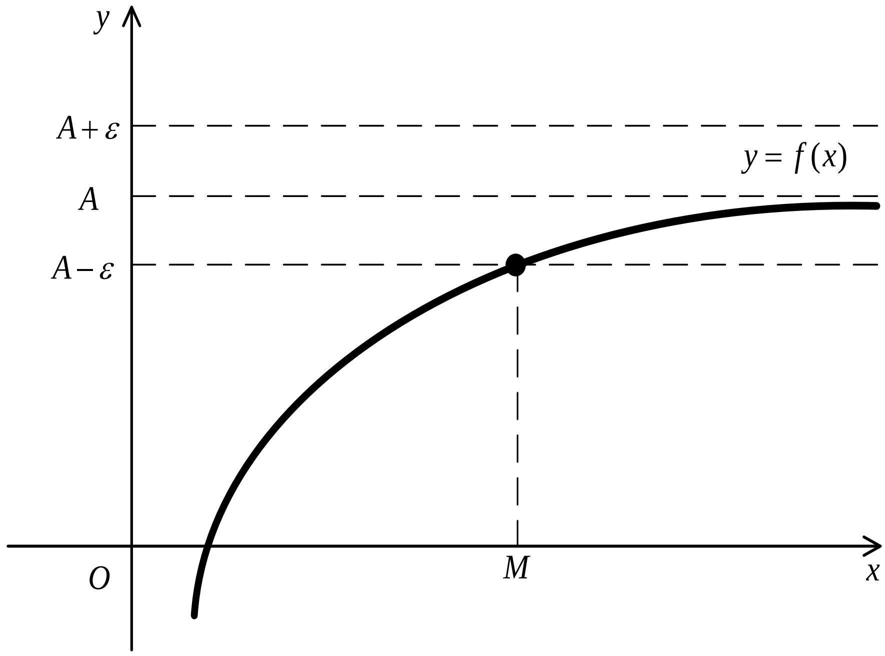


Рис. 4.6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

Визначення. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M = M(\varepsilon) < 0$, що при $x < M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 4.7).

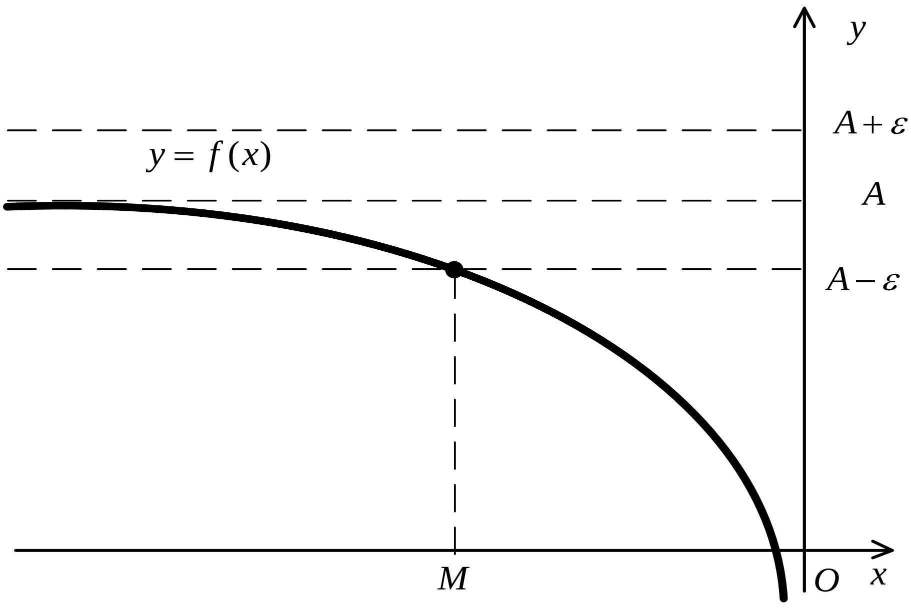


Рис. 4.7. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

Наприклад, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\dfrac{\pi}{2}$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 4.8).

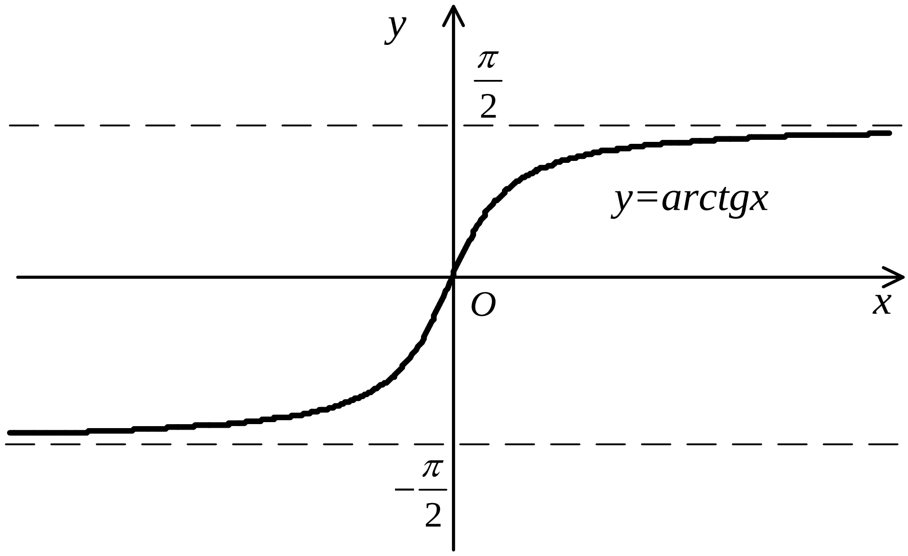


Рис. 4.8. Графік функції $y = arctgx$

Визначення. Функцію $y = f(x)$ називають *нескінченно великою* при $x \to x_0$, якщо для будь-якого $M > 0$ існує число $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x, що $x \in U_\delta^0(x_0)$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ (рис. 4.9).

Позначають $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

У випадку, коли $y = f(x)$ залишається додатною при $x \to x_0$, пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (рис. 4.9), від'ємною - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Визначення. Функцію $y = f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x \to x_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, що $x \in U_\delta^0(x_0)$, виконується $|f(x)| < \varepsilon$.

Позначають $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

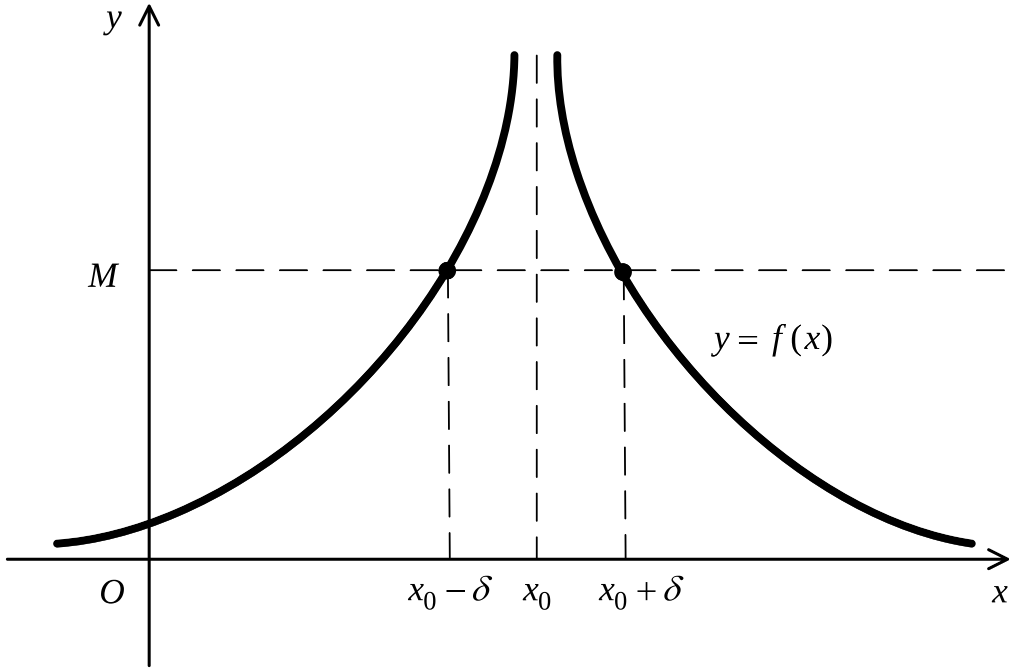


Рис. 4.9. Нескінченно велика функція при $x \to x_0$

4.3.1. Властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин

1. Якщо $\alpha(x)$ - нескінченно мала величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика величина при $x \to x_0$ і навпаки, якщо $\beta(x)$ – нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\beta(x)}$ – нескінченно мала величина при $x \to x_0$.

2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу величину є нескінченно малою величиною.

3. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною.

4. Добуток нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною.

5. Частка двох нескінченно малих величин є невизначеністю вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

6. Сума двох нескінченно великих величин однакового знака є нескінченно великою величиною.

7. Сума двох нескінченно великих величин різних знаків є невизначеністю вигляду $[\infty - \infty]$.

8. Добуток двох нескінченно великих величина є нескінченно великою величиною.

9. Добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику величину є невизначеністю вигляду $[0\cdot\infty]$.

10. Частка двох нескінченно великих величина є невизначеністю вигляду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

4.3.2. Основні теореми про границі

Теорема 4.1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають у точці x_0 скінченні границі, то:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, C - константа, $C\in R$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(C\cdot f(x)\right) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $C\in R$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Зауваження. Твердження теореми 4.1 зберігається і при $x\to\pm\infty$.

4.3.3. Перша важлива границя

Визначення. Першою важливою границею називають границю функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$ (рис. 4.10) при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Зміст першої важливої границі полягає в тому, що синус малого кута практично дорівнює величині цього кута в радіанах.

Наведемо нижче *наслідки першої важливої границі*, що легко можна довести самостійно:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

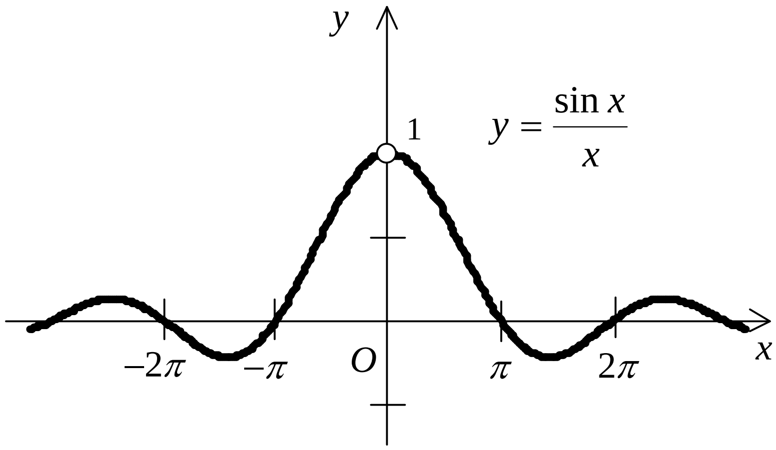


Рис. 4.10. Графік функції $y = \frac{\sin x}{x}$

4.3.4. Друга важлива границя

Визначення. Другою важливою границею називають границю функції $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (рис. 4.11) при $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad e \approx 2{,}718.$$

Можна самостійно довести *наслідки другої важливої границі:*

1. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^k-1}{x}=k$.

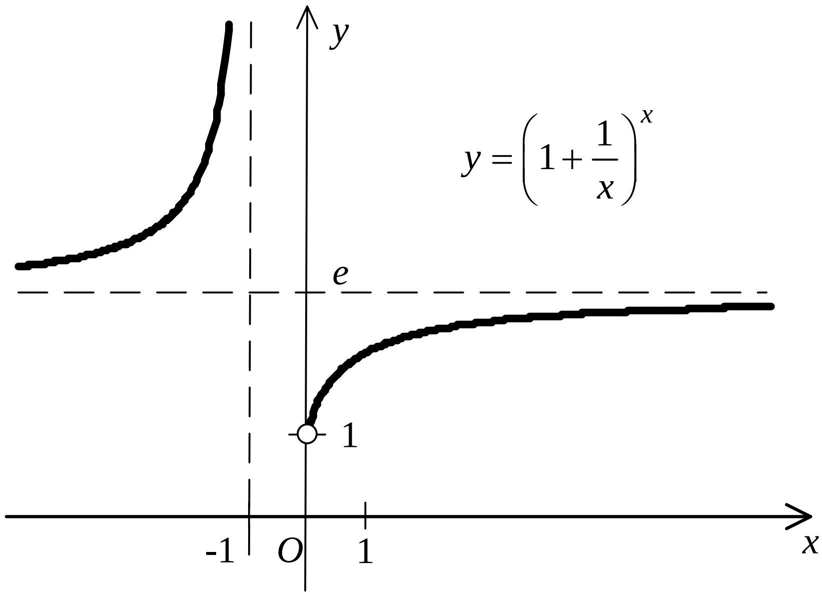


Рис. 4.11. Графік функції $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

4.3.5. Еквівалентні нескінченно малі функції

Визначення. Нескінченно малі функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *еквівалентними* при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Позначають $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

Теорема 4.2. Границя частки двох нескінченно малих функцій дорівнює границі частки функцій, які їм еквівалентні, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)},\ \text{якщо}\ f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} f_1(x),\, g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x).$$

Тобто при знаходженні границі відношення двох нескінченно малих функцій, кожну з них можна замінити еквівалентною, що значно спрощує обчислення границь:

1. $\sin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$.
2. $tg\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$.
3. $\arcsin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$.
4. $arctg\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$.
5. $1-\cos\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$.
6. $e^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$.
7. $a^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)\ln a$.
8. $\ln\big(1+\alpha(x)\big) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$.
9. $\log_a\big(1+\alpha(x)\big) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$.
10. $\big(1+\alpha(x)\big)^m-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} m\cdot\alpha(x)$.
11. $\big(1+\alpha(x)\big)^{\frac{1}{\alpha(x)}} \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} e$.

4.3.6. Розкриття деяких невизначеностей

4.3.6.1. Невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

1. *Функція задана відношенням двох багаточленів*

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0},$$

причому $P_n(x)\to 0, Q_m(x)\to 0, x\to x_0$.

Це означає, що багаточлени містять множник $(x-x_0)$, що називають *критичним* множником.

Для розкриття таких невизначеностей потрібно виділити в чисельнику і знаменнику цей множник, потім скоротити на нього та обчислити отриману границю. Для цього використовують формули скороченого множення, розкладання квадратного тричлена на множники або ділять чисельник і знаменник на критичний множник у стовпчик.

Приклад 4.1. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2x^2-7x-15}.$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2x^2-7x-15}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{2(x-5)(x+1{,}5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{2x+3}=\frac{10}{13}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-7x-15}=\dfrac{10}{13}$.

2. *Функція задана ірраціональними виразами*.

Для розкриття такої невизначеності потрібно позбутися ірраціональності, помноживши чисельник і знаменник на спряжений множник з формул скороченого множення.

Приклад 4.2. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{11-x}-3}{x^2-2x}.$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{11-x}-3}{x^2-2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{11-x}-3\right)\left(\sqrt{11-x}+3\right)}{x(x-2)\left(\sqrt{11-x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{11-x-9}{x(x-2)\left(\sqrt{11-x}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x(x-2)\left(\sqrt{11-x}+3\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{1}{x\left(\sqrt{11-x}+3\right)}=-\frac{1}{12}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{11-x}-3}{x^2-2x}=-\dfrac{1}{12}$.

3. *Функція задана тригонометричними виразами*.

Найчастіше розкривають за допомогою першої важливої границі та її наслідків (пп. 4.3.3). Також часто використовують такі формули тригонометрії:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Приклад 4.3. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 10x}{tg3x}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 10x}{tg3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 6x\cdot\cos(-4x)}{tg3x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin 6x \underset{x\to 0}{\sim} 6x,\\ tg3x \underset{x\to 0}{\sim} 3x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 6x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos(-4x)=\lim_{x\to 0}\frac{12x}{3x}=4.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 10x}{tg3x}=4$.

4.3.6.2. Невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

1. *Функція задана відношенням двох багаточленів*

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0},$$

причому $P_n(x)\to\infty,\ Q_m(x)\to\infty,\ x\to\infty$.

Якщо винести в чисельнику і знаменнику старший степінь за дужки, то можна записати таке правило:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m},\ n=m;\\ 0,\ n<m;\\ \infty,\ n>m.\end{cases}$$

Тобто для розкриття такої невизначеності можна залишити в чисельнику і знаменнику лише старші степені.

Приклад 4.4. Обчислити границю функції:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x+7}{3x^4+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+(5x-8)^2}{8x^2-\sqrt{9x^4-10x}}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x+7}{3x^4+3x^2-1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{array}{l}2x^3-4x+7\underset{x\to\infty}{\sim}2x^3,\\ 3x^4+3x^2-1\underset{x\to\infty}{\sim}3x^4\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{3x^4}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{3x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0;$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+(5x-8)^2}{8x^2-\sqrt{9x^4-10x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$=\left|\begin{array}{l}x^2+(5x-8)^2\underset{x\to\infty}{\sim}x^2+(5x)^2=26x^2,\\ 8x^2-\sqrt{9x^4-10x}\underset{x\to\infty}{\sim}8x^2-\sqrt{9x^4}=5x^2\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{26x^2}{5x^2}=\dfrac{26}{5}.$

Відповідь: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x+7}{3x^4+3x^2-1}=0$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+(5x-8)^2}{8x^2-\sqrt{9x^4-10x}}=\dfrac{26}{5}$.

2. Іноді невизначеність вигляду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ можна звести до невизначеності вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ шляхом заміни еквівалентними нескінченно малими величинами (пп. 4.3.5).

Приклад 4.5. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{ctg\left(5x-\frac{5\pi}{4}\right)}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{ctg\left(5x-\frac{5\pi}{4}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|ctgx=\frac{1}{tgx}\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\left(5x-\frac{5\pi}{4}\right)}{tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left|\begin{array}{l}tg\left(5x-\frac{5\pi}{4}\right)\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim}5x-\frac{5\pi}{4},\\ tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim}x-\frac{\pi}{4}\end{array}\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{5x-\frac{5\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{5\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=5.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{ctg\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{ctg\left(5x-\dfrac{5\pi}{4}\right)}=5$.

4.3.6.3. Невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$

Шляхом алгебраїчних перетворень зводять до невизначеності вигляду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ або $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Приклад 4.6. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{6}{x}\right)\right).$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{6}{x}\right)\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{6}{x}\right)}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Заміна}\\ y=\dfrac{1}{x},\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+6y)}{y}=\left|\ln(1+6y)\underset{y\to 0}{\sim}6y\right|=\lim_{y\to 0}\frac{6y}{y}=6.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\dfrac{6}{x}\right)\right)=6$.

4.3.6.4. Невизначеність вигляду $[\infty-\infty]$

1. У разі, коли під знаком границі розташовані ірраціональні вирази, необхідно домножити і розділити на спряжене за формулами скороченого множення.

Приклад 4.7. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2-5x}-4x\right).$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2-5x}-4x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{16x^2-5x}-4x\right)\left(\sqrt{16x^2-5x}+4x\right)}{\sqrt{16x^2-5x}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2-5x-16x^2}{\sqrt{16x^2-5x}+4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\sqrt{16x^2-5x}+4x\underset{x\to\infty}{\sim}\sqrt{16x^2}+4x=8x\right|=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{16x^2 - 5x - 16x^2}{\sqrt{16x^2 - 5x} + 4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{8x} = -\frac{5}{8}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2 - 5x} - 4x\right) = -\frac{5}{8}$.

2. Якщо під знаком границі стоїть різниця дробів, то необхідно привести їх до спільного знаменника.

Приклад 4.8. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7} - \frac{14}{x^2 - 49}\right).$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7} - \frac{14}{x^2 - 49}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7} - \frac{14}{(x-7)(x+7)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 7}\frac{x+7-14}{(x-7)(x+7)} = \lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(x+7)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 7}\frac{1}{x+7} = \frac{1}{14}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7} - \frac{14}{x^2 - 49}\right) = \frac{1}{14}$.

4.3.6.5. Невизначеність вигляду $\left[1^\infty\right]$

Границі вигляду

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)},$$

де $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, розкривають за допомогою другої важливої границі (пп. 4.3.4):

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(\left(1 + \left[f(x) - 1\right]\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\left(f(x)-1\right)g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-1\right)g(x)}.$$

Зауваження. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{g(x)}$ розкривають так само.

Приклад 4.9. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{2x-1}.$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left[\frac{5x+1}{5x+3}-1\right]\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{5x+3}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{5x+3}\right)^{\left(\frac{5x+3}{-2}\right)}\right]^{\left(\frac{-2}{5x+3}\right)(2x-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2(2x-1)}{5x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(2x-1)}{5x+3}}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{5x}}=e^{-0,8}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x+3}\right)^{2x-1}=e^{-0,8}$.

4.3.7. Однобічні границі

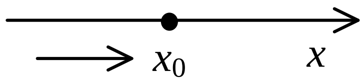


Рис. 4.12. $x\to x_0-0$

Якщо $x\to x_0$, набуваючи значень менших від x_0 (рис. 4.12), то кажуть, що $x\to x_0$ зліва і позначають $x\to x_0-0$.

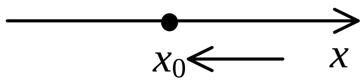


Рис. 4.13. $x\to x_0+0$

Якщо набувають значень більших від x_0 (рис. 4.13), то кажуть, що $x\to x_0$ справа і позначають $x\to x_0+0$.

Визначення. Число A називають *лівою границею* функції $y=f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умову $x_0-\delta<x<x_0$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Позначають $A=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$.

Визначення. Число B називають *правою границею* функції в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умову $x_0 < x < x_0 + \delta$, виконується нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Позначають $B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Визначення. Ліву і праву границю функції називають *однобічними границями*.

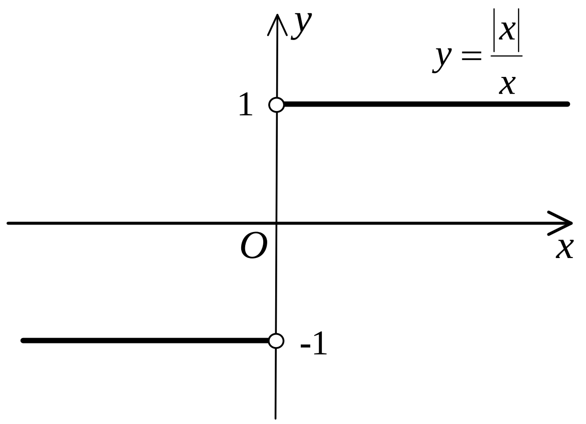


Рис. 4.14. Графік функції $y = \frac{|x|}{x}$

Наприклад, для функції $y = \frac{|x|}{x}$ (рис. 4.14) однобічні границі

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{|x|}{x} = -1,$$

$$B = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{|x|}{x} = 1.$$

У точці $x_0 = 0$ границя цієї функції не існує.

4.4. Неперервні функції

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0, якщо вона визначена в деякому її околі і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Визначення. Функція, яка неперервна в кожній точці деякого інтервалу, називається *неперервною на цьому інтервалі.*

Рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ можна деталізувати: однобічні границі функції в точці x_0 мають бути однаковими і дорівнювати значенню функції в цій точці. Тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Визначення. Якщо порушена одна з умов неперервності функції в точці x_0, то ця точка називається *точкою розриву,* а функція називається *розривною* в цій точці.

Розрізняють точки розриву першого і другого роду.

Визначення. Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду* для функції $y = f(x)$:

1. Якщо існують скінченні однобічні границі $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, причому $A = B$, а в точці x_0 функція не визначена. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою усувного розриву*.

2. Якщо існують скінченні однобічні границі $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, причому $A \neq B$. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою розриву першого роду*, а величину $|A - B|$ - *стрибком* функції.

Визначення. Точку x_0 називають *точкою розриву другого роду*, якщо хоча б одна з однобічних границь $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ дорівнює нескінченності або не існує.

Приклад 4.10. Дослідити на неперервність функції:

1) $y = \dfrac{\sin(x+1)}{x^2 - 1}$;

2) $y = \dfrac{2}{\pi} arctg \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання

1. Функція $y = \dfrac{\sin(x+1)}{x^2 - 1}$ має розрив у точках $x_1 = 1$ і $x_2 = -1$ (рис. 4.15), оскільки не визначена в цих точках. Дослідимо кожну точку окремо:

- $x_1 = 1$. Однобічні границі в цій точці:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\sin(x+1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{\sin(x+1)}{(x-1)(x+1)} \lim_{x \to 1-0} \frac{\sin 2}{2(x-1)} =$$

$$= \frac{\sin 2}{2} \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = \left\| \frac{1}{1-0-1} = \frac{1}{-0} \right\| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{\sin(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\sin(x+1)}{(x-1)(x+1)}\lim_{x\to 1+0}\frac{\sin 2}{2(x-1)}=$$

$$=\frac{\sin 2}{2}\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\left\|\frac{1}{1+0-1}=\frac{1}{+0}\right\|=+\infty .$$

Отже, точка $x=1$ є точкою розриву другого роду (однобічні границі нескінчені);

- $x_2=-1$:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{\sin(x+1)}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1-0}\frac{\sin(x+1)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1-0}\frac{\sin(x+1)}{(x+1)}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{\sin(x+1)}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1+0}\frac{\sin(x+1)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1+0}\frac{\sin(x+1)}{(x+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, точка $x=-1$ є точкою усувного розриву (однобічні границі однакові).

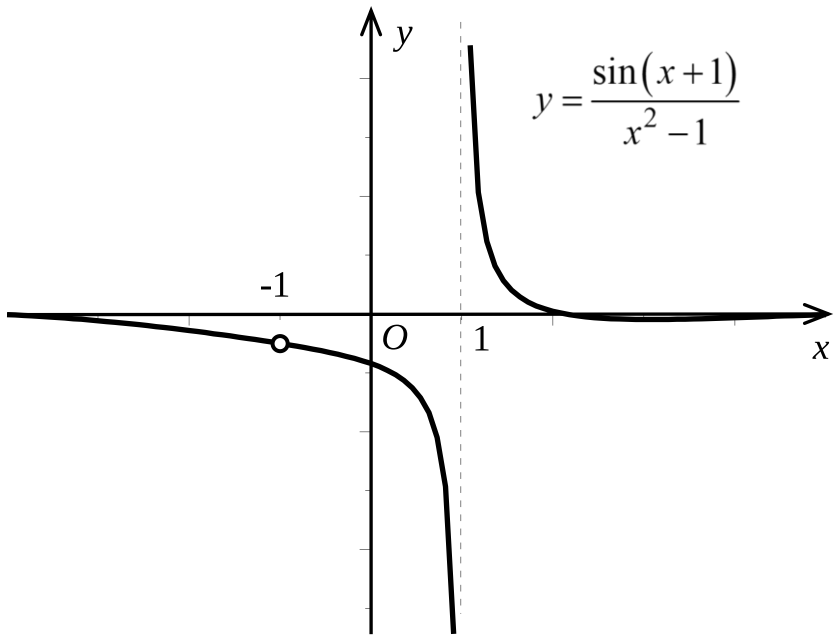


Рис. 4.15. Графік функції $y=\frac{\sin(x+1)}{x^2-1}$

2. Для функції $y=\frac{2}{\pi}arctg\frac{1}{x}$ дослідимо точку $x=0$, у якій функція не визначена (рис. 4.16).

$$\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{2}{\pi}arctg\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0-0}arctg\frac{1}{x}=\left\|arctg\frac{1}{0-0}=arctg(-\infty)\right\|=-1,$$

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{2}{\pi}arctg\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0+0}arctg\frac{1}{x}=\left\|arctg\frac{1}{0+0}=arctg\left(+\infty\right)\right\|=1.$$

Однобічні границі скінченні, але не однакові. Тому в точці $x=0$ функція має розрив першого роду, причому величина стрибка дорівнює двом.

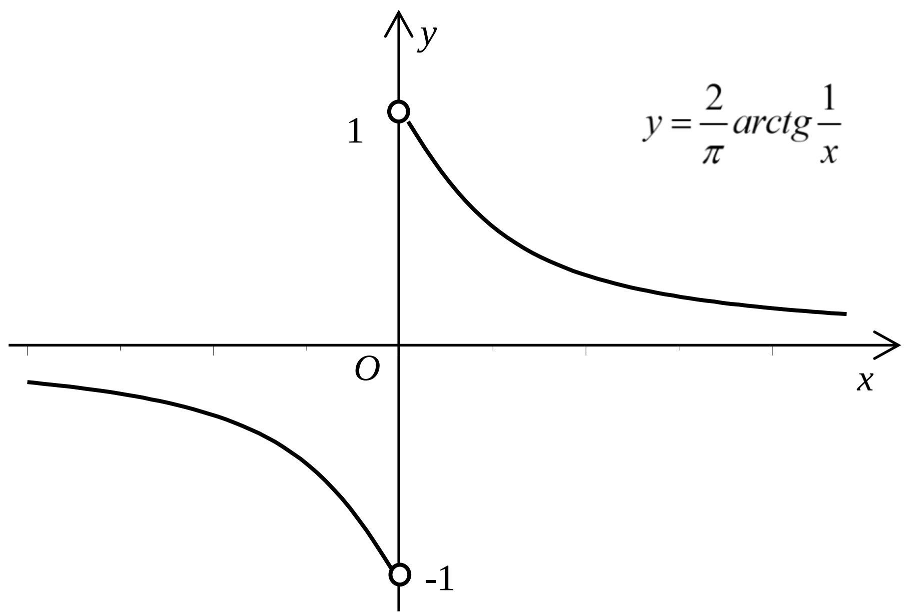


Рис. 4.16. Графік функції $y=\frac{2}{\pi}arctg\frac{1}{x}$

Відповідь:

1) $x=1$ - точка розриву другого роду, $x_2=-1$ - точка усувного розриву;

2) $x=0$ - точка розриву першого роду, величина стрибка дорівнює двом.

Питання до розділу

1. Дайте визначення функції, аргументу функції, області визначення і області значень функції.
2. Основні елементарні функції.
3. Яка функція називається парною, непарною, загального вигляду?

4. Яка функція називається періодичною? Що називається періодом функції?

5. Які види задавання функції ви знаєте?

6. Дайте визначення границі функції $y = f(x)$ у точці x_0.

7. Дайте визначення границі функції $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$.

8. Що таке нескінченно великі і нескінченно малі функції? Наведіть приклади.

9. Властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин.

10. Основні теореми про границі.

11. Перша і друга важливі границі.

12. Дайте визначення еквівалентних нескінченно малих функцій.

13. Дайте визначення лівої (правої) границі $y = f(x)$ у точці x_0.

14. Наведіть приклад функції, що має в точці різні однобічні границі.

15. Дайте визначення неперервної функції в точці, на інтервалі.

16. Які існують типи точок розриву?

Завдання

1. Знайти область визначення і область значень функцій:

а) $y = \sqrt{\cos x}$;

б) $y = \dfrac{5x+4}{\sqrt{3x+6}}$;

в) $y = 5x + \dfrac{40}{\sqrt{3x+6}}$;

г) $y = 2 + \left|\sin(5x-1)\right|$.

2. Знайти область визначення функцій:

а) $y = 10^{\arcsin|x+2|}$;

б) $y = \sqrt{\log_4\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right) + \dfrac{1}{2}}$.

3. Знайти суму цілих значень, що належать області визначення функції $y=\arccos\frac{x}{5}+\frac{4}{x^2-1}$.

4. Знайти функціональну залежність площі рівнобічної трапеції від кута α при основі, якщо основи трапеції дорівнюють a та $b(a<b)$.

У завданнях **5-56** обчислити границі функцій.

5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-5x-3}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-8}$. **7.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{5x^2-4x-12}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-6x+8}{5x^2-4x-12}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x(x+4)}$. **10.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\frac{64x^3-1}{4x^2-5x+1}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^3-1}$. **12.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^6-1}{x^3-1}$. **13.** $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2-16}{16+4x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{5+2x}-3}$. **16.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-2}{\sqrt{5+2x}-3}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+3}-3}{\sqrt{x+2}-2}$. **18.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2-x}}$. **19.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{14-x}}{x^2-4x-5}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$. **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5-x}}$. **22.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5-x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1+4x^2-9x^3}{2x^2-3x^3+4}$. **24.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4-2x^2+3x}{3x^4+3x^3+1}$. **25.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^5+3x^4+1}{x^4-x^3+2x}$.

26. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4-2x+3}{4x^2-5x+1}$. **27.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt[4]{x^4-2x+3}-\sqrt[4]{x^2+2x}}{4x^2-5x+1}$.

28. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x-2}{\sqrt{5+2x^2}-3}$. **29.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{4x^4}{4x^3-5x+1}-x\right)$. **30.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right)$.

31. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{a^2x+1}-b\sqrt{x}\right),(a,b>0)$. **32.** $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x}\right)$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}\right)$. **34.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{x^2}\right)$. **35.** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}-\frac{1}{x^3-27}\right)$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{(3x)^2}$. **37.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}5x}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}$. **36.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg}2x}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$. **39.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(arctg(3x)\cdot ctg\left(\dfrac{x}{3}\right)\right)$. **40.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\arcsin 2x^2}$.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 4x-\cos 10x}{x^2}\right)$. **42.** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 3x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$. **43.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x-\sin 10x}{x^2}\right)$.

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{12}{6x+1}\right)^{3-4x}$. **45.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}+1}\right)^{\frac{5}{\sqrt{x}}}$. **46.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x}{2x^2-1}\right)^{2x-3}$.

47. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{3+\frac{2}{x}}$. **48.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+3}{x+3}\right)^{1-\frac{2}{x}}$. **49.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{4}{x^2}}$.

50. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{6^{x-3}-36}{x^2+x-30}$. **51.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\log_5(2x+3)}{arctg(x+1)}$. **52.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^{x-4}-1}{\arcsin(x-4)}$.

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x(\lg(10+x)-\lg x)\right]$. **54.** $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x-2}\cdot\ln\sqrt[4]{\dfrac{3x-1}{2x+1}}\right]$.

55. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\log_5(x+2)-1}{arctgx}$. **56.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{tg(x-3)}$.

У завданнях **57-59** знайти однобічні границі:

57. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\left[15^{\frac{1}{3x-6}}\right]$. **58.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctg(2x)$. **59.** $\lim\limits_{x\to 8\pm 0}\dfrac{2x-16}{|x-8|}$.

У завданнях **60-64** на неперервність схематично зобразити поведінку цих функції в околі точок розриву:

60. $f(x)=\begin{cases}4x, & x<-3,\\ 5x+3, & -3\le x\le 0,\\ x^2+2x+7, & x>0;\end{cases}$. **61.** $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2-1}$.

62. $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+6x+10}$. **63.** $f(x)=\dfrac{ctg(5x)}{x-3}$.

64. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$.

Відповіді

1. а) $D(f): x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z$, $E(f):\ y\in[0;1]$;

б) $D(f): x\in(-2;+\infty)$, $E(f):\ y\in R$;

в) $D(f): x\in(-2;+\infty)$, $E(f):\ y\in[\min y;+\infty), \min y\approx 16,21$;

г) $D(f): x\in R$, $E(f):\ y\in[2;3]$.

2. а) $D(f): x\in[-3;-1]$; б) $D(f): x\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right]\cup(1;+\infty)$.

3. 0.

4. $S(\alpha)=\frac{\left(b^2-a^2\right)}{4}tg\alpha$.

5. $\frac{1}{7}$. **6.** $\frac{1}{6}$. **7.** $-\frac{1}{8}$. **8.** $-\frac{2}{3}$. **9.** $-\frac{3}{4}$. **10.** -4. **11.** 2. **12**. 0. **13.** -2.

14. 1. **15.** 3. **16.** 2. **17.** 2. **18.** $\frac{2}{3}$. **19**. $\frac{1}{18}$. **20.** $\frac{4}{3}$. **21.** $\frac{3\sqrt[6]{5}}{2}$. **22.** $\sqrt[6]{10}$.

23. 3. **24.** $\frac{1}{3}$. **25.** ∞. **26.** ∞. **27.** 0. **28.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **29**. 0. **30.** 2.

31. $\begin{cases} 0, a=b; \\ +\infty, a>b; \\ -\infty, a<b. \end{cases}$. **32.** $-\infty$. **33.** ∞. **34**. $-\infty$.

35. Двобічної границі не існує:

$$\lim_{x\to 3-0}\left(\frac{x}{x-3}-\frac{1}{x^3-27}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to 3+0}\left(\frac{x}{x-3}-\frac{1}{x^3-27}\right)=+\infty.$$

36. $\frac{2}{9}$. **37.** 15. **38.** 1,5. **39.** 4,5. **40.** 9. **41.** 16. **42.** 42. **43.** 0.

44. Двобічної границі не існує:

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\sin 4x-\sin 10x}{x^2}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to 0-0}\left(\frac{\sin 4x-\sin 10x}{x^2}\right)=+\infty;$$

45. e^8. **46.** $\frac{1}{e^{5\left(\sqrt{3}+1\right)}}$. **47.** e. **48.** e^4. **49.** $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$. **50.** $\frac{1}{e^2}$. **51.** $\frac{36\ln 6}{11}$.

52. $\frac{2}{\ln 5}$. **53.** 1. **54.** $10\lg e$. **55.** $\frac{1}{20}$. **56.** $\frac{4}{\pi}$. **57.** 2.

58. $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 2+0}\left[15^{\frac{1}{3x-6}}\right]=+\infty, \\ \lim\limits_{x\to 2-0}\left[15^{\frac{1}{3x-6}}\right]=0; \end{matrix}$. **59.** $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to +\infty} arctg\left(2x\right)=\frac{\pi}{2}, \\ \lim\limits_{x\to -\infty} arctg\left(2x\right)=-\frac{\pi}{2} \end{matrix}$. **60.** $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 8+0}\frac{2x-16}{|x-8|}=2, \\ \lim\limits_{x\to 8-0}\frac{2x-16}{|x-8|}=-2. \end{matrix}$

61. $x=0$ - точка розриву першого роду (стрибок).

62. $x=\pm 1$- точки розриву другого роду.

63. Функція неперервна.

64. $x=3$ і $x=\frac{\pi n}{5}, n\in Z$ - точки розриву другого роду.

65. $x=2$ - точка усувного розриву; $x=-5$ - точка розриву другого роду.

5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Визначення. Приростом Δx (рис. 5.1) аргументу в точці x_0 називається вираз

$$\Delta x = x - x_0 .$$

Визначення. Приростом Δy (рис. 5.1) функції $y = f(x)$ у точці x_0, називається вираз

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

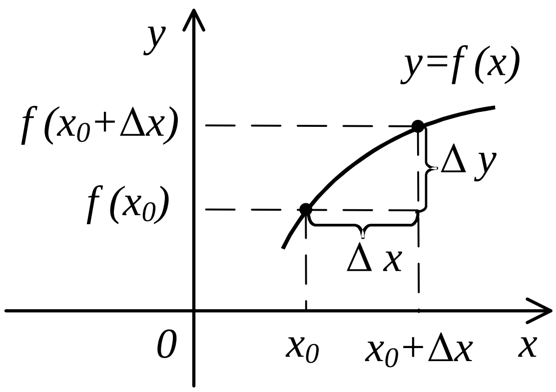


Рис. 5.1. Приріст функції і аргументу

Визначення. *Похідною* функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу Δx прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{або} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

Похідна позначається одним з символів: $y', \dfrac{dy}{dx}, \; f'(x)$.

Визначення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x, то вона називається *диференційованою в цій точці*.

Визначення. Операція знаходження похідної функції називається *диференціюванням функції*.

Визначення. Функція називається *диференційованою* на інтервалі $(a;b)$, якщо вона має похідну в довільній точці *цього* інтервалу.

! Функція, диференційована в точці x_0, є неперервною в цій точці, але ні будь-яка неперервна функція може мати похідну.

5.1. Геометричний зміст похідної

Геометричний зміст похідної: значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і дорівнює *кутовому коефіцієнту* цієї дотичної (рис. 5.2):

$$k = tg\alpha = f'(x_0) \quad . \tag{5.2}$$

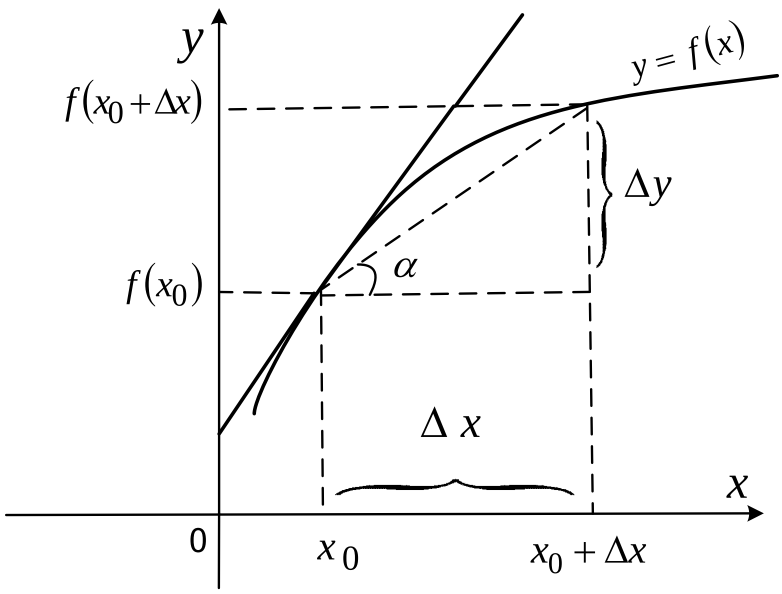


Рис. 5.2. Геометричний зміст похідної

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ (рис. 5.3), має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.3}$$

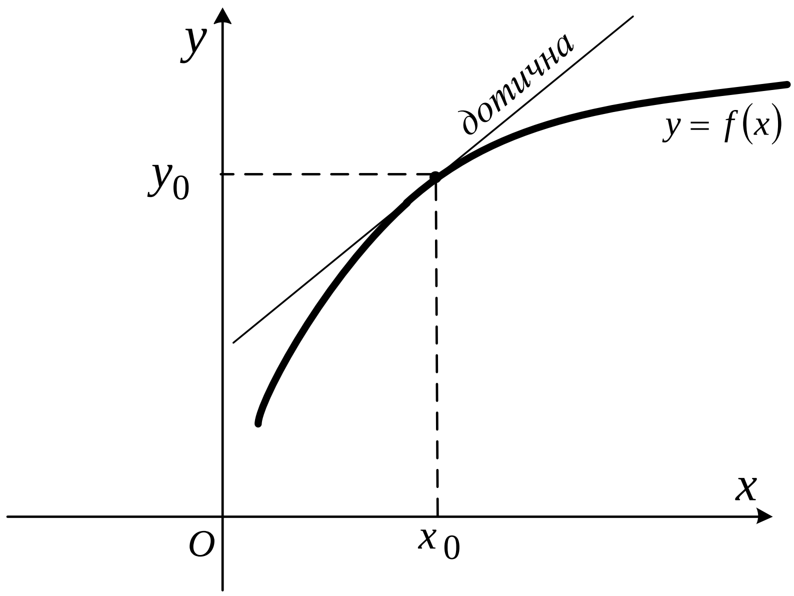


Рис. 5.3. Дотична до кривої $y = f(x)$

Визначення. Нормаллю до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ називається пряма, що проходить через $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до дотичної (рис. 5.4).

Рівняння нормалі має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{5.4}$$

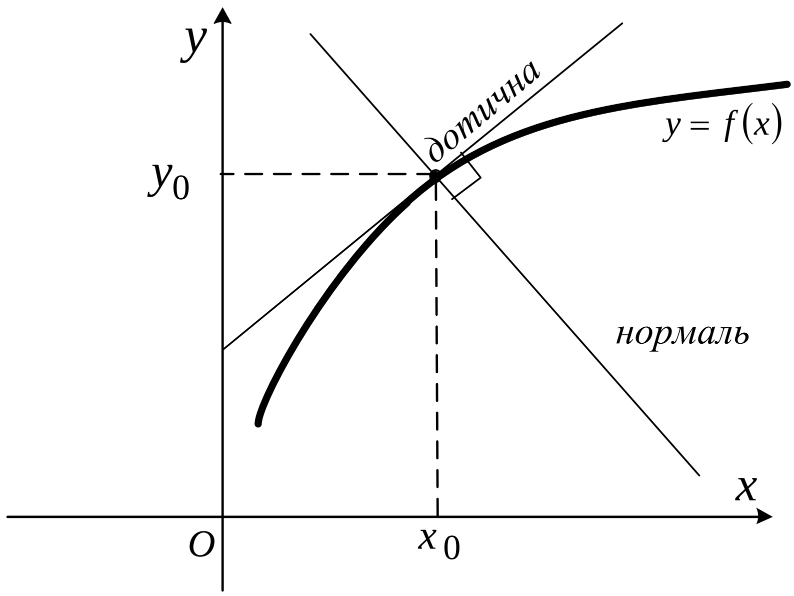


Рис. 5.4. Нормаль до кривої $y = f(x)$

5.2. Диференціювання функцій

5.2.1. Правила диференціювання

Нехай $u=u(x), v=v(x)$ - диференційовані функції, C - стала величина, $C\in R$. Тоді

1. $(C)'=0$. (5.5)

2. $(Cf(x))'=Cf'(x)$. (5.6)

3. $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$. (5.7)

4. $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. (5.8)

5. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},\ \ v(x)\neq 0$. (5.9)

5.2.2. Похідні основних елементарних функцій

У табл. 5.1 наведено формули диференціювання основних елементарних функцій.

Таблиця 5.1

Похідні елементарних функцій

1	$\left(x^p\right)'=px^{p-1}$	8	$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
2	$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$, $a>0$, $a\neq 1$	9	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
3	$\left(e^x\right)'=e^x$	10	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$	11	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	12	$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
6	$(\sin x)'=\cos x$	13	$(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
7	$(\cos x)'=-\sin x$		

Приклад 5.1. Знайти похідну функцій:

1) $y = 2^x - x^2 + e^x + 5$;

2) $y = 3\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}$;

3) $y = x^5 \ln x$;

4) $y = \dfrac{\sin x}{x^4} + arctgx$.

Розв'язання

1. Використовуючи формули (5.5), (5.7) і табл. 5.1, отримаємо

$$y' = \left(2^x - x^2 + e^x + 5\right)' = \left(2^x\right)' + \left(-x^2\right)' + \left(e^x\right)' + (5)' = 2^x \ln 2 - 2x + e^x.$$

2. За формулами (5.5)-(5.7) і табл. 5.1,

$$y' = \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = \left(3\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)' = 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-2}\right)' = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-3} = .$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3};$$

3. Використовуючи формулу похідної добутку (5.8) двох функцій і таблицю похідних 5.1, одержимо

$$y' = \left(x^5 \ln x\right)' = \left(x^5\right)' \ln x + x^5 (\ln x)' = 5x^4 \ln x + \frac{x^5}{x} = 5x^4 \ln x + x^4 = x^4 (5 + \ln x).$$

4. За формулами (5.7), (5.9) маємо

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x^4}\right)' + (arctgx)' = \frac{(\sin x)' x^4 - \sin x \left(x^4\right)'}{\left(x^4\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^4 \cos x - 4x^3 \sin x}{x^8} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Відповідь: 1) $y' = 2^x \ln 2 - 2x + e^x$;

2) $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^3}$;

3) $y' = x^4 (5 + \ln x)$;

4) $y' = \dfrac{x^4 \cos x - 4x^3 \sin x}{x^8} + \dfrac{1}{1+x^2}$.

5.2.3. Похідна складеної функції

Визначення складеної функції наведено в підрозд. 4.1.

Теорема 5.1. Якщо функція $u=u(x)$ має похідну u'_x в точці x_0, а функція $y=f(u)$ має похідну y'_u у точці $u_0=u(x_0)$, то складена функція $y=f(u(x))$ також диференційована в точці x_0, причому

$$y'=f'(u_0)\cdot u'(x_0)\Leftrightarrow y'=f'_u\cdot u'_x. \qquad (5.10)$$

Приклад 5.2. Знайти похідну функцій:

1) $y=tg^2x$;

2) $y=\arcsin\left(x^3\right)$;

3) $y=\ln^5\left(x^2+1\right)$.

Розв'язання

1. Позначимо $y=u^2$, де $u=tgx$. Тоді, за формулою (5.10) і табл. 5.1,

$$y'=\left(u^2\right)'_u\cdot(tgx)'_x=2u\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Підставляючи замість $u=tgx$, запишемо відповідь: $y'=\dfrac{2tgx}{\cos^2 x}$.

Зауваження. Введення допоміжних функцій рекомендується робити на початковому етапі засвоєння техніки диференціювання складеної функції. При достатній підготовці похідну знаходять одразу, як це буде зроблено далі.

2. $y'=\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}\cdot\left(x^3\right)'=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.

3. $y'=\left(\ln^5\left(x^2+1\right)\right)'=5\ln^4\left(x^2+1\right)\cdot\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'=$

$$=5\ln^4\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)'=5\ln^4\left(x^2+1\right)\cdot\frac{2x}{x^2+1}=\frac{10x\ln^4\left(x^2+1\right)}{x^2+1}.$$

Відповідь: 1) $y'=\dfrac{2tgx}{\cos^2 x}$; 2) $y'=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$; 3) $y'=\dfrac{10x\ln^4\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$.

5.2.4. Похідна функції, заданої неявно

Визначення неявно заданої функції наведено в підрозд. 4.2. Якщо функція $F(x;y)=0$ задана неявно, то необхідно продиференціювати обидві частини рівняння, пам'ятаючи, що y залежить від x, а потім отримане рівняння розв'язати відносно y'.

Приклад 5.3. Знайти похідну функції $xy^3-\cos(2x+3y)=x$.

Розв'язання

$$\left(xy^3-\cos(2x+3y)\right)'=x';$$

$$\left(xy^3\right)'+\left(-\cos(2x+3y)\right)'=1;$$

$$x'y^3+x\left(y^3\right)'+\sin(2x+3y)(2x+3y)'=1;$$

$$y^3+3xy^2y'+\sin(2x+3y)(2+3y')=1.$$

Розв'язуємо отримане рівняння відносно y':

$$y^3+3xy^2y'+3y'\sin(2x+3y)+2\sin(2x+3y)=1;$$

$$y'\left(3xy^2+3\sin(2x+3y)\right)=1-y^3-2\sin(2x+3y);$$

$$y'=\frac{1-y^3-2\sin(2x+3y)}{3xy^2+3\sin(2x+3y)}.$$

Відповідь: $y'=\dfrac{1-y^3-2\sin(2x+3y)}{3xy^2+3\sin(2x+3y)}$.

5.2.5. Логарифмічне диференціювання функцій

Метод логарифмічного диференціювання застосовують у випадку, коли функція є показниково-степеневою функцією, тобто функцією вигляду $y=(u(x))^{v(x)}$. Також цей метод дозволяє швидко знайти похідну добутку або частки функцій.

Нехай функція $y=f(x)$ додатна і має похідну в точці x. Метод логарифмічного диференціювання полягає в такому:

1. Логарифмуємо задану функцію $y=f(x)$, тобто

$$\ln y=\ln f(x). \tag{5.11}$$

2. Знаходимо похідну отриманого рівняння (5.11), використовуючи правило диференціювання неявної функції:

$$\frac{y'}{y}=\left(\ln f\left(x\right)\right)'.$$

3. Виражаємо *y'*: $y'=y\cdot\left(\ln f\left(x\right)\right)'$ або

$$y'=f\left(x\right)\left(\ln f\left(x\right)\right)'.$$

Залежно від вигляду функції $y=f\left(x\right)$ використовують такі властивості логарифмів:

- ✓ якщо $y=\left(u\left(x\right)\right)^{v\left(x\right)}$, то $\ln\left(u\left(x\right)\right)^{v\left(x\right)}=v\left(x\right)\ln\left(u\left(x\right)\right)$;
- ✓ якщо $y=f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$, то $\ln y=\ln\left(f\left(x\right)\right)+\ln\left(g\left(x\right)\right)$;
- ✓ якщо $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$, то $\ln y=\ln\left(f\left(x\right)\right)-\ln\left(g\left(x\right)\right)$;
- ✓ якщо $y=\left(f\left(x\right)\right)^{k}$, то $\ln y=k\cdot\ln\left(f\left(x\right)\right)$.

Приклад 5.4. Знайти похідну функцій:

а) $y=x^{\sin 5x}$;

б) $y=\dfrac{\left(2x^4-6\right)^5}{\left(x+3\right)^3\sqrt[4]{7+8x^2}}$.

Розв'язання

А. Знайдемо похідну функції $y=x^{\sin 5x}$.

1) прологарифмуємо обидві частини рівності $y=x^{\sin 5x}$:

$$\ln y=\ln x^{\sin 5x},\ \ln y=\sin 5x\cdot\ln x;$$

2) продиференціюємо обидві частини отриманої рівності:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\left(\sin 5x\right)'\cdot\ln x+\sin 5x\cdot\left(\ln x\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=5\cos 5x\cdot\ln x+\sin 5x\cdot\frac{1}{x};$$

3) виражаємо y' і, враховуючи, що $y=x^{\sin 5x}$ з умови задачі, отримаємо

$$y'=x^{\sin 5x}\left(5\cos 5x\cdot\ln x+\frac{\sin 5x}{x}\right).$$

Б. Після логарифмування функції $y=\dfrac{\left(2x^4-6\right)^5}{(x+3)^3\sqrt[4]{7+8x^2}}$,

використовуючи властивості логарифмів, маємо

$$\ln y=\ln\frac{\left(2x^4-6\right)^5}{(x+3)^3\sqrt[4]{7+8x^2}}=\ln\left(2x^4-6\right)^5-\ln(x+3)^3-\ln\sqrt[4]{7+8x^2}=$$

$$=5\ln\left(2x^4-6\right)-3\ln(x+3)-\frac{1}{4}\ln\left(7+8x^2\right).$$

Тобто

$$\ln y=5\ln\left(2x^4-6\right)-3\ln(x+3)-\frac{1}{4}\ln\left(7+8x^2\right).$$

Диференціюємо останній вираз:

$$\frac{y'}{y}=\frac{5\cdot 8x^3}{2x^4-6}-\frac{3}{x+3}-\frac{16x}{4\cdot\left(7+8x^2\right)}$$

і виражаємо y': $y'=y\left(\dfrac{20x^3}{x^4-3}-\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{4x}{7+8x^2}\right)$.

Враховуючи, що $y=\dfrac{\left(2x^4-6\right)^5}{(x+3)^3\sqrt[4]{7+8x^2}}$ за умовою, остаточно отримаємо

$$y'=\frac{\left(2x^4-6\right)^5}{(x+3)^3\sqrt[4]{7+8x^2}}\cdot\left(\frac{20x^3}{x^4-3}-\frac{3}{x+3}-\frac{4x}{7+8x^2}\right).$$

Відповідь: а) $y'=x^{\sin 5x}\left(5\cos 5x\cdot\ln x+\dfrac{\sin 5x}{x}\right)$;

б) $y'=\dfrac{\left(2x^4-6\right)^5}{(x+3)^3\sqrt[4]{7+8x^2}}\cdot\left(\dfrac{20x^3}{x^4-3}-\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{4x}{7+8x^2}\right)$.

5.2.6. Похідна параметрично заданої функції

Розглянемо функцію, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in(\alpha,\beta).$$

Якщо функції $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ диференційовані за змінною t, причому $\psi'(t)\neq 0$, то похідна параметрично заданої функції обчислюється за формулою

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (5.12)$$

Приклад 5.5. Знайти похідну функції $\begin{cases} y=4t^2-7, \\ x=\ln\sqrt{t+2}. \end{cases}$

Розв'язання

Знайдемо похідні функцій $y=4t^2-7t, x=\ln\sqrt{t+2}$ за змінною t:

$$y'_t=\left(4t^2-7\right)'=8t,\ x'_t=\left(\ln\sqrt{t+2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\ln(t+2)\right)'=\frac{1}{2(t+2)}.$$

За формулою (5.12) маємо

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{8t}{1/(2t+4)}=8t(2t+4)=16t^2+32t.$$

Відповідь: $y'_x=16t^2+32t$.

5.3. Диференціал функції

Визначення. Диференціалом dx незалежного аргументу x називається приріст аргументу Δx: $dx=\Delta x$.

Диференціал функції визначається інакше. Розглянемо функцію $y=f(x)$, що має похідну в точці x:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тобто $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(x)$, де $\alpha(x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Звідси приріст функції можна записати як

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(x)\Delta x\ . \tag{5.13}$$

Визначення. Головна частина $f'(x)\Delta x$ (формула (5.13)) приросту функції $y=f(x)$, лінійна відносно приросту аргументу Δx, називається *диференціалом функції* і позначається символом $dy=df(x)$:

$$dy=f'(x)\Delta x=f'(x)d\,x. \tag{5.14}$$

З формули (5.14) маємо ще одне позначення похідної:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Бачимо, що для знаходження диференціала функції потрібно похідну цієї функції помножити на dx.

Властивості диференціала функції:

1. $dC=0$ C - стала величина, $C\in R$.
2. $d(Cu)=Cdu$.
3. $d(u\pm v)=du\pm dv$.
4. $d(u\cdot v)=vdu+udv$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2},\ v\neq 0$.

6. *Інваріантність* (незмінність) форми першого диференціала: перший диференціал функції завжди визначається формулою $dy=f'(x)d\,x$ незалежно від того, чи є x незалежною зміною або функцією іншого аргументу.

Наприклад, для функцій, похідні яких були знайдені в прикладі 5.2, диференціал має вигляд

1) $dy=\dfrac{2tgx}{\cos^2 x}dx$;   2) $dy=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$;

3) $dy=\dfrac{10x\ln^4\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx$.

Геометричний зміст диференціала: диференціал функції дорівнює приросту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x (рис. 5.5).

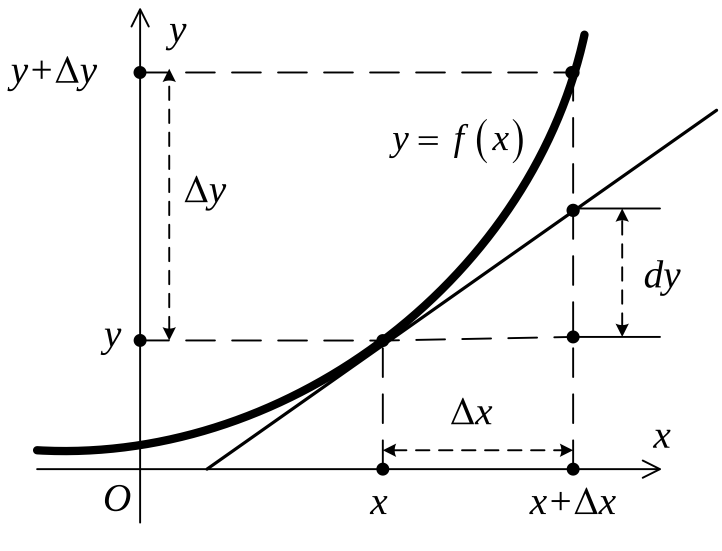


Рис. 5.5. Геометричний зміст диференціала

5.4. Похідні вищих порядків

5.4.1. Явно задана функція

Нехай $y = f(x)$ - диференційована функція, похідна від якої також є диференційованою функцією.

Визначення. Похідною другого порядку (другою похідною) y'' функції $y = f(x)$ називається похідна функції $y' = f'(x)$:

$$y'' = (y')'.$$

Друга похідна позначається одним з символів $y'', f''(x), \dfrac{d^2 y}{d x^2}$.

Визначення. Функція $y = f(x)$, що має другу похідну $f''(x)$ у точці x, називається *двічі диференційованою* в цій точці.

Визначення. Похідною n*-го порядку* $y^{(n)}$ від функції $y = f(x)$ називається похідна від похідної $n-1$ порядку:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' .$$

Позначається одним з символів: $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{d x^n}$.

Зауваження. Порядок похідної вище третього порядку береться в дужки.

Для деяких функцій можна записати загальні формули похідних n-го порядку (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Похідні n-го порядку

Номер	Назва	$y=f(x)$	$y^{(n)}=f^{(n)}(x), n\in N$
1	Степенева функція	x^n	$n!$, де $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$
		x^m	$\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, m\geq n$
2	Логарифмічні функції	$\ln x$	$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
		$\log_a x$	$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$
3	Показникові функції	e^x	e^x
		a^x	$a^x(\ln a)^n$
4	Тригонометричні функції	$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$
		$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$

Наприклад, похідна шостого порядку для функції $y=\log_4 x$, за табл. 5.2, дорівнює

$$y^{(6)}=(\log_4 x)^{(6)}=\frac{(-1)^{6-1}(6-1)!}{x^6\ln 4}=-\frac{120}{x^6\ln 4}.$$

5.4.2. Неявно задана функція

Похідну n-го порядку неявно заданої функції $F(x;y)=0$ отримують шляхом послідовного знаходження всіх її похідних нижчого порядку.

Приклад 5.6. Знайти похідну другого порядку функції $3y^2 - 5 = x$.

Розв'язання

Диференціюючи задану неявну функцію за змінною x, отримаємо

$$6yy' = 1 \Leftrightarrow yy' = \frac{1}{6}.$$

Беремо ще раз похідну за змінною x

$$(yy')' = \left(\frac{1}{6}\right)' \Rightarrow y' \cdot y' + y \cdot y'' = 0 \Rightarrow (y')^2 + y \cdot y'' = 0$$

і виражаємо y'' з останнього рівняння:

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y}.$$

Ураховуючи, що $y' = \frac{1}{6y}$, отримаємо

$$y'' = -\frac{\left(\frac{1}{6y}\right)^2}{y} = -\frac{1}{36y^3}.$$

Відповідь: $y'' = -\frac{1}{36y^3}$.

5.4.3. Параметрично задана функція

У випадку параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in (\alpha, \beta)$ похідну другого порядку знаходять за формулою

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3} \tag{5.15}$$

за умови існування $x'_t, y'_t, x''_{tt}, y''_{tt}$, причому $x'_t \neq 0$ і функція $x(t)$ строго монотонна.

У загальному випадку при знаходженні похідної n-го порядку використовують вираз

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(y_{xx}^{(n-1)}\right)'_x = \left(y_{xx}^{(n-1)}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Приклад 5.7. Знайти похідну другого порядку функції

$$\begin{cases} y = 4t^2 - 7, \\ x = \ln\sqrt{t+2}. \end{cases}$$

Розв'язання

Похідна першого порядку (див. приклад 5.5) дорівнює

$$y'_x = 16t^2 + 32t.$$

За формулою (5.15) маємо

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''_{xx} = \left(16t^2 + 32t\right)'_t \frac{1}{\left(\ln\sqrt{t+2}\right)'_t} = (32t + 32) \cdot \frac{1}{1/(2t+4)} =$$

$$= (32t + 32)(2t + 4) = 64\left(t^2 + 3t + 2\right).$$

Відповідь: $y''_{xx} = 64\left(t^2 + 3t + 2\right)$.

5.5. Диференціали вищих порядків

Диференціали вищих порядків визначаються так само, як і похідні вищих порядків.

Визначення. Диференціалом n-го порядку $d^n y$ функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала $n-1$ порядку:

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right). \tag{5.16}$$

У випадку, коли аргумент x є незалежною змінною, вираз (5.16) набуває вигляду

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n. \tag{5.17}$$

Приклад 5.8. Дано функцію $y = x^5 \ln x$. Знайти $d^2 y$.

Розв'язання

Знайдемо другу похідну функції $y = x^5 \ln x$:

$$y' = \left(x^5 \ln x\right)' = 5x^4 \ln x + \frac{x^5}{x} = x^4\left(5\ln x + 1\right),$$

$$y'' = \left(x^4\left(5\ln x + 1\right)\right)' = 4x^3\left(5\ln x + 1\right) + x^4 \cdot \frac{5}{x} = x^3\left(20\ln x + 9\right).$$

Тоді за формулою (5.17) отримаємо $d^2y = x^3\left(20\ln x + 9\right)dx^2$.

Відповідь: $d^2y = x^3\left(20\ln x + 9\right)dx^2$.

5.6. Правило Лопіталя

Правило Лопіталя – це метод розкриття невизначеностей виглядів $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при знаходженні границь функцій. Теорема, наведена нижче, доводить, що при виконанні певних умов границя частки функцій дорівнює границі частки їхніх похідних.

Теорема 5.2. Нехай функції $f(x), g(x)$ визначені і диференційовані в деякому околі точки x_0 за виключенням, можливо, точки x_0. Якщо виконуються умови:

- ✓ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty\right)$;
- ✓ $g'(x_0) \neq 0$ у вказаному околі точки x_0;
- ✓ існує $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна);

то існує $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (5.18)$$

Зауваження:

1. Правило Лопіталя можна застосовувати повторно, якщо $f'(x)$, $g'(x)$ задовольняють ті самі умови теореми 5.2, що і функції $f(x)$, $g(x)$.

2. Теорема 5.2 залишається справедливою у випадку $x \to \pm\infty$.

3. Правило Лопіталя можна застосовувати і до невизначеностей виглядів $[0\cdot\infty][\infty-\infty],\left[1^{\infty}\right],\left[0^{0}\right],\left[\infty^{0}\right]$. Для цього їх потрібно звести до невизначеностей виглядів $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ або шляхом алгебраїчних перетворень (для $[0\cdot\infty][\infty-\infty]$), або за допомогою перетворення $y=f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ (для $\left[1^{\infty}\right],\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$).

Приклад 5.9. Обчислити границю функції:

1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+6}{5x^2-3x-26}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{2^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0+0}(\sin 2x)^{tg5x}$.

Розв’язання

1. $$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{5x^2-3x-26}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-2}\frac{\left(x^2+5x+6\right)'}{\left(5x^2-3x-26\right)'}=\lim_{x\to-2}\frac{2x+5}{10x-3}=-\frac{1}{23}.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{2^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^4\right)'}{\left(2^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{2^x\ln 2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{4}{\ln 2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(2^x\right)'}=$$

$$=\frac{4}{\ln 2}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2^x\ln 2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{12}{\ln^2 2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(2^x\right)'}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{12}{\ln^2 2}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=$$

$$=\frac{24}{\ln^3 2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(2^x\right)'}=\frac{24}{\ln^3 2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x\ln 2}=\frac{24}{\ln^4 2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0.$$

3. $$\lim_{x\to0+0}(\sin 2x)^{tg5x}=\left[0^0\right]=\lim_{x\to0+0}e^{tg5x\ln(\sin 2x)}=e^{\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln(\sin 2x)}{ctg5x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{(\ln(\sin 2x))'}{(ctg 5x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}-\frac{2\cos 2x\cdot\sin^2 5x}{5\sin 2x}}=\begin{pmatrix}\sin 5x \underset{x\to 0+0}{\sim} 5x,\\ \sin 2x \underset{x\to 0+0}{\sim} 2x,\\ \cos 2x \underset{x\to 0+0}{\to} 1\end{pmatrix}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}-\frac{50x^2}{10x}}=e^0=1.$$

Щоб спростити розв'язання в останньому прикладі, ми скористалися принципом заміни еквівалентними нескінченно малими величинами (п. 4.3.5).

Відповідь: 1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{5x^2-3x-26}=-\frac{1}{23}$;

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4}{2^x}=0$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin 2x)^{tg 5x}=1$.

5.7. Дослідження поведінки функцій

5.7.1. Інтервали монотонності функції. Точки екстремуму

Визначення. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі (a,b) (рис. 5.6), якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in (a,b)$, таких що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

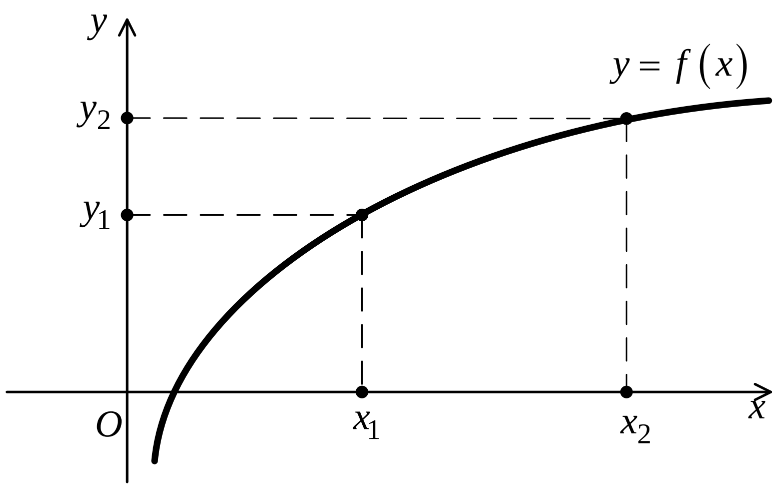


Рис. 5.6. Зростаюча функція

Визначення. Функція $f(x)$ називається *спадною* на інтервалі (a,b) (рис. 5.7), якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in (a,b)$, таких що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

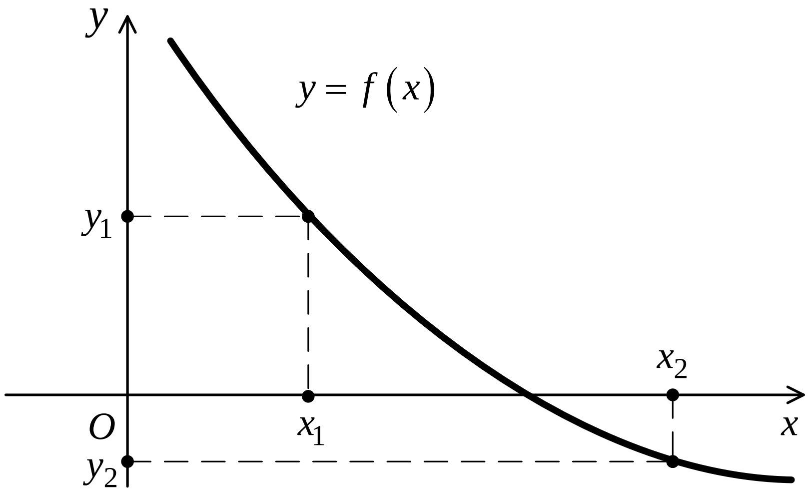


Рис. 5.7. Спадна функція

Визначення. Інтервали, у яких функція $f(x)$ зростає або спадає, називаються *інтервалами монотонності функції.*

За допомогою знака похідної першого порядку можна визначити інтервали монотонності. Наведені нижче умови називаються *достатніми умовами монотонності функції*.

Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a,b) і для будь-якого $x \in (a,b)$:

- $f(x)' > 0$, то функція зростає на (a,b);
- $f(x)' < 0$, то функція спадає на (a,b).

Інтервали монотонності функції відокремлюються *критичними точками першого роду*, тобто точками, у яких похідна або дорівнює нулю, або не існує.

Точки, у яких похідна дорівнює нулю, ще називають *стаціонарними точками*.

Визначення. Точка x_0 називається точкою локального *максимуму* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, що для будь-якого *x* з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Визначення. Точка x_0 називається точкою локального *мінімуму* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, що для будь-якого x з цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

Визначення. Точки мінімуму і максимуму називаються точками *екстремуму функції* $f(x)$ (рис. 5.8).

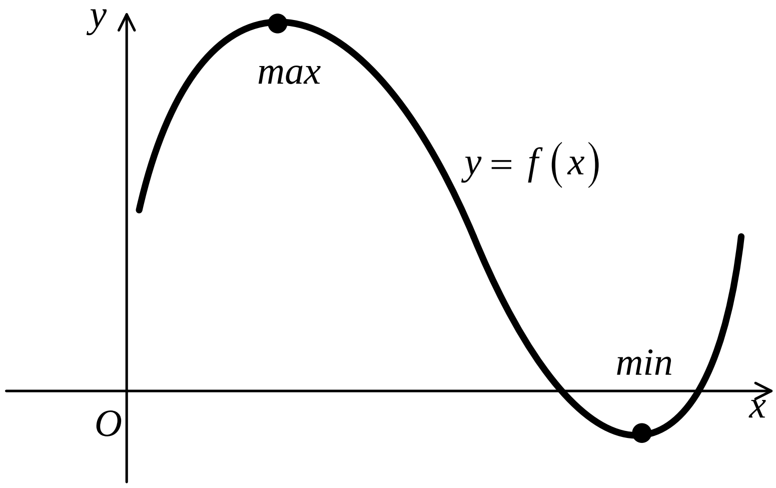


Рис. 5.8. Точки екстремуму функції

Розглянемо необхідну і достатні умови існування екстремуму функції в точці x_0.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$, то в цій точці похідна $f'(x)$ або дорівнює нулю, або не існує.

Перша достатня умова існування екстремуму. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, а її похідна $f'(x)$ змінює знак при переході через цю точку, то в точці x_0 є екстремум, причому:

а) точка максимуму, якщо її похідна змінює знак плюс на мінус (рис. 5.9, а);

б) точка мінімуму, якщо її похідна змінює знак мінус на плюс (рис. 5.9, б).

Друга достатня умова існування екстремуму. Якщо в точці x_0 похідна функції $f'(x) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то в точці x_0 є екстремум, причому:

а) якщо $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 є точкою максимуму;

б) якщо $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму.

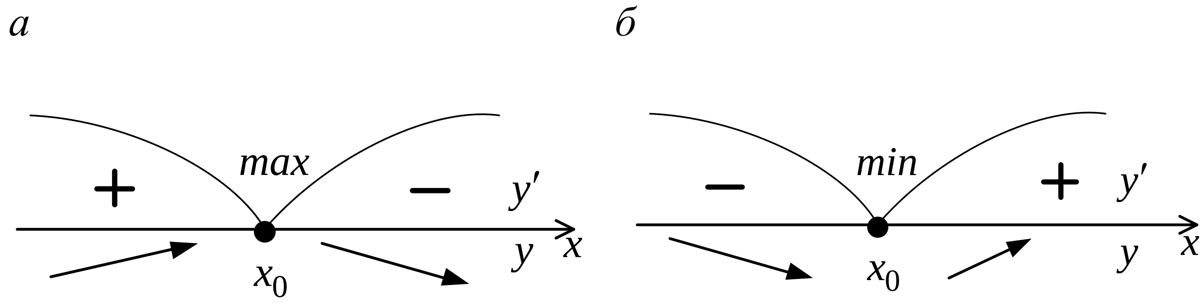


Рис. 5.9. Точки екстремуму функції

Зауважимо, що другу достатню умову не можна застосовувати у випадку, коли перша похідна не існує.

Для дослідження функції на екстремум за допомогою першої достатньої умови необхідно:

1. Знайти ОДЗ функції.
2. Знайти критичні точки першого роду функції.
3. Визначити знак першої похідної в кожному інтервалі, на які розбивають ОДЗ критичні точки.
4. За зміною знаку $f'(x)$ визначити точки екстремумів функції і обчислити значення функції в цих точках. (Екстремумами можуть бути лише точки, що належать ОДЗ.)

Приклад 5.10. Знайти інтервали монотонності і точки екстремуму функції $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+4}}{x-5}$.

Розв'язання

1. ОДЗ заданої функції: $x\in(-\infty,5)\cup(5,\infty)$.

2. Знайдемо першу похідну цієї функції:

$$y'=\left(\frac{\sqrt[3]{x+4}}{x-5}\right)'=\frac{\left((x+4)^{\frac{1}{3}}\right)'(x-5)-(x-5)'(x+4)^{\frac{1}{3}}}{(x-5)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}(x+4)^{-\frac{2}{3}}(x-5)-(x+4)^{\frac{1}{3}}}{(x-5)^2}=\frac{(x-5-3x-12)}{3(x+4)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2}=$$

$$=\frac{-2x-17}{3(x+4)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2}=-\frac{2x+17}{3(x+4)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2}$$

і визначимо критичні точки:

а) $y'=0$: $2x+17=0 \Rightarrow x_1=-\frac{17}{2}\in$ ОДЗ;

б) y' не існує: $3(x+4)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2=0 \Rightarrow x_2=-4 \in$ ОДЗ, $x_3=5\notin$ ОДЗ.

3. Застосуємо першу достатню умову існування екстремуму.

x	$\left(-\infty;-\frac{17}{2}\right)$	$-\frac{17}{2}$	$\left(-\frac{17}{2};-4\right)$	-4	$(-4;5)$	5	$(5;+\infty)$
$y'(x)$	+	0	—	Не існує	—	Не існує	—
$y(x)$	↗	$\frac{\sqrt[3]{36}}{27}$ (min)	↘	0	↘	Не існує	↘

Бачимо, що функція має одну точку екстремуму: $\min f=f\left(-\frac{17}{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{36}}{27}\approx 0{,}122$. Функція спадає на інтервалі $\left(-\frac{17}{2};-4\right)\cup(-4;5)\cup(5;+\infty)$ і зростає на інтервалі $\left(-\infty;-\frac{17}{2}\right)$.

Відповідь: $\min f=f\left(-\frac{17}{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{36}}{27}\approx 0{,}122$;

y спадає на $\left(-\frac{17}{2};-4\right)\cup(-4;5)\cup(5;+\infty)$;

y зростає на $\left(-\infty;-\frac{17}{2}\right)$.

5.7.2. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Оскільки неперервна на деякому відрізку $[a,b]$ функція може досягати на цьому проміжку свого найбільшого та найменшого значень або в точках екстремуму всередині вказаного проміжку чи на його кінцях, то для знаходження найбільшого $y_{найб}$ і найменшого $y_{найм}$ значення неперервної на відрізку $[a,b]$ функції потрібно:

1. Знайти ОДЗ функції.
2. Знайти критичні точки першого роду, які належать відрізку $[a,b]$.
3. Обчислити значення функції в знайдених точках і на кінцях відрізку $[a,b]$.
4. Обрати серед отриманих значень найбільше і найменше.

Зауваження. При знаходженні найбільшого та найменшого значень функції не потрібно досліджувати отримані критичні точки на екстремум.

Приклад 5.11. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3 - 21x^2 + 72x + 10$ на відрізку $[-1,3]$.

Розв'язання

1. ОДЗ: $x \in R$.

2. $y' = \left(x^3 - 21x^2 + 72x + 10\right)' = 3x^2 - 42x + 72 = 0$. Звідси

$x_1 = 2, x_2 = 12$ - стаціонарні точки. Точка $x_2 = 12$ не належить відрізку $[-1,3]$.

3. $y = y(2) = 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2 + 10 = 78$;

$y = y(-1) = (-1)^3 - 21 \cdot (-1)^2 + 72 \cdot (-1) + 10 = -85$;

$y = y(3) = 3^3 - 21 \cdot 3^2 + 72 \cdot 3 + 10 = 64$.

4. Отже, свого найбільшого значення на відрізку $[-1,3]$ функція досягає в точці $x = 2$, а найменшого – у точці $x = -1$.

Відповідь: $\underset{[-1,3]}{y_{найб}} = y(2) = 78$, $\underset{[-1,3]}{y_{найм}} = y(-1) = -85$.

5.7.3. Опуклість, увігнутість графіка функції, точки перегину

Розглянемо криву, що є графіком функції $y = f(x)$, яка має похідну на інтервалі (a,b).

Визначення. Крива, задана функцією $y = f(x)$, називається *опуклою вгору (опуклою)* на інтервалі (a,b), якщо всі точки кривої лежать нижче за будь-яку її дотичну на цьому інтервалі (рис. 5.10).

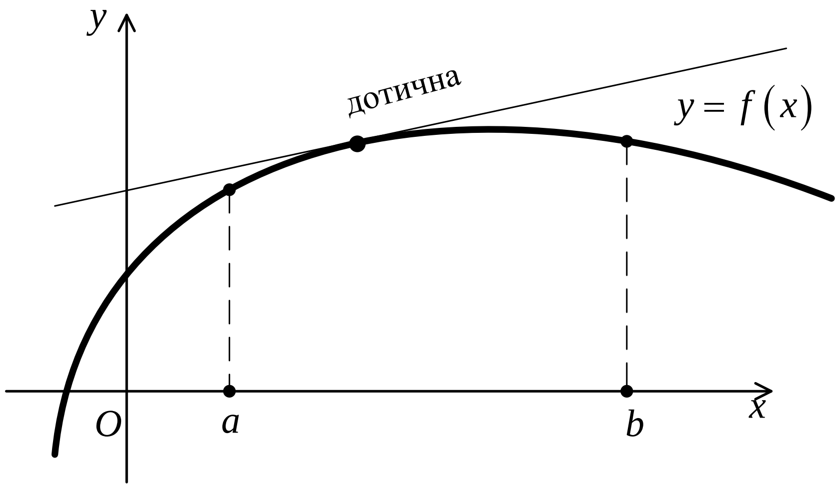


Рис. 5.10. Опукла крива

Визначення. Крива називається *опуклою вниз (увігнутою)* на інтервалі (a,b), якщо всі точки кривої лежать вище за будь-яку її дотичну на цьому інтервалі (рис. 5.11).

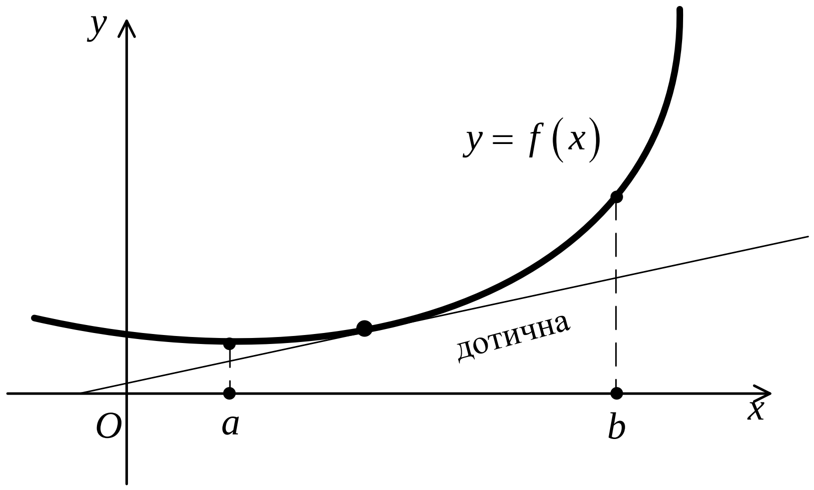


Рис. 5.11. Увігнута крива

Визначення. Точка кривої $(x_0, f(x_0))$, що відокремлює опуклу її частину від увігнутої, називається *точкою перегину*.

Необхідна умова точки перегину. Якщо x_0 — точка перегину функції $f(x)$, то в цій точці друга похідна або дорівнює нулю, або не існує.

Достатня умова опуклості і увігнутості графіка функції. Нехай функція $y = f(x)$ має другу похідну на (a,b). Якщо в усіх точках інтервалу (a,b):

- $f''(x) > 0$, то графік функції $y = f(x)$ на цьому інтервалі опуклий вниз (увігнутий);
- $f''(x) < 0$, то графік функції $y = f(x)$ на цьому інтервалі опуклий вгору (опуклий).

Визначення. Точки, у яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду* функції $y = f(x)$.

Достатня умова існування точки перегину. Нехай x_0 - критична точка другого роду. Якщо при переході через x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює свій знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ цієї кривої є точкою перегину кривої.

Для знаходження інтервалів опуклості і точок перегину графіка функції необхідно:

1. Знайти ОДЗ функції.
2. Знайти критичні точки другого роду функції.
3. Визначити знак другої похідної функції в кожному інтервалі, на які розбивають ОДЗ критичні точки.
4. За зміною знаку $f''(x)$ визначити інтервали опуклості графіка функції і точки перегину.
5. Обчислити значення функції в точках перегину.

Приклад 5.12. Дослідити на опуклість і точки перегину графік функції

$$y = \frac{3x}{x^2 - 16}.$$

Розв’язання

1. Область допустимих значень функції: $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$.
2. Знайдемо другу похідну цієї функції:

$$y' = \left(\frac{3x}{x^2 - 16} \right)' = -\frac{3\left(x^2 + 16\right)}{\left(x^2 - 16\right)^2};$$

$$y'' = \left(-\frac{3\left(x^2+16\right)}{\left(x^2-16\right)^2}\right)' = \frac{6x\left(x^2+48\right)}{\left(x^2-16\right)^3}$$

і визначимо критичні точки другого роду:

а) $y''=0$: $6x\left(x^2+48\right)=0 \Rightarrow x_1=0$;

б) y'' не існує: $\left(x^2-16\right)^3=0 \Rightarrow x_2=-4 \notin$ ОДЗ, $x_3=4 \notin$ ОДЗ.

3. Визначаємо знак другої похідної функції в кожному інтервалі, на які розбивають ОДЗ знайдені критичні точки.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
$y''(x)$	—	0	+	0	—	Не існує	+
$y(x)$	$\cap$	Не існує	$\cup$	0 (точка перегину)	$\cap$	Не існує	$\cup$

Бачимо, що функція має одну точку перегину $(0;0)$.

Відповідь: $(0;0)$ - точка перегину;

$(-4;0)\cup(4;+\infty)$ - графік функції увігнутий;

$(-\infty;-4)\cup(0;4)$ - графік функції опуклий.

5.7.4. Асимптоти графіка функції

Визначення. Асимптотою графіка функції $y=f(x)$ називається така пряма, відстань δ до якої від довільної точки M графіка функції прямує до нуля, коли ця точка віддаляється вздовж кривої в нескінченність.

Розрізняють вертикальні (паралельні осі Oy) і похилі асимптоти (рис. 5.12).

Визначення. Вертикальна пряма $x=x_0$ є *асимптотою графіка функції*, якщо хоча б одне з граничних значень $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ дорівнює нескінченності, тобто точка x_0 є точкою розриву другого роду.

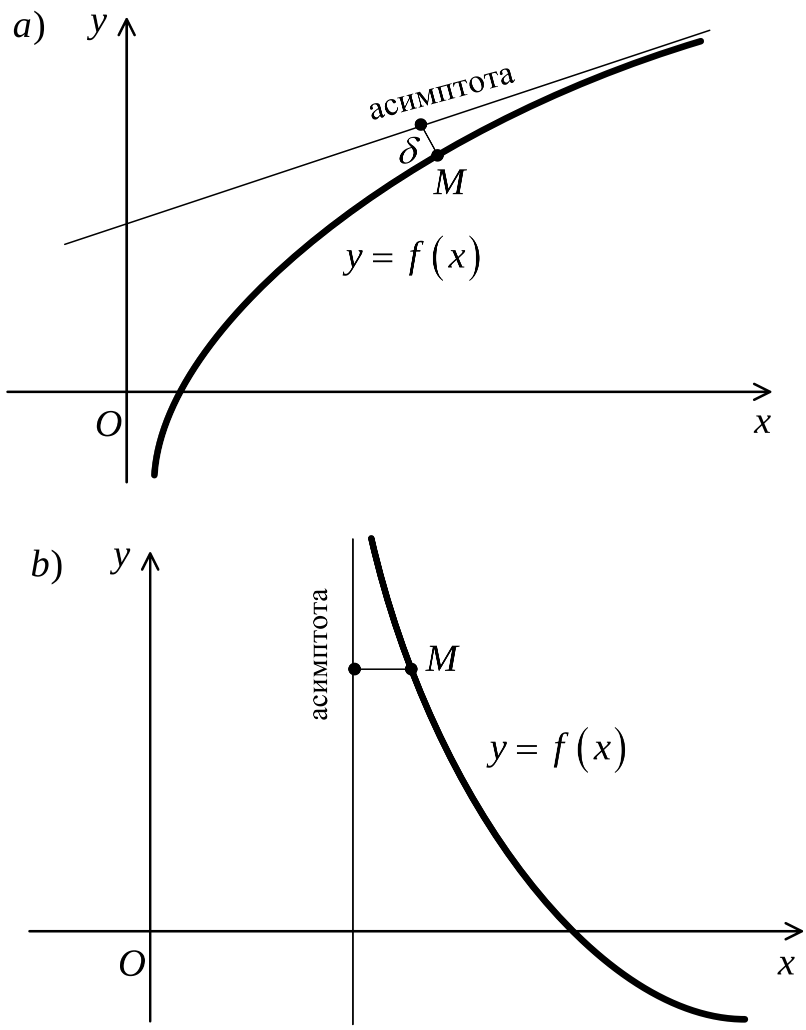


Рис. 5.12. Асимптоти графіка функції:
а – похила; б – вертикальна

Визначення. Пряма $y = kx + b$ є *похилою асимптотою* при $x \to +\infty$ для графіка функції $y = f(x)$ тоді і лише тоді, коли

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx \right). \tag{5.19}$$

Аналогічне твердження істинне і при $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - kx \right). \tag{5.20}$$

Зауваження:

1. Якщо хоча б одна з границь (формули (5.19), (5.20)) не існує або дорівнює нескінченності, то графік функції $y = f(x)$ не має похилої асимптоти.

2. Горизонтальна асимптота $y = b$ $(k = 0)$ є частинним випадком похилої асимптоти.

3. Асимптоти графіка функції $y = f(x)$ можуть бути різними при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Приклад 5.13. Знайти рівняння асимптот графіка функції $y = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3$.

Розв'язання

1. *Вертикальні асимптоти.*

Область допустимих значень функції: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. У точці $x = -1$ функція має розрив другого роду, оскільки

$$\lim_{x \to -1+0} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3 = \left[\left(\frac{-3}{+0}\right)^3\right] = -\infty; \quad \lim_{x \to -1-0} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3 = \left[\left(\frac{-3}{-0}\right)^3\right] = +\infty.$$

Отже, пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою.

2. *Похилі асимптоти.*

Знайдемо похилі асимптоти, використовуючи формули (5.19), (5.20). При $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)^3}{x(x+1)^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3 - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3 = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1.$$

Тобто пряма $y = 1$ - горизонтальна асимптота при $x \to +\infty$.

Ця пряма буде також асимптотою і при $x \to -\infty$.

Відповідь: $x = -1$ - вертикальна асимптота, $y = 1$ - похила (горизонтальна) асимптота при $x \to \pm\infty$.

5.7.5. Схема дослідження функції і побудова ескізу її графіка

1. Знайти ОДЗ функції.

2. Перевірити функцію на парність, непарність, періодичність (підрозд. 4.1).

3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

4. Знайти точки екстремуму функції та інтервали монотонності функції.

5. Знайти точки перегину графіка функції та інтервали його опуклості і увігнутості.

6. Знайти асимптоти графіка функції:

а) вертикальні;

б) похилі.

7. За отриманими даними побудувати ескіз графіка функції.

Приклад 5.14. Дослідити функцію $y=\frac{x^3-8x}{x^2-1}$ і побудувати ескіз її графіка.

Розв’язання

1. Область визначення функції: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Оскільки $y(-x)=\frac{(-x)^3-8(-x)}{(-x)^2-1}=\frac{-x^3+8x}{x^2-1}=-\frac{x^3-8x}{x^2-1}=-y(x)$, то функція непарна, тобто її графік симетричний відносно початку координат.

Функція неперіодична.

3. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат.

З віссю Ox: $y=0\Rightarrow\frac{x^3-8x}{x^2-1}=0$, $x^3-8x=0$, $x\left(x^2-8\right)=0$. Тоді $x_1=0, x_2=2\sqrt{2}, x_3=-2\sqrt{2}$.

З віссю $Oy: x=0\Rightarrow y=0$.

Таким чином, графік функції проходить через точки $(0;0)$,$\left(2\sqrt{2};0\right)$ і $\left(-2\sqrt{2};0\right)$.

4. Точки екстремуму функції та інтервали монотонності функції.

$$y'=\left(\frac{x^3-8x}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(3x^2-8\right)\left(x^2-1\right)-2x\left(x^3-8x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4+5x^2+8}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Оскільки $y'>0$ на всій області числової осі, окрім $x=\pm1$, то функція зростає на всій області визначення.

5. Точки перегину графіка функції та інтервали його опуклості і увігнутості.

$$y''=\left(\frac{x^4+5x^2+8}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3+10x\right)\left(x^2-1\right)^2-4x\left(x^2-1\right)\left(x^4+5x^2+8\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{-14x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

а) $y''=0$: $-14x\left(x^2+3\right)=0\Rightarrow x=0\in$ ОДЗ;

б) y'' не існує: $\left(x^2-1\right)^3=0\Rightarrow x=\pm1\notin$ ОДЗ.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$y''(x)$	+	Не існує	—	0	+	Не існує	—
$y(x)$	$\cup$	Не існує	$\cap$	0 (точка перегину)	$\cup$	Не існує	$\cap$

6. Асимптоти графіка функції:

а) вертикальні асимптоти.

Дослідимо точки розриву $x=\pm1$.

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3-8x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3-8x}{(x-1)(x+1)}=\left[\frac{7}{+0}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3-8x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3-8x}{(x-1)(x+1)}=\left[\frac{7}{-0}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^3-8x}{x^2-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x^3-8x}{(x-1)(x+1)}=\left[\frac{7}{+0}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-8x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-8x}{(x-1)(x+1)}=\left[\frac{7}{-0}\right]=-\infty .$$

Оскільки в точках $x=\pm 1$ функція має розрив другого роду, то прямі $x=\pm 1$ є вертикальними асимптотами;

б) похилі асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\dfrac{x^3-8x}{x^2-1}\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-8x}{x\left(x^2-1\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-8x}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-7x}{x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0 .$$

Тобто пряма $y=x$ - похила асимптота при $x\to\pm\infty$.

7. За отриманими даними побудуємо ескіз графіка функції (рис. 5.13).

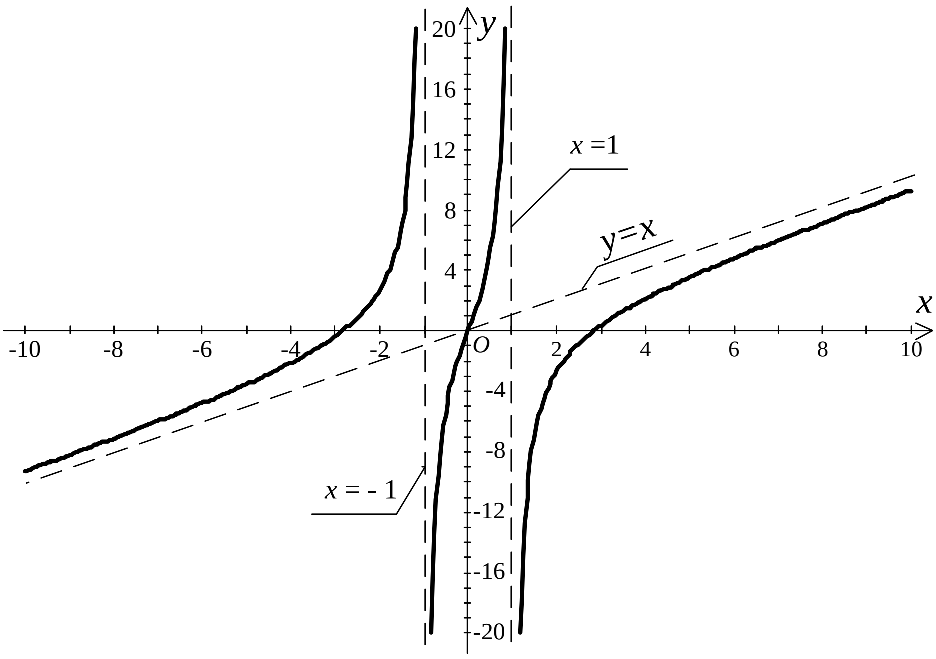


Рис. 5.13. Графік функції $y=\dfrac{x^3-8x}{x^2-1}$

Питання до розділу

1. Що називається приростом аргументу, приростом функції?
2. Дайте визначення похідної функції в точці.

3. Яка функція називається диференційованою в точці, на інтервалі?

4. Що означає диференціювання функції?

5. Зв’язок між неперервністю і диференційованістю функції.

6. Геометричний зміст похідної, рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.

7. Правила диференціювання і похідні основних елементарних функцій.

8. Похідна складеної функції.

9. Похідна функції, заданої неявно і параметрично.

10. У чому полягає метод логарифмічного диференціювання?

11. Визначення диференціала функції першого порядку.

12. Що називається похідною та диференціалом n-го порядку від функції?

13. Суть правила Лопіталя.

14. Чи можна застосовувати повторно правило Лопіталя?

15. Що називається інтервалами монотонності функції?

16. Яка функція називається зростаючою, спадною на інтервалі?

17. Достатні умови монотонності функції.

18. Критичні точки першого роду, стаціонарні точки функції.

19. Дайте визначення екстремуму функції.

20. Необхідна умова існування екстремуму.

21. Достатні умови існування екстремуму.

22. Які етапи дослідження функції на екстремум?

23. У яких точках неперервна на відрізку функція досягає на ньому свого найбільшого та найменшого значень?

24. Які етапи знаходження найбільшого і найменшого значення неперервної на відрізку функції?

25. Яка крива називається опуклою (увігнутою) на інтервалі?

26. Точки перегину кривої.

27. Необхідна і достатня умови точки перегину.

28. Достатня умова опуклості і увігнутості графіка функції.

29. Які точки називаються критичними точками другого роду функції?

30. Які етапи знаходження інтервалів опуклості і точок перегину графіка функції?

31. Що називається асимптотою графіка функції?

32. Які види асимптот ви знаєте?

33. У якому випадку функція не має асимптот?

34. Які етапи дослідження функції потрібно виконати, щоб побудувати ескіз її графіка?

Завдання

У завданнях **1-4** знайти похідну y' функції $y = f(x)$, користуючись визначенням похідної функції.

1. $y = x^3$. **2.** $y = \sin(2x)$. **3.** $y = e^{3x} + 5$. **4.** $y = ctg(4x)$.

У завданнях **5-23** знайти похідну y' функції $y = f(x)$.

5. $y = \frac{1}{5}x^3 - \frac{6}{x} + \ln x + 4$. **6.** $y = \frac{3x+7}{4x+2} + \sin x$. **7.** $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$.

8. $y = (x+2)\cdot\cos x + \frac{8}{x^2}$. **9.** $y = 9^x \cdot tgx + 3x - 2$. **10.** $y = \frac{\log_4 x}{\sqrt[3]{x^5}}$.

11. $y = \sqrt{11 - e^{5x}}$. **12.** $y = \frac{5\ln(1-2x)}{\sqrt{x}}$.

13. $y = \sin 2x \cdot ctg^2 3x$. **14.** $y = arctg\sqrt{2x+5}$.

15. $y = ctg\left(3x^2\right)$. **16.** $y = arctg\sqrt{2x+5}\cdot ctg\left(3x^2\right)$.

17. $y = \left(\sqrt{x^2+5} + 4\right)^{17}$. **18.** $y = (x+3)^4 arctg\sqrt{x+2}$.

19. $y = \sqrt{\frac{3+x^2}{3-x^2}}$. **20.** $y = \ln\sqrt{\frac{e^x}{2+e^x}}$.

21. $y = \ln\sqrt{\frac{e^x+1}{e^x}} + tg^3(4x)\cdot\arcsin x$.

22. $y = \arccos\left(e^x - 1\right) - 4^x$. **23.** $y = \frac{\cos(4x+1)}{4x^2+2x} + 23x^{15}$.

У завданнях **24-29** знайти похідну y' функції, заданої неявно.

24. $6y = x + 4\cos y$. **25.** $e^{y^3} - x^2 + 10xy = 2$.

26. $\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 26x$. **27.** $tg(xy) = x^5 + 7$. **28.** $\sqrt{xy} + x^2 + y^2 = 0$;

29. $x^2 + y = y\cos x - x\cos y$.

У завданнях **30-35** знайти похідну y'_x функції, заданої параметрично.

30. $\begin{cases} x = 5t - 4t^3 + 10, \\ y = 7t^4; \end{cases}$ **31.** $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \sqrt{t^2 + 4}; \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x = \sqrt[5]{t^2}, \\ y = \sqrt{t^5}; \end{cases}$

33. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t; \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} x = arctg\left(2t\right), \\ y = \ln\left(4t^2 + 1\right); \end{cases}$

35. $\begin{cases} x = \arcsin\left(t^3 - 1\right), \\ y = \arccos\left(t^3 - 1\right) + 5. \end{cases}$

У завданнях **36-40** знайти похідну y' функції.

36. $y = \left(x^2 + 5\right)^{\sin x}$. **37.** $y = \left(\operatorname{arctg} x\right)^{\sqrt{x}}$. **38.** $y' = \left(10 - \sqrt{x}\right)^{x^4}$.

39. $y = \left(\sqrt[8]{5x - 2}\right)^{\cos x}$. **40.** $y = \dfrac{(5x - 6)\sqrt[5]{\left(3 + x^2\right)^9}}{\left(x^3 + 2\right)^4\left(2x^7 + 1\right)^{10}}$.

41. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 + 4x + 5$ у точці з абсцисою $x_0 = -5$.

42. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $\begin{cases} x = 64\cos^3 t, \\ y = 64\sin^3 t; \end{cases}$ у точці, де $t = \dfrac{3\pi}{4}$.

43. Під яким кутом графік функції $y = \dfrac{9x - 36}{2x + 1}$ перетинає вісь Ox?

44. Під яким кутом перетинаються графіки функцій $y_1 = 6x^2 - 4$ і $y_2 = \dfrac{2}{x} + 19$?

45. Скласти рівняння параболи $y = ax^2 + bx + 5$, дотичною до якої в точці $M\left(2;7\right)$ є пряма $x + y + c = 0$.

46. Знайти диференціал першого порядку для завдань **5-23.**

У завданнях **47-51** знайти похідну і диференціал другого порядку.

47. $y = 3e^{x^2} - 2\sin x$. **48.** $y = 4\arcsin\sqrt{x} + 6x^7$.

49. $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$. **50.** $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

51. $y=\left(1+4x^2\right)arctg\left(2x\right)+\pi$.

У завданнях **52-54** знайти похідну другого порядку

52. $\begin{cases} x=5(\sin t-t\cos t), \\ y=5(\cos t+t\sin t); \end{cases}$ **53.** $\begin{cases} x=\ln(3t) \\ y=t^2+4 \end{cases}$;

54. $x^2-2x+y^3-1=0$.

У завданнях **56-57** знайти похідну вказаного порядку.

55. $y=x^5-7x^2+3x-12\cos(2x)$, $y^{(8)}=?$

56. $y=x\cdot\log_4(9x)$, $y^{(6)}=?$

57. $y=\dfrac{x+a}{x-b}$, $y^{(n)}=?$

У завданнях **58-64** обчислити границі.

58. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$. **59.** $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln(6x)}{5+4\ln\sin x}$. **60.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2^x}$.

61. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)$. **62.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\sin x}$.

63. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\arcsin x}{tgx-x}$. **64.** $\lim\limits_{x\to0+0}\left(2^x-1\right)^{1-\cos x}$.

У завданнях **65-71** знайти інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

65. $y=4x^2-x+6$. **66.** $y=x^3-12x+4$. **67.** $y=\dfrac{x+2}{(x-5)^2}$.

68. $y=2x-\dfrac{7}{x}$. **69.** $y=x^2e^{-x}$. **70.** $y=\dfrac{x^2}{2\ln x}$.

71. $y=3-\ln\sqrt[5]{e+x^2}$.

У завданнях **72-78** знайти найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку.

72. $y=4x^2-x+6$, $[1;3]$.

73. $y=x^3-12x+4$, $[0;4]$.

74. $y=\frac{x+2}{(x-5)^2}$, $[-10;-5]$.

75. $y=2x-\frac{7}{x}$, $[2;10]$.

76. $y=x^2e^{-x}$, $[-1;\ln 5]$.

77. $y=\frac{x^2}{2\ln x}$, $[2;3]$.

78. $y=3-\ln\sqrt[5]{e+x^2}$, $\left[-\sqrt{e};\sqrt{e}\right]$.

У завданнях **79-84** знайти точки перегину, інтервали опуклості і увігнутості.

79. $y=4x^2+16x-1$. **80.** $y=\left(x^2-9\right)^3$. **81.** $y=\frac{8}{x}+\frac{1}{10x^4}$.

82. $y=x-\frac{4}{x}$. **83.** $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$. **84.** $y=x^2\ln x$.

У завданнях **85-90** скласти рівняння асимптот графіка функції.

85. $y=4x^2+16x-1$. **86.** $y=\left(x^2-9\right)^3$. **87.** $y=\frac{8}{x}+\frac{1}{10x^4}$.

88. $y=x-\frac{4}{x}$. **89.** $y=\frac{2x\cdot arctgx}{\pi}$. **90.** $y=x^2\ln x$.

У завданнях **91-96** дослідити функцію і побудувати ескіз її графіка.

91. $y=\frac{(x+5)^3}{(x-5)^2}$. **92.** $y=\frac{x^2+10}{2x}$. **93.** $y=x^2e^{-x^2}$.

94. $y=x-\frac{16}{x}$. **95.** $y=\left(\frac{2x-1}{x+4}\right)^3$. **96.** $y=x^2e^{\frac{1}{x-2}}$.

97. Для доставки продукції заводу C до міста A будується шосе, що з'єднує завод із залізницею AB, що проходить через місто A (рис. 5.14). Вартість перевезень по шосе в $\alpha,(\alpha>1)$ разів більша, ніж залізницею. До якої станції D потрібно провести шосе, щоб загальна вартість перевезень продукції заводу C до міста A була найменшою?

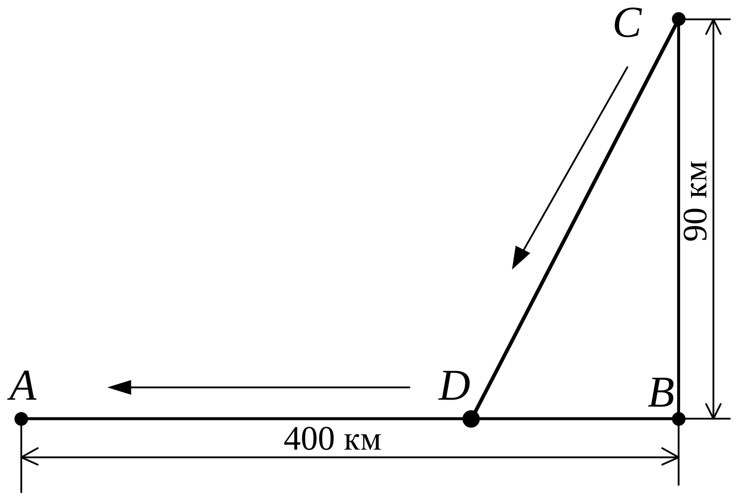


Рис. 5.14. Завдання 97

98. Потрібно огородити парканом прямокутну ділянку землі площею 600 кв. од. та ще поділити цю земельну ділянку парканом на дві частини однакової площини. За яких лінійних розмірів ділянки довжина всього паркану виявиться мінімальною?

99. а) потрібно виготовити відкритий циліндричний бак об'єму V, $м^3$. При якому відношенні розмірів бака (радіус дна R і висота H) витрати на його виготовлення будуть мінімальними?

б) потрібно виготовити відкритий циліндричний бак об'єму V, $м^3$. Вартість квадратного метра матеріалу, що йде на виготовлення дна бака, дорівнює a грош. од., а стінок – b грош. од. При якому відношенні розмірів бака (радіус дна R і висота H) витрати на його виготовлення будуть мінімальними?

100. Вікно має форму прямокутника, периметр якого дорівнює 24 м. Які мають бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільшу кількість світла?

Відповіді

1. $y' = 3x^2$. **2.** $y' = 2\cos(2x)$. **3.** $y' = 3e^{3x}$. **4.** $y' = -\dfrac{4}{\sin^2(4x)}$.

5. $y' = \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{1}{x}$. **6.** $y' = -\dfrac{22}{(4x+2)^2} + \cos x$.

7. $y' = \dfrac{2x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2\sqrt{x^3 - x^5}}$. **8.** $y' = \cos x - (x+2)\cdot\sin x - \dfrac{16}{x^3}$.

9. $y' = 9^x \ln 9 \cdot tgx + \dfrac{9^x}{\cos^2 x} + 3$. **10.** $y' = \dfrac{3 - 5\ln x}{\ln 64 \sqrt[3]{x^8}}$.

11. $y = \dfrac{-5e^{5x}}{2\sqrt{11 - e^{5x}}}$. **12.** $y' = -\dfrac{5\left(4x + (1-2x)\ln(1-2x)\right)}{2(1-2x)\sqrt{x^3}}$.

13. $y' = 2ctg3x\left(\cos 2x \cdot ctg3x - \dfrac{3\sin 2x}{\sin^2 3x}\right)$. **14.** $y' = \dfrac{1}{(2x+6)\sqrt{2x+5}}$.

15. $y' = \dfrac{-6x}{\sin^2\left(3x^2\right)}$. **16.** $y' = \dfrac{ctg\left(3x^2\right)}{(2x+6)\sqrt{2x+5}} - \dfrac{6x arctg\sqrt{2x+5}}{\sin^2\left(3x^2\right)}$.

17. $y' = \dfrac{17x\left(\sqrt{x^2+5}+4\right)^{16}}{\sqrt{x^2+5}}$. **18.** $y' = (x+3)^3\left(4 arctg\sqrt{x+2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)$.

19. $y' = \dfrac{6x}{\left(3 - x^2\right)\sqrt{9 - x^2}}$. **20.** $y' = \dfrac{1}{2 + e^x}$.

21. $y' = \dfrac{tg^3(4x)}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{12\arcsin x \cdot tg^2(4x)}{\cos^2(4x)} - \dfrac{1}{2\left(e^x + 1\right)}$.

22. $y' = -\sqrt{\dfrac{e^x}{2 - e^x}} - 4^x \ln 4$.

23. $y' = 345x^{14} - \dfrac{4\sin(4x+1)\left(4x^2+2x\right) + (8x+2)\cos(4x+1)}{\left(4x^2+2x\right)^2}$.

24. $y' = \dfrac{1}{6 + 4\sin y}$. **25.** $y' = \dfrac{2(x - 5y)}{3y^2 e^{y^3} + 10x}$. **26.** $y' = 26(x+y) + \dfrac{y}{x}$.

27. $y' = 5x^3\cos^2(xy) - \dfrac{y}{x}$. **28.** $y' = -\dfrac{y + 4x\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$.

29. $y' = \dfrac{y\sin x + \cos y + 2x}{x\sin y + \cos x - 1}$. **30.** $y'_x = \dfrac{28t^3}{5 - 12t^2}$. **31.** $y'_x = \dfrac{t}{\sin(2t)\sqrt{t^2+4}}$.

32. $y'_x = \dfrac{25}{4}\sqrt[10]{t^{21}}$. **33.** $y'_x = -tgt$. **34.** $y'_x = 4t$. **35.** -1.

36. $y' = \left(x^2+5\right)^{\sin x}\left(\dfrac{2x\sin x}{x^2+5} + \cos x \cdot \ln\left(x^2+5\right)\right)$.

37. $y'=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln\left(\operatorname{arctg}x\right)}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}x\left(1+x^2\right)}\right)$.

38. $y'=\left(10-\sqrt{x}\right)^{x^4}\left(4x^3\ln\left(10-\sqrt{x}\right)-\frac{\sqrt{x^7}}{2\left(10-\sqrt{x}\right)}\right)$.

39. $y'=\frac{1}{8}\left(\sqrt[8]{5x-2}\right)^{\cos x}\left(\frac{5\cos x}{5x-2}-\sin x\cdot\ln\left(5x-2\right)\right)$.

40. $y'=\frac{(5x-6)\sqrt[5]{\left(3+x^2\right)^9}}{\left(x^3+2\right)^4\left(2x^7+1\right)^{10}}\left(\frac{5}{5x-6}+\frac{18x}{5\left(3+x^2\right)}-\frac{12x^2}{x^3+2}-\frac{140x^6}{2x^7+1}\right)$.

41. $y=-6x-20$ – дотична, $y=\frac{x}{6}+\frac{65}{6}$ – нормаль.

42. $y=x+32\sqrt{2}$ – дотична, $y=-x$ – нормаль.

43. $\alpha=45^\circ$. **44.** $\alpha\approx 66^\circ$.

45. $y=-x^2+3x+5$.

46. $dy=y'dx$, де y' - похідна першого порядку (див. відповіді **5-23**).

47. $y''=6e^{x^2}\left(1+2x^2\right)+2\sin x$, $d^2y=\left(6e^{x^2}\left(1+2x^2\right)+2\sin x\right)dx^2$.

48. $y=\frac{2x-1}{\sqrt{\left(x-x^2\right)^3}}+252x^5$, $d^2y=\left(\frac{2x-1}{\sqrt{\left(x-x^2\right)^3}}+252x^5\right)dx^2$.

49. $y''=\frac{36(2x+1)(x+2)}{(x-1)^5}$, $d^2y=\frac{36(2x+1)(x+2)}{(x-1)^5}dx^2$.

50. $y''=\frac{2\left(x^3-3x^2-3x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $d^2y=\frac{2\left(x^3-3x^2-3x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}dx^2$.

51. $y''=8arctg\left(2x\right)+\frac{16x}{1+4x^2}$, $d^2y=\left(8arctg\left(2x\right)+\frac{16x}{1+4x^2}\right)dx^2$.

52. $y''_{xx}=\frac{-1}{5t\sin^3 t}$. **53.** $y''_{xx}=4t^2$. **54.** $y''=\frac{16-2y^3}{9y^5}$.

55. $y^{(8)}=-3072\cos(2x)$. **56.** $y^{(6)}=\frac{24}{x^5\ln 4}$. **57.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!(a+b)}{(x-b)^{n+1}}$.

58. $\frac{9}{50}$. **59.** $\frac{1}{4}$. **60.** 0. **61.** $-\infty$. **62.** 1. **63.** -1. **64.** 1.

65. $\min y = y\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{95}{16}$, спадає на $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right)$, зростає на $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

66. $\min y = y(2) = -12$, $\max y = y(-2) = 20$, спадає на $(-2;2)$, зростає на $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

67. $\min y = y(-9) = -\frac{1}{28}$, спадає на $(-\infty;-9)$, зростає на $(-9;+\infty)$.

68. Екстремумів не існує, зростає на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

69. $\min y = y(0) = 0$, $\max y = y(2) = \frac{4}{e^2}$, спадає на $(-2;0) \cup (2;+\infty)$, зростає на $(0;2)$.

70. $\min y = y\left(\sqrt{e}\right) = e$, спадає на $(0;1) \cup \left(1;\sqrt{e}\right)$, зростає на $\left(\sqrt{e};+\infty\right)$.

71. $\max y = y(0) = \frac{14}{5}$, спадає на $(0;+\infty)$, зростає на $(-\infty;0)$.

72. $\underset{[1,3]}{y_{найб}} = y(3) = 39$, $\underset{[1,3]}{y_{найм}} = y\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{95}{16}$.

73. $\underset{[0;4]}{y_{найб}} = y(4) = 20$, $\underset{[0;4]}{y_{найм}} = y(2) = -12$.

74. $\underset{[-10;-5]}{y_{найб}} = y(-5) = -\frac{3}{100}$, $\underset{[-10;-5]}{y_{найм}} = y(-9) = -\frac{1}{28}$.

75. $\underset{[2;10]}{y_{найб}} = y(10) = 19{,}3$, $\underset{[2;10]}{y_{найм}} = y(2) = 0{,}5$.

76. $\underset{[-1;\ln 5]}{y_{найб}} = y(-1) = e \approx 2{,}72$, $\underset{[-1;\ln 5]}{y_{найм}} = y(0) = 0$.

77. $\underset{[2;3]}{y_{найб}} = y(3) = \frac{9}{2\ln 3} \approx 4{,}1$, $\underset{[2;3]}{y_{найм}} = y(2) = \frac{2}{\ln 2} \approx 2{,}9$.

78. $\underset{\left[-\sqrt{e};\sqrt{e}\right]}{y_{найб}} = y(0) = \frac{14}{5}$, $\underset{\left[-\sqrt{e};\sqrt{e}\right]}{y_{найм}} = y\left(\sqrt{e}\right) = y\left(-\sqrt{e}\right) \approx 2{,}7$.

79. Точок перегину не існує, графік функції увігнутий на всій числовій осі.

80. Точки перегину: $(-3;0),(3;0),\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5};-373,248\right),\left(\frac{3\sqrt{5}}{5};-373,248\right)$, $\left(-3;-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{5}}{5};3\right)$- графік функції опуклий, $(-\infty;-3)\cup\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5};\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\cup(3;+\infty)$- графік функції увігнутий.

81. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{72}{5}\right)$- точка перегину, $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;+\infty)$- графік функції увігнутий, $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$- графік функції опуклий.

82. Точок перегину не існує, $(-\infty;0)$- графік функції увігнутий, $(0;+\infty)$- графік функції опуклий.

83. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$- точка перегину, $\left(-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$- графік функції увігнутий, $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$- графік функції опуклий.

84. $\left(\sqrt{e^3};\frac{3}{2e^3}\right)$- точка перегину, $\left(e^{-3/2};+\infty\right)$- графік функції увігнутий, $\left(0;e^{-3/2}\right)$- графік функції опуклий.

85. Асимптоти не існують.

86. Асимптоти не існують.

87. $x=0$ - вертикальна асимптота, $y=0$ - горизонтальна асимптота при $x\to\pm\infty$.

88. $x=0$ - вертикальна асимптота, $y=x$ - похила асимптота при $x\to\pm\infty$.

89. $y=x-\frac{2}{\pi}$ - похила асимптота при $x\to+\infty$, $y=-x-\frac{2}{\pi}$ - похила асимптота при $x\to-\infty$.

90. Асимптоти не існують.

Ескізи графіків функцій завдань **91-96** наведені на рис. 5.15-5.20.

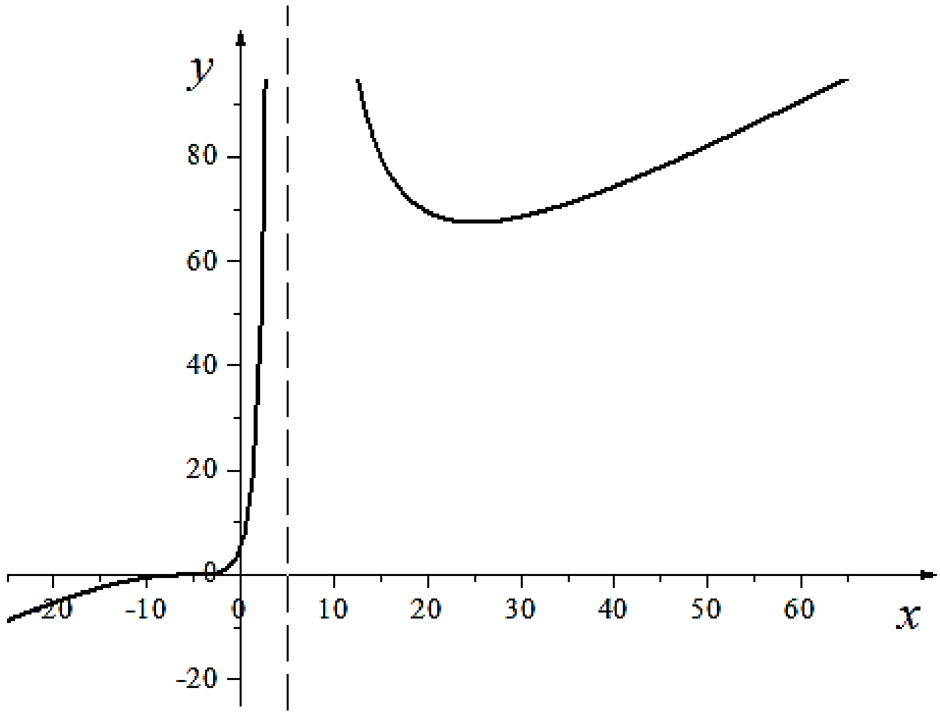


Рис. 5.15. Завдання 91

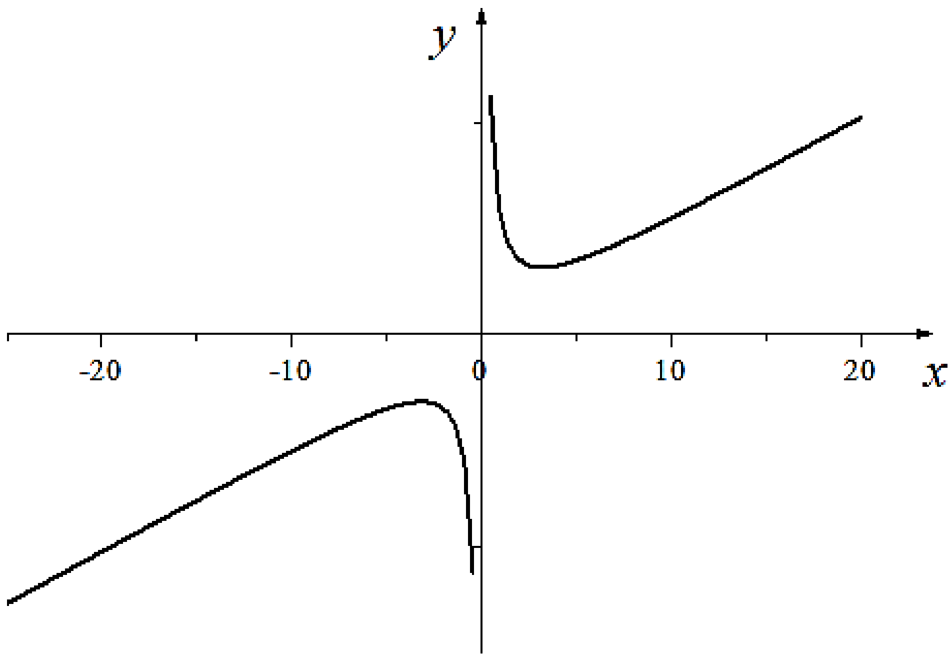


Рис. 5.16. Завдання 92

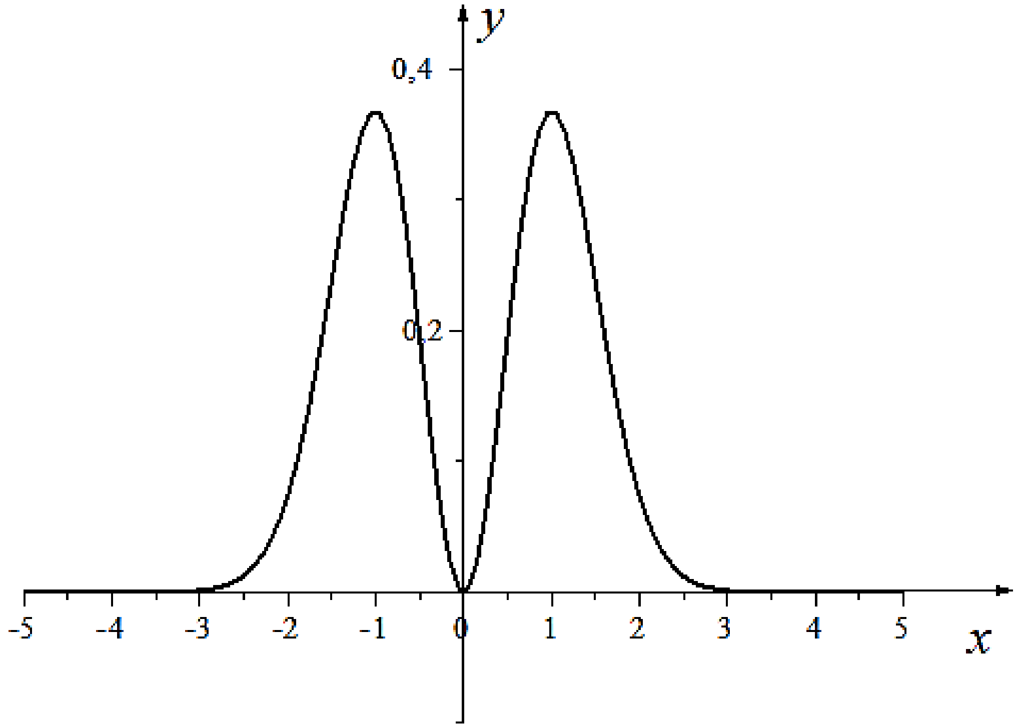


Рис. 5.17. Завдання 93

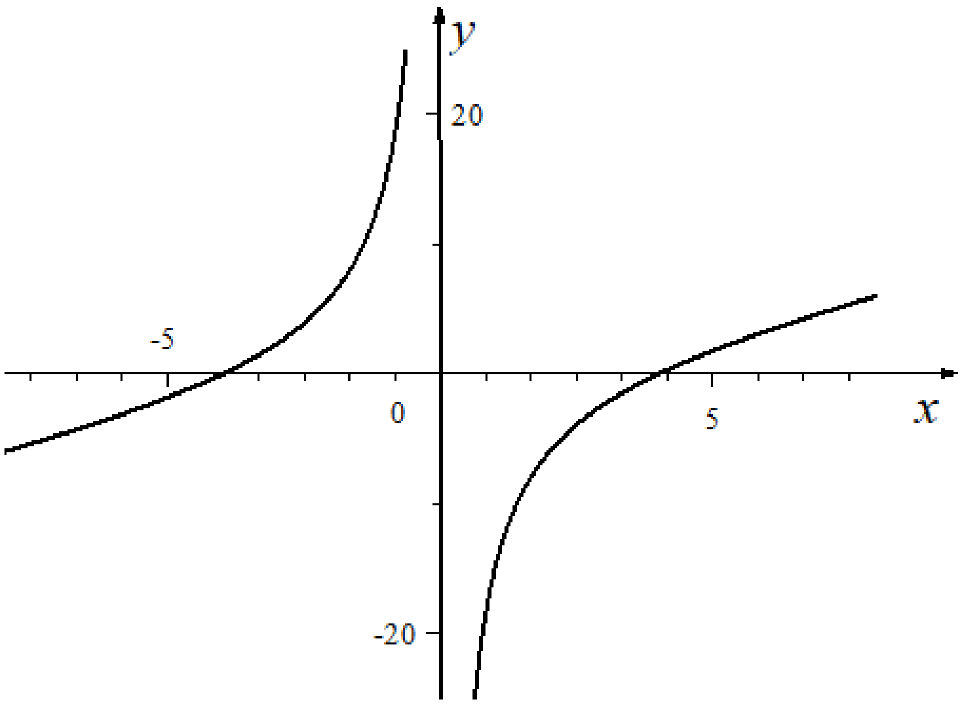


Рис. 5.18. Завдання 94

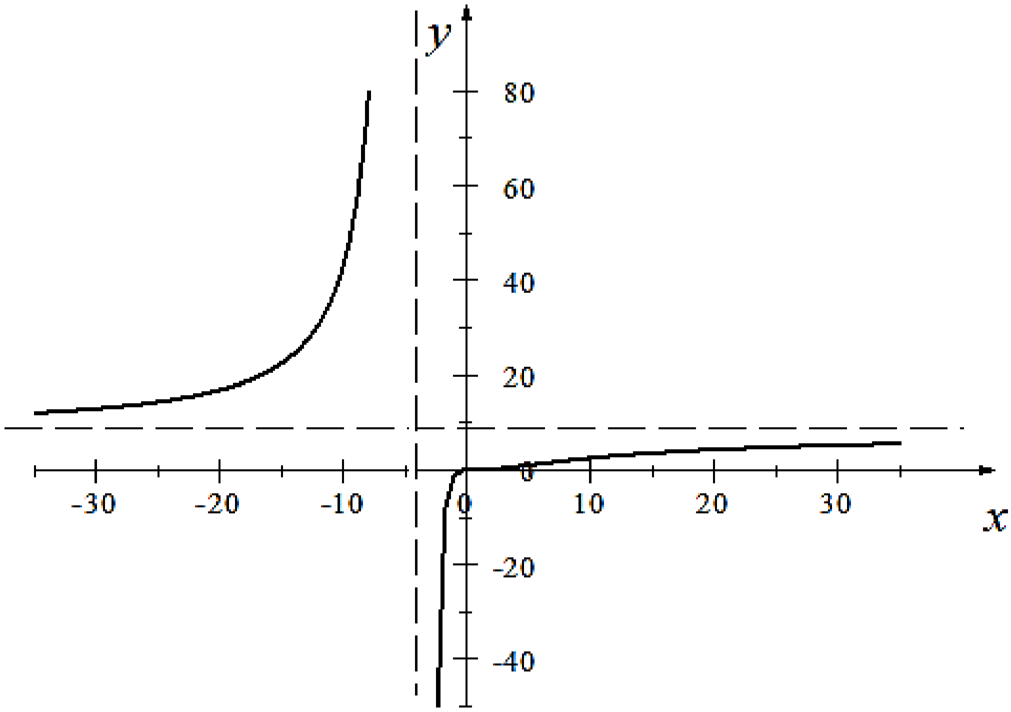


Рис. 5.19. Завдання 95

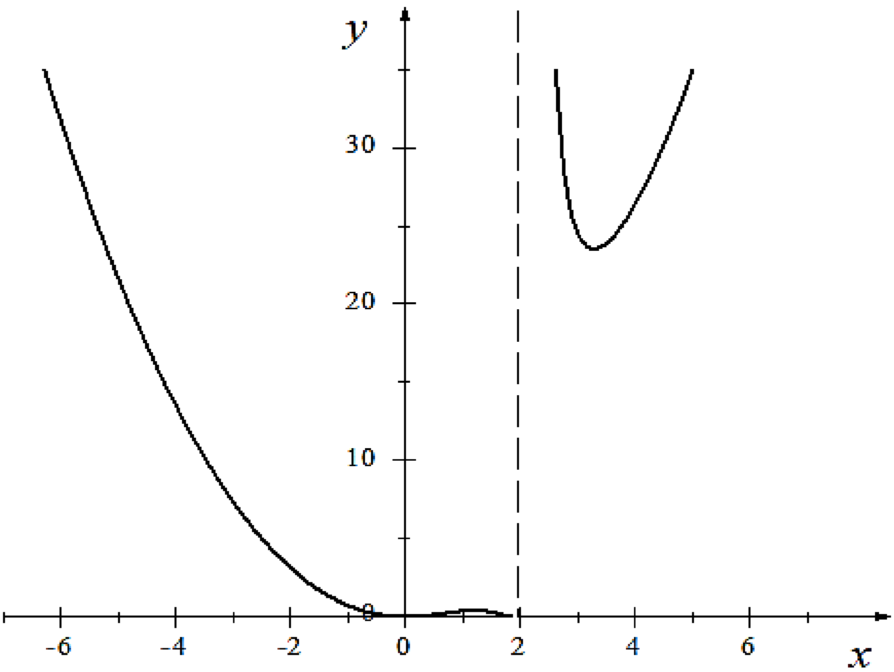


Рис. 5.20. Завдання 96

97. $AD = 400 - \dfrac{90}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ км. **98.** 20 од. і 30 од.

99. а) $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$, $\dfrac{H}{R} = 1$; б) $R = \sqrt[3]{\dfrac{Vb}{\pi a}}$, $\dfrac{H}{R} = \dfrac{a}{b}$.

100. Квадрат зі стороною $a = 6$ м.

6. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

До цього часу ми розглядали лише функції, що залежать від одного аргументу. Але багато явищ навколишнього середовища залежать від декількох величин. Такі процеси описується функцією багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, де $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються *аргументами* або *незалежними змінними*. Для простоти викладення матеріалу розглянемо основні поняття на прикладі функції двох змінних $z = f(x, y)$, оскільки їх легко можна узагальнити на випадок трьох і більшої кількості аргументів.

6.1. Функція двох змінних. Область визначення

Нехай D – деяка множина точок площини xOy.

Визначення. Величина z називається *функцією двох змінних* x, y, якщо існує правило або закон, за яким кожній парі чисел x, y з області D відповідає єдине значення z.

Функцію двох змінних позначають $z = f(x, y)$, $z = z(x, y)$ або $z = F(x, y)$.

Функцію $z = f(x, y)$ можна розглядати як функцію точки $M(x, y)$ площини xOy і позначати $z = f(M)$.

Значення функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ позначають $f(x_0, y_0)$ або $f(M_0)$.

Визначення. Змінні x і y називаються *незалежними змінними* або *аргументами*. Область D називається *областю визначення* функції.

Областю визначення функції двох змінних може бути як обмежена, так і необмежена частина площини.

Визначення. Межею області визначення D називається лінія, що обмежує область *внутрішніми точками області* - точками області визначення функції, що не лежать на межі області визначення.

Визначення. Область визначення функції називається:

- *відкритою*, якщо вона містить лише внутрішні точки;
- *замкненою*, якщо також містить усі точки межі.

Для знаходження області визначення функції потрібно:

1) записати нерівність або систему нерівностей, що відповідає області визначення елементарних функцій, за допомогою яких побудована функція $z=f(x,y)$;

2) знайти область визначення, використовуючи графічний або аналітичний метод розв'язання нерівності або системи нерівностей.

Приклад 6.1. Знайти область визначення функцій:

1) $z=5x^2+7y^3-6$;

2) $z=\lg\left(y-4x^2\right)$;

3) $z=\sqrt{9-x^2-0,25y^2}$.

Розв'язання

1. Для функції $z=5x^2+7y^3-6$ областю визначення є вся площина xOy, оскільки вона визначена при будь-яких значеннях x та y.

2. За визначенням логарифма,

$$y-4x^2>0 \Leftrightarrow y>4x^2.$$

Тобто область визначення функції $z=\lg\left(y-4x^2\right)$ - це множина точок площини, розташованих усередині параболи $y=4x^2$ (рис. 6.1, а). Маємо відкриту область.

3. Область визначення функції $z=\sqrt{9-x^2-0,25y^2}$ задовольняє умову

$$9-x^2-0,25y^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{4}\le 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}\le 1.$$

Цю нерівність задовольняють точки, що знаходяться всередині еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}\le 1$ і на його межі. Маємо замкнену область визначення функції (рис. 6.1, б).

Визначення. Графіком функції двох змінних $z=f(x,y)$ називають множину точок $P\left(x;y;f(x,y)\right)$ тривимірного простору.

Тобто графіком функції $z=f(x,y)$ є поверхня у тривимірному просторі, проєкцією якої на площину xOy є область D.

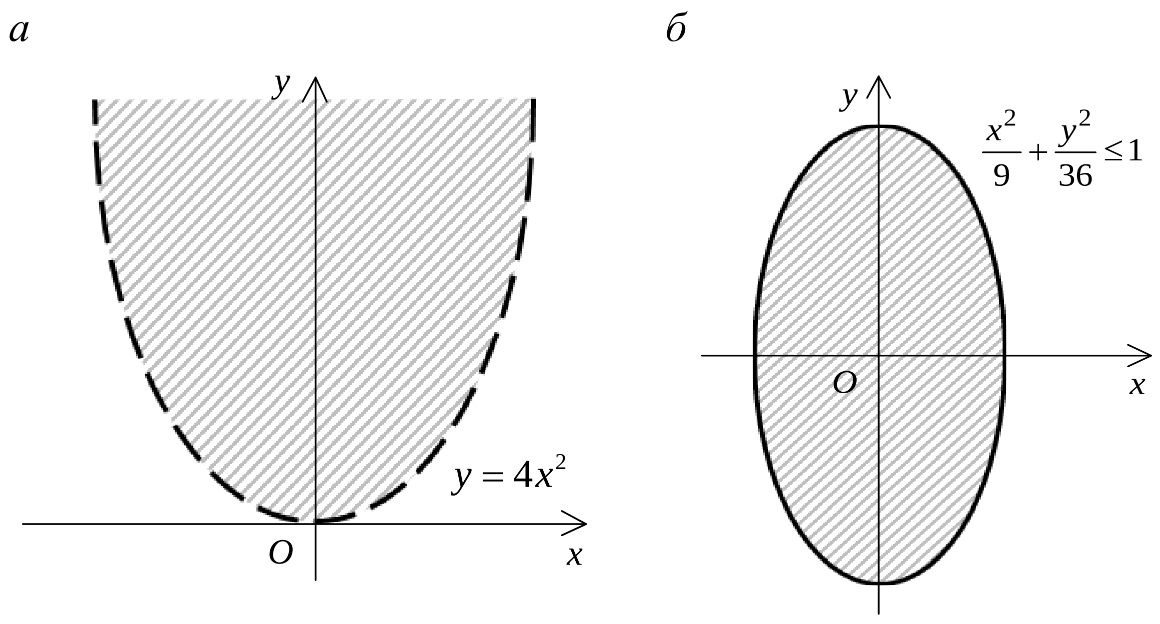


Рис. 6.1. Приклад 6.1

Наприклад, графік функції $z = x^2 + y^2$, зображений на рис. 6.2, називається параболоїдом.

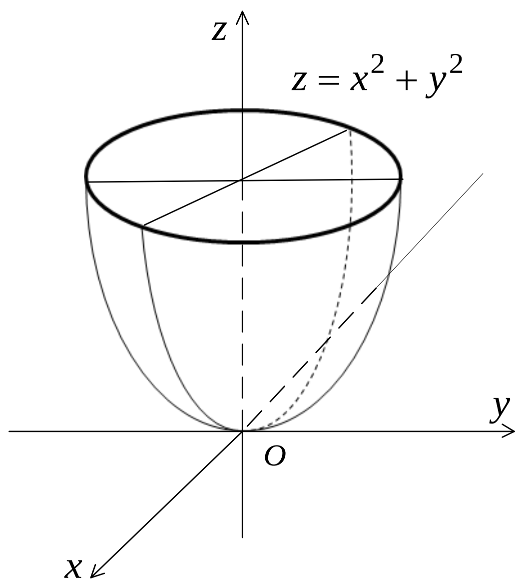


Рис. 6.2. Параболоїд

Уявлення про поведінку функції можна отримати без побудови її графіка. Для цього використовують лінії рівня.

Визначення. Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина точок площини xOy, у яких функція набуває одного і того самого значення $f(x, y) = C$, $C = const, C \in R$ (рис. 6.3).

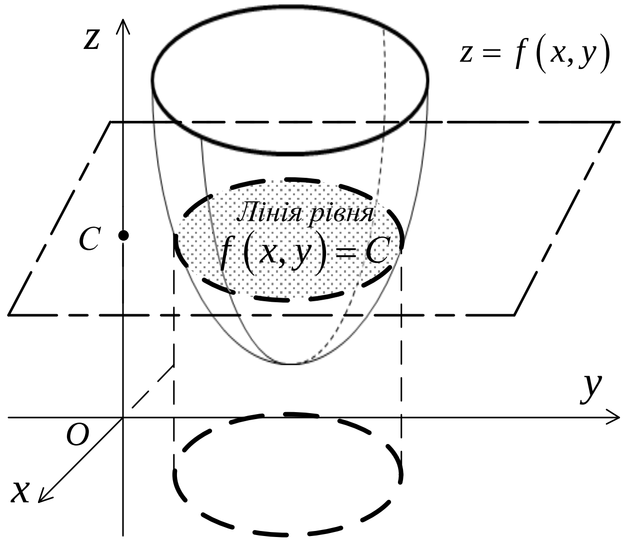


Рис. 6.3. Лінія рівня $f(x,y)=C$

Так, лініями рівня функції $z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ будуть криві $x^2+\dfrac{y^2}{4}=C$. Як відомо з курсу аналітичної геометрії (конспект лекцій, частина 1), рівняння $\dfrac{x^2}{C}+\dfrac{y^2}{4C}=1$ визначає еліпс, центр якого співпадає з початком координат, а півосі дорівнюють $a=\sqrt{C}, b=2\sqrt{C}$. Сім'я ліній рівня для поверхні $z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ зображена на рис. 6.4.

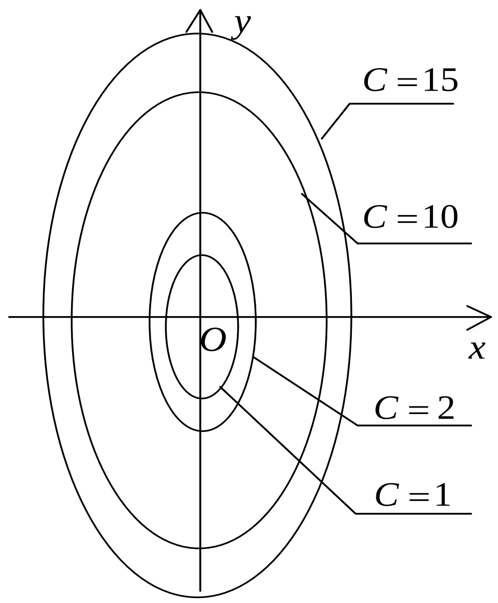


Рис. 6.4. Лінії рівня $z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$.

6.2. Границя та неперервність функції двох змінних

Визначення. Околом точки $M_0(x_0, y_0)$ δ називається множина всіх точок $M(x, y)$ площини, координати яких задовольняють нерівність

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta .$$

Тобто δ- окіл точки $M_0(x_0, y_0)$- це коло радіуса δ з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 6.5).

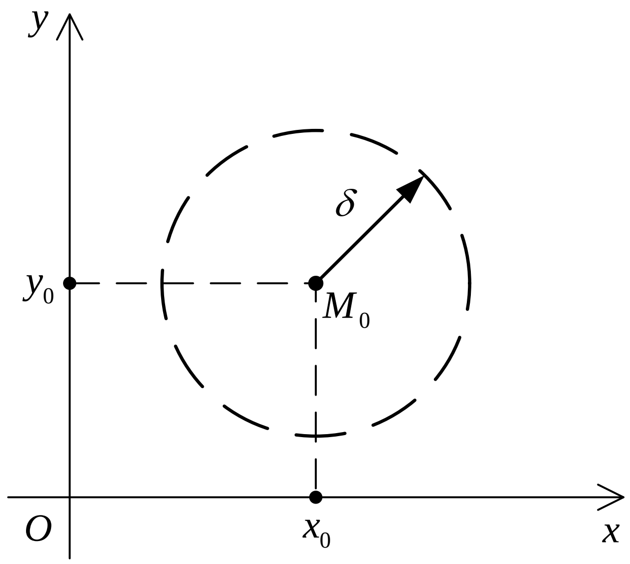


Рис. 6.5. δ- окіл точки $M_0(x_0, y_0)$

Визначення. Число A називається *границею функції* $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ і $y \to y_0$ (тобто при $M(x, y) \to M(x_0, y_0)$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \neq x_0$ і $y \neq y_0$, які задовольняють нерівність $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, виконується умова $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Отже,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ або } \lim_{M\to M_0} f(M)=A.$$

Визначення. Функція $z = f(x,y)$ називається неперервною в точці $M(x_0, y_0)$, якщо:

- вона визначена в цій точці;
- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

6.3. Частинні похідні і диференціали функції кількох змінних

6.3.1. Частинні похідні і диференціал першого порядку

Визначення:

1. *Частинною похідною першого порядку* функції $z = f(x,y)$ за змінною x називається $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ і позначається одним з символів: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, f'_x.

2. *Частинною похідною першого порядку* функції $z = f(x,y)$ за змінною y називається $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ і позначається одним з символів: $\dfrac{\partial z}{\partial y}, z'_y, f'_y$.

Тобто

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

3. Вирази $\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x; y)$ і $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ називають *частинним приростом функції* $z = f(x,y)$ у точці $M(x; y)$ за x і y відповідно, а вираз $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y)$ - *повним приростом* функції.

Частинні похідні функції $z = f(x,y)$ знаходять за формулами обчислення похідних функції однієї змінної, при цьому іншу змінну вважають сталою.

Зауваження. При знаходженні частинних похідних першого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f = f(x_1,...,x_i + \Delta x_i,...x_n) - f(x_1,...,x_i,...x_n)}{\Delta x_i}, i = 1,2...n$$

для функції $u = f(x_1, x_2 ... x_n)$ n решту змінних вважають сталими.

Теорема 6.1. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x; y)$, то вона неперервна в цій точці і має в ній частинні похідні першого порядку.

Визначення. Повним диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ називається вираз

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{6.1}$$

Теорема 6.2 ***(достатня умова диференційованості функції)***. Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні першого порядку в деякому околі точки $M(x; y)$, то вона диференційована в цій точці.

Приклад 6.2. Знайти частинні похідні і повний диференціал функції $z = x^2y^5 - 7xy^4 + 6x^3 - e^2$.

Розв'язання

Вважаючи сталою змінну y, знайдемо частинну похідну за змінною x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2y^5 - 7xy^4 + 6x^3 - e^2\right)'_x = |y = const| = 2xy^5 - 7y^4 + 18x^2.$$

Аналогічно знайдемо частинну похідну за змінною y, вважаючи сталою змінну x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2y^5 - 7xy^4 + 6x^3 - e^2\right)'_y = |x = const| = 5x^2y^4 - 28xy^3.$$

Використовуючи знайдені частинні похідні за виразом (6.1), запишемо повний диференціал:

$$dz = \left(2xy^5 - 7y^4 + 18x^2\right)dx + \left(5x^2y^4 - 28xy^3\right)dy.$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^5 - 7y^4 + 18x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2y^4 - 28xy^3$;

$$dz = \left(2xy^5 - 7y^4 + 18x^2\right)dx + \left(5x^2y^4 - 28xy^3\right)dy.$$

6.3.2. Частинні похідні і диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ у деякій області D має частинні похідні першого порядку z'_x, z'_y. Частинні похідні першого порядку можна розглядати як функції від двох змінних x і y.

Визначення. Якщо функції z'_x, z'_y диференційовані в точці $M(x; y)$ області D, то їхні частинні похідні називаються *частинними похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx}. \end{gathered}, \tag{6.2}$$

Аналогічно визначаються частинні похідні більш високого порядку.

Визначення. Похідні, знайдені за різними змінними, називаються *мішаними частинними похідними*.

Для функції двох змінних мішаними похідними другого порядку будуть $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Для мішаних частинних похідних справедлива така теорема.

Теорема 6.3 (про рівність мішаних частинних похідних). Якщо мішані частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ неперервні в точці $M(x; y)$, то в цій точці

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{6.3}$$

Визначення. Диференціал від диференціала першого порядку функції $z = f(x, y)$ називається *диференціалом другого порядку*:

$$d^2z = d(dz).$$

Отже,

$$d^2z = d(dz) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy.$$

Таким чином, якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, то диференціал другого порядку від функції $z = f(x, y)$ має вигляд

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 . \tag{6.4}$$

Приклад 6.3. Знайти частинні похідні і диференціал другого порядку функції $z = x^2y^5 - 7xy^4 + 6x^3 - e^2$.

Розв'язання

Частинні похідні цієї функції були знайдені в прикладі 6.2.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^5 - 7y^4 + 18x^2, \; \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2y^4 - 28xy^3.$$

За формулою (6.2) маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2xy^5 - 7y^4 + 18x^2\right)'_x = |y = const| = 2y^5 + 36x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(5x^2y^4 - 28xy^3\right)'_y = |x = const| = 20x^2y^3 - 84xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(5x^2y^4 - 28xy^3\right)'_x = |y = const| = 10xy^4 - 28y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \left(2xy^5 - 7y^4 + 18x^2\right)'_y = |x = const| = 10xy^4 - 28y^3.$$

Як бачимо, умови теореми 6.3 виконуються і $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Запишемо вираз для другого диференціала за формулою (6.4):

$$d^2z = \left(2y^5 + 36x\right)dx^2 + 4y^3\left(5xy - 14\right)dxdy + 4xy^2\left(5xy - 21\right)dy^2 \ .$$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^5 + 36x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20x^2y^3 - 84xy^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10xy^4 - 28y^3,$$

$$d^2z = \left(2y^5 + 36x\right)dx^2 + 4y^3\left(5xy - 14\right)dxdy + 4xy^2\left(5xy - 21\right)dy^2 \ .$$

6.3.3. Застосування частинних похідних

6.3.3.1. Дотична площина і нормаль до поверхні

Для диференційованої в точці $P_0\left(x_0; y_0; f\left(x_0; y_0\right)\right)$ функції $z = f(x,y)$ існує дотична площина і нормаль до графіка функції в цій точці за умови, що не всі частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю.

Визначення. Дотичною площиною до поверхні $z = f(x,y)$ у точці $P_0\left(x_0; y_0; f\left(x_0; y_0\right)\right)$ називається площина, що містить дотичні до всіх кривих, що лежать на поверхні і проходять через точку P_0.

Визначення. Пряма, що проходить через точку $P_0\left(x_0; y_0; f\left(x_0; y_0\right)\right)$ перпендикулярно до дотичної площини в цій точці, називається *нормаллю* до поверхні $z = f(x,y)$ у точці P_0.

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x,y)$ у точці $P_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ $\left(z_0 = f\left(x_0; y_0\right)\right)$ визначається рівнянням

$$z - z_0 = z'_x(P_0)\left(x - x_0\right) + z'_y(P_0)\left(y - y_0\right), \tag{6.5}$$

а рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{z'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{-1}, \tag{6.6}$$

де вектор $\overline{n} = \left(z'_x(P_0); z'_y(P_0); -1\right)$ - нормальний вектор дотичної площини (напрямний вектор нормалі).

Якщо рівняння поверхні задано в неявному вигляді $F(x;y;z)=0$, то:

- ✓ рівняння дотичної площини в точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$ має вигляд

$$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

- ✓ а рівняння нормалі $\dfrac{x-x_0}{F'_x(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(P_0)}$.

6.3.3.2. Похідна за напрямом і градієнт

Частинні похідні функції кількох змінних показують швидкість зміни цієї функції в напрямку відповідних осей координат. Для того щоб визначити швидкість зміни функції в довільному напрямі, використовують похідну за напрямком.

Нехай з деякої точки $M(x_0;y_0)$ вказано напрямок, заданий вектором $\overline{a}$, що утворює з осями координат кути α,β (рис. 6.6).

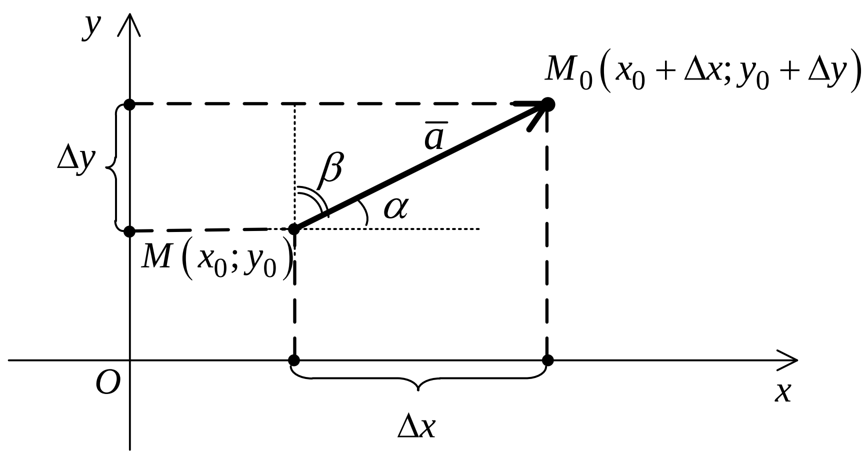


Рис. 6.6. Напрямок, заданий вектором $\overline{a}$

Визначення. Похідною функції $z=f(x,y)$ у точці $M(x_0;y_0)$ *за напрямком вектора* $\overline{a}$ називається границя відношення приросту функції $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ при переході від точки $M(x_0;y_0)$ до точки $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ у напрямку вектора $\overline{a}(a_x;a_y)$ до відстані $\Delta a=\left|\overline{M_0M}\right|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ між цими точками при $\Delta a\to 0$.

Похідна за напрямком вектора $\overline{a}$ позначається символом $\dfrac{\partial z(M)}{\partial \overline{a}}$:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \overline{a}} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{\Delta a}.$$

Для знаходження $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial \overline{a}}$ використовують формулу

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \overline{a}} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\cos\beta, \qquad (6.7)$$

де $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\overline{a}|}, \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\overline{a}|}$ - напрямні косинуси вектора $\overline{a}$ (конспект лекцій, частина 1).

Аналогічно визначається і похідна за напрямком функції трьох і більше змінних. Так, у випадку функції трьох змінних $u = u(x; y; z)$ користуються формулою

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,\ \cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}.$$

! Похідна функції за напрямком показує швидкість зміни функції в цьому напрямку.

Зауважимо, що частинні похідні можна розглядати як похідні за напрямком координатних осей.

У практичних задачах часто потрібно визначити напрямок, у якому функція має найбільшу швидкість зростання (спадання). Для цього використовують поняття градієнта функції.

Визначення. Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ називається вектор $gradz(M_0)$, координатами якого є значення частинних похідних першого порядку в точці $M_0(x_0; y_0)$, а початок співпадає з цією точкою:

$$grad\, z(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\overline{j} = \left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}; \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\right). \qquad (6.8)$$

Аналогічно вводиться поняття градієнта для функції більшої кількості змінних. Наприклад, для функції трьох змінних $u = u(x;y;z)$ градієнт у точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$ має вигляд

$$grad\, u(P_0) = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u(P_0)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u(P_0)}{\partial z}\bar{k}$$

або

$$grad\, u(P_0) = \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial x};\frac{\partial u(P_0)}{\partial y};\frac{\partial u(P_0)}{\partial z}\right).$$

! У напрямку градієнта функція має найбільшу швидкість зростання, що дорівнює $|grad\, u|$, а в напрямку, протилежному градієнту, - найменшу.

Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямком

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial a} = grad\, u(P_0)\cdot \overline{a^0} = np_{\overline{a^0}}\, grad\, u(P_0),$$

де $\overline{a^0}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ - орт вектора $\bar{a}$.

Відзначимо основні властивості градієнта.

1. $grad(u \pm v) = grad\, u \pm grad\, v$;
2. $grad(Cu) = Cgrad\, u$, $C = const, C \in R$;
3. $grad(u \cdot v) = v\, grad\, u + u\, grad\, v$;
4. $grad\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\ grad\, u - u\ grad\, v}{v^2}$.

Приклад 6.4. Для функції $z = x^2y^5 - 7xy^4 + 6x^3 - 34$ потрібно:

1. Визначити найбільшу швидкість зростання функції в точці $M_0(2;-1)$.

2. З'ясувати характер зміни функції в точці $M_0(2;-1)$ за напрямком вектора $\bar{a}(-6;8)$.

3. Записати рівняння дотичної площини і нормалі в точці $M_0(2;-1)$.

Розв'язання

Частинні похідні цієї функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^5-7y^4+18x^2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=5x^2y^4-28xy^3.$$

Їхні значення в заданій точці

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2;-1)}=2\cdot 2\cdot(-1)-7(-1)^4+18\cdot 2^2=61,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2;-1)}=5\cdot 2^2(-1)^4-28\cdot 2(-1)^3=76.$$

1. Для визначення найбільшої швидкості зростання функції потрібно знайти її градієнт у заданій точці. За формулою (6.8) маємо

$$grad\,z(M_0)=(61;76).$$

Отже, у напрямку вектора $grad\,z(M_0)=(61;76)$ швидкість зростання максимальна і дорівнює $|grad\,z|=\sqrt{61^2+76^2}=\sqrt{9497}\approx 97,45$. Зауважимо, що в напрямку $(-61;-76)$ функція матиме максимальну швидкість спадання

$$-|grad\,z|=-\sqrt{61^2+76^2}=-\sqrt{9497}\approx -97,45.$$

2. Для того щоб визначити характер зміни функції в точці $M_0(2;-1)$ у напрямку вектора $\bar{a}(-6;8)$, знайдемо похідну в цій точці за заданим напрямком. Оскільки напрямні косинуси вектора $\bar{a}(-6;8)$ дорівнюють

$$\cos\alpha=\frac{-6}{\sqrt{(-6)^2+8^2}}=-0,6,\ \cos\beta=\frac{8}{\sqrt{(-6)^2+8^2}}=0,8,$$

то

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=61\cdot(-0,6)+76\cdot 0,8=24,2.$$

Отже, оскільки похідна за напрямком додатна, то функція в цьому напрямку зростає.

3. За формулами (6.5) і (6.6) складемо рівняння дотичної площини і нормалі в точці $M_0(2;-1)$ відповідно. Враховуючи, що

$$z_0 = z(M_0) = 2^2 \cdot (-1)^5 - 7 \cdot 2 \cdot (-1)^4 + 6 \cdot 2^3 - 34 = -4,$$

отримаємо:

- ✓ $z + 4 = 61(x-2) + 76(y+1)$ або $61z + 76y - z - 50 = 0$ - рівняння дотичної площини;
- ✓ $\dfrac{x-2}{61} = \dfrac{y+1}{76} = \dfrac{z+4}{-1}$ - рівняння нормалі.

Відповідь:

1. Максимальна швидкість зростання дорівнює $\sqrt{9497} \approx 97,45$.
2. Функція за напрямком вектора $\overline{a}(-6;8)$ зростає.
3. $61z + 76y - z - 50 = 0$ - рівняння дотичної площини;

   $\dfrac{x-2}{61} = \dfrac{y+1}{76} = \dfrac{z+4}{-1}$ - рівняння нормалі.

6.3.3.3. Екстремум функції двох змінних

Нехай точка $M_0(x_0;y_0)$ - внутрішня точка області визначення функції $z = f(x;y)$.

Визначення. Точка $M_0(x_0;y_0)$ називається *точкою локального максимуму* (рис. 6.7) функції $z = f(x;y)$, якщо існує такий δ - окіл точки $M_0(x_0;y_0)$, що для будь-якої точки $M(x;y)$ з цього околу виконується нерівність $f(x;y) < f(x_0;y_0)$.

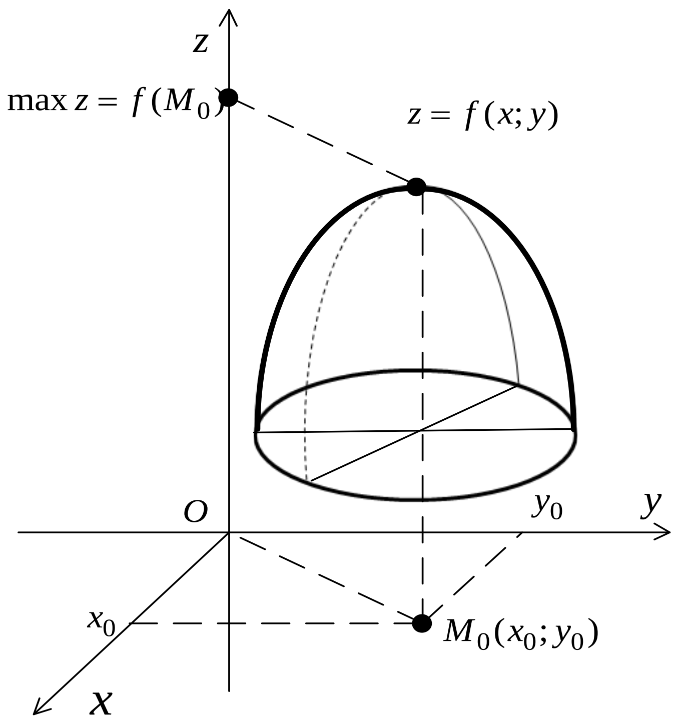


Рис. 6.7. Локальний максимум

Визначення. Точка $M_0(x_0;y_0)$ називається *точкою локального мінімуму* (рис. 6.8) функції $z = f(x;y)$, якщо існує такий δ- окіл точки $M_0(x_0;y_0)$, що для будь-якої точки $M(x;y)$ з цього околу виконується нерівність $f(x;y) > f(x_0;y_0)$.

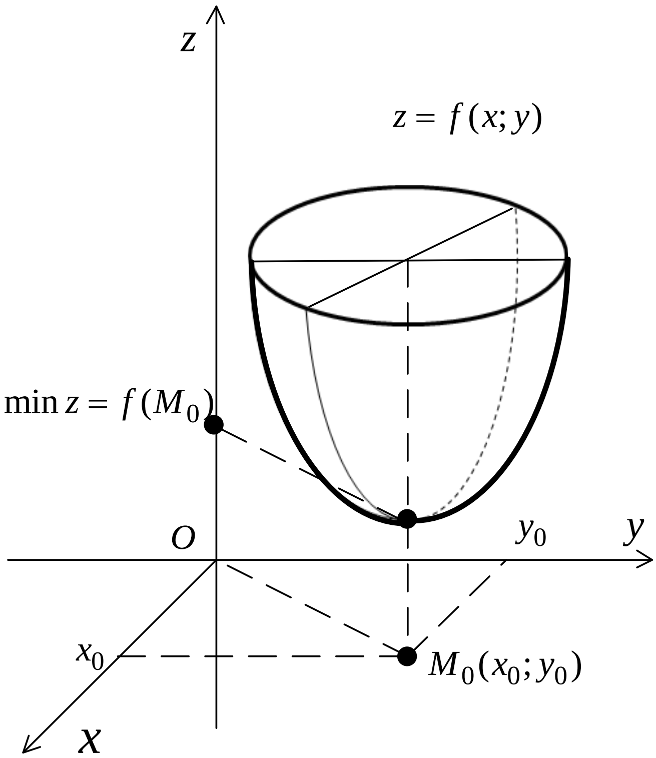


Рис. 6.8. Локальний мінімум

Визначення. Точки максимуму і мінімуму називаються *точками екстремуму*, а значення функції в таких точках називається *екстремумом* функції.

В області визначення функція може мати декілька екстремумів або не мати жодного.

Розглянемо необхідну і достатню умови існування екстремуму функції в точці M_0.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо функція $z = f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю або не існують.

Визначення. Точка $M_0(x_0;y_0)$ називається *стаціонарною точкою* функції $z = f(x,y)$, якщо її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю.

Визначення. Стаціонарні точки і точки, у яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками*.

! Функція може мати екстремум лише в критичній точці, але критична точка не завжди є точкою екстремуму.

За допомогою необхідної умови визначають лише точки, підозрілі на екстремум. Для доведення того, що отримані точки є екстремумами, використовують достатню умову. Для того щоб її сформулювати, розглянемо визначник, елементами якого є похідні другого порядку функції $z = f(x,y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}. \tag{6.9}$$

Визначення. Визначник, елементами якої є частинні похідні другого порядку функції кількох змінних, називається *гесіаном*, а відповідна матриця – м*атрицею Гессе*.

Для функції двох змінних гесіан є визначником другого порядку.

Достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $z = f(x,y)$ у стаціонарній точці $M_0(x_0;y_0)$ і деякому її околі $z = f(x,y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді, якщо:

1) $\Delta > 0$, то в точці $M_0(x_0;y_0)$ функція має екстремум, а саме:
   а) максимум, коли $z''_{xx}\left(M_0\right) < 0$;
   б) мінімум, коли $z''_{xx}\left(M_0\right) > 0$;
2) $\Delta < 0$, то в точці $M_0(x_0,y_0)$ функція не має екстремуму.

Якщо у стаціонарній точці гесіан $\Delta = 0$, то потрібно додаткове дослідження, оскільки наведені вище достатні умови не відповідають на запитання про існування екстремуму.

Приклад 6.5. Дослідити на екстремум функцію

$$z = y^3 + 8x^2 + 12xy - 8x + 35.$$

Розв'язання

Функція $z = y^3 + 8x^2 + 12xy - 8x + 35$ визначена на всій площині.

1. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 16x + 12y - 8,$$

$$z'_y = 3y^2 + 12x.$$

2. Стаціонарні точки визначимо з системи:

$$\begin{cases} z'_x = 16x + 12y - 8 = 0, \\ z'_y = 3y^2 + 12x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 2 = 0, \\ y^2 + 4x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{y^2}{4}, \\ 4\left(-\dfrac{y^2}{4}\right) + 3y - 2 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння отримаємо $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Підставляючи отримані значення в перше рівняння, одержимо $x_1 = -\dfrac{1}{4}$, $x_2 = -1$. Отже, маємо дві стаціонарні точки $M_1\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$ і $M_2(-1;2)$, кожну з яких потрібно дослідити за допомогою достатніх умов.

6. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 16,\ z''_{yy} = 6y,\ z''_{xy} = z''_{yx} = 12$$

і складемо гесіан $\Delta = \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 6y \end{vmatrix}$.

4. Обчислимо гесіан для кожної точки.

Точка $M_1\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$: $\Delta(M_1) = \Delta\left(-\dfrac{1}{4};1\right) = \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = -48 < 0$, тобто в точці $M_1\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$ функція не має екстремуму.

Точка $M_2(-1;2)$: $\Delta(M_2) = \Delta(-1;2) = \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} = 48 > 0$. Гесіан додатний, а це означає, що функція в цій точці має екстремум. Характер екстремуму визначимо за знаком $z''_{xx}(M_2)$. Оскільки $z''_{xx}(M_2) = 16 > 0$, то стаціонарна точка є точкою локального мінімуму. Обчислимо значення функції в цій точці:

$$\min z = z(-1;2) = 2^3 + 8(-1)^2 + 12\cdot(-1)\cdot 2 - 8(-1) + 35 = 35.$$

Відповідь: $\min z = z(-1;2) = 35$.

6.3.3.4. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області

Функція $z = f(x,y)$, неперервна в замкненій області, досягає в цій області свого найбільшого та найменшого значень. Оскільки таких значень функція може набувати як у внутрішніх точках області (точках екстремуму), так і на границі області, то для знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної в замкненій обмеженій області D функції потрібно:

1) знайти всі критичні точки функції, що належать області D, і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше та найменше значення функції на границі області (пп. 5.7.2);

3) порівняти знайдені на перших двох кроках значення функції і вибрати з них найменше та найбільше.

Приклад 6.6. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 - x + 2xy - y^2$ в замкненій області D: $y \ge 0,\ 0 \le x \le 2,\ y \le 3 - x$.

Розв'язання

1. Зобразимо область D на площині. Для цього побудуємо прямі $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 3 - x$, що обмежують цю область. Наша область – це чотирикутник $OABC$ з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(0;3)$, $B(2;1)$, $C(2;0)$ (рис. 6.9).

2. Знайдемо критичні точки функції. Частинні похідні першого порядку

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 1 + 2y, \\ z'_y = 2x - 2y \end{cases}$$

існують для будь-яких значень змінних. Ця функція має лише стаціонарні точки. Знайдемо їх, прирівнюючи до нуля частинні похідні.

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 + 2y = 0, \\ 2x - 2y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 1 + 2y = 0, \\ y = x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0, \\ y = x. \end{cases}$$

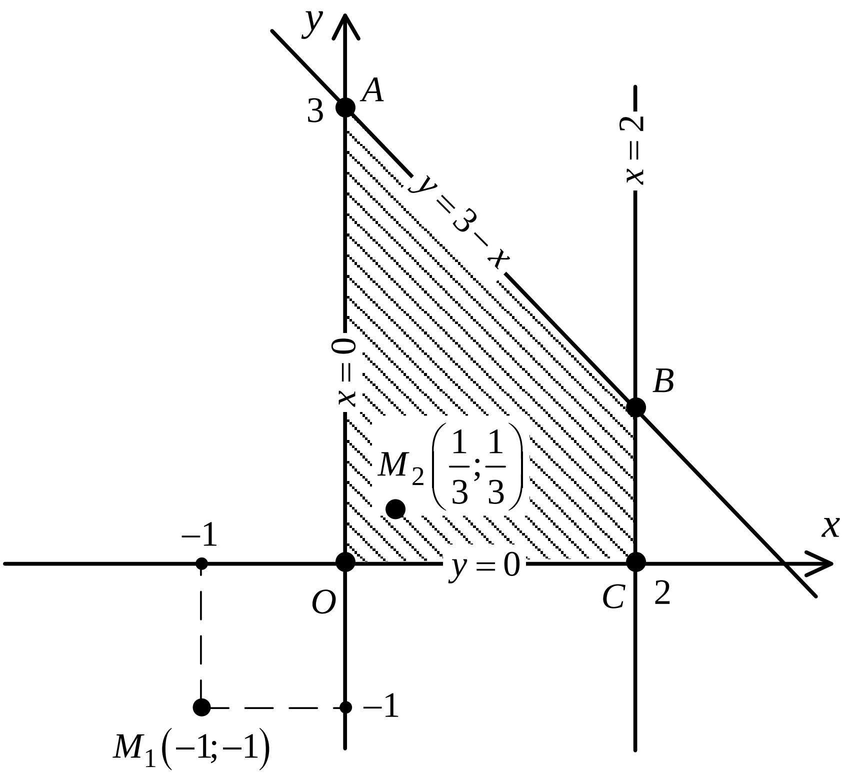


Рис. 6.9. Приклад 6.6

Маємо дві стаціонарні точки $M_1(-1;-1), M_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, з яких лише $M_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ належить заданій області D (рис. 6.9). Знайдемо значення функції в цій точці:

$$z\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{5}{27}\approx-0{,}19 .$$

3. Дослідимо поведінку функції на границі області. У кожному випадку маємо задачу пошуку найбільшого та найменшого значення функції однієї змінної на відрізку (пп. 5.7.2):

- пряма OA: $x=0\Rightarrow$ $z=0^3-0+2\cdot0\cdot y-y^2=-y^2$. Тобто нам потрібно знайти найбільше та найменше значення функції $z=-y^2$ на відрізку $y\in[0;3]$. Знайдемо її стаціонарні точки:

$$z'_y=-2y=0\Rightarrow y=0\in[0;3].$$

Обчислимо значення в знайденій точці і на кінцях відрізку OA;

x	0	0
y	0	3
z	**0**	**– 9**

- пряма BC: $x=2 \Rightarrow z=2^3-2+2\cdot 2\cdot y-y^2=6+4y-y^2,\ 0\le y\le 1.$

$$z'_y=4-2y=0\Rightarrow y=2\notin[0;1].$$

Значення функції на кінцях відрізку BC;

x	2	2
y	0	1
z	**6**	**9**

- пряма OC: $y=0\Rightarrow z=x^3-x,\ 0\le x\le 2.$

$$z'_x=3x^2-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\in[0;2],\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}\notin[0;2].$$

Значення в знайденій точці і на кінцях відрізку OC;

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2
y	0	0	0
z	**0**	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\approx -0{,}385$	**6**

- пряма AB: $y=3-x,\ 0\le x\le 2.$

Підставляючи $y=3-x$ у $z=x^3-x+2xy-y^2$, отримаємо

$$z=x^3-x+2x(3-x)-(3-x)^2=x^3-3x^2+11x-9,\ 0\le x\le 2.$$

Легко довести, що функція $z=x^3-3x^2+11x-9$ зростає на всій числовій осі. Тобто на проміжку $[0;2]$ свого найменшого значення вона досягає в точці $x=0$, а найбільшого – у точці $x=2$.

Значення функції на кінцях відрізку AB.

x	0	2
y	3	1
z	**-9**	**9**

4. Серед усіх знайдених значень виберемо найбільше і найменше:

$$z_{найб} = z(2;1) = 9; \; z_{найм} = z\left(0;3\right) = -9.$$

Відповідь: $z_{найб} = z(2;1) = 9$; $z_{найм} = z\left(0;3\right) = -9$.

Зауважимо, що локальний максимум (мінімум) функції може не співпадати з найбільшим (найменшим) значенням. Дійсно, з наведеного вище прикладу видно, що $z_{найб} = z(2;1) = 9$, але свого максимуму функція $z = x^3 - x + 2xy - y^2$ досягає в точці $(-1;-1)$ ($\max z = z(-1;-1) = 1$), а мінімуму взагалі не має.

Питання до розділу

1. Визначення функції двох змінних.
2. Яка область називається відкритою, замкненою?
3. Геометричне зображення функції двох змінних.
4. Що називається лінією рівня функції двох змінних?
5. Що називається частинним приростом функції двох змінних за однією змінною, повним приростом функції?
6. Частинні похідні і диференціал першого порядку.
7. Частинні похідні і диференціали вищих порядків.
8. Визначення дотичної площини і нормалі до поверхні.
9. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні у випадку, коли рівняння поверхні задано в явному вигляді.
10. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні у випадку, коли рівняння поверхні задано в неявному вигляді.
11. Похідна функції в заданому напрямі. Що показує похідна функції за напрямком?
12. Градієнт функції. Що показує градієнт функції?
13. Властивості градієнта.
14. Зв'язок між похідною за напрямком і градієнтом функції.
15. Визначення точки локального максимуму (мінімуму) функції.
16. Які точки називаються стаціонарними, критичними?
17. Необхідна умова існування екстремуму.
18. Достатня умова існування екстремуму.
19. У яких точках замкненої обмеженої області неперервна

функція може набувати найбільшого та найменшого значень?

20. Які етапи знаходження найбільшого та найменшого значень?

21. Чи завжди локальний максимум (мінімум) функції співпадає з її найбільшим (найменшим) значенням?

Завдання

У завданнях **1-6** знайти область визначення функції.

1. $z = \dfrac{5}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}$. **2.** $z = \dfrac{15x + 7y + 2}{3x - 9y}$. **3.** $z = \sqrt{-x - 4y}$.

4. $z = \dfrac{4x^2 + 7y}{5y^2 - x}$. **5.** $z = e^{5x+y}\sqrt{\sin y}$. **6.** $z = \arcsin\dfrac{x+y}{y}$.

7. Виразити площу S ромба як функцію від його периметра P і суми довжин діагоналей d $\left(d = d_1 + d_2\right)$.

8. Виразити довжину медіани M_a трикутника, проведеної до сторони a, як функцію від його сторін a, b, c (рис. 6.10).

9. Виразити радіус кола r, вписаного в трикутник, як функцію від довжин висот трикутника H_a, H_b, H_c (рис. 6.11).

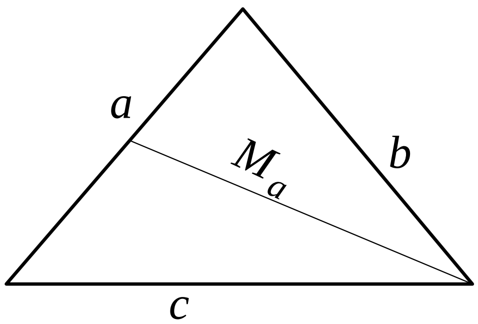


Рис. 6.10. Завдання 8

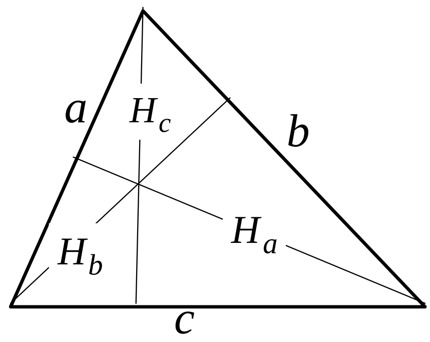


Рис. 6.11. Завдання 9

10. В основі прямокутної піраміди лежить правильний трикутник зі стороною a. Виразити радіус кулі R, описаної навколо піраміди, як функцію від довжини сторони основи a і висоти піраміди H (рис. 6.12).

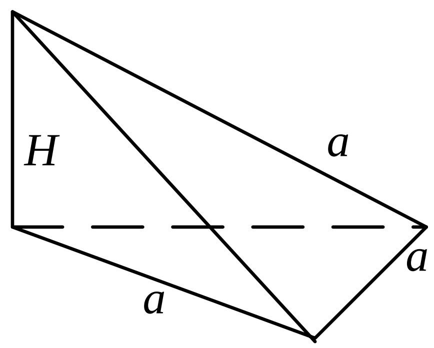


Рис. 6.12. Завдання 10

У завданнях **11-24** знайти:

- частинні похідні першого та другого порядку;
- диференціали першого і другого порядку.

11. $z=-2x^3+3(y-12)^4+3x^4-y^3+5$. **12.** $z=x^6-5y^2x^3+y^4-3x+2$.

13. $z=\dfrac{y-2}{x^2+1}$. **14.** $z=y-\sqrt{2xy}+3$. **15.** $z=3x+y^{2x-1}$.

16. $z=\dfrac{x+y}{x-2y}$. **17.** $z=\ln\left(5x^2+8y^2\right)-2x^3$. **18.** $z=e^{5x-7y}$.

19. $z=\cos(3x+8y)$. **20.** $z=\sin\left(\dfrac{x^2}{y+1}\right)$. **21.** $z=\sqrt[5]{x+2y^2}$.

22. $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$. **23.** $z=\dfrac{\left(1+y^2\right)\mathrm{arc}tg\,y}{1+\sqrt{x}}$. **24.** $z=ctg\left(x-2y\right)$.

25. Перевірити, що для функції $z=\sin y\cos(4x)$ виконується рівність

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=16\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

26.

а) при якому значенні параметра a функція $z=\sqrt{\left(2x^2+y^2+1\right)^3}$ задовольняє рівняння $ay\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ $\left(x\neq 0, y\neq 0\right)$?

б) довести, що функція $z=arctg(x+5y)+3y$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$.

27. Яка з наведених функцій задовольняє рівняння

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z^3$:

а) $z=\ln\sqrt[3]{x^2+y^2}$;

б) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$;

в) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

г) $z=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}$?

28. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$:

а) $z=x^3+2(y+3)^2+8xy+5$, $M_0(3;-2)$;

б) $z^3-x^3y=0$, $M_0(1;8)$;

в) $\arccos\dfrac{y}{x}-z=0$, $M_0(2;0)$;

г) $xy+yz+xz=7$, $M_0(3;1)$.

29. Для поверхні $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=29$ скласти рівняння дотичної, паралельної площині $6x-4y+8z-11=0$.

30. Для поверхні $x^2+y^2-6x+8y-10z+15=0$ скласти рівняння нормалі, паралельної прямій $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{5}$.

У завданнях **31-36** знайти градієнт і похідну за напрямком вектора $\bar{a}$ в точці M_0.

31. $z=y^3-2(x+1)^2-3xy^2+2$, $M_0(2;3)$, $\bar{a}=\left(8;\sqrt{17}\right)$.

32. $(x-1)^2+(y-2)^2+z=25$, $M_0(5;-2)$, $\bar{a}=(0;-3)$.

33. $z=\dfrac{3x+2y}{5x-y}$, $M_0(-1;-3)$, $\bar{a}=(-3;4)$.

34. $z=\sqrt{x+3}\cdot\cos\left(x^3-2y\right)$, $M_0\left(0;-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\bar{a}=\left(-\sqrt{3};1\right)$.

35. $u=x^3y^2z^4+5(x+y+z)$, $M_0(1;0;-2)$, $\bar{a}=(-2;3;6)$.

36. $u=\dfrac{x^5y^3}{z}-10z$, $M_0(1;-1;-2)$, $\bar{a}=(7;-6;6)$.

37. Знайти похідну функції $z=x^2+3y^2-xy$ у точці $M_0(2;6)$:

а) за напрямком вектора $\bar{a}$, кут між яким і додатним напрямком осі Ox складає $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$;

б) за напрямком бісектриси третьої координатної чверті.

У завданнях **38-44** дослідити на екстремум функцію.

38. $z = x^2 + y^2 - x + 8y$. **39.** $z = 4 - x^2 - 5y^2 - x - 10y$.

40. $z = 3x^2 - 2y^2 + 4y + 3$. **41.** $z = y^3 + x^2 y + axy$.

42. $z = e^x\left(2x + 3y^2\right)$. **43.** $z = -3x^2 - y^2 + 24\ln x + 8\ln y + 8$.

44. $z = e^{x+y}\left(3x^2 + 5y^2\right)$.

У завданнях **45-48** знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій області D.

45. $z = x^2 + 10xy + 5y^2 + 6x + 15,\ D: x - y \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0$.

46. $z = 5xy + 12,\ D: x^2 + 4y^2 \le 8$.

47. $z = x^2 + 2y^2 - 3x - 10y + 4,\ D: x + 3y \ge 6,\ x \le 3,\ y \le 3$.

48. $z = x^2 - xy + 4y - 1,\ D: y \ge x^2 - 1,\ y \le 3$.

49. Розташування трьох населених пунктів A, B, C показано на рис. 6.13. Одночасно з пункту A в напрямку пункту B виїжджає автомобіль зі швидкістю $a\left(\dfrac{км}{год}\right)$, а з пункту B в напрямку пункту C виходить потяг зі швидкістю $b\left(\dfrac{км}{год}\right)$. У який момент часу $t(год)$ від початку руху відстань між автомобілем і потягом буде найменшою?

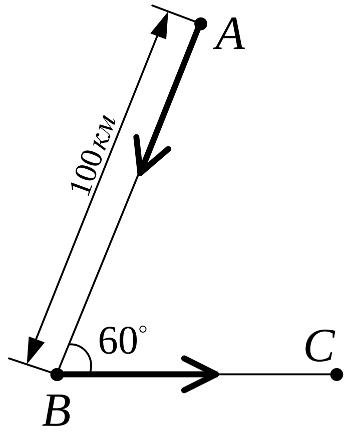


Рис. 6.13. Завдання 49

50. Потрібно виготовити ящик з кришкою, об'єм якого дорівнює 9 куб. од. Одна сторона дна ящика x має бути вдвічі більша за іншу сторону y (рис. 6.14). Визначити довжину всіх сторін ящика, при яких витрати на його виготовлення будуть найменшими.

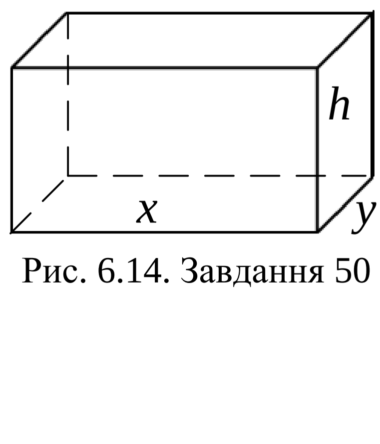


Рис. 6.14. Завдання 50

Відповіді

1. $D=\left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<20\right\}$. **2.** $D=\left\{(x,y)\in R^2 : x\neq 3y\right\}$.

3. $D=\left\{(x,y)\in R^2 : x+4y\leq 0\right\}$. **4.** $D=\left\{(x,y)\in R^2 : x\neq 5y^2\right\}$.

5. $D=\left\{(x,y)\in R^2 : 2\pi n\leq y\leq \pi+2\pi n, n\in Z\right\}$.

6. $$D=\left\{(x,y)\in R^2 : \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0,\\ y<0,\\ x+2y\leq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 0,\\ y>0,\\ x+2y\geq 0;\end{cases}\end{array}\right]\right\}.$$

7. $S=\dfrac{1}{16}\left(4d^2-P^2\right)$. **8.** $M_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$.

9. $r=\left(\dfrac{1}{H_a}+\dfrac{1}{H_b}+\dfrac{1}{H_c}\right)^{-1}$. **10.** $R=\dfrac{\sqrt{12a^2+H^2}}{6}$.

11. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-6x^2+12x^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=12(y-12)^3-3y^2$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-12x+36x^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=36(y-12)^2-6y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$,

$dz=\left(-6x^2+12x^3\right)dx+\left(12(y-12)^3-3y^2\right)dy$,

$d^2z=\left(-12x+36x^2\right)dx^2+\left(36(y-12)^2-6y\right)dy^2$.

12. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x^5-15y^2x^2-3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-10yx^3$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=30x^4-30y^2x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-10x^3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-30yx^2$,

$dz=\left(6x^5-15y^2x^2-3\right)dx+\left(4y^3-10yx^3\right)dy$,

$d^2z=30x\left(x^3-y^2\right)dx^2-60yx^2dxdy+\left(12y^2-10x^3\right)dy^2$.

13. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x(2-y)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2+1}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2\left(3x^2-1\right)(y-2)}{\left(x^2+1\right)^3}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},\quad dz=\frac{2x(2-y)dx}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{dy}{x^2+1},$$

$$d^2z=\frac{2\left(3x^2-1\right)(y-2)dx^2}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{4xdxdy}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

14. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\sqrt{\frac{y}{2x}}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=1-\sqrt{\frac{x}{2y}}$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\sqrt{\frac{y}{8x^3}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sqrt{\frac{x}{2y^3}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{8xy}},$$

$$dz=-\sqrt{\frac{y}{2x}}dx+\left(1-\sqrt{\frac{x}{2y}}\right)dy,\quad d^2z=\sqrt{\frac{x}{2y^3}}dx^2-\frac{dxdy}{\sqrt{2xy}}+\sqrt{\frac{x}{2y^3}}dy^2.$$

15. $\frac{\partial z}{\partial x}=3+2y^{2x-1}\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=(2x-1)y^{2x-2}$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4y^{2x-1}\ln^2 y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2x-1)(2x-2)y^{2x-3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2y^{2x-2}\left((2x-1)\ln y+1\right),$$

$$dz=\left(3+2y^{2x-1}\ln y\right)dx+(2x-1)y^{2x-2}dy;$$

$$d^2z=\frac{4y^{2x}\ln^2 y\,dx^2}{y}+\frac{4y^{2x}\left((2x-1)\ln y+1\right)dxdy}{y^2}+\frac{(2x-1)(2x-2)y^{2x}dy^2}{y^3}.$$

16. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3y}{(x-2y)^2}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3x}{(x-2y)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{6y}{(x-2y)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{12x}{(x-2y)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3(x+2y)}{(x-2y)^3},$$

$$dz=\frac{3(xdy-ydx)}{(x-2y)^2},\quad d^2z=\frac{6\left(ydx^2-(x+2y)dxdy+2xdy^2\right)}{(x-2y)^3}.$$

17. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{10x}{5x^2+8y^2}-6x^2$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{16y}{5x^2+8y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{10\left(8y^2-5x^2\right)}{\left(5x^2+8y^2\right)^2}-12x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{16\left(5x^2-8y^2\right)}{\left(5x^2+8y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{160xy}{\left(5x^2+8y^2\right)^2},\quad dz=\left(\frac{10x}{5x^2+8y^2}-6x^2\right)dx+\frac{16ydy}{5x^2+8y^2},$$

$$d^2z=\left(\frac{10\left(8y^2-5x^2\right)}{\left(5x^2+8y^2\right)^2}-12x\right)dx^2-\frac{320xy\,dxdy}{\left(5x^2+8y^2\right)^2}+\frac{16\left(5x^2-8y^2\right)dy^2}{\left(5x^2+8y^2\right)^2}.$$

18. $\frac{\partial z}{\partial x}=5e^{5x-7y}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-7e^{5x-7y}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=25e^{5x-7y}$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=49e^{5x-7y}$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-35e^{5x-7y}$;

$dz=e^{5x-7y}\left(5dx-7dy\right)$, $\quad d^2z=e^{5x-7y}\left(25dx^2-70dxdy+49dy^2\right)$.

19. $\frac{\partial z}{\partial x}=-3\sin(3x+8y)$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-8\sin(3x+8y)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-9\cos(3x+8y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-64\cos(3x+8y)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-24\cos(3x+8y)$;

$dz=-\sin(3x+8y)\left(3dx+8dy\right)$,

$d^2z=-\cos(3x+8y)\left(9dx^2+48dxdy+64dy^2\right)$.

20. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y+1}\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\left(\frac{x}{y+1}\right)^2\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{(y+1)^2}\left((y+1)\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)-2x^2\sin\left(\frac{x^2}{y+1}\right)\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{(y+1)^4}\left(2(y+1)\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)-x^2\sin\left(\frac{x^2}{y+1}\right)\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2x}{(y+1)^3}\left(x^2\sin\left(\frac{x^2}{y+1}\right)-(y+1)\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)\right),$$

$$dz=\frac{x}{y+1}\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)\left(2dx-\frac{xdy}{y+1}\right),$$

$$d^2z=\frac{2}{(y+1)^2}\left((y+1)\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)-2x^2\sin\left(\frac{x^2}{y+1}\right)\right)dx^2+$$

$$+\frac{4x}{(y+1)^3}\left(x^2\sin\left(\frac{x^2}{y+1}\right)-(y+1)\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)\right)dxdy+$$

$$+\frac{x^2}{(y+1)^4}\left(2(y+1)\cos\left(\frac{x^2}{y+1}\right)-x^2\sin\left(\frac{x^2}{y+1}\right)\right)dy^2.$$

21. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{5\sqrt[5]{\left(x+2y^2\right)^4}}$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y}{5\sqrt[5]{\left(x+2y^2\right)^4}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4}{25\sqrt[5]{\left(x+2y^2\right)^9}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4\left(5x-6y^2\right)}{25\sqrt[5]{\left(x+2y^2\right)^9}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{16y}{25\sqrt[5]{\left(x+2y^2\right)^9}},$$

$$dz=\frac{dx+4ydy}{5\sqrt[5]{\left(x+2y^2\right)^4}},\qquad d^2z=\frac{4\left(-dx^2-8ydxdy+\left(5x-6y^2\right)dy^2\right)}{25\sqrt[5]{\left(x+2y^2\right)^9}}.$$

22. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^y}{e^x+e^y}$, $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2},\qquad dz=\frac{e^xdx+e^ydy}{e^x+e^y},$$

$$d^2z=\frac{e^{x+y}\left(dx^2-2dxdy+dy^2\right)}{\left(e^x+e^y\right)^2}.$$

23. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\left(1+y^2\right)\mathrm{arc}tg\,y}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\,\mathrm{arc}tg\,y+1}{1+\sqrt{x}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(1+3\sqrt{x}\right)\left(1+y^2\right)\mathrm{arc}tg\,y}{4\left(x+\sqrt{x}\right)^3},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\left(y+\left(1+y^2\right)\mathrm{arc}tg\,y\right)}{\left(1+y^2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y\,\mathrm{arc}tg\,y+1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},\ dz=-\frac{\left(1+y^2\right)\mathrm{arc}tg\,ydx}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\frac{\left(2y\,\mathrm{arc}tg\,y+1\right)dy}{1+\sqrt{x}},$$

$$d^2z=\frac{\left(1+3\sqrt{x}\right)\left(1+y^2\right)\mathrm{arc}tg\,y}{4\left(x+\sqrt{x}\right)^3}dx^2-\frac{2y\,\mathrm{arc}tg\,y+1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dxdy+$$

$$+\frac{2\left(y+\left(1+y^2\right)\operatorname{arc}tg\, y\right)}{\left(1+y^2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}dy^2.$$

24. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sin^2(x-2y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{\sin^2(x-2y)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\cos(x-2y)}{\sin^3(x-2y)}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{8\cos(x-2y)}{\sin^3(x-2y)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4\cos(x-2y)}{\sin^3(x-2y)}$,

$dz=\frac{dy-dx}{\sin^2(x-2y)}$, $d^2z=\frac{2\cos(x-2y)}{\sin^3(x-2y)}\left(dx^2-4dxdy+4dy^2\right)$.

26. а) $a=0{,}5$. **27.** в) $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

28. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=f(x,y)$ в точці $M_0(x,y)$:

а) $11x+28y-z+9=0$ - рівняння дотичної площини,

$\frac{x-3}{11}=\frac{y+2}{28}=\frac{z+14}{-1}$ - рівняння нормалі;

б) $24x+y-12z-8=0$ - рівняння дотичної площини,

$\frac{x-1}{24}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-2}{-12}$ - рівняння нормалі;

в) $y+2z-\pi=0$ - рівняння дотичної площини,

$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{-1/2}=\frac{z-\pi/2}{-1}$ - рівняння нормалі;

г) $x+2y+2z-7=0$ - рівняння дотичної площини,

$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$ - рівняння нормалі.

29. $6x-4y+8z-32=0$ або $6x-4y+8z+84=0$.

30. $\frac{x+1}{4}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-1}{5}$.

31. $grad\, z(M_0)=(-39;-9)$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=-\left(\frac{104}{3}+\sqrt{17}\right)\approx-38{,}79$.

32. $grad\, z(M_0)=(-8;8)$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=-8$.

33. $grad\, z(M_0)=\left(\frac{39}{4};-\frac{13}{4}\right)$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=-\frac{169}{20}$.

34. $grad\, z(M_0)=\left(\frac{\sqrt{3}}{12};3\right)$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=\frac{11}{8}$.

35. $grad\, z(M_0)=(5;5;5)$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=5$.

36. $grad\, z(M_0)=\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2};-\frac{39}{4}\right)$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=-\frac{32}{11}$.

37. а) $\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=17\sqrt{3}-1$; б) $\frac{\partial z(M_0)}{\partial a}=16\sqrt{2}$.

38. $\min z=z\left(\frac{1}{2};-4\right)=-\frac{65}{4}$. **39.** $\max z=z\left(-\frac{1}{2};-1\right)=\frac{37}{4}$.

40. У стаціонарній точці $M_1(0;1)$ екстремуму нема.

41. $\min z=z\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$, $\max z=z\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$, у стаціонарних точках $M_3(0;0)$, $M_4(-a;0)$ екстремуму нема.

42. $\max z=z(-1;0)=-\frac{2}{e}$. **43.** $\max z=z(2;2)=42\ln 2-16$.

44. $\min z=z(0;0)=0$.

45. $z_{найб}=z(0;-4)=95$, $z_{найм}=z\left(\frac{37}{16};-\frac{27}{16}\right)=\frac{151}{16}$.

46. $z_{найб}=z(2;1)=z(-2;-1)=22$, $z_{найм}=z(-2;1)=z(2;-1)=2$.

47. $z_{найб}=z(-3;3)=10$, $z_{найм}=z\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)=-\frac{43}{4}$.

48. $z_{найб}=z(-2;3)=21$,

$$z_{найм}=z\left(\frac{5-2\sqrt{7}}{3};\frac{44-20\sqrt{7}}{9}\right)=\frac{16\left(10-7\sqrt{7}\right)}{27}.$$

49. $t=\frac{50(2a+b)}{a^2+b^2+ab}$ (*год*).

50. $\min S=S\left(3;\frac{3}{2};2\right)=27$ кв. од.

Бібліографічний список

1. Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне інтегральне числення / П. П. Овчинніков, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчинікова. Київ: Техніка, 2003. 600 с.

2. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: навч. посіб.: у 2 ч. Київ: КНЕУ, 2001. Ч. 1. 546 с.

3. Вища математика: підручник: у 2 кн. Кн. 1. Основні розділи / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 400 с.

4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. Київ: А.С.К., 2001. 648 с.

5. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т. 1. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник та ін.; за ред. Л. В. Курпи. Харків: НТУ «ХПІ», 2009. 532 с.

6. Коваленко Л. Б., Станішевський С. О. Вища математика (модуль 1): навч. посіб. Харків: Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова (ХНУМГ), 2015. 257 с.

7. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей та ін.; за ред. В. В. Булдигіна. Київ: ТВіМС, 2011. 224 с.

8. Лінійна алгебра: навч. посіб. / А. І. Єрмаков, М. М. Крамар. Луганськ : Вид-во СУДУ, 2000. 176 с.

9. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математич. факультету / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2019. 224 с.

10. Практикум з вищої математики: навч. посіб. / В. М. Неміш, А. І. Процик, К. М. Березька. Вид. 3-тє, випр. і доп. Тернопіль: ТНЕУ, 2010. 303 с.

11. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. / О. М. Рибицька, Д. М. Білонога, П. І. Каленюк. Вид. 2-ге, випр. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. 124 с.

12. Вища математика: навч.-метод. посіб. для самост. роботи. Ч. 1. Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії. Мелітополь: ФОП Силаєва О. В., 2021. 124 с.

13. Холькін О. М. Курс вищої математики: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.: у 3 ч. Ч. 1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії /М-во освіти і науки України, Приазовський державний технічний університет. Маріуполь: ПДТУ, 2011. 175 с.

14. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. Рівне: НУВГП, 2020. 205 с.

15. Рудавський Ю. К., Костробій П. П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. підруч. Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2002. 262 с.

16. Вища математика: підручник / Е. І. Личковський, П. Л. Свердан, В. О. Тіманюк, О.В. Чалий. Вінниця: Нова книга, 2014. 632 с.

17. Вища математика: навч. посіб. / Ф. Г. Дягілева, Г. В. Жиронкіна, В. О. Тіманюк, Б. Ф. Горбуненко. Харків: вид-во НФаУ: Золоті сторінки, 2001. 84 с.

18. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Ч. 2. Лінійна алгебра / Г. В. Жиронкіна, Ф. Г. Дягілева, В. О. Тіманюк, Б. Ф. Горбуненко. Харків: Вид-во НФаУ: Золоті сторінки, 2008. 272 с.

19. Могульський Є. З., Храбустовський В. І., Бородай Г. П. Вступ до лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посіб. Харків: УкрДАЗТ, 2006. 110 с.

20. Аналітична геометрія: підруч. для пед. ін-тів. / В. П. Білоусова, І. Г. Ільїн, О. П. Сергунова, В. М. Котлова; за заг. ред. В. П. Білоусової. Київ: Радянська школа, 1962. 375 с.

21. Збірник задач з аналітичної геометрії: навч. посіб. / за ред. В. В. Кириченка. Вид. 3-тє, перероб. та випр. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. 200 с.

22. Кириченко В. В., Петкевич Н. Ю., Петравчук А. П. Лекції з аналітичної геометрії. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2011. 256 с.

23. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. Київ: Вища шк., 2001. 303 с.

24. Назієв Е. Х., Владіміров В. М., Миронець О. А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. Київ: Либідь, 1997. 152 с.

25. Петрук В. А., Прозор О. П. Вища математика з прикладними задачами: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2018. Ч. 1. 171 с.

26. Грисенко М. В., Призва Г. Й. Навчальний посібник з вищої математики для студентів 1 курсу відділення МЕВ. Ч. 1. Лінійна алгебра. Київ, 1998.

27. Матвієнко В. П., Данилов В. Я. Навчальний посібник з вищої математики. Ч. 1. Елементи лінійної алгебри та їх застосування в економіці. Київ: КІБС, 2000.124 с.

28. Грисенко М. В. Вища математика для економістів в прикладах та задачах. Ч. 1. Методи та моделі лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Київ, 1999. 100 с.

29. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т. 1. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посіб / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник та ін.; за ред. Л. В. Курпи. Харків: НТУ «ХПІ», 2009. 532 с.

30. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособ. / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейман. Минск: Выш. школа. 1980. 192 с.

31. Бугір М. К. Математика для економістів: посібник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2003. 520 с.

32. Вища математика: підручник: у 2 кн. Кн. 1. Основні розділи / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординьский та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 400 с.

33. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. техн. навч. закладів: зб. задач: у 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. / Х. І. Гаврильченко, С. П. Полушкін, П. С. Кропив'янський та ін.; за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ: Техніка, 2004. 279 с.

34. Гриньов Б. В., Кириченко Б. В. Векторна алгебра: підручник / за ред. О. М. Литвина. Харків: Гімназія, 2008. 164 с.

35. Гриньов Б. В., Кириченко Б. В. Аналітична геометрія: підруч. для вищ. техн. навч. закл. Харків: Гімназія, 2008. 340 с.

36. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб.: у 3 ч. Харків: Веста, 2008. Ч. 1. 200 с.

37. Литвинюк В. П., Клочко В. І. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2006. 121 с.

38. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ: Техніка, 2003. 600 с.

39. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. Київ: Либідь. 2001. 248 с.

40. Границі послідовностей і функцій: конспект лекцій з курсу «Вища математика» для студентів природничих факультетів / Г. Л. Кулініч, С. В. Тищенко, Г. Й. Призва, В. М. Шовкопляс. Київ: РВЦ «Київський університет», 1999. 65 с.

41. Барковська А. А., Дереч В. Д. Вища математика. Математичний аналіз. Границя функції та неперервність: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2012. 73 с.

42. Стислий курс вищої математики: навч. посіб. Т. 2. Математичний аналіз. Теорія границь. Диференціальне числення функції однієї змінної / Г. М. Тимченко, О. В. Одинцова, Н. О. Кириллова, К. І. Любицька. Київ: Видавничий дім «Кондор», 2021. 232 с.

43. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб.: у 3 ч. Харків: Веста, 2008. Ч. 2. 240 с.

44. Абрамчук І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2010. 152 с.

45. Курченко О. О. Диференціальне числення функції однієї змінної: підручник. Київ, 2014. 238 с.

46. Збірник задач з математичного аналізу. Ч. I. Функції однієї змінної / М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний та ін. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2005. 257 с.

47. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: учеб. пособ. для втузов. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. Т. 1. 432 с.

48. Диференціальне та інтегральне числення: навч. посіб. / Є. З. Могульський, Г. П. Бородай, А. О. Дрогаченко та ін. Харків: УкрДАЗТ, 2011. 311 с.

49. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб.: у 2 т. Т. 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди / Л. В. Курпа, Н. О. Кириллова, Г. Б. Лінник та ін.; за ред. Л. В. Курпи. Харків: НТУ «ХПІ», 2009. 432 с.

50. Клочко В. І., Бондаренко З. В., Кирилащук С. А. Вища математика. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Тестові завдання: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2012. 84 с.

Додатки

Додаток 1

Лінійна алгебра

	Вигляд системи	Формули Крамера
1	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$	$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$
2	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$	$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Додаток 2

Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів

Добуток	Формула	Геометричний зміст
Скаляр-ний	$\bar{a}\cdot\bar{b}=(\bar{a},\bar{b})=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot\cos\varphi$ $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z.$	1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \quad \Leftrightarrow \ \bar{a}\perp\bar{b}$; 2) $Пр_{\,\bar{a}}\bar{b}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert}$; 3) $cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert}$
Вектор-ний	$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_y\end{vmatrix}$	1) $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}\Leftrightarrow \ \bar{a}\ ,\ \bar{b}\ -$ колінеарні вектори; 2) $S_{пар}=\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$, $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$; 3) $\sin\varphi=\dfrac{\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert}{\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert}$
Мішаний	$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$	1) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0\Leftrightarrow \bar{a},\bar{b},\bar{c}\ -$ компланарні вектори; 2) $V_{пар}=\lvert\,\bar{a}\bar{b}\bar{c}\rvert$, $V_{пір}=\dfrac{1}{6}\lvert\,\bar{a}\bar{b}\bar{c}\rvert$

Додаток 3

Види рівнянь прямої на площині

Номер з/п	Рівняння	Рівняння	Параметр
1	Загальне рівняння прямої	$Ax+By+C=0$	$\overline{N}(A,B)$ - нормальний вектор прямої
2	Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ - точки, через які проходить пряма
3	Канонічне рівняння	$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}$	$\overline{s}(l,m)$ - напрямний вектор прямої
4	Параметричне рівняння	$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0 \end{cases}$	$\overline{s}(l,m)$ - напрямний вектор прямої; (x_0,y_0) - координати точки, через яку проходить пряма; $t\in(-\infty,+\infty)$ - параметр
5	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y=kx+b$	$k=tg\alpha$ - кутовий коефіцієнт (α - кут між прямою і додатним напрямком осі Ox); b - ордината точки перетину прямої з віссю Oy
6	Рівняння прямої, що проходить через точку (x_0,y_0) з заданим кутовим коефіцієнтом	$y-y_0=k(x-x_0)$	$k=tg\alpha$ - кутовий коефіцієнт (α - кут між прямою і додатним напрямком осі Ox);
7	Рівняння прямої «у відрізках»	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$(a,0)$., $(0,b)$ - точки перетину прямої з осями Ox і Oy відповідно

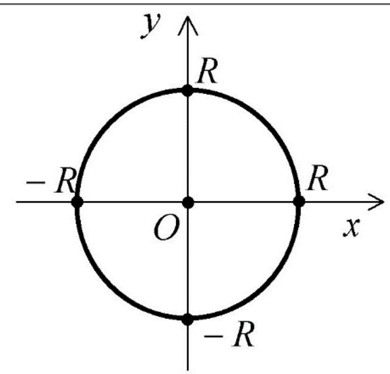
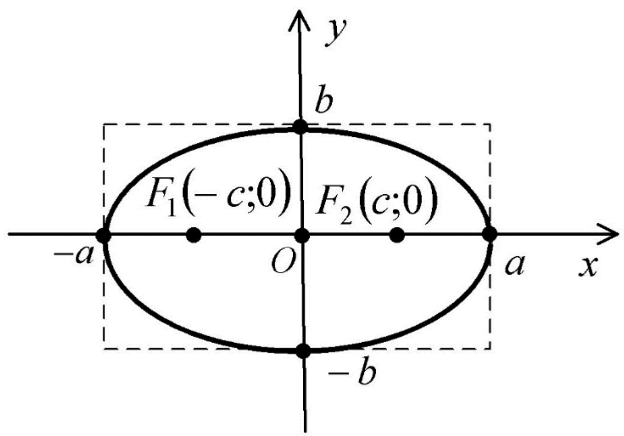
Додаток 4

Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині

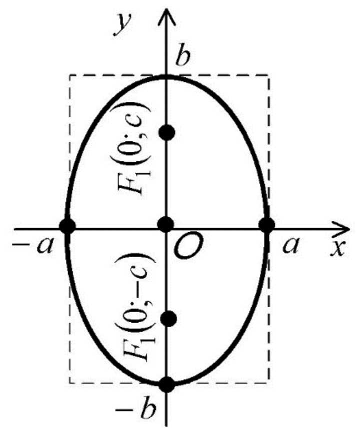
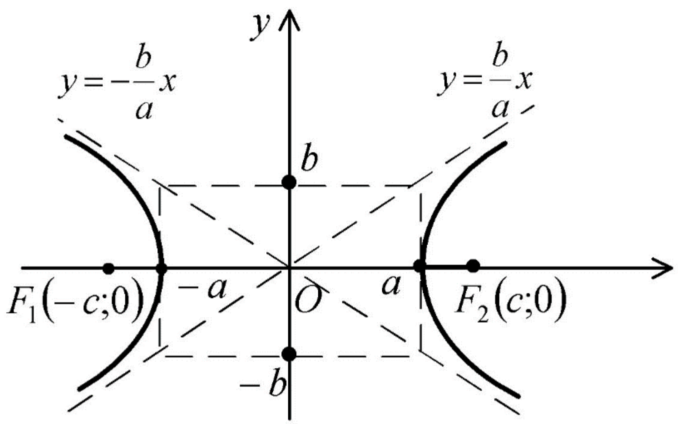
Номер з/п	Рівняння прямих	$L_1 \parallel L_2$	$L_1 \perp L_2$	Кут між прямими φ
1	$L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}$, $L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}$	$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$	$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{\lvert\overline{s}_1\rvert \lvert\overline{s}_2\rvert}$
2	$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\lvert\overline{N}_1\rvert \cdot \lvert\overline{N}_2\rvert}$
3	$L_1: y=k_1x+b_1$, $L_2: y=k_2x+b_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 \cdot k_2 = -1$	$tg\alpha = \left\lvert \dfrac{k_2-k_2}{1+k_1 \cdot k_2} \right\rvert$

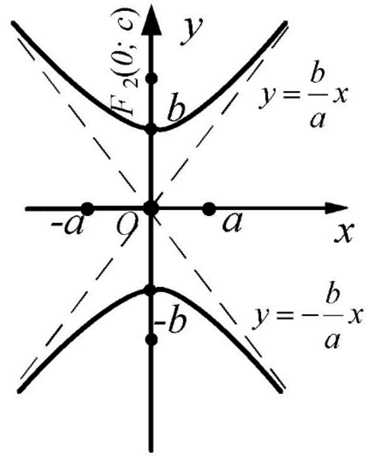
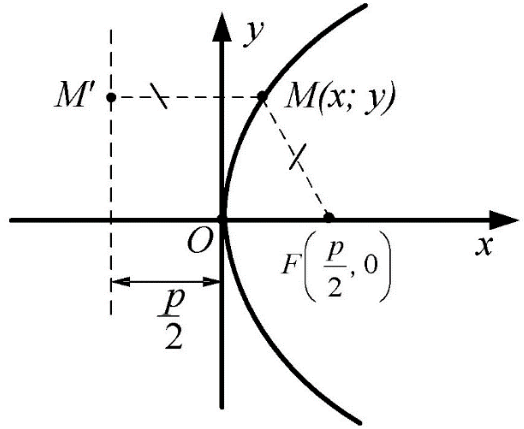
Додаток 5

Криві другого порядку

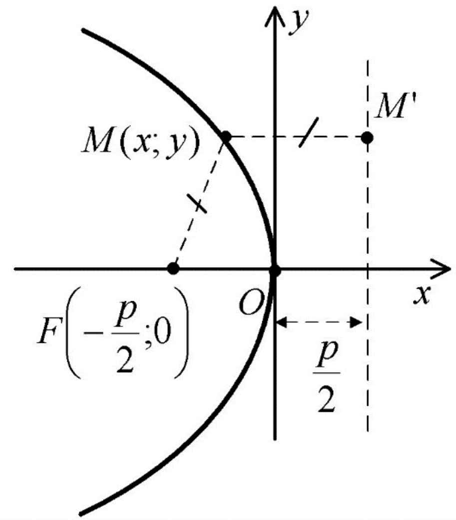
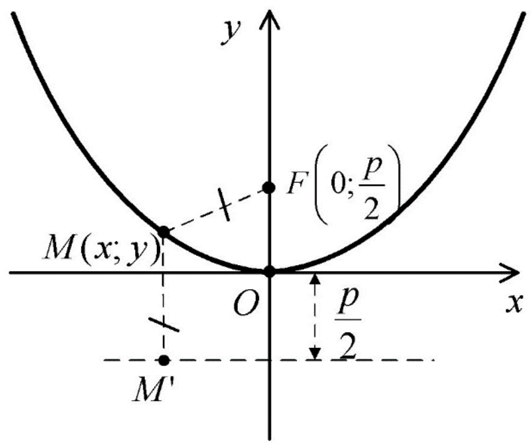
Назва	Ексцен-триситет	Канонічне рівняння	Геометричне зображення	Параметр
1	2	3	4	5
Коло	$\varepsilon = 0$	$x^2 + y^2 = R^2$		$O(0,0)$ - центр кола; R - радіус кола
Еліпс	$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $0 \le \varepsilon < 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$		a **- більша піввісь еліпса**; b **- менша піввісь еліпса**; F_1, F_2 - фокуси еліпса, розташовані на більшій півосі; $F_1F_2 = 2c$ - фокальна відстань; $c^2 = a^2 - b^2$, якщо $a > b$

Продовження дод. 5

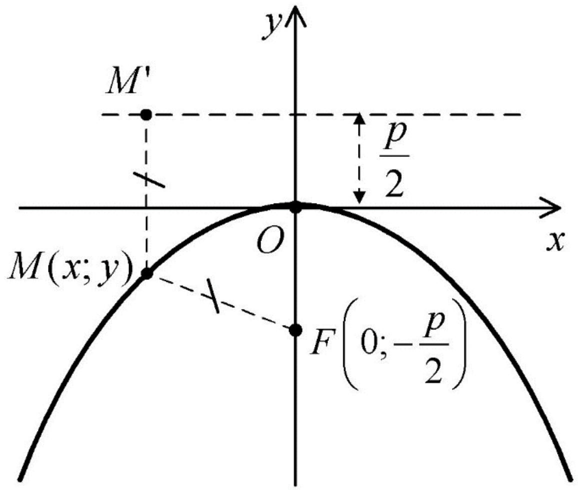
1	2	3	4	5
	$\varepsilon = \frac{c}{b}$, $0 \le \varepsilon < 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b > a$		b - **більша піввісь еліпса**; a - **менша піввісь еліпса**; F_1, F_2 - фокуси еліпса, розташовані на більшій півосі; $F_1F_2 = 2c$ - фокальна відстань; $c^2 = b^2 - a^2$, якщо $b > a$
Гіпербола	$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		Ox – дійсна вісь; Oy – уявна вісь; F_1, F_2 - фокуси гіперболи; $F_1F_2 = 2c$ - фокальна відстань; $c^2 = a^2 + b^2$; $y = \pm\frac{b}{a}x$ - рівняння асимптот

1	2	3	4	5
	$\varepsilon=\frac{c}{b}$, $\varepsilon>1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		Oy – дійсна вісь; Ox – уявна вісь; F_1, F_2 - фокуси гіперболи; $F_1F_2=2c$ - фокальна відстань; $c^2=a^2+b^2$; $y=\pm\frac{b}{a}x$ - рівняння асимптот
Парабола	$\varepsilon=1$	$y^2=2px$, $p>0$		p - параметр параболи (відстань від директриси до фокуса), $p>0$; $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ - фокус; $x=-\frac{p}{2}$ - рівняння директриси

Продовження дод. 5

1	2	3	4	5
		$y^2 = -2px$, $p > 0$		p - параметр параболи (відстань від директриси до фокуса), $p > 0$; $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$ - фокус; $x = \frac{p}{2}$ - рівняння директриси
		$x^2 = 2py$, $p > 0$.		p - параметр параболи (відстань від директриси до фокуса), $p > 0$; $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ - фокус; $y = -\frac{p}{2}$ - рівняння директриси

Продовження дод. 5

1	2	3	4	5
		$x^2 = -2py$, $p > 0$		p - параметр параболи (відстань від директриси до фокуса), $p > 0$; $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ - фокус; $y = \frac{p}{2}$ - рівняння директриси

Додаток 6

Види рівнянь площини P у просторі. Умови паралельності і перпендикулярності. Кут між площинами

Рівняння	Формула	Параметр
Рівняння площини, що проходить через точку перпендикуляр-но до вектора $\overline{N}$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	$M_0(x_0,y_0,z_0)\in P$, $\overline{N}(A,B,C)$, $\overline{N}\perp P$
Загальне рівняння	$Ax+By+Cz+D=0$	$\overline{N}(A,B,C)$, $\overline{N}\perp P$
Рівняння площини у відрізках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	Точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)\in P$
Рівняння площини, що проходить через три точки	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	$M_1(x_1,y_1,z_1)\in P$, $M_2(x_2,y_2,z_2)\in P$, $M_3(x_3,y_3,z_3)\in P$
Нормальне рівняння площини	$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	$\overline{N}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\overline{N}\perp P$, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ - напрямні косинуси

Рівняння площини	Відстань h від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини P
$P:\ Ax+By+Cz+D=0$	$h=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	$h=\lvert x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\rvert$

Кут між площинами P_1 і P_2	
$P_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\cos\varphi=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{\lvert\overline{N}_1\rvert\cdot\lvert\overline{N}_2\rvert}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

Умови паралельності та перпендикулярності площин P_1 і P_2		
Рівняння площини	$P_1 \parallel P_2$	$P_1\perp P_2$
$P_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Додаток 7

Види рівнянь прямої у просторі. Умови паралельності і перпендикулярності. Кут між прямими, прямою і площиною

Рівняння	Формула	Параметр
1	2	3
Загальне рівняння прямої	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$	Визначає рівняння прямої як лінію перетину двох непаралельних площин
Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ - точки, через які проходить пряма
Канонічне рівняння	$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$	$\vec{s}(l,m,n)$ - напрямний вектор прямої
Параметричне рівняння	$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0, \\ z=nt+z_0. \end{cases}$	$\vec{s}(l,m,n)$- напрямний вектор прямої; (x_0,y_0) - координати точки, через яку проходить пряма; $t\in(-\infty,+\infty)$ - параметр

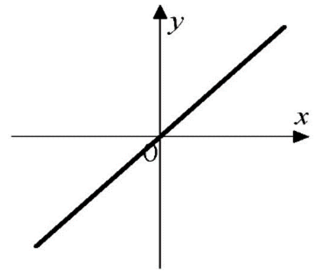
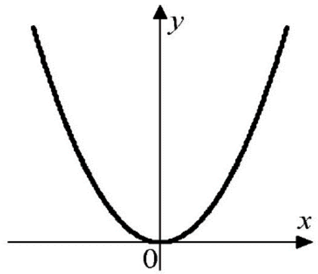
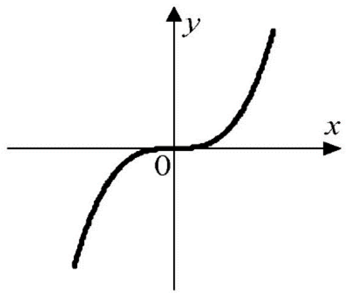
Кут між прямими L_1 і L_2	
$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$	$\cos\phi=\frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{\lvert\overline{s_1}\rvert\lvert\overline{s_2}\rvert}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

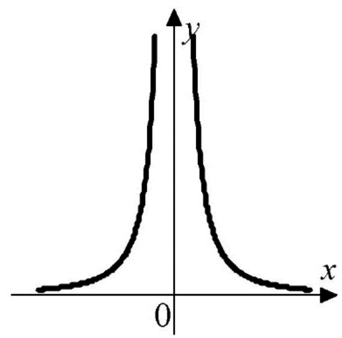
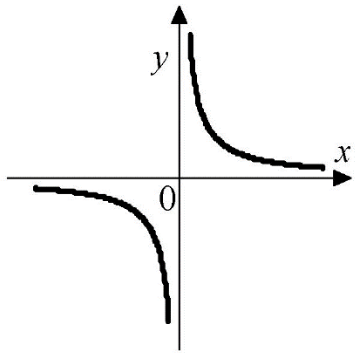
Кут між прямою L та площиною P	
$L: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$, $P: Ax+By+Cz+D=0$	$\sin\varphi=\frac{\lvert Al+Bm+Cn\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

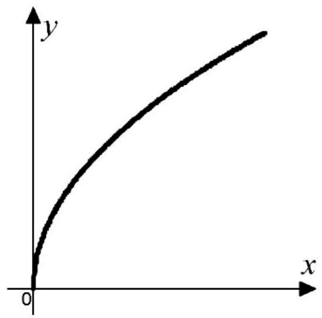
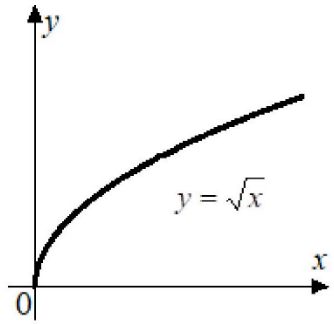
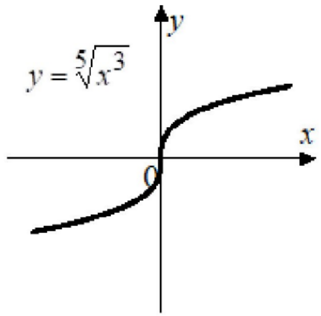
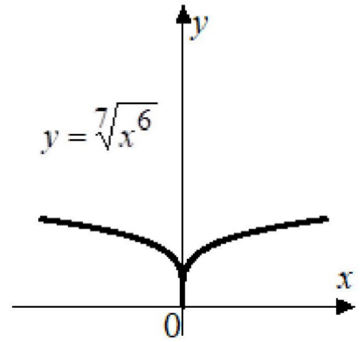
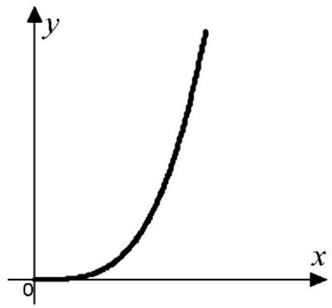
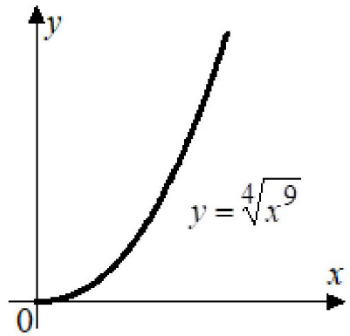
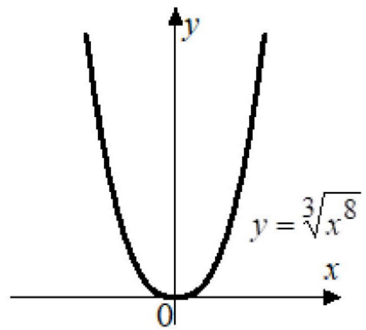
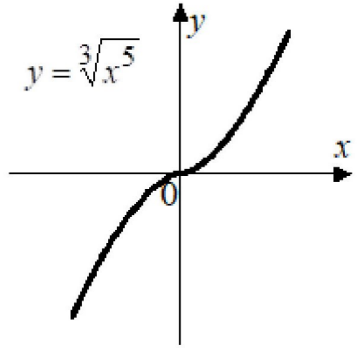
1	2	3
Паралельність і перпендикулярність прямих L_1 і L_2		
	$L_1 \parallel L_2$	$L_1 \perp L_2$
$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$	$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0$
Паралельність і перпендикулярність прямої L та площини P		
	$L \parallel P$	$L \perp P$
$L: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$, $P: Ax+By+Cz+D=0$	$Al+Bm+Cn=0$	$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

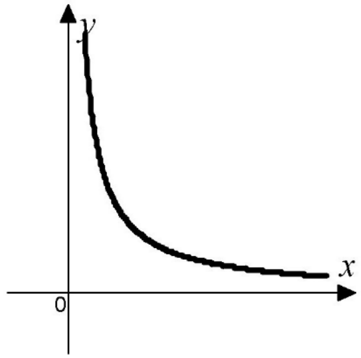
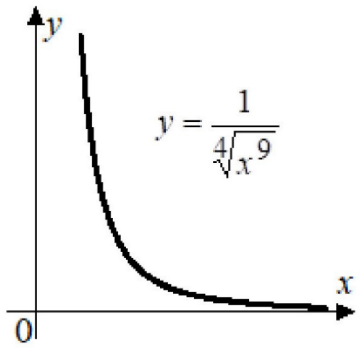
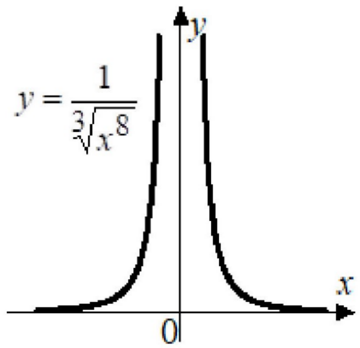
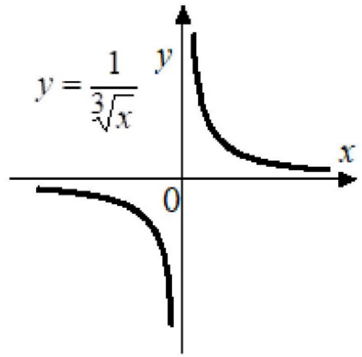
Додаток 8

Графіки елементарних функцій

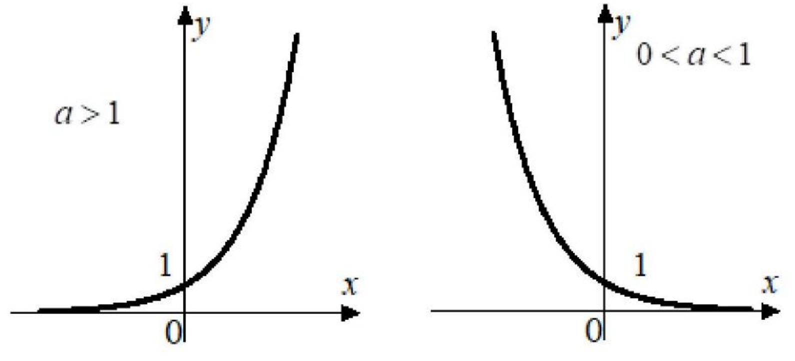
Степенева функція $y = x^p$, $p \in R$		
$p = 1$	 	Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$; множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$; функція непарна; $(0;0)$ - точка перетину з осями координат; точок екстремуму, перегину і асимптот нема
$p = 2,4,6...$ - парне додатне число	 	Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$; множина значень $E(f)$: $y \in [0; +\infty)$; функція парна; $(0;0)$ - точка перетину з осями координат і точка мінімуму функції; асимптот і точок перегину нема
$p = 1,3,5...$ - непарне додатне число	 	Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$; множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$; функція непарна; $(0;0)$ - точка перетину з осями координат і точка перегину графіка функції; асимптот і точок екстремуму нема

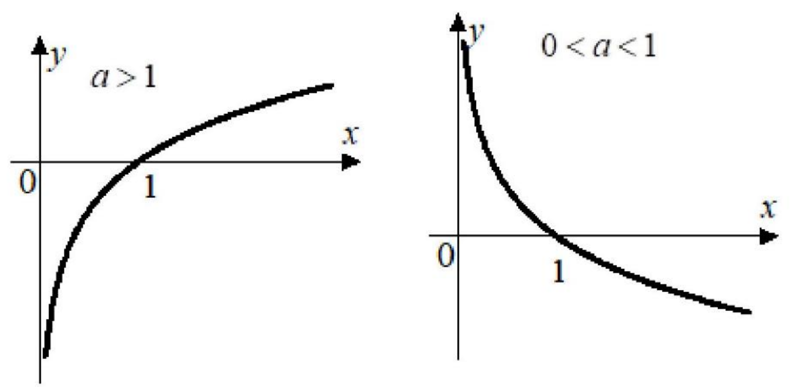
$p=-2,-4,-6...$ - парне від'ємне число		Область визначення $D(f)$: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; множина значень $E(f)$: $y\in(0;+\infty)$; функція парна; точок перетину з осями координат, екстремуму і перегину нема; $y=0, x=0$ - асимптоти графіка функції
$p=-1,-3,-5...$ - непарне від'ємне число		Область визначення $D(f)$: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; множина значень $E(f)$: $y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; функція непарна; точок перетину з осями координат, екстремуму і перегину нема; $y=0, x=0$ - асимптоти графіка функції
$p=\frac{m}{n}, 0<\frac{m}{n}<1$	Область визначення та множина значень степеневої функції $y=\sqrt[n]{x^m}$ залежать від значення показника степеня p; якщо функція парна, то вона продовжується симетрично відносно осі OY; якщо функція непарна, то вона продовжується симетрично відносно початку координат	

I чверть 			
$p=\frac{m}{n},\ \frac{m}{n}>1$	Область визначення та множина значень степеневої функції $y=\sqrt[n]{x^m}$ залежать від значення показника степеня p; якщо функція парна, то вона продовжується симетрично відносно осі OY; якщо функція непарна, то вона продовжується симетрично відносно початку координат		
I чверть 			

<table>
<tr>
<td>$p = \frac{m}{n}, \ \frac{m}{n} < 0$</td>
<td colspan="3">Область визначення та множина значень степеневої функції $y = \sqrt[n]{x^m}$ залежать від значення показника степеня p;
$y = 0, x = 0$ - асимптоти графіка функції;
якщо функція парна, то вона продовжується симетрично відносно осі OY;
якщо функція непарна, то вона продовжується симетрично відносно початку координат</td>
</tr>
<tr>
<td>I чверть
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

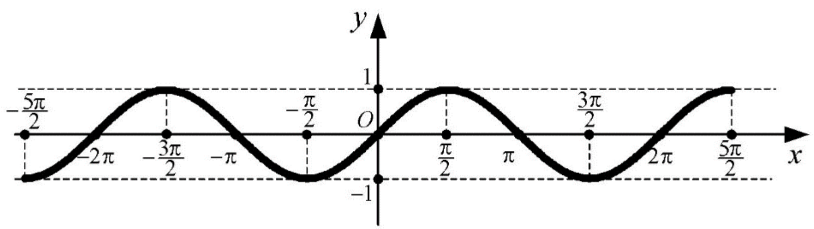
Продовження дод. 8

<table>
<tr><td colspan="2">Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$</td></tr>
<tr><td></td><td>Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$;
множина значень $E(f)$: $y \in (0;+\infty)$;

$(0;1)$ - точка перетину з осями координат;
точок екстремуму і перегину нема;
$y = 0$ - асимптота графіка функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">Логарифмічна функція $y = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$</td></tr>
<tr><td></td><td>Область визначення $D(f)$: $x \in (0; +\infty)$;
множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$;
$(1;0)$ - точка перетину з осями координат;
точок екстремуму і перегину нема;
$x = 0$ - асимптота графіка функції</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Тригонометричні функції</th></tr>
<tr><td>

$y = \sin x$

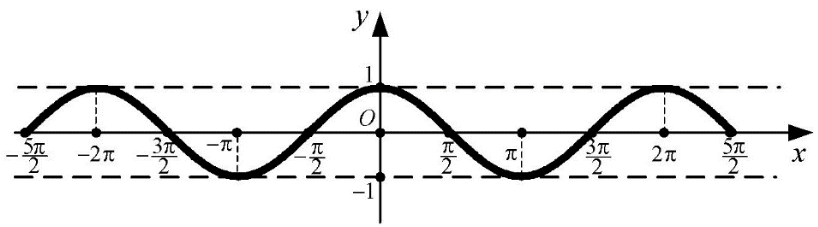


</td><td>

Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$;
множина значень $E(f)$: $y \in [-1; 1]$;
$(\pi k; 0)$, $k \in Z$ - точки перетину з осями координат і точки перегину графіка функції;
$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$, $k \in Z$ - точки максимуму функції;
$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$, $k \in Z$ - точки мінімуму функції;
асимптот нема

</td></tr>
<tr><td>

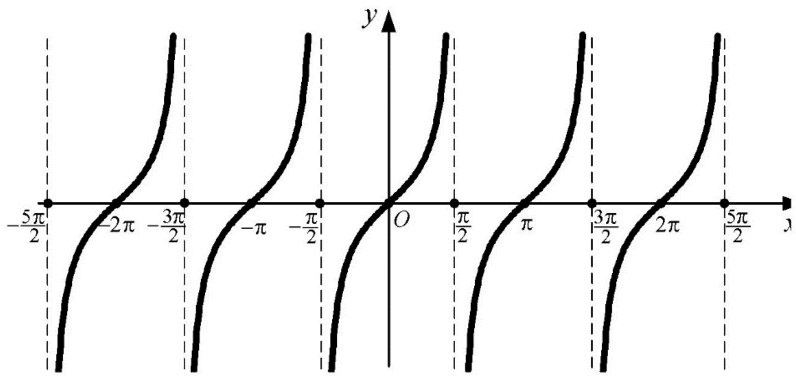
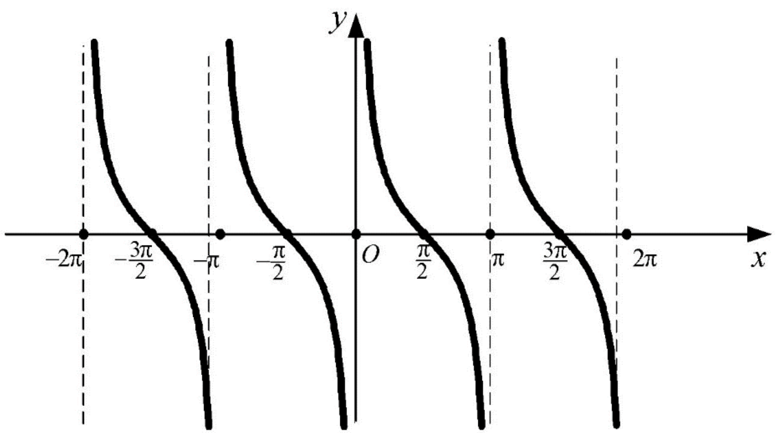
$y = \cos x$

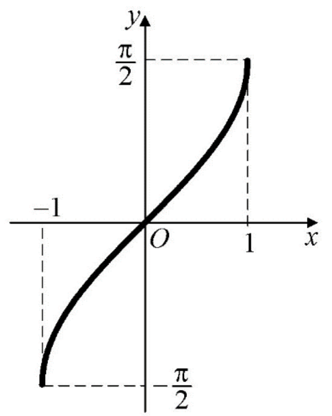
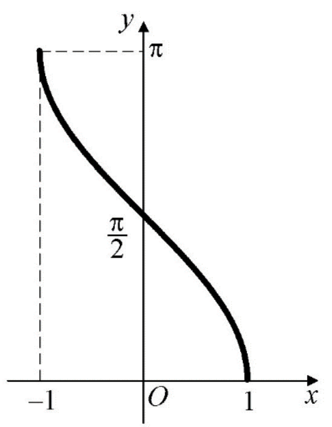


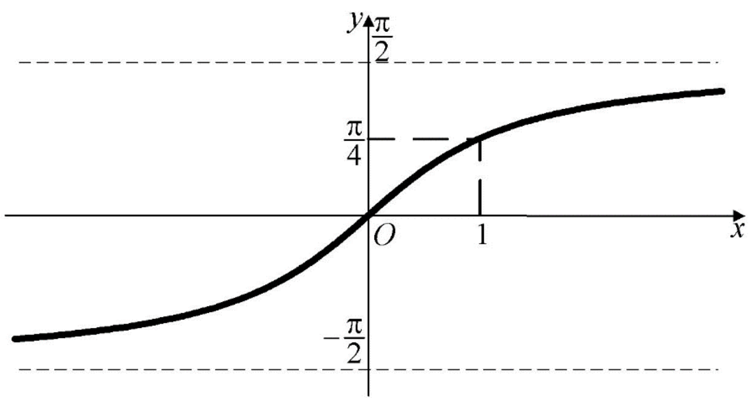
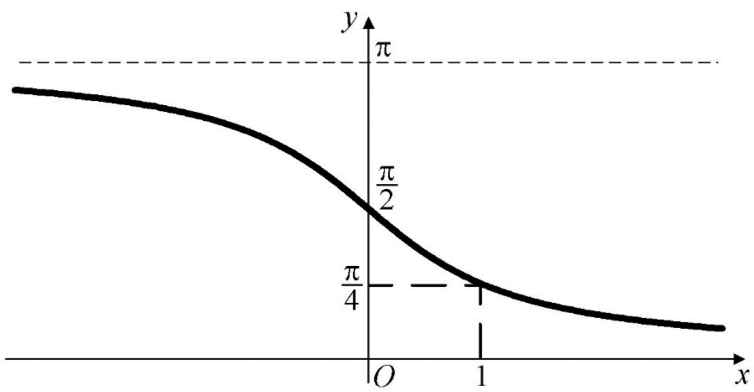
</td><td>

Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$;
множина значень $E(f)$: $y \in [-1; 1]$;
$\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$, $k \in Z$ - точки перетину з осями координат і точки перегину графіка функції;
$(2\pi k, 1)$, $k \in Z$ - точки максимуму функції;
$(-\pi + 2\pi k, -1)$, $k \in Z$ - точки мінімуму функції;
асимптот нема

</td></tr>
</table>

$y = tgx$ 	Область визначення $D(f)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$; $(\pi k; 0), k \in Z$ - точки перетину з осями координат і точки перегину графіка функції; точок екстремуму нема; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ - асимптоти графіка функції
$y = ctgx$ 	Область визначення $D(f)$: $x \neq \pi k, k \in Z$; множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$; $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z$ - точки перетину з осями координат і точки перегину графіка функції; $x = \pi k, k \in Z$ - асимптоти графіка функції

Обернені тригонометричні функції	
$y = \arcsin x$ 	Область визначення $D(f): x \in [-1, 1]$; множина значень $E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $(0;0)$ - точка перетину з осями координат і точка перегину графіка функції; точок екстремуму і асимптот графіка функції нема
$y = \arccos x$ 	Область визначення $D(f): x \in [-1, 1]$; множина значень $E(f): y \in [0, \pi]$; $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ і $(1;0)$ - точки перетину з осями координат; $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ - точка перегину графіка функції; точок екстремуму і асимптот графіка функції нема

$y = arctgx$ 	Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$; множина значень $E(f)$: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $(0;0)$ - точка перетину з осями координат і точка перегину графіка функції; точок екстремуму нема; $y = \pm\frac{\pi}{2}$ - асимптоти графіка функції
$y = arcctgx$ 	Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$; множина значень $E(f)$ $y \in (0; \pi)$; $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ - точка перетину з осями координат і точка перегину графіка функції; точок екстремуму нема; $y = 0$ і $y = \pi$ - асимптоти графіка функції

Додаток 9

Таблиця еквівалентних величин

Наслідки першої важливої границі	Наслідки другої важливої границі
$\sin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $tg\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $arctg\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $1-\cos\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$	$e^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $\ln(1+\alpha(x)) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $\log_a(1+\alpha(x)) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$, $a^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)\cdot\ln a$, $(1+\alpha(x))^n-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} n\alpha(x)$

Додаток 10

Похідні елементарних функцій

1	$\left(x^p\right)' = px^{p-1}$	9	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
2	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$	10	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$\left(e^x\right)' = e^x$	11	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$	12	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
5	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
6	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(shx)' = chx$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	15	$(chx)' = shx$
8	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	16	$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$

Предметний покажчик

Навчальний посібник

Панченко Наталія Георгіївна,
Резуненко Марина Євгенівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина І

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 27.06.2022 р.
Умовн. друк. арк. 14,0. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.