МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механіки і проектування машин

КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахунково-графічних робіт
з дисципліни
«*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*»

Розділ
ДИНАМІКА

Харків – 2018

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 26 грудня 2017 р., протокол № 5.

Рекомендуються для студентів усіх спеціальностей будівельного та механіко-енергетичного факультетів денної форми навчання.

Укладачі:

доценти О. В. Оробінський, Н. А. Аксьонова

Рецензент

проф. О. В. Братченко

КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахунково-графічних робіт
з дисципліни
«*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*»

Розділ
ДИНАМІКА

Відповідальний за випуск Аксьонова Н. А.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 05.04.18 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2.25. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механіко-енергетичного та будівельного факультетів на I та II курсах дисципліни “Теоретична механіка”. При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів “Статика”, “Кінематика”, “Динаміка”. Під час вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять і виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР).

Тематика даних методичних вказівок «Коливальний рух матеріальної точки» є однією з найскладніших у розділі «Динаміка точки». Вищесказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичних вказівок до виконання розрахунково-графічних робіт для студентів будівельного та механіко-енергетичного факультетів, які дають комплексне уявлення про склад, тематику та загальний обсяг окремої задачі розділу, типовий звіт з принципами виконання та варіанти завдання для РГР, містять питання для самоконтролю та підготовки до тестування, іспиту (або заліку), а також рекомендовану літературу.

Методичні вказівки призначено для студентів денної форми навчання всіх спеціальностей.

1 Методичні поради до виконання розрахунково-графічних робіт

Програмою дисципліни „Теоретична механіка” передбачено виконання розрахунково-графічних робот (РГР) з розділу „Динаміка”.

Зміст РГР, а саме номери варіантів уточнюються викладачем під час аудиторних занять.

Кожна задача супроводжується рисунками і таблицею (номери рисунка з тим самим номером, що і умова задачі в таблиці).

РГР виконуються на форматі А4. Типові звіти до РГР здійснюються відповідно до встановлених вимог: на ній обов’язково вказуються назва кафедри, назва дисципліни, номер роботи, рік, прізвище та ініціали студента.

Розв’язання задач повинно супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв’язання задач повинні бути виконані акуратно з застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх використовуваних величин: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Слід звернути увагу на те, що розрахункова схема виконується строго згідно з вихідними даними свого варіанта задачі, і тоді в більшості випадків вона має бути простішою, ніж на загальному рисунку.

Розрахунково-графічні роботи, що не відповідають усім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

2 Теоретичні рекомендації

Прямолінійні гармонічні коливання матеріальної точки. Види коливань

Коливальний рух матеріальної точки М відбувається за умови, що на точку, відхилену від стану спокою О, діє сила $\overline{P}$, що намагається повернути точку в те саме положення.

Сила $\overline{P}$, яка намагається повернути матеріальну точку М в положення рівноваги О, називається **відновлюючою силою** (рисунок 1).

Матеріальна точка М рухається прямолінійно вздовж осі OX під дією тільки **відновлюючої сили**, яка пропорційна відхиленню точки від зрівноваженого положення: $\overline{P} = c \cdot \overline{OM}$, де c – **постійний коефіцієнт пропорційності** (коефіцієнт пружності).

Прикладом відновлюючої сили може бути сила пружності, або сила тяжіння. Проекція відновлюючої сили $\overline{P}$ на вісь OX (рисунок 1) $P_x = -c \cdot x$.

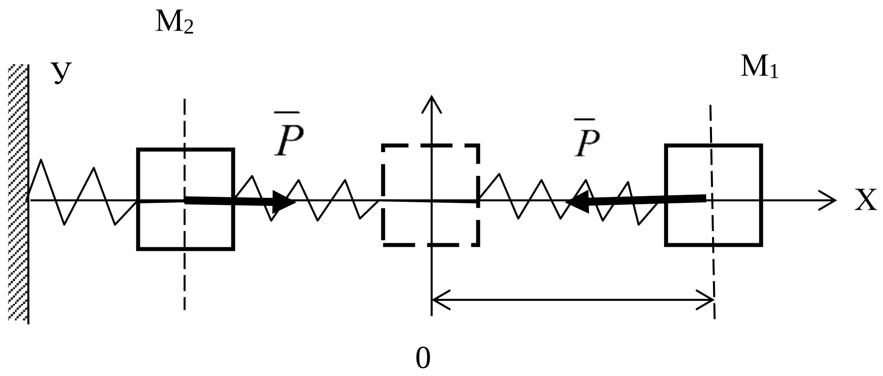


Рисунок 1

Положення точки М:
M_1 (пружина розтягнута) $Px = -c \cdot x$;
M_2 (пружина стиснута) $Px = c \cdot x$.

Коливальним рухом називається рух, який характеризується багаторазовим проходженням положення рівноваги.

Види коливального руху матеріальної точки:

1) **вільні коливання**, які створюються тільки під дією відновлюючої сили $\overline{F}$;

2) вільні коливання, які створюються під дією відновлюючої сили та сили опору середовища (**загасальні** коливання);

3) **вимушені коливання**, які створюються під дією відновлюючої сили та сили періодичного характеру, яка називається збуреною силою;

4) **вимушені коливання**, які створюються під дією відновлюючої сили, збуреної сили та сили опору середовища.

Перед виконанням завдання пропонується стислий огляд основних математичних і геометричних моделей коливань точки відповідно до їх видів.

2.1 Вільні коливання матеріальної точки

Сила: відновлююча сила $P_x = -c \cdot x$, де c – постійний коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт пружності).

Диференціальне рівняння $\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$, де $\dfrac{c}{m} = k^2$.

Розв'язання: $x = a \cdot \sin(kt + \alpha)$ – закон вільних коливань.

Параметри

Швидкість точки $\dot{x} = ak \cdot \sin(kt + \alpha)$.

Власна або колова (циклічна) частота $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – величина, яка визначає кількість коливань матеріальної точки за 2π коливань.

Період коливань $T = \dfrac{2\pi}{k}$– проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання.

Амплітуда коливань $a = \sqrt{x_0^2 + (\dfrac{\dot{x}_0^2}{k})}$ – величина, яка дорівнює найбільшому відхиленню точки від центра коливань. Визначається за початковими умовами $t_0 = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Фаза коливань – $(kt + \alpha)$.

Початкова фаза α визначає фазу початку коливань, відповідає початковим умовами ($t_0 = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$): $tg\alpha = \dfrac{kx_0}{\dot{x}_0}$.

Початкове положення точки $x_0 = a \cdot \sin\alpha$.

Графік вільних коливань наведено на рисунку 2.

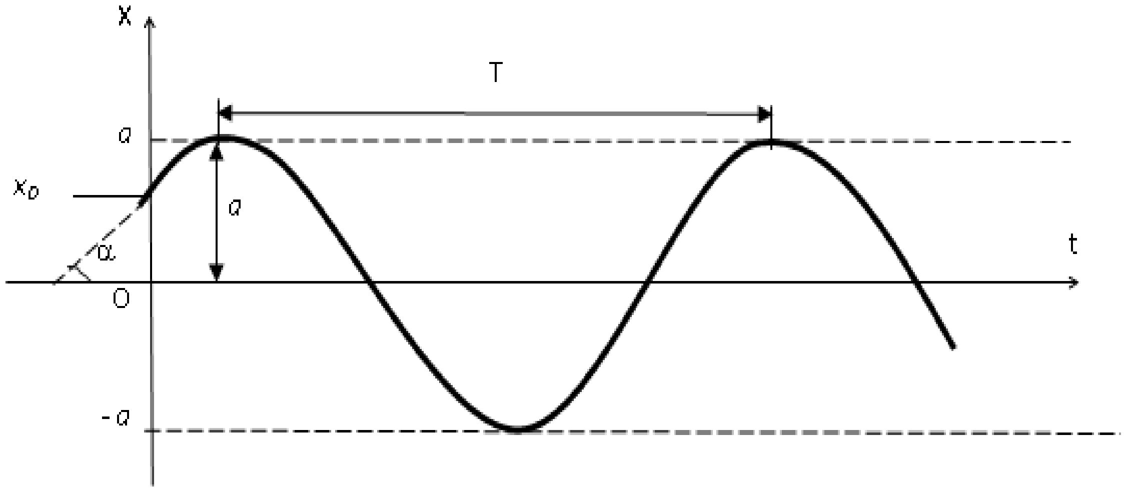


Рисунок 2

2.2 Загасальні коливання матеріальної точки

Сили: відновлююча сила $P_X = -c \cdot x$;

сила опору середовища $R_X = -\lambda \cdot \dot{x}$, де λ – коефіцієнт пропорційності, що характеризує опір середовища.

Диференціальне рівняння $\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = 0$,

де $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – власна частота (частота вільних коливань);

$n = \dfrac{\lambda}{2m}$ – коефіцієнт загасання, характеризує опір середовища.

Розв'язання:

а) випадок малого опору $n < k$:

закон загасальних коливань $x = a \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$,

де $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – частота загасальних коливань.

Амплітуда загасальних коливань $a \cdot e^{-nt}$,

де (e^{-nt}) – декремент загасання.

Період загасальних коливань

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-(\frac{n}{k})^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-(\frac{n}{k})^2}} \approx T(1+\frac{1}{2}\frac{n^2}{k^2}),$$

де $T = \dfrac{2\pi}{k}$ – період вільних коливань.

Якщо опір дуже малий ($n \langle\langle k$), то $T_1 \approx T$.

Графік загасальних коливань наведено на рисунку 3.

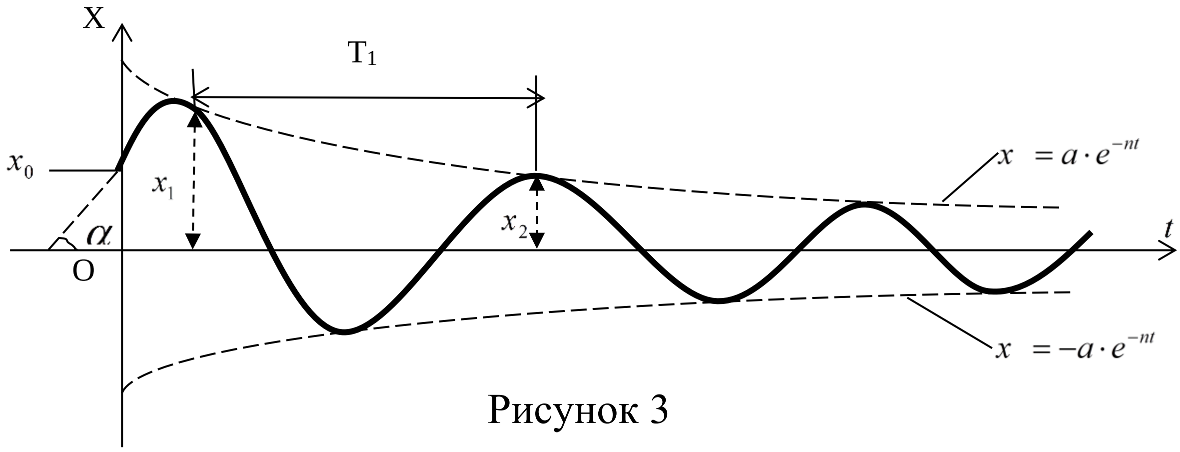
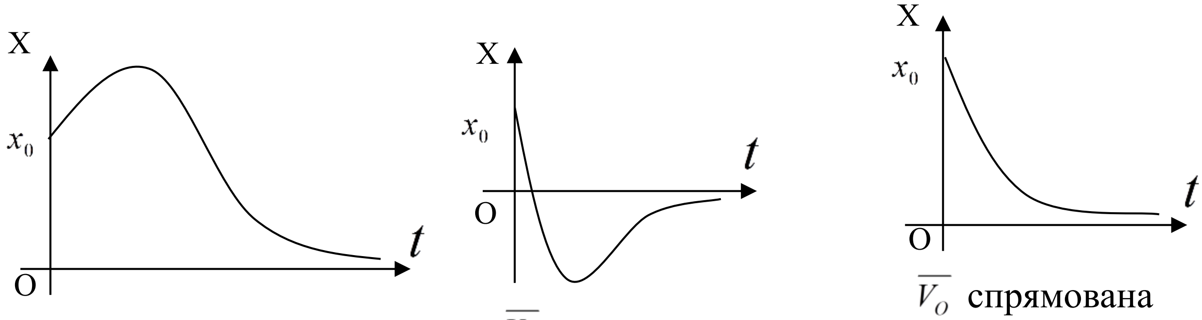


Рисунок 3

б) випадок відсутності опору n =0 призводить до вільних коливань матеріальної точки;

в) випадок великого опору $n \geq k$ призводить рух матеріальної точки до втрати коливального характеру, до аперіодичного руху.

Графіки аперіодичного руху точки наведены на рисунку 4.



$\overline{V_O}$ спрямована за *OX*

$\overline{V_O}$ спрямована протилежно OX ($\overline{V_O}$ великої величини)

$\overline{V_O}$ спрямована протилежно OX ($\overline{V_O}$ малої величини)

Рисунок 4

2.3 Вимушені коливання матеріальної точки

Сили: відновлююча сила $P_X = -c \cdot x$;

збурена сила $Qx = H\sin(pt + \delta)$,

де H – амплітуда збуреної сили; p – частота збуреної сили; $\tau = \dfrac{2\pi}{p}$ – період збуреної сили; $(pt + \delta)$ – фаза збуреної сили, δ – початкова фаза збуреної сили.

Диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = h \cdot \sin(pt + \delta),$$

де $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – власна частота (частота вільних коливань); $h = \dfrac{H}{m}$.

Амплітудне рішення $x = a \cdot \sin(kt + \alpha) + \dfrac{h}{(k^2 - p^2)}\sin(pt + \delta)$,

де $\dfrac{h}{(k^2 - p^2)} = A$ – амплітуда вимушених коливань;

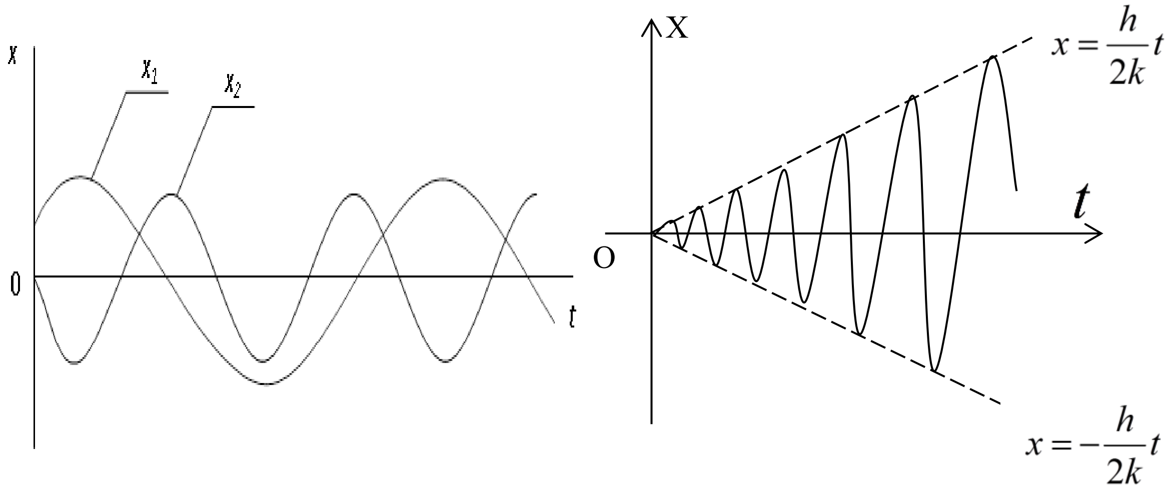
a і α – постійні інтегрування, які визначаються за початковими умовами.

Розв’язання

При $p \neq k$

$x = a \cdot \sin(kt + \alpha) + \dfrac{h}{(k^2 - p^2)}\sin(pt + \delta)$ – закон вимушених коливань.

Графіки вимушених коливань наведено на рисунку 5.



При $p = k$ – резонанс

Рисунок 5

3 Завдання і типові звіти

Динаміка матеріальної точки.
Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Дослідження коливального руху матеріальної точки

Варіанти 1–5 (рисунок 6)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m_D (варіанти 2 та 4) чи системи вантажів D і E масами m_D і m_E (варіанти 1, 3, 5) відносно осі X, початок відліку сумістити з положенням спокою вантажу D чи відповідно вантажів D і E (при статичній деформації пружин). Стрижні, які з'єднують вантажі, вважати невагомими та недеформованими.

Варіант 1. Вантаж D ($m_D = 2\ кг$) прикріплений до бруска AB, який підвішений до двох однакових паралельних пружин, коефіцієнт жорсткості кожної з них $c = 3\ \frac{Н}{см}$. Точка прикріплення вантажу D знаходиться на рівних відстанях від осей пружин.

У деякий час до вантажу D підвішують вантаж E ($m_E = 1\ кг$). Опір руху системи двох вантажів пропорційний швидкості $R = 12V\ Н$, де V – швидкість, $\frac{м}{с}$.

Масою абсолютно жорсткого бруска AB та масою частини демпфера, яка прикріплена до бруска, нехтувати.

Варіант 2. У момент, коли стрижень, що з'єднує вантажі D ($m_D = 1\ кг$) та E ($m_E = 2\ кг$), перерізають, точка B (верхній кінець послідовно з'єднаних пружин) починає здійснювати рух за законом $\xi = 1{,}5 \sin 18t\ см$ (вісь ξ спрямована вертикально вниз). Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 12\ \frac{Н}{см}$, $c_2 = 36\ \frac{Н}{см}$.

Варіант 3. Вантаж D ($m_D = 0{,}8\ кг$) висить на пружині, яка прикріплена в точці F до бруска AB та має коефіцієнт жорсткості $c_1 = 10\ \frac{H}{см}$. Брусок підвішений до двох паралельних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_2 = 4\ \frac{H}{см}$, $c_3 = 6\ \frac{H}{см}$, точка F знаходиться на відстані a та b від осей цих пружин: $\frac{a}{b} = \frac{c_3}{c_2}$.

У деякий момент часу до вантажу D підвішують вантаж E ($m_E = 1{,}2\ кг$). У той самий момент системі вантажів надають швидкість $V_0 = 0{,}2\ \frac{м}{c}$, яка спрямована вниз.

Масою абсолютно жорсткого бруска AB нехтувати.

Варіант 4. Статична деформація кожної з двох однакових паралельних пружин під дією вантажів D ($m_D = 0{,}5\ кг$) та E ($m_E = 1{,}5\ кг$) $f_{cm} = 4\ см$. Вантажі підвішені до пружин за допомогою жорсткого бруска AB. У деякий момент часу стрижень, який з'єднує вантажі, перерізають. Опір руху вантажу D пропорційний швидкості $R = 6V\ H$, де V – швидкість, $\frac{м}{c}$.

Масою бруска AB та масою частини демпфера, яка прикріплена до бруска, нехтувати.

Варіант 5. Водночас з підвішуванням до вантажу D ($m_D = 1{,}6\ кг$), який висить на пружині, що має жорсткість $c = 4\ \frac{H}{см}$, вантажу E ($m_E = 2{,}4\ кг$) точка B (верхній кінець пружини) починає здійснювати рух за законом $\xi = 2\sin 5t\ см$ (вісь ξ спрямована вертикально вниз).

Примітка – положення початку відліку на осі X відповідає середньому положенню точки B ($\xi = 0$).

Варіанти 6–10 (рисунки 6, 7)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m_D, який рухається вздовж гладкої похилої площини, яка складає з горизонтом кут α, з моменту стикання вантажу з пружиною чи системою пружин, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від пружин не відділяється. Рух вантажу віднести до осі X, прийнявши за початок відліку положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 6. Вантаж D ($m_D = 4\ кг$), який пройшов без початкової швидкості по похилій площині ($\alpha = 30°$) відстань $s = 0{,}1\ м$, вдаряється об недеформовані, послідовно з'єднані пружини, які мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 48\ \frac{Н}{см}$ та $c_2 = 24\ \frac{Н}{см}$.

Варіант 7. У деякий момент часу вантаж D ($m_D = 2\ кг$) приєднують без початкової швидкості до кінця A недеформованих послідовно з'єднаних пружин, які мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 12\ Н/см$ та $c_2 = 6\ Н/см$. У той самий момент часу ($t = 0$) другий кінець пружин B починає здійснювати рух вздовж похилої площини ($\alpha = 45°$) за законом $\xi = 0{,}02 \sin 20t\ м$ (вісь ξ спрямована вздовж нахиленої площини вниз).

Примітка – положення початку відліку на осі x відповідає середньому положенню точки B ($\xi = 0$).

Варіант 8. Дві паралельні пружини 1 і 2, які мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 4\ \frac{Н}{см}$ та $c_2 = 6\ \frac{Н}{см}$, з'єднані бруском AB, у точці K якого прикріплена пружина 3 з коефіцієнтом жорсткості $c_3 = 15\ \frac{Н}{см}$. Точка K знаходиться на відстані a та b

від осей цих пружин: $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$. Пружини 1, 2, 3 не деформовані. Вантаж D ($m_D = 1{,}5$ $кг$) приєднують до кінця N пружини 3, у той самий час вантажу D надають швидкість $V_0 = 0{,}5$ $\frac{м}{с}$, яка спрямована вниз паралельно похилій площині ($\alpha = 45°$).

Масою абсолютно жорсткого бруска AB нехтувати.

Варіант 9. Вантаж D ($m_D = 1{,}2$ $кг$), який пройшов без початкової швидкості по похилій площині ($\alpha = 30°$) відстань $s = 0{,}2$ $м$, вдаряється об недеформовану пружину, коефіцієнт жорсткості якої $c_2 = 4{,}8$ $\frac{Н}{см}$. У той самий момент часу ($t = 0$) точка B (нижній кінець пружини) починає здійснювати рух вздовж похилої площини за законом $\xi = 0{,}03 \sin 12t$ $м$ (вісь ξ спрямована вздовж похилої площини вниз).

Примітка – положення початку відліку на осі X відповідає середньому положенню точки B ($\xi = 0$).

Варіант 10. Вантаж D ($m_D = 1$ $кг$) прикріпляють до середини бруска AB, який з'єднує кінці двох однакових паралельних пружин, і не надають початкової швидкості; пружини не деформовані. Коефіцієнти жорсткості пружин $c = 1{,}5$ $\frac{Н}{см}$. Опір руху вантажу пропорційний швидкості $R = 8V$ $Н$, де V – швидкість, $\frac{м}{с}$, $\alpha = 60°$.

Масою бруска AB та масою частини демпфера, яка прикріплена до бруска, нехтувати.

Варіанти 11–15 (рисунки 7, 8)

Вантаж D масою m_D закріплений на кінці невагомого стрижня, який може обертатися у площині креслення навколо осі E. Вантаж з'єднаний з пружиною чи системою пружин;

вертикальне положення стрижня відповідає недеформованим пружинам. Вважаючи, що вантаж D, який приймається за матеріальну точку, рухається по прямій, визначити рух цього вантажу.

Рух вантажу віднести до осі X, прийнявши за початок відліку точку, яка відповідає положенню спокою вантажу (при недеформованих пружинах).

Варіант 11. Вантаж D $(m_D = 2{,}4\ кг)$ з'єднаний з точкою F бруска AB, який з'єднує кінці двох паралельних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_1 = 1\ \frac{Н}{см}$ та $c_2 = 1{,}4\ \frac{Н}{см}$. Точка F знаходиться на відстані a та b від осей цих пружин: $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$.

Вантаж D відхиляють на величину $\lambda = 2\ см$ вліво від положення, яке відповідає вертикальному положенню стрижня, і відпускають без початкової швидкості. Опір руху вантажу пропорційний швидкості $R = 6V\ Н$, де V – швидкість, $\frac{м}{с}$, $\alpha = 60°$. Масою абсолютно жорсткого бруска AB та масою демпфера нехтувати.

Варіант 12. У деякий момент часу вантаж D $(m_D = 3\ кг)$, що утримується в положенні, при якому пружина стиснута на величину $\lambda = 2\ см$, відпускають без початкової швидкості. Коефіцієнт жорсткості пружини $c = 9\ \frac{Н}{см}$. Водночас $(t = 0)$ точка B (правий кінець пружини) починає здійснювати рух за законом $\xi = 1{,}2 \sin 8t\ см$ (вісь ξ спрямована горизонтально вліво).

Примітка – положення початку відліку на осі x відповідає середньому положенню точки B $(\xi = 0)$.

Варіант 13. Вантаж D ($m_D = 1\ кг$) прикріплений до кінця пружини, яка має коефіцієнт жорсткості $c_1 = 12\ \frac{Н}{см}$ і з'єднана іншим кінцем з точкою F бруска AB. Брусок AB зв'язує кінці двох паралельних пружин, коефіцієнт жорсткості кожної з яких $c = 3\ \frac{Н}{см}$. Точка F знаходиться на рівних відстанях від осей паралельних пружин. Вантажу при вертикальному положенні стрижня надають швидкість $V_0 = 0{,}5\ \frac{м}{с}$, яка спрямована праворуч. Опір руху вантажу пропорційний швидкості $R = 12V\ Н$, де V – швидкість, $\frac{м}{с}$. Шток демпфера пропущений через отвір у невагомому бруску AB та з'єднаний з вантажем D.

Варіант 14. Вантаж D ($m_D = 1{,}5\ кг$) прикріплений однією стороною до кінця пружини, яка має жорсткість $c_1 = 4{,}4\ \frac{Н}{см}$, а другою – до кінця двох послідовно з'єднаних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_2 = 2\ \frac{Н}{см}$ та $c_3 = 8\ \frac{Н}{см}$.

Вантаж відхиляють на величину $\lambda = 2{,}5\ см$ вліво від його положення, яке відповідає вертикальному положенню стрижня, і відпускають, водночас надаючи початкову швидкість $V_0 = 0{,}4\ \frac{м}{с}$, що спрямована вправо.

Варіант 15. Вантаж D ($m_D = 1{,}0\ кг$) прикріплений до кінця A послідовно з'єднаних пружин. Другий кінець пружин B рухається за законом $\xi = 1{,}8 \sin 12t\ см$ (вісь ξ спрямована горизонтально вліво). Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 4\ \frac{Н}{см}$ та $c_2 = 12\ \frac{Н}{см}$.

При $t = 0$ вантаж знаходиться в положенні спокою, яке відповідає недеформованим пружинам.

Примітка – положення початку відліку на осі X відповідає середньому положенню точки B ($\xi = 0$).

Варіанти 16–20 (рисунки 8, 9)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m_D (варіанти 17 та 19) чи системи вантажів D і E масами m_D і m_E (варіанти 16, 18, 20) відносно осі X, початок відліку сумістити з положенням спокою вантажу D чи відповідно вантажів D і E (при статичній деформації пружин). Вважається, що вантажі D і E при сумісному русі не відділяються.

Варіант 16. Пружина 1, на якій знаходиться вантаж D ($m_D = 10\ кг$), опирається в точці F на брусок AB, що з'єднує кінці двох паралельних пружин 2 і 3. Коефіцієнти жорсткості пружин 1, 2, 3 відповідно дорівнюють $c_1 = 200\ \frac{Н}{см}$, $c_2 = 160\ \frac{Н}{см}$, $c_3 = 140\ \frac{Н}{см}$. Точка F знаходиться на відстані a та b від осей пружин: $\frac{a}{b} = \frac{c_3}{c_2}$.

У деякий момент часу на вантаж D встановлюють вантаж E ($m_E = 20\ кг$), водночас системі вантажів надають швидкість $V_0 = 0,4\ \frac{м}{с}$, яка спрямована вниз.

Масою абсолютно жорсткого бруска AB нехтувати.

Варіант 17. У деякий момент часу вантаж E знімають з вантажу D (обидва вантажі знаходяться у стані спокою, який відповідає статичній деформації пружини). Циклічна частота власних коливань системи вантажів D і E на пружині $\omega = 20\ с^{-1}$, відношення мас $\frac{m_D}{m_E} = \frac{2}{3}$.

Варіант 18. Статична деформація кожної з двох однакових паралельних пружин під дією вантажу D ($m_D = 20\ кг$)

дорівнює $f_{стD} = 2\ см$. У деякий момент часу на вантаж D встановлюють вантаж E ($m_E = 10\ кг$). Опір руху системи двох вантажів пропорційний швидкості $R = 60\sqrt{3}V\ H$, де V – швидкість, $\frac{м}{с}$.

Масою абсолютно жорсткого бруска AB та масою частини демпфера, яка прикріплена до бруска, нехтувати.

Варіант 19. Два вантажі D ($m_D = 15\ кг$) та E ($m_E = 25\ кг$) знаходяться в стані покою на послідовно розташованих пружинах, які мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 250\ \frac{H}{см}$, $c_2 = 375\ \frac{H}{см}$. У момент часу, коли знімають вантаж E, точка B обпирання пружин починає здійснювати рух за законом $\xi = 0{,}5\sin 30t\ см$ (вісь ξ спрямована вертикально вниз).

Примітка – положення початку відліку на осі X відповідає середньому положенню точки B ($\xi = 0$).

Варіант 20. На вантаж D, який знаходиться у стані спокою, що відповідає статичній деформації пружини, у деякий момент часу встановлюють вантаж E. Водночас системі двох вантажів надають швидкість $V_0 = 0{,}3\ \frac{м}{с}$, яка спрямована вниз. Циклічна частота власних коливань вантажу D на пружині $\omega_D = 24\ \ c^{-1}$, відношення мас $\frac{m_E}{m_D} = 3$.

Варіанти 21–25 (рисунки 9, 10)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m_D, що рухається по гладкій похилій площині, яка складає з горизонтом кут α. Рух вантажу віднести до осі X, прийнявши за початок відліку положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 21. У деякий момент часу вантаж D ($m_D = 2\ кг$) прикріпляють до кінців недеформованих пружин, які мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 7\ \frac{Н}{см}$, $c_2 = 3\ \frac{Н}{см}$. Водночас вантажу надають швидкість $V_0 = 0{,}4\ \frac{м}{с}$, яка спрямована вздовж похилої площини вниз ($\alpha = 45°$).

Варіант 22. Вантаж D знаходиться на похилій площині ($\alpha = 30°$) у стані спокою, який відповідає статичній деформації пружини $f_{ст} = 2\ см$. У деякий момент часу ($t = 0$) точка B починає здійснювати рух вздовж похилої площини за законом $\xi = 0{,}01 \sin 10t\ \ м$ (вісь ξ спрямована вздовж похилої площини вниз).

Примітка – положення початку відліку на осі X відповідає середньому положенню точки B ($\xi = 0$).

Варіант 23. Вантаж D ($m_D = 3\ кг$) прикріпляють до точки F бруска AB, який з'єднує кінці двох недеформованих паралельних пружин, і відпускають без початкової швидкості. Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 2\ \frac{Н}{см}$, $c_2 = 4\ \frac{Н}{см}$. Точка F знаходиться на відстані a та b від осей пружин: $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$, $\alpha = 60°$. Опір руху вантажу пропорційний швидкості $R = 12V\ Н$, де V – швидкість, $\frac{м}{с}$. Масою бруска AB та масою демпфера нехтувати.

Варіант 24. У деякий момент часу вантаж D ($m_D = 1\ кг$) прикріпляють до кінця A недеформованих послідовно з'єднаних пружин, які мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 12\ \frac{Н}{см}$, $c_2 = 4\ \frac{Н}{см}$ і відпускають без початкової швидкості.

Водночас ($t = 0$) інший кінець пружин B починає здійснювати рух вздовж похилої площини за законом

$\xi = 1{,}5\sin 10t$ *см*. Вісь ξ спрямована вздовж похилої площини вниз ($\alpha = 30°$).

Примітка – положення початку відліку на осі X відповідає середньому положенню точки B ($\xi = 0$).

Варіант 25. Кінці двох однакових паралельних пружин з'єднані бруском AB. Статична деформація кожної з пружин під дією вантажу D ($m_D = 1{,}5$ *кг*), який знаходиться на похилій площині ($\alpha = 30°$), $f_{cm} = 4{,}9$ *см*. У деякий момент часу вантажу D надають швидкість $V_0 = 0{,}3\ \frac{м}{с}$, яка спрямована вздовж похилої площини вгору.

Опір руху вантажу пропорційний швидкості $R = 6V$ *Н*, де V – швидкість, $\frac{м}{с}$. Масою абсолютно жорсткого бруска AB та масою частини демпфера, яка зв'язана з ним, нехтувати.

Варіанти 26–30 (рисунок 10)

Нехтуючи масою плити та вважаючи плиту абсолютно жорсткою, знайти рівняння руху вантажу D масою m_D в момент стикання його з плитою, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється.

Рух вантажу віднести до осі X, прийнявши за початок відліку положення спокою цього вантажу (при статичній деформації пружини).

Варіант 26. Плита лежить на двох паралельних пружинах, які мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 600\ \frac{Н}{см}$, $c_2 = 400\ \frac{Н}{см}$. Вантаж D ($m_D = 50$ *кг*) падає без початкової швидкості з висоти $h = 0{,}1$ *м* в точку F плити. Точка F знаходиться на відстані a та b від осей пружин: $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$.

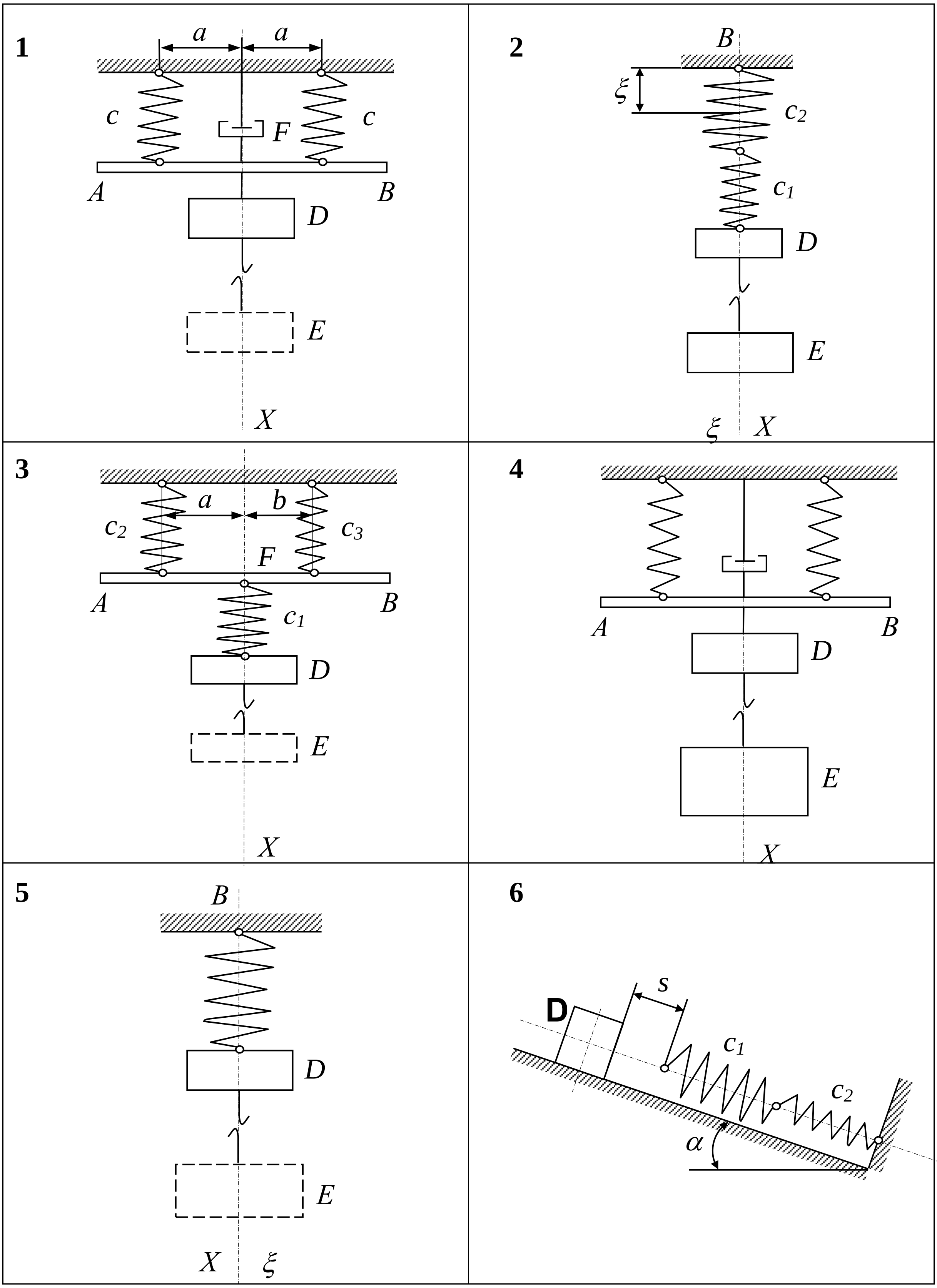
Варіант 27. Коефіцієнт жорсткості кожної з двох паралельних пружин, на яких лежить плита, $c = 130\ \frac{Н}{см}$. Вантаж D ($m_D = 40\ кг$) встановлюють на середину плити і відпускають без початкової швидкості при недеформованих пружинах. Опір руху вантажу пропорційний швидкості $R = 400V\ Н$, де V – швидкість, $\frac{м}{с}$. Масою демпфера нехтувати.

Варіант 28. Вантаж D падає на плиту з висоти $h = 5\ см$. Статичний прогин пружини під дією ваги D дорівнює $f_{ст} = 1\ см$.

Варіант 29. Плита лежить на двох однакових паралельних пружинах, які мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = c_2 = c = 400\ \frac{Н}{см}$. У деякий момент часу вантаж D ($m_D = 200\ кг$) встановлюють на середину плити і водночас прикріпляють до недеформованої пружини 3, яка має коефіцієнт жорсткості $c_3 = 200\ \frac{Н}{см}$. У той самий час (при недеформованих пружинах) вантажу надають швидкість $V_0 = 0{,}6\ \frac{м}{с}$, яка спрямована вниз.

Варіант 30. У деякий момент часу вантаж D ($m_D = 100\ кг$) встановлюють на плиту і відпускають (при недеформованих пружинах) без початкової швидкості. У той самий момент часу точка B (нижній кінець пружини) починає здійснювати рух по вертикалі за законом $\xi = 0{,}5 \sin 20t\ см$ (вісь ξ спрямована вниз). Коефіцієнт жорсткості пружини $c = 2000\ \frac{Н}{см}$.

Примітка – положення початку відліку на осі X відповідає середньому положенню точки B ($\xi = 0$).



1
a
a
c
F
c
A
B
D
E
X
2
B
ξ
c2
c1
D
E
ξ
X
3
a
b
c2
c3
F
A
B
c1
D
E
X
4
A
B
D
E
X
5
B
D
E
X
ξ
6
s
D
c1
c2
α
X

Рисунок 6

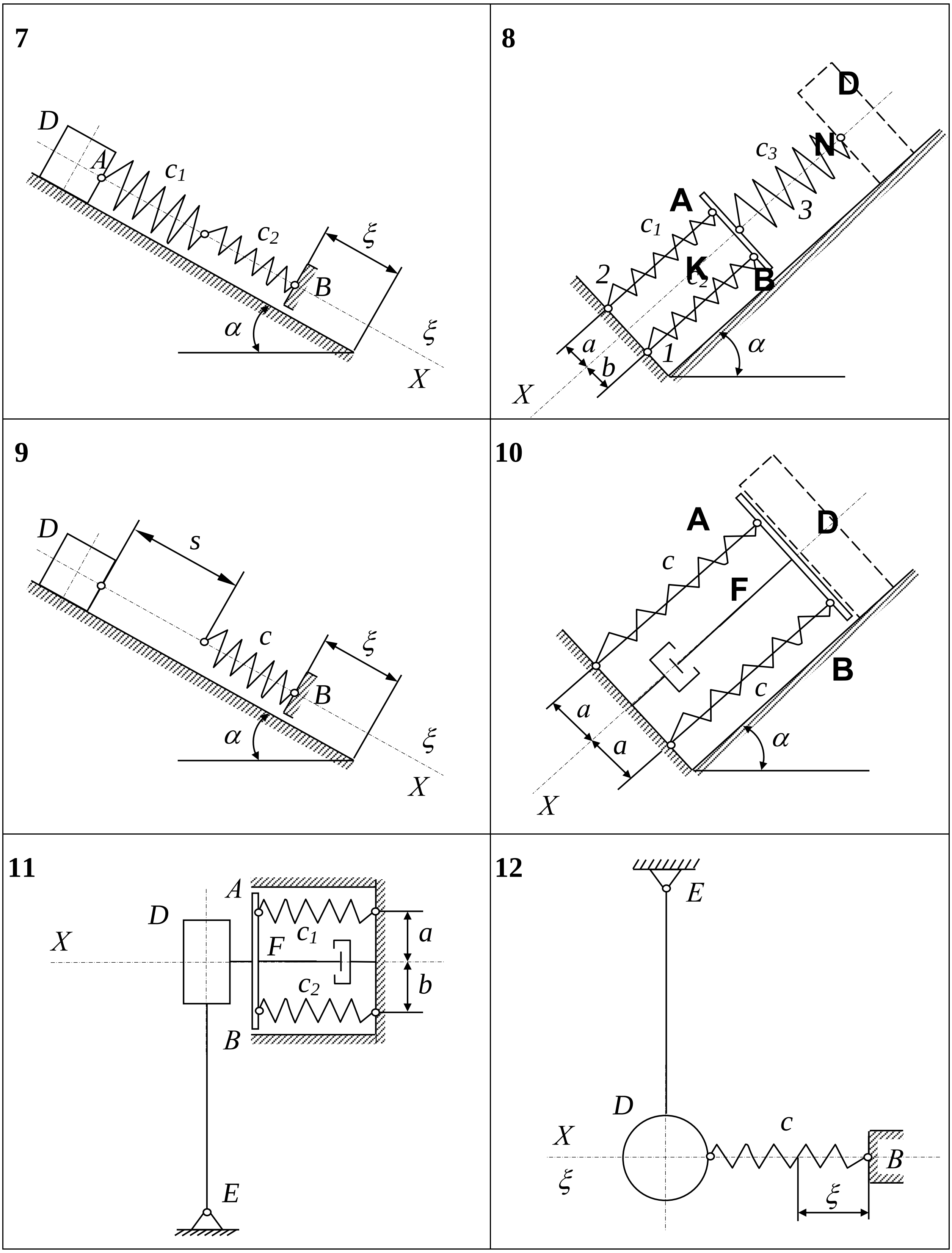

7
D
A
c1
c2
B
ξ
α
ξ
X
8
D
N
c3
A
3
c1
2
K
c2
B
a
b
1
α
X
9
D
s
c
B
ξ
α
ξ
X
10
A
D
c
F
B
c
a
a
α
X
11
A
D
X
c1
F
a
c2
b
B
E
12
E
D
c
X
ξ
B
ξ

Рисунок 7

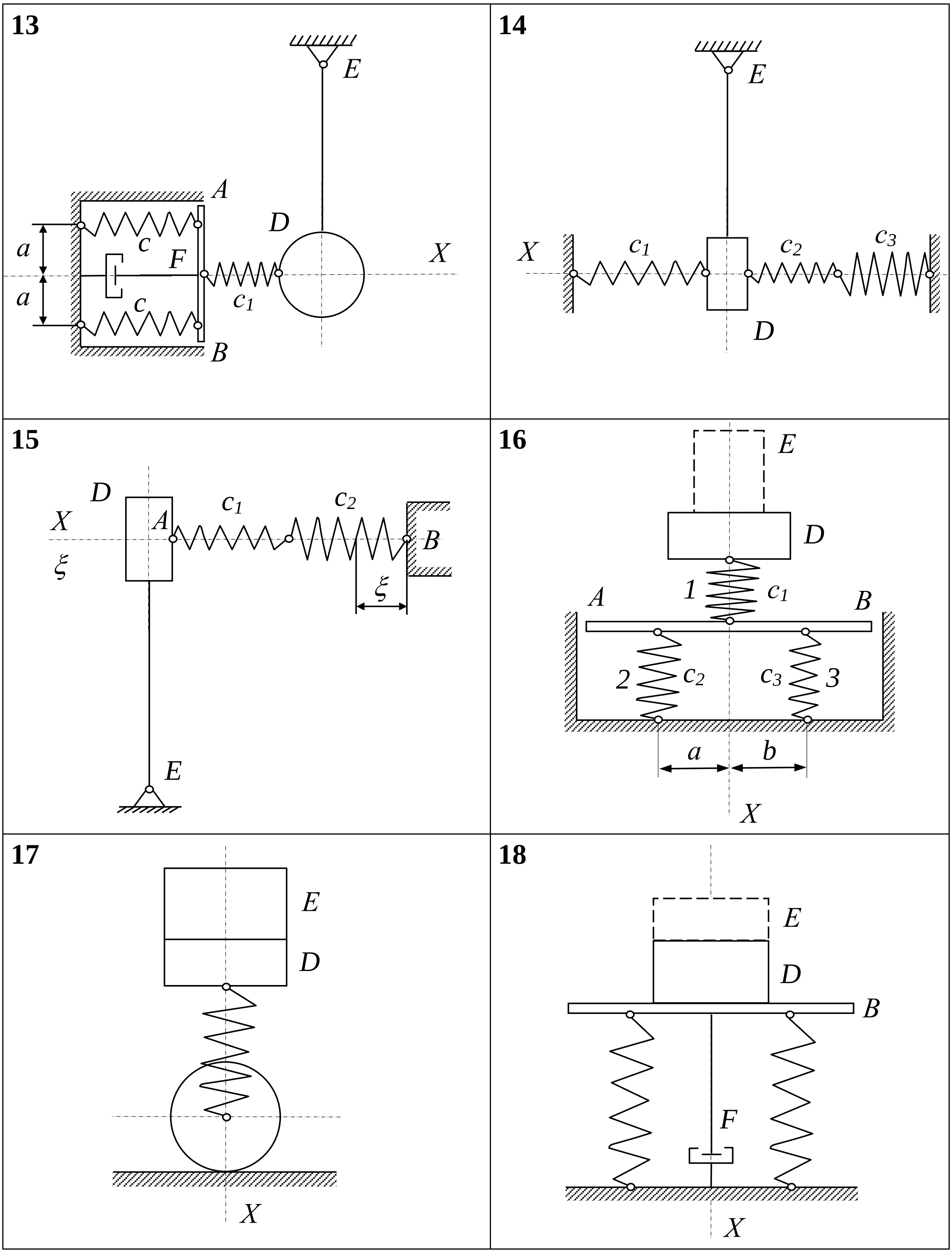

13
E
A
D
a
c
X
F
a
c
c1
B
14
E
X
c1
c2
c3
D
15
D
c1
c2
X
A
B
ξ
ξ
E
16
E
D
1
c1
A
B
2
c2
c3
3
a
b
X
17
E
D
X
18
E
D
B
F
X

Рисунок 8

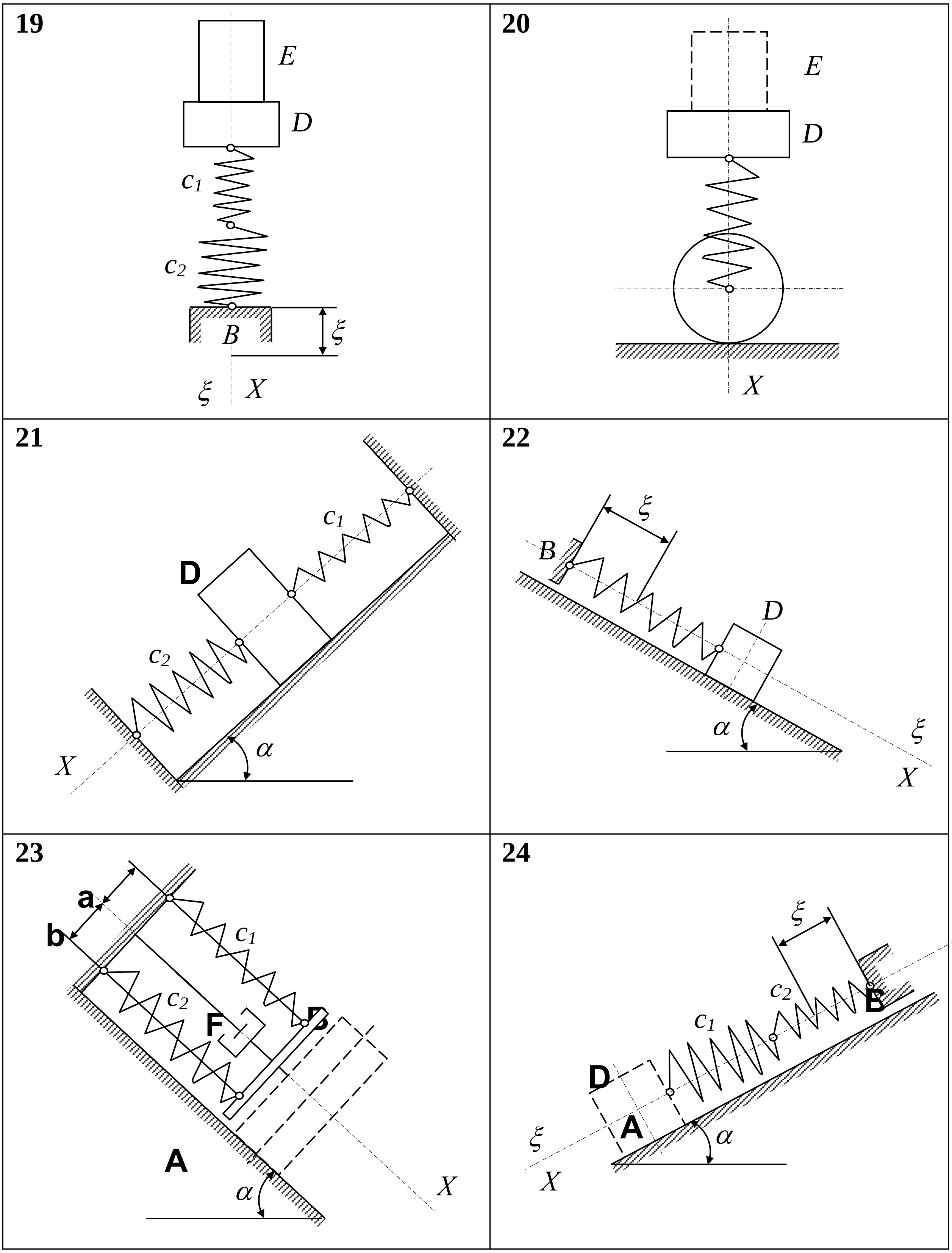

19
E
D
c_1
c_2
B
ξ
ξ
X
20
E
D
X
21
D
c_1
c_2
α
X
22
ξ
B
D
α
ξ
X
23
a
b
c_1
c_2
F
D
A
α
X
24
ξ
c_2
c_1
B
D
A
ξ
α
X

Рисунок 9

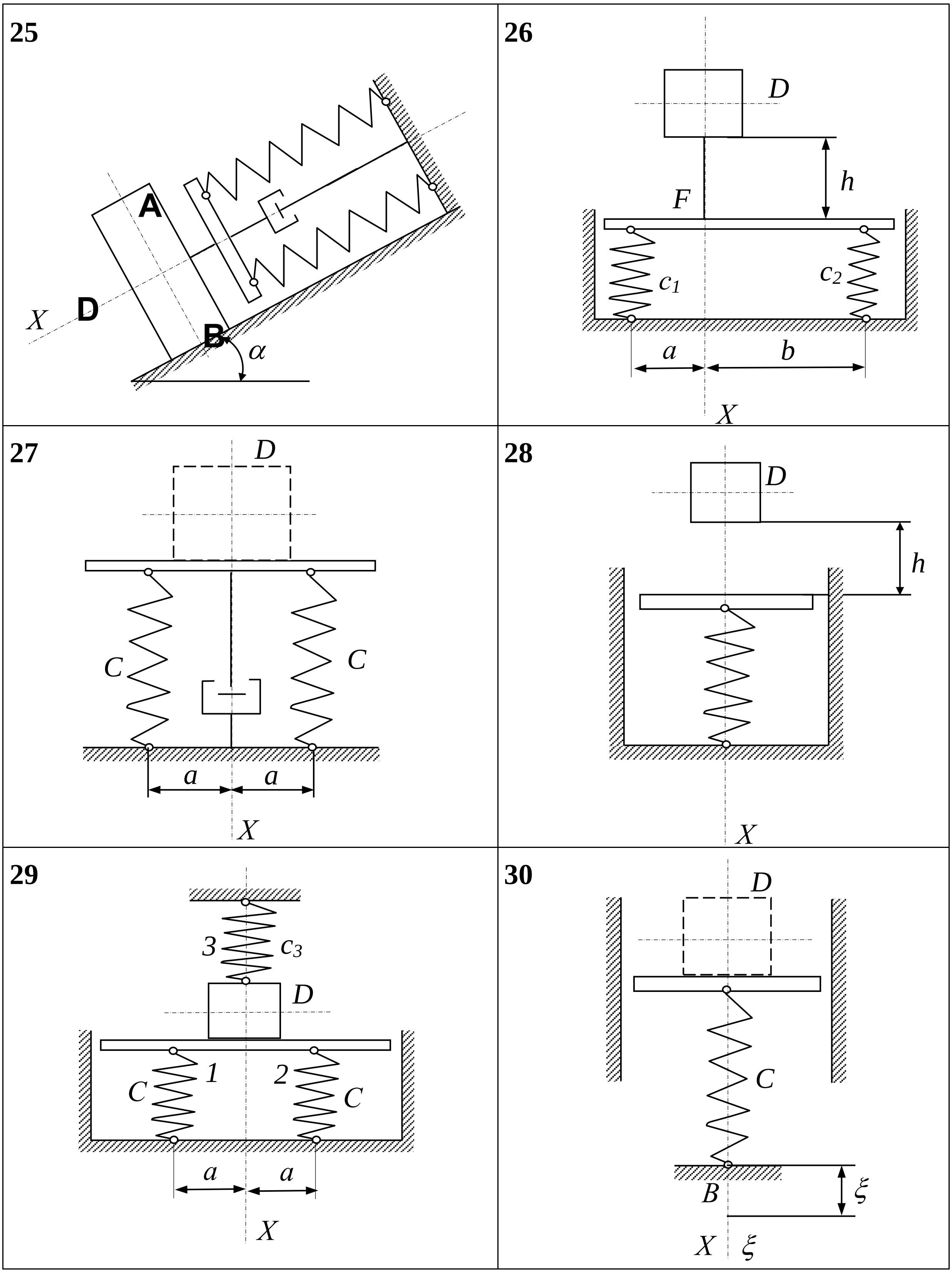

25
A
X
D
B
α
26
D
h
F
c1
c2
a
b
X
27
D
C
C
a
a
X
28
D
h
X
29
3
c3
D
C
1
2
C
a
a
X
30
D
C
B
ξ
X
ξ

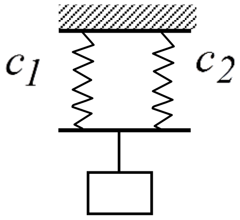
Рисунок 10

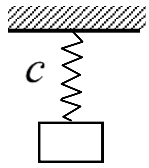
Загальний план виконання роботи

1 Замінити систему пружин – однією з еквівалентною жорсткістю (c).

Розрахункова схема | Еквівалентна схема

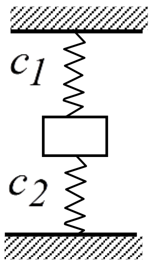
а)

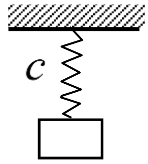




$$c = c_1 + c_2$$

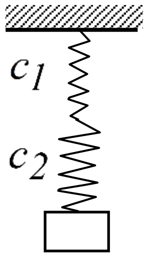
б)

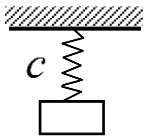




$$c = c_1 + c_2$$

в)





$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$$

2 За початок координат обираємо положення статичної рівноваги вантажу.

У цьому положенні $cf_{cm} = mg$.

l_0 – довжина пружини в недеформованому стані;

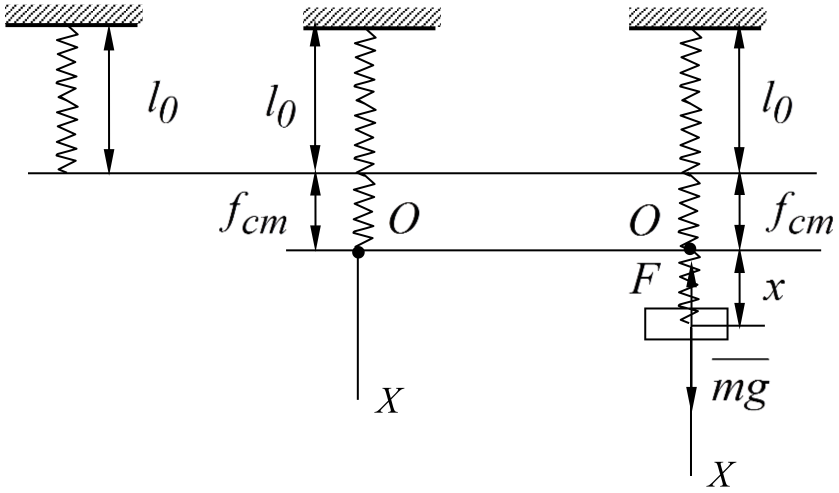
f_{cm} – статичне подовження;

O – початок осі OX;

x – поточна координата;

$F_x = -c(x + f_{cm})$ – проекція відновлюючої сили на вісь OX.

3 Вісь OX скеровуємо в бік руху вантажу.



4 Зображуємо вантаж у довільному положенні та діючі на нього сили.

5 Складаємо диференціальне рівняння руху.

6 Записуємо розв'язок відповідного рівняння коливального руху. За початковими умовами знаходимо сталі інтегрування.

7 Визначаємо параметри коливань.

8 Будуємо графік коливань.

Типовий звіт завдання

Приклад 1

Дано:

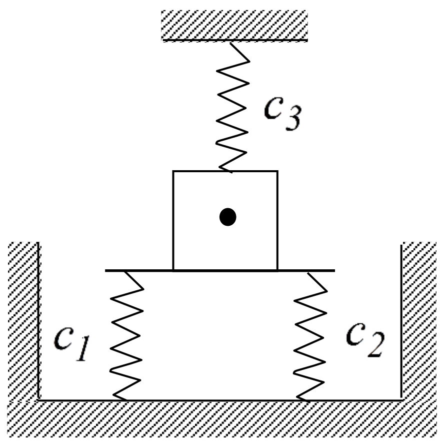
$c_1 = c_2 = 400\ \frac{H}{см} = 40000\ \frac{H}{м}$,

$c_3 = 200\ \frac{H}{см} = 20000\ \frac{H}{м}$,

$V_0 = 0{,}6\ \frac{м}{с}$, $m = 200\ кг$,

$x_0 = -f_{cm} = -\frac{mg}{c}$.

Знайти: $x = x(t)$.



Розв'язання:

1 Заміняємо систему пружин однією з еквівалентною жорсткістю:

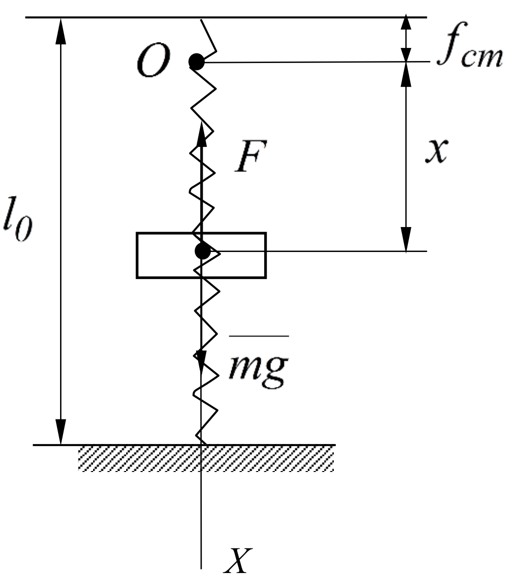
$$c = c_1 + c_2 + c_3 = 2 \cdot 40000 + 20000 = 100000 \ \frac{Н}{м}.$$

2 Обираємо початок координат O в положенні статичної рівноваги вантажу. Вісь X спрямуємо вниз:

$$mg = cf_{ст},$$

$$f_{ст} = \frac{mg}{c} = \frac{200 \cdot 10}{100000} = 0{,}02 \ м.$$

3 Зображуємо вантаж у проміжному положенні та діючі на нього сили mg і $F = c\Delta$.



4 Складаємо диференціальне рівняння руху вантажу:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} = mg - F = mg - c(f_{ст} + x) = mg - cf_{ст} - cx,$$

$m\ddot{x} + cx = 0$ – диференційне рівняння вільних коливань,

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{100000}{200} = 500,$$

$$k = \sqrt{500} = 22{,}4 \ c^{-1}.$$

5 Записуємо розв'язок цього рівняння:

$$x = A\cos 22{,}4t + B\sin 22{,}4t.$$

За початковими умовами визначаємо сталі A і B.
Якщо $t = 0$, $x_0 = -f_{ст} = -0{,}02 \ м$, то $A = x_0 = -0{,}02$.

$V_0 = 0{,}6\ \dfrac{м}{с}$, отже

$$\dot{x} = -22{,}4A\sin 22{,}4t + -22{,}4B\cos 22{,}4t\,,$$

$$\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}6 = 22{,}4B\,,$$

$$B = \frac{0{,}6}{22{,}4} = 0{,}027\,.$$

Звідси рівняння руху вільних коливань, що шукається, буде мати вигляд $x = -0{,}02\cos 22{,}4t + 0{,}027\sin 22{,}4t\ \ м$.

6 Визначаємо параметри коливань:

- власна частота коливань (кількість коливань, які здійснюються за $2\pi\ \ с$) $k = 22{,}4\ \ с^{-1}$;
- період коливань (час одного повного коливання) $T = \dfrac{2\pi}{22{,}4} = 0{,}28\ \ с$;
- амплітуда коливань (максимальне відхилення вантажу від положення рівноваги)

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}027^2} = 0{,}034\ \ м = 3{,}4\ \ см\,;$$

- початкова фаза коливань

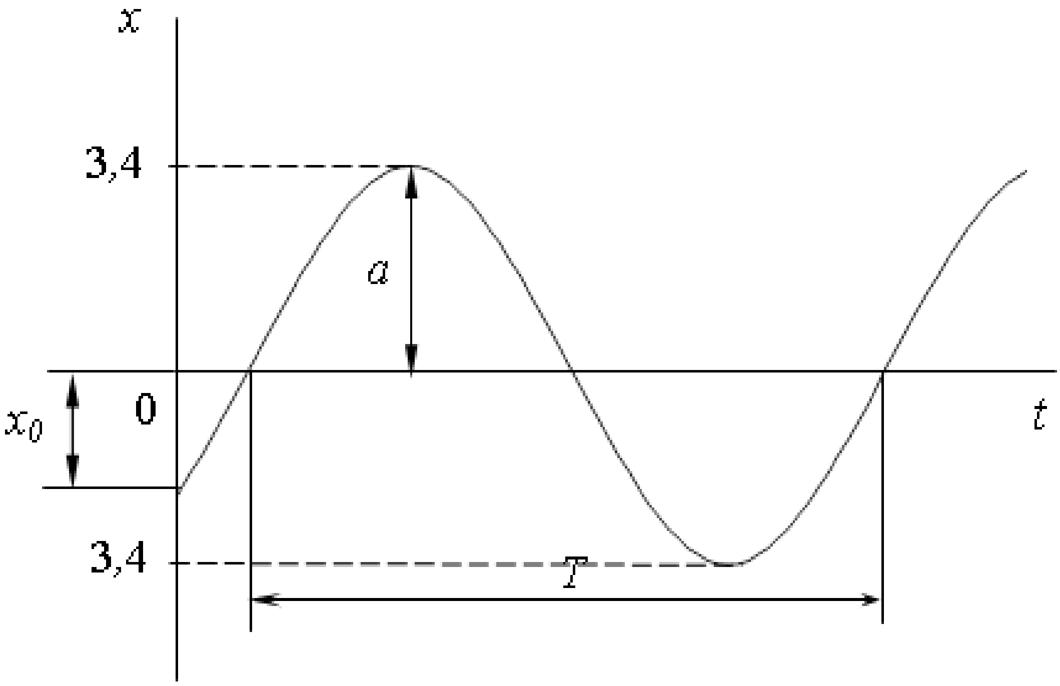
$$\alpha = arctg\,\frac{A}{B} = arctg\,\frac{-0{,}02}{0{,}027} = arctg\left(-0{,}74\right) = 324\ ^\circ\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{x_0}{a} = -0{,}58\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{V_0}{\omega a} = \frac{0{,}6}{22{,}4\cdot 0{,}034} = 0{,}78\,.$$

7 Будуємо графік вільних коливань

$$x = 3{,}4\sin(22{,}4t + 324\ ^\circ)\ \ см\,.$$

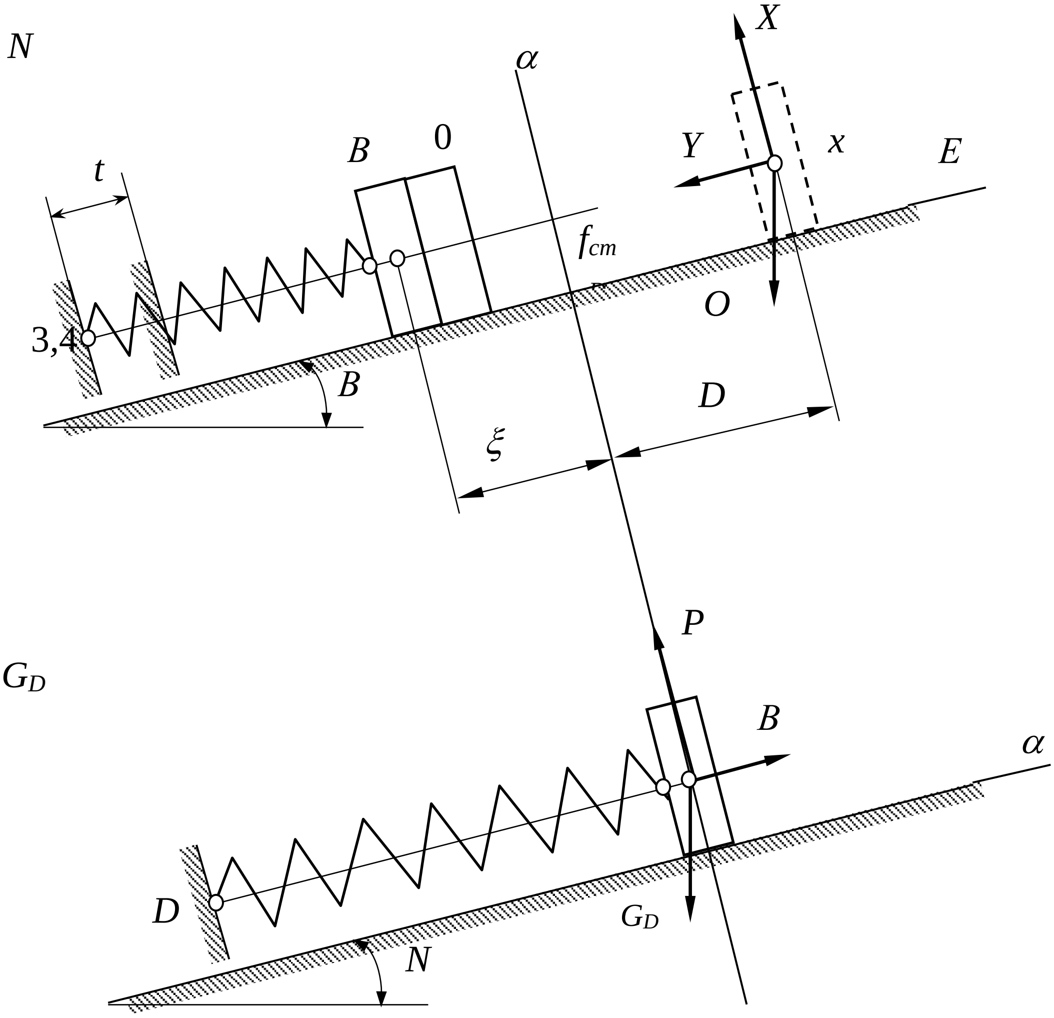


Приклад 2

Дано: два вантажі D і E масами $m_D = 2\ кг$ та $m_E = 3\ кг$ лежать на гладкій площині, яка нахилена під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту, спираючись на пружину, коефіцієнт жорсткості якої $c = 6\ \frac{H}{см} = 600\ \frac{H}{м}$.

У деякий момент часу вантаж E забирають, водночас $(t = 0)$ нижній кінець пружини B починає здійснювати вздовж похилої площини рух за законом $\xi = 0{,}02 \sin 10t\ м$.

Знайти: рівняння руху вантажу D.



Розв’язання

1 Обираємо початок координат O в положенні спокою вантажу D, яке відповідає статичній деформації пружини за умови, що точка B займає своє середнє положення ($\xi = 0$). Вісь X спрямуємо вгору вздовж похилої площини у бік руху вантажу D після зняття ваги E. Визначимо статичну деформацію пружини $f_{ст}$ з рівняння, яке відповідає стану спокою вантажу D на похилій площині:

$$\sum X_i = 0,$$

$$-G_D \sin\alpha + P_0 = 0,$$

$$-G_D \sin\alpha + cf_{стD} = 0,$$

$$f_{ст} = \frac{G_D \sin\alpha}{c}.$$

2 Зображуємо вантаж D у проміжному положенні та діючі на нього сили: вагу $\overline{G_D}$, нормальну реакцію похилої площини $\overline{N}$, силу пружності пружини $\overline{P}$.

3 Складаємо диференціальне рівняння руху вантажу:

$$m_D\ddot{x} = \sum X_i \,,$$

$$m_D\ddot{x} = -G_D \sin\alpha - P = -G_D \sin\alpha - c(x - f_{стD} - \xi)\,,$$

де ξ – переміщення точки закріплення нижнього кінця пружини, яке здійснюється за законом $\xi = d\sin pt$ ($d = 0{,}02$ $м$, $p = 10$ c^{-1}).

Після перетворення

$$m_D\ddot{x} + cx = cd\sin pt\,.$$

Поділивши всі члени рівняння на m_D і ввівши позначення $\dfrac{c}{m_D} = k^2$ та $\dfrac{cd}{m_D} = h$, отримаємо диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt\,.$$

4 Розв'язок цього неоднорідного рівняння складається з загального розв'язку x^* відповідного однорідного рівняння та частинного x^{**} розв'язку даного неоднорідного рівняння:

$$x = x^* + x^{**}\,.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$x^* = A\cos kt + B\sin kt\,.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$x^{**} = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt\,.$$

Загальний інтеграл

$$x = A\cos kt + B\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt\,.$$

Для визначення сталих інтегрування A та B знайдемо рівняння для $\dot{x}$:

$$\dot{x} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2}\cos pt\,.$$

За початковими умовами визначаємо сталі A і B.

Рух, що розглядається, починається в момент ($t = 0$), коли деформація пружини є статичною деформацією під дією вантажів D та E і $x_0 = -f_{cmE} = -\dfrac{G_E \sin\alpha}{c}$, $\dot{x}_0 = 0$.

Складемо рівняння $x = x(t)$ та $\dot{x} = \dot{x}(t)$ при $t = 0$:

$$x_0 = A,$$

$$\dot{x}_0 = V_0 = Bk + \frac{hp}{k^2 - p^2},$$

звідки

$$A = -f_{cmE} = -\frac{G_E \sin\alpha}{c} = -\frac{3\cdot 9{,}81\cdot \sin 30^\circ}{600} = -0{,}0245\ м,$$

$$B = -\frac{hp}{k(k^2 - p^2)},$$

де

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{600}{2}} = 17{,}3\ c^{-1},$$

$$B = -\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} = -\frac{cdp}{m_D k(k^2 - p^2)} =$$
$$= -\frac{600\cdot 0{,}02\cdot 10}{2\cdot 17{,}3\cdot (17{,}3^2 - 10^2)} = 0{,}0173\ м$$

Звідси шукане рівняння руху вантажу D буде мати вигляд

$$x = -f_{стE}\cos kt - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)}\sin\omega t + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt,$$

де

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = -\frac{cd}{m_D(k^2 - p^2)} = -\frac{600 \cdot 0{,}02}{2 \cdot (17{,}3^2 - 10^2)} = 0{,}03 \ м,$$

тобто

$$x = -2{,}45\cos 17{,}3t - 1{,}73\sin 17{,}3t + 3\sin 10t \ см.$$

5 Визначаємо параметри коливань:

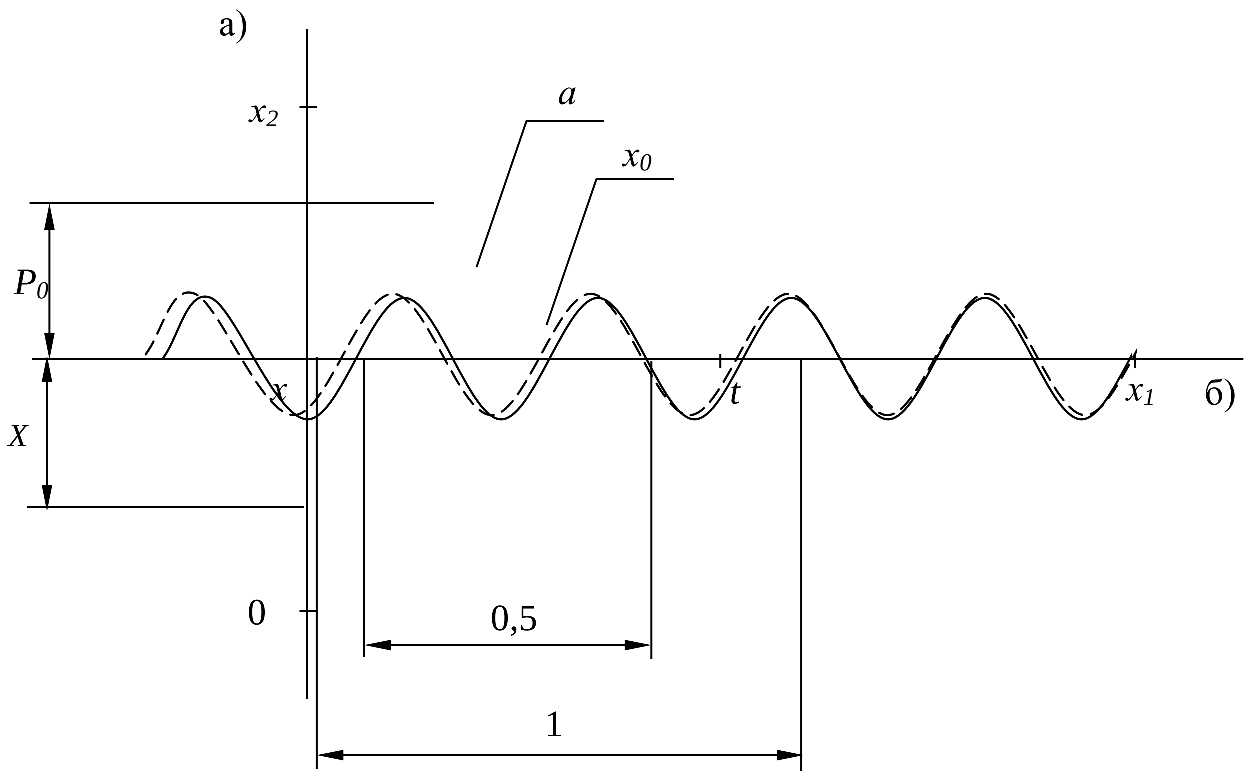
- власна частота коливань $k = 17{,}3 \ с^{-1}$;
- колова частота вимушених коливань $p = 10 \ с^{-1}$;
- період власних коливань $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{17{,}3} = 0{,}36 \ с$;
- період вимушених коливань $T_в = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}628 \ с$;
- амплітуда вільних коливань

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(-0{,}0245)^2 + (-0{,}0173)^2} = 0{,}03 \ м = 3 \ см;$$

- початкова фаза вільних коливань

$$\alpha = arctg\frac{A}{B} = arctg\frac{-0{,}0245}{0{,}0173} = arctg(-1{,}42) = -55\,°.$$

6 Будуємо графік вільних коливань $x_1 = 3\sin(17{,}3t - 55\,°)$ і графік вимушених коливань $x_2 = 3\sin 10t$.



4 Питання для самоконтролю і підготовки до захисту РГР, модульного тестування, заліків та іспитів з тематики завдання

1 Що називається коливальним рухом матеріальної точки?

2 Як називається сила, яка намагається повернути матеріальну точку в положення рівноваги О?

3 Як називаються коливання, які здійснюються під дією тільки відновлюючої сили?

4 Як називаються коливання, які здійснюються під дією відновлюючої сили та сили опору середовища?

5 Як називаються коливання, які здійснюються під дією відновлюючої та збуреної сили?

6 Дією якої сили обумовлені вимушені коливання?

7 Навести диференціальні рівняння вільних (вимушених, загасальних) коливань.

8 Навести рівняння вільних (вимушених, загасальних) коливань.

9 Що називається власною частотою коливань?

10 Як визначити період коливань (формула)?

11 Що таке амплітуда коливань, як вона визначається?

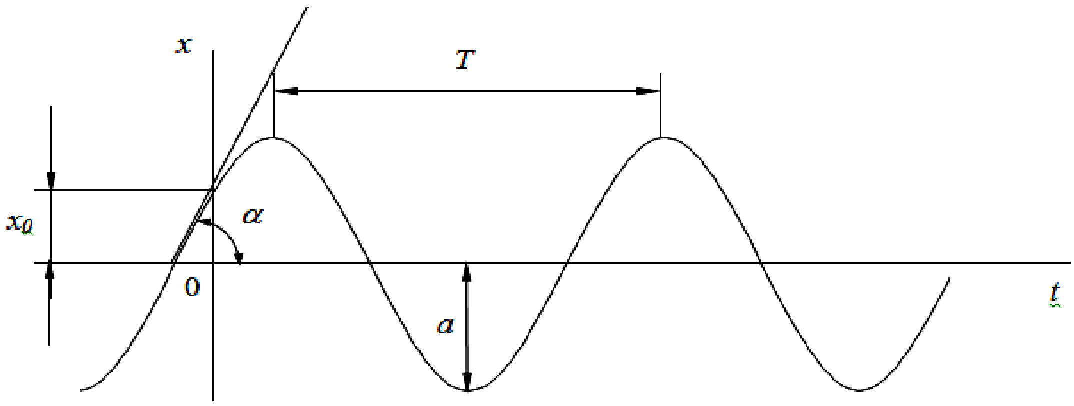
12 Що характеризує і як визначається початкова фаза коливань?

13 У чому різниця між амплітудою вільних і загасальних коливань?

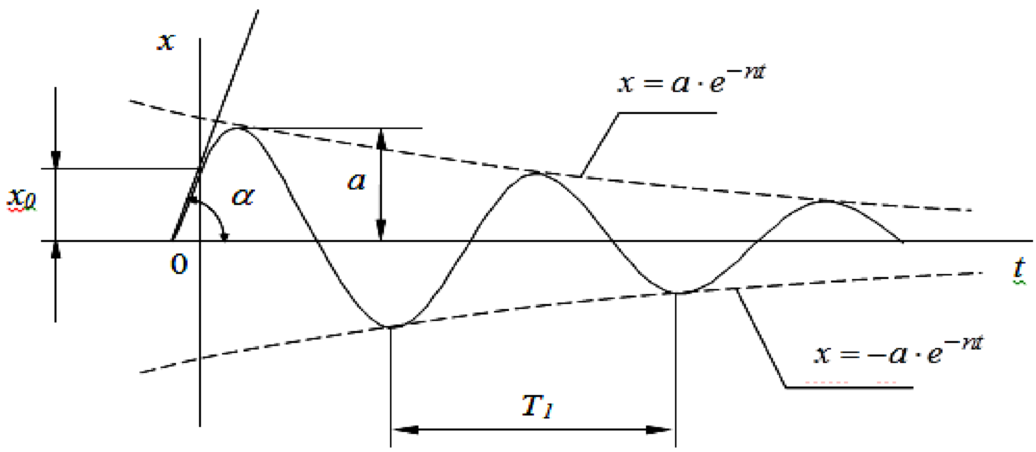
14 Від чого залежить власна частота?

15 Графіки яких коливань зображені на рисунках?

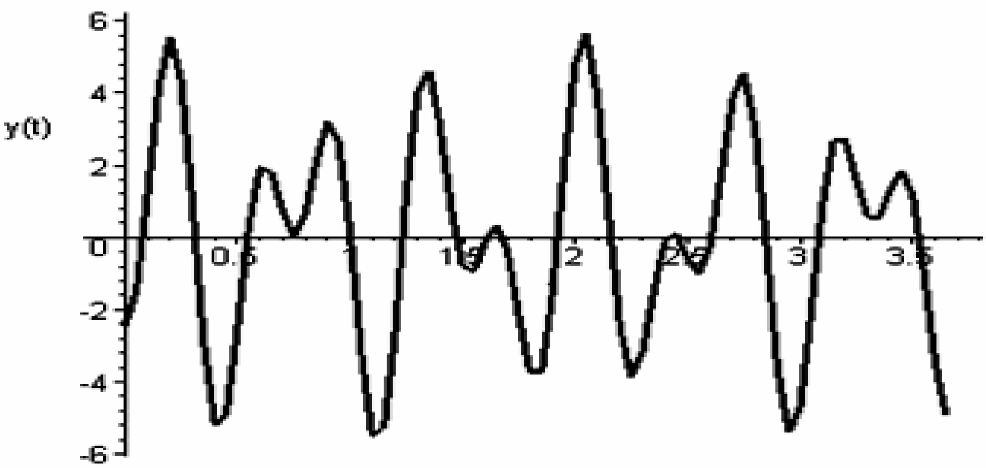
а)



б)



в)



Список літератури

1 Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики [Текст] / С. М. Тарг. – М., 1986. – 420 с

2 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики [Текст] / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М., 1984. – Ч. 1, 2.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / под ред. А. А. Яблонского. – М., 1985.

4 Комплексне методичне забезпечення до вивчення дисципліни «Теоретична механіка» / З. О. Іванова, Л. М. Дунай, Н. А. Аксьонова. – Харків : УкрДАЗТ, 2004. – 39 с.

5 Аксьонова, Н. А. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» / Н. А. Аксьонова, О. В. Оробінський. – Харків : УкрДУЗТ, 2015. – 101 с.