



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

В. Ш. Хісматулін, О. О. Сосунов, В. О. Сотник

ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник

Харків – 2022

УДК 62-5:681.5.013
X 51

*Рекомендовано вченою радою Українського державного університету
залізничного транспорту як навчальний посібник
(витяг з протоколу № 6 від 30 листопада 2022 р.)*

Рецензенти:

доктори техн. наук, професори Є. Є. Александров (ХНАДУ),
О. В. Коломійцев (НТУ «ХП»)

X 51 Хісматулін В. Ш., Сосунов О. О., Сотник В. О. Теорія оптимальних систем автоматичного керування: Навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – 229 с., рис. 54, табл. 1.

ISBN

У навчальному посібнику викладено основні положення теорії оптимальних систем автоматичного керування: корекція, методи оптимізації параметрів і синтезу оптимальних структур систем автоматичного керування.

Матеріал посібника забезпечує дисципліну «Теорія оптимальних систем автоматичного керування» для навчання здобувачів вищої освіти магістратури денної та заочної форм навчання за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» освітньої програми «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Може бути рекомендований для підготовки магістрів та аспірантів інших напрямів підготовки.

УДК 62-5:681.5.013

ISBN

© Український державний університет
залізничного транспорту, 2022.

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| Вступ..... | 7 |
| 1. Корекція лінійних стаціонарних систем автоматичного керування..... | 11 |
| 1.1. Види коректуючих пристроїв..... | 11 |
| 1.2. Основні методи послідовної корекції САК..... | 16 |
| 1.2.1. Пропорційно-диференціальна корекція..... | 17 |
| 1.2.2. Пропорційно-інтегральна корекція..... | 21 |
| 1.2.3. Пропорційно-інтегрально-диференціальна корекція..... | 24 |
| 1.3. Синтез коректуючих пристроїв методом логарифмічних частотних характеристик..... | 26 |
| 1.3.1. Методика та етапи синтезу..... | 26 |
| 1.3.2. Методика синтезу пропорційно-диференціального коректуючого пристрою..... | 29 |
| 1.3.3. Методика синтезу пропорційно-інтегрального коректуючого пристрою..... | 38 |
| 1.3.3.1. Методика синтезу коректуючого пристрою у вигляді ланки повільного реагування..... | 40 |
| 1.3.3.2. Методика синтезу коректуючого пристрою у вигляді ізодромної ланки..... | 48 |
| 1.3.4. Методика синтезу пропорційно-інтегрально-диференціального коректуючого пристрою..... | 53 |
| Контрольні запитання | 61 |
| 2. Оптимізація параметрів систем автоматичного керування за інтегральними показниками якості..... | 63 |
| 2.1. Основні поняття про інтегральні методи оцінювання якості..... | 63 |
| 2.2. Лінійна інтегральна оцінка..... | 66 |
| 2.3. Квадратична інтегральна оцінка..... | 69 |
| 2.4. Поліпшена квадратична інтегральна оцінка..... | 74 |

| | |
|---|-----|
| 2.5. Оптимізація параметрів САК з фіксованою структурою за критерієм мінімуму інтегральної оцінки..... | 76 |
| Контрольні запитання | 78 |
| 3. Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом..... | 79 |
| 3.1. Загальна характеристика задач оптимального керування заданим об'єктом..... | 79 |
| 3.2. Математична модель об'єкта керування..... | 81 |
| 3.3. Математичні моделі зовнішніх дій..... | 88 |
| 3.4. Математичний опис мети керування..... | 93 |
| 3.5. Математичний опис вимог до якості керування..... | 94 |
| 3.6. Математичний опис обмежень, що накладаються на рух об'єкта керування і дії..... | 98 |
| 3.7. Математичне формулювання варіаційної задачі оптимального детермінованого керування..... | 99 |
| 3.8. Керованість об'єкта. Необхідні і достатні умови керованості лінійного стаціонарного об'єкта..... | 101 |
| 3.9. Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна..... | 106 |
| Контрольні запитання | 110 |
| 4. Керування, оптимальне за швидкодією..... | 112 |
| 4.1. Загальна характеристика задачі синтезу керування, оптимального за швидкодією..... | 112 |
| 4.2. Синтез оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом..... | 113 |
| 4.2.1. Постановка задачі..... | 113 |
| 4.2.2. Розв'язання задачі..... | 114 |
| 4.2.3. Методи реалізації керування, оптимального за швидкодією... | 119 |
| 4.3. Приклад синтезу оптимальної за швидкодією системи керування лінійним стаціонарним об'єктом..... | 122 |

| | |
|---|-----|
| Контрольні запитання | 134 |
| 5. Системи, оптимальні за квадратичним показником якості..... | 135 |
| 5.1. Квадратичний показник якості керування..... | 135 |
| 5.2. Синтез керування станом лінійного стаціонарного об'єкта, оптимального за критерієм мінімуму квадратичного показника якості..... | 140 |
| 5.2.1. Постановка задачі..... | 140 |
| 5.2.2. Розв'язання задачі..... | 141 |
| 5.2.3. Методи реалізації керування станом лінійного стаціонарного об'єкта, оптимального за критерієм мінімуму квадратичного показника якості..... | 145 |
| 5.2.4. Асимптотичні властивості оптимального регулятора..... | 150 |
| 5.3. Приклад синтезу системи керування лінійним стаціонарним об'єктом, оптимальної за критерієм мінімуму квадратичного функціоналу якості..... | 154 |
| Контрольні запитання | 164 |
| 6. Відновлення стану об'єкта керування за результатами вимірювань..... | 166 |
| 6.1. Характеристика задачі відновлення стану об'єкта..... | 166 |
| 6.2. Поняття спостережуваності. Критерій спостережуваності лінійних стаціонарних об'єктів..... | 167 |
| 6.3. Структура системи спостереження..... | 170 |
| 6.4. Спостереження стану об'єкта за наявності випадкових помилок вимірювань і збурень стану об'єкта..... | 173 |
| 6.5. Оцінювання стану об'єкта за результатами дискретних вимірювань..... | 185 |
| 6.5.1. Структура цифрових систем автоматичного керування..... | 185 |
| 6.5.2. Дискретні моделі об'єктів неперервної дії..... | 189 |
| 6.5.3. Оптимальний лінійний алгоритм оцінювання стану об'єкта за результатами дискретних вимірювань..... | 192 |

| | |
|--|-----|
| Контрольні запитання | 197 |
| Бібліографічний список..... | 198 |
| Додаток 1. Характеристики елементарних ланок..... | 200 |
| Додаток 2. Критерії стійкості САК..... | 202 |
| Додаток 3. Показники якості САК у перехідному режимі..... | 210 |
| Додаток 4. Аналіз якості САК у перехідному режимі за частотними характеристиками..... | 215 |
| Додаток 5. Аналіз точності САК в усталеному режимі..... | 217 |
| Додаток 6. Деякі функції пакета CONTROL TOOLBOX програмної оболонки MATLAB..... | 221 |
| Додаток 7. Основні властивості перетворення Лапласа..... | 226 |
| Додаток 8. Умови трансверсальності..... | 227 |

ВСТУП

Керування – процес надання на технічний об’єкт – об’єкт керування (ОК) – спеціально організованих (керуючих) дій ззовні, спрямованих на отримання необхідного результату його функціонування незалежно від властивостей об’єкта і впливу зовнішнього середовища.

При **автоматичному керуванні** керуючі дії формуються в окремому технічному засобі – автоматичному керуючому пристрої (АКП). Пара АКП – ОК, що взаємодіє між собою та з зовнішнім середовищем, називається **системою автоматичного керування** (САК).

На рис. В.1 наведена узагальнена структура САК і позначені основні дії:

- задавальна дія $g(t)$, що характеризує приписаний (бажаний) результат функціонування об’єкта;
- вихідна дія (керована величина) $y(t)$, що характеризує фактичний хід технічного процесу;

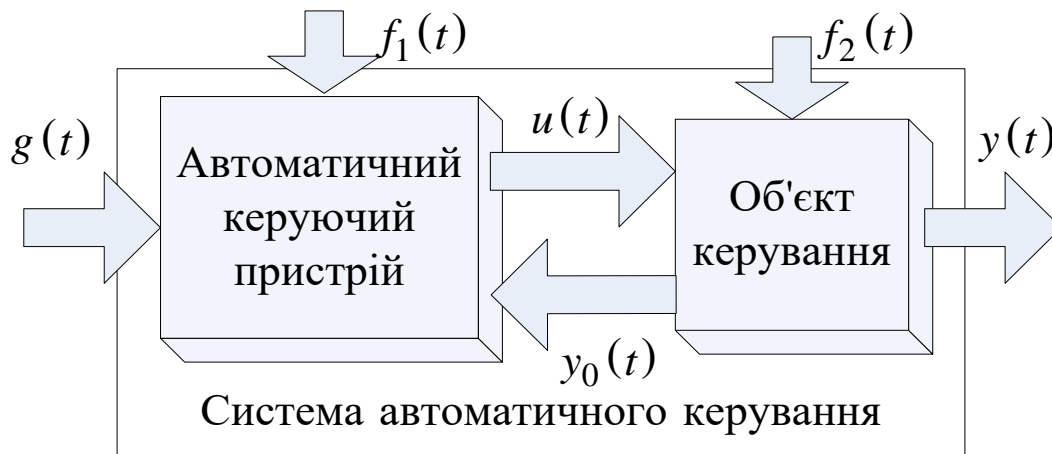


Рис. В.1. Узагальнена структура системи автоматичного керування

- керуюча дія $u(t)$, що подається з автоматичного керуючого пристрою на об’єкт з метою отримання необхідного результату його функціонування (зміни вихідної величини $y(t)$ відповідно до величини задавальної дії $g(t)$);

– контрольна дія $y_0(t)$, за допомогою якої інформація про фактичний хід технічного процесу подається від об'єкту керування до АКП;

– заважальні дії $f_1(t), f_2(t)$, що призводять до порушення нормального функціонування об'єкта.

Будь-яка система автоматичного керування створюється для забезпечення потрібного ходу технічного процесу. Тому якість функціонування систем визначається тим, якою мірою вони відповідають своєму призначенню.

САК відповідає своєму призначенню, якщо в нормальних умовах функціонування одночасно виконуються такі вимоги [1–5]:

– вона є стійкою та має необхідні запаси стійкості;

– перехідний режим у системі має допустимий час регулювання та інші показники якості;

– помилка системи у сталому режимі не перевищує допустимого значення.

Питання аналізу якості систем автоматичного керування є предметом навчальної дисципліни «Теорія автоматичного керування» [1–3]. Деякі основні методи аналізу наведено в дод. 1–5. Так, для аналізу стійкості застосовуються алгебраїчний критерій Гурвіца та частотний критерій Найквіста (дод. 2). Для аналізу якості в перехідному режимі користуються або прямим методом – за графіком перехідної характеристики системи (дод. 3), або непрямими методами – частотним методом (дод. 4) та методом інтегральних оцінок, який буде розглянуто в розділі «Оптимізація параметрів САК з фіксованою структурою за критерієм мінімуму інтегральної оцінки». Аналіз точності проводять зазвичай у типових режимах роботи (дод. 5) або за допомогою методу коефіцієнтів помилок [2].

Під час конструювання системи спочатку проводиться вибір технічних засобів, необхідних для реалізації процесу керування об'єктом (датчиків, підсилювально-перетворювальних блоків, виконавчих пристроїв),

після чого складається початкова функціональна схема системи. Процедуру знаходження сукупності функціонально необхідних компонентів для технічної реалізації САК називають її **технічним синтезом**.

Отримана внаслідок технічного синтезу структура САК, як правило, є «сирою», тому що на цьому етапі не гарантуються ані її стійкість і потрібні запаси стійкості, ані виконання вимог до показників якості функціонування в перехідному та усталеному режимах. Тому, крім технічного синтезу, необхідно провести **абстрактний синтез** системи. Він полягає у визначенні такої математичної моделі системи, що задовольняє висунутим вимогам щодо якості її функціонування.

Зрозуміло, що між результатами технічного та абстрактного синтезу САК буде існувати протиріччя. З метою наближення властивостей системи, отриманої за результатами технічного синтезу, до необхідних виконують **корекцію САК**. Корекція полягає у введенні до її складу додаткових функціональних блоків – коректуючих пристроїв.

Задача **синтезу коректуючого пристрою** включає такі етапи:

- побудова математичної моделі (оператора передачі, передаточної функції або частотних характеристик) початкової (некоректованої) системи;
- визначення математичної моделі (оператора передачі, передаточної функції або частотних характеристик) деякої бажаної системи – системи, що задовольняє висунутим вимогам щодо якості функціонування;
- визначення математичної моделі (оператора передачі, передаточної функції або частотних характеристик) коректуючого пристрою;
- розроблення схемотехнічної реалізації коректуючого пристрою (визначення його складу, місця включення та параметрів).

Найбільшого розповсюдження знайшов метод **синтезу коректуючого пристрою за допомогою логарифмічних частотних характеристик розімкненої САК**.

У великій кількості важливих задач на етапі абстрактного синтезу висувається вимога забезпечення найбільшої ефективності функціонування системи за тим чи іншим показником якості, що має набути екстремального значення. Правило, за допомогою якого обирається екстремальне значення показника якості, має назву **критерію оптимальності**. У деяких випадках необхідно забезпечити мінімальний час переведення системи в заданий режим, в інших – максимальну точність функціонування або мінімальні витрати енергії на досягнення результату та ін. Задачі такого класу належать до задач **синтезу оптимального керування** заданим об'єктом.

Задачі синтезу оптимального керування можна умовно поділити на дві групи. У першій групі задач структура системи вважається повністю відомою. Розв'язання зводиться до вибору параметрів САК, при яких обраний показник якості функціонування системи досягає екстремального значення. Задачі такого класу належать до **варіаційних задач оптимізації параметрів**. Одним з ефективних методів оптимізації параметрів САК є метод пошуку екстремумів інтегральних оцінок.

В іншій групі задач структура автоматичного керуючого пристрою вважається повністю невідомою. Її необхідно визначити на підставі інформації про об'єкти керування, мету керування, критерії оптимальності, характеристики дій і обмежень на керування і стан об'єкта. Вказані задачі належать до **варіаційних задач синтезу алгоритму оптимального керування заданим об'єктом**.

Застосування методів варіаційного числення потребує специфічних методів математичної формалізації та розв'язання задачі, застосовуваних достатньо давно, однак не завжди є можливість отримати їхні точні розв'язки. Великий внесок у розв'язання варіаційних задач зробили Л. С. Понтрягін, Р. Беллман, Р. Калман та багато інших [6–9].

1. КОРЕКЦІЯ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

1.1. Види коректуючих пристроїв

Корекція призначена для забезпечення заданих вимог до показників якості функціонування системи автоматичного керування. Корекція полягає у введенні до складу структури системи, отриманої за результатами технічного синтезу (некоректованої системи), додаткових функціональних блоків – коректуючих пристроїв.

Коректуючі пристрої залежно від способу введення їх до складу некоректованої системи поділяють на послідовні та паралельні. У свою чергу паралельні коректуючі пристрої поділяють на прямі та такі, що стоять в колі зворотного зв'язку.

Схема математичної моделі системи автоматичного керування з *послідовним коректуючим пристроєм* зображена на рис. 1.1: $R_H(p)$ – передаточна функція розімкненої некоректованої системи – системи, що складається з функціонально необхідних блоків; $K_{к1}(p)$ – передаточна функція послідовного коректуючого пристрою; $G(p)$ – зображення, за Лапласом, задавальної дії; $Y(p)$ – зображення, за Лапласом, вихідної величини.

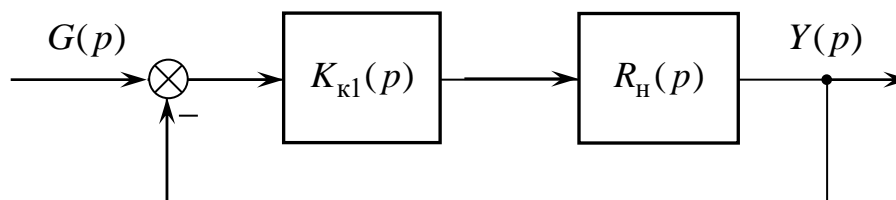


Рис. 1.1. Схема математичної моделі САК
з послідовним коректуючим пристроєм

Передаточна функція розімкненої коректованої системи з послідовним коректуючим пристроєм дорівнює

$$R_{\text{к}}(p) = K_{\text{к1}}(p) \cdot R_{\text{н}}(p). \quad (1.1)$$

Схема математичної моделі системи автоматичного керування з *паралельним коректуючим пристроєм, увімкненим в коло місцевого зворотного зв'язку*, найчастіше негативного, зображена на рис. 1.2: $K_1(p)$, $K_2(p)$, $K_3(p)$ – передаточні функції окремих функціональних блоків некоректованої системи; $K_{\text{к2}}(p)$ – передаточна функція паралельного коректуючого пристрою, увімкненого в коло місцевого негативного зворотного зв'язку (НЗЗ).

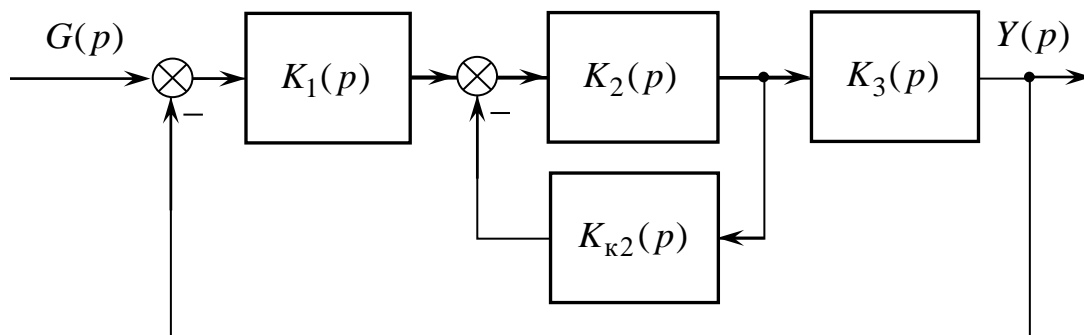


Рис. 1.2. Схема математичної моделі САК з паралельним коректуючим пристроєм у колі місцевого НЗЗ

Передаточна функція розімкненої САК з паралельним коректуючим пристроєм, увімкненим в коло місцевого НЗЗ, дорівнює

$$R_{\text{к}}(p) = R_{\text{н}}(p) \frac{1}{1 + K_{\text{к2}}(p)K_2(p)}, \quad (1.2)$$

де

$$R_{\text{н}}(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p) \quad (1.3)$$

– передаточна функція розімкненої некоректованої системи.

Варіант увімкнення коректуючого пристрою паралельно одному з блоків системи наведений на рис. 1.3. У цьому випадку коректуючий пристрій називають *прямим паралельним*. Його передаточна функція позначена на рис. 1.3 як $K_{к3}(p)$.

Передаточна функція розімкненої САК з прямим паралельним коректуючим пристроєм дорівнює

$$R_{к}(p) = R_{н}(p) \left(1 + \frac{K_{к3}(p)}{K_1(p)} \right). \quad (1.4)$$

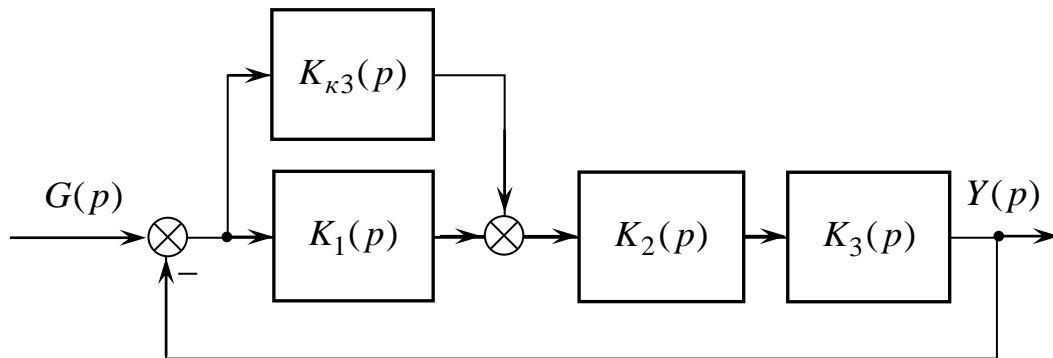


Рис. 1.3. Схема математичної моделі САК з прямим паралельним коректуючим пристроєм

Незалежно від способу введення коректуючих пристроїв до складу системи їхній вплив на функціонування системи має бути однаковим і визначатися заданими вимогами до показників якості системи.

Коректуючі пристрої різного вигляду будуть еквівалентні, тобто створюють однаковий вплив на якість функціонування САК, коли вирази для $R_{к}(p)$ дорівнюють один одному при однакових $R_{н}(p)$. Для отримання формул еквівалентності коректуючих пристроїв різного виду прирівняємо праві частини виразів (1.1), (1.2) і (1.4) і скоротимо на $R_{н}(p)$. У результаті маємо

$$K_{к1}(p) = \frac{1}{1 + K_{к2}(p)K_2(p)} = 1 + \frac{K_{к3}(p)}{K_1(p)}; \quad (1.5)$$

$$K_{к2}(p) = \frac{1 - K_{к1}(p)}{K_2(p)K_{к1}(p)} = -\frac{K_{к3}(p)}{K_2(p)[K_1(p) + K_{к3}(p)]}; \quad (1.6)$$

$$K_{к3}(p) = K_1(p)[K_{к1}(p) - 1] = -\frac{K_1(p)K_2(p)K_{к2}(p)}{1 + K_2(p)K_{к2}(p)}. \quad (1.7)$$

Формули еквівалентності дозволяють за передаточною функцією, що має коректуючий пристрій одного виду, визначити передаточну функцію еквівалентного йому коректуючого пристрою іншого виду.

Вибір того або іншого варіанта побудови коректуючого пристрою залежить від зручності схемної реалізації, а також деяких додаткових факторів. Так, послідовні коректуючі пристрої найбільш прості в процедурі синтезу і технічній реалізації (вони вводяться в розрив схеми та не потребують додаткових спеціальних елементів).

Паралельні коректуючі пристрої у вигляді місцевого НЗЗ найчастіше застосовують у потужних інерційних пристроях, а також таких пристроях, де є блоки з нестабільними параметрами. Це обумовлено тим, що при охопленні інерційної ланки негативним зворотним зв'язком її постійна часу зменшується, а коефіцієнт підсилення стабілізується.

Нехай, наприклад, місцевим НЗЗ (рис. 1.2) охоплюється блок, що має передаточну функцію

$$K_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1},$$

а коло НЗЗ є підсилювальною ланкою з коефіцієнтом підсилення $k_{к2}$. Тоді передаточна функція коректованої ланки буде такою:

$$K'_2(p) = \frac{K_2(p)}{1 + K_2(p) \cdot k_{к2}} = \frac{k_2}{1 + T_2 p + k_2 \cdot k_{к2}} = \frac{k'_2}{T'_2 p + 1},$$

де

$$k'_2 = \frac{k_2}{1 + k_2 \cdot k_{к2}}, \quad T'_2 = \frac{T_2}{1 + k_2 \cdot k_{к2}}$$

– коефіцієнт підсилення та постійна часу коректованої ланки.

Якщо, наприклад, блок мав коефіцієнт підсилення, змінюваний у межах $k_2 = 10 \dots 100$, і постійну часу $T_2 = 1$ с, то після охоплення одиничним НЗЗ ($k_{к2} = 1$) матиме $k'_2 = 0,9 \dots 0,99$, $T'_2 = 0,1 \dots 0,01$ с. Отже, коефіцієнт підсилення блока, охопленого НЗЗ, змінюється лише на 10 %, тобто стає практично стабільним, а постійна часу зменшується в 10...100 разів порівняно з початковою величиною.

Вказані переваги обумовили широке застосування НЗЗ як спеціального засобу зменшення інерційності та нестабільності параметрів окремих блоків.

Недоліком паралельних коректуючих пристроїв, увімкнених у коло місцевого НЗЗ, є складність їхнього технічного виконання (необхідно вводити додаткові блоки – датчики сигналів, суматори, спеціальні фільтри зі складною структурою). Тому НЗЗ найчастіше використовується лише для стабілізації параметрів або зменшення інерційності окремих блоків, а не для забезпечення заданих вимог до показників якості всієї системи.

Аналогічні міркування можна зробити й до застосування прямої паралельної корекції.

Передаточні функції блоків, охоплених НЗЗ або прямою паралельною корекцією, надалі враховують для синтезу послідовних коректуючих пристроїв, що найчастіше забезпечують кінцеву мету – виконання заданих вимог до показників якості функціонування системи в цілому.

1.2. Основні методи послідовної корекції САК

Розглянемо на прикладі послідовної корекції (рис. 1.1), як впливають структура і параметри коректуючого пристрою на роботу системи.

Звичайно аналіз і синтез систем керування з коректуючими пристроями здійснюється за допомогою частотних методів, зокрема з застосуванням логарифмічних частотних характеристик. При послідовній корекції передаточна функція розімкненої коректованої системи визначається виразом (1.1). Тоді з урахуванням відомих зв'язків між передаточною функцією та частотними характеристиками системи нескладно встановити, що логарифмічні амплітудно-частотна $L_K(\omega)$ і фазочастотна $\varphi_K(\omega)$ характеристики розімкненої коректованої системи визначаються виразами

$$L_K(\omega) = L_H(\omega) + L_{KP}(\omega); \tag{1.8}$$

$$\varphi_K(\omega) = \varphi_H(\omega) + \varphi_{KP}(\omega),$$

тобто бажаний вигляд частотних характеристик $L_K(\omega)$, $\varphi_K(\omega)$ досягається шляхом додавання до частотних характеристик некоректованої системи $L_H(\omega)$, $\varphi_H(\omega)$ необхідних змін $L_{KP}(\omega)$, $\varphi_{KP}(\omega)$ за допомогою послідовного коректуючого пристрою.

Отже, вплив тих чи інших варіантів послідовних коректуючих пристроїв на якість функціонування САК залежить від того, на яку область частот розімкненої некоректованої системи і як саме вони впливають.

З цієї точки зору всі послідовні коректуючі пристрої поділяють на такі види:

- пропорційно-диференціальні (ПД), що впливають на область середніх частот;
- пропорційно-інтегральні (ПІ), що впливають на область низьких частот;
- пропорційно-інтегрально-диференціальні (ПІД), що впливають на області низьких і середніх частот.

1.2.1. Пропорційно-диференціальна корекція

Як відомо [1–5], область середніх частот (ОСЧ) розташована в межах частот від $\tilde{\omega}_1$ до $\tilde{\omega}_2$, де ЛАЧХ розімкненої системи задовольняє умову $-20 \text{ дБ} \leq L_R(\omega) \leq 20 \text{ дБ}$ (рис. 1.4).

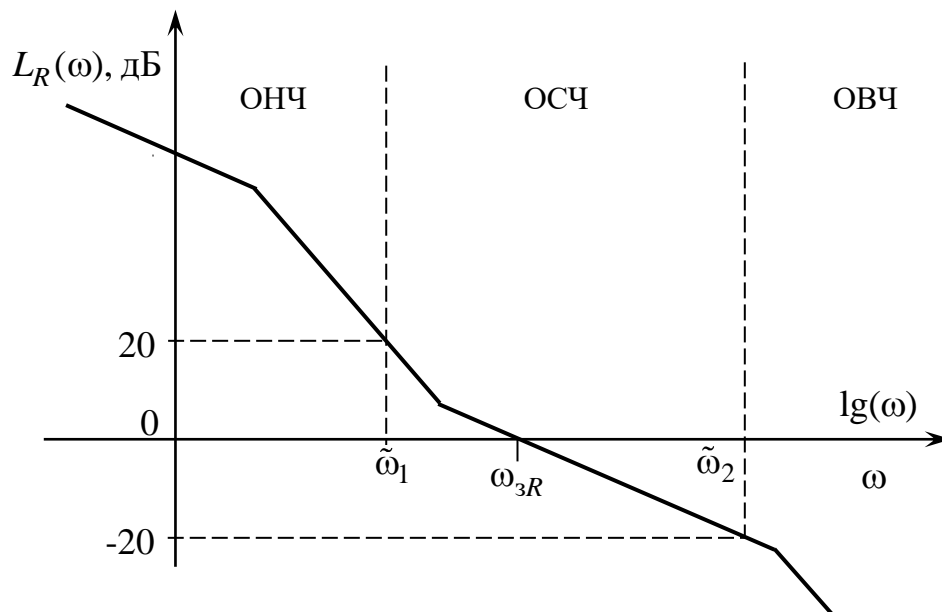


Рис. 1.4. Области частот на типовій ЛАЧХ розімкненої системи

У цих межах визначаються такі параметри, як частота зрізу розімкненої системи ω_{3R} і запаси стійкості за фазою φ_3 і підсиленням (амплітудою) L_3 . Вказані параметри характеризують наявність або відсутність стійкості системи, а якщо вона стійка – показники якості функціонування САК в перехідному режимі (дод. 3).

Отже, *пропорційно-диференціальну корекцію застосовують у тих випадках, коли необхідно забезпечити стійкість САК і/або покращити показники якості функціонування САК в перехідному режимі – час регулювання t_p і величину перерегулювання σ .*

Як правило, проблеми зі стійкістю і якістю в перехідному режимі обумовлені тим, що ЛАЧХ розімкненої системи поблизу частоти зрізу має від'ємний нахил більше -20 дБ/дек. Тому необхідного результату можна досягнути за допомогою коректуючих пристроїв, ЛАЧХ яких має підйом, а ФЧХ є додатною в області середніх частот.

Наведемо приклади передаточних функцій послідовних ПД коректуючих пристроїв:

$$K_{\text{пд1}}(p) = \tau \cdot p + 1; \quad (1.9)$$

$$K_{\text{пд2}}(p) = \frac{\tau \cdot p + 1}{T \cdot p + 1}, \quad (1.10)$$

де $\tau > T$.

Перша з них є передаточною функцією *форсуючої ланки* (дод. 1). Її асимптотична ЛАЧХ в області низьких частот йде з нульовим нахилом на рівні 0 дБ, а починаючи з частоти спряження $\omega_c = 1/\tau$ має нахил 20 дБ/дек (на рис. 1.5 – суцільна лінія).

ФЧХ такого коректуючого пристрою змінюється за законом (на рис. 1.5 – штрих-пунктирна лінія)

$$\varphi_{\text{пд1}}(\omega) = \text{arctg}(\omega \cdot \tau).$$

Для забезпечення підйому ЛАЧХ і ФЧХ некоректованої системи в області середніх частот необхідно обирати частоту спряження форсуючої ланки $\omega_c = 1/\tau$ лівіше або поблизу частоти зрізу розімкненої системи ω_{zR} .

Нескладно встановити, що при проходженні сигналу $\varepsilon(t)$ через ПД коректуючий пристрій у вигляді форсуючої ланки він перетворюється на сигнал

$$\varepsilon_{\text{пд}}(t) = K_{\text{пд1}}(D)\varepsilon(t) = (\tau D + 1)\varepsilon(t) = \varepsilon(t) + \tau \cdot \varepsilon'(t),$$

пропорційний зваженій сумі вхідного сигналу $\varepsilon(t)$ і його першої похідної $\varepsilon'(t)$. Саме тому такий вид коректуючих пристроїв й отримав назву пропорційно-диференціальних.

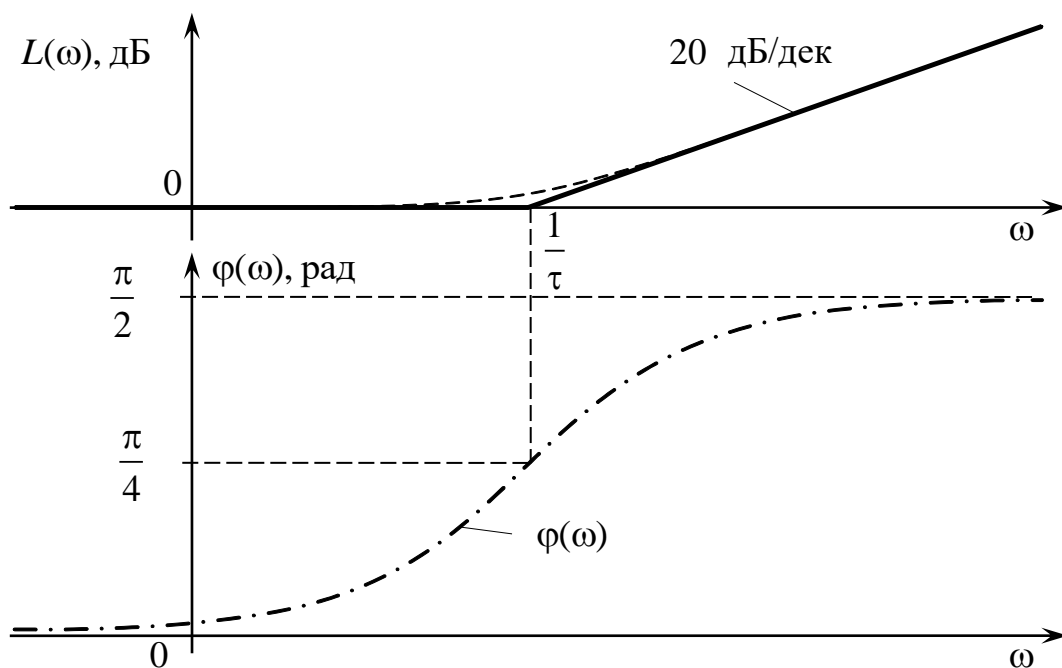


Рис. 1.5. Частотні характеристики форсуючої ланки

Зазначимо, що ідеальна форсуюча ланка не може бути фізично реалізована, тому що її вихідна величина залежить від похідної вхідної величини. На відміну від неї, другий варіант ПД коректуючого пристрою (1.10) є фізично реалізованим.

Логарифмічні частотні характеристики другого варіанта ПД коректуючого пристрою наведені на рис. 1.6. Внаслідок того, що $\tau > T$, його частотні характеристики на ділянці частот $(1/\tau, 1/T)$ визначаються

властивостями форсуючої ланки – асимптотична ЛАЧХ має нахил 20 дБ/дек, а ФЧХ є додатною з максимумом на частоті $\omega_m = 1/\sqrt{\tau \cdot T}$.
Такий варіант коректуючого пристрою отримав назву *ланка швидкого реагування*.

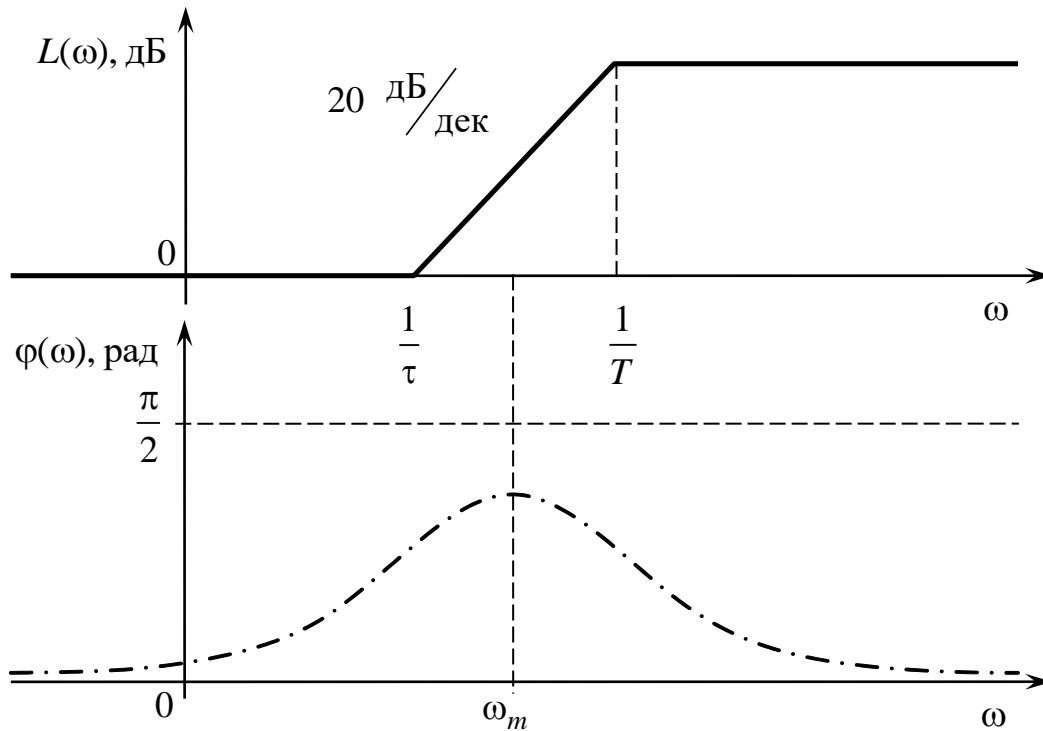


Рис. 1.6. Частотні характеристики ланки швидкого реагування

Для досягнення найкращих результатів корекції необхідно обрати параметри τ , T так, щоб вони задовольняли умову

$$1/\tau < \omega_{zR} < 1/T,$$

де ω_{zR} – частота зрізу розімкненої некоректованої системи.

Зазначимо, що ПД корекція не впливає на хід частотних характеристик розімкненої системи в області низьких частот.

1.2.2. Пропорційно-інтегральна корекція

Як відомо [1–5], хід частотних характеристик розімкненої САК в області низьких частот визначається лише величиною коефіцієнта підсилення розімкненої САК K і кількістю інтегруючих ланок ν . Вказані параметри визначають показники точності системи – величину усталеної помилки та порядок астатизму системи.

Отже, *пропорційно-інтегральна корекція призначена для підвищення точності функціонування САК.*

Внаслідок того, що величина сталої помилки обернено пропорційна коефіцієнту підсилення розімкненої системи, а порядок астатизму залежить від нахилу НЧ асимптоти ЛАЧХ, необхідного результату можна досягнути за допомогою коректуючих пристроїв, ЛАЧХ яких є додатною в області низьких частот і дорівнює нулю в областях середніх і високих частот.

Наведемо приклади передаточних функцій ПІ коректуючих пристроїв:

$$K_{\text{пн1}}(p) = k_{\text{кп1}} \frac{\tau \cdot p + 1}{p}; \quad (1.11)$$

$$K_{\text{пн2}}(p) = k_{\text{кп2}} \frac{\tau \cdot p + 1}{T \cdot p + 1}, \quad (1.12)$$

де $k_{\text{кп1}} = 1/\tau$; $k_{\text{кп2}} = T/\tau$, $T > \tau$.

Коректуючий пристрій з передаточною функцією (1.11) називається *ізодромною ланкою*, що являє собою послідовне з'єднання інтегруючої та форсуючої ланок. Її асимптотична ЛАЧХ до частоти спряження $\omega_c = 1/\tau$ має нахил – 20 дБ/дек, а після частоти спряження має нульовий нахил (на рис. 1.7 – суцільна лінія).

ФЧХ ізодромної ланки змінюється за законом (на рис. 1.7 – штрих-пунктирна лінія)

$$\varphi_{\text{пil}}(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \text{arctg}(\omega \cdot \tau).$$

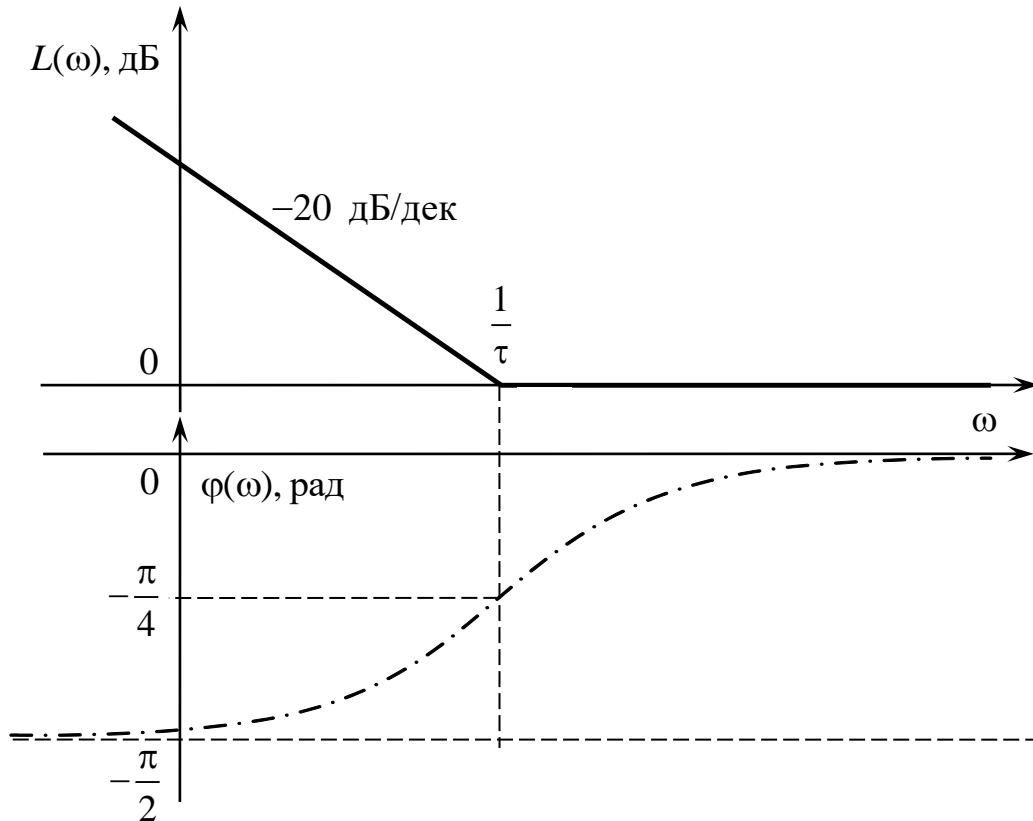


Рис. 1.7. Частотні характеристики ізодромної ланки

Нескладно встановити, що при застосуванні ізодромної ланки сигнал помилки $\varepsilon(t)$, що подається на її вхід, перетворюється на сигнал $\varepsilon_{\text{пil}}(t)$, пропорційний зваженій сумі сигналу помилки та інтеграла від нього

$$\varepsilon_{\text{пil}}(t) = \varepsilon(t) + \frac{1}{\tau \cdot D} \cdot \varepsilon(t) = \varepsilon(t) + \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t \varepsilon(\theta) d\theta.$$

Саме тому такий вид коректуючих пристроїв й отримав назву пропорційно-інтегральних.

Внаслідок введення до складу розімкненої системи інтегруючої ланки порядок астатизму системи за задавальною дією підвищується на одиницю, що й призводить до покращення точності її функціонування в типових режимах роботи [1–3].

Для того щоб при застосуванні ізодромної ланки частотні характеристики розімкненої системи в областях середніх і високих частот залишалися незмінними, необхідно обирати її частоту спряження $\omega_c = 1/\tau$ суттєво менше частоти зрізу розімкненої коректованої системи ω_{3R} : $\omega_c \ll \omega_{3R}$.

Логарифмічні частотні характеристики другого варіанта ІІІ коректуючого пристрою – так званої *ланки повільного реагування* – наведені на рис. 1.8. Її асимптотична ЛАЧХ до першої частоти спряження $\omega_1 = 1/T$ дорівнює $20 \cdot \lg k_{кп2} = 20 \cdot \lg(T/\tau)$ дБ, має від’ємний нахил – 20 дБ/дек на ділянці $(1/T, 1/\tau)$ і дорівнює нулю правіше другої частоти спряження $\omega_2 = 1/\tau$, а ФЧХ є від’ємною з мінімумом на частоті $\omega_m = 1/\sqrt{T \cdot \tau}$.

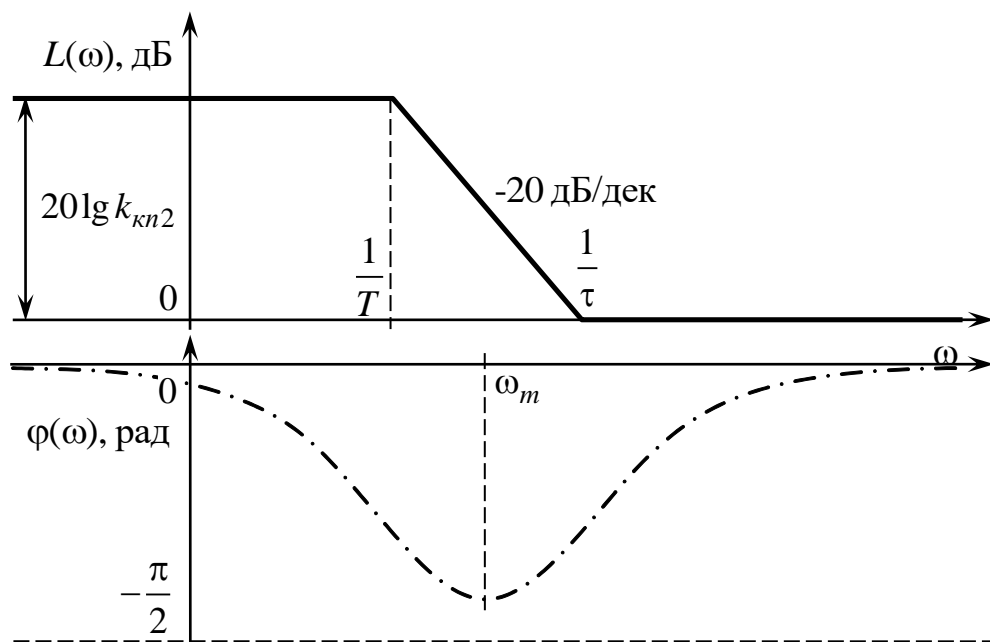


Рис. 1.8. Частотні характеристики ланки повільного реагування

Отже, такий коректуючий пристрій не змінює порядок астатизму системи, а лише підвищує коефіцієнт підсилення розімкненої системи у $k_{кп2} = T/\tau$ разів. Відповідно така корекція дозволяє зменшити величину сталої помилки в $k_{кп2}$ разів.

Для того щоб частотні характеристики розімкненої системи в областях середніх і високих частот залишилися незмінними, необхідно обирати частоту спряження $\omega_2 = 1/\tau$ лівіше не менш ніж на одну-дві октави від частоти зрізу розімкненої системи ω_{3R} .

1.2.3. Пропорційно-інтегрально-диференціальна корекція

Внаслідок того, що пропорційно-інтегрально-диференціальні коректуючі пристрої змінюють частотні характеристики розімкненої системи одночасно в областях низьких і середніх частот, вони дозволяють одночасно забезпечити стійкість, здійснити поліпшення точності та якості функціонування САК в перехідному режимі.

Варіанти передаточних функцій ПІД коректуючих пристроїв можуть бути створені з комбінацій різних пар ПД і ПІ коректуючих пристроїв з необхідними властивостями.

Один з можливих варіантів ПІД коректуючого пристрою має таку передаточну функцію:

$$K_{під}(p) = k_{кп} \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (1.13)$$

де $k_{кп} = T_1 \cdot T_2 / (\tau_1 \cdot \tau_2)$; $T_1 > \tau_1 > \tau_2 > T_2$.

За вказаним співвідношенням між параметрами підвищення точності здійснюється шляхом вибору коефіцієнта підсилення та параметрів T_1 , τ_1

так, як вказано для ПІ корекції, а забезпечення необхідних запасів стійкості та показників якості в перехідному режимі – за рахунок вибору параметрів τ_2 , T_2 так, як вказано для ПД корекції.

Варіант частотних характеристик ПД коректуючого пристрою, розрахований за допомогою пакета Control System системи MATLAB [10–13] для $T_1 = 20$ с, $T_2 = 0,5$ с, $\tau_1 = 1$ с, $\tau_2 = 5$ с, наведений на рис. 1.9. Його коефіцієнт підсилення дорівнює 6 дБ ($k_{\text{кп}} = 2$), від'ємний фазовий зсув мінімальний на частоті $\omega_{m1} \cong \sqrt{T_1 \cdot \tau_1} = 4,5 \text{ с}^{-1}$, а додатний фазовий зсув максимальний на частоті $\omega_{m2} \cong \sqrt{T_2 \cdot \tau_2} = 1,6 \text{ с}^{-1}$. Вказані параметри дозволяють зменшити величину сталої помилки вдвічі, а якщо частота зрізу некоректованої системи $\omega_{zR} \approx \omega_{m2}$, то збільшити запас за фазою на $10\text{--}15^\circ$.

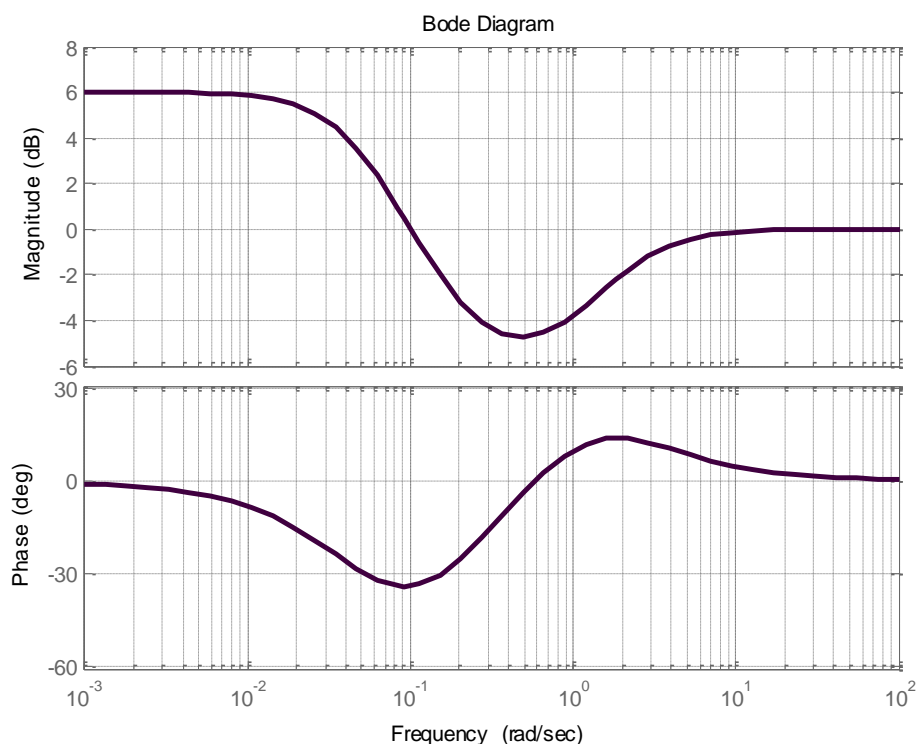


Рис. 1.9. Частотні характеристики ПД коректуючого пристрою

1.3. Синтез коректуючих пристроїв методом логарифмічних частотних характеристик

1.3.1. Методика та етапи синтезу

Синтез коректуючих пристроїв методом логарифмічних частотних характеристик, якому властиві простота і наочність, дозволяє достатньо легко враховувати вимоги до якості САК. Найбільш зручно проводити синтез коректуючих пристроїв, використовуючи частотні характеристики (ЛАЧХ і ЛФЧХ) розімкнених САК.

При синтезі коректуючих пристроїв розглядатимемо тільки мінімально-фазові системи. Нагадаємо, що до мінімально-фазових систем належать системи без запізнювання, передаточні функції яких не містять нулів і полюсів у правій півплощині комплексної змінної p . У таких системах існує взаємно однозначний зв'язок між амплітудно-частотними і фазочастотними характеристиками, тому при виконанні розрахунків достатньо користуватися лише ЛАЧХ розімкненої системи.

З виразу (1.8) випливає, що ЛАЧХ $L_{\text{кп}}(\omega)$ послідовного коректуючого пристрою дорівнює

$$L_{\text{кп}}(\omega) = L_{\text{к}}(\omega) - L_{\text{н}}(\omega), \quad (1.14)$$

де $L_{\text{к}}(\omega)$ – ЛАЧХ коректованої системи;

$L_{\text{н}}(\omega)$ – ЛАЧХ некоректованої системи.

Отже, процедура синтезу коректуючого пристрою методом логарифмічних частотних характеристик включає такі операції.

По-перше, визначається передаточна функція та будується ЛАЧХ $L_{\text{н}}(\omega)$ розімкненої некоректованої системи – системи, що складається тільки з функціонально необхідних елементів. Проводиться аналіз стійкості та показників якості в перехідному і сталому режимах. Для цього можна провести розрахунки в пакеті MATLAB ([10–13] і дод. 6). За результатами аналізу з'ясовується, яка корекція необхідна (рис. 1.10).

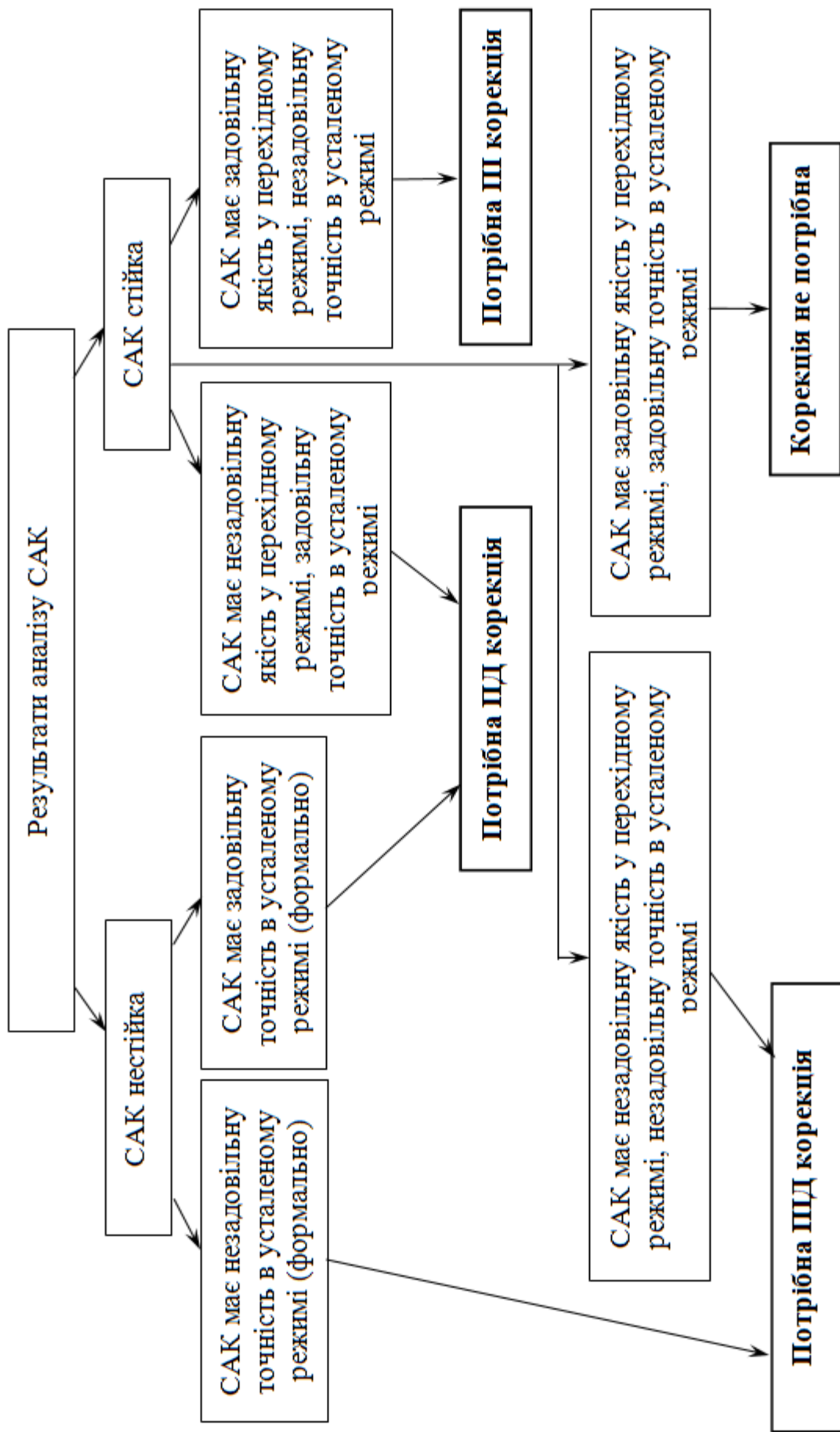


Рис. 1.10. Схема пошуку варіантів корекції

По-друге, визначається та будується ЛАЧХ розімкненої системи, що задовольняє висунуті вимоги до якості функціонування, тобто системи з бажаними властивостями. Таку систему називають бажаною, а її ЛАЧХ – *бажаною ЛАЧХ* або скорочено БЛАЧХ.

Визначення бажаної ЛАЧХ розімкненої системи є найбільш складним етапом розв'язання задачі синтезу коректуючого пристрою. Методика побудови бажаної ЛАЧХ суттєво залежить від способу задавання характеристик зовнішніх дій і вимог до показників якості системи.

Найкращі результати дають методи, засновані на застосуванні теорії оптимального керування (принцип максимуму Л. С. Понтрягіна, метод динамічного програмування Р. Беллмана) і теорії оптимальної фільтрації (фільтр Н. Вінера, фільтр Р. Калмана) [2, 6, 7, 14–16]. Розгляд деяких методів синтезу оптимальних САК проведено у третьому та четвертому розділах посібника.

Принциповою вимогою до бажаної ЛАЧХ є *забезпечення фізичної реалізованості коректуючого пристрою*. Вказана вимога виконується лише в тому випадку, якщо її нахил в області високих частот збігається з нахилом ВЧ асимптоти ЛАЧХ некоректованої системи. Тому для виконання цієї вимоги може виникнути необхідність пошуку компромісного варіанта для результатів, отриманих при синтезі оптимальної структури. Такий компромісний варіант має вже не оптимальну, а бажану ЛАЧХ.

Нижче розглядається методика визначення БЛАЧХ на основі відомих зв'язків параметрів типових ЛАЧХ, якими є коефіцієнт підсилення, частоти спряження, нахили асимптот ЛАЧХ, частота зрізу, з показниками якості САК [1–3, 5]. Надалі будемо також вважати, що задавальна дія є детермінованою, а заважальна дія відсутня.

За побудованою БЛАЧХ розраховується її передаточна функція, після чого перевіряється виконання вимог до показників якості коректованої САК.

Якщо отримані показники якості не відповідають потрібним, то змінюється хід БЛАЧХ (змінюються частота зрізу, частоти спряження, коефіцієнт підсилення та ін.) до досягнення необхідного результату.

На третьому етапі після досягнення необхідного результату виконується розрахунок передаточної функції послідовного коректуючого пристрою. Її визначають або на підставі виразу (1.1), або, користуючись правилом (1.14), спочатку будують ЛАЧХ послідовного коректуючого пристрою, за якою записують його передаточну функцію.

У деяких випадках доцільно провести спрощення структури коректуючого пристрою шляхом підбору у припустимих межах його параметрів. Після вибору кінцевої структури слід повторно провести аналіз виконання вимог до показників якості коректованої системи.

Далі за необхідності переходять від послідовного коректуючого пристрою до еквівалентного коректуючого пристрою іншого виду, проводять вибір варіанта і місця його введення, а потім за допомогою формул зв'язку (1.5) – (1.7) визначають його передаточну функцію.

На кінцевому етапі проводиться вибір схемотехнічної реалізації коректуючого пристрою і розраховуються його параметри.

1.3.2. Методика синтезу пропорційно-диференціального коректуючого пристрою

ПД корекція застосовується для забезпечення стійкості та необхідної якості функціонування САК у перехідному режимі. Вона змінює хід частотних характеристик системи в області середніх і, можливо, високих частот. При цьому область низьких частот має залишатися незмінною.

Як відомо [1–5], САК буде стійкою та матиме задовільні показники якості функціонування в перехідному режимі, якщо її логарифмічні частотні характеристики задовольняють такі вимоги:

1) на частоті зрізу розімкненої системи ω_{3R} і в області частот, що примикають до неї ($\omega_2 - \omega_3$ на рис. 1.11), ЛАЧХ проходить з нахилом -20 дБ/дек, причому загальна довжина відрізка ЛАЧХ з таким нахилом за віссю частот не менше за одну декаду: $\omega_3/\omega_2 > 10$;

2) значення запасів стійкості за амплітудою L_3 і за фазою φ_3 задовольняють умови

$$L_3 \geq 10 \text{ дБ}, \quad 45^\circ \leq \varphi_3 \leq 73^\circ. \quad (1.15)$$

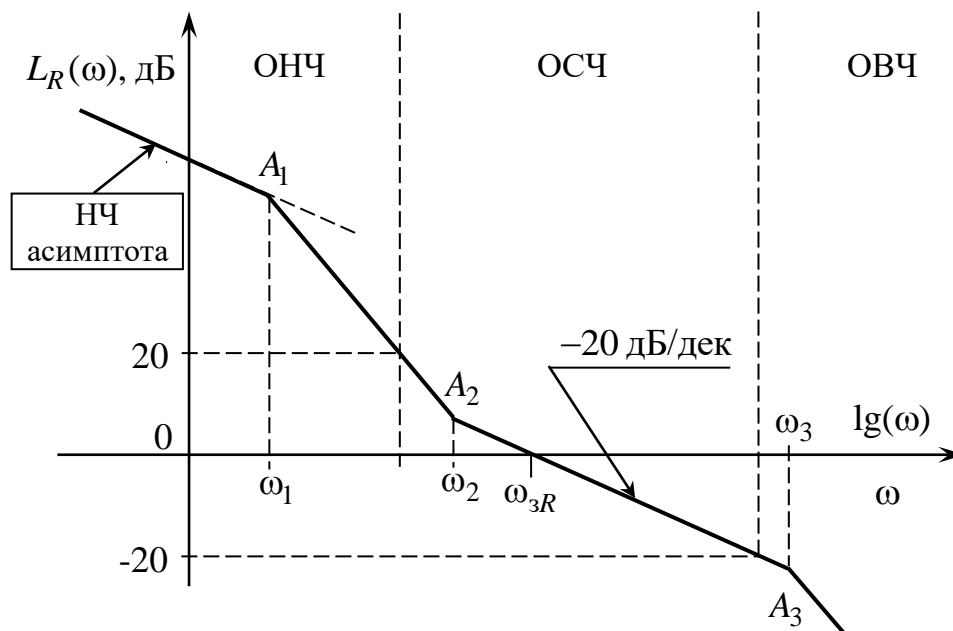


Рис. 1.11. Типова ЛАЧХ розімкненої САК

З досвіду практичного аналізу і синтезу САК встановлено, що при виконанні вказаних вимог орієнтовні значення показників якості САК у перехідному режимі – часу регулювання t_p та величини перерегулювання σ – можуть бути з достатньою для інженерної практики точністю розраховані за такими емпіричними формулами

$$t_p = \frac{5...9}{\omega_{3R}} \approx \frac{385}{\omega_{3R} \cdot \varphi_3^\circ}; \quad \sigma \cong \begin{cases} (73 - \varphi_3^\circ) \%, & \text{якщо } \varphi_3 < 73^\circ; \\ 0, & \text{якщо } \varphi_3 \geq 73^\circ. \end{cases} \quad (1.16)$$

Як впливає з формул (1.16), час регулювання обернено пропорційний частоті зрізу розімкненої системи та запасу стійкості за фазою, а величина перерегулювання зменшується при збільшенні запасу стійкості за фазою.

Отже, розв'язання задачі синтезу ПД коректуючого пристрою полягає у виборі його структури та параметрів з метою забезпечення вказаних вимог до ходу частотних характеристик розімкненої САК в області середніх частот.

З урахуванням того, що схема ПД коректуючого пристрою у вигляді форсуючої ланки (1.9) фізично не може бути реалізована, задача розв'язується шляхом вибору кількості ланок швидкого реагування (1.10) і їхніх постійних часу τ, T .

Початковою операцією при побудові середньочастотного (СЧ) відрізка БЛАЧХ є розрахунок необхідної частоти зрізу розімкненої системи ω_{3R0} за заданим часом регулювання t_{p0} . З виразу (1.16) маємо

$$\omega_{3R0} \cong \frac{5...9}{t_{p0}}. \quad (1.17)$$

Значення ω_{3R0} відкладають на осі частот, після чого будують середньочастотний відрізок БЛАЧХ, що проходить через точку ω_{3R0} з нахилом -20 дБ/дек.

Надалі на СЧ відрізку обирають мінімальну та максимальну припустимі частоти його початку і кінця за умови, щоб загальна довжина відрізка була не менше за одну декаду (на рис. 1.11 мінімальну частоту позначено ω_2 , максимальну ω_3 , необхідно щоб виконувалась вимога $\omega_3/\omega_2 > 10$). Їхні значення можуть у подальшому коректуватись з

урахуванням зручності побудови коректуючого пристрою. Наприклад, з метою спрощення структури коректуючого пристрою за рахунок зменшення кількості зламів ЛАЧХ доцільно розглянути можливість обрати їх рівними частотам спряження, що є в межах обраної ділянки у ЛАЧХ некоректованої системи. Однак у будь-якому випадку припустимі частоти мають відрізнятись від частоти зрізу не менш ніж у 2-3 рази (на рис. 1.11 $\omega_{3R0}/\omega_2 > (2...3)$, $\omega_3/\omega_{3R0} > (2...3)$).

Виконується побудова перехідної ділянки між областями низьких і середніх частот. При ПД корекції низькочастотний відрізок БЛАЧХ співпадає з ЛАЧХ некоректованої системи. Тому побудова перехідної ділянки полягає у виборі такої асимптоти, що дозволяє забезпечити перехід від точки початку СЧ асимптоти на низькочастотну асимптоту ЛАЧХ некоректованої системи. За результатами її побудови визначається відповідна частота спряження (на рис. 1.11 перехідна ділянка йде від точки A_2 на частоті ω_2 до точки A_1 перетину з НЧ асимптотою некоректованої системи на частоті ω_1).

Внаслідок того, що хід БЛАЧХ в області високих частот не впливає суттєво на якість функціонування, її побудова проводиться виходячи з умови отримання найбільш простого та фізично реалізованого коректуючого пристрою. Для забезпечення фізичної реалізованості коректуючого пристрою кінцева ділянка БЛАЧХ має або співпадати з ВЧ асимптотою ЛАЧХ некоректованої системи, або йти паралельно з постійною різницею між їхніми нахилами.

Надалі, користуючись виразом (1.14), виконується побудова ЛАЧХ коректуючого пристрою. За отриманим результатом уточнюються кількість ланок швидкого реагування, необхідних для корекції, і їхні параметри.

Кількість ланок визначається необхідним додатним нахилом отриманої ЛАЧХ КП з урахуванням того, що одна ланка може дати нахил у 20 дБ/дек. Якщо КП складається з декількох ланок, необхідно розбити

отриману ЛАЧХ КП на складові у вигляді окремих ланок швидкого реагування.

Параметри КП – постійні часу τ, T ланок швидкого реагування – визначаються отриманими частотами спряження ЛАЧХ ланок швидкого реагування (рис. 1.6).

Приклад. Некоректована розімкнена САК має передаточну функцію

$$R_H(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

де K – коефіцієнт підсилення розімкненої системи, $K = 1 \text{ с}^{-1}$;

$T_1 = 10 \text{ с}, T_2 = 0,5 \text{ с}$ – постійні часу виконавчого пристрою.

До показників якості функціонування системи висуваються такі вимоги:

час регулювання t_{p0} не має перевищувати 10 с, а перерегулювання σ – 30 %.

Визначити бажану передаточну функцію розімкненої системи та передаточну функцію послідовного коректуючого пристрою.

Розв'язання

Логарифмічні частотні характеристики розімкненої САК отримані за допомогою MATLAB (рис. 1.12).

За логарифмічним частотним критерієм система стійка. Перехідна характеристика некоректованої системи також отримана за допомогою MATLAB та наведена на рис. 1.13. Час регулювання $t_p = 114 \text{ с}$, а перерегулювання $\sigma = 76,6 \%$, що не задовольняє вимоги до показників якості в перехідному режимі.

Отже, точність задовільна, а показники якості САК у перехідному режимі незадовільні. Тому, за схемою на рис. 1.10, необхідна ПД корекція.

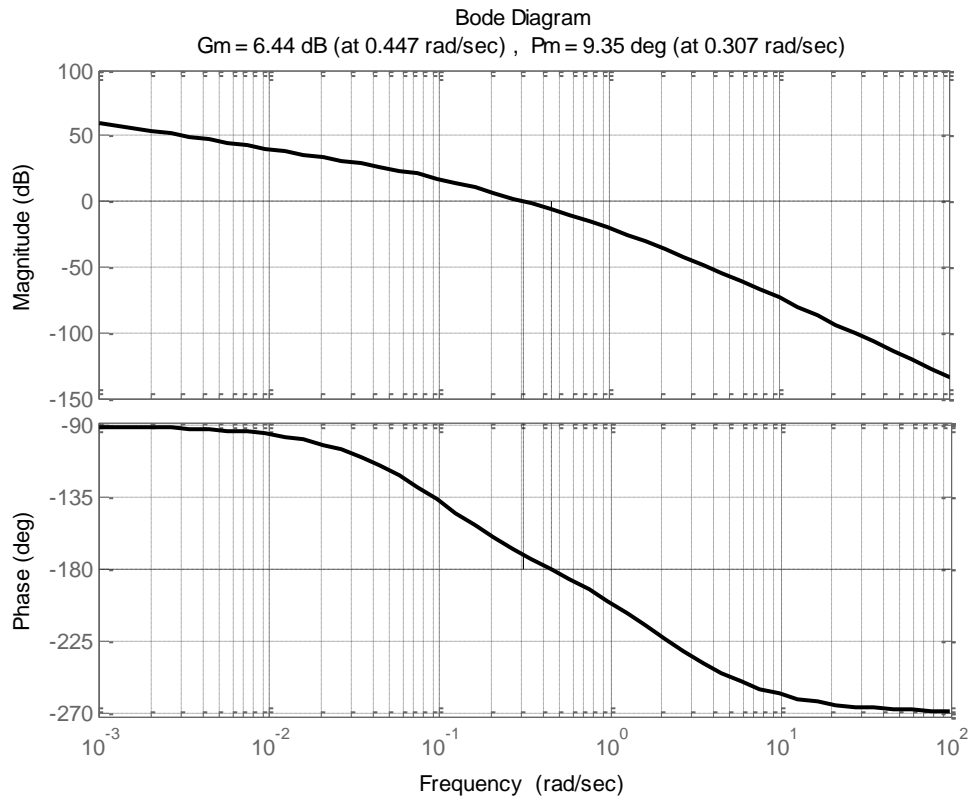


Рис. 1.12. Логарифмічні частотні характеристики розімкненої некоректованої САК

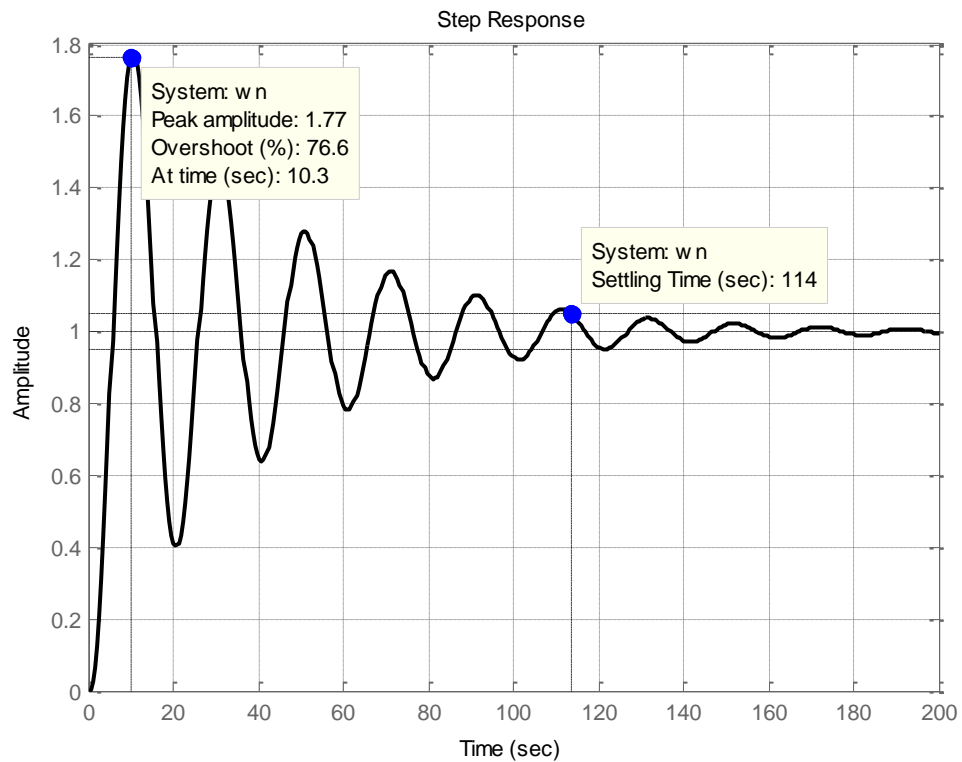


Рис. 1.13. Графік перехідної характеристики некоректованої замкненої САК

1. Будуємо ЛАЧХ $L_H(\omega)$ некоректованої системи.

Для побудови НЧ асимптоти некоректованої САК розраховуємо коефіцієнт підсилення:

$$L = 20 \lg K = 20 \lg 1 = 0 \text{ дБ.}$$

Відкладаємо значення $L = 0 \text{ дБ}$ на частоті $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ і будуємо через отриману точку штрихову лінію з нахилом -20 дБ/дек (рис. 1.14).

Частоти спряження, необхідні для побудови, дорівнюють $\omega_{1H} = 1/T_1 = 0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{2H} = 1/T_2 = 2 \text{ с}^{-1}$ (рис. 1.14). НЧ асимптоту проводимо зліва до першої частоти спряження ω_{1H} .

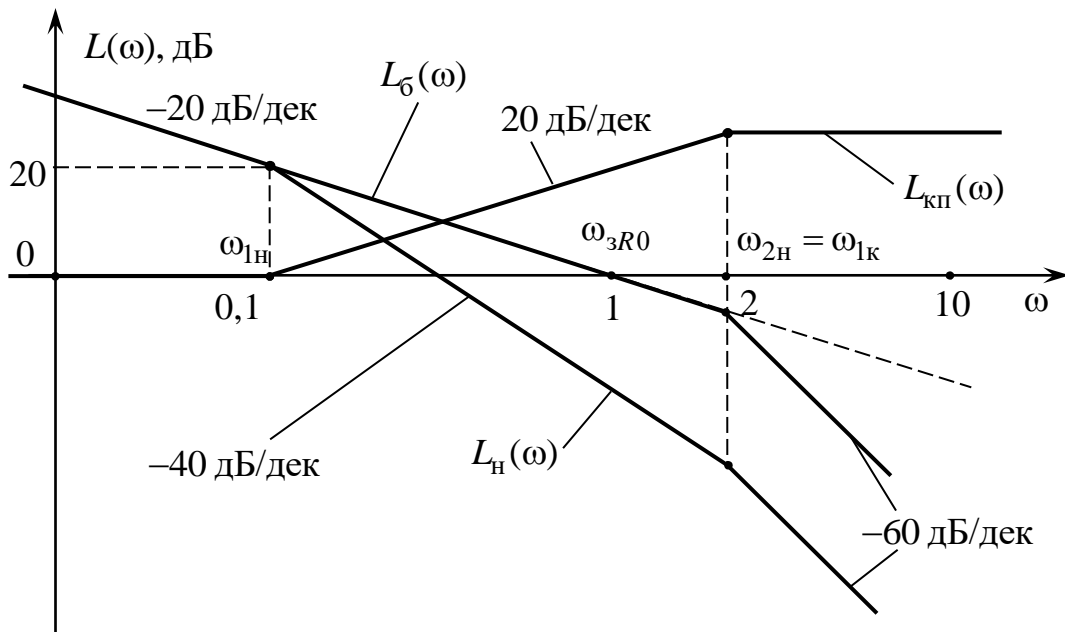


Рис. 1.14. Логарифмічні частотні характеристики

Після частоти спряження ω_{1H} діє інерційна ланка з постійною часу $T_1 = 10 \text{ с}$, тому від частоти $\omega_{1H} = 0,1 \text{ с}^{-1}$ збільшуємо нахил ЛАЧХ некоректованої системи до -40 дБ/дек і проводимо суцільну лінію до

частоти $\omega_{2H} = 1/T_2 = 2 \text{ c}^{-1}$. За частотою ω_{2H} нахил ЛАЧХ збільшується до -60 дБ/дек внаслідок дії другої інерційної ланки.

Побудову ЛАЧХ $L_H(\omega)$ некоректованої системи завершено.

2. За заданим часом регулювання t_p розраховуємо необхідну частоту зрізу розімкненої системи ω_{3R0} (вираз (1.16)):

$$\omega_{3R0} \cong \frac{5 \dots 9}{t_{p0}} = \frac{5 \dots 9}{10} = 0,5 \dots 0,9 \text{ c}^{-1}.$$

Обираємо $\omega_{3R0} = 1 \text{ c}^{-1}$, відкладаємо на осі частот, після чого будуємо середньочастотний відрізок БЛАЧХ, що перетинає на осі частот точку $\omega_{3R0} = 1 \text{ c}^{-1}$ з нахилом -20 дБ/дек. Кінці цього відрізка задаються мінімальними рівнями ± 6 дБ і визначають собою граничні значення частот спряження асимптот, що примикають до середньочастотного відрізка ліворуч $\omega_{л \max} = 0,5 \text{ c}^{-1}$ і праворуч $\omega_{п \min} = 2 \text{ c}^{-1}$.

3. Вибираємо нахил відрізка БЛАЧХ, що з'єднає між собою низькочастотну та середньочастотну асимптоти. У нашому випадку СЧ асимптоту можна безпосередньо продовжити до НЧ асимптоти без зміни нахилу. Тому між цими асимптотами на бажаній ЛАЧХ не буде частот спряження.

Отже, нам відома бажана ЛАЧХ в областях низьких і середніх частот.

4. Будуємо бажану ЛАЧХ в області високих частот за умови отримання найбільш простого коректуючого пристрою. З цією метою обираємо $\omega_{1K} = \omega_{2H} = 2 \text{ c}^{-1} = \omega_{п \min}$. Для забезпечення фізичної реалізованості спрямуємо БЛАЧХ паралельно ЛАЧХ некоректованої системи від частоти ω_{1K} з нахилом -60 дБ/дек.

Отже, високочастотна асимптота БЛАЧХ, починаючи від частоти $\omega_{1к} = 2 \text{ с}^{-1}$, має нахил -60 дБ/дек і йде паралельно ВЧ асимптоті некоректованої системи.

5. За результатами побудови БЛАЧХ маємо таку передаточну функцію $R_6(p)$ бажаної системи:

$$R_6(p) = \frac{1}{p(0,5p + 1)^2}.$$

Графік перехідної характеристики коректованої САК, побудований за допомогою пакета MATLAB, наведено на рис. 1.15. З аналізу графіка випливає, що бажана ЛАЧХ задовольняє вимоги до якості функціонування в перехідному режимі (перерегулювання σ дорівнює 25% , а час регулювання t_p за рівнем $(1 \pm 0,05)$ дорівнює $7,1 \text{ с}$.

6. На підставі виразу (1.14) будемо ЛАЧХ коректуючого пристрою як різницю між бажаною ЛАЧХ і ЛАЧХ некоректованої системи. Вона йде від низьких частот до частоти $\omega_{1н}$ по осі частот, від частоти $\omega_{1н}$ до частоти $\omega_1 = \omega_{2н}$ має нахил 20 дБ/дек , а від частоти $\omega_{1к} = \omega_{2н}$ до нескінченності знов йде паралельно осі частот (рис. 1.14).

Передаточна функція послідовного коректуючого пристрою може бути знайдена шляхом ділення передаточної функції бажаної системи на передаточну функцію некоректованої системи

$$K_{кп}(p) = \frac{R_6(p)}{R_н(p)} = \frac{T_1p + 1}{T_2p + 1} = \frac{10p + 1}{0,5p + 1}.$$

Отже, за результатами синтезу був отриманий послідовний ПД коректуючий пристрій у вигляді ланки швидкого реагування.

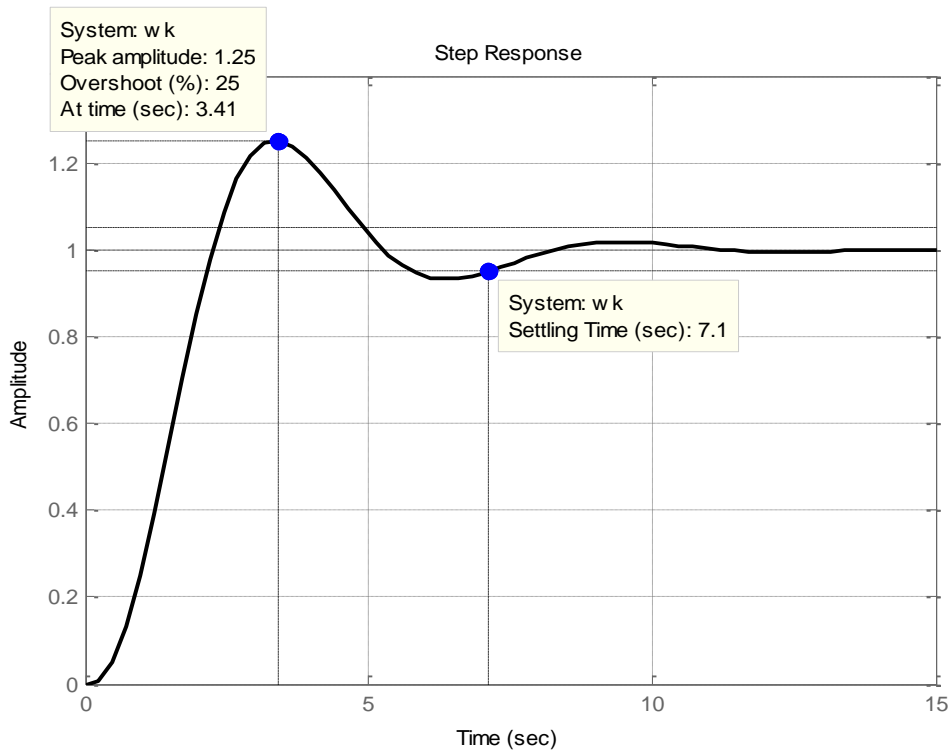


Рис. 1.15. Графік перехідної характеристики коректованої замкненої САК

1.3.3. Методика синтезу пропорційно-інтегрального коректуючого пристрою

ПІ корекція застосовується для забезпечення необхідної точності функціонування САК. Вона змінює хід частотних характеристик системи в області низьких частот. При цьому області середніх і високих частот мають залишатися незмінними.

Як відомо [1–5], *точність функціонування САК в усталеному режимі залежить від кількості інтегруючих ланок і величини коефіцієнта підсилення розімкненої системи*

$$\varepsilon_g = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v+1}}{p^v + K} L\{g(t)\}, \quad (1.18)$$

де ν – кількість інтегруючих ланок у передаточній функції розімкненої системи;

K – коефіцієнт підсилення розімкненої системи;

$L\{g(t)\}$ – перетворення Лапласа задавальної дії.

Отже, для побудови НЧ асимптоти БЛАЧХ необхідно спочатку зіставити вимоги до максимальної величини сталої помилки $\varepsilon_{g\max}$ з результатами розрахунку для некоректованої САК, проведеного на підставі виразу (1.18). За результатами зіставлення приймається рішення про необхідні дії та обирається варіант ПП коректуючого пристрою (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Варіанти результатів розрахунку точності

| Варіант | Величина сталої помилки | | Необхідні дії | Вид КП |
|---------|--|--|---|-----------------------------|
| | У некоректованій САК | Необхідна після корекції | | |
| 1 | Постійна $\varepsilon_g = \text{const} \neq 0$ | Постійна $\varepsilon_{g\max} = \text{const} \neq 0$ $\varepsilon_{g\max} < \varepsilon_g$ | Необхідно збільшити коефіцієнт підсилення | Ланка повільного реагування |
| 2 | Постійна $\varepsilon_g = \text{const} \neq 0$ | Дорівнює нулю $\varepsilon_{g\max} = 0$ | Необхідно підвищити порядок астатизму | Ізодромна ланка |
| 3 | Прагне нескінченості $\varepsilon_g \rightarrow \infty$ | Постійна $\varepsilon_{g\max} = \text{const} \neq 0$ | Необхідно підвищити порядок астатизму | Ізодромна ланка |
| 4 | Прагне нескінченості $\varepsilon_g \rightarrow \infty$ | Дорівнює нулю $\varepsilon_{g\max} = 0$ | Необхідно підвищити порядок астатизму | Подвійна ізодромна ланка |

1.3.3.1. Методика синтезу коректуючого пристрою у вигляді ланки повільного реагування

З аналізу табл. Д.5.2 (дод. 5) маємо, що величина сталої помилки постійна, якщо порядок астатизму системи ν співпадає з порядком r полінома, яким описується вхідна дія. Тому задача синтезу полягає у виборі параметрів ланки повільного реагування – коефіцієнта підсилення $k_{\text{кп2}}$ і постійних часу T, τ .

Спочатку розраховується потрібне значення коефіцієнта підсилення розімкненої коректованої системи K_0 за умови:

– для статичних систем ($\nu = 0$) у статичному режимі ($g(t) = A \cdot 1(t)$, $r = 0$)

$$K_0 \geq \frac{A}{\varepsilon_{g \max}} - 1; \quad (1.19)$$

– систем з астатизмом першого порядку ($\nu = 1$) у кінетичному режимі ($g(t) = V \cdot t$, $r = 1$)

$$K_0 \geq \frac{V}{\varepsilon_{g \max}}; \quad (1.20)$$

– систем з астатизмом другого порядку ($\nu = 2$) у рівноприскореному режимі ($g(t) = W \cdot t^2 / 2$, $r = 2$)

$$K_0 \geq \frac{W}{\varepsilon_{g \max}}. \quad (1.21)$$

Після розрахунку потрібного коефіцієнта підсилення K_0 розраховується коефіцієнт підсилення ланки повільного реагування в натуральних і логарифмічних одиницях

$$k_{\text{кп2}} = K_0 / K, \quad L_{\text{кп2}} = 20 \cdot \lg(k_{\text{кп2}}). \quad (1.22)$$

Далі будується НЧ асимптота бажаної ЛАЧХ, що визначається коефіцієнтом підсилення та порядком астатизму системи. Її будують на бланку з логарифмічним масштабом шляхом піднімання НЧ асимптоти ЛАЧХ некоректованої системи на величину $L_{кп2}$.

Побудова БЛАЧХ завершується побудовою перехідної ділянки між отриманою НЧ асимптотою БЛАЧХ і ЛАЧХ некоректованої системи в області середніх частот.

Для побудови перехідної ділянки необхідно спочатку обрати частоту її спряження з ЛАЧХ некоректованої системи в області середніх частот за умови, щоб перехідна ділянка закінчувалась на частоті, значно меншій частоти зрізу розімкненої системи ω_{3R} . Наприклад, така ділянка на рис. 1.11 з'єднує точки A_1 та A_2 , отже частота ω_2 має задовольняти умову $\omega_{3R}/\omega_2 > (3...5)$. Її значення може в подальшому коректуватися з урахуванням зручності побудови коректуючого пристрою.

За відсутності спеціальних умов нахил перехідної ділянки доцільно обрати мінімально необхідним, що забезпечує з'єднання НЧ асимптоти БЛАЧХ з ЛАЧХ некоректованої системи в області СЧ.

Після завершення побудови БЛАЧХ виконується побудова ЛАЧХ коректуючого пристрою за виразом (1.14). За отриманим результатом уточнюються кількість ланок повільного реагування, необхідних для корекції, і їхні параметри.

Кількість ланок визначається необхідним від'ємним нахилом отриманої ЛАЧХ КП з урахуванням того, що одна ланка може дати нахил -20 дБ/дек. Якщо КП складається з декількох ланок, необхідно розбити отриману ЛАЧХ КП на складові у вигляді окремих ланок повільного реагування.

Параметри КП – постійні часу τ, T ланок повільного реагування – визначаються отриманими частотами спряження ЛАЧХ ланок повільного реагування (рис. 1.8).

Приклад. Некоректована розімкнена ЕМСС має передаточну функцію

$$R_H(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

де K – коефіцієнт підсилення розімкненої системи, $K = 1 \text{ с}^{-1}$;

$T_1 = 0,5 \text{ с}$, $T_2 = 0,05 \text{ с}$ – постійні часу виконавчого електродвигуна.

Задавальною дією ЕМСС є кут повороту задавального вала $\alpha(t)$. За умовою задачі задавальний вал обертається з постійною швидкістю, тобто закон його зміни описується поліноміальною функцією часу

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \Omega_0 \cdot t.$$

До показників якості функціонування системи висуваються такі вимоги:

1) усталена кутова помилка при обертанні задавального вала зі швидкістю $\Omega_0 = 0,1 \text{ рад/с}$ не має перевищувати $\theta_{g \max} = 0,05 \text{ рад}$;

2) час регулювання t_p не має перевищувати 6 с , а перерегулювання σ – 20% .

Визначити бажану передаточну функцію розімкненої системи та передаточну функцію послідовного коректуючого пристрою.

Розв'язання

Логарифмічні частотні характеристики розімкненої САК отримані за допомогою MATLAB (рис. 1.16).

За логарифмічним частотним критерієм система стійка, запаси стійкості задовольняють вимоги (1.15). Перехідна характеристика некоректованої системи також отримана за допомогою MATLAB і

наведена на рис. 1.17. Час регулювання $t_p = 3,49$ с, а перерегулювання $\sigma = 5,84$ %, що задовольняє вимоги до показників якості ЕМСС у перехідному режимі.

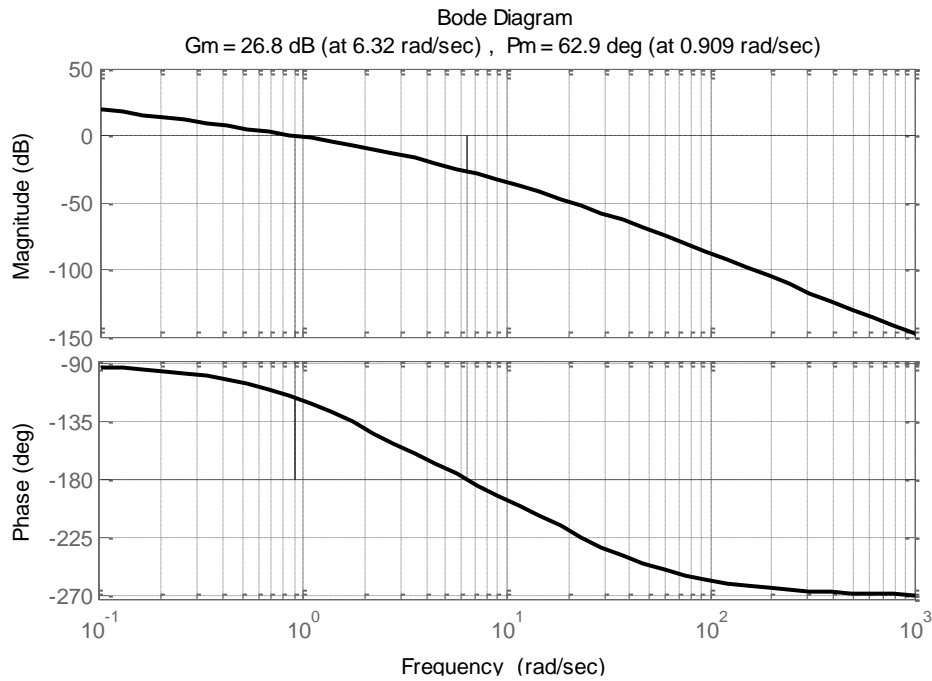


Рис. 1.16. Логарифмічні частотні характеристики некоректованої розімкненої САК

Система має одну інтегруючу ланку й тому є астатичною першого порядку. Усталена кутова помилка $\theta_{g \max n}$ некоректованої системи при обертанні задавального вала зі швидкістю $\Omega_0 = 0,1$ рад/с дорівнює

$$\theta_{g \max n} = \frac{\Omega_0}{K} = \frac{0,1}{1} = 0,1 > 0,05 \text{ рад,}$$

що не задовольняє вимогу за точністю.

Отже, система стійка, показники якості в перехідному режимі задовільні, а точність функціонування ЕМСС незадовільна. Тому, за схемою на рис. 1.10, необхідна ІІІ корекція.

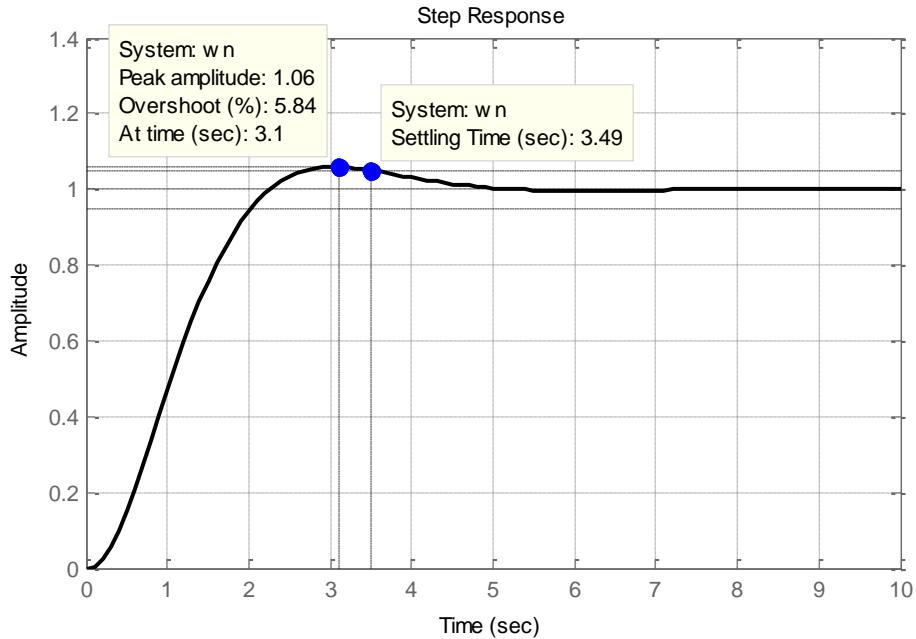


Рис. 1.17. Графік перехідної характеристики некоректованої замкненої ЕМСС

1. На основі результатів проведеного розрахунку точності і вимог до величини систематичної динамічної помилки визначаємо, що система має необхідний порядок астатизму, і для корекції необхідно обрати ланку повільного реагування (табл. 1.1, варіант 1).

Як впливає з виразу (1.20), потрібне значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи обирається за умови

$$K_0 \geq \frac{\Omega_0}{\theta_{g \max}} = \frac{0,1}{0,05} = 2 \text{ c}^{-1}.$$

Обираємо $K_0 = 2,5 \text{ c}^{-1}$.

Отже, визначена низькочастотна асимптота бажаної ЛАЧХ. Для її побудови розраховуємо коефіцієнт підсилення:

$$L_0 = 20 \lg K_0 = 20 \lg 2,5 = 8 \text{ дБ}.$$

Розраховуємо коефіцієнт підсилення ланки повільного реагування в натуральних і логарифмічних одиницях:

$$k_{кп2} = K_0 / K = 2, \quad L_{кп2} = 20 \cdot \lg(k_{кп2}) = 8 \text{ дБ.}$$

Далі будуємо НЧ асимптоту бажаної ЛАЧХ, що визначається коефіцієнтом підсилення та порядком астатизму системи. Відкладаємо значення $L_0 = 8 \text{ дБ}$ на частоті $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ і будуємо через отриману точку штрихову лінію з нахилом -20 дБ/дек (рис. 1.18).

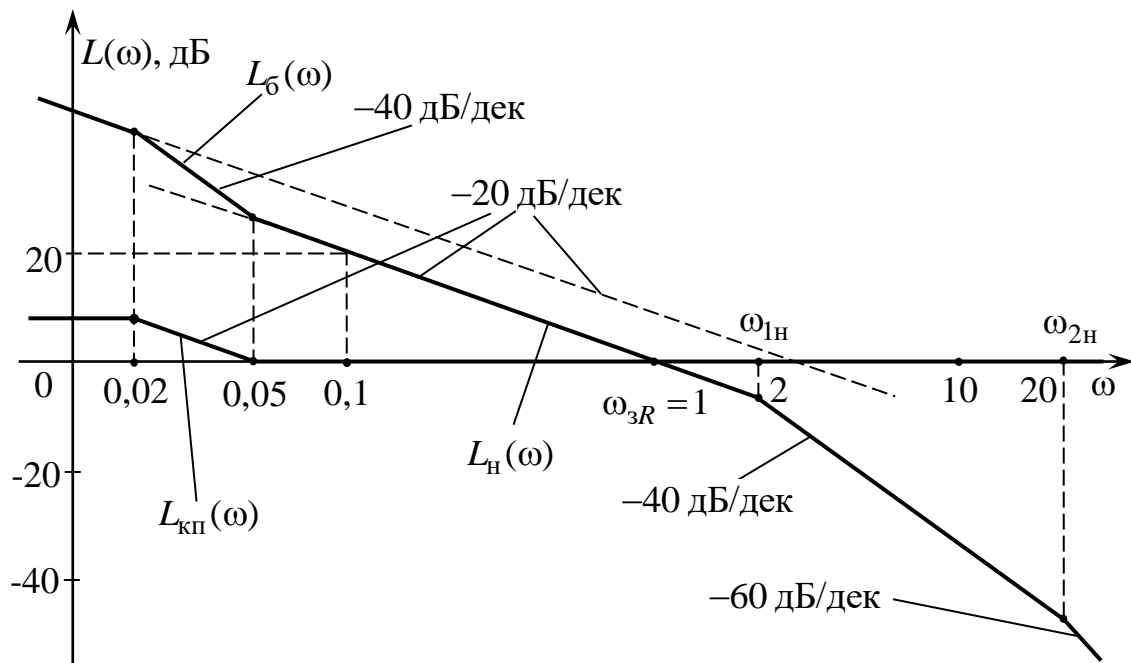


Рис. 1.18. Логарифмічні частотні характеристики

2. Будуємо СЧ асимптоту ЛАЧХ некоректованої системи, що збігається з СЧ асимптотою бажаної ЛАЧХ. Для її побудови розраховуємо коефіцієнт підсилення некоректованої системи:

$$L = 20 \lg K = 20 \lg 1 = 0 \text{ дБ.}$$

Відкладаємо значення $L = 0$ дБ на частоті $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ і будуємо через отриману точку суцільну лінію з нахилом -20 дБ/дек (рис. 1.18) до першої частоти спряження некоректованої системи $\omega_{1H} = 1/T_1 = 2 \text{ с}^{-1}$. Частота зрізу дорівнює $\omega_{3R} = 1 \text{ с}^{-1}$.

3. Обираємо постійні часу ланки повільного реагування $T = 50 \text{ с}$, $\tau = 20 \text{ с}$ ($T/\tau = k_{кп2} = 2,5$) за умови, щоб перехідна ділянка між НЧ і СЧ асимптотами закінчувалась на частоті, що значно менше частоти зрізу ω_{3R} .

На частоті $\omega_T = 1/T = 0,02 \text{ с}^{-1}$ збільшуємо нахил НЧ асимптоти бажаної ЛАЧХ до -40 дБ/дек і проводимо суцільну лінію з таким нахилом до перетину з СЧ асимптотою некоректованої системи (частота перетину $\omega_\tau = 1/\tau = 0,05 \text{ с}^{-1}$).

4. Закінчуємо побудову бажаної ЛАЧХ в області високих частот, що збігається в області цих частот з ЛАЧХ некоректованої системи. На частоті $\omega_{1H} = 1/T_1 = 2 \text{ с}^{-1}$ збільшуємо нахил ЛАЧХ до -40 дБ/дек і проводимо суцільну лінію з таким нахилом до частоти $\omega_{2H} = 1/T_2 = 20 \text{ с}^{-1}$. Після цієї частоти збільшуємо нахил ЛАЧХ до -60 дБ/дек і проводимо суцільну лінію з таким нахилом до кінця рисунка (рис. 1.18).

5. За результатами побудови БЛАЧХ маємо таку передаточну функцію $R_G(p)$ бажаної системи:

$$R_G(p) = \frac{2,5(20p + 1)}{p(50p + 1)(0,5p + 1)(0,05p + 1)}.$$

Внаслідок введення коректуючого пристрою показники якості ЕМСС у перехідному режимі можуть трохи погіршитися. Тому їх необхідно обов'язково перевірити.

Графік перехідної характеристики коректованої ЕМСС, побудований за допомогою пакета MATLAB, наведений на рис. 1.19.

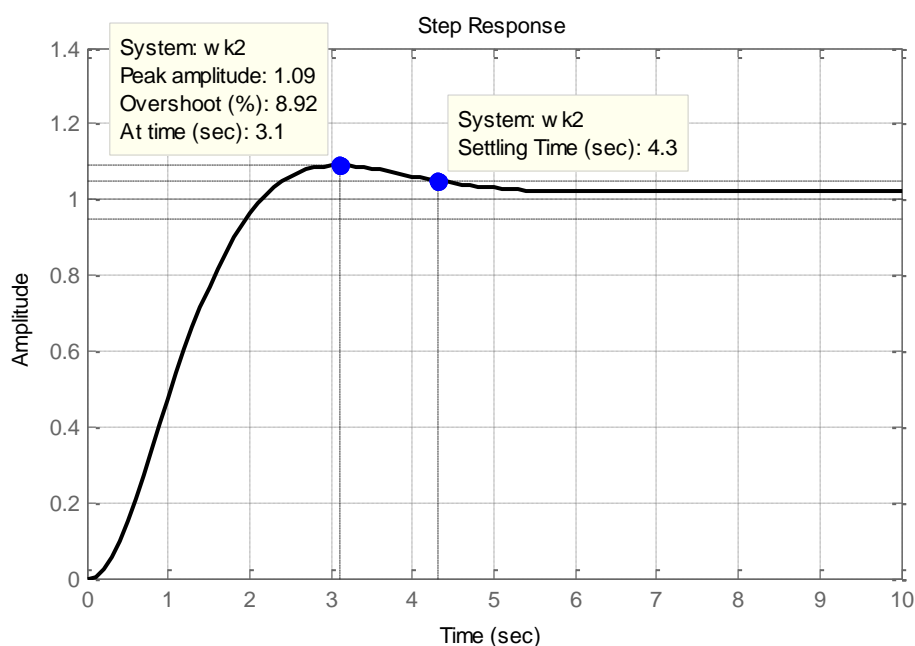


Рис. 1.19. Графік перехідної характеристики коректованої замкненої ЕМСС з коректуючим пристроєм у вигляді ланки повільного реагування

З аналізу графіка випливає, що бажана ЛАЧХ задовольняє вимоги до якості функціонування в перехідному режимі (перерегулювання σ дорівнює 8,92 %, а час регулювання t_p за рівнем $(1 \pm 0,05)$ дорівнює 4,3 с).

6. Остаточно обираємо передаточну функцію послідовного коректуючого пристрою у вигляді ланки повільного реагування

$$K_{\text{кп}}(p) = \frac{R_{\sigma}(p)}{R_{\text{н}}(p)} = k_{\text{кп}2} \frac{\tau p + 1}{T p + 1} = 2,5 \frac{20p + 1}{50p + 1}. \quad (1.23)$$

На підставі виразів (1.14) або (1.23) будемо ЛАЧХ коректуючого пристрою. Вона йде від низьких частот до частоти ω_T паралельно осі

частот на рівні 8 дБ, від частоти ω_T до частоти ω_τ має нахил -20 дБ/дек, а від ω_τ до нескінченності йде вздовж осі частот на рівні 0 дБ (рис. 1.18).

Отже, на підставі вимог до показників якості ЕМСС був синтезований ПІ коректуючий пристрій у вигляді ланки повільного реагування.

1.3.3.2. Методика синтезу коректуючого пристрою у вигляді ізодромної ланки

З аналізу табл. Д.5.2 (дод. 5) маємо, що для варіантів 2, 3 необхідно збільшити порядок астатизму коректованої САК на одиницю порівняно з некоректованою системою: $\nu_0 = \nu + 1$. Зазначена вимога забезпечується введенням однієї ізодромної ланки (вираз (1.12)). Відповідно для варіанта 4 коректована САК повинна мати порядок астатизму вище на два порядки: $\nu_0 = \nu + 2$. У цьому випадку необхідно ввести подвійну ізодромну ланку.

При забезпеченні сталої помилки, рівною нулю, величина коефіцієнта підсилення розімкненої САК не має принципового значення. Тому його можна залишити рівним коефіцієнту підсилення некоректованої системи або встановити таким, щоб було зручно для технічної реалізації КП. Отже, процедура синтезу КП полягає лише у виборі частот спряження ω_c ізодромних ланок.

Для того щоб при застосуванні ізодромної ланки частотні характеристики розімкненої системи в областях середніх і високих частот залишалися незмінними, необхідно обирати її частоту спряження $\omega_c = 1/\tau$ суттєво менше частоти зрізу розімкненої коректованої системи ω_{3R} : $\omega_c \ll \omega_{3R}$. За вказаною вимогою на графіку ЛАЧХ некоректованої системи проводиться пошук відповідних точок. Після їх обрання можна побудувати НЧ ділянку БЛАЧХ, що, починаючи від частоти ω_c , рухається вгору в

область менших частот з постійною додатною різницею 20 або 40 дБ/дек відносно графіка ЛАЧХ некоректованої системи.

Параметри КП – постійні часу τ ізодромних ланок – визначаються отриманими частотами спряження: $\tau = 1/\omega_c$.

Приклад. Некоректована розімкнена ЕМСС має передаточну функцію

$$R_H(p) = \frac{K}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)},$$

де K – коефіцієнт підсилення розімкненої системи, $K = 1 \text{ с}^{-1}$;

$T_1 = 0,5 \text{ с}$, $T_2 = 0,05 \text{ с}$ – постійні часу виконавчого електродвигуна.

До показників якості функціонування системи висуваються такі вимоги:

- 1) кінетична помилка має дорівнювати нулю $\theta_{g \max} = \theta_{\text{кін}} = 0$;
- 2) час регулювання t_p не має перевищувати 6 с, а перерегулювання σ – 20 %.

Визначити бажану передаточну функцію розімкненої системи та передаточну функцію послідовного коректуючого пристрою.

У цьому прикладі передаточна функція некоректованої ЕМСС збігається з передаточною функцією попереднього прикладу (п. 1.3.3), але до точності роботи системи висувається інша вимога.

Розв'язання

Логарифмічні частотні характеристики розімкненої САК були отримані за допомогою MATLAB у попередньому прикладі (рис. 1.16). За логарифмічним частотним критерієм система стійка, запаси стійкості задовольняють вимоги (1.15). Перехідна характеристика некоректованої

системи також отримана за допомогою MATLAB і була наведена на рис. 1.17. Час регулювання $t_p = 3,49$ с, а перерегулювання $\sigma = 5,84$ %, що задовольняє вимоги до показників якості ЕМСС у перехідному режимі.

Кінетична помилка САК [1] – це усталена систематична динамічна помилка САК при зміні задавальної дії за лінійним законом. Тому кінетична помилка $\theta_{g \max n}$ некоректованої ЕМСС при обертанні задавального вала зі швидкістю $\Omega_0 \neq 0$ дорівнює

$$\theta_{g \max n} = \frac{\Omega_0}{K} > 0 \text{ рад,}$$

що хоч є обмеженою, але не дорівнює нулю.

Отже, система стійка, показники якості ЕМСС у перехідному режимі задовільні, але точність незадовільна. Тому, за схемою на рис. 1.10, необхідна ІІІ корекція.

1. На основі даних про задавальну дію і вимог до величини систематичної динамічної помилки визначаємо порядок астатизму.

Для того щоб кінетична помилка була нульовою, обираємо порядок астатизму ЕМСС $\nu_0 = r + 1 = 2$ (табл. 1.1, п. 2), що на одиницю перевищує порядок астатизму некоректованої системи. Величина коефіцієнта підсилення при цьому не має принципового значення. Тому для корекції обираємо ІІІ пристрій у вигляді ізодромної ланки (вираз (1.12)).

2. Будуємо СЧ асимптоту ЛАЧХ некоректованої ЕМСС, що збігається з СЧ асимптотою бажаної ЛАЧХ. Для її побудови розраховуємо коефіцієнт підсилення некоректованої системи

$$L = 20 \lg K = 20 \lg 1 = 0 \text{ дБ.}$$

Відкладаємо значення $L = 0$ дБ на частоті $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$ і будуємо через отриману точку суцільну лінію з нахилом -20 дБ/дек (рис. 1.20) до першої частоти спряження некоректованої системи $\omega_{1H} = 1/T_1 = 2 \text{ c}^{-1}$. Частота зрізу дорівнює $\omega_{3R} = 1 \text{ c}^{-1}$.

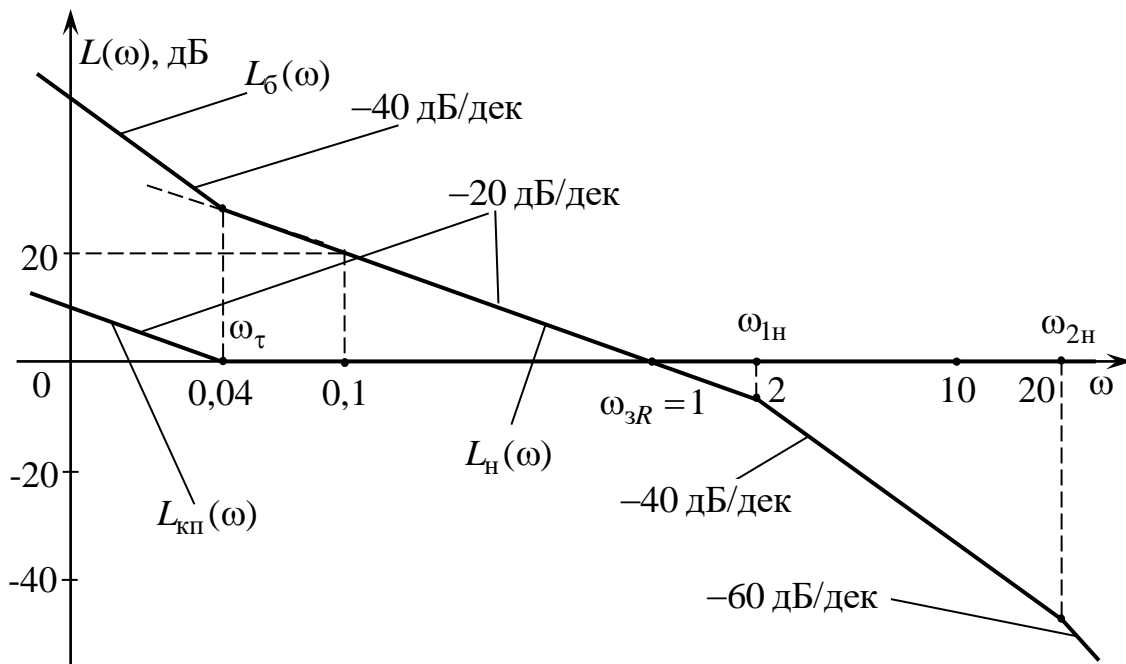


Рис. 1.20. Логарифмічні частотні характеристики

3. Обираємо постійну часу ізодромної ланки $\tau = 25 \text{ c}$ ($\omega_{\tau} = 1/\tau = 0,04 \text{ c}^{-1}$) за умови, щоб частота спряження ω_{τ} між НЧ та СЧ асимптотами була значно менше частоти зрізу ω_{3R} ($\omega_{\tau} \ll \omega_{3R}$).

Від частоти $\omega_{\tau} = 1/\tau = 0,04 \text{ c}^{-1}$ будуємо вліво НЧ асимптоту бажаної ЛАЧХ з нахилом -40 дБ/дек і проводимо суцільну лінію з таким нахилом ліворуч угору.

4. Закінчуємо побудову бажаної ЛАЧХ в області високих частот, що збігається в області цих частот з ЛАЧХ некоректованої системи. На частоті $\omega_{1H} = 1/T_1 = 2 \text{ c}^{-1}$ збільшуємо нахил ЛАЧХ до -40 дБ/дек і проводимо

суцільну лінію з таким нахилом до частоти $\omega_{2H} = 1/T_2 = 20 \text{ c}^{-1}$. Після цієї частоти збільшуємо нахил ЛАЧХ до -60 дБ/дек і проводимо суцільну лінію з таким нахилом до кінця рисунка (рис. 1.20).

5. За результатами побудови БЛАЧХ маємо таку передаточну функцію $R_G(p)$ бажаної системи:

$$R_G(p) = \frac{0,04(25p + 1)}{p^2(0,5p + 1)(0,05p + 1)}.$$

Внаслідок введення коректуючого пристрою показники якості ЕМСС у перехідному режимі можуть трохи погіршитися. Тому їх необхідно обов'язково перевірити.

Графік перехідної характеристики коректованої ЕМСС, побудований за допомогою пакета MATLAB наведений на рис. 1.21.

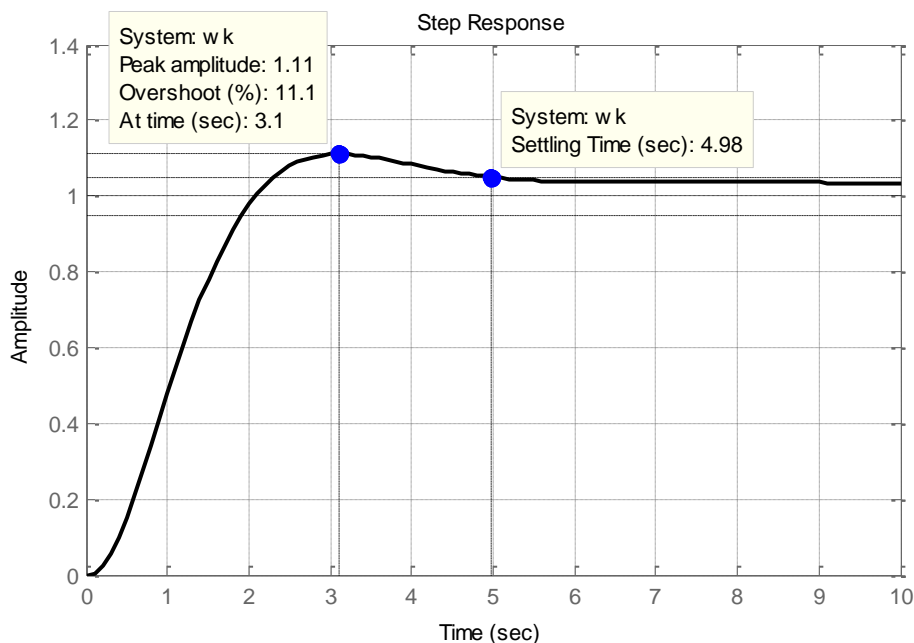


Рис. 1.21. Графік перехідної характеристики коректованої замкненої ЕМСС з коректуючим пристроєм у вигляді ізодромної ланки

З аналізу графіка випливає, що бажана ЛАЧХ задовольняє вимоги до якості функціонування в перехідному режимі (перерегулювання σ дорівнює 11,1 %, а час регулювання t_p за рівнем $(1 \pm 0,05)$ дорівнює 4,98 с).

6. Остаточно обираємо передаточну функцію послідовного коректуючого пристрою у вигляді ізодромної ланки

$$K_{\text{кп}}(p) = \frac{R_{\text{б}}(p)}{R_{\text{н}}(p)} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau p + 1}{p} = 0,04 \frac{25p + 1}{p}. \quad (1.24)$$

На підставі виразів (1.14) або (1.24) будемо ЛАЧХ коректуючого пристрою. Вона йде від низьких частот до частоти $\omega_{\tau} = 0,04 \text{ с}^{-1}$ з нахилом -20 дБ/дек , далі йде вздовж осі частот на рівні 0 дБ (рис. 1.20).

Отже, на підставі вимог до показників якості ЕМСС був синтезований ПІ коректуючий пристрій у вигляді ізодромної ланки.

1.3.4. Методика синтезу пропорційно-інтегрально-диференціального коректуючого пристрою

ПІД корекція застосовується для забезпечення стійкості, необхідної якості функціонування САК у перехідному режимі та необхідної точності в усталеному режимі. Вона змінює хід частотних характеристик системи в області низьких і середніх частот і, можливо, в області високих частот.

На першому етапі обирають необхідний порядок астатизму ν_0 і коефіцієнт підсилення розімкненої системи K_0 так, як для ПІ корекції. Далі будують НЧ асимптоту БЛАЧХ розімкненої системи.

На наступному етапі обирають частоту зрізу ω_{zR0} за наближеним співвідношенням (1.17) і будують середньочастотний відрізок БЛАЧХ, що проходить через точку ω_{zR0} з нахилом -20 дБ/дек. На середньочастотному відрізку визначають його крайні припустимі точки (п. 1.3.2).

Надалі будують перехідну ділянку між побудованими НЧ та СЧ відрізками з урахуванням максимально припустимого значення частоти початку СЧ відрізка (на рис. 1.11 $\omega_{zR0}/\omega_2 > (2\dots3)$). Нахил перехідної ділянки обирають за умови найбільш простої реалізації коректуючого пристрою. У точці перетину з НЧ асимптотою визначається її частота спряження.

У деяких випадках, наприклад якщо система є статичною (НЧ асимптота БЛАЧХ має нахил 0 дБ/дек), низькочастотна та середньочастотна асимптоти можуть мати лише одну точку перетину.

Якщо система є астатичною першого порядку (НЧ асимптота БЛАЧХ має нахил -20 дБ/дек), то до частоти зрізу відсутні інші частоти спряження, точка перетину може бути відсутньою, тобто НЧ асимптота безпосередньо переходить в область середніх частот.

При побудові БЛАЧХ в області високих частот необхідно врахувати, що її перша високочастотна асимптота має починатися з частоти, що суттєво більше частоти зрізу (на рис. 1.11 $\omega_3/\omega_{zR0} > (2\dots3)$). Тоді БЛАЧХ до першої високочастотної асимптоти буде йти з нахилом -20 дБ/дек, а далі буде прямувати або до точки перетину з ЛАЧХ некоректованої системи з постійною різницею між їхніми нахилами, або йти паралельно ЛАЧХ некоректованої системи.

Приклад. Некоректована розімкнена електромеханічна слідкуюча система (ЕМСС) має передаточну функцію

$$R_H(p) = \frac{K}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)},$$

де K – коефіцієнт підсилення розімкненої системи, $K = 20 \text{ c}^{-1}$;

$T_1 = 0,2 \text{ c}$, $T_2 = 0,02 \text{ c}$ – постійні часу виконавчого електродвигуна.

До показників якості функціонування системи висуваються такі вимоги:

1) усталена помилка при обертанні задавального вала зі швидкістю $\Omega_0 = 1,8 \text{ рад/с}$ не має перевищувати $\theta_{g \text{ max}} = 0,01 \text{ рад}$;

2) час регулювання t_p не має перевищувати 1 с, а перерегулювання σ – 25 %.

Визначити бажану передаточну функцію розімкненої системи та передаточну функцію послідовного коректуючого пристрою.

Розв'язання

Логарифмічні частотні характеристики розімкненої ЕМСС отримані за допомогою MATLAB та наведені на рис. 1.22. За логарифмічним частотним критерієм система стійка, але запаси стійкості явно недостатні.

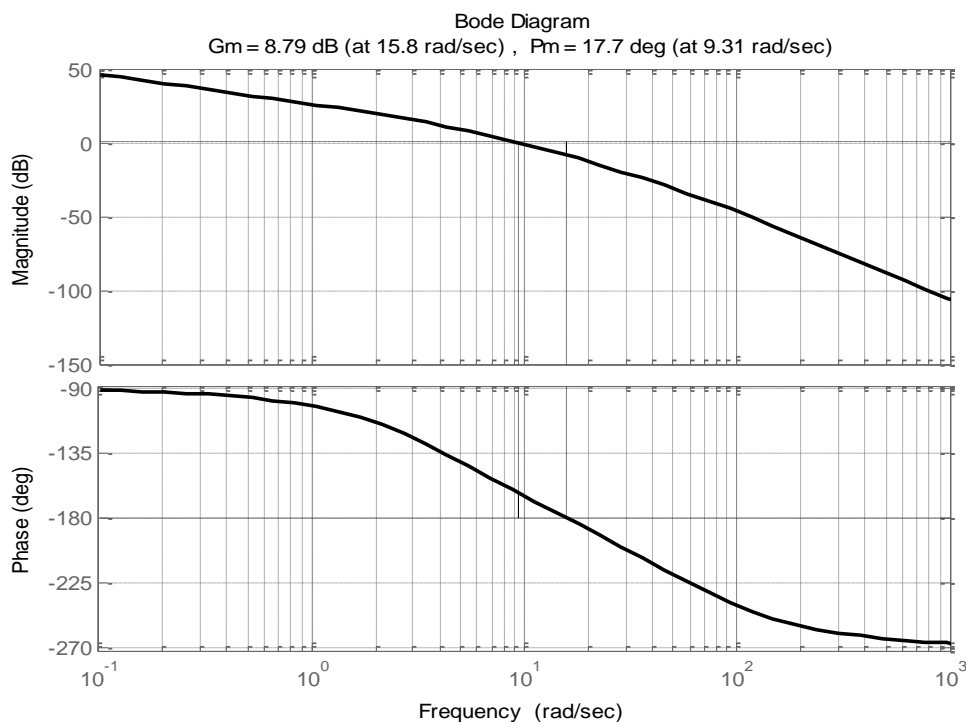


Рис. 1.22. Логарифмічні частотні характеристики розімкненої некоректованої ЕМСС

Перехідна характеристика некоректованої системи також отримана за допомогою MATLAB і наведена на рис. 1.23.

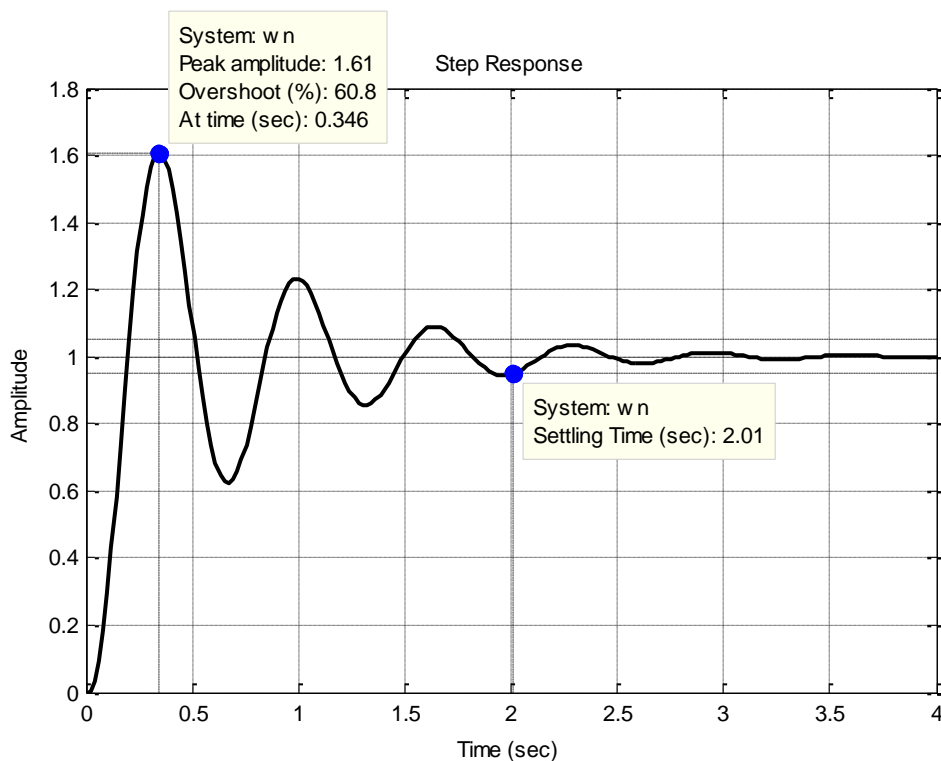


Рис. 1.23. Графік перехідної характеристики некоректованої ЕМСС

Час регулювання $t_p = 2,01$ с, а перерегулювання $\sigma = 60,8\%$, що не задовольняє вимоги до показників якості в перехідному режимі.

Усталена помилка $\theta_{g \max n}$ некоректованої системи при обертанні задавального вала зі швидкістю $\Omega_0 = 1,8$ рад/с дорівнює

$$\theta_{g \max n} = \frac{\Omega_0}{K} = \frac{1,8}{20} = 0,09 > 0,01 \text{ рад,}$$

що не задовольняє вимоги за точністю.

Отже, система стійка, однак показники якості в перехідному режимі та точність незадовільні. Тому, за схемою на рис. 1.10, необхідна ПД корекція.

1. Обираємо хід бажаної ЛАЧХ в області низьких частот.

На основі результатів проведеного розрахунку точності і вимог до величини систематичної динамічної помилки визначаємо, що система має необхідний порядок астатизму, і для корекції в області низьких частот необхідно обрати ланку повільного реагування (табл. 1.1, варіант 1).

Як випливає з виразу (1.20), потрібне значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи

$$K_0 \geq \frac{\Omega_0}{\theta_{g \max}} = \frac{1,8}{0,01} = 180 \text{ с}^{-1}.$$

Обираємо $K_0 = 200 \text{ с}^{-1}$.

Отже, визначена низькочастотна асимптота бажаної ЛАЧХ. Для її побудови розраховуємо коефіцієнт підсилення:

$$L_0 = 20 \lg K_0 = 20 \lg 200 = 46 \text{ дБ}.$$

Відкладаємо значення $L_0 = 46 \text{ дБ}$ на частоті $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ і будуємо через отриману точку НЧ асимптоту – лінію з нахилом -20 дБ/дек (рис. 1.24).

Будуємо ЛАЧХ некоректованої системи з розрахованим значенням коефіцієнта підсилення K_0 . Частоти спряження, необхідні для побудови, дорівнюють $\omega_{1Н} = 1/T_1 = 5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{2Н} = 1/T_2 = 50 \text{ с}^{-1}$ (рис. 1.24).

За виразом (1.22), коефіцієнт підсилення коректуючого пристрою має бути

$$K_{\text{кп}} = 200/20 = 10.$$

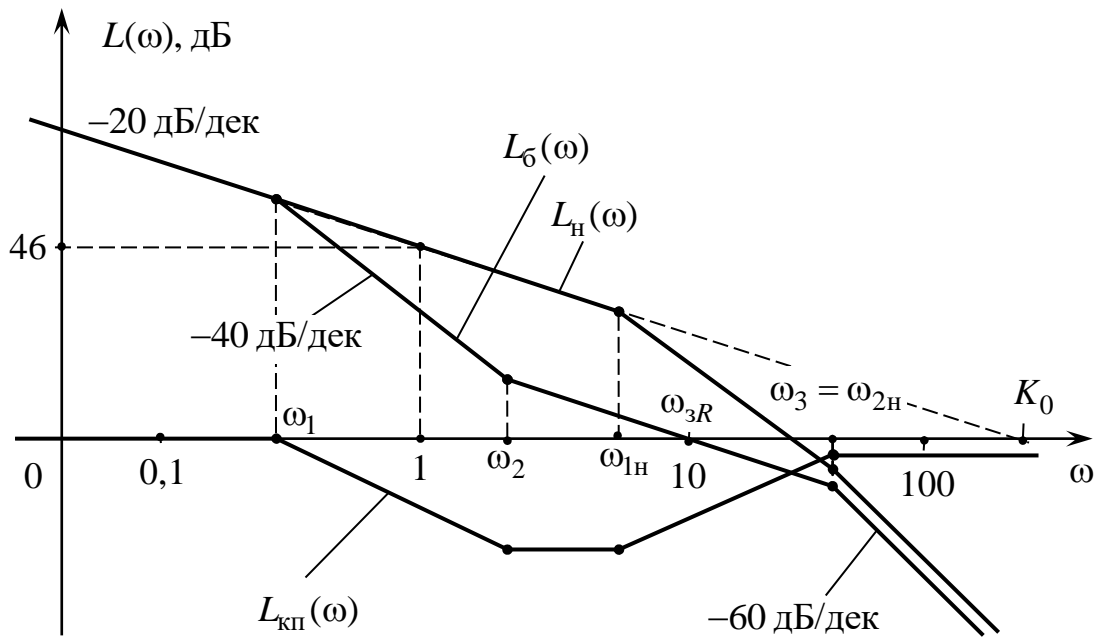


Рис. 1.24. Логарифмічні частотні характеристики

2. За заданим часом регулювання t_p розраховуємо частоту зрізу розімкненої системи ω_{3R0} (вираз (1.16)):

$$\omega_{3R0} \cong \frac{5 \dots 9}{t_p} = \frac{5 \dots 9}{1} = 5 \dots 9 \text{ с}^{-1}.$$

Обираємо $\omega_{3R0} = 10 \text{ с}^{-1}$, відкладаємо на осі частот, після чого будуємо середньочастотний відрізок БЛАЧХ, що перетинає на осі частот точку $\omega_{3R0} = 10 \text{ с}^{-1}$ з нахилом -20 дБ/дек . Кінці цього відрізка задаються рівнями $\pm 6 \text{ дБ}$ і визначають собою граничні значення частот спряження з побудованою середньочастотною ділянкою БЛАЧХ: $\omega_2 \leq \omega_{2\max} = 5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 \geq \omega_{3\min} = 20 \text{ с}^{-1}$.

3. Вибираємо нахил відрізка БЛАЧХ, що з'єднає між собою низькочастотну та середньочастотну асимптоти на ділянці від ω_1 до ω_2 і визначаємо значення першої частоти спряження ω_1 .

За умови задачі, задавальна дія подана як поліном, тому нахил ЛАЧХ на цій ділянці не має принципового значення. З метою найбільш простої реалізації коректуючого пристрою обираємо нахил -40 дБ/дек.

Обираємо $\omega_2 = 2,5 \text{ с}^{-1} < \omega_{2\max} = 5 \text{ с}^{-1}$ (рис. 1.24). Від частоти ω_2 проводимо побудову відрізка, що має нахил -40 дБ/дек, угору вліво до перетину з низькочастотною асимптотою. У точці перетину визначаємо частоту спряження $\omega_1 = 0,125 \text{ с}^{-1}$ (рис. 1.24).

Отже, нам відома бажана ЛАЧХ у областях низьких і середніх частот.

4. Будуємо бажану ЛАЧХ в області високих частот за умови отримання найбільш простого коректуючого пристрою (без зайвих зламів). Для того щоб ЛАЧХ коректуючого пристрою не мала зайвих зламів, обираємо $\omega_3 = \omega_{2н} = 50 \text{ с}^{-1} > \omega_{3\min} = 20 \text{ с}^{-1}$. Від частоти ω_3 спрямуємо БЛАЧХ з нахилом -60 дБ/дек. Отже, високочастотна асимптота БЛАЧХ, починаючи від частоти $\omega_3 = 50 \text{ с}^{-1}$, має нахил -60 дБ/дек і йде паралельно ЛАЧХ некоректованої системи, що необхідно для забезпечення фізичної реалізації коректуючого пристрою.

5. За результатами побудови БЛАЧХ маємо таку передаточну функцію $R_G(p)$ бажаної системи:

$$R_G(p) = \frac{K_0(\tau_G p + 1)}{p(T_{1G} p + 1)(T_2 p + 1)^2},$$

де $K_0 = 200 \text{ с}^{-1}$, $T_{1G} = 1/\omega_1 = 8 \text{ с}$, $T_2 = 1/\omega_{2н} = 1/\omega_3 = 0,02 \text{ с}$, $\tau_G = 1/\omega_2 = 0,4 \text{ с}$.

Графік перехідної характеристики коректованої ЕМСС, побудований за допомогою пакета MATLAB, наведений на рис. 1.25. З аналізу графіка випливає, що бажана ЛАЧХ задовольняє вимоги до якості функціонування

в перехідному режимі (перерегулювання σ дорівнює 21 %, а час регулювання за рівнем $(1 \pm 0,05)$ дорівнює 0,73 с).

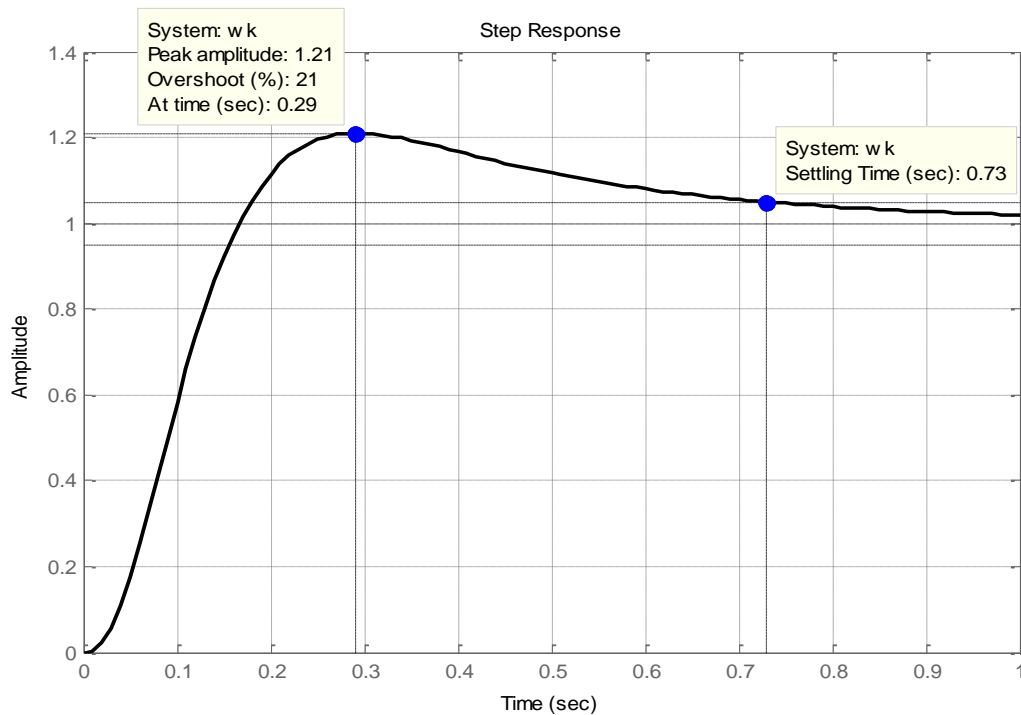


Рис. 1.25. Графік перехідної характеристики коректованої ЕМСС

Розрахунок усталеної помилки проводити не треба, тому що за обраними коефіцієнтом підсилення та порядком астатизму система задовольняє вимоги до точності.

6. На підставі виразу (1.14) будемо ЛАЧХ коректуючого пристрою як різницю між бажаною ЛАЧХ і ЛАЧХ некоректованої системи. Вона йде до частоти ω_1 по осі частот, від ω_1 до ω_2 має нахил -20 дБ/дек, від ω_2 до ω_{1H} йде паралельно осі частот, від ω_{1H} до ω_3 має нахил 20 дБ/дек, а від ω_3 до нескінченності знов йде паралельно осі частот (рис. 1.24).

Передаточна функція послідовного коректуючого пристрою може бути знайдена або за графіком ЛАЧХ з урахуванням значення $K_{кп} = 10$, або шляхом ділення передаточної функції бажаної системи на передаточну функцію некоректованої системи:

$$K_{\text{кп}}(p) = \frac{R_{\text{б}}(p)}{R_{\text{н}}(p)} = 10 \frac{(\tau_{\text{б}}p + 1)(T_1p + 1)}{(T_{1\text{б}}p + 1)(T_2p + 1)}.$$

Отже, на підставі вимог до показників якості функціонування ЕМСС був синтезований послідовний ПД коректуючий пристрій.

Контрольні запитання

1. Вкажіть призначення коректуючих пристроїв.
2. Наведіть схему математичної моделі та запишіть передаточну функцію САК з послідовним коректуючим пристроєм.
3. Наведіть схему математичної моделі та запишіть передаточну функцію САК з паралельним коректуючим пристроєм з негативним зворотним зв'язком.
4. Наведіть схему математичної моделі та запишіть передаточну функцію САК з прямим паралельним коректуючим пристроєм.
5. Як пов'язані між собою частотні характеристики некоректованої та коректованої розімкненої системи при послідовній корекції?
6. Вкажіть призначення ПД корекції та особливості частотних характеристик ПД коректуючих пристроїв.
7. Наведіть передаточну функцію ПД коректуючого пристрою у вигляді форсууючої ланки та зобразіть його логарифмічні частотні характеристики.
8. Наведіть приклад передаточної функції ПД коректуючого пристрою у вигляді ланки швидкого реагування та зобразіть його логарифмічні частотні характеристики.
9. За яких умов необхідно обирати параметри ПД коректуючого пристрою?

10. Вкажіть призначення ПІ корекції та особливості частотних характеристик ПІ коректуючих пристроїв.

11. Наведіть приклад передаточної функції ПІ коректуючого пристрою у вигляді ізодромної ланки та зобразіть його логарифмічні частотні характеристики.

12. Наведіть приклад передаточної функції ПД коректуючого пристрою у вигляді ланки повільного реагування та зобразіть його логарифмічні частотні характеристики.

13. У чому принципова різниця між ПІ коректуючими пристроями у вигляді ізодромної ланки та ланки повільного реагування?

14. За яких умов необхідно обирати параметри ПІ коректуючого пристрою?

15. Поясніть основні етапи синтезу коректуючого пристрою.

16. За яких умов будується бажана ЛАЧХ розімкненої САК в області низьких частот?

17. За яких умов будується бажана ЛАЧХ розімкненої САК в області середніх частот?

18. За яких умов будується бажана ЛАЧХ розімкненої САК в області високих частот?

2. ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ЗА ІНТЕГРАЛЬНИМИ ПОКАЗНИКАМИ ЯКОСТІ

2.1. Основні поняття про інтегральні методи оцінювання якості

Задача оптимізації параметрів САК належить до групи варіаційних задач теорії оптимального керування. При її формулюванні структура системи вважається повністю відомою. Розв'язання задачі оптимізації зводиться до вибору параметрів САК, при яких обраний показник якості функціонування системи досягає екстремального значення.

Правило, за допомогою якого обирається екстремальне значення показника якості функціонування, називається *критерієм оптимальності* системи.

Критерії оптимальності можна поділити на *локальні* (точкові) і *глобальні* (інтегральні). Розглянемо їхні особливості в задачах оптимізації параметрів САК.

Введемо до розгляду функцію $y_0(t)$, що є бажаним або еталонним законом зміни вихідної величини $y(t)$, якщо на її вхід подано дію $g(t)$.

Тоді функція

$$z(t) = y_0(t) - y(t) \quad (2.1)$$

характеризує непогодження між бажаним і фактичним законами зміни вихідної величини.

Наприклад, якщо на вхід подано одиничну функцію $g(t) = 1(t)$, то як функція $y_0(t)$ буде бажана перехідна характеристика системи.

На рис. 2.1 наведена схема математичної моделі САК, яка умовно доповнена порівнювальним пристроєм, що дозволяє виділити непогодження $z(t)$.

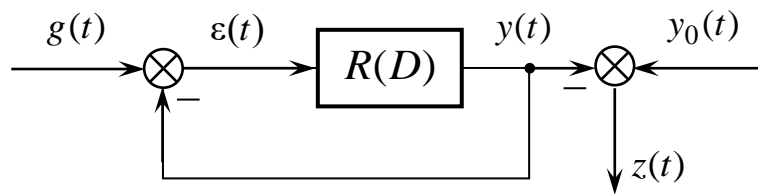


Рис. 2.1. Схема математичної моделі САК з пристроєм виділення непогодження $z(t)$

Користуючись непогодженням, можна сформулювати задачу оптимізації параметрів системи відносно того чи іншого локального показника якості, наприклад часу регулювання, величини перерегулювання та ін. Однак досягнення найкращого значення одного з локальних показників не гарантує водночас кращих інших показників, бо між ними можуть існувати протиріччя у виборі параметрів системи. Наприклад, у системі другого порядку для усунення перерегулювання в перехідному режимі необхідно обирати параметри так, щоб коефіцієнт демпфірування був більше одиниці, однак у такому випадку суттєво збільшується час регулювання [1–5]. Отже, вимоги найкращого наближення руху системи до бажаного закону неможливо сформулювати, якщо користуватись тим чи іншим локальним показником якості.

Як показник, що дає глобальну оцінку наближення руху до бажаного закону, використовують *інтегральні оцінки*, що є деякими *функціоналами* – змінними величинами, які залежать від функції непогодження

$$z(t) \tag{2.1}$$

на всьому інтервалі часу $t \in (0, \infty)$.

Найбільш широке застосування отримали такі інтегральні оцінки: лінійна, квадратична і поліпшена квадратична. Ці оцінки визначаються відповідно певними інтегралами вигляду:

– лінійна інтегральна оцінка

$$I_1 = \int_0^{\infty} z(t) dt; \quad (2.2)$$

– квадратична інтегральна оцінка

$$I_2 = \int_0^{\infty} z^2(t) dt; \quad (2.3)$$

– поліпшена квадратична інтегральна оцінка

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left[z^2(t) + \left(\tau \frac{dz(t)}{dt} \right)^2 \right] dt. \quad (2.4)$$

Використовуються й інші види інтегральних оцінок, що задаються через квадратичні функціонали якості (розд. 3, п. 3.4).

Для обчислення інтегральних оцінок мають бути задані математичні моделі системи, вхідної та еталонної дій, а також початкові умови.

Очевидно, що інтегральні оцінки мають сенс у тому випадку, якщо система є стійкою, а функція $z(t)$ є абсолютно інтегрованою, що має місце тільки при виконанні умови

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y_0(t) - y(t)] = 0. \quad (2.5)$$

2.2. Лінійна інтегральна оцінка

Лінійна інтегральна оцінка є найпростішою з інтегральних оцінок якості. Інтеграл (2.2) легко обчислюється. Справді, зображення функції $z(t)$ за Лапласом буде

$$Z(p) = \int_0^{\infty} z(t)e^{-pt} dt. \quad (2.6)$$

Підставивши у вираз (2.6) $p = 0$, отримаємо

$$I_1 = Z(p)|_{p=0}. \quad (2.7)$$

Інтегральна оцінка I_1 може застосовуватися тільки до систем, про які заздалегідь відомо, що в них функція $z(t)$ не змінює знак. У цьому випадку величина інтеграла I_1 дорівнює площі між функціями $y_0(t)$ та $y(t)$ (рис. 2.2).

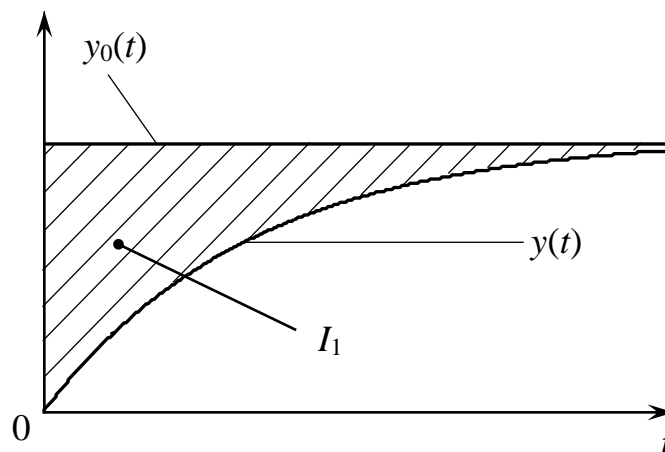


Рис. 2.2. Графічна інтерпретація лінійної інтегральної оцінки для монотонного перехідного процесу

Якщо функція $z(t)$ має коливальний характер (рис. 2.3), тоді значення I_1 не може служити мірою його якості, оскільки площі різного знака будуть відніматися одна від одної. Сказане істотно обмежує застосування лінійної інтегральної оцінки якості.

Приклад 1. Визначити лінійну інтегральну оцінку помилки в перехідному режимі для системи з передаточною функцією

$$R(p) = \frac{K}{p}.$$

Розв'язання

Величина помилки системи (дод. 7)

$$\varepsilon(p) = E(p) \cdot G(p),$$

де $E(p) = 1/(1 + R(p)) = p/(K + p)$ – передаточна функція динамічної помилки;

$G(p) = L\{1(t)\} = 1/p$ – перетворення Лапласа вхідної дії – одиничної функції.

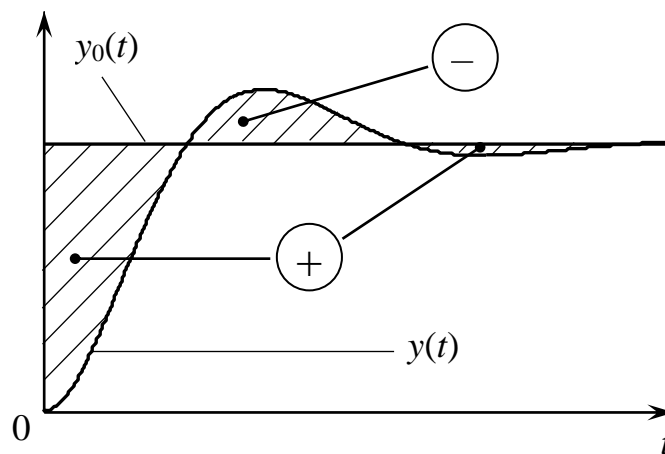


Рис. 2.3. Графічна інтерпретація лінійної інтегральної оцінки для коливального процесу $z(t)$

Отже,

$$Z(p) = \varepsilon(p) = \frac{p}{K+p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{K+p}.$$

Тоді відповідно до виразу (2.7) маємо

$$I_1 = 1/K.$$

Отриманий результат цілком узгоджується з фізичними процесами в системі. Дійсно, функція $z(t)$ визначається виразом

$$z(t) = L^{-1}\{Z(p)\} = e^{-Kt} \cdot 1(t).$$

Тому при збільшенні коефіцієнта підсилення K зростає швидкість системи, і значення I_1 зменшується.

Приклад 2. Для розглянутої у прикладі 1 системи як еталон задано функцію

$$y_0(t) = (1 - e^{-t/T_0}) \cdot 1(t).$$

Визначити значення коефіцієнта підсилення K , при якому $I_1 = 0$.

Розв'язання

Запишемо, за Лапласом, для вихідної $y(t)$ та еталонної $y_0(t)$ функцій:

$$Y(p) = L\{y(t)\} = W(p)/p = \frac{K}{p(p+K)};$$

$$Y_0(p) = L\{y_0(t)\} = \frac{1/T_0}{p(p+1/T_0)};$$

$$Z(p) = \frac{1/T_0}{p(p+1/T_0)} - \frac{K}{p(p+K)} = \frac{1/T_0 - K}{(p+1/T_0)(p+K)}.$$

Отже,

$$I_1 = \frac{1/T_0 - K}{K/T_0}.$$

Умова $I_1 = 0$ виконується, якщо $K = 1/T_0$. За цієї умови вихідна величина збігається з еталонною.

Зазначимо, що в наведеному прикладі для $K > 1/T_0$ лінійна інтегральна оцінка набуває від'ємного значення. Тому тут не має сенсу шукати мінімум лінійної інтегральної оцінки.

2.3. Квадратична інтегральна оцінка

Внаслідок того, що функція $z^2(t) \geq 0$, квадратична інтегральна оцінка (2.3) вільна від недоліків оцінки I_1 (рис. 2.4).

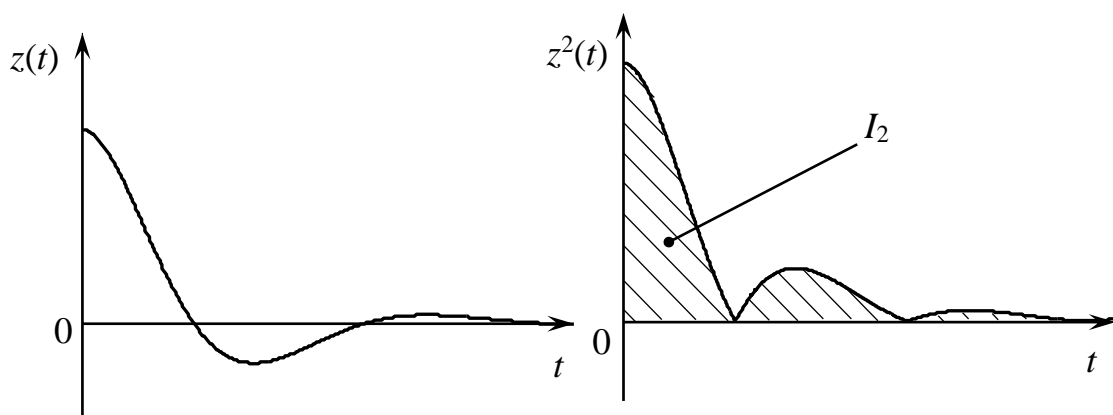


Рис. 2.4. Графічна інтерпретація квадратичної інтегральної оцінки для коливального процесу $z(t)$

Функція $z(t)$ є відхиленням між еталоном і дійсним законом зміни вихідної величини. Тоді функція $z^2(t)$ може розглядатись як «потужність» відхилень, а квадратична інтегральна оцінка – як енергія, що витрачається за рахунок наявності відхилень.

На підставі теореми Парсеваля доведено [2], що інтеграл (2.3) можна переписати у вигляді

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z(p)Z(-p)dp. \quad (2.8)$$

У типових системах $Z(p)$ є дробово-раціональною функцією комплексної змінної p вигляду

$$Z(p) = \frac{C(p)}{D(p)} = \frac{c_0 + c_1p + \dots + c_{n-1}p^{n-1}}{d_0 + d_1p + \dots + d_n p^n}. \quad (2.9)$$

Інтеграли вигляду виразу (2.8) табульовані у вигляді функцій від коефіцієнтів многочленів $C(p)$ і $D(p)$ порядків від $n=1$ до $n=10$.

Для $n = 1, 2$ і 3 значення інтеграла I_2 розраховуються за такими формулами:

$$\begin{aligned} n=1: \quad I_2 &= \frac{c_0^2}{2d_0d_1}; \\ n=2: \quad I_2 &= \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2}; \\ n=3: \quad I_2 &= \frac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_2 - d_0d_3)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для розрахунку квадратичної інтегральної оцінки в пакеті MATLAB застосовується функція розрахунку норми [10–13]

$$u = \text{norm}(\text{sys}, 2, \text{tol}),$$

де sys – ім'я передаточної функції $Z(p)$;

2 – ідентифікатор норми (за замовченням норма 2);

tol – відносна точність обчислень.

Внаслідок того, що норма $u = \sqrt{I_2}$, то $I_2 = u^2$.

Приклад 3. Передаточна функція розімкненої системи

$$R(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)}.$$

Як відомо [1–3], відповідна передаточна функція замкненої системи зводиться до вигляду

$$W(p) = \frac{1}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1},$$

де $\xi = 1/(2\sqrt{K \cdot T})$, $T_0 = \sqrt{T/K}$ – параметри еквівалентної ланки другого порядку.

Визначити величину параметра ξ (відносного коефіцієнта загасання), при якому «енергія» коливань перехідної характеристики відносно сталого значення мінімальна.

Розв'язання

На підставі теореми про граничні значення функції та її зображення, за Лапласом, сталі значення перехідної характеристики

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} W(p) = 1.$$

Тому функція, що описує коливання перехідної характеристики відносно сталого значення, визначається як

$$z(t) = 1 - h(t).$$

Її перетворення Лапласа

$$Z(p) = L\{z(t)\} = \frac{1}{p} - W(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{T_0^2 p + 2\xi T_0}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}.$$

Коефіцієнти для розрахунку табличного інтеграла

$$c_0 = 2\xi T_0, c_1 = T_0^2, d_0 = 1, d_1 = 2\xi T_0, d_2 = T_0^2.$$

Отже,

$$I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2} = T_0 \frac{1 + 4\xi^2}{4\xi}.$$

Відповідна програма розрахунку залежності нормованої квадратичної інтегральної оцінки I_2/T_0 від величини відносного коефіцієнта загасання ξ у пакеті MATLAB:


```

clear;
for i=1:80
q(i)=0.2+0.01*i;E=tf([1,2*q(i)],[1,2*q(i),1]);
u=norm(E);I2(i)=u^2
end
plot(q,I2);grid

```

Графік залежності нормованої квадратичної інтегральної оцінки I_2/T_0 від величини відносного коефіцієнта загасання ξ наведено на рис. 2.5. Мінімум має місце при $\xi^* = 0,5$, що відповідає графіку перехідної характеристики з перерегулюванням $\sigma = 16\%$.

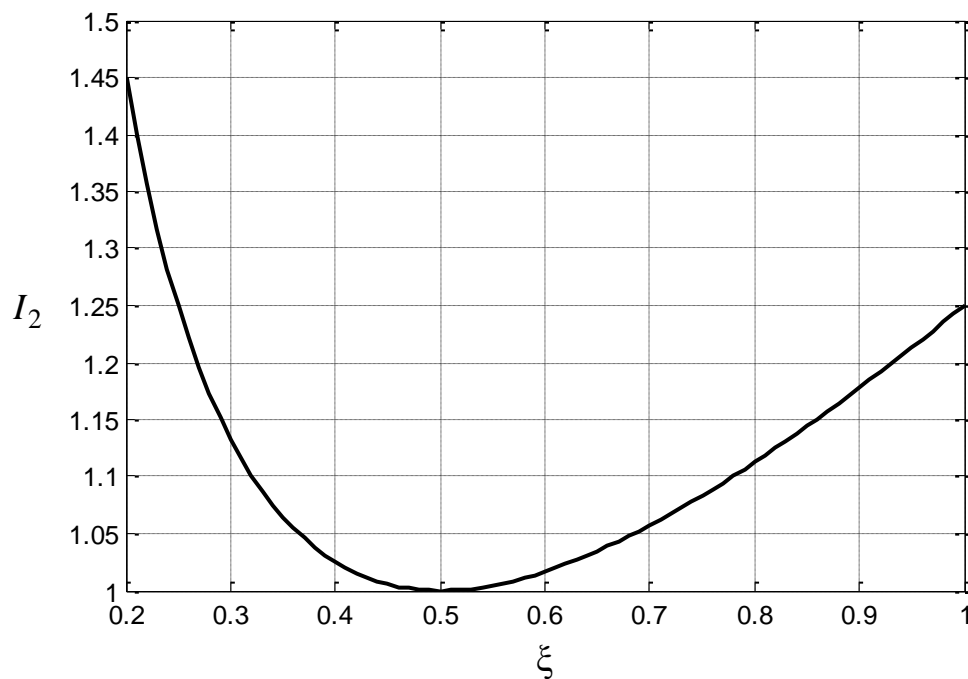


Рис. 2.5. Залежність квадратичної інтегральної оцінки від відносного коефіцієнта загасання ξ

2.4. Поліпшена квадратична інтегральна оцінка

Поліпшена квадратична інтегральна оцінка I_3 (2.4) залежить не тільки від функції непогодження $z(t)$, а й від її першої похідної $z'(t)$. Введення обмежень на швидкість зміни функції непогодження дає змогу при розв'язанні задачі оптимізації отримати плавний, без великих значень похідних, перехідний процес. Вимоги до обмежень на швидкість зміни функції непогодження визначаються вибором у виразі (2.4) величини вагового коефіцієнта – сталої часу τ .

Обчислення поліпшеної квадратичної інтегральної оцінки I_3 проводиться за формулою, що отримується, коли до рівняння (2.4) застосувати теорему Парсеваля

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z(p)Z(-p)dp + \frac{\tau^2}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z_1(p)Z_1(-p)dp, \quad (2.11)$$

де

$$Z_1(p) = L\{z'(t)\} = p \cdot Z(p) - z(0) \quad (2.12)$$

– перетворення Лапласа похідної функції $z(t)$.

Приклад 4. Для системи, розглянутої в попередньому прикладі (п. 2.3), знайти оптимальне значення відносного коефіцієнта загасання (демпфірування) ξ за умови мінімуму поліпшеної квадратичної інтегральної оцінки.

Розв'язання

Початкове значення функції $z(t)|_{t=0} = z(0) = 1$. Запозичуючи вираз для $Z(p)$, знайдений у прикладі п. 2.3, отримаємо

$$Z_1(p) = p \frac{T_0^2 p + 2\xi T_0}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1} - 1 = \frac{-1}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}.$$

Після обчислень другого інтеграла у виразі (2.11) і підсумовування з I_2 , знайдемо

$$I_3 = \frac{(1 + 4\xi^2)T_0^2 + \tau^2}{4\xi T_0}. \quad (2.13)$$

Для пошуку оптимального значення відносного коефіцієнта демпфірування за умови мінімуму поліпшеної квадратичної інтегральної оцінки отримаємо першу похідну (2.13) за змінною ξ

$$\frac{dI_3}{d\xi} = -\frac{(1 - 4\xi^2)T_0^2 + \tau^2}{4\xi^2 T_0}.$$

У точці мінімуму $\frac{dI_3}{d\xi} = 0$. Отже, оптимальне значення відносного коефіцієнта демпфірування

$$\xi^* = \frac{\sqrt{\tau^2 / T_0^2 + 1}}{2}.$$

Якщо $\tau = 0$, маємо $\xi^* = 0,5$, перегулювання $\sigma = 16\%$, що було отримано для оцінки I_2 . Для $\tau = T_0$ оптимальне значення $\xi^* = 1/\sqrt{2} = 0,707$, чому відповідає перехідний процес з суттєво меншим перегулюванням $\sigma \cong 4\%$.

2.5. Оптимізація параметрів САК з фіксованою структурою за критерієм мінімуму інтегральної оцінки

Розв'язання задачі оптимізації зводиться до пошуку таких значень параметрів САК з фіксованою структурою, за якими досягається мінімум обраної інтегральної оцінки.

Задача оптимізації параметрів САК з фіксованою структурою за критерієм мінімуму інтегральної оцінки формулюється так.

Дано:

- 1) схему математичної моделі САК;
- 2) варійовані параметри САК $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$;
- 3) математичні моделі вхідних діянь;
- 4) еталонну функцію $y_0(t)$.

Визначити: оптимальні значення варійованих параметрів САК за критерієм мінімуму відповідної інтегральної оцінки.

Задача, що розглядається, належить до відомих задач вищої математики – задач відшукування екстремуму функції багатьох змінних. Тому, виходячи з методики її розв'язання, для знаходження оптимальних значень варійованих параметрів необхідно:

1) знайти залежності обраної інтегральної оцінки від варійованих параметрів $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$;

2) записати систему з k рівнянь, що створюються з частинних похідних функції $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ за варійованими параметрами, які прирівняні до нуля:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial \alpha_1} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha_2} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha_k} = 0. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

3) розв'язати систему рівнянь (2.14) відносно шуканих параметрів;

4) серед знайдених рішень визначити ті $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_k^*$, що відповідають умовам стійкості та забезпечують глобальний мінімум інтегральної оцінки.

У реальних системах більшість параметрів визначається з технічних та інших умов, і тому оптимізація виконується для двох-трьох параметрів (коефіцієнт підсилення розімкненої системи, коефіцієнт підсилення та постійні часу коректуючого пристрою). У складних випадках, наприклад коли система рівнянь (2.14) не може бути розв'язана аналітично, використовуються чисельні методи оптимізації з застосуванням пакетів прикладних програм. Серед них необхідно зазначити системи MATLAB, MATHCAD та ін. [10–13].

Крім оптимізації параметрів, інтегральні оцінки дозволяють також провести порівняння декількох варіантів структури системи – кращою вважається та, що доставляє мінімальне значення інтегральної оцінки.

Отже, користуючись інтегральними оцінками, можна обрати кращу структуру системи з декількох можливих варіантів. Однак проблема синтезу оптимальної структури – апріорі невідомої структури, що доставляє мінімально можливе значення інтегральної оцінки, не може бути розв'язана. Задачі такого класу належать до варіаційних задач оптимального керування.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі оптимізації САК з фіксованою структурою.
2. Які існують методи оцінювання якості САК у перехідному режимі?
3. У чому полягає різниця між інтегральними методами оцінювання якості САК у перехідному режимі та непрямим частотним і прямим методами?
4. Які існують основні види інтегральних оцінок?
5. У чому полягає основна перевага лінійної інтегральної оцінки?
6. Який основний недолік лінійної інтегральної оцінки?
7. У чому полягає основна перевага квадратичної інтегральної оцінки?
6. Який основний недолік квадратичної інтегральної оцінки?
8. У чому полягає основна перевага поліпшеної квадратичної інтегральної оцінки?
9. Які існують методи розрахунку основних видів інтегральних оцінок?

3. МАТЕМАТИЧНА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМ СТАЦІОНАРНИМ ОБ'ЄКТОМ

3.1. Загальна характеристика задач оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих завдань, при вирішенні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань вимагають мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають метою досягнення найбільшої точності функціонування. У третіх ставиться завдання мінімальних витрат енергії для досягнення поставленої мети. Нерідкі випадки, коли необхідно задовольнити цілу низку суперечливих вимог. Усі такі завдання належать до класу задач оптимального керування.

Загальним для таких систем є вимога створення такої сукупності керуючих дій, при яких досягається екстремальне значення деякого показника якості. *САК, що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називається оптимальною в тому самому сенсі* (наприклад за швидкодією, точністю тощо).

Правило, за допомогою якого обирається екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається *критерієм оптимальності* цієї системи.

На відміну від задач корекції та оптимізації параметрів у задачах *синтезу оптимального керування алгоритм функціонування автоматичного керуючого пристрою вважається априорі невідомим*. Його необхідно визначити, тобто провести синтез на підставі заданої сукупності вихідних даних.

До змісту задачі синтезу оптимального керування входять такі вихідні дані:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) інформація про зовнішні діяння;
- 3) інформація про мету керування;
- 4) інформація про показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) інформація про обмеження, що накладаються на величини дій і об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування при накладених обмеженнях і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Задачі цього класу належать до варіаційних задач оптимального керування.

Варіаційне числення, як математичний апарат для знаходження екстремалей функціоналів, має майже двохсотлітню історію. Першими з прикладних задач, розв'язаних за допомогою методів варіаційного числення, були задачі теоретичної механіки і геометричної оптики. Саме з розв'язанням цих задач пов'язано розвиток таких, званих тепер класичними, методів варіаційного числення, як методи Ейлера-Лагранжа, Гамільтона-Якобі, Больца і Майєра.

Перші серйозні спроби застосувати варіаційне числення до розв'язання задач оптимального керування відносять до кінця 40 – початку 50 рр. ХХ ст., коли почався інтенсивний розвиток ракетної та космічної техніки і з'явилися можливості практичної реалізації складних систем завдяки досягненням у мікроелектроніці, комп'ютеризації та програмуванні. Особливістю більшості з цих задач була наявність обмежень, що накладаються на дії і координати стану, які виражаються нерівностями. Класичні методи варіаційного числення виявилися малопридатними для розв'язання задач з такими обмеженнями,

незважаючи на те, що для виниклих ускладнень у межах класичного варіаційного числення був запропонований ряд прийомів. Виникла потреба в розширенні рамок класичного варіаційного числення і створенні нових методів, що мають більшу спільність. З невеликими інтервалами часу в 50-х рр. ХХ ст. отримали розвиток три нових напрями: принцип максимуму, динамічне програмування та використання методів функціонального аналізу. У 1961 р. вийшла монографія «Математична теорія оптимальних процесів», у якій її автори Л. С. Понтрягін і його співробітники Б. Г. Болтянський, Р. В. Гамкрелідзе, Е. Ф. Міщенко виклали результати, відомі тепер під назвою принципу максимуму Понтрягіна (ПМП). Значний внесок у теорію оптимального керування мали роботи Р. Калмана, Р. Беллмана та багатьох інших учених.

Застосування методів теорії варіаційного числення потребує певної математичної формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

3.2. Математична модель об'єкта керування

У варіаційних задачах математична модель об'єкта керування задається за допомогою системи диференціальних рівнянь стану. Це пояснюється необхідністю здійснювати керування не тільки вихідною величиною, а й багатьма іншими змінними, що визначають стан об'єкта.

Нагадаємо, що *станом об'єкта називається сукупність внутрішніх змінних $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$, яка цілком характеризує процеси, що відбувалися в ньому до моменту часу t* . Тому знання цих величин у початковий момент часу t_0 є достатнім для знаходження реакції (руху) системи в майбутньому $t > t_0$ при відомих вхідних діях $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_r(\tau)$ на інтервалі часу $\tau \in [t_0, t]$ без додаткового звертання до минулого ($t \leq t_0$).

Змінні стану можуть вводитися не єдиним можливим способом. Однак завжди можна вказати мінімально необхідну кількість k змінних, що повністю визначають стан об'єкта. Цю мінімально необхідну кількість змінних називають *порядком об'єкта*.

Сукупність змінних стану можна розглядати як компоненти *вектора стану* $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)]^T$. Його можна відобразити точкою в k -мірному *просторі станів*, що під впливом зовнішніх дій рухається по деякій траєкторії – *траєкторії стану*.

Динаміка руху вектора стану визначається системою з k диференціальних рівнянь першого порядку, компонентами якої є змінні (координати) стану та їхні перші похідні, а також вхідні дії. Найчастіше таку систему диференціальних рівнянь стану подають у *нормальній формі Коші*, де в лівій частині фігурують перші похідні координат стану $z'_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$, а у правій – координати стану та функції $x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)$, якими відображуються вхідні дії:

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t], \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.1)$$

де $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)]^T$ – r -мірний вектор-стовпець вхідних дій (задавальної, керуючої, заважальної).

Зведемо сукупність правих частин системи рівнянь (3.1) у вектор-стовпець

$$\mathbf{F}[\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t] = \begin{bmatrix} F_1[\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t] \\ F_2[\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t] \\ \dots \\ F_k[\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t] \end{bmatrix}.$$

Тоді система рівнянь (3.1) може бути записана в компактній векторній формі

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{F}[\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t].$$

Якщо об'єкт є лінійним і стаціонарним, то між змінними стану та входів має місце лінійний зв'язок

$$F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t] = a_{i1} \cdot z_1(t) + a_{i2} \cdot z_2(t) + \dots + a_{ik} \cdot z_k(t) + \\ + b_{i1} \cdot x_1(t) + b_{i2} \cdot x_2(t) + \dots + b_{ir} \cdot x_r(t),$$

а коефіцієнти $a_{ij}, i, j = 1 \dots k, b_{il}, i = 1 \dots k, l = 1 \dots r$ є постійними, що від часу не залежать.

Система диференціальних рівнянь стану лінійного та стаціонарного об'єкта записується у векторно-матричній формі Коші

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t), \quad (3.2)$$

де \mathbf{A} – *матриця стану* розміром $k \times k$, що складається з постійних коефіцієнтів $a_{ij}, i, j = 1 \dots k$;

\mathbf{B} – *матриця входів* розміром $k \times r$, що складається з постійних коефіцієнтів $b_{il}, i = 1 \dots k, l = 1 \dots r$.

Внаслідок того, що вектор $\mathbf{z}(t)$ повністю визначає внутрішній стан об'єкта, вихідні величини $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$ залежать лише від координат стану. У випадку лінійного стаціонарного зв'язку між координатами стану та вихідними величинами відповідні рівняння – рівняння виходу – записують у векторно-матричній формі

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cz}(t), \quad (3.3)$$

де \mathbf{C} – *матриця виходів* розміром $n \times k$, що складається з постійних коефіцієнтів $c_{il}, i = 1 \dots n, l = 1 \dots k$.

Схему математичної моделі об'єкта, побудовану на підставі рівнянь стану (3.2) і виходу (3.3), наведено на рис. 3.1, де символом $1/\mathbf{D}$ відображено оператор векторного інтегрування.

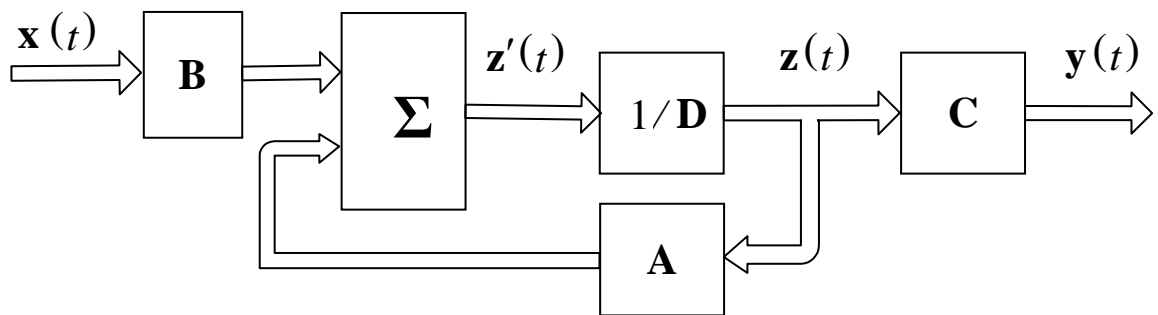


Рис. 3.1. Схема математичної моделі об'єкта керування у просторі станів

Приклад 1. Динаміка об'єкта керування описується диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (рис. 3.2)

$$y''(t) = K_a \cdot u(t),$$

де $y(t)$ – вихідна величина;

$u(t)$ – керуюча дія;

K_a – коефіцієнт підсилення.

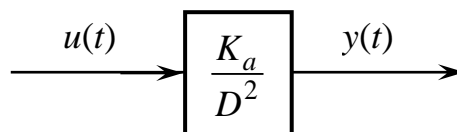


Рис. 3.2. Схема математичної моделі об'єкта керування

Скласти систему рівнянь стану та рівняння виходу.

Розв'язання

Прийmemo за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t).$$

Тоді система диференціальних рівнянь стану та рівняння виходу мають вигляд

$$z_1'(t) = z_2(t);$$

$$z_2'(t) = K_a \cdot u(t);$$

$$y(t) = z_2(t).$$

Звідси нескладно встановити, що матриці стану **A**, входу (керування) **B** та виходу **C** дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \ 1].$$

Приклад 2. Фізичні процеси у двигуні постійного струму з незалежним збудженням визначаються такими рівняннями:

1) диференціальне рівняння кола живлення якоря

$$RI + L \frac{dI}{dt} = E_0 - E, \tag{3.4}$$

де R , L – повні активний опір та індуктивність кола живлення якоря;

E_0 – ЕРС джерела живлення;

E – проти-ЕРС;

2) рівняння обертального моменту

$$M = c_M I, \quad (3.5)$$

де c_M – постійна двигуна за моментом, Н·м/А;

3) диференціальне рівняння механічного руху

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}(M - M_c), \quad (3.6)$$

де Ω – кутова швидкість обертання, рад/с;

M_c – момент сил опору, Н·м;

J – момент інерції мас, що обертаються, кг·м²;

4) рівняння для електрорушійної сили, спрямованої в напрямку, протилежному струму (проти-ЕРС)

$$E = c_E \Omega, \quad (3.7)$$

де c_E – постійна двигуна по проти-ЕРС, В·с/рад.

Зовнішніми діями є ЕРС E_0 джерела живлення якірного кола і момент сил опору M_c . Вихідні величини – швидкість обертання якоря Ω та обертальний момент M .

Скласти рівняння стану та виходу.

Розв'язання

За кількістю диференціальних рівнянь першого порядку можна зробити висновок, що двигун є об'єктом другого порядку, отже його стан визначається двома змінними: $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t)]^T$.

Оберемо за змінні стану струм якоря $z_1(t) = I(t)$ і кутову швидкість обертання $z_2(t) = \Omega(t)$. Відносно цих змінних рівняння (3.4) – (3.7) перетворюються до вигляду

$$L \cdot z_1'(t) + R \cdot z_1(t) = E_0(t) - c_E \cdot z_2(t);$$

$$z_2'(t) = \frac{c_M}{J} z_1(t) - \frac{1}{J} M_c(t).$$

Перетворимо їх у нормальну форму Коші:

$$z_1'(t) = -\frac{R}{L} z_1(t) - \frac{c_E}{L} z_2(t) + \frac{1}{L} E_0(t); \tag{3.8}$$

$$z_2'(t) = \frac{c_M}{J} z_1(t) - \frac{1}{J} M_c(t).$$

Відповідні рівняння виходу мають вигляд

$$y_1(t) = c_M \cdot z_1(t);$$

$$y_2(t) = z_2(t). \tag{3.9}$$

Якщо привести рівняння стану (3.8) і виходу (3.9) до векторно-матричної форми, то матриці стану, входу та виходу набувають вигляду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_E}{L} \\ \frac{c_M}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3. Математичні моделі зовнішніх дій

Одним з головних питань, що підлягають опрацюванню при синтезі оптимальних систем з невідомою структурою керуючого блока, є питання вибору математичних моделей зовнішніх впливів (дій). Пояснюється це тим, що від цього вибору багато в чому залежать структура і параметри системи і, отже, ефективність її функціонування в реальних умовах.

Виходячи з цих міркувань в основу побудови моделей зовнішніх впливів слід покласти не деякі гіпотетичні посилки, а ті співвідношення, що випливають з фактичних законів формування задавальних і заважальних величин.

У тих випадках, коли зовнішні впливи є результатом дії певних причинно-наслідкових зв'язків, закони їх формування можна подати так само, як і при математичному описі об'єкта керування, за допомогою диференціальних рівнянь стану і виходу деяких динамічних систем. Для лінійних стаціонарних динамічних систем за аналогією з виразом (3.2) вони будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'_x(t) &= \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x(t) + \mathbf{B}_x \mathbf{u}_x(t); \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{C}_x \mathbf{z}_x(t), \end{aligned} \tag{3.10}$$

де $\mathbf{z}_x(t)$ – вектор-стовпець стану динамічної системи, що визначає модель вхідного впливу (задавального або заважального, $\mathbf{x} = g, f$);

$\mathbf{u}_x(t) = [u_{x1}(t), u_{x2}(t), \dots, u_{xr}(t)]^T$ – вектор-стовпець величин – *джерел*, з яких формуються зовнішні впливи.

Важливою вимогою, що висувається до вектора джерела $\mathbf{u}_x(t)$, є вимога його *первинності*. Пояснимо цю вимогу.

За визначенням поняття стану динамічної системи як сукупності величин, що повністю характеризують передісторію і дозволяють прогнозувати її подальшу динаміку, *вектор-стовпець первинних джерел не повинен мати передісторії*, тобто не подаватися рівняннями причинно-наслідкових зв'язків.

За їх наявністю вектор-стовпець $\mathbf{u}_x(t)$ також може бути описаний рівняннями причинно-наслідкових зв'язків типу виразу (3.10). Тоді обидві моделі необхідно об'єднати в розширену модель з відповідним збільшенням розмірності вектора стану: $\mathbf{z}_{xp} = [\mathbf{z}_x, \mathbf{u}_x]^T$. Очевидно, що так буде тривати до тих пір, поки як величину $\mathbf{u}_x(t)$ не буде обрано таку, що не має передісторії.

Виконання вимоги первинності для дій, що подають у вигляді детермінованих функцій, можливе двома шляхами.

Найпростіший варіант полягає у виборі такої структури вектора $\mathbf{z}_x(t)$, коли $\mathbf{u}_x(t) \equiv \mathbf{0}$, а закон зміни вхідної дії визначається лише початковими умовами $\mathbf{z}_x(t_0)$. У цьому випадку доданок $\mathbf{B}_x \mathbf{u}_x(t)$ у виразі (3.10) відсутній.

В іншому варіанті вектор первинних джерел детермінованих процесів задають через сукупність дельта-функцій

$$\mathbf{u}_x(t) = [\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_r(t)]^T,$$

$$\text{де } \delta_i(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

Відповідно до властивості нормування енергії дельта-функції

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_i(t) dt = 1,$$

тому початкові умови для вектора $\mathbf{z}_x(t_0)$ визначаються через коефіцієнти матриці \mathbf{B}_x .

Нескладно переконатись, що обидва варіанти рівнозначні.

Для дій, поданих у вигляді випадкових функцій (процесів), як вектор первинних джерел $\mathbf{u}_x(t)$ може фігурувати лише сукупність функцій

$$\mathbf{u}_x(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)]^T,$$

у яких відсутня кореляція (статистичний зв'язок) між значеннями в будь-які моменти часу. Такі властивості мають випадкові процеси, що отримали назву «білий шум». Детальний розгляд цих питань базується на теорії марківських випадкових процесів [2, 9].

Приклад 3. Отримати математичну модель подовжнього руху об'єкта (поїзд, автомобіль тощо) масою m під впливом постійної результуючої сили F_0 . Початкова швидкість об'єкта v_0 , початкове положення l_0 .

Розв'язання

В основі закону, що визначає подовжній рух об'єкта, лежить другий закон Ньютона

$$w(t) = \frac{1}{m} F_0, \quad (3.11)$$

де $w(t)$ – прискорення об'єкта.

Відповідно швидкість $v(t)$ і положення $l(t)$ визначаються рівняннями кінематики

$$\begin{aligned} v'(t) &= w(t); \\ l'(t) &= v(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Якщо стан об'єкта задати двома компонентами $\mathbf{z}_g = [v, l]^T$, то з урахуванням виразів (3.12) отримуємо модель

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ l(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m \\ 0 \end{bmatrix} F_0. \quad (3.13)$$

Тут «джерело» руху – результуюча сила F_0 .

Подання через «первинне джерело» може бути отримано, якщо ввести до складу вектора стану третій компонент – прискорення $\mathbf{z}_g = [w_0, v, l]^T$. При постійній силі F_0 диференціальне рівняння для прискорення на інтервалі спостереження

$$w'(t) = 0. \quad (3.14)$$

Початкова умова для цього рівняння $w(0) = F_0/m$. У цьому випадку модель для розширеного вектора стану $\mathbf{z}_{pg}(t) = [w, v, l]^T$ матиме вигляд

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \\ l(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \\ l(t) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

у якій вектор початкового стану $\mathbf{z}_{pg}(0) = [F_0/m, v_0, l_0]^T$, а другий доданок у правій частині відсутній.

Крім того, можливий запис прискорення в такому вигляді:

$$w_0'(t) = \frac{F_0}{m} \delta(t), \quad (3.16)$$

де $\delta(t)$ – дельта-функція (функція Дірака).

Дельта-функція має одиничну енергію, тому інтеграл від неї дорівнює

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)(\tau) d\tau = 1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Функція $1(t)$ називається одиничною функцією (функція Хевісайда). Отже, інтегрування виразу (3.16) за нульовими початковими умовами дає такий результат:

$$w(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{m} F_0, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Із застосуванням виразу (3.16) модель подовжнього руху об'єкту матиме вигляд

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \\ l(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \\ l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0/m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t). \quad (3.17)$$

3.4. Математичний опис мети керування

При математичній формалізації задач оптимального керування мета має бути сформульована в термінах простору станів заданого об'єкта. Мета керування завжди розглядається як переведення об'єкта керування з деякої заданої множини S_0 початкових станів у задану множину S_k кінцевих станів.

У найпростішому випадку кожна з множин S_0 і S_k складається з єдиної точки, положення якої в просторі станів визначається фіксованим вектором $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0)$ і $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}(t_k)$ відповідно, де t_0, t_k – моменти початку і закінчення керування. Зазначимо, що, незалежно від взаємного розташування цих точок, точку \mathbf{z}_0 називають лівим кінцем, а точку \mathbf{z}_k – правим кінцем траєкторії руху.

Варіаційна задача оптимального керування, у якій мета керування описується завданням фіксованих початкового і кінцевого станів, називається *задачею з закріпленими кінцями*.

Більш загальним є випадок, при якому граничні точки траєкторії стану не фіксуються, а можуть вибиратися з деяких заданих областей початкових станів S_0 і кінцевих станів S_k . У цьому випадку задача оптимального керування називається *задачею з незакріпленими кінцями*.

Серед задач з незакріпленими кінцями є такі, у яких на один з кінців не накладається жодних умов до точки досягнення мети керування. Така задача називається *задачею з вільним кінцем*.

Можливі також задачі, у яких один з кінців закріплений, а інший незакріплений, або вільний.

При формулюванні мети керування моменти часу можуть бути призначені заздалегідь, але можуть заздалегідь і не задаватися. У першому випадку задача оптимального керування називається **задачею з фіксованим часом керування**. Якщо ж хоча б один з моментів часу заздалегідь не заданий, то має місце **задача з нефіксованим часом керування**. У цьому випадку час керування може включатися як один з параметрів у критерій оптимальності.

При нефіксованому часі керування може мати місце ще один тип задач з незакріпленим правим кінцем. Уявімо, що в просторі станів рухається точка, положення якої визначається змінним вектором $\mathbf{z}_g(t)$. Мета керування може полягати в тому, щоб перевести об'єкт з деякого початкового стану в такий кінцевий стан, при якому виконується умова $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_g(t_k)$. Така задача називається **задачею з рухомим правим кінцем або задачею переслідування**.

Зазначимо, що в задачах з закріпленими кінцями мета керування строго визначена. У той же час у задачах, що мають хоча б один незакріплений кінець, мета керування формулюється не цілком визначено. Тому в таких задачах мета керування доповнюється метою оптимізації, тобто задаванням критерію оптимальності як цільової функції керування.

3.5. Математичний опис вимог до якості керування

У варіаційних задачах оптимального керування вимога до якості керування математично виражається як вимога забезпечення екстремуму деякого показника якості J , що є змінною величиною (функціоналом), чисельне значення якої залежить від вибору вектора керуючих дій $\mathbf{u}(t)$.

Функціонал якості може бути простою функцією вектора керуючих дій

$$J = J[\mathbf{u}(t)],$$

але частіше він складним чином залежить від вектора керуючих дій через усі змінні характеристики керованого процесу, що у свою чергу також залежать від вектора керуючих дій:

$$J = J[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t_k), t_k].$$

Залежність функціонала якості від кінцевого стану $\mathbf{z}(t_k)$ може мати місце тільки в задачах з незакріпленим правим кінцем, а залежність від кінцевого часу t_k – при нефіксованому моменті закінчення керування, тому що тільки в цих випадках величини $\mathbf{z}(t_k)$ і t_k є змінними характеристиками керованого процесу, значення яких залежать від вектора керуючих дій $\mathbf{u}(t)$.

У різних задачах залежно від їхнього конкретного змісту функціонал якості вибирається по-різному. У загальній теорії оптимального керування все різноманіття функціоналів якості, що зустрічаються в конкретних задачах, зводиться до функціоналів трьох типів.

Функціонали першого типу, звані *функціоналами Лагранжа*, дають інтегральну характеристику якості перехідного процесу і витрат на керування при переведенні об'єкта керування з початкового стану в кінцевий стан. Такий функціонал має вигляд

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (3.18)$$

де підінтегральна функція $L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t)$ (функція Лагранжа або лагранжіан) у кожній конкретній задачі вибирається залежно від фізичного сенсу цієї задачі і вимог, що висуваються до якості керування.

Розглянемо окремі випадки функціоналів першого типу, які отримали досить широке застосування в задачах, що мають велике прикладне значення.

Якщо покласти у виразі (3.19) $L=1$, тоді

$$J = \int_{t_0}^{t_k} dt = t_k - t_0. \quad (3.19)$$

Такий функціонал характеризує час, що витрачається на керування, і може служити критерієм оптимальності при синтезі систем автоматичного керування, оптимальних за швидкодією. Оптимальною за швидкодією вважається така система, для якої функціонал (3.19) набуває мінімального значення.

Розглянемо тепер інший приклад функціонала Лагранжа. Припустимо, що для створення керуючих дій $\mathbf{u}(t)$ витрачається «паливо» з деякого джерела. Нехай $L(t)$ – швидкість витрачання «палива», тоді

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L(t) dt$$

– витрати «палива» за час керування. Для більшості фізичних систем

$$L(t) = \sum_{i=1}^r l_i(u_i(t)) = L(\mathbf{u}(t)),$$

де $l_i(u_i(t))$ – монотонно зростаюча функція, що характеризує швидкість витрати «палива» при керуванні об'єктом з боку i -го входу.

Отже, величина функціонала

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L(\mathbf{u}(t)) dt \quad (3.20)$$

характеризує витрати «палива» на керування об'єктом в залежності від обраного закону керування і може служити показником якості при синтезі систем, оптимальних по витраті «палива». Оптимальним за витратами «палива» слід вважати такий закон керування, при якому функціонал (3.20) набуває мінімального значення.

Перейдемо тепер до розгляду функціоналів другого типу, званих *функціоналами Майєра*. Функціонали цього типу в задачах з незакріпленим кінцем характеризують якість результату керування

$$J = \Phi(\mathbf{z}(t_k), t_k), \quad (3.21)$$

причому безпосередня залежність від t_k може мати місце тільки при нефіксованому моменті закінчення керування, коли t_k може варіюватися.

Функціонали другого типу зустрічаються в багатьох задачах, що мають велике практичне значення. Наприклад, у задачах про досягнення рухомою одиницею максимальної швидкості або максимальної дальності її пересування при заданому запасі палива. Мають місце також задачі, у яких об'єкт керування має бути переведений до заданого моменту часу t_k у стан $\mathbf{z}(t_k)$, який мінімально відрізняється в деякому сенсі (сенса визначається видом функції Φ) від необхідного стану \mathbf{z}_{gk} .

У задачах з незакріпленим правим кінцем якість керування може оцінюватися не тільки якістю досягнутого результату, але і якістю керування на всьому інтервалі керування від t_0 до t_k . У таких задачах критерій оптимальності виражається функціоналами третього типу, що називаються *функціоналами Больца*

$$J = \Phi(\mathbf{z}(t_k), t_k) + \int_{t_0}^{t_k} L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) dt. \quad (3.22)$$

Функціонал третього типу є сумою функціоналів першого і другого типу і тому нема необхідності пояснювати його прикладами.

У теоретичному відношенні функціонали всіх трьох типів еквівалентні в тому сенсі, що вони можуть бути перетворені один на інший заміною змінних. Однак у методичному відношенні зручно розглядати їх незалежно.

3.6. Математичний опис обмежень, що накладаються на рух об'єкта керування і на дії

На координати стану об'єкта і керуючі дії можуть накладатися різного роду обмеження. У загальній постановці вони задаються у вигляді умов приналежності векторів \mathbf{z} і \mathbf{u} до деяких множин \mathbf{Z}_t і \mathbf{U}_t в будь-який момент часу на інтервалі $[t_0, t_k]$

$$\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u} \in \mathbf{U}_t.$$

Варіаційну задачу називають задачею класичного типу, якщо вона містить обмеження, що виражаються рівностями вигляду

$$N_i(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = 0;$$

$$\int_{t_0}^{t_k} N_j(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) dt = E_j.$$

Якщо ж обмеження виражаються нерівностями, наприклад

$$N_j(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) \leq E_j,$$

то варіаційна задача називається задачею некласичного типу.

Нижче будуть розглянуті задачі першого і другого типу, причому в задачах некласичного типу будуть прийматися обмеження простого вигляду

$$|u_i(t)| \leq u_{i\max}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.23)$$

Задачі з обмеженнями на координати стану, що виражаються нерівностями, розглядатися не будуть.

3.7. Математичне формулювання варіаційної задачі оптимального детермінованого керування

Задача з закріпленими кінцями

Об'єкт керування, рух якого в просторі станів описується системою диференціальних рівнянь

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (3.24)$$

у початковий момент часу знаходиться в стані $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, де t_0 і \mathbf{z}_0 – задані величини.

Необхідно перевести цей об'єкт у стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$, де \mathbf{z}_k – заданий вектор, а t_k – фіксований або нефіксований момент часу закінчення керування.

Потрібно визначити, яким має бути вектор керуючих дій $\mathbf{u}(t)$ на всьому інтервалі $[t_0, t_k]$ керування, щоб при обмеженнях $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_t$ досягалося мінімальне значення показника якості керування (3.19)

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) dt .$$

Задача з незакріпленим правим кінцем

Об'єкт керування, рух якого в просторі станів описується системою диференціальних рівнянь (3.24), у початковий момент часу знаходиться в стані $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, де t_0 і \mathbf{z}_0 – задані величини.

Потрібно визначити, яким має бути вектор керуючих дій $\mathbf{u}(t)$ на всьому інтервалі $[t_0, t_k]$ керування, щоб при обмеженнях $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_t$ досягалося мінімальне значення показника якості керування (3.23)

$$J = \Phi(\mathbf{z}(t_k), t_k) + \int_{t_0}^{t_k} L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) dt ,$$

де t_k – фіксований або нефіксований момент закінчення керування, а $\mathbf{z}(t_k)$ – заздалегідь невідомий вектор стану об'єкта в момент закінчення керування.

Примітки:

1. У задачі з вільним правим кінцем вектор $\mathbf{z}(t_k)$ може набувати будь-якого значення. У задачі з напіввільним правим кінцем вектор $\mathbf{z}(t_k)$ має належати безлічі, що визначається системою рівнянь

$$N_j(\mathbf{z}(t_k), t_k) = 0,$$

причому при фіксованому t_k функції Φ , N_j від t_k явно не залежать, а кількість рівнянь менше розмірності вектора \mathbf{z} .

2. У розглянутих задачах передбачається, що керуючі впливи належать класу кусочно-безперервних функцій на всьому інтервалі і набувають значення з множини U_t . Керуючі дії $\mathbf{u}(t)$ цього класу називають допустимими в розглянутих задачах.

3.8. Керованість об'єкта. Необхідні і достатні умови керованості лінійного стаціонарного об'єкта

Перш ніж приступити до розв'язання варіаційних задач оптимального керування, доцільно з'ясувати питання про принципову можливість реалізувати мету керування шляхом застосування до заданого об'єкта допустимих керуючих дій. Саме з цим питанням пов'язано винесене в заголовок поняття керованості об'єкта.

Визначення 1. Стан \mathbf{z}_0 об'єкта керування, описуваного системою диференціальних рівнянь (3.24), називається керованим відносно стану \mathbf{z}_k , якщо існує вектор допустимих керувань $\mathbf{u} \in U_t$, що переводить за кінцевий проміжок часу певний об'єкт зі стану \mathbf{z}_0 в стан \mathbf{z}_k .

Визначення 2. Об'єкт називається цілком керованим, якщо будь-який його початковий стан \mathbf{z}_0 є керованим щодо будь-якого кінцевого стану \mathbf{z}_k .

Очевидно, що розв'язок варіаційної задачі оптимального керування існує тільки в тому випадку, коли принаймні заданий початковий стан керований щодо всіх кінцевих станів, що належать заданій множині мети керування. Тому необхідно мати критерій керованості, що дозволяє судити

про принципову можливість реалізувати мету керування, що міститься в постановці варіаційної задачі оптимального керування.

Проблема керованості найбільш повно вивчена стосовно лінійних стаціонарних об'єктів, стан яких визначається векторно-матричним диференціальним рівнянням стану

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.25)$$

де \mathbf{A} – *матриця стану* розміром $k \times k$, що складається з постійних коефіцієнтів a_{ij} , $i, j = 1 \dots k$;

\mathbf{B} – *матриця керування* розміром $k \times r$, що складається з постійних коефіцієнтів b_{il} , $i = 1 \dots k$, $l = 1 \dots r$.

Нижче без доведення наводиться критерій керованості таких об'єктів, запропонований Р. Калманом.

Перш ніж сформулювати цей критерій, введемо до розгляду *матрицю керованості*, що утворюється з матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} рівняння (3.25)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Матрицю \mathbf{M} створено в результаті розширення рядків матриці \mathbf{B} шляхом послідовного дописування елементів відповідних рядків добутків матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{B}$. Користуючись правилом множення матриць, неважко встановити, що матриці $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{B}$ мають, як і матриця \mathbf{B} , по k рядків і r стовпців кожна. Тому матриця \mathbf{M} має k рядків і $k \times r$ стовпців.

Критерій керованості Р. Калмана. Лінійний стаціонарний об'єкт порядку k цілком керований тоді і тільки тоді, коли матриця керованості \mathbf{M} має ранг, рівний k .

Розглянемо, яку структуру повинні мати матриці \mathbf{A} і \mathbf{B} , щоб об'єкт був цілком керований. Запишемо матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} і вектор \mathbf{z} в блоковому вигляді

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t),$$

причому розбиття на блоки здійснюється довільно. Тоді, якщо серед всіх можливих варіантів розбиття існує таке, при якому одночасно виконуються умови

$$\mathbf{A}_{21} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$$

або

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{0},$$

тоді система не цілком керована в першому випадку за координатами \mathbf{z}_2 , а в другому – за \mathbf{z}_1 .

Дійсно, у першому випадку

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{11}^2 \cdot \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{A}_{11}^{k-1} \cdot \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

що через наявність нульових рядків призводить до зменшення рангу матриці. Відповідно у другому випадку нульові блоки розміщені у верхньому рядку матриці \mathbf{M} .

Приклад 4. Перевіримо керованість об'єкта, математична модель якого наведена на рис. 3.2.

Як показано в п. 3.2, приклад 1, об'єкт має матриці стану \mathbf{A} та керування (входу) \mathbf{B}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_a \end{bmatrix}.$$

З метою аналізу керованості об'єкта складаємо матриці $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ і $\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]$:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ K_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & K_a \\ K_a & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -K_a^2 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта, тому об'єкт є цілком керований.

Приклад 5. Рівняння стану об'єкта мають вигляд

$$z_1'(t) = z_1(t) + a \cdot z_3(t);$$

$$z_2'(t) = -z_1(t) - z_3(t);$$

$$z_3'(t) = z_2(t) - z_3(t) + u(t).$$

Визначити, при яких значеннях параметра a об'єкт не є цілком керований.

Розв'язання

З рівнянь стану знаходимо матриці стану та входу:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Розраховуємо матрицю керованості \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Її визначник

$$\det \mathbf{M} = a(1-a).$$

Отже, об'єкт не цілком керований при $a = 0$ і $a = 1$. При $a = 0$ маємо $z_1'(t) = z_1(t)$, і координата z_1 не залежить від інших і керуючої дії, й тому вона некерована. При $a = 1$ перша пара рівнянь набуває вигляду

$$z_1'(t) = z_1(t) + z_3(t);$$

$$z_2'(t) = -z_1(t) - z_3(t).$$

У результаті маємо, що $z_1'(t) + z_2'(t) = 0$, тому $z_1(t) + z_2(t) = \text{const}$. Отже, змінні z_1 і z_2 лінійно залежні – при будь-якому керуванні їхня сума залишається постійною.

Наприкінці зауважимо два важливі моменти.

По-перше, при невиконанні вимог повної керованості задача синтезу оптимального керування може мати рішення в тому випадку, якщо мета керування не містить вимог, що накладаються на некеровані координати.

По-друге, оскільки керованість об'єкта пов'язана з потенційними можливостями керування, критерій керованості не залежить від стійкості об'єкта. Тому об'єкт може бути керованим, навіть якщо він нестійкий за відсутності керування.

3.9. Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовуються методи теорії варіаційного числення. Один з методів заснований на принципі максимуму Л. С. Понтрягіна [2, 6–9, 15, 16].

Надалі принцип максимуму буде без доведення сформульований стосовно двох основних задач оптимального керування, розглянутих у п. 3.5.

При формулюванні принципу максимуму користуються методами математичного опису об'єкта керування у просторі станів у вигляді виразу (3.24), а також системою допоміжних змінних (*спряжених змінних*) до вектора стану об'єкта і спеціальним видом функціонала якості – функцією Гамільтона (*гамільтоніан*).

Гамільтоніан H варіаційної задачі – скалярна функція, що визначається виразом

$$\begin{aligned} H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t) = & -L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) + \\ & + \boldsymbol{\psi}^T(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t), \end{aligned} \quad (3.27)$$

де $L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t)$ – підінтегральна функція (функція Лагранжа) з критерію оптимальності виразів (3.19) або (3.23);

$\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_k(t)]^T$ – вектор-стовпець допоміжних функцій (спряжені змінні), що задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\psi'_i(t) = -\frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.28)$$

Зведемо сукупність правих частин системи рівнянь (3.28) у вектор-стовпець з часткових похідних гамільтоніану за компонентами вектора стану:

$$\frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial z_2} \\ \dots \\ \frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial z_k} \end{bmatrix}.$$

Тоді система диференціальних рівнянь (3.28) може бути записана у компактній векторній формі

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = -\frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{z}}.$$

Пара систем рівнянь (3.24) і (3.28) створює так звану *канонічну систему рівнянь* (КСР) варіаційної задачі. Неважко переконатися, що канонічна система рівнянь може бути записана через часткові похідні гамільтоніану за компонентами векторів стану та спряжених змінних у симетричній формі

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \boldsymbol{\psi}}; \\ \boldsymbol{\psi}'(t) &= -\frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Принцип максимуму (теорема Понтрягіна) для задачі з фіксованим моментом початку керування і закріпленням лівим кінцем траєкторії стану.

Для того щоб керування $\mathbf{u}^*(t)$ було оптимальним, **необхідно**:

1) щоб існували ненульовий вектор спряжених (допоміжних) змінних $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ і траєкторія стану $\mathbf{z}^*(t)$, що задовольняють канонічну систему рівнянь (3.29) при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ і граничних умовах, що залежать від мети керування (примітка 1);

2) щоб у будь-який момент часу на інтервалі керування гамільтоніан $H(\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t)$, який розглядається як функція незалежної змінної \mathbf{u} , досягав при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ свого максимального значення

$$H^*(\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t) = \sup_{\mathbf{u} \in U_t} H(\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t); \quad (3.30)$$

3) щоб при нефіксованому кінцевому моменті часу $t = t_k$ для гамільтоніана $H^*(t_k)$ було справедливо співвідношення, що залежить від мети керування (примітка 2).

Примітка 1. Граничні умови для КСР (разом $2k$ умов):

1) у задачі з закріпленими кінцями – задані координати початку та кінця траєкторії стану об'єкта:

$$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0; \mathbf{z}^*(t_K) = \mathbf{z}_K;$$

2) вільним правим кінцем:

– лівий кінець – заданий фіксований вектор початкового стану об'єкта:

$$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0;$$

– правий кінець – вектор спряжених змінних має задовольняти умову

$$\Psi^*(t_K) = - \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{z}(t_K), t_K)}{\partial \mathbf{z}(t_K)} \right|_{\mathbf{z}(t_K) = \mathbf{z}^*(t_K)}.$$

Примітка 2. Граничні умови для гамільтоніана при нефіксованому кінцевому моменті часу керування:

1) у задачі з закріпленими кінцями

$$H^*(t_K) = H(\mathbf{z}^*(t_K), \Psi^*(t_K), \mathbf{u}^*(t_K), t_K) = 0;$$

2) вільним правим кінцем

$$H^*(t_K) = - \frac{\partial \Phi(\mathbf{z}^*(t_K), t_K)}{\partial t_K}.$$

Зазначимо, що умови, що накладаються на значення $\Psi^*(t_K)$, $H^*(t_K)$, називаються **умовами трансверсальності**. Загальні умови трансверсальності наведені в дод. 8.

Властивості гамільтоніана при оптимальному керуванні

1. При оптимальному керуванні гамільтоніан є безперервною функцією часу (у тому числі при стрибкоподібній зміні величини керуючих впливів).

2. Якщо вектор-функція $\mathbf{F}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t))$ і скалярна функція $L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) = L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t))$, тобто не залежать явно від часу, то гамільтоніан уздовж усієї траєкторії оптимального керування зберігає постійне значення:

$$H^*(t) = H_0 = \text{const.}$$

При цьому в задачі з закріпленими кінцями $H_0 = 0$, звідки з п. 2 принципу максимуму випливає, що в цьому випадку завжди $H(t) \leq 0$.

Зауважимо, що принцип максимуму надає умови, що накладаються на властивості гамільтоніана та КСР. Ці умови є необхідними, але в загальному випадку не є достатніми. Однак, якщо відомо, по-перше, що об'єкт є керованим і, по-друге, отриманий у відповідності з принципом максимуму, вектор керуючих дій $\mathbf{u}^*(t)$ є єдино можливий вектор, який реалізує мету керування, то він і буде вектором оптимального керування.

Контрольні запитання

1. Поясніть поняття оптимального керування.
2. Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?
3. Поясніть поняття показника якості.
4. Поясніть поняття функціонала якості.

5. Які форми функціоналів якості застосовуються в загальній теорії оптимального керування?
6. Поясніть поняття критерію оптимальності.
7. Які вихідні дані входять до змісту задачі синтезу оптимального керування?
8. Поясніть поняття вектора стану.
9. Що зв'язує між собою рівняння стану?
10. Який об'єкт називається керованим?
11. Поясніть поняття критерію керованості.
12. Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?
13. Як пов'язані поняття стійкості об'єкта і керованості об'єкта?
14. Поясніть поняття лагранжіана.
15. Поясніть поняття гамільтоніана.
16. Поясніть поняття канонічної системи рівнянь.
17. Як пов'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?
18. Як пов'язані канонічна система рівнянь і лагранжіан?
19. Як знаходиться максимум функції за її аналітичним виразом?
20. Надайте формулювання принципу максимуму.
21. Поясніть поняття умови трансверсальності.
22. Який характер функції Гамільтона при кусково-постійних керуючих впливах?
23. У якому випадку гамільтоніан зберігає постійне значення вздовж всієї траєкторії оптимального керування?

4. КЕРУВАННЯ, ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ

4.1. Загальна характеристика задачі синтезу керування, оптимального за швидкодією

Підвищення швидкодії при заданих ресурсах є важливою проблемою, що дозволяє збільшити можливості обладнання та процесів. Тому проблеми побудови систем, оптимальних за швидкодією, постійно розглядались фахівцями як першочергові. Перші теоретичні роботи з цієї проблеми з'явилися у середині ХХ ст. У 1953 р. О. А. Фельдбаумом було введено загальне поняття оптимального процесу у просторі станів і доведено теорему про кількість інтервалів переключення керування лінійним стаціонарним об'єктом. Підхід, що веде до розв'язання загальної задачі про оптимальне програмне керування станом об'єкта на підставі принципу максимуму, уперше запропонований у 1956 р. У наступні роки з'явилась велика кількість робіт, заснованих на принципі максимуму, у яких розглядаються способи синтезу та побудови систем, оптимальних за швидкодією.

Задача синтезу керування, оптимального за швидкодією, належить до задач неklasичного типу з закріпленими лівим і правим кінцями траєкторії руху і нефіксованим часом керування.

Загальна постановка задачі синтезу керування, оптимального за швидкодією

Об'єкт керування, рух якого в просторі станів описується системою диференціальних рівнянь (3.24)

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

у початковий момент часу знаходиться в стані $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, де t_0 і \mathbf{z}_0 – задані величини.

Необхідно перевести цей об'єкт у стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$, де \mathbf{z}_k – заданий вектор, а t_k – нефіксований момент часу закінчення керування.

Потрібно визначити, яким має бути вектор керуючих дій $\mathbf{u}(t)$ на всьому інтервалі $[t_0, t_k]$ керування, щоб при обмеженнях $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_t$ досягалося мінімальне значення показника якості керування

$$J = t_k - t_0 = T \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_t}, \quad (4.1)$$

де \mathbf{U}_t – множина припустимих керувань.

Надалі розглядається постановка та розв'язання найпростішої задачі синтезу керування, оптимального за швидкодією, якщо об'єкт описується лінійним диференціальним рівнянням стану з постійними коефіцієнтами, а керуючі дії обмежені за максимальною величиною нерівностями.

4.2. Синтез оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом

4.2.1. Постановка задачі

Заданий цілком керований лінійний стаціонарний об'єкт (3.25)

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

де $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)]^T$ – k -мірний вектор стану;

$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$ – r -мірний вектор керуючих дій;

\mathbf{A} , \mathbf{B} – матриці стану та керування розмірів $k \times k$ і $k \times r$ відповідно, що не залежать від часу.

Компоненти вектора $\mathbf{u}(t)$ обмежені за величиною нерівностями (3.23):

$$|u_i(t)| \leq u_{i\max}, i = 1, 2, \dots, r.$$

У заданий початковий момент часу t_0 стан системи $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$.

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану \mathbf{z}_0 у заданий кінцевий стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$.

Критерій оптимальності – мінімальний час керування $T = t_k - t_0$.

4.2.2. Розв'язання задачі

Ця задача належить до задач неklasичного типу з закріпленими кінцями і нефіксованим часом керування. У ній критерій оптимальності (4.1) може бути поданий як

$$J = t_k - t_0 = \int_{t_0}^{t_k} 1 \cdot dt \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_t},$$

звідки випливає, що функція Лагранжа задачі

$$L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) = 1.$$

Щоб застосувати для пошуку оптимального керування принцип максимуму, складемо гамільтоніан

$$H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t)) = -1 + \boldsymbol{\psi}^T(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\psi}^T(t) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \quad (4.2)$$

користуючись яким запишемо канонічну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t); \\ \boldsymbol{\psi}'(t) &= \frac{-\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{z}} = -\mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\psi}(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

У співвідношенні (4.3) права частина рівняння для вектора спряжених змінних записана з урахуванням правила диференціювання білінійної форми

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y}^T.$$

Для пошуку оптимального керування застосуємо принцип максимуму до гамільтоніана і КСР.

Припустимо, що $\mathbf{u}^*(t)$ – шукане оптимальне керування. Тоді відповідно до п. 1 принципу максимуму необхідно, щоб існували вектор допоміжних функцій $\boldsymbol{\psi}^*(t) \neq \mathbf{0}$ на всій траєкторії і траєкторія стану $\mathbf{z}^*(t)$, що задовольняють канонічну систему рівнянь (3.24) при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ з граничними умовами $\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$.

Оскільки КСР (4.3) є системою диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами, то відповідь на цю вимогу є позитивною при виконанні умов керованості об'єкта, обмеженості коефіцієнтів матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} , а також величин керуючих діянь. Крім того, введені граничні умови повністю відповідають типу задачі – задача з закріпленими кінцями (п. 3.9, примітка 1, п. 1).

Переконаємося, що вектор допоміжних функцій $\boldsymbol{\psi}^*(t) \neq \mathbf{0}$ на всій траєкторії оптимального керування. Для цього скористаємося граничною умовою для гамільтоніана при нефіксованому часі керування в задачі з закріпленими кінцями (п. 3.9, примітка 2, п. 1):

$$H^*(t_k) = -1 + \boldsymbol{\psi}^{*T}(t_k) \cdot \mathbf{A}\mathbf{z}^*(t_k) + \boldsymbol{\psi}^{*T}(t_k) \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t_k) = 0.$$

При $\boldsymbol{\psi}^*(t_k) = \mathbf{0}$ маємо $H^*(t_k) = -1$, що суперечить граничній умові. Отже, хоча б в кінцевій точці $\boldsymbol{\psi}^*(t_k) \neq \mathbf{0}$.

Для відшукування оптимального керування дослідимо гамільтоніан на максимум як функцію від вектора керування. Як випливає з виразу (4.2), гамільтоніан лінійно залежить від вектора керування. Максимум гамільтоніана буде досягатися при виконанні умови

$$\boldsymbol{\psi}^{*T}(t) \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \max_{\mathbf{u}(t) \in U_t} . \quad (4.4)$$

Введемо вектор-рядок $\mathbf{q}^*(t) = \boldsymbol{\psi}^{*T}(t) \cdot \mathbf{B}$. Запишемо його компоненти з урахуванням того, що матриця \mathbf{B} має такий вигляд:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kr} \end{bmatrix}.$$

З урахуванням цих позначень компоненти вектора-рядка дорівнюватимуть

$$\begin{aligned}
 q_i^*(t) &= b_{1i} \cdot \psi_1^*(t) + b_{2i} \cdot \psi_2^*(t) + \dots + b_{ki} \cdot \psi_k^*(t) = \\
 &= \sum_{j=1}^k b_{ji} \cdot \psi_j^*(t); \quad i=1, 2, \dots, k.
 \end{aligned}$$

Тоді умова (4.4) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^r q_i^*(t) \cdot u_i(t) = \max_{\forall u_i(t) \in U_t} . \quad (4.5)$$

За результатами аналізу цього виразу можна зробити висновок, що гамільтоніан, що розглядається як функція всіх складових вектора керування, набуває найбільшого значення при одночасному виконанні двох умов:

– знаки всіх складових $u_i(t)$ вектора керування збігаються зі знаками відповідних функцій $q_i^*(t)$, завдяки чому всі складові в сумі (4.5) виявляються додатними;

– модулі всіх складових $u_i(t)$ вектора керування набувають найбільших з допустимих значень, що при виконанні першої умови забезпечує максимальне значення кожного доданка в сумі (4.5) і сумі в цілому.

З урахуванням обмежень (3.23)

$$|u_i(t)| \leq u_{i \max}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

оптимальні керуючі дії мають так залежати від часу:

$$u_i^*(t) = \begin{cases} u_{i \max} & \text{на інтервалах часу, де } q_i^*(t) > 0; \\ -u_{i \max} & \text{на інтервалах часу, де } q_i^*(t) < 0; \end{cases} \quad (4.6)$$

($i = 1, 2, \dots, r$).

Зауважимо, що значення керування є невизначеними в ті моменти або інтервали часу, де $q_i^*(t) = 0$.

Задача про оптимальне за швидкістю керування називається нормальною, якщо всі функції $q_i^*(t)$ можуть дорівнювати нулю тільки в ізольованих точках інтервалу керування (рис. 4.1). Якщо ж на інтервалі керування є хоча б один такий підінтервал, що хоча б одна з функцій $q_i^*(t) = 0$ у всіх точках цього підінтервалу, то задача оптимального за швидкістю керування називається виродженою.

Як випливає з виразу (4.6), у нормальній задачі всі оптимальні керуючі дії $u_i^*(t)$ – кусково-постійні функції часу, що мають розриви першого роду в точках, де відповідні функції $q_i^*(t)$ звертаються до нуля (рис. 4.1). Кусково-постійне керування може бути сформовано за допомогою двопозиційного реле.

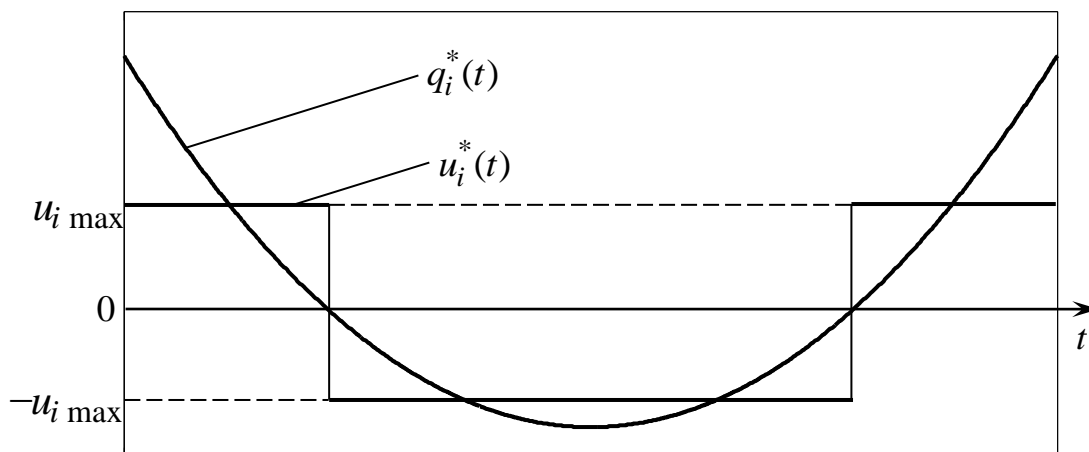


Рис. 4.1. Оптимальне керування в нормальній задачі

Доведено, що задача про оптимальне за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом є нормальною тоді і тільки тоді, коли не рівні нулю всі визначники, складені з матриць \mathbf{B} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{B}$, що мають однакові номери стовпців (об'єкт є керований!). Доведено також, що принцип максимуму дає не тільки необхідні, але й достатні умови оптимальності за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом, якщо задача є нормальною.

Якщо ж задача про оптимальну швидкодію виявляється виродженою, то на інтервалі виродженості принцип максимуму не дає навіть необхідних умов оптимальності. У цьому випадку потрібно зробити додаткові дослідження гамільтоніана з метою визначення необхідних умов оптимальності керування.

4.2.3. Методи реалізації керування, оптимального за швидкодією

Вважаючи, що властивості об'єкта керування забезпечують нормальність розглянутої задачі, продовжимо аналіз отриманого результату (4.6) з точки зору його технічної реалізації.

Перш за все звертає на себе увагу той факт, що вираз (4.6) дає оптимальне керування як функцію спряжених змінних, а не поточного стану. Тому технічна реалізація оптимального керування вимагає попереднього пошуку розв'язку канонічної системи рівнянь при заданих початкових умовах та обмеженнях на величини керувань. За наявності таких рішень залежності (4.6) реалізуються з застосуванням *програми розрахунку алгоритму керування, оптимального за швидкодією* (рис. 4.2).

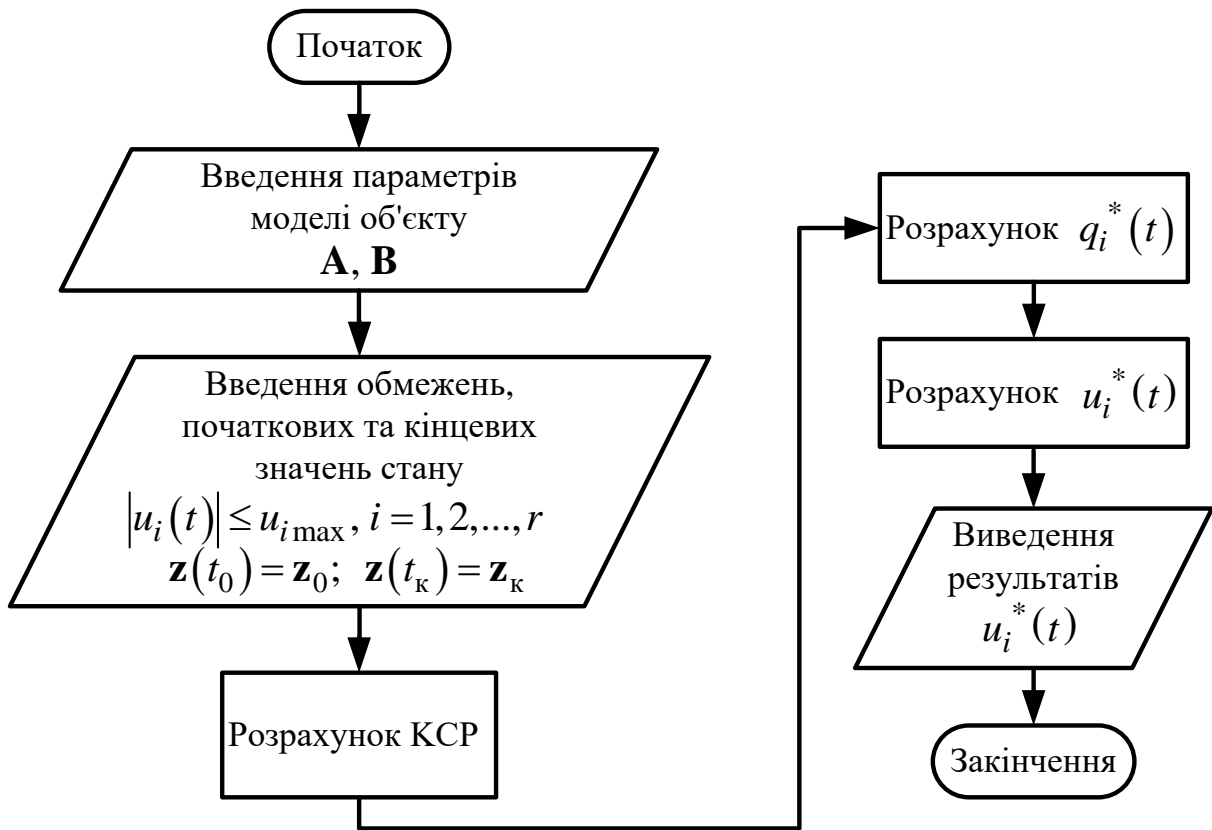


Рис. 4.2. Програма розрахунку алгоритму керування, оптимального за швидкодією

Головним недоліком програмного керування є те, що програма має бути розрахована заздалегідь для заданих параметрів об'єкта – матриць \mathbf{A} , \mathbf{B} , кожної пари його станів – початкового \mathbf{z}_0 та кінцевого \mathbf{z}_k , а також обмежень керуючих дій. Тому за наявності будь-яких відхилень від заданих умов фактичний хід процесу керування вже не буде оптимальним.

Вказаний недолік програмного керування можна усунути, якщо знайти структуру *системи автоматичного керування, оптимальної за швидкодією*. Для побудови системи автоматичного керування необхідно отримати керування як функцію координат стану (!) об'єкта керування

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{V}(\mathbf{z}^*(t)). \quad (4.7)$$

Структуру оптимальної за швидкодією системи автоматичного керування наведено на рис. 4.3. Центральним компонентом системи є блок обчислення функції перемикання, який на підставі інформації про поточний стан об'єкта $\hat{\mathbf{z}}^*(t)$ і параметри об'єкта формує функцію перемикання $\mathbf{V}(\mathbf{z}^*(t))$, що керує релейним перемикачем.

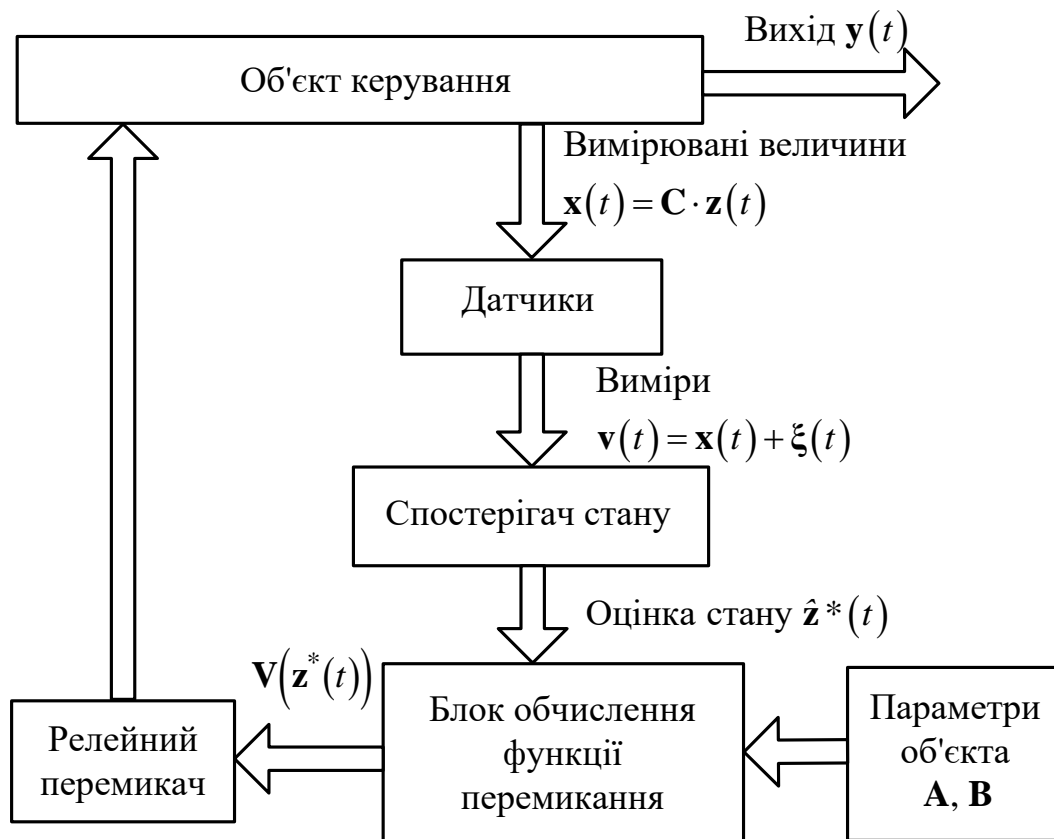


Рис. 4.3. Структура оптимальної за швидкодією системи автоматичного керування

На рисунку додатково показано:

– блок датчиків, за допомогою якого вимірюються деякі компоненти вектора стану

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\xi}(t),$$

де $\boldsymbol{\xi}(t)$ – помилки вимірювань;

– блок спостерігача стану, де за результатами вимірів формуються оцінки $\hat{\mathbf{z}}^*(t)$ фактичного вектора стану $\mathbf{z}^*(t)$ об'єкта.

Питання принципів побудови спостерігача стану за результатами вимірів розглядаються в розд. 6.

На жаль, нема загального методу, що дозволяє від виразу (4.6) перейти до виразу (4.7). Це обумовлено, з одного боку, тим, що при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ канонічна система рівнянь, що зв'язує між собою $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ і $\mathbf{z}^*(t)$, нелінійна, а з іншого боку, тим, що в задачі про оптимальну швидкодію нема граничних умов для допоміжних функцій $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ ні на лівому, ні на правому кінці. Однак доведено, що в будь-якій нормальній задачі про оптимальне за швидкодію керування лінійним стаціонарним об'єктом існує така вектор-функція $\mathbf{V}(\mathbf{z}^*(t))$, що вектор оптимальних керуючих дій може бути поданий виразом (4.7).

4.3. Приклад синтезу оптимальної за швидкодією системи керування лінійним стаціонарним об'єктом

Постановка задачі

Динаміка об'єкта керування описується диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (п. 3.2, приклад 1, рис. 3.2)

$$y''(t) = K_a u(t),$$

де $y(t)$ – вихідна величина;

$u(t)$ – керуюча дія;

K_a – коефіцієнт підсилення.

Максимальна величина керуючої дії $u(t)$ обмежена

$$|u(t)| \leq u_{\max}. \quad (4.8)$$

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ у кінцевий стан $y(t_k) = 0$, $y'(t_k) = 0$, де $t_0 = 0$ – фіксований момент початку, а t_k – нефіксований момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімальний час керування $T = t_k - t_0$:

$$J = t_k - t_0 = T \rightarrow \min_{u(t) \in U_t}.$$

Знайти і проаналізувати закон оптимального керування.

Математична формалізація задачі та вибір методу розв'язання

Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну (п. 3.2, приклад 1)

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t).$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$, $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k) = 0$, $z_2(t_k) = 0$.

Система диференціальних рівнянь стану має вигляд

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= K_a u(t). \end{aligned}$$

Звідси нескладно встановити, що матриця стану \mathbf{A} та матриця керування (входу) \mathbf{B} матричного рівняння стану дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_a \end{bmatrix}.$$

Як було доведено в п. 3.3, приклад 1, об'єкт є керованим, тому що ранг матриці керованості \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта. Отже, для заданого об'єкта принцип максимуму надає необхідні і достатні умови оптимальності.

Показник якості керування запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L(\mathbf{z}(t), u(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_k} 1 \cdot dt = t_k - t_0,$$

де $L(\mathbf{z}(t), u(t), t) = 1$ – функція Лагранжа задачі.

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями при нефіксованому часі t_k закінчення керування.

Синтез закону оптимального керування

Щоб скористатися принципом максимуму, запишемо гамільтоніан і канонічну систему диференціальних рівнянь задачі.

Гамільтоніан варіаційної задачі

$$H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)) = -1 + \psi_1(t) \cdot z_2(t) + \psi_2(t) \cdot K_a \cdot u(t),$$

де $\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t)]^T$ – вектор спряжених змінних.

Канонічна система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
z_1'(t) &= z_2(t); \\
z_2'(t) &= K_a u(t); \\
\psi_1'(t) &= -\frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t))}{\partial z_1} = 0; \\
\psi_2'(t) &= -\frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t))}{\partial z_2} = -\psi_1(t).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Позначимо $z_1^*(t)$, $z_2^*(t)$, $\psi_1^*(t)$ і $\psi_2^*(t)$ функції, що задовольняють початкові і граничні умови при оптимальному керуванні $u(t) = u^*(t)$.

Переконаємося, що вектор допоміжних функцій $\boldsymbol{\psi}^*(t) \neq \mathbf{0}$ на всій траєкторії оптимального керування. Для цього скористаємося граничною умовою для гамільтоніана при нефіксованому часі керування в задачі з закріпленими кінцями (п. 3.9, примітка 2, п. 1)

$$H^*(t_k) = -1 + \boldsymbol{\psi}^{*T}(t_k) \cdot \mathbf{A} \mathbf{z}^*(t_k) + \boldsymbol{\psi}^{*T}(t_k) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}^*(t_k) = 0.$$

При $\boldsymbol{\psi}^*(t_k) = \mathbf{0}$ маємо $H^*(t_k) = -1$, що суперечить граничній умові. Отже, хоча б в кінцевій точці $\boldsymbol{\psi}^*(t_k) \neq \mathbf{0}$.

Для відшукування оптимального керування дослідимо гамільтоніан на максимум як функцію від керування

$$H(\mathbf{z}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), u^*(t)) = \max_{u(t) \in \mathbf{U}_t} \left(-1 + \psi_1^*(t) z_2^*(t) + K_a \psi_2^*(t) u(t) \right).$$

Звідси випливає, що максимальне значення гамільтоніана досягається лише в тому випадку, коли керування обирається як

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) > 0; \\ -u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) < 0. \end{cases}$$

Якщо скористатися функцією перемикання sgn

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

знайдений закон оптимального керування можна записати як

$$u^*(t) = u_{\max} \text{sgn}(\psi_2^*(t)). \quad (4.10)$$

Аналіз закону керування, оптимального за швидкістю

Для проведення аналізу знайдемо розв'язок канонічної системи (4.9) для спряжених змінних

$$\begin{aligned} \psi_1^*(t) &= C_1; \\ \psi_2^*(t) &= -C_1 t + C_2, \end{aligned}$$

де C_1 і C_2 – деякі константи.

Якщо константи C_1 і C_2 одночасно не дорівнюють нулю, тоді лінійна функція

$$\psi_2^*(t) = C_2 - C_1 t$$

може дорівнювати нулю не більш одного моменту часу на інтервалі керування.

На рис. 4.4 наведено чотири можливих видів графіків функції ψ_2^* і графіки відповідних їм програм оптимального керування $u^*(t)$.

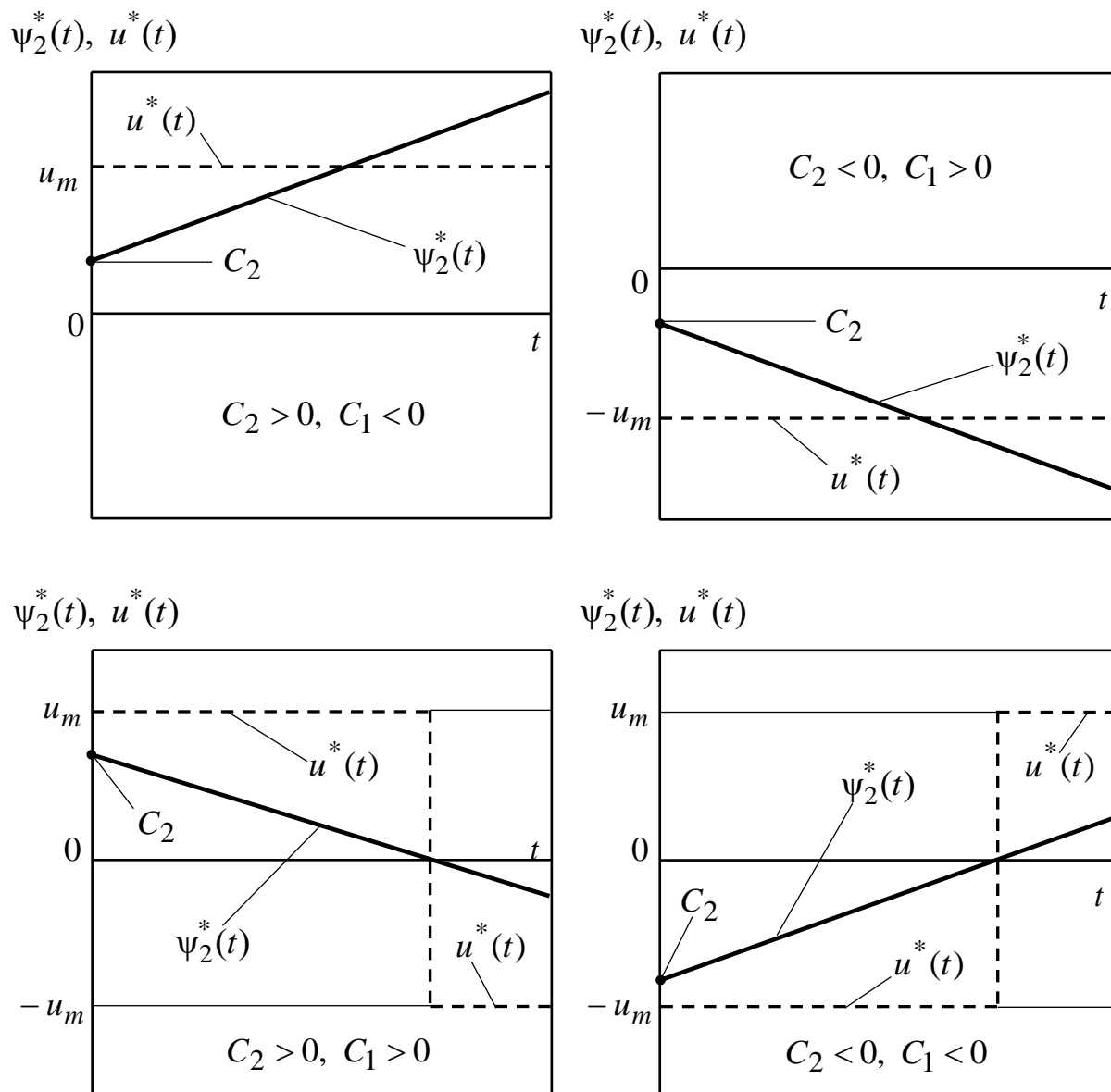


Рис. 4.4. Чотири можливих видів графіків функцій $\psi_2^*(t)$ і відповідних їм програм оптимального керування $u^*(t)$

З графіків можна зробити висновок, що *оптимальним є кусково-постійне керування, що набуває значення $+u_{\max}$ або $-u_{\max}$ та змінює знак не більше одного разу на всьому інтервалі керування від t_0 до t_k .*

Синтез оптимальної системи керування

Для того щоб від програми оптимального керування (4.10) перейти до оптимальної системи керування, що функціонує за інформацією про координати стану об'єкта (4.7), скористаємось диференціальними рівняннями стану об'єкта, для координат якого відомі початкові і граничні умови.

Визначимо характер руху об'єкта на інтервалі часу, коли $u(t) = u_{\max}$. На цьому інтервалі рух об'єкта описується системою рівнянь

$$\begin{aligned}z_1'(t) &= z_2(t); \\z_2'(t) &= K_a u_{\max}.\end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$z_2^2 = 2K_a u_{\max} z_1 + \left(\xi_2^2 - 2K_a u_{\max} \xi_1 \right), \quad (4.11)$$

де ξ_1, ξ_2 – координати стану об'єкта в момент початку руху об'єкта при $u(t) = u_{\max}$.

Аналогічно знаходяться фазові траєкторії об'єкта при керуванні $u(t) = -u_{\max}$

$$z_2^2 = -2K_a u_{\max} z_1 + \left(\zeta_2^2 + 2K_a u_{\max} \zeta_1 \right), \quad (4.12)$$

де ζ_1, ζ_2 – координати стану об'єкта в момент початку руху об'єкта при $u(t) = -u_{\max}$.

Рівняння (4.11) і (4.12) визначають на фазовій площині два сімейства парабол (рис. 4.5). Параболи першого сімейства зображені суцільними лініями, а параболи другого сімейства – пунктирними лініями. Параболи, що належать одному сімейству, розрізняються за значеннями початкових координат стану.

На фазових траєкторіях стрілками вказані напрямки руху точки: при $z_2 = y' > 0$ точка рухається по траєкторії так, що величина $z_1 = y$ збільшується; навпаки, якщо $z_2 = y' < 0$, тоді рух точки здійснюється у бік зменшення значень $z_1 = y$.

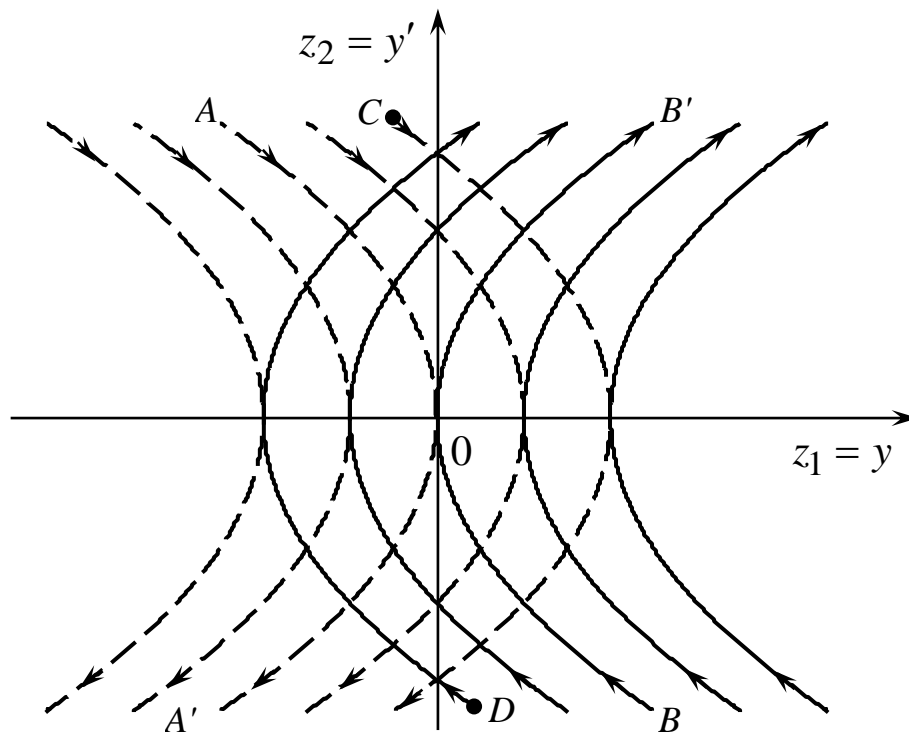


Рис. 4.5. Два сімейства фазових траєкторій об'єкта, що відповідають керуванню $u(t) = +u_{\max}$ (суцільна лінія) і керуванню $u(t) = -u_{\max}$ (пунктирна лінія)

Розгляд фазового портрета руху об'єкта керування дозволяє зробити такі висновки:

1. Кожне сімейство парабол містить тільки одну гілку фазової траєкторії, рухаючись вздовж якої точка може прийти до початку координат ($z_1 = z_2 = 0$), що відповідає меті керування: при $u(t) = -u_{\max}$ до реалізації мети керування призводить рух вздовж дуги AO параболи AOA' сімейства (4.12); при $u(t) = u_{\max}$ – рух вздовж дуги BO параболи BOB' сімейства (4.11).

2. Якщо початковий стан об'єкта керування такий, що точка не лежить на лінії AOB (точка C або D на рис. 4.6), тоді спочатку необхідно так обрати знак керуючої дії, щоб з вихідного положення точка рухалась до лінії AOB (дуга CC' або DD' на рис. 4.6):

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху нижче лінії } AOB; \\ -u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху вище лінії } AOB. \end{cases} \quad (4.13)$$

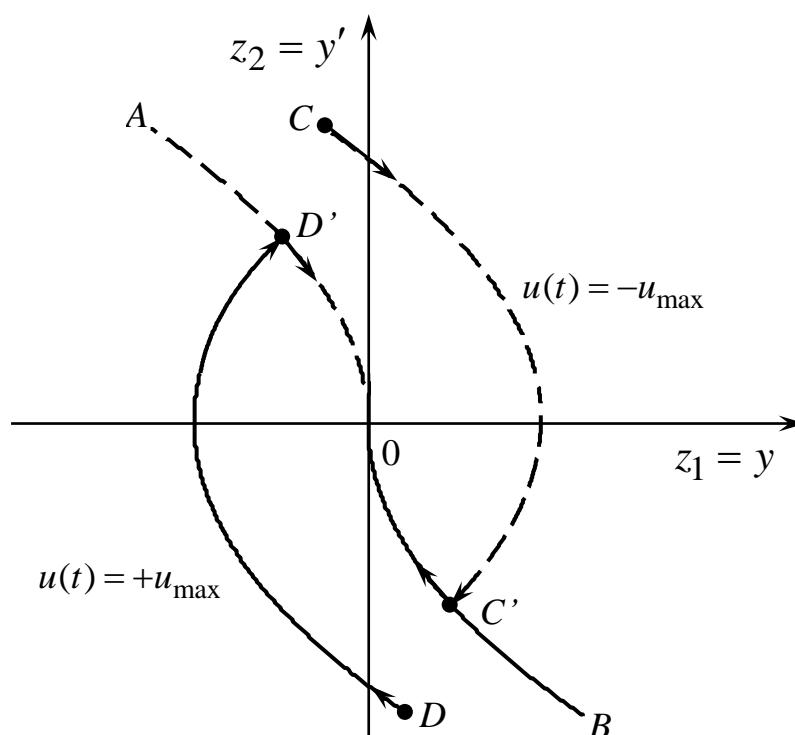


Рис. 4.6. Фазові траєкторії об'єкта при оптимальному керуванні

3. Коли внаслідок прикладення керуючої дії об'єкт перейде до такого стану, що точка буде на лінії AOB , необхідно змінити знак керуючої дії на протилежний, щоб подальший рух точки здійснювався вздовж відповідної гілки лінії AOB до початку координат (мети керування).

Отже, лінія AOB – це *лінія перемикання знака керуючої дії*. За допомогою цієї лінії всю фазову площину можна поділити на дві множини точок, кожній відповідає певний знак керуючої дії.

Знайдемо рівняння лінії AOB . З рівнянь (4.11) і (4.12) отримуємо, що рівняння парабол BOB' і AOA' відповідно мають вигляд

$$z_2^2 = 2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \geq 0, \quad z_2^2 = -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \leq 0.$$

Точки дуги OB задовольняють рівняння

$$z_2 = -\sqrt{2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \geq 0,$$

а точки дуги AO – рівняння

$$z_2 = \sqrt{-2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \leq 0.$$

Можна отримати і єдине рівняння для всієї лінії перемикання AOB . Для цього зазначимо, що для точок дуги OB

$$|z_2| = \sqrt{2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \geq 0,$$

і внаслідок цього

$$z_2 |z_2| = -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \geq 0.$$

Аналогічно, для точок дуги AO також справедливо

$$|z_2| = \sqrt{-2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \leq 0,$$

і внаслідок цього

$$z_2 |z_2| = -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \leq 0.$$

Об'єднуючи отримані результати, маємо загальне рівняння для всіх точок лінії перемикання AOB

$$z_2 |z_2| = -2K_a u_{\max} z_1, \quad -\infty < z_1 < \infty.$$

Введемо позначення

$$\sigma(z_1, z_2) = z_2 |z_2| + 2K_a u_{\max} z_1. \quad (4.14)$$

Звідси рівняння лінії перемикання

$$\sigma(z_1, z_2) = 0. \quad (4.15)$$

З рівнянь (4.14), (4.15) випливає, що $\sigma(z_1, z_2) > 0$ для всіх точок фазової площини, що знаходяться вище лінії перемикання, і $\sigma(z_1, z_2) < 0$ для всіх точок фазової площини, що знаходяться нижче лінії перемикання. Використовуючи вказану властивість функції $\sigma(z_1, z_2)$, яку можна назвати вирішальною, закон оптимального керування на початковій ділянці (4.13) можна подати як

$$u^*(z_1, z_2) = -u_{\max} \operatorname{sgn}(\sigma(z_1, z_2)). \quad (4.16)$$

Функція $\operatorname{sgn}(\sigma)$ не визначена при $\sigma=0$, тому рівняння (4.16) визначає керуючу дію тільки для станів, яким відповідають точки фазової площини, що не належать лінії перемикання.

З точки зору технічної реалізації вказане зауваження несуттєво – усі реальні перемикачі мають хоч і малі, але кінцеві зони нечутливості.

Схема математичної моделі оптимальної за швидкодією системи керування (без спостерігача стану) наведено на рис. 4.7.

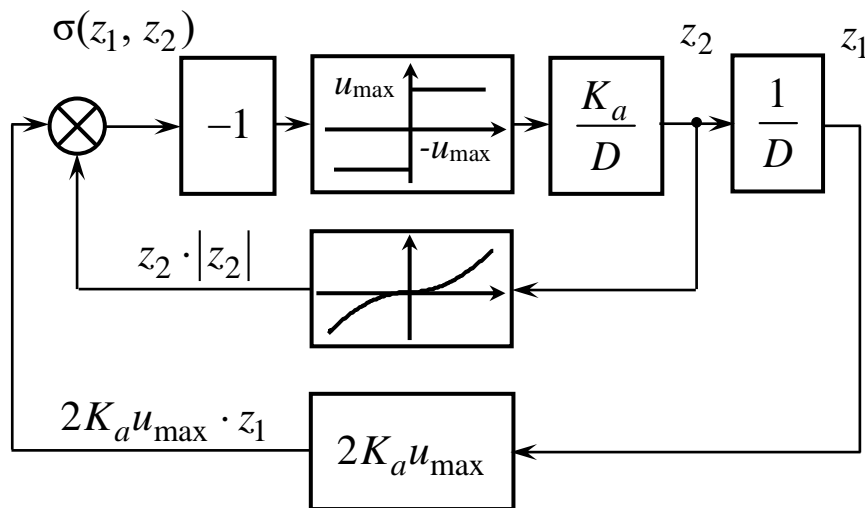


Рис. 4.7. Схема математичної моделі оптимальної за швидкодією системи керування

При практичній реалізації оптимальної за швидкодією системи керування об'єктом будуть потрібні два нелінійних блоки – один буде реалізовувати функцію $z_2 |z_2|$, а другий – функцію ідеального реле.

Контрольні запитання

1. У чому полягає специфіка оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом?
2. У якому випадку принцип максимуму надає не тільки необхідні, але і достатні умови існування оптимального керування об'єктом?
3. Функцією яких змінних є керуюча дія u при синтезі програми оптимального керування?
4. Функцією яких змінних є керуюча дія u при синтезі оптимальної системи керування?
5. Чому дорівнює кількість перемикачів керуючої дії при оптимальному за швидкодією керуванні лінійним стаціонарним об'єктом другого порядку?
6. Кривими якого класу є частини фазових траєкторій об'єкта, що складається з двох інтеграторів, при оптимальному за швидкодією керуванні?
7. Як за відомими фазовими траєкторіями об'єкта другого порядку, що відповідають керуванню u_{\max} та $-u_{\max}$, знаходиться лінія перемикачів керуючої дії?
8. Чому при практичній реалізації оптимального за швидкодією керування потрібні нелінійні блоки?
9. У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування стосовно систем, оптимальних за швидкодією?

5. СИСТЕМИ, ОПТИМАЛЬНІ ЗА КВАДРАТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ ЯКОСТІ

5.1. Квадратичний показник якості керування

Припустимо, що рух об'єкта керування необхідно стабілізувати таким чином, щоб до моменту закінчення керування вектор вихідних величин $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ перейшов у нульовий стан $\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{0}$ ¹.

Визначимо вектор помилки керування $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{0} - \mathbf{y}(t) = -\mathbf{y}(t).$$

У багатьох прикладних задачах якість досягнутого результату керування можна охарактеризувати величиною суми зважених квадратів компонентів вектора помилки в момент закінчення керування t_k

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k),$$

де \tilde{p}_i – невід'ємні числа, $\tilde{p}_i \geq 0$.

Вимога $\tilde{p}_i \geq 0$ виключає можливість взаємної компенсації одних компонентів помилки іншими.

Якщо важливою є якість перехідного процесу по всіх керованих величинах, то показником якості може служити величина

¹ Якщо $\mathbf{y}(t_k) \neq \mathbf{0}$, задачу можна звести до задачі з нульовим кінцевим станом заміною змінних $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_k)$.

$$J_2 = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \cdot I_{2i},$$

де $I_{2i} = \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt$ – квадратична інтегральна оцінка якості перехідного процесу по i -му виходу, величина якої, як відомо, досить об'єктивно характеризує перехідний процес (розд. 2).

Отже, величина J_2 являє собою зважену суму квадратичних інтегральних оцінок якості керування за всіма наявними виходами. Щоб при зважуванні не відбувалося взаємної компенсації одних квадратичних інтегральних оцінок іншими, необхідно величинам \tilde{q}_i надавати тільки невід'ємні значення: $\tilde{q}_i \geq 0$.

Вимоги до точності керування і якості перехідного процесу, як правило, мають поєднуватися з вимогами до величини керуючих дій, причому не завжди ці вимоги вичерпуються накладенням обмежень на їхні граничні значення, як це було в розглянутій вище задачі про керування, оптимальне за швидкодією. У багатьох практично важливих задачах мають місце ще й інтегральні вимоги до керуючих дій, що обмежують, наприклад, витрати енергії на керування. Ці вимоги можна охарактеризувати величиною

$$J_3 = \sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt,$$

де r_i – вагові коефіцієнти, що набувають тільки додатних значень: $r_i > 0$.

Вимога суворої додатності всіх коефіцієнтів r_i пояснюється тим, що тут неприпустимі не тільки взаємна компенсація одних витрат на

керування іншими (випадок, коли деякі $r_i < 0$), але навіть і неврахування деяких з цих витрат, що було б можливо, якби частина компонентів дорівнювала нулю.

Після всього викладеного неважко зрозуміти сенс показника якості вигляду

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k) + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt + \sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt.$$

Показники якості J_1 , J_2 , J_3 і більш загальний показник якості J є варіантами квадратичних показників якості.

Подамо квадратичний показник як векторно-матричну форму. Для цього введемо в розгляд діагональні матриці

$$\tilde{\mathbf{P}} = \text{diag}[\tilde{p}_i], \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \text{diag}[\tilde{q}_i], \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}[r_i], \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Безпосередніми обчисленнями неважко переконатися в тому, що

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k) = \mathbf{e}^T(t_k) \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}(t_k);$$

$$\sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{e}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{e}(t) dt;$$

$$\sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt.$$

Використовуючи наведені співвідношення, можна загальний показник якості J подати як

$$J = \mathbf{e}^T(t_k) \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left(\mathbf{e}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right) dt. \quad (5.1)$$

Як уже зазначалося при математичній формалізації варіаційної задачі, опис усіх даних задачі проводиться за допомогою координат стану. Тому необхідно квадратичний показник якості подати в такому вигляді, щоб у нього ввійшли координати стану керованого об'єкта.

Якщо об'єкт лінійний, то вектор вихідних величин пов'язаний з вектором стану рівнянням

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{z}(t), \quad (5.2)$$

де \mathbf{C} – матриця виходу розміром $k \times n$.

Для такого об'єкта вектор помилки при нульовому кінцевому стані дорівнює

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{0} - \mathbf{y}(t) = -\mathbf{C} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{e}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t) \mathbf{C}^T. \quad (5.3)$$

Підставимо вираз (5.3) у вираз (5.2). У результаті отримаємо

$$J = \mathbf{z}^T(t_k) \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{C} \mathbf{z}(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left[\mathbf{z}^T(t) \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] dt. \quad (5.4)$$

Позначимо

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{C}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C}.$$

Матриці \mathbf{P} і \mathbf{Q} – це симетричні матриці ($p_{ij} = p_{ji}$, $q_{ij} = q_{ji}$) розмірності $k \times k$, у загальному випадку не діагональні, на відміну від матриць $\tilde{\mathbf{P}}$ і $\tilde{\mathbf{Q}}$.

Використовуючи введені матриці \mathbf{P} і \mathbf{Q} , квадратичний показник якості (5.1) можна записати в більш компактній формі

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{z}(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt. \quad (5.5)$$

Для узагальнення надалі будемо вважати, що матриця \mathbf{R} – симетрична, але необов'язково діагональна.

Нагадаємо, що вираз вигляду

$$v = \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a},$$

де \mathbf{S} – симетрична матриця, називається *квадратичною формою*.

Квадратичні форми є компонентами квадратичного показника якості (5.5). Крім того, надалі використовуються вирази вигляду

$$w = \mathbf{b}^T \mathbf{S} \mathbf{a},$$

де \mathbf{b} – n -мірний вектор;

\mathbf{a} – k -мірний вектор;

\mathbf{S} – прямокутна матриця $n \times k$,

які називаються *білінійною формою*.

Значення коефіцієнтів матриць \mathbf{P} , \mathbf{Q} та \mathbf{R} визначають «вагу» того чи іншого компонента у квадратичному показнику якості: коефіцієнти матриці \mathbf{P} надають «вагу» кінцевому стану, матриці \mathbf{Q} – характеру перехідного режиму, а матриці \mathbf{R} – витратам «енергії» під час роботи системи.

Зауважимо, що за наявності ненульових елементів у матриці \mathbf{Q} матрицю \mathbf{P} можна обрати нульовою, тому що обидва компоненти надають мінімум показнику якості (5.5) при виконанні умови наближення вектора стану об'єкта до початку координат.

5.2. Синтез керування станом лінійного стаціонарного об'єкта, оптимального за критерієм мінімуму квадратичного показника якості

5.2.1. Постановка задачі

Задано лінійний стаціонарний об'єкт (3.25)

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

де $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)]^T$ – k -мірний вектор стану;

$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$ – r -мірний вектор керуючих дій;

\mathbf{A} , \mathbf{B} – матриці стану та керування розмірами $k \times k$ і $k \times r$ відповідно.

Компоненти вектора $\mathbf{u}(t)$ не обмежені за величиною.

У заданий початковий момент часу t_0 стан системи $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$.

Знайти керування $\mathbf{u}^*(t)$, що переводить об'єкт зі стану \mathbf{z}_0 в деякий невизначений стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$ за фіксований час $T = t_k - t_0$ таким чином, щоб забезпечити мінімум показника якості (5.5)

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{z}(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \left(\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right) dt,$$

де \mathbf{P} і \mathbf{Q} – симетричні матриці з коефіцієнтами $p_{ij} = p_{ji} \geq 0$, $q_{ij} = q_{ji} \geq 0$;

\mathbf{R} – додатно визначена симетрична матриця.

Примітки:

1. Оскільки функціонал $J_1 = \mathbf{z}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{z}(t_k) \rightarrow \min$ при $\mathbf{z}(t_k) \rightarrow \mathbf{0}$, то він визначає мету керування як переведення об'єкта в нульовий стан.

2. Функціонал $J_2 = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) dt$ накладає обмеження щодо якості перехідного процесу. Оскільки він досягає мінімуму при $\mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, то в принципі функціонал J_1 може не задаватися.

3. Функціонал $J_3 = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt$ накладає обмеження на витрати «енергії» на керування. Тому при $\det \mathbf{R} = 0$ деякі компоненти вектора керування можуть прагнути нескінченості, внаслідок чого нема гарантій фізичної реалізації отриманого рішення.

4. У постановці задачі відсутня вимога повної керованості об'єкта.

5.2.2. Розв'язання задачі

Ця задача належить до задач класичного типу з закріпленим лівим кінцем і вільним правим кінцем траєкторії руху і фіксованим часом керування. Розв'яжемо її з застосуванням принципу максимуму.

З критерію оптимальності (5.5) маємо, що функція Лагранжа задачі записується як

$$L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right). \quad (5.6)$$

Тоді за виразами (3.27), (3.25) і (5.6) гамільтоніан цієї задачі

$$\begin{aligned} H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t)) = & -\frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \\ & + \boldsymbol{\psi}^T(t) \cdot \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\psi}^T(t) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (5.7)$$

де вектор-функція $\boldsymbol{\psi}(t)$ має задовольняти векторно-матричне диференціальне рівняння вигляду (3.39)

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = -\frac{\partial H(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{z}}.$$

З урахуванням правил диференціювання квадратичних і білінійних форм отримаємо

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(t).$$

Отже, у цій задачі канонічна система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t); \\ \boldsymbol{\psi}'(t) &= -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{Q} \mathbf{z}(t). \end{aligned} \quad (5.8)$$

КСР (5.8) є системою диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами, тому при виконанні умов обмеженості коефіцієнтів матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} , а також величин керуючих впливів вона

задовольняє теорему існування і єдиності розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь.

Припустимо, що існує потрібне оптимальне керування $\mathbf{u}^*(t)$. Тоді при такому керуванні існують вектор-функції $\mathbf{z}^*(t)$ і $\boldsymbol{\psi}^*(t)$, які задовольняють систему рівнянь (5.8) за граничних умов (п. 3.9, примітка 1, п. 2 для задачі з вільним правим кінцем при фіксованому часі закінчення керування)

$$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0; \quad \boldsymbol{\psi}^*(t_k) = - \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{z}(t_k), t_k)}{\partial \mathbf{z}(t_k)} \right|_{\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}^*(t_k)}.$$

Для заданого функціонала (5.5)

$$\Phi(\mathbf{z}(t_k)) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{z}(t_k),$$

тому граничні умови для вектора спряжених змінних

$$\boldsymbol{\psi}^*(t_k) = -\mathbf{P} \mathbf{z}^*(t_k). \quad (5.9)$$

Відповідно до п. 1 ПМП також необхідно, щоб вектор допоміжних функцій $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ не був тотожно рівним нулю. Перевірку цієї умови проведемо пізніше.

Для пошуку оптимального керування досліджуємо гамільтоніан як функцію змінного вектора $\mathbf{u}(t)$

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{z}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{u}(t)) &= -\frac{1}{2} \mathbf{z}^{*T}(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}^*(t) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \\
&+ \boldsymbol{\psi}^{*T}(t) \cdot \mathbf{A} \mathbf{z}^*(t) + \boldsymbol{\psi}^{*T}(t) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}(t).
\end{aligned}
\tag{5.10}$$

Оскільки оптимальне керування $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ доставляє гамільтоніану найбільше з усіх можливих значень у будь-який момент часу на інтервалі керування, то при оптимальному керуванні мають виконуватися умови досягнення екстремуму

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)} = \mathbf{0}.
\tag{5.11}$$

Обчислюючи вектор часткових похідних від виразу (5.10) за вектором \mathbf{u} , отримаємо необхідну умову екстремуму

$$-\mathbf{R} \mathbf{u}(t) \Big|_{\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi}^*(t) = \mathbf{0}.
\tag{5.12}$$

Звідси отримуємо корінь

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi}^*(t).
\tag{5.13}$$

Дослідимо точку екстремуму. Для цього визначимо матрицю других часткових похідних:

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)} = -\mathbf{R}.$$

Наявна в постановці задачі умова додатної визначеності матриці \mathbf{R} , по-перше, гарантує існування оберненої матриці \mathbf{R}^{-1} і, по-друге, означає, що знайдена точка екстремуму є точкою максимуму. Тому вектор $\mathbf{u}^*(t)$, який визначається співвідношенням (5.13), доставляє гамільтоніану найбільше значення і, отже, є вектором оптимальних керувань.

Отже, ПМП у цій задачі дає необхідну та достатню умову оптимальності керування.

5.2.3. Методи реалізації керування станом лінійного стаціонарного об'єкта, оптимального за критерієм мінімуму квадратичного показника якості

Продовжимо аналіз отриманого результату виразу (5.13) з точки зору його технічної реалізації.

Перш за все звертає на себе увагу той факт, що вираз (5.13) дає оптимальне керування як функцію спряжених змінних, а не поточного стану. Тому технічна реалізація оптимального керування вимагає попереднього пошуку розв'язку канонічної системи рівнянь при заданих граничних умовах. За наявності таких розв'язків залежності (5.13) реалізуються з застосуванням *програми розрахунку алгоритму керування, оптимального за критерієм мінімуму квадратичного показника якості* (рис. 5.1).

Головним недоліком програмного керування є те, що програма має бути розрахована заздалегідь для заданих параметрів об'єкта – матриць \mathbf{A} , \mathbf{B} , кожної пари його станів – початкового \mathbf{z}_0^* та кінцевого $\Psi^*(t_k)$. Тому за наявності будь-яких відхилень від заданих умов фактичний хід процесу керування вже не буде оптимальним.

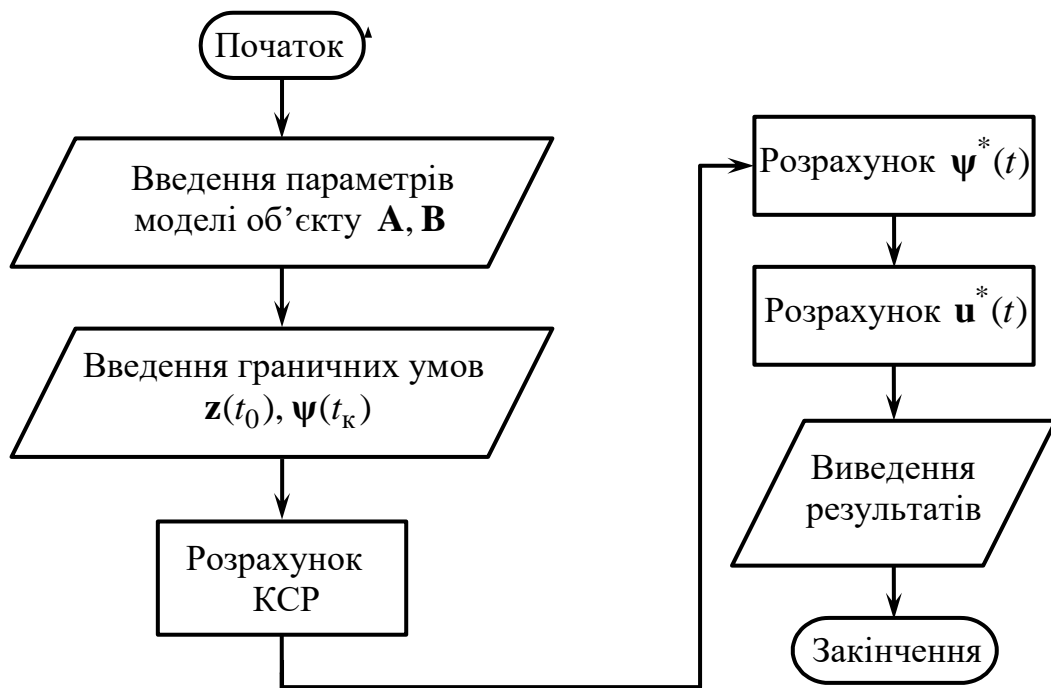


Рис. 5.1. Програма розрахунку алгоритму керування, оптимального за критерієм мінімуму квадратичного показника якості

Вказаний недолік програмного керування можна усунути, якщо знайти структуру *системи автоматичного керування, оптимальної за критерієм мінімуму квадратичного показника якості*.

Для побудови системи автоматичного керування необхідно отримати керування як функцію координат стану об'єкта керування

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{V}[\mathbf{z}^*(t)].$$

З цією метою покажемо, що при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ для рівнянь (5.8) і граничної умови (5.9) існує така додатно визначена симетрична матриця $\mathbf{\Gamma}(t)$, що для всіх моментів часу t з інтервалу керування

$$\boldsymbol{\psi}^*(t) = -\boldsymbol{\Gamma}(t) \cdot \mathbf{z}^*(t). \quad (5.14)$$

Припустимо, що співвідношення (5.14) має місце. Тоді з виразів (5.8), (5.13) і (5.14) при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ будемо мати дві тотожності

$$\mathbf{z}^*(t) = \left[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\Gamma}(t) \right] \mathbf{z}^*(t);$$

$$\boldsymbol{\psi}'^*(t) = -\boldsymbol{\Gamma}'(t) \cdot \mathbf{z}^*(t) - \boldsymbol{\Gamma}(t) \cdot \mathbf{z}'^*(t) = \left[\mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}(t) + \mathbf{Q} \right] \mathbf{z}^*(t).$$

З другої тотожності отримуємо

$$-\boldsymbol{\Gamma}(t) \cdot \mathbf{z}'^*(t) = \left[\boldsymbol{\Gamma}'(t) + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}(t) + \mathbf{Q} \right] \mathbf{z}^*(t). \quad (5.15)$$

Помножимо далі обидві частини першої тотожності зліва на $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ і виконаємо складання результату перемноження з виразу (5.15). У результаті отримаємо

$$\mathbf{0} = \left[\boldsymbol{\Gamma}'(t) + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}(t) + \mathbf{Q} + \boldsymbol{\Gamma}(t)\mathbf{A} - \boldsymbol{\Gamma}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\Gamma}(t) \right] \mathbf{z}^*(t).$$

Отримана тотожність буде мати місце в будь-який момент часу, якщо матрицю вибрати так, щоб вираз, укладений у квадратні дужки, тотожно дорівнював нулю. Іншими словами, матриця $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ має задовольняти диференціальне рівняння

$$\boldsymbol{\Gamma}'(t) = -\boldsymbol{\Gamma}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}(t) + \boldsymbol{\Gamma}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\Gamma}(t) - \mathbf{Q}. \quad (5.16)$$

Рівняння (5.16) називається матричним диференціальним рівнянням Ріккати. Для того щоб це рівняння єдиним чином визначало матрицю $\Gamma(t)$, необхідно задати граничну умову. З виразу (5.14) випливає, що в момент закінчення керування ($t = t_k$)

$$\Psi^*(t_k) = -\Gamma(t_k) \cdot \mathbf{z}^*(t_k).$$

Зіставляючи цей результат з виразом (5.9), отримаємо

$$\Gamma(t_k) = \mathbf{P}. \quad (5.17)$$

Неважко показати, що матриця $\Gamma(t)$, що визначається диференціальним рівнянням (5.16) з граничною умовою (5.17), є симетричною матрицею. Для того досить переконатися, що операція транспонування виразів (5.15) і (5.17) внаслідок симетричності матриць \mathbf{P} , \mathbf{Q} і \mathbf{R} не змінює вигляду рівняння (5.16) і граничної умови.

Зауважимо також, що зв'язок за виразом (5.14) гарантує, що вектор $\Psi^*(t) \neq \mathbf{0}$.

Користуючись співвідношенням (5.14), виразимо вектор $\mathbf{u}^*(t)$, що визначається рівністю (5.13), через вектор стану керованого об'єкта:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Gamma(t) \cdot \mathbf{z}^*(t).$$

В іншій формі

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{z}^*(t), \quad (5.18)$$

де

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma}(t) \quad (5.19)$$

– матриця коефіцієнтів підсилення оптимального автоматичного пристрою, званого в задачі, що розглядається, *регулятором стану*.

З рівняння (5.18) маємо, що регулятор стану є безінерційним лінійним пристроєм.

На рис. 5.2 наведено схему математичної моделі системи керування станом лінійного об'єкта, оптимальної за критерієм мінімуму квадратичного функціонала якості.

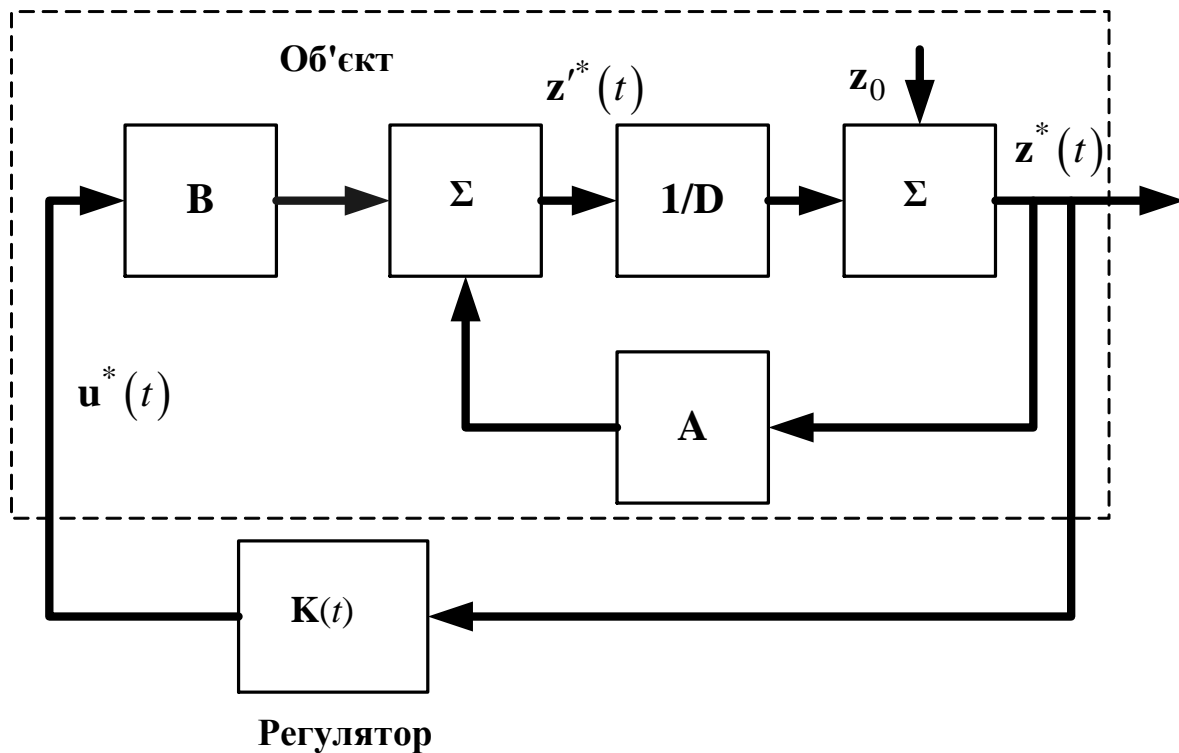


Рис. 5.2. Схема математичної моделі системи керування станом лінійного об'єкта, оптимальної за критерієм мінімуму квадратичного функціонала якості

Зауважимо, що згідно з виразами (5.19) і (5.16) матриця коефіцієнтів підсилення не залежить від стану і повністю визначається завданням матриць \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{P} , \mathbf{Q} і \mathbf{R} . Тому матрицю $\mathbf{K}(t)$ можна визначити до початку роботи

системи. Для цього необхідно знайти розв'язок матричного рівняння Ріккати (5.16) з граничною умовою (5.17).

Рівняння Ріккати є нелінійним, тому визначити його розв'язок аналітично, тобто висловити формулою, що не містить інтегралів, зазвичай неможливо. У зв'язку з цим обчислення матриці $\Gamma(t)$ провадиться методами чисельного інтегрування рівняння (5.16) за допомогою ЕОМ.

Слід також звернути увагу на те, що існування і єдність оптимального керування в розглянутій задачі ніяк не пов'язане з керованістю об'єкта керування. Керованість не є необхідною умовою існування оптимального керування тому, що постановка задачі не передбачає переведення об'єкта в якийсь конкретний стан, який визначається точкою або областю у просторі станів. Якщо деякі з координат стану об'єкта некеровані, то мінімізація показника якості може бути зроблена за рахунок оптимально підбраного закону керування тими координатами стану, що залежать від керуючих впливів. При цьому некеровані координати будуть змінюватися за рахунок вільного руху об'єкта, який може бути розбіжним, якщо за некерованими координатами об'єкт нестійкий. Розбіжність вільного руху за некерованими координатами не призводить до розбіжності показника якості і цим не позбавляє сенсу поставлене завдання, оскільки при кінцевій величині інтервалу керування внесок некерованих координат у показник якості завжди кінцевий.

5.2.4. Асимптотичні властивості оптимального регулятора

Розглянута в п. 5.2 задача належить до задач термінального керування, тобто керування на кінцевому інтервалі часу. У той же час у більшості практичних задач необхідно після переведення об'єкта в деякий кінцевий стан продовжувати утримувати в цьому стані необмежений час.

Для вирішення цього завдання необхідно проаналізувати асимптотичну поведінку оптимального регулятора при $t_k - t_0 \rightarrow \infty$. Тут головними питаннями є наявність розв'язку рівняння Ріккати і стійкість оптимального регулятора стану. Відповіді на ці питання даються такими теоремами.

Теорема про існування рішення рівняння Ріккати

Нехай $\Gamma(t)$ – матриця, що задовольняє диференціальне рівняння Ріккати (5.16) з граничною умовою $\Gamma(t_k) = \mathbf{P}$.

Якщо об'єкт цілком керований, а матриці \mathbf{Q} і \mathbf{R} задовольняють умову

$$\mathbf{Q} \geq \alpha \mathbf{E}, \quad \mathbf{R} \geq \beta \mathbf{E},$$

де $\alpha > 0, \beta > 0$ – деякі константи;

\mathbf{E} – одинична матриця,

то існує границя

$$\lim_{t_k - t_0 \rightarrow \infty} \Gamma(t) = \Gamma,$$

у якій Γ – невід'ємно визначена симетрична матриця, що не залежить від \mathbf{P} і є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння (рівняння Лур'є)

$$\Gamma \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \Gamma - \Gamma \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Gamma + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (5.20)$$

Примітка. Якщо об'єкт не повністю керований, то для існування матриці Γ достатньо, щоб вільний рух лінійного стаціонарного об'єкта за некерованими координатами був стійким.

Як випливає з примітки, перевірка стійкості має виконуватися тільки для тих координат вектора стану, що не є керованими.

Наприклад, у п. 3.8 показано, що якщо подати матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} та вектор \mathbf{z} диференціального рівняння стану об'єкта в блоковому вигляді

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t),$$

то система не цілком керована за координатами \mathbf{z}_2 , якщо серед усіх можливих розбиттів існує таке, при якому одночасно виконуються умови

$$\mathbf{A}_{21} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}.$$

Перевірку стійкості для некерованих координат \mathbf{z}_2 можна виконати, скориставшись критерієм Гурвіца для характеристичного багаточлена матриці \mathbf{A}_{22}

$$C_{z_2}(p) = \det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}_{22}) = c_{02} + c_{12} \cdot p + \dots + c_{k_2} \cdot p^{k_2}.$$

Теорема про експоненціальну стійкість регулятора стану

Якщо існує сталий розв'язок Γ рівняння Ріккати, то об'єкт керування

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

і регулятор стану, що описується рівнянням

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}\mathbf{z}^*(t), \tag{5.21}$$

де

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\Gamma, \tag{5.22}$$

утворюють експоненційно стійку систему, оптимальну за критерієм мінімуму функціонала

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt. \quad (5.23)$$

Підставивши в рівняння об'єкта вираз оптимального керування, отримаємо

$$\mathbf{z}'^*(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] \mathbf{z}^*(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}^*(t), \quad (5.24)$$

де

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} \quad (5.25)$$

– матриця стану оптимальної замкненої системи керування.

Як стверджується в теоремі, ця матриця забезпечує рух об'єкта до нульового стану за експоненціальним законом. Отже, за теоремою Ляпунова, усі корені характеристичного рівняння системи

$$C_{\mathbf{A}_c}(p) = \det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}_c) = c_{0c} + c_{1c} \cdot p + \dots + c_{kc} \cdot p^{k_c} = 0$$

від'ємні або мають від'ємні дійсні частини.

У задачі є ще ряд питань, що вимагають подальшого опрацювання.

По-перше, як впливає з виразів (5.18), (5.21), для формування керування необхідно мати повну інформацію про всі координати стану об'єкта. У той самий час на практиці частина зі змінних стану не може бути доступна для вимірювання. Крім того, на результати вимірювань можуть накладатися випадкові помилки, тобто вони можуть бути неточними.

По-друге, на об'єкт можуть діяти завади, що порушують його роботу. Отже, необхідно з'ясувати, як слід керувати за наявності завад.

Нарешті, як впливи, так і результати вимірювань можуть мати імовірнісний характер.

Ці питання будуть розглянуті далі.

5.3. Приклад синтезу системи керування лінійним стаціонарним об'єктом, оптимальної за критерієм мінімуму квадратичного функціонала якості

Постановка задачі

Динаміка об'єкта керування описується системою диференціальних рівнянь першого порядку (рис. 5.3)

$$y''(t) = u(t), \quad (5.26)$$

де $y(t)$, $y'(t)$ – вихідна величина та її перша похідна;

$u(t)$ – керуюча дія.

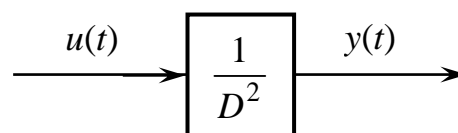


Рис. 5.3. Схема математичної моделі об'єкта керування

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ у кінцевий стан $y(t_k = \infty) = 0$, $y'(t_k = \infty) = 0$, де $t_0 = 0$ – фіксований момент початку, а $t_k = \infty$ – фіксований, але нескінчений момент завершення керування.

До перехідного процесу висуваються вимоги до «енергії» коливань перехідного процесу та плавності руху.

Максимальна величина керуючої дії $u(t)$ формально необмежена, однак при виборі оптимального керування необхідно враховувати «вартість» витрат енергії на керування.

З урахуванням вказаних вимог обрано критерій оптимальності – мінімум квадратичного показника якості керування

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{y^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{y'^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (5.27)$$

де $\frac{1}{y_m^2}$ – ваговий коефіцієнт першого доданка – потужності коливань вихідної величини відносно сталого значення;

τ – деяка константа, що визначає ваговий коефіцієнт другого доданка – потужності коливань першої похідної вихідної величини;

$\frac{1}{u_m^2}$ – ваговий коефіцієнт третього доданка – потужності, що витрачається на керування.

Знайти та проаналізувати закон оптимального керування.

Математична формалізація задачі

Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t). \quad (5.28)$$

Система диференціальних рівнянь стану має вигляд

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= u(t). \end{aligned} \quad (5.29)$$

або у векторно-матричній формі формули (3.25)

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}u(t),$$

де матриці стану \mathbf{A} та керування \mathbf{B} дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$, $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k = \infty) = 0$, $z_2(t_k = \infty) = 0$.

Відповідна схема математичної моделі об'єкта у просторі станів наведена на рис. 5.4.

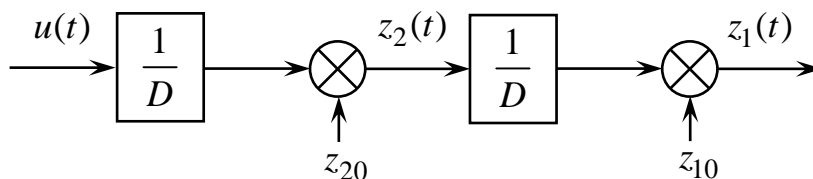


Рис. 5.4. Схема математичної моделі об'єкта у просторі станів

Показник якості керування запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (5.30)$$

де $L(\mathbf{z}(t), u(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right)$ – функція Лагранжа задачі.

У векторно-матричній формі (вираз (5.6)) функція Лагранжа задачі записується як

$$L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right),$$

де

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{u_m^2}. \quad (5.31)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями при фіксованому, але нескінченному часі закінчення керування.

Синтез закону оптимального керування

Для квадратичного показника якості, на відміну від задач на максимальну швидкодію, керованість об'єкта не є необхідною умовою існування оптимального керування. Проте керованість об'єкта є достатньою умовою існування єдиного оптимального керування.

З метою аналізу керованості об'єкта розглянемо матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ і $\mathbf{M} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A} \times \mathbf{B}]$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -1 \neq 0.$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта. Отже, для заданого об'єкта принцип максимуму дає необхідні і достатні умови оптимальності.

На підставі теореми про експоненціальну стійкість регулятора стану та існування сталого розв'язку рівняння Ріккати оптимальне керування визначається виразом (5.21)

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{Kz}^*(t),$$

де \mathbf{K} – матриця коефіцієнтів підсилення, розраховувана за правилом (5.22),

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{\Gamma},$$

де $\mathbf{\Gamma}$ – невід'ємно визначена симетрична матриця, що є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння (5.20)

$$\mathbf{\Gamma A} + \mathbf{A}^T\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma B R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Отже, проблема синтезу розв'язується після відшукування розв'язку матричного алгебраїчного рівняння (5.20).

Використовуючи матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} та \mathbf{R} , складемо матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для визначення симетричної матриці

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix}:$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} - \\ & -u_m^2 \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо систему скалярних рівнянь

$$\begin{cases} u_m^2 \cdot \gamma_{12}^2 - y_m^{-2} = 0; \\ 2\gamma_{12} - u_m^2 \cdot \gamma_{22}^2 + \tau^2 \cdot y_m^{-2} = 0; \\ \gamma_{11} - u_m^2 \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{22} = 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

Послідовно розглядаючи отримані рівняння, знайдемо всі розв'язки цієї системи. Проаналізуємо ці розв'язки.

Перший розв'язок

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\ \gamma_{11} &= u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Другий розв'язок

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= -y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= -u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\ \gamma_{11} &= u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Третій розв'язок

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= -u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\ \gamma_{11} &= -u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Четвертий розв'язок

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= -y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\ \gamma_{11} &= -u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}.\end{aligned}\tag{5.36}$$

Матриця Γ має бути, по-перше, додатно визначеною, по-друге, дійсною.

Умови додатної визначеності

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &> 0; \\ \gamma_{11} \cdot \gamma_{22} - \gamma_{12}^2 &> 0.\end{aligned}\tag{5.37}$$

Умови (5.37) не задовольняють третій і четвертий розв'язки, тому що $\gamma_{11}^{(3,4)} < 0$.

Другий розв'язок не задовольняє одночасно умови додатної визначеності та дійсності матриці Γ .

Тільки перший розв'язок не суперечить усім вимогам, що накладаються на матрицю Γ . Отже, матриця Γ має вигляд

$$\Gamma = \begin{bmatrix} u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} & y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \\ y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{bmatrix}.\tag{5.38}$$

За допомогою виразу (5.38) отримуємо матрицю коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} оптимального регулятора

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} = u_m^2 [0 \ 1] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} & y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \\ y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{bmatrix} = \quad (5.39)$$

$$= u_m^2 \begin{bmatrix} y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{bmatrix} .$$

Отже, оптимальне за мінімумом квадратичного показника якості керування має вигляд

$$u^*(t) = -\mathbf{K} \times \mathbf{z}^*(t) = -\frac{u_m}{y_m} z_1^*(t) + u_m \sqrt{\tau^2 y_m^{-2} + 2y_m^{-1} u_m^{-1}} \cdot z_2^*(t) =$$

$$= -\frac{u_m}{y_m} \left(z_1^*(t) + \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot z_2^*(t) \right). \quad (5.40)$$

Структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування наведена на рис. 5.5.

Як видно, вона являє собою лінійну стаціонарну систему автоматичного керування, що складається з об'єкта керування та регулятора (автоматичного керуючого пристрою) і використовує принцип зворотного зв'язку. Автоматичний керуючий пристрій формує керування на підставі інформації за вихідною величиною $z_1^*(t) = y^*(t)$ і її першою похідною $z_2^*(t) = y'^*(t)$.

Аналіз процесів в оптимальній системі керування

Проаналізуємо процеси в оптимальній системі керування та встановимо зв'язок між показниками якості в перехідному режимі цієї системи та параметрами функціонала якості (5.27).

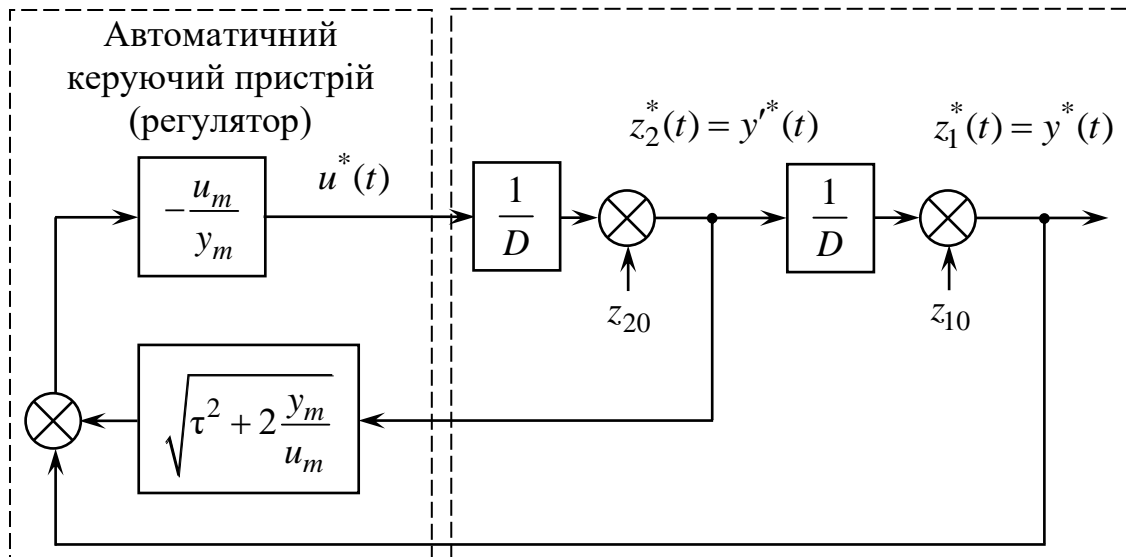


Рис. 5.5. Схема математичної моделі системи автоматичного керування, оптимальної за критерієм мінімуму квадратичного показника якості

Для цього складемо матричне диференціальне рівняння стану (5.24) оптимальної замкненої системи

$$\mathbf{z}'^*(t) = \mathbf{A}_c \times \mathbf{z}^*(t),$$

де \mathbf{A}_c – матриця стану (5.25),

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u_m}{y_m} & -\frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \end{bmatrix}.$$

З матричного рівняння (5.24) перейдемо з урахуванням структури матриці \mathbf{A}_c до системи з двох рівнянь першого порядку

$$z_1^*(t) = z_2^*(t);$$

$$z_2^*(t) = -\frac{u_m}{y_m} z_1^*(t) - \frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot z_2^*(t). \quad (5.41)$$

Якщо врахувати, що $z_1^*(t) = y^*(t)$, $z_2^*(t) = y'^*(t)$, то друге рівняння системи (5.41) набуде вигляду

$$y''^*(t) + \frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot y'^*(t) + \frac{u_m}{y_m} y^*(t) = 0. \quad (5.42)$$

Отже, оптимальна система керування для заданого об'єкта є ланкою другого порядку. Тому її подальший аналіз проведемо користуючись параметрами ланки другого порядку

$$y''^*(t) + 2\xi \cdot \omega_0 \cdot y'^*(t) + \omega_0^2 \cdot y^*(t) = 0,$$

де ω_0 – частота власних незагасальних коливань,

$$\omega_0 = \sqrt{u_m / y_m}, \quad (5.43)$$

ξ – відносний коефіцієнт загасання,

$$\xi = 0,5 \sqrt{\omega_0^2 \cdot \tau^2 + 2}. \quad (5.44)$$

Якщо висувається вимога до мінімальної тривалості перехідного процесу при фіксованій частоті ω_0 власних незагасальних коливань, необхідно обрати $\tau = 0$, тоді $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0,7$. При цьому величина

перерегулювання σ не перевищує 4 %. Якщо перерегулювання неприпустиме, необхідно забезпечити умову $\xi \geq 1$, обравши ваговий коефіцієнт τ так, щоб $\omega_0^2 \cdot \tau^2 \geq 2$.

Отже, вибором параметрів u_m, τ, u_m функціонала якості (5.27) забезпечується оптимальний компроміс між вимогами до процесів у системі автоматичного керування без зміни її структури.

Контрольні запитання

1. У чому полягає специфіка оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?

2. У якому випадку принцип максимуму дає не тільки необхідні, але й достатні умови існування оптимального керування об'єктом?

3. Наведіть необхідні та достатні умови додатної визначеності квадратичної форми.

4. Як за відомими матрицями $\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{G}$ розрахувати матрицю коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} ?

5. Яке рівняння задовольняє матриця \mathbf{G} ?

6. Які умови накладаються на матрицю \mathbf{G} ?

7. Чому керованість об'єкта не є необхідною умовою існування єдиного оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?

8. Як пов'язані квадратичний показник якості і поліпшена інтегральна оцінка?

9. Як можна, залишившись у рамках оптимальної за квадратичним показником якості структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей?

10. Запропонуйте можливий варіант реалізації системи автоматичного керування, наближеної до оптимальної, якщо фактична величина керуючої дії, оптимальної за квадратичним показником якості, буде перевищувати реальні можливості керуючого пристрою (наприклад при обмеженні $|u(t)| \leq U_{\max}$).

11. У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

6. ВІДНОВЛЕННЯ СТАНУ ОБ'ЄКТА КЕРУВАННЯ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИМІРЮВАНЬ

6.1. Характеристика задачі відновлення стану об'єкта

У задачах синтезу оптимальних детермінованих регуляторів стану заданими об'єктами за критеріями максимуму швидкодії і мінімуму квадратичного функціонала якості передбачалося, що повний вектор стану керованого об'єкта є повністю відомим для будь-якого поточного моменту часу. Це зазвичай є нереальним. Насправді можна виміряти лише деяку комбінацію змінних стану об'єкта (рис. 6.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}[\mathbf{z}(t)], \quad (6.1)$$

де $\mathbf{x}(t)$ – p -мірний вектор результатів вимірювань, званий також вектором спостережень. Зазвичай його розмірність p менша за розмірність вектора стану k .

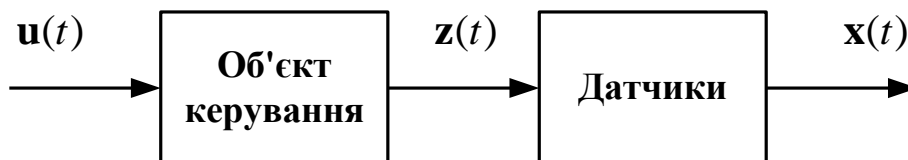


Рис. 6.1. Вимірювання деякої комбінації змінних стану $\mathbf{x}(t)$ об'єкта

У зв'язку з цим виникають такі питання:

1. За яких умов можна відновити поведінку вектора стану $\mathbf{z}(t)$ на кінцевому інтервалі часу, знаючи поведінку вектора вимірювань $\mathbf{x}(t)$ на тому самому інтервалі?

2. Якщо можливе відновлення поведінки вектора стану $\mathbf{z}(t)$ за результатами вимірювань, то як це відновлення проводити?

Нижче наводяться відповіді на поставлені питання стосовно лінійних об'єктів керування, стан яких описується рівнянням вигляду

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (6.2)$$

де $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)]^T$ – k -мірний вектор стану;

$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$ – r -мірний вектор керуючих дій;

\mathbf{A} , \mathbf{B} – матриці стану та керування розмірів $k \times k$ і $k \times r$ відповідно, що не залежать від часу.

Передбачається також, що вектор спостережень (вимірювань) лінійно залежить від вектора стану

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}\mathbf{z}(t), \quad (6.3)$$

де матриця \mathbf{G} має розмір $p \times k$.

6.2. Поняття спостережуваності. Критерій спостережуваності лінійних стаціонарних об'єктів

Відповідь на перше питання становить зміст поняття спостережуваності. З визначення поняття «стан» безпосередньо випливає, що стан $\mathbf{z}(t)$ стає відомим для всіх $t > t_0$, якщо відома початкова умова $\mathbf{z}(t_0)$, оскільки керування $\mathbf{u}(t)$ відомо для $t > t_0$.

Отже, якщо з вимірювань можна визначити початкову умову $\mathbf{z}(t_0)$, то можна відновити стан $\mathbf{z}(t)$ для всіх $t > t_0$. Маючи це на увазі, визначають спостережуваність таким чином.

Неперервна лінійна система називається спостережуваною, якщо початковий стан $\mathbf{z}(t_0)$ можна визначити за даними спостережень $\mathbf{x}(t)$ на інтервалі часу від t_0 до деякого кінцевого t_k .

Якщо це справедливо для будь-якого початкового стану $\mathbf{z}(t_0)$, то система називається *цілком спостережуваною*.

У літературі [2, 5–9, 13] наводиться необхідна і достатня умова повної спостережуваності об'єкта (6.2) за вектором спостережень (6.3).

Критерій спостережуваності Р. Калмана. Стаціонарна неперервна лінійна система (6.2) цілком спостережувана тоді і тільки тоді, коли матриця (матриця спостережуваності) розміру $k \times pk$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{G}^T & (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{G}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{k-1} \mathbf{G}^T \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

має ранг k .

Приклад 1. Двигун постійного струму є об'єктом другого порядку. Якщо за змінні стану обрати струм якоря $z_1(t) = I(t)$ і кутову швидкість обертання $z_2(t) = \Omega(t)$, то матриці стану та керування (входу) двигуна набувають вигляду (п. 3.2, приклад 2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_E}{L} \\ \frac{c_M}{J} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}.$$

Проаналізуємо спостережуваність повного стану двигуна за результатами вимірювань лише струму якоря: $x(t) = z_1(t)$. У цьому випадку результат спостережень

$$x(t) = \mathbf{Gz}(t), \quad (6.5)$$

де $\mathbf{G} = [1 \ 0]$ – матриця спостережень.

Нескладно підрахувати, що матриця спостережуваності

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -R/L \\ 0 & -C_E/L \end{bmatrix}; \quad \det(\mathbf{N}) = -C_E/L \neq 0.$$

Отже, за результатами вимірювань струму якоря принципово можна також визначити кутову швидкість обертання якоря двигуна.

Спробуємо визначити швидкість обертання за результатами вимірювань, наприклад безпосередньо шляхом розв'язання рівняння (6.5) відносно вектора стану. Для цього спочатку помножимо обидві частини (6.5) зліва на \mathbf{G}^T

$$\mathbf{G}^T x(t) = \mathbf{G}^T \mathbf{Gz}(t).$$

Для того щоб розв'язати отримане рівняння відносно $\mathbf{z}(t)$, матриця $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ має припускати операцію обернення $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$. Тоді

$$\mathbf{z}(t) = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T x(t). \quad (6.6)$$

Однак операція обернення можлива лише у випадку, якщо матриця $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ має ранг, рівний двом. Перевіряємо:

$$\det[\mathbf{G}^T \mathbf{G}] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Отже, незважаючи на встановлену принципову можливість, безпосереднє відновлення повного стану двигуна за результатами вимірів струму якоря неможливе.

6.3. Структура системи спостереження

Зміст подальшого викладу дає відповідь на друге питання.

У випадку, коли безпосереднє відновлення повного стану об'єкта за результатами вимірювань неможливе, необхідно використовувати повну інформацію про динамічні властивості об'єкта і зв'язки між координатами стану, які визначаються його рівнянням стану, за допомогою спеціальної системи. Відповідна система називається *системою спостереження* або *спостерігачем стану об'єкта*.

Структура системи спостереження для лінійного об'єкта (6.2) і вектора спостережень (6.3) визначається такою *теоремою* [2, 5–9]:

Для того щоб динамічна система була спостерігачем стану об'єкта

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

за результатами вимірювань

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}\mathbf{z}(t),$$

необхідно і достатньо, щоб її стан $\hat{\mathbf{z}}(t)$ задовольняв диференціальне рівняння

$$\hat{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_0[\mathbf{x}(t) - \mathbf{G}\hat{\mathbf{z}}(t)] \quad (6.7)$$

з початковою умовою $\hat{\mathbf{z}}(t_0) = \mathbf{z}(t_0)$, де $\hat{\mathbf{z}}(t)$ – оцінка вектора стану, що утворюється на виході системи спостереження, а \mathbf{K}_0 – довільна матриця розміру $k \times p$, звана матрицею коефіцієнтів підсилення системи спостереження.

Доведемо достатність. Для цього розглянемо різницю (помилку оцінювання стану)

$$\Delta \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t).$$

Диференціальне рівняння помилки

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{K}_0[\mathbf{x}(t) - \mathbf{G}\hat{\mathbf{z}}(t)] = \\ &= [\mathbf{A} - \mathbf{K}_0\mathbf{G}]\Delta \mathbf{z}(t). \end{aligned}$$

Тоді, якщо $\hat{\mathbf{z}}(t_0) = \mathbf{z}(t_0)$, тобто $\Delta \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0}$, то й $\Delta \mathbf{z}'(t_0) = \mathbf{0}$. Отже, стан $\Delta \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0}$ є станом покою, а тому завжди $\Delta \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{z}(t)$.

На рис. 6.2 наведена схема системи спостереження, що відповідає рівнянням (6.3) і (6.7). Як видно, система спостереження складається з моделі об'єкта і каналу керування, за допомогою якого коректується оцінка стану залежно від співвідношення між результатами вимірювань $\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}\mathbf{z}(t)$ і їхніми оцінками $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}\hat{\mathbf{z}}(t)$, сформованими на виході спостерігача.

На практиці неможливо забезпечити точне виконання початкової умови $\hat{\mathbf{z}}(t_0) = \mathbf{z}(t_0)$ і тому необхідно, щоб при невиконанні її забезпечувалась умова *асимптотичної стійкості спостерігача стану*

$$\lim_{t-t_0 \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}.$$

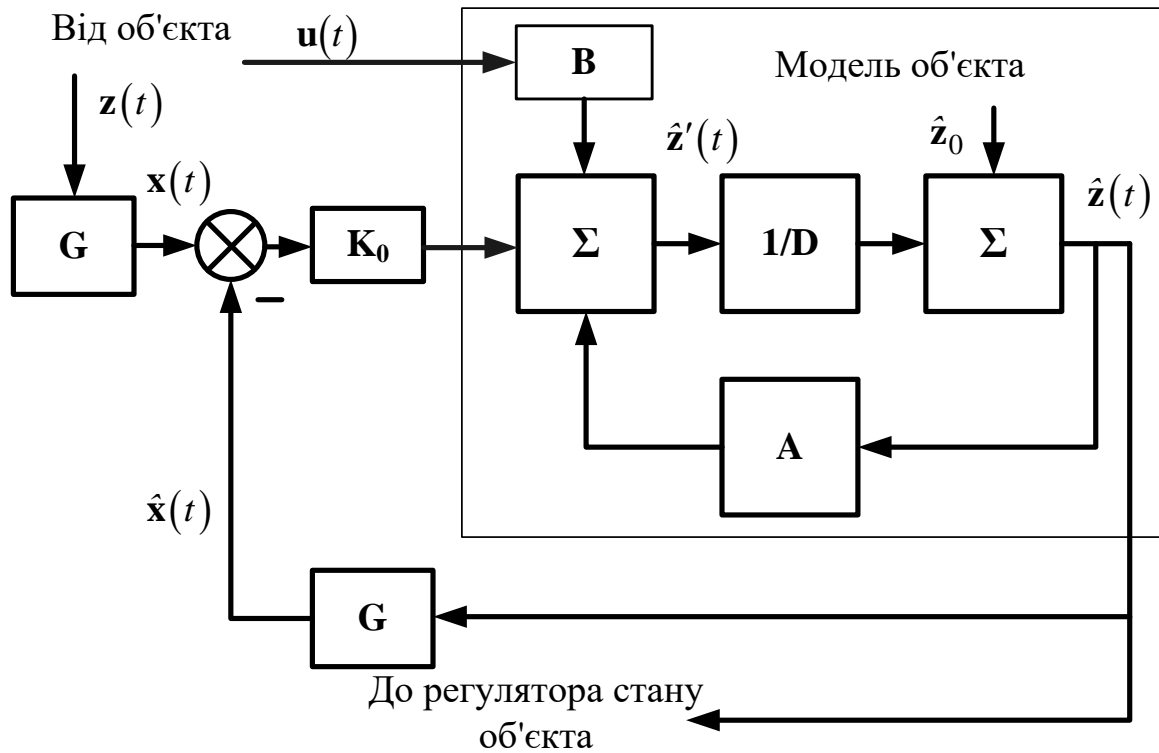


Рис. 6.2. Схема математичної моделі спостерігача стану

У такому разі після закінчення перехідного режиму, обумовленого невідповідністю початкових умов, оцінка стану буде асимптотично прагнути до фактичного стану об'єкта. Зазначену вимогу можна забезпечити шляхом вибору матриці K_0 так, щоб замкнена система спостереження була асимптотично стійкою. Крім того, на спостерігач стану можна надати додаткові умови не лише стійкості, а й забезпечення найкращих показників якості в перехідному режимі.

Сформована у спостерігачі стану оцінка $\hat{z}(t)$ надалі подається до регулятора стану, де вона використовується для створення оптимальної керуючої дії.

Отже, загальна структура оптимальної системи складається зі взаємодіючих між собою об'єкта, датчиків, регулятора і спостерігача стану (рис. 6.3).

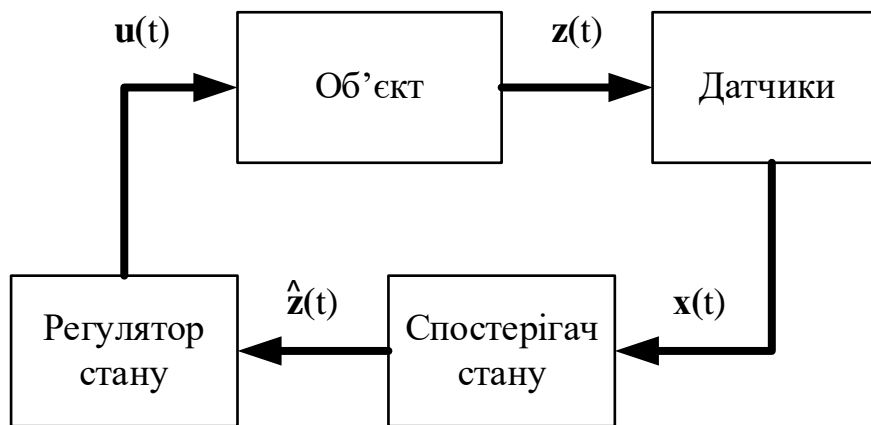


Рис. 6.3. Загальна структура оптимальної системи

6.4. Спостереження стану об'єкта за наявності випадкових помилок вимірювань і збурень стану об'єкта

Перейдемо до розгляду задачі спостереження вектора стану керованого об'єкта, коли на нього разом з керуванням діють випадкові збурення, а результати вимірювань мають у своєму складі випадкові адитивні помилки. Зрозуміло, що в такому випадку стан об'єкта не може бути відновлений точно, тому за результатами вимірювань необхідно дати *статистичну оцінку* стану об'єкта – визначити математичне сподівання та дисперсію помилки результату спостереження. Задачі такого класу відносять до задач *синтезу стохастичних систем* [2, 5–9, 15].

Синтез оптимальної *системи оцінювання стану об'єкта* може бути зроблено після введення припущень щодо збурення, помилок вимірювань і визначення критерію оптимальності. Надалі буде розглянута задача, у якій випадкові процеси, що характеризують збурення стану та помилки вимірювань, являють собою «білі», тобто некорельовані, шуми, розподілені за нормальним законом. Як відомо, «білі» шуми мають математичне сподівання, що дорівнює нулю, і постійну спектральну щільність флуктуацій по всій осі частот. Останнє обумовило назву таких

процесів – «білий» шум. Зазначимо, що внаслідок відсутності кореляції, тобто статистичного зв'язку між сусідніми значеннями «білого» шуму, такий вибір дозволяє розглядати його як первинне джерело, а тому провести синтез системи оцінювання без збільшення розміру вектора стану та зміни математичної моделі об'єкта (п. 3.3).

Надалі будемо вважати, що за наявності випадкових дій рівняння лінійного стаціонарного об'єкта і вимірювань, на відміну від формул (6.2), (6.3), мають вигляд

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_v\mathbf{v}(t), \quad (6.8)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (6.9)$$

де $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_l(t)]^T$ – вектор-стовпець збурень стану об'єкта, що являють собою «білі» шуми, розподілені за нормальним законом з рівним нулю математичним сподіванням і матрицею спектральних щільностей \mathbf{S}_{v0} ;

$\mathbf{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)]^T$ – вектор-стовпець помилок вимірювань, що являють собою «білі» шуми, розподілені за нормальним законом з рівним нулю математичним сподіванням і матрицею спектральних щільностей \mathbf{S}_{f0} ;

\mathbf{B}_v – матриця розміром $k \times l$.

Матриці \mathbf{S}_{v0} , \mathbf{S}_{f0} – симетричні і додатно визначені. Додатна визначеність матриці \mathbf{S}_{f0} означає, що всі компоненти вектора вимірювань мають помилкові складові. Вважається також, що випадкові процеси $\mathbf{v}(t)$ і $\mathbf{f}(t)$ статистично незалежні між собою.

Внаслідок наявності збурень початковий стан об'єкта $\mathbf{z}(t_0)$ вважається випадковим вектором, розподіленим за нормальним законом з відомими математичним сподіванням і матрицею дисперсій:

$$M(\mathbf{z}(t_0)) = \mathbf{m}_{z_0}, \quad M\left[(\mathbf{z}(t_0) - \mathbf{m}_{z_0}) \times (\mathbf{z}(t_0) - \mathbf{m}_{z_0})^T\right] = \mathbf{S}_{z_0}. \quad (6.10)$$

Позначимо оцінку стану як $\hat{\mathbf{z}}(t)$. Вона є випадковим вектором, розподіленим за нормальним законом з математичним сподіванням і матрицею дисперсій

$$M(\hat{\mathbf{z}}(t_0)) = \hat{\mathbf{m}}_{z_0}, \quad M\left[(\hat{\mathbf{z}}(t_0) - \hat{\mathbf{m}}_{z_0}) \times (\hat{\mathbf{z}}(t_0) - \hat{\mathbf{m}}_{z_0})^T\right] = \mathbf{S}_{\hat{z}_0}. \quad (6.11)$$

Помилка оцінювання визначається виразом

$$\Delta\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t),$$

а якість оцінювання характеризується її математичним сподіванням $M(\Delta\mathbf{z}(t)) = \mathbf{m}_{\Delta\mathbf{z}}(t)$ і матрицею центральних моментів другого порядку

$$\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{z}}(t) = M\left(\Delta\mathbf{z}^\circ(t)^T \Delta\mathbf{z}^\circ(t)\right),$$

де $\Delta\mathbf{z}^\circ(t) = \Delta\mathbf{z}(t) - M(\Delta\mathbf{z}(t))$ – центрована випадкова величина помилки.

Задача визначення такої системи, що забезпечує умову $M(\Delta\mathbf{z}(t)) = \mathbf{0}$ і мінімізує вираз

$$\text{tr}[\mathbf{S}_{\Delta z}(t)] = \sum_{i=1}^k M \left[\Delta z_i^{\circ}(t)^2 \right] \Rightarrow \min, \quad (6.12)$$

де $\text{tr}[*]$ – слід матриці, що являє собою суму дисперсій помилок оцінювання координат стану, називається задачею синтезу оптимального оцінювання. Розв'язання цієї задачі було проведено Р. Калманом і Р. Бьюсі [2, 4, 5]. Відповідний результат відомий як *фільтр Калмана*.

Доведено, що система, описувана рівнянням

$$\hat{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_0(t)[\mathbf{x}(t) - \mathbf{G}\hat{\mathbf{z}}(t)], \quad (6.13)$$

буде давати оптимальну оцінку стану об'єкта (6.8) за результатами вимірювань (6.9), якщо її початкова умова

$$\hat{\mathbf{z}}(t_0) = M(\mathbf{z}(t_0)) = \mathbf{m}_{z0}, \quad (6.14)$$

а матриця коефіцієнтів підсилення $\mathbf{K}_0(t)$ визначається виразом

$$\mathbf{K}_0(t) = \mathbf{S}_{\Delta z}(t) \times \mathbf{G}^T \times \mathbf{S}_{f0}^{-1}. \quad (6.15)$$

При цьому система оцінювання є асимптотично стійкою, і матриця центральних моментів другого порядку помилки оцінювання задовольняє матричне рівняння Ріккати

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'_{\Delta z}(t) = & \mathbf{A} \times \mathbf{S}_{\Delta z}(t) + \mathbf{S}_{\Delta z}(t) \times \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_v \times \mathbf{S}_{v0} \times \mathbf{B}_v^T - \\ & - \mathbf{S}_{\Delta z}(t) \mathbf{G}^T \times \mathbf{S}_{f0}^{-1} \times \mathbf{G} \times \mathbf{S}_{\Delta z}(t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

з початковою умовою $\mathbf{S}_{\Delta z}(t_0) = \mathbf{S}_{z0}$.

Схема математичної моделі системи оцінювання стану об'єкта має вигляд, показаний на рис. 6.4.

Нескладно довести, що умова відсутності зсувнення оцінки $M(\Delta z(t)) = \mathbf{0}$ забезпечується вибором структури (6.13) і початкових умов (6.14). За наявності зсувнення початкових умов зі стійкості системи впливає, що після завершення перехідного процесу буде виконуватись умова $\lim_{t-t_0 \rightarrow \infty} \Delta z(t) = \mathbf{0}$, тобто сформована оцінка надалі буде без зсувнення.

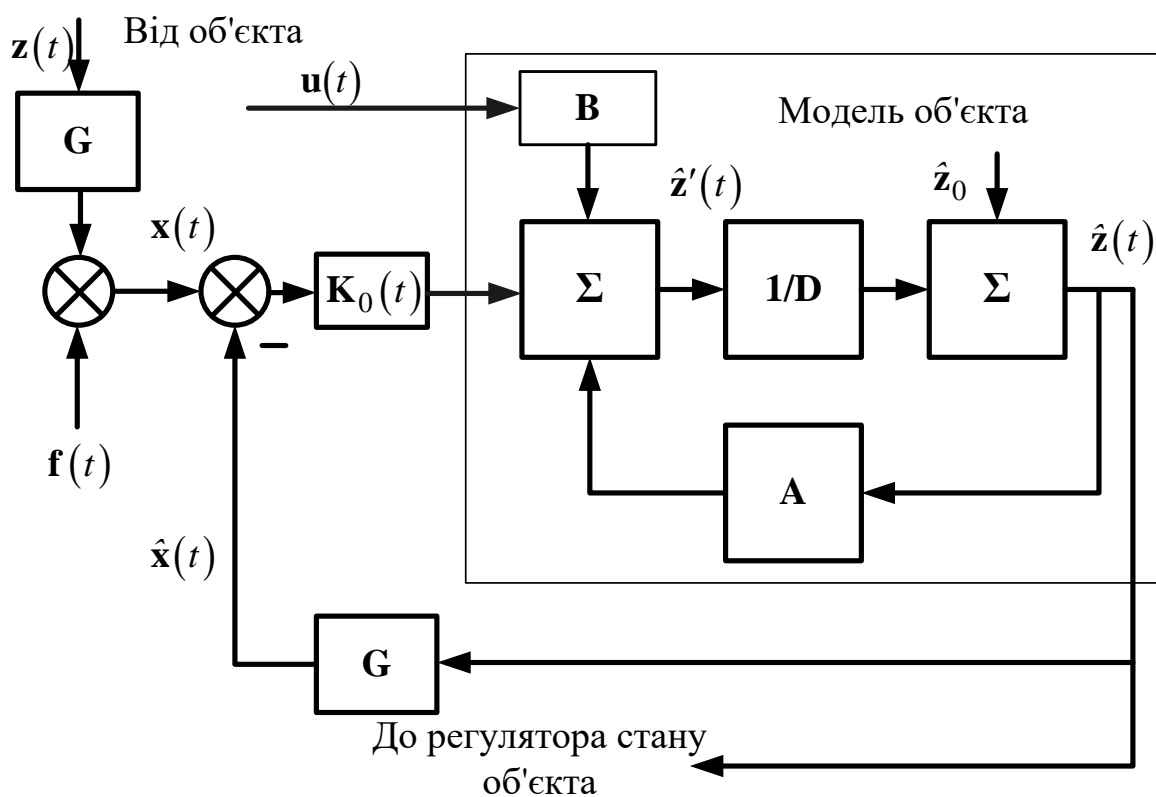


Рис. 6.4. Схема математичної моделі системи оцінювання стану об'єкта

Мінімум дисперсій помилок оцінювання (6.12) забезпечується за рахунок вибору матриці коефіцієнтів підсилення $K_0(t)$ відповідно до формули (6.15). Матрицю коефіцієнтів підсилення можна отримати під час оцінювання, розв'язуючи матричне рівняння Ріккати (6.16) у реальному

масштабі часу. Однак її можна обчислити і заздалегідь, запам'ятати і відтворити під час оцінювання стану.

Зазначимо, що фільтр Калмана (6.13) – (6.16) у будь-який час після початку спостереження є нестационарним, тому що в процесі його функціонування матриця $\mathbf{S}_{\Delta z}(t)$ змінюється, а тому змінюється матриця коефіцієнтів підсилення $\mathbf{K}_0(t)$.

Доведено, що з часом залежність матриці $\mathbf{S}_{\Delta z}(t)$ від початкових умов зменшується. Для стационарного об'єкта і стационарних збурень і помилок спостереження вона прагне постійного значення $\mathbf{S}_{\Delta z}(t) \rightarrow \mathbf{S}_{\Delta z}$, що є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння (рівняння Лур'є)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{S}_{\Delta z0} + \mathbf{S}_{\Delta z0} \times \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_v \times \mathbf{S}_{v0} \times \mathbf{B}_v^T = \mathbf{S}_{\Delta z0} \mathbf{G}^T \times \mathbf{S}_{f0}^{-1} \times \mathbf{G} \times \mathbf{S}_{\Delta z0}. \quad (6.17)$$

У разі стационарного об'єкта, стационарних збурень і помилок спостереження розв'язку рівняння Лур'є відповідає матриця коефіцієнтів підсилення з постійними значеннями $\mathbf{K}_0(t) \rightarrow \mathbf{K}_0$. При цьому система оцінювання має постійні параметри та є асимптотично стійкою. На практиці дуже привабливо використовувати таку систему оцінювання, оскільки її легко реалізувати.

Зазначимо, що наявність члена \mathbf{S}_{f0}^{-1} у виразах (6.16), (6.17) потребує, щоб усі результати вимірювань були з помилками.

Можна показати, що за відсутності збурень керуючих дій ($\mathbf{S}_{v0} = \mathbf{0}$) помилка оцінювання з часом прагне до нуля, внаслідок чого $\mathbf{K}_0(t) \rightarrow \mathbf{0}$, і фільтр «відключається» від датчиків. Таку поведінку фільтра Калмана можна пояснити тим, що за відсутності збурень керуючих дій стан об'єкта детермінований, і точність його визначення з часом зростає внаслідок накопичення інформації, а тому її цінність зменшується.

Непогодження $\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{G}\hat{\mathbf{z}}(t)$, що отримало назву *процесу відновлення*, являє собою вхідний процес, який використовується для керування оцінкою. Доказано, що при повній відповідності фільтра (6.13)–(6.16) реальним процесам в об'єкті та вимірювачах процес відновлення є «білим» гаусівським шумом зі спектральною щільністю \mathbf{S}_{f0} . Це можна пояснити тим, що в оптимальній системі в повному обсязі використовується інформація про динамічні властивості об'єкта і результати вимірювань за рахунок вибору оптимальних структури та параметрів. Відмінність процесу відновлення від «білого» шуму свідчить про наявність невідповідностей реальних процесів і моделей, закладених у структуру фільтра. Тому аналіз статистичних характеристик процесу відновлення може використовуватись для зміни параметрів і(або) структури системи оцінювання, тобто для побудови *адаптивних систем* (фільтрів).

Приклад 2. Система диференціальних рівнянь стану об'єкта має вигляд

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= u(t) + v(t), \end{aligned} \tag{6.18}$$

або у векторно-матричній формі

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}u(t) + v(t),$$

де \mathbf{A} – матриця стану;

\mathbf{B} – матриця керування,

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$v(t)$ – збурення стану об'єкта, що є випадковим процесом типу «білий» шум з рівним нулю математичним сподіванням і спектральною щільністю S_v .

Початковий стан об'єкта вважається випадковим, розподіленим за нормальним законом з відомими математичним сподіванням і матрицею дисперсій

$$\mathbf{m}_{z0} = \begin{bmatrix} m_{z10} \\ m_{z20} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{z0} = \begin{bmatrix} S_{z10} & 0 \\ 0 & S_{z20} \end{bmatrix}.$$

Для синтезу оптимального регулятора необхідно обрати мінімальну кількість вимірюваних змінних стану та розробити систему оцінювання стану об'єкта.

У першому варіанті розглянемо можливість використання вимірів координати $z_1(t)$

$$x_1(t) = z_1(t) + f_1(t) = \mathbf{G}_1 \mathbf{z}(t) + f_1(t), \quad (6.19)$$

де $f_1(t)$ – помилка вимірювань, що є випадковим процесом типу «білий» шум з рівним нулю математичним сподіванням і спектральною щільністю S_{f1} ;

$\mathbf{G}_1 = [1 \ 0]$ – матриця спостережень координати $z_1(t)$.

У другому варіанті розглянемо можливість використання вимірів змінної $z_2(t)$ – похідної (швидкості зміни) координати $z_1(t)$

$$x_2(t) = z_2(t) + f_2(t) = \mathbf{G}_2 \mathbf{z}(t) + f_2(t), \quad (6.20)$$

де $f_2(t)$ – помилка вимірювань, що є випадковим процесом типу «білий» шум з рівним нулю математичним сподіванням і спектральною щільністю S_{f2} ;

$\mathbf{G}_2 = [0 \ 1]$ – матриця спостережень координати $z_2(t)$.

Перевіримо спостережуваність:

$$\mathbf{N}_1 = [\mathbf{G}_1^T \ \mathbf{A}^T \mathbf{G}_1^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \det \mathbf{N}_1 = 1;$$

$$\mathbf{N}_2 = [\mathbf{G}_2^T \ \mathbf{A}^T \mathbf{G}_2^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \det \mathbf{N}_2 = 0.$$

Отже, відновлення стану об'єкта за результатами вимірювань швидкості принципово неможливе, на відміну від вимірювання координати.

Процедура формування оптимальної оцінки вектора стану об'єкта (6.18) за вимірюваннями координати (6.19) визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \hat{z}'_1(t) &= \hat{z}_2(t) + k_1(t)[x_1(t) - \hat{z}_1(t)]; \\ \hat{z}'_2(t) &= u(t) + k_2(t)[x_1(t) - \hat{z}_1(t)], \end{aligned} \tag{6.21}$$

де $k_1(t)$, $k_2(t)$ – коефіцієнти підсилення, що розраховуються відповідно до співвідношень (6.15), (6.16),

$$\begin{aligned} k_1(t) &= S_{11}(t)/S_{f1}; \\ k_2(t) &= S_{12}(t)/S_{f1}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Тут $S_{11}(t) = M \left\{ \Delta z_1^\circ(t)^2 \right\}$ – дисперсія помилки оцінювання координати $z_1(t)$, $S_{12}(t) = M \left\{ \Delta z_1^\circ(t) \Delta z_2^\circ(t) \right\}$ – взаємний центральний момент помилок другого порядку.

Відповідно до виразів (6.14), (6.16) початкові умови фільтра Калмана

$$\hat{z}_1(t_0) = m_{z10}; \quad \hat{z}_2(t_0) = m_{z20};$$

$$S_{11}(t_0) = S_{z10}; \quad S_{12}(t_0) = 0; \quad S_{22}(t_0) = S_{z20}.$$

Проведемо аналіз отриманих результатів.

З аналізу виразів (6.22) можна зробити висновок, що коефіцієнти підсилення суттєво зменшуються при збільшенні інтенсивності S_{f1} похибок вимірювань. Якщо з будь-яких причин вимірювання зникають ($S_{f1} \rightarrow \infty$), то вони прагнуть до нуля, і тому вхід системи оцінювання автоматично відключається від джерела інформації. У цьому випадку система оцінювання продовжує роботу **в режимі екстраполяції** за результатами, отриманими раніше.

У сталому режимі дисперсії $S_{11}(t) = M \left\{ \Delta z_1^\circ(t)^2 \right\}$ помилки оцінювання координати $z_1(t)$, $S_{22}(t) = M \left\{ \Delta z_2^\circ(t)^2 \right\}$ помилки оцінювання координати $z_2(t)$ і взаємний центральний момент другого порядку $S_{12}(t) = M \left\{ \Delta z_1^\circ(t) \Delta z_2^\circ(t) \right\}$ прагнуть постійних значень, які можна знайти з рівняння Лур'є (6.17)

$$S_{11} = \sqrt{2S_{f1}\sqrt{S_v S_{f1}}}, \quad S_{12} = \sqrt{S_v S_{f1}}, \quad S_{22} = \sqrt{2\sqrt{(S_v S_{f1})^3} / S_{f1}}.$$

Як й очікувалось, при оптимальному оцінюванні величини дисперсій помилок зростають при збільшенні інтенсивності S_v збурень, що діють на

об'єкт, і збільшенні інтенсивності S_{f1} похибок вимірювань. За відсутності збурень керуючих дій ($S_v \rightarrow 0$) дисперсії помилок оцінювання прагнуть до нуля, при цьому коефіцієнти підсилення також прагнуть до нуля, тому що зникає потреба в подальших вимірюваннях, і вхід системи оцінювання автоматично відключається від джерела інформації. У цьому випадку система оцінювання, як і при $S_{f1} \rightarrow \infty$, також продовжує роботу в режимі екстраполяції.

На рис. 6.5 наведено повну структуру стохастичної системи, оптимальної за квадратичним критерієм, з урахуванням розробленої системи оцінювання стану об'єкта.

Повна структура оптимальної стохастичної системи містить:

- об'єкт керування, що складається з двох інтеграторів (z_{10}, z_{20} – початкові умови, $v(t)$ – збурення – флуктуаційна складова керування);
- блок вимірювань координати $z_1^*(t)$ з похибками $f(t)$;
- систему оцінювання стану, що формує оцінки $\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t)$ змінних стану об'єкта за результатами вимірювань $x(t)$ ($\hat{z}_{10}, \hat{z}_{20}$ – математичні сподівання початкових умов координат стану);
- оптимальний регулятор, що формує керування $u^*(t)$ на підставі інформації, отриманої від системи оцінювання стану.

Як доведено [2, 5–8], за наявності збурень $v(t)$ керуючих дій оптимальний стохастичний регулятор має таку саму структуру, як детермінований регулятор, розглянутий у прикладі п. 5.3, однак його параметри $k_1(t), k_2(t)$ розраховуються з урахуванням потужності збурень S_v . Доведено також, що синтез загальної структури оптимальної лінійної стохастичної системи може проводитись роздільно для регулятора та системи оцінювання.

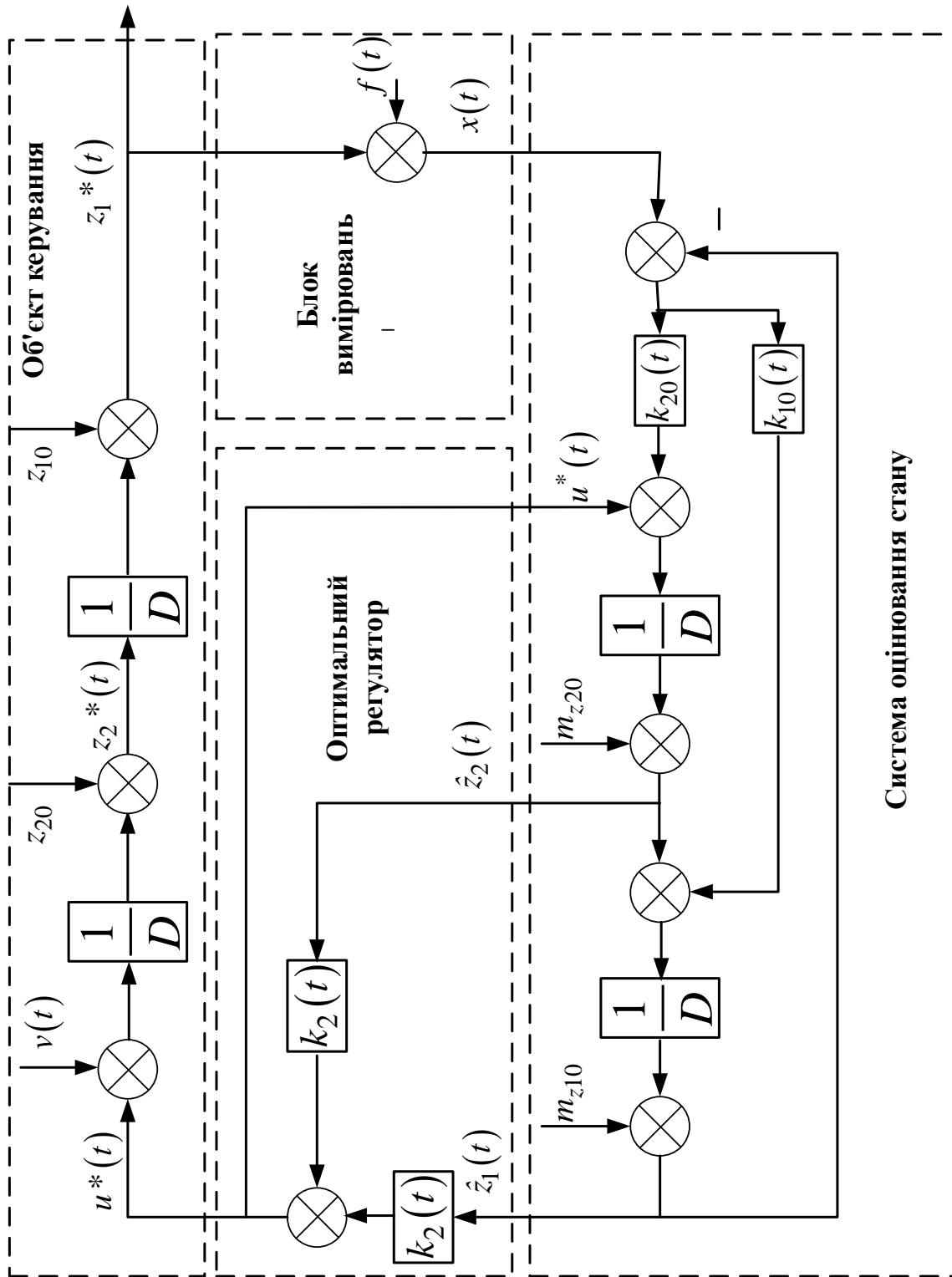


Рис. 6.5. - Структура оптимального стохастичного регулятора стану

6.5. Оцінювання стану об'єкта за результатами дискретних вимірювань

6.5.1. Структура цифрових систем автоматичного керування

У зв'язку з широким розповсюдженням мікропроцесорної техніки та сучасних інформаційних технологій у системах керування рухом поїздів, актуальною стає задача розроблення цифрових методів керування об'єктами.

Типова функціональна структура системи автоматичного керування, у складі якої використовується цифровий керуючий пристрій (надалі *цифрової САК*), наведена на рис. 6.6.

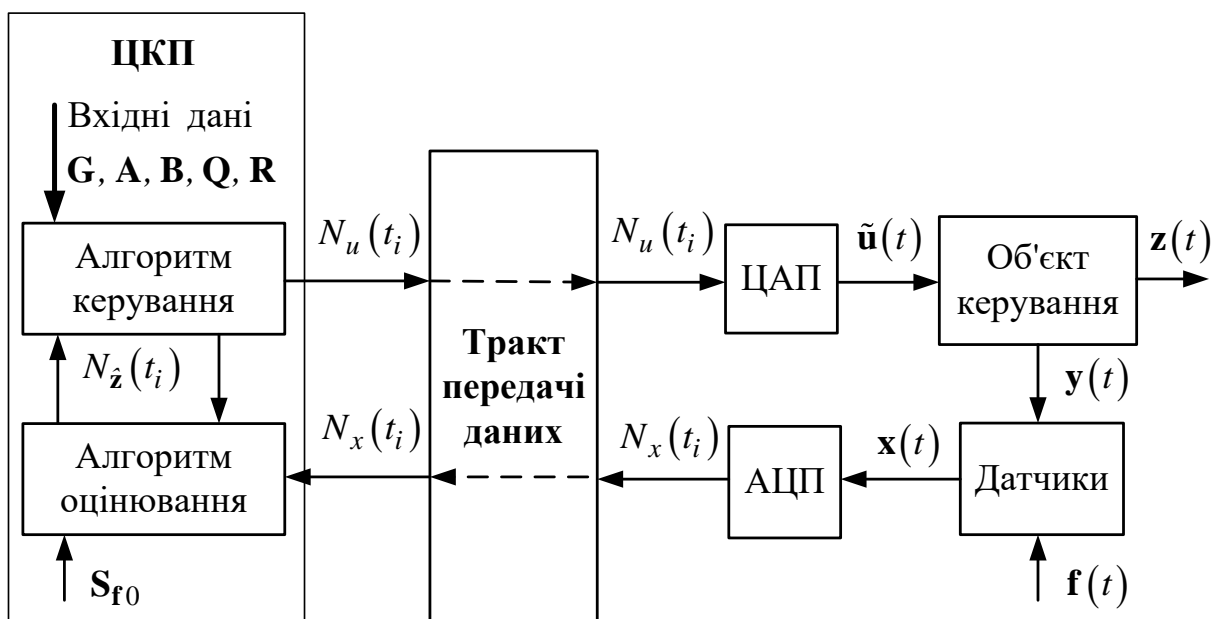


Рис. 6.6. Функціональна структура цифрової САК

Цифрова САК має у своєму складі такі компоненти:

- цифровий керуючий пристрій;
- тракт передачі даних;
- цифроаналоговий і аналого-цифровий перетворювачі (ЦАП, АЦП);

- об'єкт керування;
- вимірювальні датчики.

Цифровий керуючий пристрій (ЦКП) фізично являє собою обчислювальну структуру, виконану на базі ЕОМ або мікроконтролерів. У ЦКП реалізуються два основних алгоритми – алгоритм керування та алгоритм оцінювання.

Алгоритм керування формує дискретні кодові послідовності $N_u(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, що містять інформацію про керуючі дії, необхідні для реалізації заданого алгоритму функціонування системи. Для виконання розрахунків в алгоритмі використовуються дані про задавальну дію, математичну модель об'єкта **A, B**, критерій оптимальності **Q, R** та інша необхідна інформація, а також оцінка стану об'єкта $\hat{z}(t_i)$.

Оцінка стану об'єкта формується в алгоритмі оцінювання шляхом обробки дискретних кодових послідовностей $N_x(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, що поступають з колу зворотного зв'язку від датчиків, підключених до об'єкта керування. Для виконання розрахунків в алгоритмі оцінювання використовуються дані про початкові умови, математичну модель об'єкта **A, B**, характеристики точності вимірювань **S_{f0}** та інша необхідна інформація.

Тракт передачі даних являє собою сукупність елементів, необхідних для формування, передачі та приймання сигналів, за допомогою яких забезпечується зв'язок між ЦКП та об'єктом керування (модеми, генератори, лінії зв'язку, підсилювачі, приймачі та ін.). Основними вимогами до тракту є мінімальні затримки в часі при передачі даних і відсутність спотворень інформації. Для виконання цих вимог використовуються різні методи кодування, модуляції та селекції сигналів. Якщо зазначені вимоги забезпечені, то вихідна інформація збігається з вхідною.

Цифро-аналоговий перетворювач здійснює масштабне перетворення вхідної дискретної цифрової послідовності кодів керування $N_u(t_i)$ на кусково-постійну величину – керуюча дія $\tilde{u}(t)$ (рис. 6.7). Нескладно переконатися, що вихідна величина ЦАП може розглядатись як суперпозиція кусково-постійних функцій на інтервалах часу (t_0, t_1) , (t_1, t_2) , ..., величина яких пропорційна числовому значенню коду керування

$$\tilde{u}(t) \Big|_{t \in (t_i, t_{i+1})} = k_u \cdot N_u(t_i), \quad (6.23)$$

де k_u – масштабний коефіцієнт.

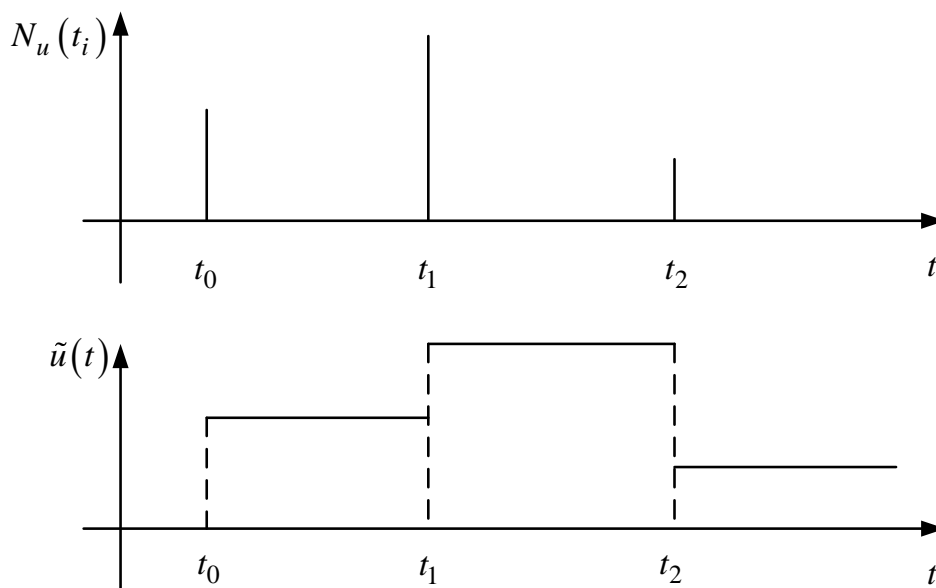


Рис. 6.7. Процеси в ЦАП

Аналого-цифровий перетворювач здійснює перетворення неперервної величини – сигналу від датчика $x(t)$ на послідовність цифрових кодів $N_x(t_i)$. Під час перетворення у АЦП, незалежно від його технічного виконання, здійснюються такі математичні операції:

- часова дискретизація неперервної вхідної величини;
- квантування за рівнем.

Внаслідок часової дискретизації цифровий код на виході АЦП відповідає значенням неперервного вхідної дії $x(t)$ тільки в дискретні моменти часу t_0, t_1, t_2, \dots

$$N_x(t_i) \sim x(t) \Big|_{t=t_i}. \quad (6.24)$$

Квантування за рівнем обумовлено тим, що вхідна дія $x(t)$ є фізичною величиною визначеної розмірності (вольт, ампер, герц та ін.) з незліченною множиною значень $x \in (-x_0, x_0)$, а вихідний цифровий код АЦП $N_x(t_i)$ є безрозмірною цілочисловою величиною зі скінченною множиною значень $N_x \in (-2^{b-1}, 2^{b-1})$, де b – кількість розрядів АЦП. Квантування за рівнем полягає в тому, що множина значень вхідної величини x поділяється на окремі відрізки довжиною q (крок квантування, або «ціна» молодшого розряду АЦП), кожному з яких на виході АЦП відповідає одне ціле число. Найбільш часто застосовується метод **квантування з округленням до найближчого цілого числа**, що дає найбільшу точність перетворення аналогової величини на цифровий код (рис. 6.8).

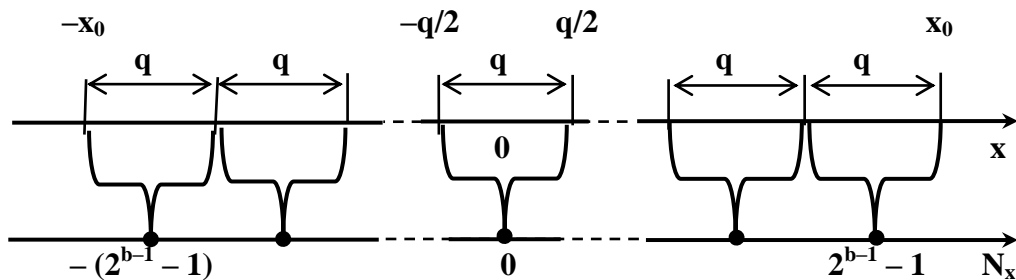


Рис. 6.8. Квантування з округленням до найближчого цілого числа

Процедура створення цифрового коду з округленням до найближчого цілого числа визначається виразом

$$N_x(t_i) = \text{int} \left(\frac{x(t) \Big|_{t=t_i}}{q} + 0,5 \right), \quad (6.25)$$

де $\text{int}(\ast)$ – оператор виділення цілої частини числа.

При квантуванні з округленням до найближчого цілого числа виникає помилка округлення δN , що має середнє значення, що дорівнює нулю, і дисперсію $\sigma_{\delta N}^2 = 1/12$ [2].

Для того щоб знехтувати помилками округлення, необхідно обирати малий крок квантування, що досягається за рахунок збільшення розрядності АЦП. У цьому випадку процедуру (6.25) можна розглядати лише як процедуру зміни масштабу

$$N_x(t_i) = k_x \cdot x(t) \Big|_{t=t_i}, \quad (6.26)$$

де $k_x = 1/q$ – масштабний коефіцієнт АЦП.

6.5.2. Дискретні моделі об'єктів неперервної дії

Математична модель об'єктів неперервної дії записується у вигляді системи диференціальних рівнянь стану (3.1) або (3.2). Однак алгоритми керування та оцінювання, що використовуються у ЦКП, функціонують з дискретними послідовностями цифрових кодів $N_x(t_i)$, що отримуються з АЦП, і формують дискретні послідовності цифрових кодів $N_u(t_i)$, що передаються на ЦАП. Тому виникає необхідність заміни диференціальних

рівнянь стану об'єкта еквівалентними рівняннями, що пов'язують між собою дискретні послідовності вхідних і вихідних величин.

Найпростіший спосіб полягає в заміні похідної від вектора стану на наближений вираз

$$\mathbf{z}'(t) \cong \frac{\mathbf{z}(t_i) - \mathbf{z}(t_{i-1})}{\Delta t_i}, \quad (6.27)$$

де $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ – інтервал часу між сусідніми дискретними числами.

За такою заміною диференціальне рівняння (3.2) об'єкта неперервної дії

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

приводиться або до *різницевого рівняння*

$$\mathbf{z}(t_i) - \mathbf{z}(t_{i-1}) = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(t_{i-1}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(t_{i-1})] \cdot \Delta t_i,$$

або після нескладних перетворень до *рекурентного рівняння «вхід-вихід»*

$$\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{\Phi}(\Delta t_i) \cdot \mathbf{z}(t_{i-1}) + \mathbf{\Theta}(\Delta t_i) \cdot \mathbf{x}(t_{i-1}), \quad (6.28)$$

де

$$\mathbf{\Phi}(\Delta t_i) = \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \Delta t_i \quad (6.29)$$

– *перехідна матриця стану* (\mathbf{I} – одинична матриця);

$$\mathbf{\Theta}(\Delta t_i) = \mathbf{B} \cdot \Delta t_i \quad (6.30)$$

– матриця входів.

Розглянутий спосіб можна використовувати у випадках, коли координати стану достатньо слабо змінюються протягом інтервалу часової дискретизації Δt_i , тобто похідні та різниці несуттєво відрізняються між собою.

У загальному випадку перехідну матрицю стану необхідно розраховувати як *матричний експоненціал* [2]

$$\begin{aligned}\Phi(\Delta t_i) &= \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \Delta t_i + \frac{(\mathbf{A} \cdot \Delta t_i)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A} \cdot \Delta t_i)^3}{3!} + \dots = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A} \cdot \Delta t_i)^m}{m!} = e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t_i}.\end{aligned}$$

Однак навіть така заміна не веде до повної еквівалентності процесів в об'єкті неперервної дії та її дискретному еквіваленті. Проблема полягає в тому, що перехід від неперервних дій до дискретних здійснюється шляхом часової дискретизації неперервної функції (обвідної) за правилом (6.24).

Дискретні функції однозначно визначаються з неперервних, однак за отриманими значеннями дискретних функцій неможливо однозначно відновити вигляд неперервних дій. Як показано на рис. 6.9, у загальному випадку одній дискретній функції може відповідати нескінченна множина неперервних. Тому необхідні додаткові умови, що гарантують принципову можливість відновлення неперервної функції за дискретними відліками.

Вказані умови сформульовані в теоремі В. А. Котельникова: *принципова можливість відновити неперервну функцію $x(t)$ за дискретними значеннями функції $N_x(t_i)$ існує лише в тому випадку, якщо ширина спектра обвідної $\Delta\omega_x$ задовольняє нерівність*

$$\Delta\omega_x < \Omega_{\min} / 2, \quad (6.31)$$

де $\Omega_{\min} = 2\pi/\Delta t_{i\max}$ – мінімальна циклічна частота часової дискретизації, рад/с.

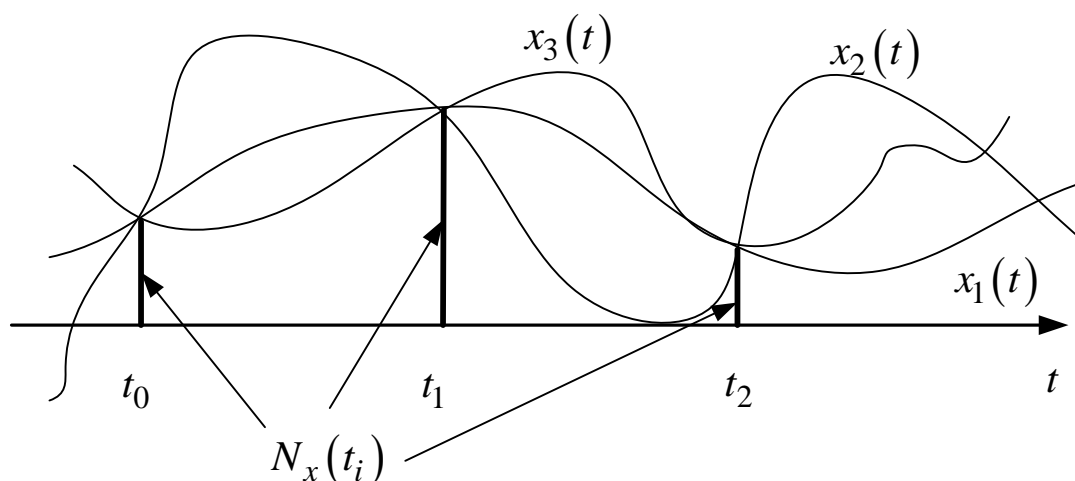


Рис. 6.9. Можливі види обвідних

Вимога (6.31), що пов'язує максимальну частоту часової дискретизації з шириною спектра обвідної $\Delta\omega_x$, по суті накладає умову на максимальний інтервал часової дискретизації $\Delta t_{i\max}$, необхідний для забезпечення коректної роботи цифрової САК. За її виконанням неперервна дія за інтервал часу $\Delta t_i < \Delta t_{i\max}$ не може набути суттєвих змін, і тому в більшості випадків цілком достатньо скористатись еквівалентної дискретною моделлю (6.28) – (6.30).

6.5.3. Оптимальний лінійний алгоритм оцінювання стану об'єкта за результатами дискретних вимірювань

В основі побудови оптимальних алгоритмів оцінювання стану динамічного об'єкта лежать модель динаміки його руху та модель

спостережень. Вищезазначені моделі повністю визначають структуру та якість алгоритму оцінювання стану.

Будемо вважати, що результати дискретних вимірювань змінних стану відображуються рівнянням

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{G}\mathbf{z}(t_i) + \boldsymbol{\eta}(t_i), \quad (6.32)$$

де \mathbf{G} – матриця спостережень;

$\boldsymbol{\eta}$ – вектор-стовпець шумів спостережень (помилки спостережень) – послідовність некорельованих випадкових величин, розподілених за нормальним законом з відомими математичним сподіванням \mathbf{m}_η і матрицею дисперсій $\mathbf{S}_\eta(t_i)$.

Для синтезу алгоритму оцінювання за результатами дискретних вимірювань модель динаміки об'єкта (6.9) перетворена до еквівалентної дискретної моделі, що набуває вигляду

$$\mathbf{z}(t_i) = \boldsymbol{\Phi}(\Delta t_i) \cdot \mathbf{z}(t_{i-1}) + \boldsymbol{\Theta}(\Delta t_i) \cdot \mathbf{u}(t_{i-1}) + \mathbf{Q}(\Delta t_i) \cdot \boldsymbol{\xi}(t_{i-1}), \quad (6.33)$$

де $\boldsymbol{\Phi}(\Delta t_i)$ – перехідна матриця стану;

$\boldsymbol{\Theta}(\Delta t_i)$ – матриця керування;

$\mathbf{Q}(\Delta t_i)$ – матриця збудження;

$\boldsymbol{\xi}$ – шум збудження – послідовність некорельованих випадкових величин, розподілених за нормальним законом з відомими математичним сподіванням \mathbf{m}_ξ і матрицею дисперсій $\mathbf{S}_{\xi 0}$;

\mathbf{u} – вектор-стовпець керуючих дій.

Початкове значення вектора стану $\mathbf{z}(t_0)$ вважається випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з відомими математичним сподіванням $\mathbf{m}_z(t_0) = \mathbf{m}_{z0}$ і матрицею центральних моментів другого порядку $\mathbf{S}_z(t_0) = \mathbf{S}_{z0}$.

Оптимальний алгоритм оцінювання стану об'єкта (6.32) за результатами спостережень (6.33) визначається рекурентними співвідношеннями [3, 7, 9]

$$\hat{\mathbf{z}}_e(t_i) = \Phi(\Delta t_i) \hat{\mathbf{z}}(t_{i-1}), \quad (6.34)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(t_i) = \hat{\mathbf{z}}_e(t_i) + \mathbf{K}_0(t_i) [\mathbf{x}(t_i) - \hat{\mathbf{z}}_e(t_i)], \quad (6.35)$$

де $\hat{\mathbf{z}}_e(t_i)$ – математичне сподівання оцінки стану до моменту чергових вимірювань (апріорне оцінювання);

$\hat{\mathbf{z}}(t_i)$ – оцінка стану з урахуванням чергових вимірювань (апостеріорне оцінювання);

$\mathbf{K}_0(t_i)$ – матриця оптимальних коефіцієнтів підсилення.

Розрахунок матриці $\mathbf{K}_0(t_i)$ проводиться на кожному кроці з урахуванням точності поточних вимірювань $\mathbf{S}_\eta(t_i)$ за такими рекурентними рівняннями:

1) рівняння для розрахунку матриці $\mathbf{M}(t_i)$ коваріацій помилок апріорного оцінювання вектора стану

$$\mathbf{M}(t_i) = \Phi(\Delta t_i) \mathbf{P}(t_{i-1}) \Phi^T(\Delta t_i) + \mathbf{Q}(\Delta t_i) \mathbf{S}_{\xi 0} \mathbf{Q}^T(\Delta t_i); \quad (6.36)$$

2) рівняння для визначення матриці коваріацій помилок апостеріорного оцінювання вектора стану

$$\mathbf{P}(t_i) = \mathbf{M}(t_i) - \Delta\mathbf{M}(t_i), \quad (6.37)$$

у якому $\Delta\mathbf{M}(t_i)$ – матриця, що визначає зменшення апріорних помилок за результатами чергових вимірювань, яка розраховується за виразом

$$\Delta\mathbf{M}(t_i) = \mathbf{M}(t_i)\mathbf{G}^T [\mathbf{G}\mathbf{M}(t_i)\mathbf{G}^T + \mathbf{S}_\eta]^{-1} \mathbf{G}\mathbf{M}(t_i); \quad (6.38);$$

3) рівняння для визначення матриці оптимальних коефіцієнтів підсилення

$$\mathbf{K}_0(t_{ni}) = \mathbf{M}(t_i)\mathbf{G}^T [\mathbf{G}\mathbf{M}(t_i)\mathbf{G}^T + \mathbf{S}_\eta]^{-1}. \quad (6.39)$$

Початкові умови для проведення розрахунків:

- для рівнянь (6.34), (6.35) $\hat{\mathbf{z}}_e(t_0) = \mathbf{m}_z(t_0) = \mathbf{m}_{z0}$;
- для рівнянь (6.36) – (6.39) $\mathbf{M}(t_0) = \mathbf{S}_{z0}$.

Наведений алгоритм відомий як дискретний алгоритм фільтрації Калмана [2, 7–9]. Блок-схема оптимального лінійного рекурентного алгоритму оцінювання стану об'єкта наведено на рис. 6.10.

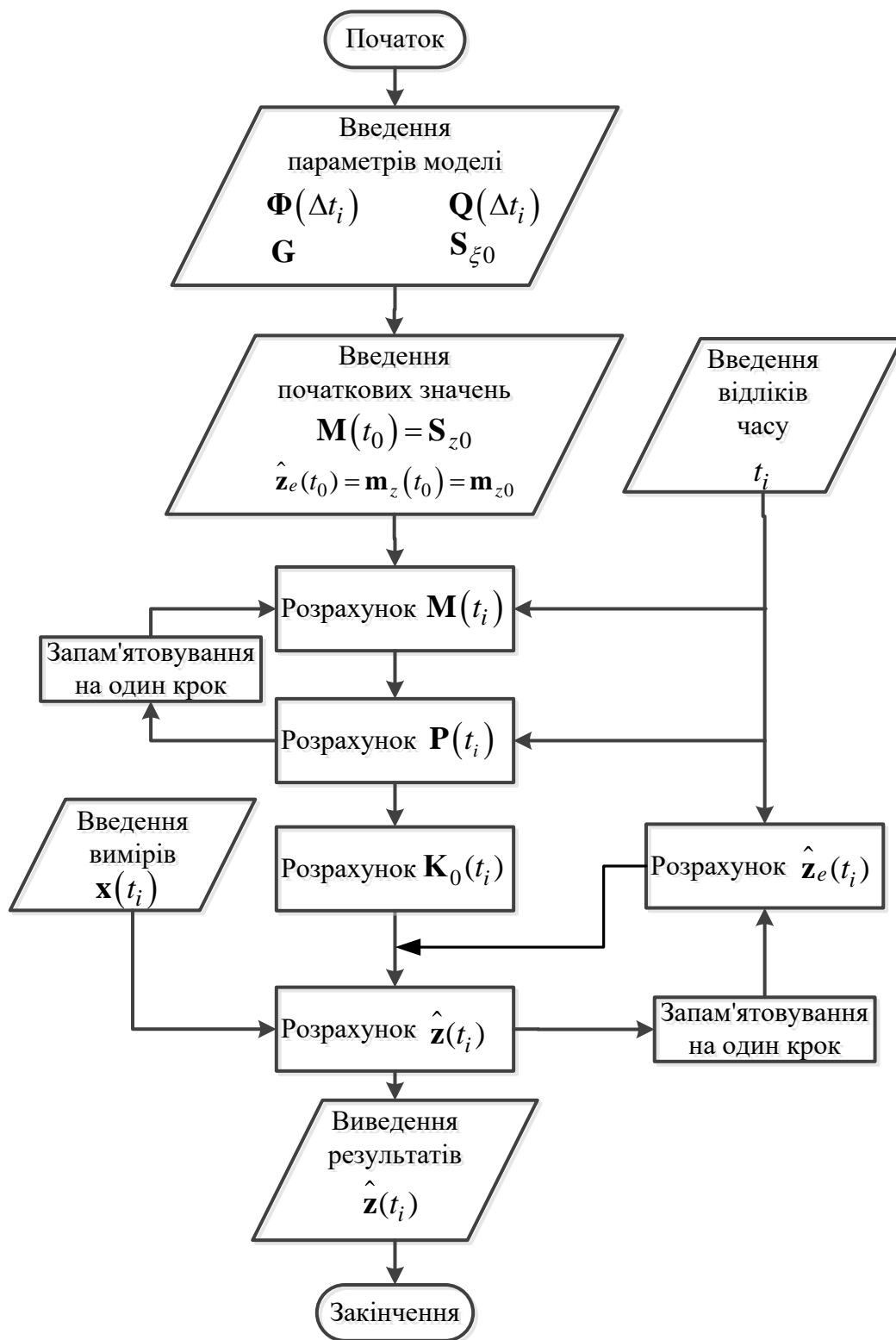


Рис. 6.10. Блок-схема оптимального лінійного рекурентного алгоритму оцінювання стану об'єкта

Контрольні запитання

1. Чи існує на практиці можливість вимірювання всіх компонентів вектора стану?

2. У якому випадку існує принципова можливість відновити поведінку вектора стану $\mathbf{z}(t)$ на кінцевому інтервалі часу, знаючи поведінку вектора вимірювань $\mathbf{x}(t)$ на тому самому інтервалі?

3. Поясніть поняття спостережуваності об'єкта (неперервної лінійної системи).

4. Наведіть критерій спостережуваності об'єкта Р. Калмана.

5. Сформулюйте необхідні та достатні умови того, щоб динамічна система була спостерігачем стану об'єкта.

6. Наведіть схему математичної моделі спостерігача стану.

7. Як визначається матриця коефіцієнтів підсилення $\mathbf{K}_0(t)$ фільтра Р. Калмана?

8. У чому полягає особливість визначення матриці коефіцієнтів підсилення $\mathbf{K}_0(t)$ фільтра Р. Калмана для стаціонарного об'єкта, стаціонарних збурень і помилок спостереження?

9. До чого прагнуть коефіцієнти підсилення $\mathbf{K}_0(t)$ фільтра Р. Калмана за відсутності збурень керуючих дій ($\mathbf{S}_{v0} = \mathbf{0}$)?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Хісматулін В. Ш., Панченко С. В. Теорія автоматичного керування. Ч. I. Теорія лінійних неперервних систем автоматичного керування: підруч. для вузів. Харків: УкрДАЗТ, 2008. 239 с.
2. Александров Є. Є., Козлов Є. П., Кузнєцов Б. І. Теорія автоматичного керування. Т. 1. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Харків: НТУ «ХП», 2002. 490 с.
3. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ: Либідь, 2007. 656 с.
4. Ладанюк А. П., Архангельська К. С., Власенко Л. О. Теорія автоматичного керування технологічними об'єктами: навч. посіб. Київ: НУХТ, 2014. 274 с.
5. Теорія систем керування : підручник / В. І. Корнієнко, О. Ю. Гусєв, О. В. Герасіна, В. П. Щокін; Мін. освіти і науки України. Дніпро: НГУ, 2017. 497 с.
6. Boscain U., Piccoli B. Optimal synthesis for control systems on 2-D manifolds. Springer-Verlag, 2004. 262 p.
7. Hull D. Optimal control theory for Applications. Springer-Verlag, 2003. 384 p.
8. Теорія оптимальних систем автоматичного керування. Лабораторний практикум. Ч. 2. Дослідження оптимальних за швидкодією систем автоматичного керування / В. Ш. Хісматулін, О. В. Нейчев, О. М. Прогонний, О. О. Сосунов. Харків: УкрДУЗТ, 2018. 52 с.
9. Методи сучасної теорії управління: підручник / А. П. Ладанюк, Н. М. Луцька, В. Д. Кишенько, Л. О. Власенко. Київ: Вид-во Ліра-К, 2018. 368 с.
10. Paluszek M., Thomas S. Practical MATLAB. Deep learning. Apress, 2020. 252 p.

11. Моделювання систем у середовищі MATLAB / С. С. Забара, О. О. Гагарін, І. М. Кузьменко, Ю. Д. Щербашин. Київ, 2011. 137 с.
12. Гурко О. Г., Єрьоменко І. Ф. Аналіз і синтез систем автоматичного керування в MATLAB: навч. посіб. Харків: ХНАДУ, 2011. 286 с.
13. Гоблик Н. М., Гоблик В. В. MATLAB в інженерних розрахунках. Комп'ютерний практикум. Львів: Львівська політехніка, 2020. 192 с.
14. Луцька Н. М. Оптимальні системи управління: конспект лекцій. Київ: НУХТ, 2013. 44 с.
15. Оптимальні системи управління: навч. посіб. / О. А. Стенін, В. П. Пасько, А. Д. Лемешко, О. М. Польшакова. Київ: КПІ, Політехніка, 2017. 172 с.
16. Ладієва Л. Р. Оптимальне керування системами: навч. посіб. Київ: НМЦ ВО, 2000. 187 с.

Характеристики елементарних ланок

| Елементарна ланка | | |
|---|--|--|
| Підсилювальна | Інтегруюча | Диференціююча |
| Передаточна функція | | |
| $K(p) = K$ | $K(p) = \frac{K}{p}$ | $K(p) = Kp$ |
| Фазочастотна характеристика | | |
| $\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & K \geq 0, \\ -\pi, & K < 0 \end{cases}$ | $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ | $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$ |
| Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика | | |
| $L(\omega) = 20 \lg K $ | $L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$ | $L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \omega$ |
| Елементарна ланка | | |
| Інерційна (аперіодична) | Форсуюча | |
| Передаточна функція | | |
| $K(p) = \frac{K}{T_p + 1}$ | $K(p) = K(\tau p + 1)$ | |
| Фазочастотна характеристика | | |
| $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$ | $\varphi(\omega) = \arctg \omega \tau$ | |
| Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика | | |
| $L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2}$ | $L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega \tau)^2}$ | |

| Елементарна ланка | |
|---|---|
| Коливальна | Форсуюча другого порядку |
| Передаточна функція | |
| $K(p) = \frac{K}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}$ | $K(p) = K(\tau_0^2 p^2 + 2\eta\tau_0 p + 1)$ |
| Фазочастотна характеристика | |
| $\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T_0 \omega}{1 - (\omega T_0)^2}, & \omega < \frac{1}{T_0}; \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T_0}; \\ -\pi - \arctg \frac{2\xi T_0 \omega}{1 - (\omega T_0)^2}, & \omega > \frac{1}{T_0}. \end{cases}$ | $\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\eta\tau_0 \omega}{1 - (\omega\tau_0)^2}, & \omega < \frac{1}{\tau_0}, \\ \frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{\tau_0}, \\ \pi + \arctg \frac{2\eta\tau_0 \omega}{1 - (\omega\tau_0)^2}, & \omega > \frac{1}{\tau_0}. \end{cases}$ |
| Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика | |
| | |

Критерії стійкості САК

Виходячи з призначення системи її реакція на обмежені за величиною вхідні дії має також бути обмеженою за величиною і за часом протікання. Вказану властивість називають *стійкістю*, а САК, що мають таку властивість, називають *стійкими*. За відсутності стійкості невеликі збурення зовнішніх дій або початкового стану можуть викликати значні зміни руху системи. Тому стійкість є необхідною властивістю будь-якої системи автоматичного керування – лише стійкі САК здатні ефективно функціонувати в реальних умовах.

У лінійних САК внаслідок справедливості принципу суперпозиції зі стійкості хоча б одного руху впливає стійкість системи в цілому, тобто стійкість лінійних САК є властивістю, що залежить тільки від їхньої структури та параметрів і не залежить від зовнішніх дій і початкового стану. Зазначена властивість дозволяє обмежитися тільки аналізом стійкості вільного руху лінійних САК – руху, обумовленого довільним початковим станом за відсутності зовнішніх дій – *стійкості, за Ляпуновим*. Відомо, що *лінійна САК є стійкою, якщо її вільний рух задовольняє умову*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (\text{Д.2.1})$$

Оскільки процеси, що протікають у системі неперервної дії, описуються диференціальними рівняннями, то аналіз умов стійкості САК необхідно проводити на основі вивчення властивостей їхніх розв'язків.

Диференціальне рівняння вільного руху є рівнянням «вхід-вихід» замкненої САК за відсутності вхідних дій, тобто лінійним однорідним диференціальним рівнянням. У загальному випадку воно має вигляд

$$C(D) \cdot y(t) = 0, \quad (\text{Д.2.2})$$

де

$$C(D) = c_0 + c_1 D + c_2 D^2 + \dots + c_k D^k \quad (\text{Д.2.3})$$

– характеристичний оператор замкненої САК.

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (Д.2.2) з постійними коефіцієнтами можна записати як

$$y(t) = \sum_{i=1}^k \gamma_i e^{p_i t}, \quad (\text{Д.2.4})$$

де p_i – корені *характеристичного рівняння замкненої системи*,

$$C(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_k p^k = 0; \quad (\text{Д.2.5})$$

γ_i – константи або функції-поліноми, що визначаються початковими умовами (початковим станом) і кратністю коренів.

Корені можуть бути дійсними та комплексно-спряженими, а деякі з них можуть бути однаковими (кратними). Однак, як випливає з виразу (Д.2.4), незалежно від їхнього характеру вільна складова буде задовольняти умову стійкості (Д.2.1) тоді і тільки тоді, коли **всі корені**

характеристичного рівняння замкненої САК від'ємні або мають від'ємні дійсні частини:

$$\operatorname{Re}[p_i] < 0, \quad i \in [1, k]. \quad (\text{Д.2.6})$$

Якщо порядок характеристичного рівняння дорівнює або більше 3, розв'язання задачі пошуку коренів без ПЕОМ неможливе. Для усунення цієї незручності застосовують *критерії стійкості – сукупність умов, виконання яких гарантує стійкість САК без відшукування коренів.* Найбільше застосування знайшли алгебраїчний критерій А. Гурвіца та частотний критерій Г. Найквіста.

При використанні частотного критерію Найквіста судження про стійкість замкненої САК здійснюється на підставі аналізу частотних характеристик розімкненої САК. Внаслідок простоти побудови та отримання результатів найбільш зручно для цього користуватись логарифмічними частотними характеристиками розімкненої САК.

Розглянемо поняття, що застосовуються при формулюванні логарифмічного частотного критерію Найквіста, на прикладі розімкненої системи з передаточною функцією

$$R(p) = \frac{K_v(\tau p + 1)^2}{p(T_1 p + 1)^2(T_2 p + 1)^2},$$

причому її параметри задовольняють нерівності

$$T_1 > \tau > T_2; \quad \frac{1}{\tau} < K_v < \frac{1}{T_2}.$$

Для застосування логарифмічного частотного критерію необхідно, по-перше, побудувати логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи (рис. Д.2.1). Зауважимо, що частота ω_{3R} , на якій ЛАЧХ розімкненої системи дорівнює нулю, називається **частотою зрізу розімкненої системи**.

По-друге, необхідно з'ясувати, скільки додатних і від'ємних переходів через рівні $\pm 180^\circ$ ($2k + 1$), $k = 0, 1, 2, \dots$ має ЛФЧХ.

Перехід ЛФЧХ через деякий рівень називають додатним, якщо характеристика при збільшенні частоти перетинає його знизу вгору, і від'ємним, якщо характеристика при збільшенні частоти перетинає його згори вниз. Для системи, що розглядається, точки 1, 3 – точки від'ємних переходів (на частотах $\omega_{\pi 1}$, $\omega_{\pi 3}$), а точка 2 – точка додатного переходу (на частоті $\omega_{\pi 2}$).

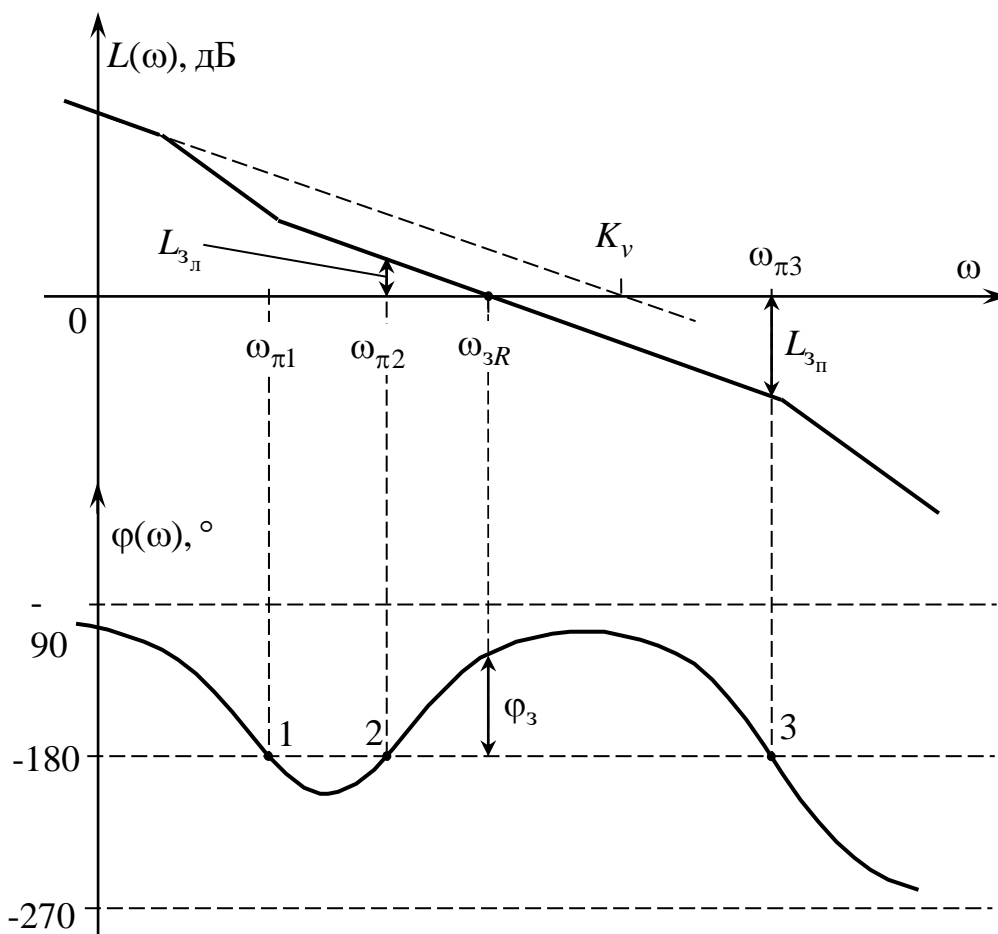


Рис. Д.2.1. Логарифмічні частотні характеристики

По-третє, необхідно з'ясувати, чи має характеристичний многочлен розімкненої системи $A(p)$, що є знаменником передаточної функції розімкненої системи, корені з додатною дійсною частиною («праві» корені).

Для розглянутої системи характеристичний многочлен розімкненої системи визначається виразом

$$A(p) = p(T_1 \cdot p + 1)^2 (T_2 \cdot p + 1)^2.$$

Його корені $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -1/T_1$, $p_{4,5} = -1/T_2$. З огляду на те, що постійні часу інерційних ланок T_1, T_2 більше нуля, «правих» коренів нема. На практиці в більшості випадків характеристичний многочлен розімкненої системи $A(p)$ не має «правих» коренів. Тому надалі обмежимося формулюванням критерію Найквіста лише для такого випадку.

Теорема. *Для того щоб замкнена система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб в усіх областях частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною, кількість додатних і від'ємних переходів ЛФЧХ розімкненої системи через рівні $\pm 180^\circ(2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ була однаковою.*

Аналіз логарифмічних частотних характеристик розглянутої системи показує, що ЛАЧХ є додатною в області частот $\omega < \omega_{3R}$. У межах цієї області ЛФЧХ розімкненої системи має один від'ємний перехід через рівень -180° (точка 1 на частоті $\omega_{\pi 1}$) і один додатний перехід (точка 2 на частоті $\omega_{\pi 2}$). Отже, за критерієм Найквіста, система є стійкою.

У тому разі, коли характеристичне рівняння розімкненої системи має два та більше кратних нульових коренів (у розімкненій системі є дві та більше послідовно з'єднаних інтегруючих ланок), необхідно до кількості

переходів ЛФЧХ через рівні $\pm 180^\circ(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \dots$ додати так звані **фіктивні переходи**. Їх отримують, спрямовуючи ЛФЧХ до нульового рівня при $\omega \rightarrow 0$.

Фіктивні переходи обумовлені тим, що при $\omega=0$ ФЧХ всіх елементарних ланок (у тому числі інтегруючих) вважають рівними 0° , а при $\omega > 0$ ФЧХ інтегруючої ланки дорівнює -90° . Отже, за наявності в розімкненій системі двох і більше послідовно з'єднаних інтегруючих ланок можуть існувати фіктивні переходи ЛФЧХ через рівні $\pm 180^\circ(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \dots$

Наприклад, у системі з передаточною функцією в розімкненому стані

$$R(p) = \frac{K_a(\tau p + 1)}{p^2(Tp + 1)}$$

характеристичне рівняння розімкненої системи має два нульових корені, обумовлені наявністю двох інтегруючих ланок. Якщо $K_a > 0$, ФЧХ розімкненої системи при $\omega=0$ дорівнює нулю, а при $\omega > 0$ визначається виразом

$$\varphi_R(\omega) = -180^\circ + \operatorname{arctg}(\tau \cdot \omega) - \operatorname{arctg}(T \cdot \omega).$$

У тому випадку, коли $T > \tau$, маємо для малих $\delta\omega$

$$\delta\varphi = \operatorname{arctg}(\tau \cdot \delta\omega) - \operatorname{arctg}(T \cdot \delta\omega) < 0^\circ,$$

і тому ЛФЧХ розімкненої системи на початковому інтервалі частот $(0, \delta\omega)$ прямує з точки $\varphi_R(0) = 0^\circ$ до точки, що знаходиться нижче рівня -180° ,

внаслідок чого існує один від'ємний фіктивний перехід через рівень -180° . Навпаки, при $T < \tau$ буде $\delta\varphi > 0^\circ$, і тому фіктивного переходу через рівень -180° нема. Отже, замкнена система буде стійкою тільки в тому разі, якщо $T < \tau$.

Графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи для випадків, коли $T > \tau$ та $T < \tau$, наведені на рис. Д.2.2.

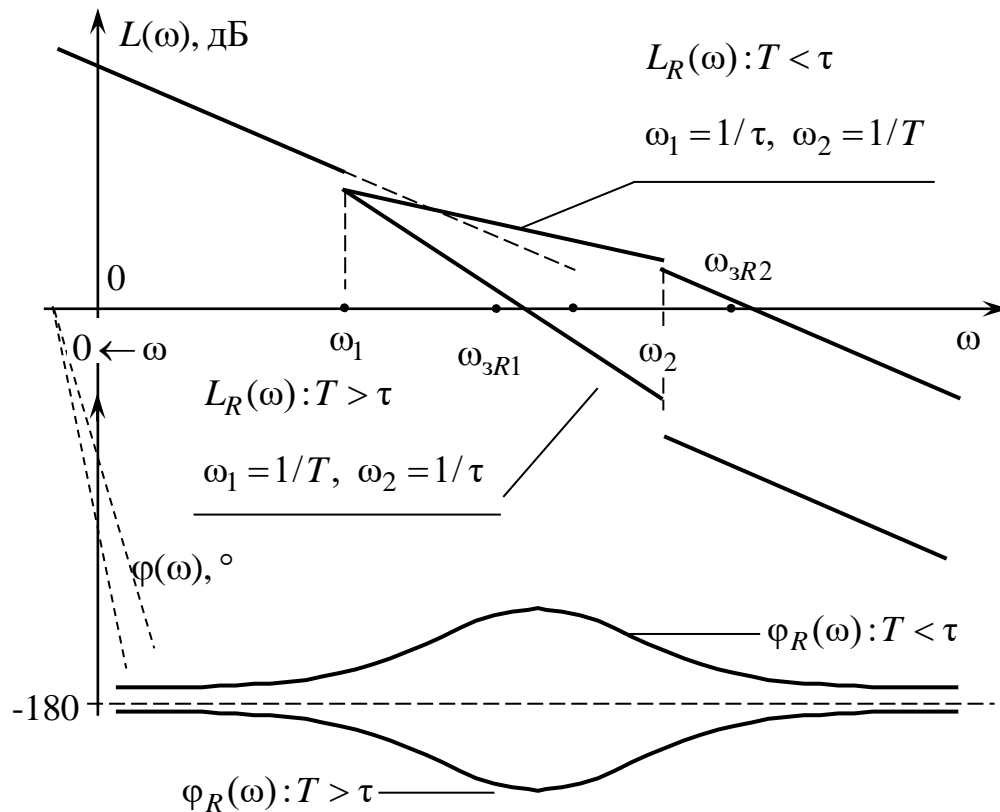


Рис. Д.2.2. Логарифмічні частотні характеристики для випадків, коли $T > \tau$ та $T < \tau$

Для того щоб забезпечити високу якість функціонування САК, необхідно не тільки забезпечити її стійкість, а й вибрати параметри системи достатньо далеко від меж області стійкості. Для кількісної характеристики ступеня віддалення системи від меж області стійкості застосовуються запаси стійкості.

Запасом стійкості за фазою φ_3 називають різницю між значенням ЛФЧХ на частоті зрізу розімкненої системи ω_{3R} і рівнем -180°

$$\varphi_3 = 180^\circ - |\varphi(\omega_{3R})|. \quad (\text{Д.2.7})$$

Якщо система є стійкою, її запас стійкості за фазою є додатним (рис. Д.2.1). У нестійкій системі він буде від'ємним.

Запасом стійкості за підсиленням (амплітудою) називають відношення дійсного і граничного значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи. Під граничним розуміють таке значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи, при якому система опиняється на межі області стійкості (частота зрізу ω_{3R} збігається з однією з частот переходів ЛФЧХ через рівні $\pm 180^\circ(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \dots$).

За логарифмічними частотними характеристиками запаси стійкості за підсиленням (у децибелах) дорівнюють відстані від ЛАЧХ розімкненої системи до осі абсцис у точках переходів ЛФЧХ через рівні $\pm 180^\circ(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \dots$, сусідніх до частоти зрізу ω_{3R} . Якщо система є стійкою, її запас стійкості за підсиленням (у децибелах) є додатним ($L_{3\text{д}}$ та $L_{3\text{п}}$ на рис. Д.2.1).

Показники якості САК у перехідному режимі

Перехідним називається режим, що виникає в системі безпосередньо після прикладення до неї вхідної дії.

Для аналізу якості функціонування САК в перехідному режимі застосовують *перехідну характеристику* $h(t)$, що є реакцією системи на вхідну дію у вигляді одиничної функції при нульових початкових умовах. У стійких САК перехідна характеристика з часом прагне до постійного усталеного значення $h_{уст}$.

Типовий графік перехідної характеристики САК наведено на рис. Д.3.1.

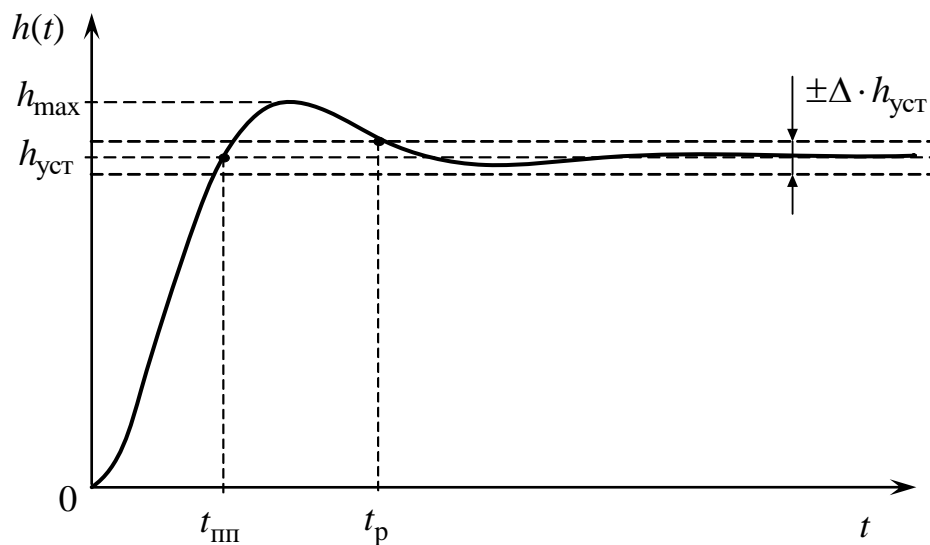


Рис. Д.3.1. Типовий графік перехідної характеристики

Основним показником якості функціонування САК в перехідному режимі є час його існування, що називається *часом регулювання* t_p . Він дорівнює інтервалу часу, після закінчення якого вихідна величина

залишається близькою до усталеного значення з заданою точністю, тобто для всіх $t \geq t_p$ виконується умова

$$\left| \frac{h(t)}{h_{уст}} - 1 \right| \leq \Delta, \quad (Д.3.1)$$

де Δ – достатньо мала величина. При практичних розрахунках значення Δ приймають у межах 0,01–0,1 (зазвичай $\Delta = 0,05$).

Якщо перехідна характеристика має коливання відносно усталеного значення, якість функціонування САК, крім часу регулювання t_p , прийнято оцінювати за такими показниками (рис. Д.3.1):

1) величина **перерегулювання** σ – максимальне відхилення перехідної характеристики від усталеного значення, виражене у відсотках:

$$\sigma[\%] = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100; \quad (Д.3.2)$$

2) **час першого погодження** $t_{ПП}$ – інтервал часу від моменту прикладення на вхід системи східчастої дії до моменту, коли перехідна характеристика вперше досягне свого усталеного значення;

3) **кількість коливань** N_p – кількість максимумів перехідної характеристики на інтервалі часу регулювання.

Найбільш важливими з усіх показників якості САК у перехідному режимі є час регулювання t_p і перерегулювання σ . Перша величина характеризує швидкодію системи, а друга – ступінь її коливальності.

Методи, при використанні яких для відшукування показників якості функціонування САК у перехідному режимі використовується графік перехідної характеристики, називаються прямими методами. Графік

перехідної характеристики можна отримати розрахунковими методами, шляхом моделювання та експериментально.

Серед розрахункових методів розглянемо операційний і частотний методи.

Операційний метод побудови графіка перехідної характеристики зводиться до відшукування оригіналу $h(t)$ за відомою передаточною функцією замкненої системи $W(p)$

$$h(t) = L^{-1}\{W(p)L[1(t)]\} = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}. \quad (\text{Д.3.3})$$

Для цього використовують таблиці перетворень Лапласа, теорему розкладання Хевісайда та інші способи відшукування оригіналу.

Частотний метод побудови графіка перехідної характеристики заснований на застосуванні зв'язку між перехідною характеристикою та комплексною частотною характеристикою (КЧХ) замкненої системи $W(j\omega)$

$$h(t) = F^{-1}\left\{\frac{W(j\omega)}{j\omega}\right\}. \quad (\text{Д.3.4})$$

Дослідження прямими методами суттєво полегшується при застосуванні для розрахунків пакетів прикладних програм (ППП), призначених для розв'язання диференціальних рівнянь або математичного моделювання динамічних систем. Серед них слід відзначити систему MATLAB, у складі якої є пакети структурного моделювання динамічних систем Simulink, пакети аналізу і синтезу систем керування Control System Toolbox та ін.

Так, у пакеті аналізу і синтезу систем керування Control System Toolbox програмної оболонки MATLAB для розрахунку перехідної

характеристики застосовується оператор **step(W)**, де W – ідентифікатор передаточної функції замкненої системи $W(p)$.

Приклад. Проаналізувати показники якості в перехідному режимі прямим методом САК з передаточною функцією розімкненої системи

$$R(p) = \frac{50(5p+1)^2}{p(50p+1)^2(0,01p+1)^2}.$$

Розв'язання

Для розрахунку передаточної функції замкненої системи $W(p)$ спочатку необхідно задати передаточну функцію розімкненої системи.

Для завдання передаточної функції, записаної у вигляді добутку передаточних функцій ланок, спочатку доцільно задати окремі компоненти, а потім їх перемножити. Розіб'ємо $R(p)$ на ланки:

$$\begin{aligned} R(p) &= K1 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{(5p+1)^2}{(50p+1)^2} \cdot \frac{1}{(0,01p+1)^2} = \\ &= K1 \cdot K2(p) \cdot K3(p) \cdot K3(p) \cdot K4(p) \cdot K4(p), \end{aligned}$$

де $K1 = 50$; $K2(p) = \frac{1}{p}$; $K3(p) = \frac{5p+1}{50p+1}$; $K4(p) = \frac{1}{0,01p+1}$.

Тоді програма набуває вигляду

```
% Передаточна функція розімкненої системи
k1=50;k2=tf([1],[1,0]);k3=tf([5,1],[50,1]);k4=tf([1],[0.01,1]);
R=k1*k2*k3*k3*k4*k4;
```

%Передаточна функція замкненої системи

W=feedback(R,1);

%Розрахунок перехідної характеристики

step(W);grid on

Результати розрахунку (рис. Д.3.2):

- час регулювання $t_p = 17,4$ с;
- величина перерегулювання $\sigma = 31$ %;
- час першого погодження $t_{III} = 2,65$ с;
- кількість коливань – 1.

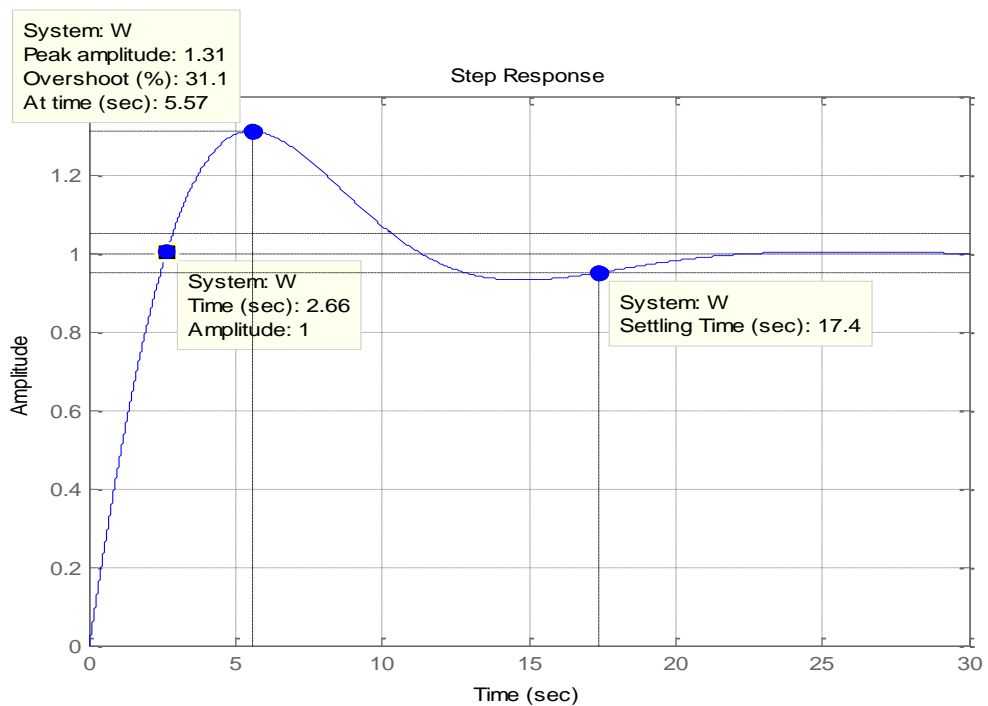


Рис. Д.3.2

Аналіз якості САК у перехідному режимі за частотними характеристиками

Методи, що дозволяють визначати показники якості САК у перехідному режимі за її частотними характеристиками, засновані на взаємно однозначному зв'язку між перехідною характеристикою системи та її перетворенням Фур'є (формула (Д.3.4)).

Аналіз зв'язку між перехідною і частотними характеристиками САК [1, 2] дозволяє зробити висновок, що якість функціонування САК у перехідному режимі визначається ходом її частотних характеристик в області середніх частот – області, де ЛАЧХ розімкненої системи лежить у межах частот від $\tilde{\omega}_1$ до $\tilde{\omega}_2$, де ЛАЧХ розімкненої системи задовольняє умову $-20 \text{ дБ} \leq L_R(\omega) \leq 20 \text{ дБ}$ і практично не залежить від вигляду частотних характеристик в областях низьких ($L_R(\omega) > 20 \text{ дБ}$) і високих ($L_R(\omega) < -20 \text{ дБ}$) частот (рис. Д.4.1).

Проведені дослідження показали, що САК буде мати прийнятні показники якості функціонування в перехідному режимі, якщо її логарифмічні частотні характеристики задовольняють такі вимоги:

1) на частоті зрізу розімкненої системи ω_{3R} і в області частот, що примикають до неї, ЛАЧХ проходить з нахилом мінус 20 дБ/дек, причому загальна довжина по частоті відрізка ЛАЧХ з таким нахилом не менша за одну декаду: $\tilde{\omega}_2 / \tilde{\omega}_1 \geq 10$;

2) значення запасів стійкості за амплітудою L_3 і фазою φ_3 задовольняють умови

$$L_3 \geq 10 \text{ дБ}, \quad 45^\circ \leq \varphi_3 \leq 73^\circ. \quad (\text{Д.4.1})$$

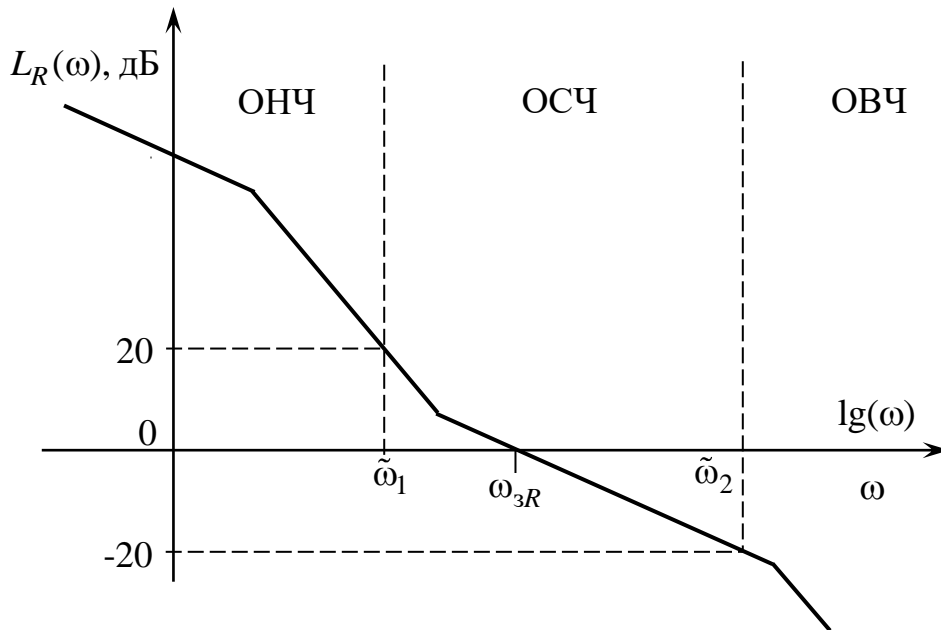


Рис. Д.4.1. Области частот на типовій ЛАЧХ розімкненої системи

З досвіду аналізу і синтезу САК встановлено, що при виконанні вказаних вимог показники якості функціонування САК з типовою ЛАЧХ у перехідному режимі можуть бути з достатньою для інженерної практики точністю розраховані за такими емпіричними формулами:

$$t_p \cong \frac{5 \dots 9}{\omega_{3R}} \cong \frac{385}{\omega_{3R} \cdot \varphi_3^0}; \quad \sigma \cong \begin{cases} (73 - \varphi_3^0) \%, & \text{якщо } \varphi_3 < 73^\circ; \\ 0, & \text{якщо } \varphi_3 \geq 73^\circ. \end{cases} \quad (\text{Д.4.2})$$

Як бачимо, час регулювання обернено пропорційний частоті зрізу розімкненої системи, а величина перерегулювання зростає при зменшенні запасу за фазою.

Аналіз точності САК в усталеному режимі

Точність функціонування САК характеризується величиною усталеної помилки $\varepsilon_{\text{уст}}(t)$, що дорівнює різниці між значеннями задавальної дії $g(t)$ й усталеного значення вихідної величини $y_{\text{уст}}(t)$:

$$\varepsilon_{\text{уст}}(t) = g(t) - y_{\text{уст}}(t). \quad (\text{Д.5.1})$$

Надалі з метою спрощення позначень опустимо підрядковий індекс у позначеннях усталеної помилки.

У загальному випадку усталена помилка має дві складові:

$$\varepsilon = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_f(t),$$

де $\varepsilon_g(t)$ – динамічна помилка – помилка, викликана неточністю відпрацьовування задавальної дії $g(t)$;

$\varepsilon_f(t)$ – помилка, обумовлена заважальною дією.

Надалі обмежимося аналізом динамічної помилки, тобто будемо вважати, що заважальна дія відсутня.

Для відшукання усталених динамічних помилок скористаємось виразом [1, 2]

$$\varepsilon_g = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v+1}}{p^v + K} L\{g(t)\}, \quad (\text{Д.5.2})$$

де ν – кількість інтегруючих ланок у передаточній функції розімкненої системи;

K – коефіцієнт підсилення розімкненої системи;

$L\{g(t)\}$ – перетворення Лапласа задавальної дії.

Отже, *точність функціонування САК в усталеному режимі залежить від кількості інтегруючих ланок і величини коефіцієнта підсилення розімкненої системи.*

Як відомо [1, 2], значення коефіцієнта підсилення K розімкненої системи та кількість ν інтегруючих ланок визначають хід частотних характеристик системи в області низьких частот (рис. Д.4.1, ОНЧ). Тому можна стверджувати, що точність системи в усталеному режимі взаємно однозначно пов'язана з ходом її частотних характеристик в області низьких частот.

Для проведення інженерного аналізу точності застосовуються так звані *типові режими* – режими, що виникають під впливом дій, описуваних степеневими функціями часу. Види дій, назви відповідних їм типових режимів роботи САК й усталених помилок наведені в табл. Д.5.1.

Таблиця Д.5.1

Характеристика типових режимів роботи САК

| Вид дії | Типовий режим роботи САК | Назва усталеної помилки |
|--------------------------------------|--------------------------|-------------------------|
| Постійна $g(t) = A$ | Статичний | Статична |
| Лінійна $g(t) = V \cdot t$ | Кінетичний | Кінетична |
| Квадратична $g(t) = W \cdot t^2 / 2$ | Рівноприскорений | Інерційна |

Всі САК залежно від наявності чи відсутності статичної помилки, тобто усталеної помилки при постійній вхідній дії (у статичному режимі), поділяються на статичні або астатичні.

Статичною називається САК, у якої існує статична помилка ($\varepsilon_{ст} \neq 0$). В **астатичній** САК статична помилка відсутня ($\varepsilon_{ст} = 0$), тобто постійна вхідна дія відпрацьовується без помилки.

Визначимо ознаки статизму та астатизму САК відносно задавальної дії.

При постійній задавальній дії $g(t) = A$ маємо $L\{g(t)\} = A/p$ (дод. 7), і тому статична помилка системи

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{ст} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v+1}}{p^v + K} \cdot \frac{A}{p} = \begin{cases} A/(1+K), & \text{якщо } v = 0; \\ 0, & \text{якщо } v > 0. \end{cases} \quad (\text{Д.5.3})$$

Отже, *система є статичною, якщо в ній відсутні інтегруючі ланки ($v = 0$), і навпаки, система є астатичною, якщо в ній є хоча б одна інтегруюча ланка.*

Астатичні САК у свою чергу розподіляють на системи з астатизмом першого, другого й т. д. порядків. *Ознакою порядку астатизму САК є кількість v інтегруючих ланок у передаточній функції розімкненої системи.*

Встановимо вплив порядку астатизму на точність САК у типових режимах роботи. Користуючись дод. 7, запишемо зображення, за Лапласом, типових вхідних дій:

- постійної дії $L\{A \cdot 1(t)\} = \frac{A}{p}$;
- лінійної дії $L\{V \cdot t\} = \frac{V}{p^2}$;
- квадратичної дії $L\{W \cdot t^2 / 2\} = \frac{W}{p^3}$.

Результати розрахунків за формулою (Д.5.2) усталених помилок, що виникають у статичній системі і в астатичних системах першого та другого порядків у типових режимах роботи, зведені до табл. Д.5.2.

Таблиця Д.5.2

Вплив порядку астатизму на точність САК у типових режимах роботи

| Тип САК | Усталена помилка | | |
|---|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| | Статична $\varepsilon_{ст}$ | Кінетична $\varepsilon_{к}$ | Інерційна $\varepsilon_{ін}$ |
| Статична ($\nu = 0$) | $\frac{A}{1+K}$ | $\rightarrow \infty$ | $\rightarrow \infty$ |
| Астатична 1 порядку ($\nu = 1$) | 0 | $\frac{V}{K}$ | $\rightarrow \infty$ |
| Астатична 2 порядку ($\nu = 2$) | 0 | 0 | $\frac{W}{K}$ |

З аналізу отриманих результатів можна зробити такі висновки:

- 1) статичні САК можуть задовільно функціонувати лише при вхідних діях, що є постійними або змінюються повільно і в малих межах;
- 2) системи з астатизмом 1 порядку здатні відпрацьовувати довільні постійні дії, а також діяння, що змінюються з постійною швидкістю;
- 3) системи з астатизмом 2 порядку можуть працювати навіть в умовах, коли існують прискорення вхідних дій;
- 4) у будь-яких САК для зменшення величини динамічної помилки необхідно збільшувати коефіцієнт підсилення розімкненої системи.

Деякі функції пакета Control Toolbox програмної оболонки MATLAB

1. Задавання передаточної функції динамічної ланки

Для задавання передаточної функції

$$K(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k}, \quad k \geq m \quad (\text{Д.6.1})$$

у командному вікні (Command Window) набирають

$$\mathbf{K} = \text{tf}([\mathbf{b}_m \ \mathbf{b}_{m-1} \ \dots \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_0], [\mathbf{a}_k \ \mathbf{a}_{k-1} \ \dots \ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_0]), \quad (\text{Д.6.2})$$

де \mathbf{b}_i та \mathbf{a}_r – коефіцієнти многочленів, що стоять у чисельнику та знаменнику передаточної функції $K(p)$, які набирають через пробіл (або кому), починаючи з більших номерів.

Після введення функції $\text{tf}(\cdot)$ у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті Matlab змінна Лапласа p відображується літерою s).

2. Задавання передаточної функції з'єднань динамічних ланок

Для задавання передаточної функції з'єднань ланок необхідно спочатку задати передаточні функції окремих ланок, після чого записати вираз для з'єднань відповідно до звичайних правил:

– послідовне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1} * \mathbf{K2};$$

– паралельне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1} \pm \mathbf{K2};$$

– зустрічно паралельне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1}/(1 \pm \mathbf{K1} * \mathbf{K2}),$$

де знак «-» записується при позитивному, а «+» при негативному зворотному зв'язку.

Крім того, при негативному зворотному зв'язку є спеціальна функція

$$\mathbf{K} = \text{feedback}(\mathbf{K1}, \mathbf{K2}).$$

При складній схемі можна записувати або спочатку часткові перетворення, або одразу повне з урахуванням часткових правил заміни.

3. Побудова перехідної характеристики динамічної системи

Для побудови перехідної характеристики в командному вікні набирають

$$\text{step}(\mathbf{K}),$$

де \mathbf{K} – передаточна функція, що задається за допомогою функції $\text{tf}(\cdot)$.

Після введення функції **step** з'являється вікно **Figure № 1**, у якому побудована перехідна характеристика досліджуваної системи.

Для нанесення масштабної сітки необхідно натиснути праву кнопку «миші», після чого активізувати лівою кнопкою функцію **grid** або додати до командного рядка запис **grid** після запису відповідної функції (наприклад **step(K);grid**).

Для визначення параметрів характеристики необхідно підвести курсор до необхідної точки на графіку, натиснути ліву кнопку «миші» та утримати її більше 1 с. Крім того, після натискання правої кнопки на графіку з'являється вікно, у якому можна задати виведення на графік характеристик і їхніх чисельних значень:

Peak Response – максимум перехідної характеристики **Peak Amplitude** та величина перерегулювання **Overshoot %**;

Setting Time – час регулювання; за замовчуванням він вимірюється при межах 2 %; для встановлення меж 5 % необхідно додатково натиснути **Propeties – Options**, після чого задати межі **Show setting time within 5 %**, а для часу першого погодження **Rise time - Show rise time from 0 to 100 %**;

Steady State – усталене значення $h_{уст}$.

Для більш детального огляду фрагмента необхідно активізувати команду \oplus (**Zoom In**), після чого, натиснувши ліву кнопку «миші», виділити прямокутником досліджуваний фрагмент (**Увага!** Для визначення параметрів характеристики необхідно спочатку скасувати команду \oplus).

За необхідності огляду характеристики протягом іншого часу, ніж той, що наведений у вікні **Figure № 1**, у командному вікні набирають

step(K,T),

де **T** – бажана тривалість характеристики, с.

Для спостереження одночасно характеристик декількох систем їх записують через кому у відповідній функції.

4. Побудова логарифмічних частотних характеристик

Для побудови логарифмічних частотних характеристик системи в командному вікні набирають

$$\mathbf{bode(K)},$$

де \mathbf{K} – передаточна функція досліджуваної системи, що задана за допомогою функції $\mathbf{tf(\cdot)}$.

Після введення функції \mathbf{bode} з'являється вікно Figure № 1, у якому побудовані ЛАЧХ і ЛФЧХ системи. На графіках можна наносити масштабну сітку, виділяти фрагмент і проводити вимірювання за розглянутими раніше правилами.

Якщо необхідно спостерігати логарифмічні частотні характеристики в певному діапазоні частот, тоді набирають команду

$$\mathbf{bode(K, \{\omega_n, \omega_k\})},$$

де ω_n, ω_k – бажані частоти початку та кінця діапазону частот, рад/с.

Для побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи з метою вимірювання запасів стійкості можна скористатись спеціальною функцією

$$\mathbf{margin(K)},$$

де \mathbf{K} – передаточна функція розімкненої системи, що задана за допомогою функції $\mathbf{tf}(\cdot)$. У цьому випадку на графіках автоматично відзначаються та у верхньому рядку записуються значення запасу стійкості за підсиленням L_3 , дБ, і фазою φ_3 , град (у MATLAB вони позначаються відповідно G_m та P_m), а також частот, на яких вони виміряні.

Основні властивості перетворення Лапласа

| Назва | Оригінал | Зображення |
|------------------------------|--|-------------------------------------|
| Лінійність | $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ | $c_1X_1(p) + c_2X_2(p)$ |
| Диференціювання оригіналу | $x'(t)$ | $pX(p) - x(0)$ |
| Інтегрування оригіналу | $\int_0^t x(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{p}X(p)$ |
| Запізнювання оригіналу | $x(t - \tau), \tau > 0$ | $e^{-\tau p}X(p)$ |
| Згортка оригіналів | $\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$ | $X_1(p)X_2(p)$ |
| Кінцеве значення оригіналу | $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ | $\lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$ |
| Початкове значення оригіналу | $\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$ | $\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$ |

Таблиця перетворень Лапласа

| $x(t)$ | $X(p)$ | $x(t)$ | $X(p)$ |
|-------------|-----------------|---------------------|---------------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 | $e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{p + \alpha}$ |
| $\delta(t)$ | $\frac{1}{p}$ | $1 - e^{-\alpha t}$ | $\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$ |
| t | $\frac{1}{p^2}$ | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ |
| t^2 | $\frac{1}{p^3}$ | $\cos \omega t$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ |

Умови трансверсальності

Таблиця Д.8.1

Умови трансверсальності для гамільтоніана $H^*(t_k) = H^*[\mathbf{z}^*(t_k), \mathbf{u}^*(t_k), \Psi^*(t_k), t_k]$

| № з/п | Тип задачі | Множина цілей керування | Вид функціонала якості | Граничні умови для канонічної системи рівнянь на лівому кінці | Граничні умови для канонічної системи рівнянь на правому кінці | Умови для H^* при $t = t_k$ |
|-------|--|--|--|--|--|-------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | Задача з закріпленими кінцями при фіксованому часі керування | $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$, $t_0, t_k, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_k$ – фіксовані величини | $J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$ | $\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ умов нема | $\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$, для $\Psi^*(t_k)$ умов нема | умов нема |
| 2 | Задача з закріпленими кінцями при нефіксованому часі керування | $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$, $t_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_k$ – фіксовані величини, t_k – варійована величина | $J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$ | $\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ умов нема | $\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$, для $\Psi^*(t_k)$ умов нема | $H^*(t_k) = 0$ |

Продовження табл. Д.8.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|--|---|--|---|------------------|
| 3 | <p>Задача 3 незакріпленим (напіввільним) правим кінцем при фіксованому часі керування</p> | <p>$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) \in S_k$: $\eta_i[\mathbf{z}(t_k)] = 0$, $i = 1, 2, \dots, q < n$, \mathbf{z}_0, t_0, t_k – фіксовані величини</p> | <p>$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k)] +$ $+ \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$</p> | <p>$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ умов нема</p> | <p>$\Psi^*(t_k) = -$ $-\frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k)]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)} +$ $+ \mathbf{\alpha}^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k)]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)}$, $\mathbf{\alpha}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ – довільний вектор, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ умов нема</p> | <p>умов нема</p> |
| 4 | <p>Задача 3 незакріпленим (вільним) правим кінцем при фіксованому часі керування</p> | <p>$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, \mathbf{z}_0, t_0, t_k – фіксовані величини, $\mathbf{z}(t_k)$ – довільний вектор</p> | <p>$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k)] +$ $+ \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$</p> | <p>$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ умов нема</p> | <p>$\Psi^*(t_k) = -$ $-\frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)}$, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ умов нема</p> | <p>умов нема</p> |

Продовження табл. Д.8.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|--|---|---|---|--|
| 5 | <p>Задача з незакріпленим (напіввільним) правим кінцем при нефіксованому часі керування</p> | <p>$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) \in S_k$: $\eta_i[\mathbf{z}(t_k), t_k] = 0$, $i = 1, \dots, q < n + 1$, \mathbf{z}_0, t_0 – фіксовані величини, t_k – варійована величина</p> | <p>$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$</p> | <p>$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ умов нема</p> | <p>$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)} + \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)}$, $\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ – довільний вектор, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ умов нема</p> | <p>$H^*(t_k) = \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k} - \boldsymbol{\alpha}^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k}$</p> |
| 6 | <p>Задача з незакріпленим (вільним) правим кінцем при нефіксованому часі керування</p> | <p>$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, \mathbf{z}_0, t_0 – фіксовані величини, $\mathbf{z}(t_k)$ – довільний вектор, t_k – варійована величина</p> | <p>$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$</p> | <p>$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ умов нема</p> | <p>$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)}$, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ умов нема</p> | <p>$H^*(t_k) = \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k}$</p> |

Навчальний посібник

Хісматулін Володимир Шайдуллович,

Сосунов Олександр Олексійович,

Сотник Василь Олександрович

ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Відповідальний за випуск Сосунов О. О.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 7.11.2022 р.

Умовн. друк. арк. 11,0. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.