У статті досліджені найцкавіші явища, які пов'язані з гравітацією та роль гравітації у світобудові. Визначено основні уявлення про антигравітацію та її важливість для еволюції космічних об'єктів.

Ключові слова: гравітація, Місяць, Сонце, парад планет, Чорні діри, зірки, антигравітація

GRAVITY AND ANTIGRAVITY IN SPACE

Anastasiya Melnyk, Viktoriya Shatkivska, Viktoriya Dumenko

This article explores the most interesting phenomenon of gravity, the role of gravity in the universe. Determined based on an idea of antigravity and it's importance for the evolution of cosmic object.

Keywords: gravity, Moon, Sun, planets, Black holes, stars, antigravity

МАТЕМАТИЧНИЙ ЗМІСТ КІЛЬЦЯ ЕЙНШТЕЙНА ТА УМОВИ ЙОГО ВИНИКНЕННЯ. ДОСЛІДЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВ

Альберт Котвицький, Семен Бронза,
Володимир Шабленко, Ксенія Нерушенко

Історична довідка

Гравітаційна лінза — масивне тіло (планета, зірка) або система тіл (галактики, скупчення галактик), яка викривляє своїм гравітаційним полем напрям поширення випромінювання, подібно до того, як викривляє світловий промінь звичайна лінза.

Перший, хто використав термін «лінза», говорячи про відхилення електромагнітного променя гравітацією, був англійський фізик Олівер Лодж (1851-1940), який у 1919 зазначив, що «гравітаційне поле діє як лінза, але не має фокусної відстані». Він виявився правий: оскільки сила гравітаційної дії залежить обернено пропорційно квадрату відстані від джерела, тому дія гравітаційної лінзи відрізняється від дії її скляного аналога. Якщо звичайна лінза збирає всі падаючі на неї промені світла в одній точці фокусу, то гравітаційна лінза тільки відхиляє промені до оптичної осі, але не може зібрати їх в єдиному фокусі.

N-точкова гравітаційна лінза

Рівняння *N*-точкової лінзи (в безрозмірній формі) має вигляд:

$$\vec{y} = \vec{x} - \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\vec{x} - \vec{l}_i}{\left|\vec{x} - \vec{l}_i\right|^2}, \qquad (1.1)$$

де $\vec{x}_i$ - радіус-вектори точкових мас, що входять в лінзу, $m_i = \dfrac{M_i}{\sum_k M_k}$ - безрозмірні маси, (див. напр. [3,4,11]).

Очевидно, що $\sum_i m_i = 1$.

Рівняння (1.1) в координатній формі має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{x_1 - a_n}{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2} \\ y_2 = x_2 - \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{x_2 - b_i}{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2} \end{cases}, \qquad (1.2)$$

Де a_i і b_i координати радіус-векторів $\vec{l_\iota}$ тобто

$$\vec{l_\iota} = (a_i, b_i) \qquad (1.3)$$

Система (1.2) зводиться до системи поліноміальних рівнянь. Дослідження системи поліноміальних рівнянь, зокрема її рішення, є основним завданням класичної алгебраїчної геометрії.

Деякі поняття і теореми алгебраїчної геометрії

Центральним поняттям алгебраїчної геометрії є поняття результанта. Формально результант двох многочленів $f(x)$ i $g(x)$, від однієї змінної, можна визначити як деяку поліноміальну функцію їх коефіцієнтів, обіг якої в нуль є необхідною і достатньою умовою для існування спільного кореня зазначених поліномів. Результант для системи поліноміальних рівнянь можна розглядати як аналог визначника системи для системи лінійних рівнянь. Добре відомо, що для системи лінійних рівнянь може бути один розв'язок, безліч, або не бути розв'язків зовсім.

Результантом $R(f, g)$ двух багаточленів $f(x)$, $g\ (x)$ з кільця $K[\mathrm{x}]$ називається елемент поля K, визначений формулою:

$$R(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} a_0^m b_0^n \prod_{i=0}^{i=n} \prod_{j=0}^{j=m} (\alpha_i - \beta_j),$$

де α_i , $\beta_j -$ корені багаточленів, $f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{n-i}$ и $g(x) = \sum_{j=0}^{j=m} b_j x^{m-j}$,

зі старшими коефіцієнтами a_0, b_0 такими, що $a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$.

Для обчислення результанта зручно застосувати матрицю Сильвестра.

Матрицею Сильвестра для багаточленів $f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{n-i}$ та $g(x) = \sum_{j=0}^{j=m} b_j x^{m-j}$ називають квадратну матрицю $S = S(f,g)$ порядку $n + m$ з елементами s_{ij} визначеними формулою,

$$s_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a_{j-i}, & \text{якщо } 0 \le j - i \le n,\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n+m; \\ b_{j-i+m}, & \text{якщо } 0 \le j - i + m \le n, i = (m+1), \dots, (n+m), j = 1, \dots, n+m; \\ 0 & \text{для інших } i, j; \end{cases}$$

тобто:

$$S = [s_{ij}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{r} m - \text{рядків}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n - \text{рядків}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \dots & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & & \\ & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ & & & & & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_1 & \cdots & \dots & & \\ & b_0 & b_1 & b_1 & \dots & & \\ & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ & & & & & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix}$$

.

Результант $R(f,g)$, двох багаточленів f та g , дорівнює визначнику $det\, S(f,g)$ матриці Сильвестра $S = S(f,g)$ цих багаточленів, тобто:

$$R(f,g) = det\, S(f,g). \qquad (1.4)$$

Нижче наведені деякі визначення та теореми для багаточленів:

- багаточлени f і g мають спільний корінь, тоді і тільки коді, коли:

$$R(f,g) = 0.$$

- якщо f і g багаточлени, та багаточлен $f = f_1 \cdot f_2$, тобто розкладний, то має місце співвідношення:

$$R(f,g) = R(f_1,g) \cdot R(f_2,g). \qquad (1.5)$$

- нехай $f = f(x,y)$ та $g = g(x,y)$ є багаточленами від двох змінних над полем комплексних чисел C, та нехай вони визначені наступним чином:

$$f = f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{i,j=n;\ i+j\le n} a_{ij}x^i y^j, \qquad (1.6)$$

$$g = g(x,y) = \sum_{i,j=0}^{i,j=m;\ i+j\le m} b_{ij}x^i y^j. \qquad (1.7)$$

Якщо, хоча б один зі старших коефіцієнтів a_{ij}, $i+j=n$, багаточлена f не дорівнює нулю, тоді $deg\, f = n$, та, хоча б один зі старших коефіцієнтів b_{ij}, $i+j=m$, багаточлена g не дорівнює нулю, тоді $deg\, g = m$.

Зручним є поняття елімінанти багаточленів(див.[9]).

Нехай $f(x,y), g(x,y) \in C[x,y]$ – багаточлени від двох змінних над полем комплексних чисел C. Елімінантою багаточленів $f(x,y)$ та $g(x,y)$ по x називають багаточлен $X(x)$, визначений формулою:

$$X(x) \overset{\mathrm{def}}{=} R_y(f(x,y), g(x,y)), \qquad (1.8)$$

де $R_y(f(x,y), g(x,y))$ - результант багаточленів $f(x,y)$, $g(x,y)$, які записано в лексикографічній формі по спадаючих степенях змінної y над полем раціональних функцій $C[x]$, тобто $f(x,y), g(x,y) \in C[x,y]: C[x]$.

Аналогічно визначається друга елімінанта системи $Y(y)$, тобто:

$$Y(y) \overset{\mathrm{def}}{=} R_x(f(x,y), g(x,y)). \qquad (1.9)$$

Мають місце теореми.

Теорема 1 (Безу). Нехай багаточлени f та g визначені як в (1.6) та (1.7) відповідно. Нехай їх коефіцієнти, такі, що $a_{0n} \neq 0, a_{no} \neq 0, b_{0m} \neq 0$, $b_{m0} \neq 0$. Тоді для елімінанти $X(x)$, має місце співвідношення:

$$deg\, X(x) = deg\, f(x,y) \cdot deg\, g(x,y) = nm. \qquad (1.10)$$

Аналогічно для елімінанти $Y(y)$ маємо: $deg\, Y(y) = nm$. (див. [8])

Теорема 2 (Безу). Нехай криві визначені рівняннями $f(x,y)=0$ та $g(x,y)=0$. Якщо вони мають більш, ніж nm спільних точок, то вони мають спільну компоненту, тобто deg НОД$(f(x,y),g(x,y))\neq 0$.

З теореми прямує: якщо система рівнянь

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

має більш, ніж nm рішень, багаточлени f, g мають спільну компоненту (див. [8]).

Має місце також твердження:

- багаточлени f,g мають спільну компоненту h, додатного степеня, тобто $deg\,НСД(f,g)=deg(h)\neq 0$, тоді і тільки тоді, коли хоча б одна з елімінант $X(x)=R_y(f,g)$, або $Y(y)=R_x(f,g)$, тотожно дорівнює нулю.

- якщо елімінанта $X(x)$ багаточленів $f(x,y),g(x,y),$ така, що $X(x)\equiv 0$, всі її коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто:

$$\frac{d^i}{dx^i}X(x)=0,\ i=1,2,\dots,m. \qquad (1.11)$$

де $m=deg\,X(x)$.

Деякі твердження про розкладність багаточленів від двох змінних

Нехай $F=F(x,y)$ багаточлен від змінних x,y над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, та його степінь $degF=d$, тобто $F(x,y)=\sum_{i,j=0}^{0\leq i+j\leq d}a_{ij}\,x^iy^j$. Нехай $k=\left[\frac{d}{2}\right]$, де в квадратних дужках стоїть ціла частина числа $\frac{d}{2}$.

Нехай $P=P(x,y)$ – k-форма від двох змінних комплексних чисел $\mathbb{C}$. Тобто P – багаточлен степені k, від змінних x,y над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, та $P(x,y)=\sum_{i,j=0}^{0\leq i+j\leq k}p_{ij}\,x^iy^j$. Будемо розглядати багаточлен P як багаточлен з невизначеними коефіцієнтами

$$p_{ij}, i,j=0,1,\dots,k,\quad 0\leq i+j\leq k.$$

Нехай $R_y(F,P)$ - результант від багаточленів $F=F(x,y)$ та $P=P(x,y)$ (як багаточленів від змінної y з коефіцієнтами з поля $\mathbb{C}[x]$), тоді $R_y(F,P)$ є багаточлен від однієї змінної x, а $R_x(F,P)$ -

результант від тих же самих багаточленів, як багаточленів від змінної x з коефіцієнтами з поля $\mathbb{C}[y]$.

Має місце

Теорема 3. Багаточлен $F = F(x,y)$ розкладний по змінній y, якщо і тільки якщо система рівнянь

$$\begin{cases} R_y\ (F(x,y), P(x,y)) = 0 \\ \frac{d^i}{dx^i} R_y\big(F(x,y), P(x,y)\big) = 0 \end{cases}, \quad i = 1,2,\dots,m; \quad , \qquad (1.12)$$

де $m = deg\, R_y(F,P)$,

(система розглядається відносно p_{ij} - невизначених коефіцієнтів багаточлена P , як відносно невідомих) має хоча б один нетривіальний розв’язок (розв’язок нетривіальний, якщо не всі $p_{ij},\ i + j > 0$ дорівнюють нулю). (див.[11, 12])

Наслідок теореми 3. Багаточлен $F = F(x,y)$ нерозкладний по змінній y, якщо і тільки якщо система (1.12) не має розв'язку, або має тільки тривіальний розв'язок, тобто:

$p_{ij} = 0$, для усіх $i,j = 0,1,\dots,k$, таких що $1 \le i + j \le k$.

В силу симетрії змінних, вочевидь, має місце наступна

Теорема 4. (Критерій розкладності, багаточленів від двох змінних над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$). Нехай F та P, такі як визначено вище. Багаточлен F є розкладним якщо і тільки якщо хоча б одна з систем

$$\begin{cases} R_y\ (F(x,y), P(x,y)) = 0 \\ \frac{d^i}{dx^i} R_y\big(F(x,y), P(x,y)\big) = 0 \end{cases}, \quad i = 1,2,\dots,m \quad , \quad \text{де}$$

$m = deg\, R_y(F,P)$, (4.3)

$$\begin{cases} R_x\ (F(x,y), P(x,y)) = 0 \\ \frac{d^i}{dy^i} R_x\big(F(x,y), P(x,y)\big) = 0 \end{cases}, \quad i = 1,2,\dots,n \quad , \quad \text{де}$$

$n = deg\, R_x(F,P)$, (4.4)

(системи розглядається відносно p_{ij}- коефіцієнтів багаточлена P, як відносно невідомих) має не тривіальний розв'язок , тобто:

$p_{ij} = 0$, не для усіх $i,j = 0,1,\dots,k$, таких, що $1 \le i + j \le k$ [11,12]

.

Має місце, також

Теорема 5. Нехай багаточлен $F = F(x,y) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\ x^i y^j$ розкладний тільки по змінній x, та нерозкладний по y, тоді багаточлен F ділиться на багаточлен

$$A(x) = НСД(A_1(x), A_2(x), \dots, A_m(x)),$$

де $A_j(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x^i$, причому $deg A(x) \neq 0$ [9].

Важливою є теорема, що випливає з теореми 4

Теорема 6. (Критерій нерозкладності, багаточленів від двох змінних над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$)**.** Нехай F та P, такі як визначено вище. Багаточлен F є нерозкладним якщо і тільки якщо кожна з систем

$$\frac{d^i}{dx^i} R_y\big(F(x,y), P(x,y)\big) = 0,\ i = 1,2,\dots,m;\ \ m = deg\, R_y(F,P) \tag{1.13}$$

$$\frac{d^i}{dy^i} R_x\big(F(x,y), P(x,y)\big) = 0,\ i = 1,2,\dots,n;\ \ m = deg\, R_x(F,P) \tag{1.14}$$

(системи розглядається відносно p_{ij}- коефіцієнтів багаточлена P, як відносно невідомих) має тільки тривіальні розв'язки , тобто:

$p_{ij} = 0$, для усіх $i, j = 0,1,\dots,k$, таких, що $1 \leq i + j \leq k$ [11,12].

2. 1-точкова лінза

Розглянемо розв’язання задачі для 1-точкової гравітаційної лінзи. Застосуємо наведенні вище теореми алгебраїчної геометрії.

Нехай 1-точкова лінза має координати: $a_1 = 0,\ b_1 = 0$.

Підставляючи координати лінзи відображення в $L: Y \to X$, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ y_2 = x_2 - \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}. \tag{2.1}$$

Рівняння системи визначені для всіх точок таких, що $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, тобто крім початку координат, точки $O(0,0)$. В початку координат відображення L терпить розрив.

$$\begin{cases} x_1 - y_1 - \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = 0 \\ x_2 - y_2 - \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)(x_1 - y_1) - x_1 = 0 \\ (x_1^2 + x_2^2)(x_2 - y_2) - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad (2.2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)(x_1 - y_1) - x_1 = 0 \\ (x_1^2 + x_2^2)(x_2 - y_2) - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_1^2 y_1 - x_2^2 y_1 - x_1 = 0 \\ x_1^2 x_2 + x_2^3 - x_1^2 y_2 - x_2^2 y_2 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Обчислимо результант R_{x_1} за ступенем x_1 для чого представимо рівняння у лексикографічному вигляді:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^3 - y_1 x_1^2 + (x_2^2 - 1)x_1 - x_2^2 y_1 = 0 \\ (x_2 - y_2)x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 y_2 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Результант за ступенем x_1 має вигляд:

$$R_{x_1} = R_{x_1}(\, x_1^3 - y_1 x_1^2 + (x_2^2 - 1)x_1 - x_2^2 y_1,$$
$$(x_2 - y_2)x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 y_2 - x_2\,) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -y_1 & x_2^2 - 1 & -x_2^2 y_1 & 0 \\ 0 & 1 & -y_1 & x_2^2 - 1 & -x_2^2 y_1 \\ x_2 - y_2 & 0 & x_2^3 - x_2^2 y_2 - x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - y_2 & 0 & x_2^3 - x_2^2 y_2 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - y_2 & 0 & x_2^3 - x_2^2 y_2 - x_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -y_1 & x_2^2 - 1 & -x_2^2 y_1 & 0 \\ 0 & 1 & -y_1 & x_2^2 - 1 & -x_2^2 y_1 \\ 0 & (x_2 - y_2)y_1 & x_2^2 - x_2 - y_2 & x_2^2 y_1 (x_2 - y_2) & 0 \\ 0 & 0 & (x_2 - y_2)y_1 & x_2^2 - x_2 - y_2 & x_2^2 y_1 (x_2 - y_2) \\ 0 & 0 & x_2 - y_2 & 0 & x_2^3 - x_2^2 y_2 - x_2 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\ldots = \begin{vmatrix} x_2^2 - x_2 - y_2 & x_2^2 y_1 (x_2 - y_2) & 0 \\ (x_2 - y_2)y_1 & x_2^2 - x_2 - y_2 & x_2^2 y_1 (x_2 - y_2) \\ x_2 - y_2 & 0 & x_2^3 - x_2^2 y_2 - x_2 \end{vmatrix} -$$

$$-(x_2-y_2)y_1\begin{vmatrix} -y_1 & x_2^2-1 & -x_2^2y_1 \\ (x_2-y_2)y_1 & x_2^2-x_2-y_2 & x_2^2y_1(x_2-y_2) \\ x_2-y_2 & 0 & x_2^3-x_2^2y_2-x_2 \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=-x_2^3y_1^2+x_2^2y_1^2y_2+x_2y_1^2-x_2^3y_2^2+x_2^2y_2^3$$

Маємо:

$$R_{x_1}=-x_2^3y_1^2+x_2^2y_1^2y_2+x_2y_1^2-x_2^3y_2^2+x_2^2y_2^3$$

Для того, щоб рівняння системи (2.1) мали спільну компоненту потрібно, щоб $R_{x_1}\equiv 0$.

Маємо:

$$-x_2^3y_1^2+x_2^2y_1^2y_2+x_2y_1^2-x_2^3y_2^2+x_2^2y_2^3\equiv 0$$

Застосовуючи теорему 4 для розкладності R_{x_1} на нерозкладні компоненти, маємо:

$$x_2(-(y_1^2+y_2^2)x_2^2+y_2(y_1^2+y_2^2)x_2+y_1^2)\equiv 0$$

Рівняння розпалося на два рівняння :

$x_2\equiv 0$

$-(y_1^2+y_2^2)x_2^2+y_2(y_1^2+y_2^2)x_2+y_1^2\equiv 0$

Кожне з рівнянь розглядається як багаточлен від x_2 . Багаточлен тотожно дорівнює нулю, тоді і тільки тоді, якщо всі його коефіцієнти дорівнюють нулю. Має місце система рівнянь:

$$\begin{cases} y_1^2+y_2^2=0 \\ y_1^2=0 \end{cases},$$

звідси маємо:

$$\begin{cases} y_1=0 \\ y_2=0 \end{cases}. \qquad (2.3)$$

Підставляючи в (2.1) маємо:

$$\begin{cases} x_1-\dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}=0 \\ x_2-\dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2}=0 \end{cases}. \qquad (2.4)$$

Рівняння системи (2.2) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} x_1\left(1-\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}\right)=0 \\ x_2\left(1-\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}\right)=0 \end{cases}. \qquad (2.5)$$

Система (2.5) розпадається на три системи на одне рівняння:

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}, \quad (2.5a); \quad \begin{cases} x_1=0 \\ 1-\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}=0 \end{cases}, \quad (2.5b); \quad \begin{cases} 1-\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}=0 \\ x_2=0 \end{cases}, \quad (2.5c)$$

$$1-\frac{1}{x_1^2+x_2^2}=0. \qquad (2.6)$$

Система $(2.5a)$ має рішення $x_1=0,\ x_2=0$, але це рішення не є рішенням. Системи $(2.5b)$, тому що рівняння системи в точці $O(0{,}0)$ не визначені.
Система $(2.5b)$ має два розв'язки : $x_1=0,\ x_2=\pm1$.
Система $(2.5c)$ має два розв'язки : $x_1=\pm1,\ x_2=0$.
Перетворюючи рівняння (2.6)маємо:

$$1-\frac{1}{x_1^2+x_2^2}=0 \Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2+x_2^2}=0 \Rightarrow x_1^2+x_2^2-1 = 0, \qquad (2.7)$$

Рівняння (2.7) є рівнянням одиничного кола в площині X, з центром в точці $O(0{,}0)$ - початку координат. Розв'язок систем $(2.5b)$і $(2.5c)$ задовольняє рівняння (2.7). Таким чином, розв'язком системи (2.2) є координати точок одиничного кола з центром у початку координат.

Аналітично обчислюємо результант R_{x_2} . В силу симетрії змінних маємо той же самий результат.

Таким чином, використавши методи алгебраїчної геометрії для досліджування рівняння 1-точкової гравітаційної лінзи, можна зробити висновок, що існує лише одне перетворення із нуль-мірного об'єкта в одномірний (точка переходить у кільце). Також, така ситуація можлива лише в одному випадку – коли джерело, лінза та спостерігач знаходяться на одній прямій.

3. 2-точкова лінза

Розглянемо 2-точкову гравітаційну лінзу з рівними масами

$$\boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{m_2} = ½.$$

Точкові маси знаходяться на осі абсцис на відстані ***a*** від початку координат на (Рис. 1.).

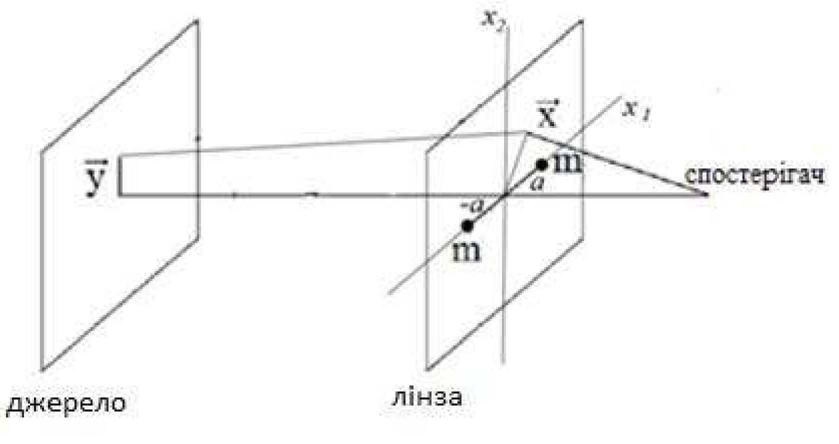

Рис.1. Симетрична бінарна лінза

В цьому випадку система (1.3) виглядає так:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_1 - a}{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_1 + a}{(x_1 + a)^2 + x_2^2} \\ y_2 = x_2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_2}{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_2}{(x_1 + a)^2 + x_2^2} \end{cases}, \qquad (3.1)$$

Перетворимо рівняння системи (3.1) до поліноміального вигляду, та представимо отримані багаточлени F_1 і F_2 в лексикографічному вигляді за зростаючими ступенями змінної x_1 маємо:

$$
\begin{cases}
F_1 = -a^2\left(a^2+2x_2^2y_1\right)+\left(a^2-x_2^2+\left(a^2+x_2^2\right)^2\right)x_1+2y_1\left(a^2-x_2^2\right)x_1^2+ \\
\qquad +\left(2x_2^2-1-2a^2\right)x_1^3+y_1x_1^4+x_1^5 \\
F_2 = \left(-a^2x_2-x_2^3+\left(a^2+x_2^2\right)^2\left(x_2-y_2\right)\right)+\left(-x_2-2\left(a^2-x_2^2\right)\left(x_2-y_2\right)\right)x_1^2+ \\
\qquad +\left(x_2-y_2\right)x_1^4
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

Виключимо з системи змінну x_1, за допомогою результанта $R_1=R(F_1,F_2)$. Матриця Сильвестра $S_1=S(F_1,F_2)$ має порядок (за x_1) $degF_1 + degF_2 = 9$. Тому що $R_1=det\ S_1$, маємо:

$$
\begin{aligned}
R_{x_1} &= 4a^4x_2^2\left(a^2+x_2^2\right)(-a^2y_2^3+\left(a^2y_2^2-y_2^2-4a^4y_2^2-4a^2y_2^4\right)x_2+ \\
&+(-4a^2y_2+4a^4y_2-4a^6y_2-y_1^2y^2-4a^2y_1^2y_2+8a^4y_1^2y_2-4a^2y_1^2y_2- \\
&-5y_2^3+4a^2y_2^3-8a^4y_2^3-4a^2y_2^5)x_2^2+(-4a^4+4a^6+y_1^2+4a^2y_1^2-8a^4y_1^2+ \\
&+4a^2y_1^4+y_2^2-12a^2y_2^2+8a^4y_2^2-8y_1^2y_2^2-8y_2^4+4a^2y_2^4)x_2^3-4(a^4y_2- \\
&-a^2y_2-y_1^2y_2-2a^2y_1^2y_2+y_1^4y_2-y_2^3+2a^2y_2^3+2y_1^2y_2^3+y_2^5)x_2^4+ \\
&+4\left(a^4-2a^2y_1^2+y_1^4+2a^2y_2^2+2y_1^2y_2^2+y_2^4\right)x_2^5),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Для того щоб рівняння системи мали загальну компоненту потрібно, щоб $R_{x_1} \equiv 0$.

Маємо:

$$
\begin{aligned}
&4a^4x_2^2\left(a^2+x_2^2\right)(-a^2y_2^3+\left(a^2y_2^2-y_2^2-4a^4y_2^2-4a^2y_2^4\right)x_2+(-4a^2y_2+ \\
&+4a^4y_2-4a^6y_2-y_1^2y_2^2-4a^2y_1^2y_2+8a^4y_1^2y_2-4a^2y_1^2y_2-5y_2^3+4a^2y_2^3- \\
&-8a^4y_2^3-4a^2y_2^5)x_2^2+(-4a^4+4a^6+y_1^2+4a^2y_1^2-8a^4y_1^2+4a^2y_1^4+y_2^2-12a^2y_2^2+ \\
&+8a^4y_2^2-8y_1^2y_2^2-8y_2^4+4a^2y_2^4)x_2^3-4(a^4y_2-a^2y_2-y_1^2y_2-2a^2y_1^2y_2+y_1^4y_2- \\
&-y_2^3+2a^2y_2^3+2y_1^2y_2^3+y_2^5)x_2^4+4\left(a^4-2a^2y_1^2+y_1^4+2a^2y_2^2+2y_1^2y_2^2+y_2^4\right)x_2^5) \equiv 0
\end{aligned}
$$

Рівняння розпадається на три тривіальних рівняння і одне нетривіальне : $a^4 \equiv 0$

$$x_2^2 \equiv 0$$

$$a^2+x_2^2 \equiv 0$$

З тривіальних витікає : що їх рішення зводяться до 1-лінзи , або незмістовні.

Маємо рівняння нетривіальне:

$$-a^2y_2^3+\left(a^2y_2^2-y_2^2-4a^4y_2^2-4a^2y_2^4\right)x_2+(-4a^2y_2+4a^4y_2-4a^6y_2-y_1^2y_2^2-$$

$$-4a^2y_1^2y_2+8a^4y_1^2y_2-4a^2y_1^2y_2-5y_2^3+4a^2y_2^3-8a^4y_2^3-4a^2y_2^5)x_2^2+$$

$$-4(a^4y_2-a^2y_2-y_1^2y_2-2a^2y_1^2y_2+y_1^4y_2-y_2^3+2a^2y_2^3+2y_1^2y_2^3+y_2^5)x_2^4+$$

$$+4\left(a^4-2a^2y_1^2+y_1^4+2a^2y_2^2+2y_1^2y_2^2+y_2^4\right)x_2^5\equiv 0$$

Прирівнюємо всі коефіцієнти до нуля, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -a^2=0 \\ a^2y_2^2-y_2^2-4a^4y_2^2-4a^2y_2^4=0 \\ -4a^2y_2+4a^4y_2-4a^6y_2-y_1^2y_2^2-4a^2y_1^2y_2+8a^4y_1^2y_2-4a^2y_1^2y_2- \\ -5y_2^3+4a^2y_2^3-8a^4y_2^3-4a^2y_2^5=0 \\ a^4y_2-a^2y_2-y_1^2y_2-2a^2y_1^2y_2+y_1^4y_2-y_2^3+2a^2y_2^3+2y_1^2y_2^3+y_2^5=0 \\ a^4-2a^2y_1^2+y_1^4+2a^2y_2^2+2y_1^2y_2^2+y_2^4=0 \end{cases}$$

Маємо:

$$a^4-2a^2y_1^2+y_1^4+2a^2y_2^2+2y_1^2y_2^2+y_2^4=0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ y_2=0 \\ -y_1^2y_2^2-5y_2^3=0 \\ -y_1^2y_2+y_1^4y_2-y_2^3+2y_1^2y_2^3+y_2^5=0 \\ y_1^4+2y_1^2y_2^2+y_2^4=0 \end{cases}$$

Далі

$$\begin{cases} a=0 \\ y_1=0 \\ y_2=0 \end{cases}.$$

Звідки слідує: це рішення рівняння редукує 2-точкову гравітаційну лінзу до 1-точкової.

Аналогічно обчислюємо результант R_2:

$$R_2=4a^4\left(a-x_1\right)x_1^2\left(a+x_1\right)(-a^2y_1^3+\left(y_1^2+a^2y_1^2+4a^4y_1^2-4a^2y_1^4-4a^2y_1^2y_2^2\right)x_1+$$

$$+(-4a^2y_1+4a^4y_1-4a^6y_1+5y_1^3+4a^2y_1^3+8a^4y_1^3-4a^2y_1^5+y_1y_2^2-4a^2y_1y_2^2-$$

$$-8a^4 y_1 y_2^2 - 8a^2 y_1^3 y_2^2 - 4a^2 y_1 y_2^4)x_1^2 + (4a^4 + 4a^6 - y_1^2 - 12a^2 y_1^2 - 8a^4 y_1^2 + 8y_1^4 +$$
$$+4a^2 y_1^4 - y_2^2 + 4a^2 y_2^2 + 8a^4 y_2^2 + 8y_1^2 y_2^2 + 8a^2 y_1^2 y_2^2 + 4a^2 y_2^4)x_1^3 +$$
$$+4\left(a^2 y_1^2 + a^4 y_1 - y_1^3 - 2a^2 y_1^3 + y_1^5 - y_1 y_2^2 + 2a^2 y_1 y_2^2 + 2y_1^3 y_2^2 + y_1 y_2^4\right)x_1^4 -$$
$$-4(a^4 - 2a^2 y_1^2 + y_1^4 + 2a^2 y_2^2 + 2y_1^2 y_2^2 + y_2^4)x_1^5).$$

Висновок: рішення системи (3.1) редукує 2-точкову гравітаційну лінзу до 1-точкової.

Таким чином маємо:

- для 1-точкової гравітаційної лінзи єдиним протяжним об'єктом є Кільце Ейнштейна.
- для 2-точкової гравітаційної лінзи протяжних об'єктів не існує взагалі.

4.Загальний випадок

Спираючись на дослідження, які були нами проведені вище, висуваємо гіпотезу:

для N-точкових гравітаційних лінз протяжних об'єктів не існує.

Для дослідження векторного рівняння (1.1) N-точкової гравітаційної лінзи і його розв'язання, в загальному випадку, ми пропонуємо квазіаналітичний метод. Метод складається з двох основних етапів:

- аналітичного, в якому ми зводимо задачу до системи поліноміальних рівнянь (1.2). Останню, в свою чергу, ми редукуємо до задачі знаходження коренів многочленів від однієї змінної,
- чисельного, в якому обчислюються корені многочленів від однієї змінної.

Зауваження. Аналітичний етап містить кінцеву кількість раціональних операцій, тому є абсолютно точним. На цьому етапі можливо застосувати символьне програмування (Wolfram Mathematica, Maple та інші). На чисельному етапі задача обчислення коренів полінома від однієї змінної аналітично, взагалі кажучи, не розв'язна, але для її вирішення існує велика кількість чисельних (стійких) методів які дозволяють знаходити коріння поліномів з будь-який наперед заданою точністю.

Список літератури

1. Bézout É. Théorie générale des Équations Algébriques. P.-D. Pierres, Paris. 1779

2. Эйнштейн А. Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности // Собрание научных трудов в 4 томах. М., 1965. Т. 1. С. 439 – 447.

3. Блиох П.В., Минаков А.А. Гравитационные линзы. Киев. Наукова думка, 1989. С. 240.

4.Вейнберг С. Гравитация и космология. М. Мир, 1975. С 696.

5.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М. Наука, 1988. Т.2 С 512.

6. Ван-дер-Варден Б.Л. Современная алгебра.Т.2. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947

7. Lang S. Algebra. Columbia University. New York, 1965. P.564.

8. Уокер.Р. Алгебраические кривые. -М. ИЛ., 1952. – 236 с.

9. Калинина Е.А., Утешев А.Ю.Теория исключения НИИ химии СПбГУ

Санкт–Петербург 2002

10. Котвицкий А.Т., Крючков Д.В. N – точечные мультиплоскостные гравитационные линзы. Вісник ХНУ, № 1113, серія «Фізика», вип. 20, 2014. с. 63-73.

11. Бронза С.Д. Критерий неприводимости многочленов от двух переменных над полем комплексних чисел. Збірник наукових праць, Харків, УкрДУЗТ 2016, вип.160 (додаток) с.114-115.

12. Bronza S.D., Kotvytskiy A.T. Mathematical bases of the theory of *N*-point gravitational lenses. Part 1. Elements of algebraic geometry, Вісник ХНУ, № 1120, серія «Фізика», вип. 26, 2017, с. 6-32.

У роботі, для дослідження одноточкової і двухточкової гравітаційних лінз застосовані методи алгебраїчної геометрії. Доведено неможливість існування протяжних об'єктів для двухточкової лінзи і існування максимум одного для одноточкової лінзи, а саме кільце Ейнштейна. Висунуто гіпотезу: протяжних об'єктів для N-точкової лінзи не існує. У роботі запропоновано новий, квазіаналітичний метод для вирішення проблем гравітаційного лінзування. Метод складається з двох послідовних етапів: аналітичний, заснованого на деяких теоремах алгебраїчної геометрії і чисельного, який застосовується для обчислення коренів поліномів від

однієї змінної. Для обчислення коренів таких поліномів, в загальному випадку, аналітичні методи не відомі (2017р.).

Ключові слова: гравітаційне лінзування, кільце Ейнштейна, алгебраїчна геометрі, результат, одноточкова гравітаційна лінза, двухточкова гравітаційна лінза, протяжні об’єкти у гравітаційних лінзах.

THE MATHEMATICAL CONTENT OF EINSTEIN RING AND CONDITIONS OF ITS ORIGIN. THE STUDY OF GENERAL CONDITIONS TERMS OF

Albert Kotvytskiy, Semen Bronza,
Volodymyr Shablenko, Ksenia Nerushenko

In the article, methods of algebraic geometry for the study of single-point and two-point gravitational lenses are applied. The impossibility of the existence of extended objects for a two-point lens and the existence of a maximum of one for a single-point lens, namely the Einstein ring, is proved. A hypothesis is advanced: there are no extended objects for an N-point lens. A new, quasi-analytical method for solving gravitational lensing problems is proposed. The method consists of two consecutive stages:

- Analytical, based on some theorems of algebraic geometry;
- Numerical, which is used to calculate the roots of polynomials from one variable. To calculate the roots of polynomials, in general, analytical methods are not known (2017).

Keywords: gravitational lensing, Einstein ring, algebraic geometry, resultat, single-point gravitational lens, two-point gravitational lens, extended objects for gravitational lenses.

ОЗОНОВИЙ ШАР ЗЕМЛІ КРИЧИТЬ SOS

Маргарита Олицька. Іван Олицький

«…Над полюсом сквозит озонная дыра.
О чем сие гласит? Опомниться пора!
Скажи, губитель вод, всего живого враг,
зачем небесный свод ты превратил в дуршлаг?
Ты говоришь:"Прогресс!" Ты знаешь, что почем.
А в дырку бес пролез с убийственным лучом…»
Глеб Горбовський (1989)