МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механіки і проектування машин

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи
з дисципліни
«*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*»

Розділ
ДИНАМІКА

Харків – 2018

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 14 листопада 2016 р., протокол № 4.

Рекомендуються для студентів заочної форми навчання.

Укладачі:

доценти Н. А. Аксьонова,
О. В. Оробінський, О. В. Надтока

Рецензент

проф. О. В. Братченко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи
з дисципліни
«*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*»

Розділ
ДИНАМІКА

Відповідальний за випуск Аксьонова Н. А.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 12.04.17 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механіко-енергетичного та будівельного факультетів на I, II та III курсах дисципліни “Теоретична механіка”. При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів “Статика”, “Кінематика”, “Динаміка”. У ході вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять, виконання індивідуальних завдань та контрольних робіт.

Вищесказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичних вказівок, призначених для студентів заочної форми навчання.

1 Методичні поради до виконання контрольних робіт

Програмою дисципліни „Теоретична механіка” передбачено виконання контрольних робіт з розділу „Динаміка”.

Зміст контрольних робіт, а саме номери задач до кожної з них, уточнюється викладачем під час установочних занять.

Кожна задача супроводжується десятьма рисунками та таблицею (з тим самим номером, що і задача), яка містить додатково до тексту задачі, вихідні дані з десяти варіантів (від 0 до 9), номери яких наведені у першому стовпчику таблиці.

У всіх задачах студент обирає номер рисунка згідно з передостанньою цифрою шифру залікової книжки, а номер варіанта – згідно з останньою цифрою: наприклад, якщо шифр закінчується числом 38, то рисунок задачі має бути за номером 3, а вихідні дані з таблиці в рядку з номером 8. Контрольні роботи виконуються на форматі А4. Оформлення титульної сторінки контрольного завдання здійснюється відповідно до встановлених вимог, а саме: на ній обов’язково вказуються назва кафедри, дисципліни, номер роботи, рік, шифр, прізвище та ініціали студента.

Розв’язання задач повинно супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв’язання задач мають бути виконані акуратно із застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх використовуваних величин: розміри, координатні осі, вектори сил та ін.

Слід звернути увагу на те, що розрахункова схема виконується строго згідно з вихідними даними свого варіанта задачі, і тоді в більшості випадків вона має бути простішою, ніж на загальному рисунку.

Контрольні роботи, що не відповідають всім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

2 Задача Д1. Інтегрування диференційних рівнянь руху матеріальної точки

Вантаж *D* масою *m*, отримавши в точці *A* початкову швидкість V_0, рухається по вигнутій трубі *ABC*, яка розташована у вертикальній площині; ділянки труби чи обидві похилі, чи одна горизонтальна, а друга похила (рисунки 1, 2, 3, таблиця 1).

На ділянці АВ на вантаж, крім сили ваги, діють постійні сила $\vec{Q}$ (її напрямок показаний на рисунках) і сила опору середовища $\vec{R}$, яка залежить від швидкості $\vec{V}$ вантажу (спрямована проти руху); тертям вантажу об трубу на ділянці *AB* знехтувати.

У точці *B* вантаж, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку *BC* труби, де на нього, крім сили ваги, діють сила тертя (коефіцієнт тертя вантажу f = 0,2) і змінна сила $\vec{F}$, проекція якої F_x на вісь x задана в таблиці 1.

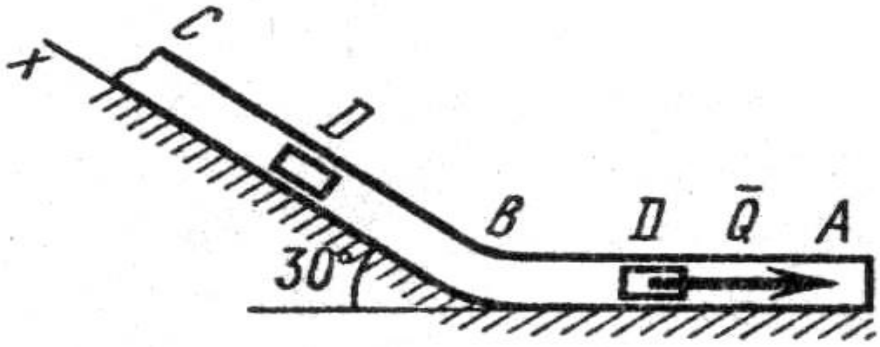
Вважаючи вантаж матеріальною точкою і знаючи відстань $AB = l$ чи час t_1 руху вантажу від точки *A* до точки *B*, знайти закон руху вантажу на ділянці *BC*, тобто $x = f(t)$, до $x = BD$.

Задача Д1 відноситься до розділу «Інтегрування диференційних рівнянь руху точки» (розв’язання основної задачі динаміки). Розв’язання задачі розбивається на дві частини. Спочатку треба скласти та проінтегрувати методом розділення змінних диференційне рівняння руху точки (вантажу) на ділянці *AB*, враховуючи початкові умови. Далі, знаючи час руху вантажу на ділянці *AB* чи довжину цієї ділянки, визначити швидкість вантажу в точці *B*. Ця швидкість буде початковою для руху вантажу на ділянці *BC*. Після цього потрібно скласти рівняння і проінтегрувати диференційне рівняння руху вантажу на ділянці *BC* також з урахуванням початкових умов, проводячи відлік часу від моменту, коли вантаж знаходиться в точці *B*, і вважаючи в цей момент $t = 0$. При інтегруванні рівняння руху на ділянці АВ у випадку, коли задана довжина ділянки, доцільно перейти до змінної x, враховуючи, що $\frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}$.

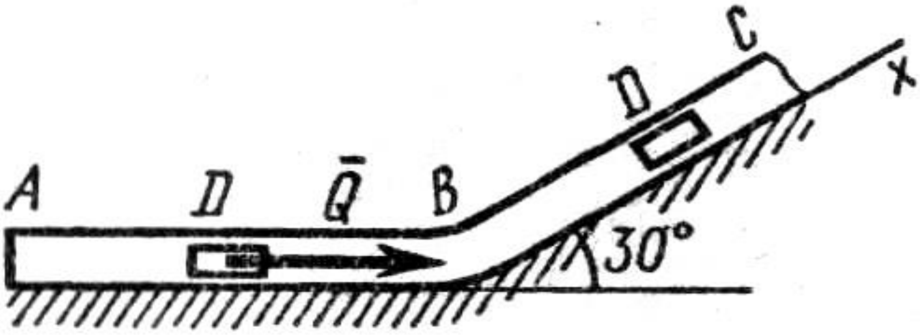
Дані для виконання задачі Д1 згідно з варіантами надані в таблиці 1 та на рисунках 1, 2, 3.

Таблиця 1

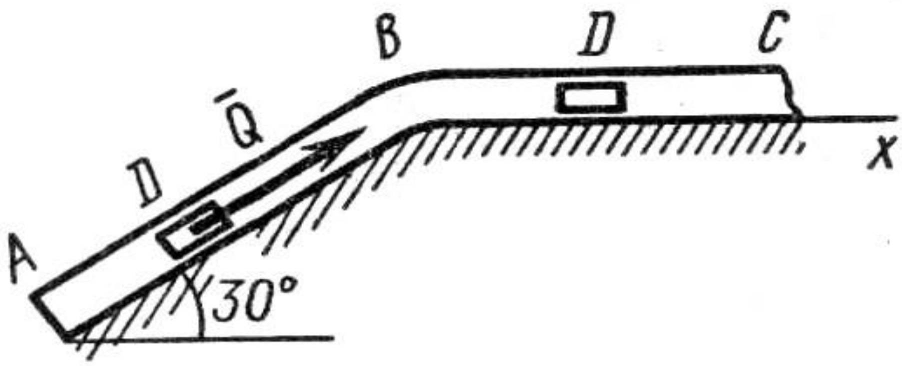
Номер	m, *кг*	$V_0, \frac{м}{с}$	Q, *Н*	R, *Н*	l, *м*	t_1, *с*	F_x, *Н*
0	2,0	20	6	$0{,}4V$	–	2.5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8V^2$	1.5	–	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5V$	–	3	$3\sin(2t)$
3	6,0	14	22	$0{,}6V^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4V$	–	2	$4\cos(4t)$
5	8,0	10	16	$0{,}5V^2$	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}6V$	–	2	$9t^2$
7	4,0	12	12	$0{,}8V^2$	2.5	–	$-8\cos(4t)$
8	3,0	22	9	$0{,}5V$	–4	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2V^2$	-	–	$6\sin(2t)$



Д1.0

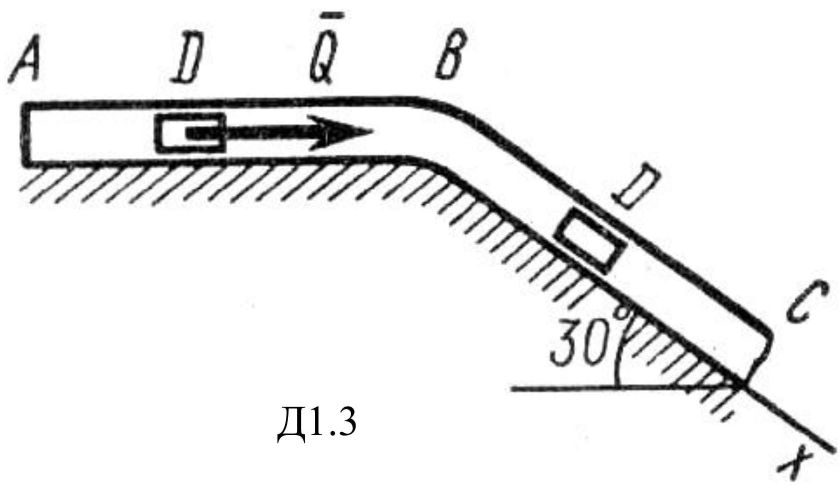


Д1.1

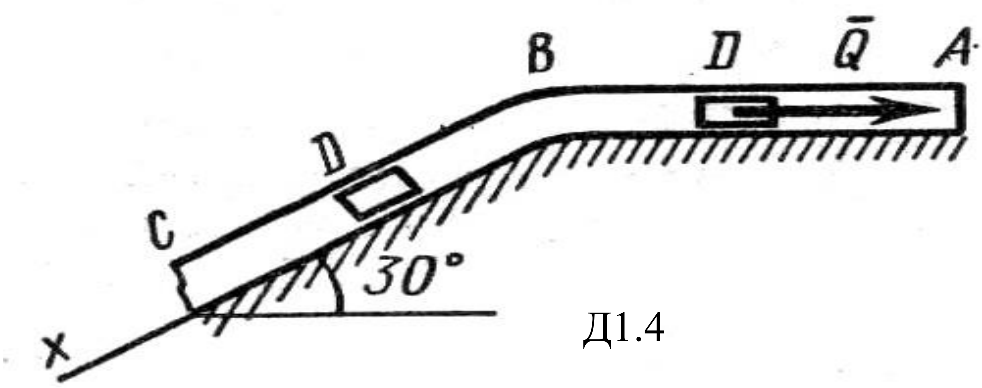


Д1.2

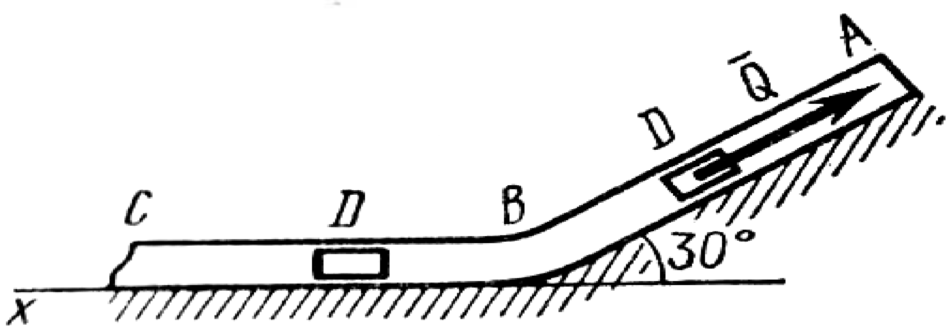
Рисунок 1



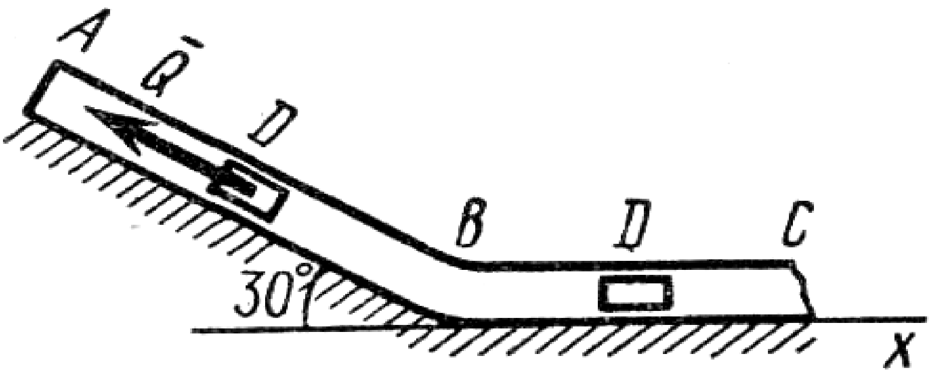
Д1.3



Д1.4

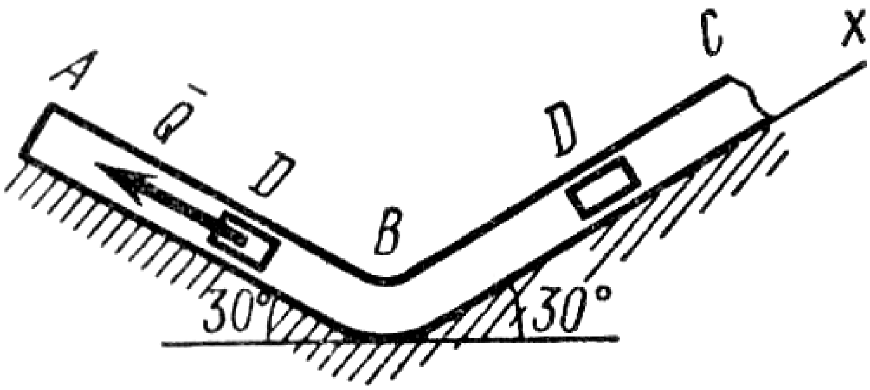


Д1.5

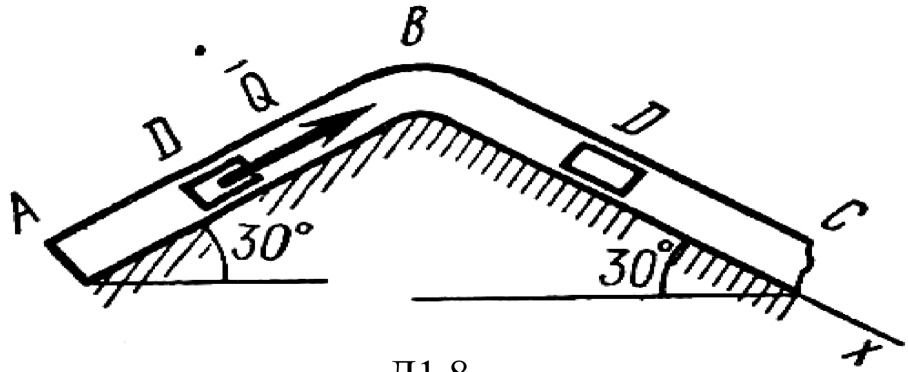


Д1.6

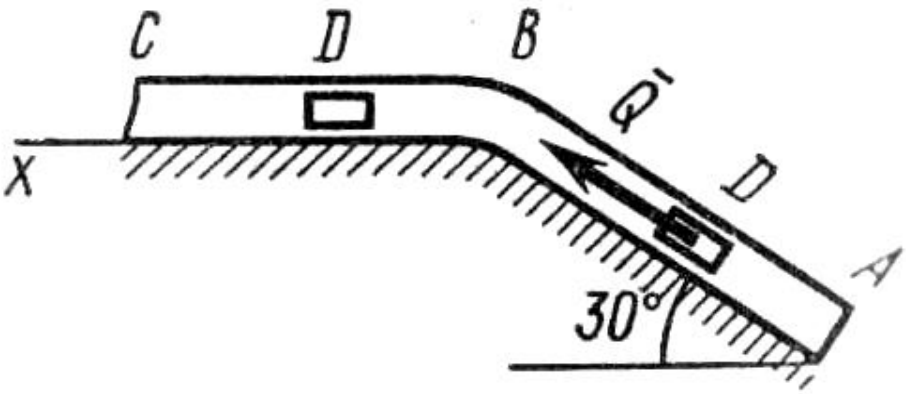
Рисунок 2



Д1.7



Д1.8



Д1.9

Рисунок 3

Вказівки до розв’язання задачі Д1. Приклад

На вертикальній ділянці AB труби (рисунок 4) на вантаж D масою m діють сила ваги і сила опору R; відстань від точки A, де $V = V_0$, до точки B дорівнює l. На похилій ділянці ВС на вантаж діють сила ваги та змінна сила $F = F(t)$, яка задана в ньютонах.

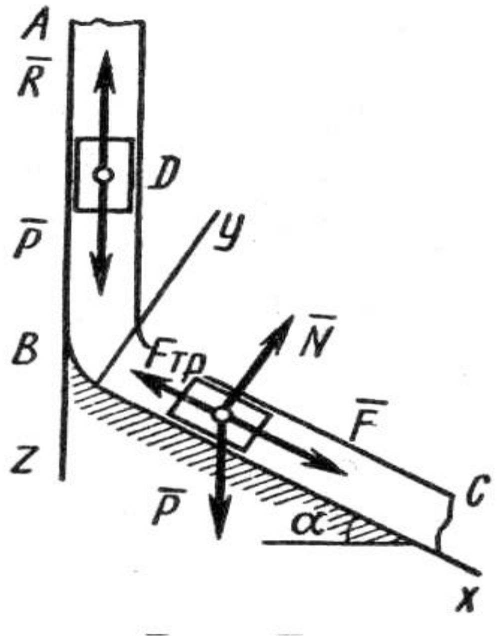


Рисунок 4

Дано:

$m = 2\,кг$; $R = \mu V^2$, де $\mu = 0{,}4\,\frac{кг}{м}$; $V_0 = 5\,\frac{м}{с}$; $l = 2{,}5\,м$; $F_x = 16\sin(4t)$.

Визначити:

$x = f(t)$ – закон руху вантажу на ділянці BC.

Розв’язання

1 Розглянемо рух вантажу на ділянці АВ, вважаючи вантаж матеріальною точкою. Зображуємо вантаж (у вільному положенні) та діючі на нього сили $\overline{P} = m\overline{g}$ і $\overline{R}$. Проводимо вісь Az і складаємо диференційне рівняння руху вантажу і проекції на цю вісь:

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz} \text{ чи } mV_z\frac{dV_z}{dz} = P_z + R_z. \qquad (2.1)$$

Далі знаходимо $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu V^2$; звертаємо увагу, що в рівнянні всі змінні сили треба обов’язково виразити через величини, від яких вони залежать. Враховуючи, що $V_z = V$, отримаємо

$$mV\frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2 \text{ чи } V\frac{dV}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - V^2\right). \qquad (2.2)$$

Введемо для скорочення записів позначення:

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2\,м^{-1},\ n = \frac{mg}{\mu} = 50\frac{м^2}{с^2}, \qquad (2.3)$$

де при підрахунку прийнято $g \approx 10\frac{м}{с^2}$. Тоді рівняння (2.2) можна подати у вигляді

$$2V \cdot \frac{dV}{dz} = -2k\left(V^2 - n\right). \qquad (2.4)$$

Поділивши в рівнянні (2.4) змінні, а потім взявши від обох частин інтеграли, отримаємо

$$\frac{2VdV}{V^2 - n} = -2kdz \text{ та } \ln\left(V^2 - n\right) = -2kz + C_1. \qquad (2.5)$$

За початковими умовами при $z = 0$ $V = V_0$, що дає $C_1 = \ln\left(V_0^2 - n\right)$, і з рівняння (2.5) знаходимо $\ln\left(V^2 - n\right) - \ln\left(V_0^2 - n\right) = -2kz$. Звідси

$$\ln\frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = -2kz \text{ та } \frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

У результаті знаходимо

$$V^2 = n + \left(V_0^2 - n\right)e^{-2kz}. \qquad (2.6)$$

Вважаючи, що в рівнянні (2.6) $z = l = 2{,}5\,м$, і замінюючи k та n їх значеннями (2.3), визначаємо швидкість V_B вантажу в точці В ($V_0 = 5\frac{м}{с}$, число $e = 2{,}7$):

$$V_B^2 = 50 - \frac{25}{e} = 40{,}7 \text{ та } V_B = 6{,}4\frac{м}{с}. \qquad (2.7)$$

2 Розглянемо тепер рух вантажу на ділянці *BC*; знайдена швидкість V_B буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ($V_0 = V_B$). Зобразимо вантаж (у вільному положенні) та діючі на нього сили $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{mp}$ і $\overline{F}$. Проведемо з точки *B* осі *Bx* і *By* та складемо диференційне рівняння руху вантажу в проекції на вісь *Bx*:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{mp\,x} + F_x$$

чи

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{mp} + F_x, \tag{2.8}$$

де $F_{mp} = fN$. Для визначення N складемо рівняння у проекції на вісь *By*. Оскільки $a_y = 0$, отримуємо $N - mg\cos\alpha = 0$, звідки $N = mg\cos\alpha$. Отже, $F_{mp} = fmg\cos\alpha$, крім того, $F_x = 16\sin(4t)$ і рівняння (2.8) прийме вигляд

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t). \tag{2.9}$$

Поділивши обидві частини рівності на m, обчислимо $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g\left(\sin 30^0 - 0{,}2\cos 30^0\right) = 3{,}2$; $\dfrac{16}{m} = 8$ і підставимо ці значення у рівняння (2.9). Тоді отримаємо

$$\frac{dV_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \tag{2.10}$$

Помножуючи обидві частини рівняння (2.10) на dt та інтегруючи, знайдемо

$$V_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \tag{2.11}$$

Тепер будемо відраховувати час від моменту, коли вантаж знаходиться у точці *B*, враховуючи в цей момент $t = 0$. Тоді при

$t = 0$ $V = V_0 = V_B$, де V_B задається рівністю (2.7). Підставляючи ці величини в рівняння (2.11), отримаємо

$$C_2 = V_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4.$$

При знайденому значенні C_2 рівняння (2.11) дає

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \tag{2.12}$$

Помножуючи обидві частини на dt і знову інтегруючи, знайдемо

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \tag{2.13}$$

Оскільки при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ і остаточно шуканий закон руху вантажу буде

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t), \tag{2.14}$$

де x – у метрах, t – у секундах.

3 Задача Д2. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до дослідження руху матеріальної системи

Механічна система складається із вантажів 1 і 2, ступінчастого шківа 3 з радіусами ступенів $R_3 = 0{,}3$ *м*, $r_3 = 0{,}1$ *м* і радіусом інерції відносно осі обертання $\rho_3 = 0{,}2$ *м*, блока 4 радіуса $R_4 = 0{,}2$ *м* і катка (чи рухомого блока) 5 (рисунки 5, 6, 7, 8, таблиця 2); тіло 5 враховувати суцільним однорідним циліндром, а масу блока 4 – рівномірно розподіленою по ободу. Коефіцієнт тертя вантажів об площину $f = 0{,}1$. Тіла системи з’єднані один з одним нитками, перекинутими через блоки і намотаними на шків 3 (чи на шків і каток); ділянки ниток паралельні відповідним площинам. До одного з тіл прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c.

Під дією сили $F = f(s)$, яка залежить від переміщення s точки її прикладення, система приходить до руху зі стану спокою; деформація пружини в момент початку руху дорівнює нулю. При русі на шків 3 діє постійний момент M сил опору (від тертя у підшипниках).

Визначити значення шуканої величини в той момент часу, коли переміщення s стане дорівнювати $s_1 = 0{,}2$ *м*. Шукана величина вказана в стовбці «Знайти» таблиці 2, де позначено: V_1, V_2, V_{c5} – швидкості вантажів 1 і 2 та центра мас тіла 5 відповідно, ω_3, ω_4 – кутові швидкості тіл 3 і 4.

Усі катки, в тому числі і катки, які обмотані нитками, котяться по площині без ковзання.

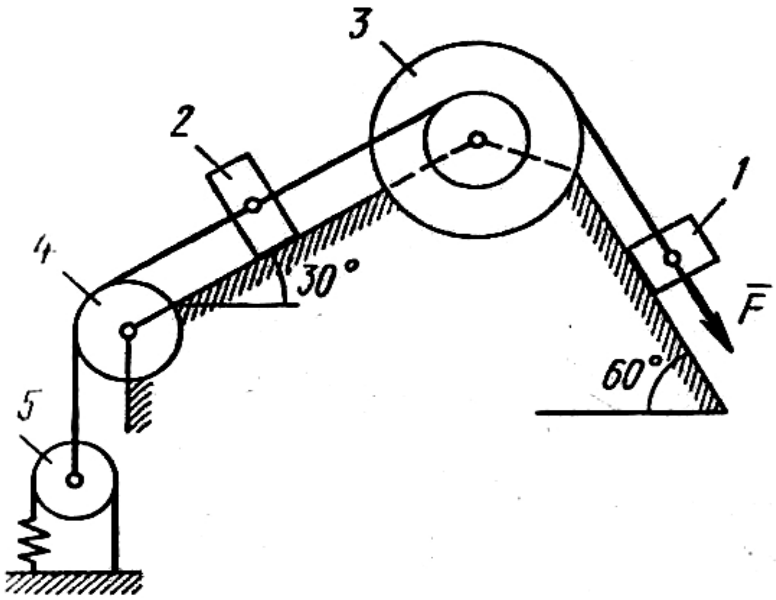
На всіх рисунках не зображати вантаж 2, якщо $m_2 = 0$; інші тіла повинні бути зображені і тоді, коли їх маса дорівнює нулю.

Задача Д2 відноситься до розділу «Застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи». При розв’язуванні задачі врахувати, що кінетична енергія T системи дорівнює сумі кінетичних енергій усіх тіл, що входять до системи; цю енергію можна виразити через ту швидкість (лінійну чи кутову), яку потрібно визначити в задачі. При обчисленні T для встановлення залежності між швидкостями точок тіла, яке рухається плоскопаралельно, чи між його кутовою швидкістю і швидкістю центра мас скористатися миттєвим центром швидкостей. При виконанні роботи потрібно усі переміщення виразити через задане переміщення s_1, враховуючи, що залежність між переміщеннями тут буде такою ж, як між відповідними швидкостями.

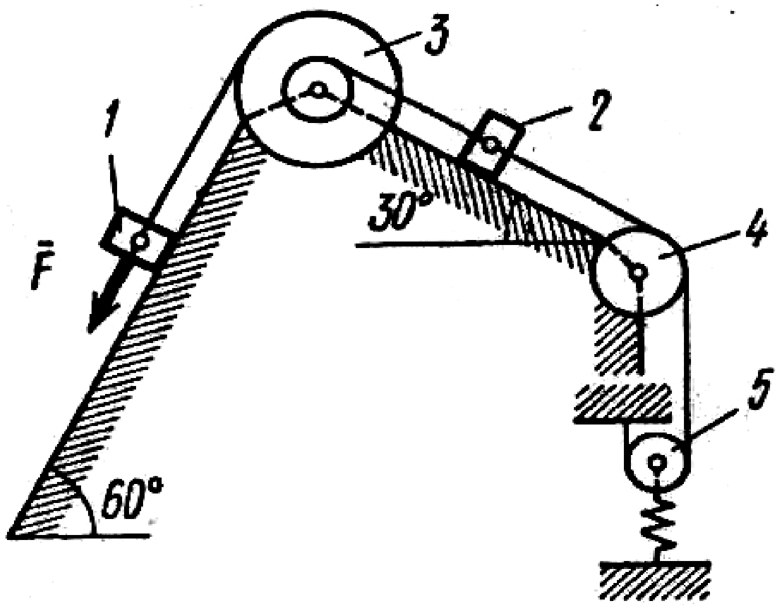
Дані для виконання задачі Д2, згідно варіантам, надані в таблиці 2 та на рисунках 5, 6, 7, 8.

Таблиця 2

Номер	m_1, *кг*	m_2, *кг*	m_3, *кг*	m_4, *кг*	m_5, *кг*	*c*, *Н/м*	*M*, *Н·м*	$F=f(s)$, *Н*	Знай-ти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80(4+5*s*)	ϖ_3
1	8	0	0	4	6	320	0,2	50(8+3*s*)	V_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60(6+5*s*)	V_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80(5+6*s*)	ϖ_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40(9+4*s*)	V_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	50(7+8*s*)	V_{c5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	40(8+9*s*)	ϖ_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	60(8+5*s*)	V_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50(9+2*s*)	ϖ_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80(6+7*s*)	V_{cf}

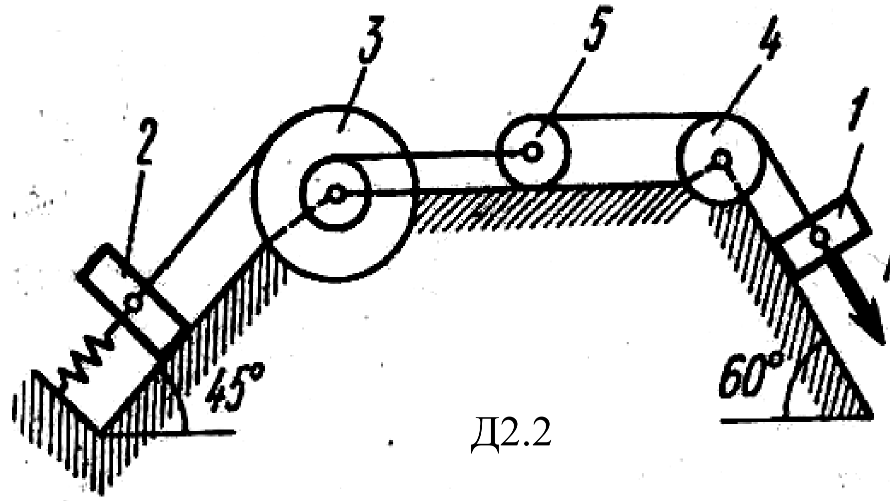


Д2.0

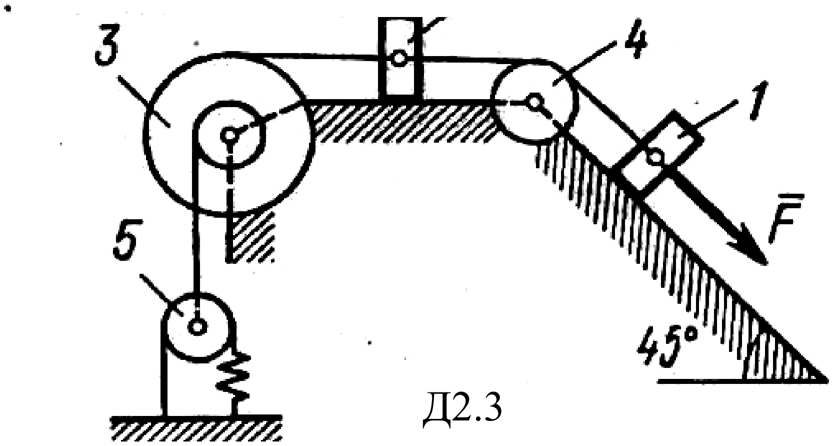


Д2.1

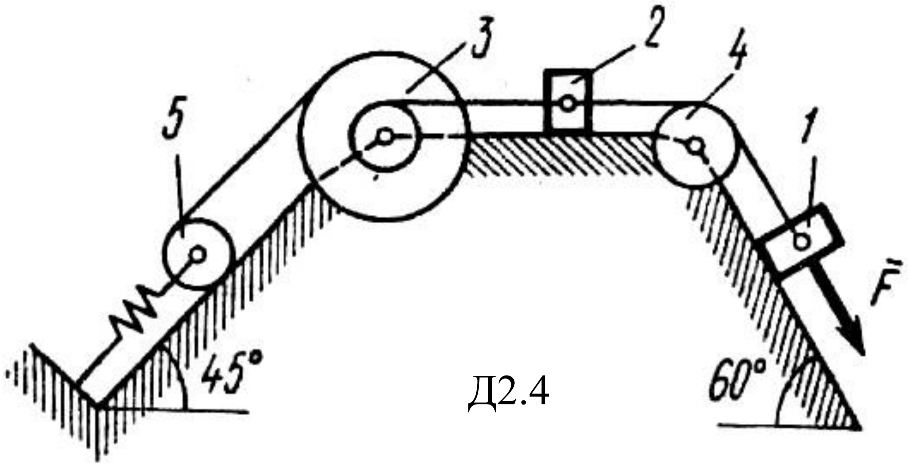
Рисунок 5



Д2.2

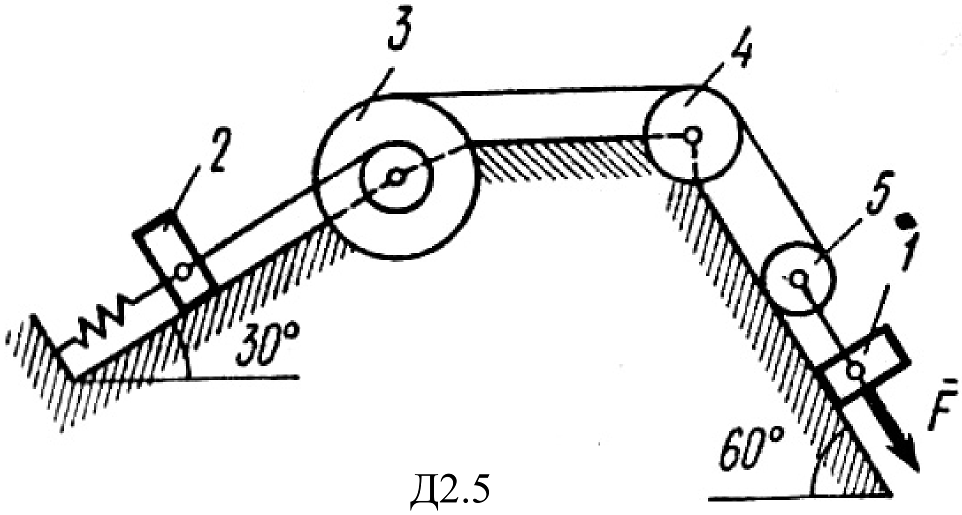


Д2.3

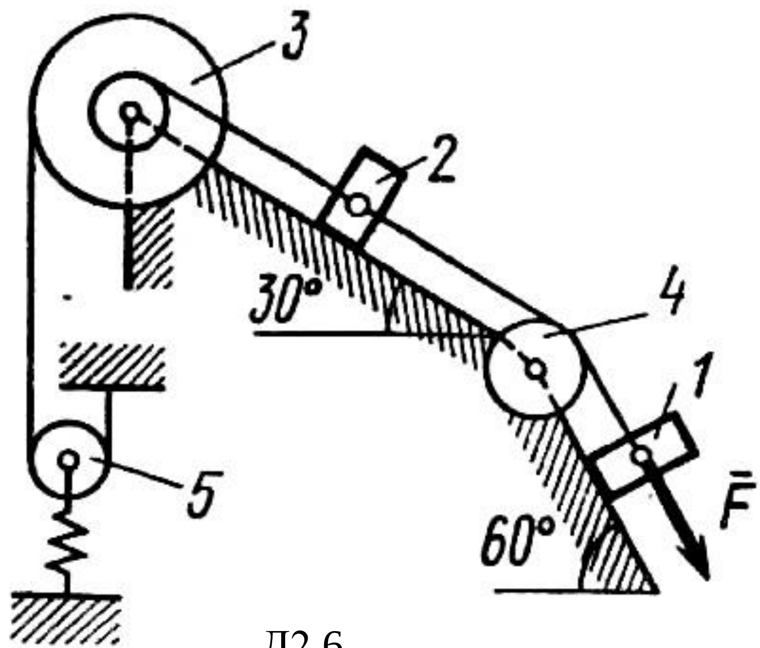


Д2.4

Рисунок 6

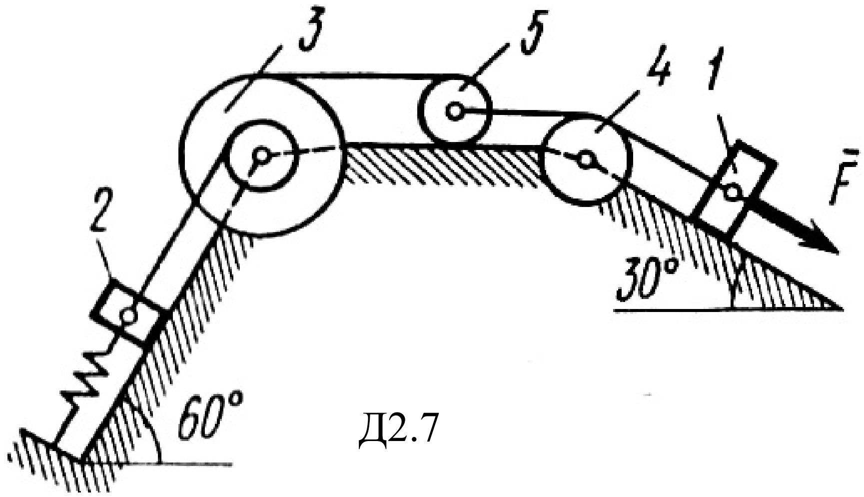


Д2.5

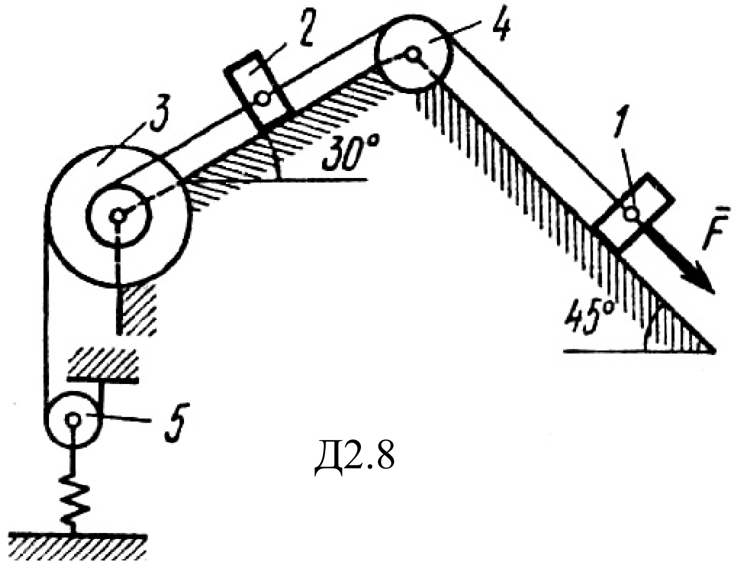


Д2.6

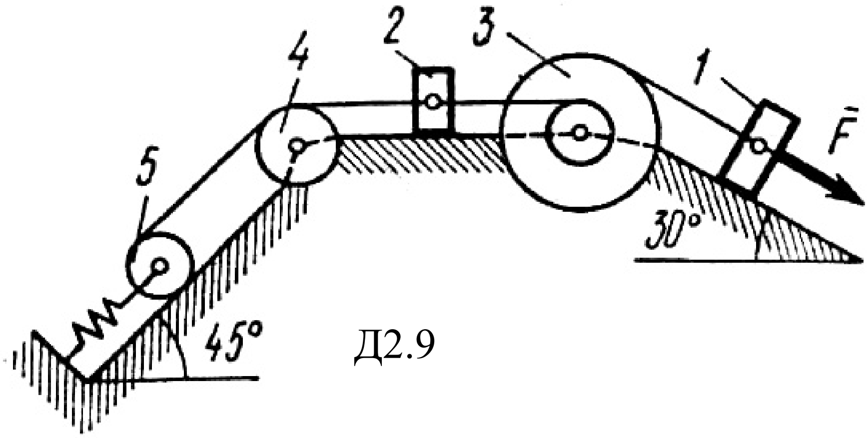
Рисунок 7



Д2.7



Д2.8



Д2.9

Рисунок 8

Вказівки до розв'язання задачі Д2. Приклад

Механічна система (рисунок 9,*а*) складається із суцільного однорідного циліндричного катка 1, рухомого блока 2, ступінчастого шківа 3 з радіусами ступенів R_3 і r_3 та радіусом інерції відносно осі обертання ρ_3, блока 4 і вантажу 5 (коефіцієнт тертя вантажу по площині дорівнює f). Тіла системи з'єднані нитками, які намотані на шків 3. До центра *E* блока 2 приєднана пружина з коефіцієнтом жорсткості *c*; її початкова деформація дорівнює нулю.

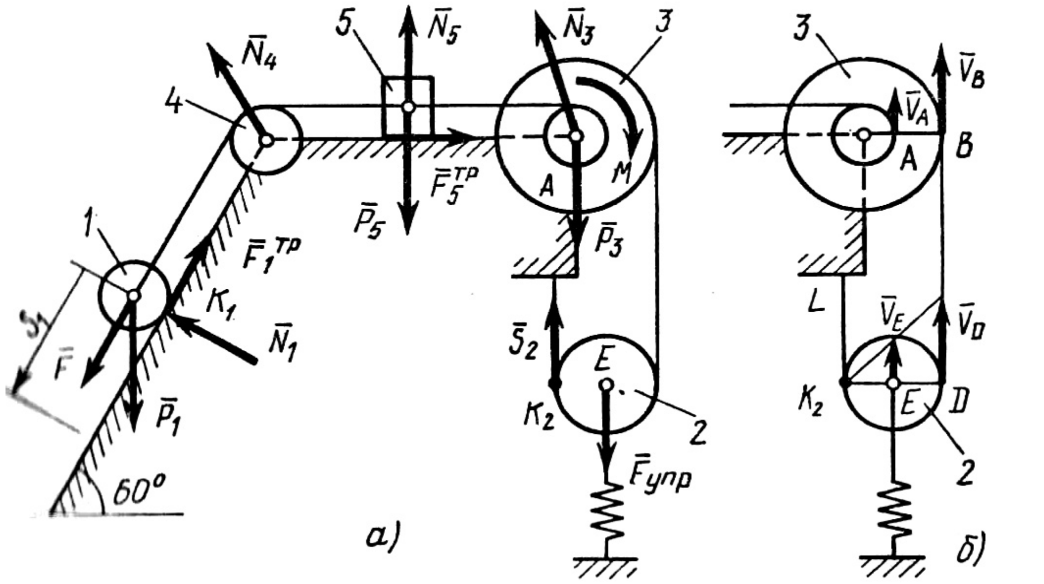


Рисунок 9

Дано:

$m_1 = 8кг$, $m_2 = 0$, $m_3 = 4кг$, $m_4 = 0$, $m_5 = 10кг$,

$R_3 = 0{,}3м$, $r_3 = 0{,}3м$, $\rho_3 = 0{,}2м$, $f = 0{,}1$, $c = 240\dfrac{H}{м}$, $M = 0{,}6H \cdot м$,

$F = 20(3 + 2s)\,H$, $s_1 = 0{,}2м$.

Визначити:

ω_3 у той момент часу, коли $s = s_1$.

Розв’язання

1 Розглянемо рух незмінної механічної системи, що складається з вагомих тіл 1, 3, 5 і невагомих тіл 2, 4, які з’єднані нитками. Зобразимо діючі на систему зовнішні сили: активні $\overline{F}$, $\overline{F}_{упр}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакції $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяг нитки $\overline{S}_2$, сили тертя $\overline{F}_1^{тр}$, $\overline{F}_5^{тр}$ і момент M.

Для визначення ϖ_3 скористаємось теоремою про зміну кінетичної енергії

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e . \tag{3.1}$$

2 Визначимо T_0 і T. Оскільки в початковий момент часу система знаходиться у спокої, то $T_0 = 0$. Величина T дорівнює сумі енергій усіх тіл системи

$$T = T_1 + T_3 + T_5 . \tag{3.2}$$

Враховуючи, що тіло 1 рухається плоскопаралельно, тіло 5 – поступально, а тіло 3 обертається навколо нерухомої осі, отримаємо:

$$T_1 = \frac{m_1 V_{c1}^2}{2} + \frac{I_{c1}\omega_{c1}^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \tag{3.3}$$

$$T_5 = \frac{m_5 V_5^2}{2}.$$

Усі швидкості, які входять до формул (3.3), потрібно виразити через шукану ϖ_3. Для цього попередньо відмітимо, що $V_{c1} = V_5 = V_A$, де A – будь-яка точка ободу радіуса r_3 шківа 3, і що точка K_1 – миттєвий центр швидкостей катка 1, радіус якого позначимо r_1. Тоді

$$V_{c1} = V_5 = \omega_3 r_3; \qquad \omega_1 = \frac{V_{c1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{c1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \tag{3.4}$$

Крім того, моменти інерції, що входять до складу формули (3.3), мають значення

$$I_{c1} = \frac{m_1 r_1^2}{2}; \qquad I_3 = m_3 \rho_3^2. \tag{3.5}$$

Підставивши усі величини (3.4) і (3.5) у рівність (3.3), а потім, використавши рівність (3.2), остаточно отримаємо

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \tag{3.6}$$

3 Тепер знайдемо суму робіт усіх діючих зовнішніх сил при переміщенні, яке буде мати система, коли центр катка 1 пройде шлях s_1. Вводячи позначення s_5 – переміщення вантажу 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 – кут повороту шківа 3, λ_0 і λ_1 – початкове і кінцеве подовження пружини, отримаємо

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s)ds = 20\left(3s_1 + s_1^2\right);$$

$$A(\overline{P}) = P_1 s_1 \sin 60^0;$$

$$A\left(\overline{F}_5^{mp}\right) = -F_5^{mp} s_5 = -fP_5 s_1;$$

$$A\left(\overline{F}_{ynp}\right) = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right).$$

Роботи інших сил дорівнюють нулю, тому що точки K_1 і K_2, де прикладені сили $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1^{mp}$та $\overline{S}_2$, – миттєві центри швидкостей; точки, де прикладені сили $\overline{P}_3$, $\overline{N}_3$ та $\overline{N}_4$, – нерухомі, а реакція $\overline{N}_5$ перпендикулярна до переміщення вантажу.

За умовами задачі $\lambda_0 = 0$. Тоді $\lambda_1 = s_E$, де s_E – переміщення точки E (кінця пружини). Величини s_E та φ_3 потрібно виразити через задане переміщення s_1; для цього врахуємо, що залежність між переміщеннями тут така сама, як і між відповідними швидкостями. Тоді, оскільки $\omega_3 = \frac{V_A}{r_3} = \frac{V_{c1}}{r_3}$ (рівність $V_{c1} = V_A$ вже відмічалась), то і $\varphi_3 = \frac{s_1}{r_3}$.

Далі з рисунка 3.5,*б* видно, що $V_D = V_B = \omega_3 R_3$, а оскільки точка K_2 є миттєвим центром швидкостей для блока 2 (він ніби «гойдається» по ділянці нитки K_2L), то $V_E = 0{,}5V_D = 0{,}5\omega_3 R_3$; отже, і $\lambda_1 = s_E = 0{,}5\varphi_3 R_3 = \frac{s_1 R_3}{2r_3}$. При знайдених значеннях φ_3 і λ_1 для суми обчислених робіт отримаємо

$$\Sigma A_k^e = 20\left(3s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60^0 - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c \cdot R_3^2}{8 \cdot r_3^2} s_1^2. \qquad (3.7)$$

Підставляючи вирази (3.6) і (3.7) в рівняння (3.1) і враховуючи, що $T_0 = 0$, прийдемо до рівності

$$\left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20\left(3s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60^0 - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c \cdot R_3^2}{8 \cdot r_3^2} s \qquad .(3.8)$$

З рівності (3.8), підставивши в неї числові значення заданих величин, знайдемо шукану кутову швидкість ϖ_3.

Відповідь: $\omega_3 = 8{,}1c^{-1}$.

4 Задача Д3. Застосування загального рівняння динаміки до дослідження руху механічної системи

Механічна система складається із однорідних ступінчастих шківів 1 і 2, обмотаних нитками, вантажів 3 – 6, які прикріплені до цих ниток, і невагомого блока 6 (рисунки 10, 11, 12, 13, таблиця 3). Система рухається у вертикальній площині під дією сил ваги і пари сил з моментом *M*, яка прикладена до одного із шківів. Радіуси ступенів шківа 1 $R_1 = 0{,}2\,м$, $r_1 = 0{,}1\,м$, а шківа 2 – $R_2 = 0{,}3\,м$, $r_2 = 0{,}15\,м$; їх радіуси інерції відносно осей обертання дорівнюють відповідно $\rho_1 = 0{,}1\,м$ і $\rho_2 = 0{,}2\,м$.

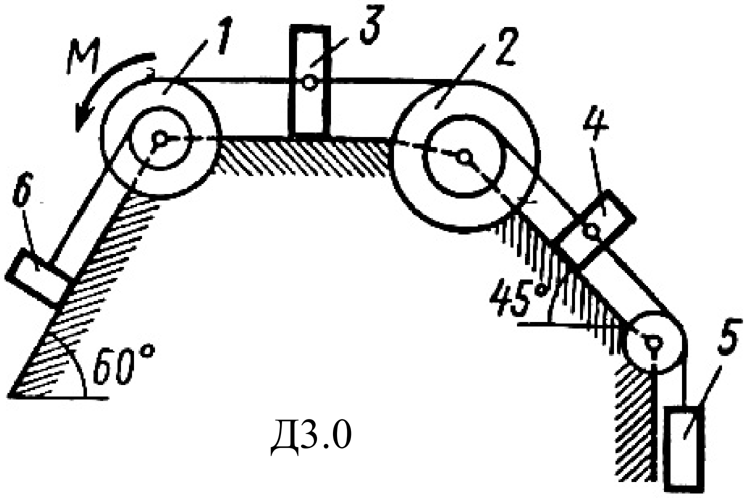
Нехтуючи тертям, визначити прискорення вантажу, який має найбільшу вагу; вага $P_1 \ldots P_6$ шківів задана в таблиці 3. Вантажі, вага яких дорівнює нулю, на кресленні не зображати (шківи 1 і 2 зображати завжди як частини схеми).

Задача Д3 відноситься до розділу «Застосування до вивчення руху системи загального рівняння динаміки» (принцип Даламбера – Лагранжа). Для розв’язання задачі необхідно попередньо приєднати до діючих на систему сил відповідні сили інерції, надати механізму можливе переміщення, розрахувати суму елементарних робіт всіх активних сил і пар, а також сил інерції на цьому переміщенні і прирівняти її до нуля. При цьому треба враховувати, що для однорідного тіла, яке обертається навколо своєї осі симетрії (шківа), система сил інерції зводиться до пари з моментом $M^И = I_z \varepsilon$, де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, ε – кутове прискорення тіла; напрямок $M^И$ протилежно спрямований до ε. Крім того, усі можливі переміщення, що входять до складеного рівняння, треба виразити через яке-небудь одне.

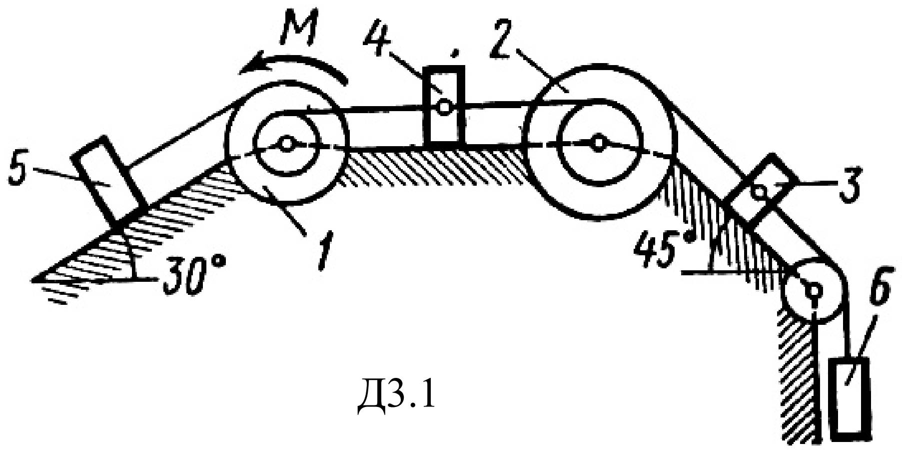
Дані для виконання задачі Д3 згідно з варіантами надані в таблиці 3 та на рисунках 10, 11, 12, 13.

Таблиця 3

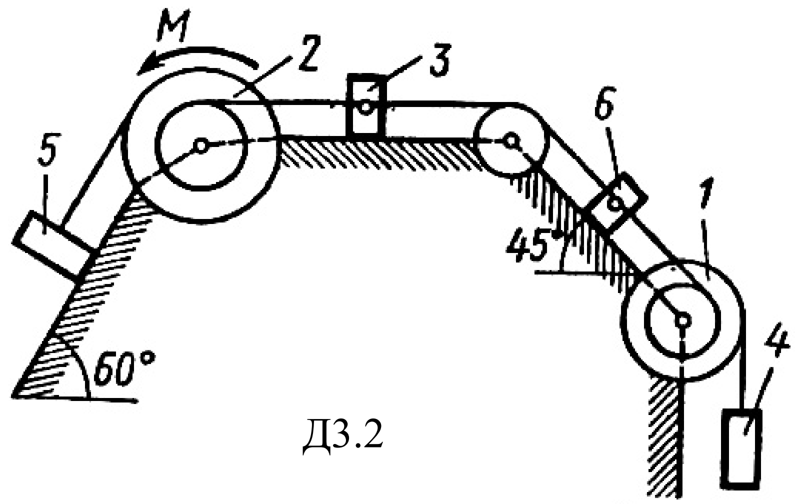
Номер	P_1, *Н*	P_2, *Н*	P_3, *Н*	P_4, *Н*	P_5, *Н*	P_6, *Н*	*М*, *Н·м*
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16



Д3.0

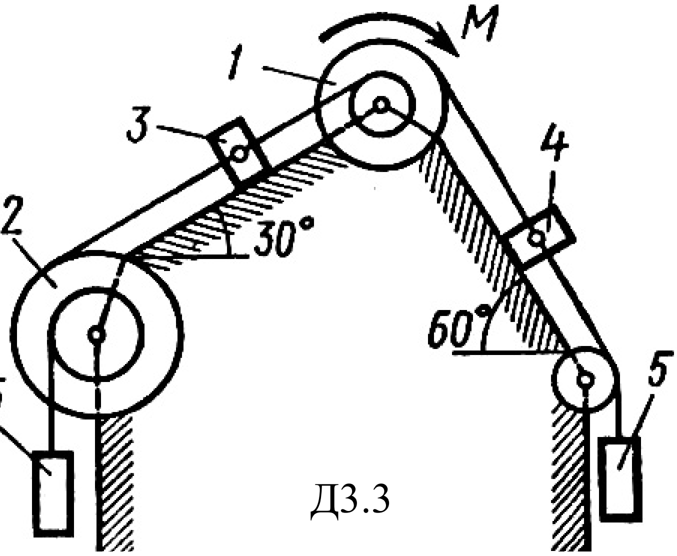


Д3.1

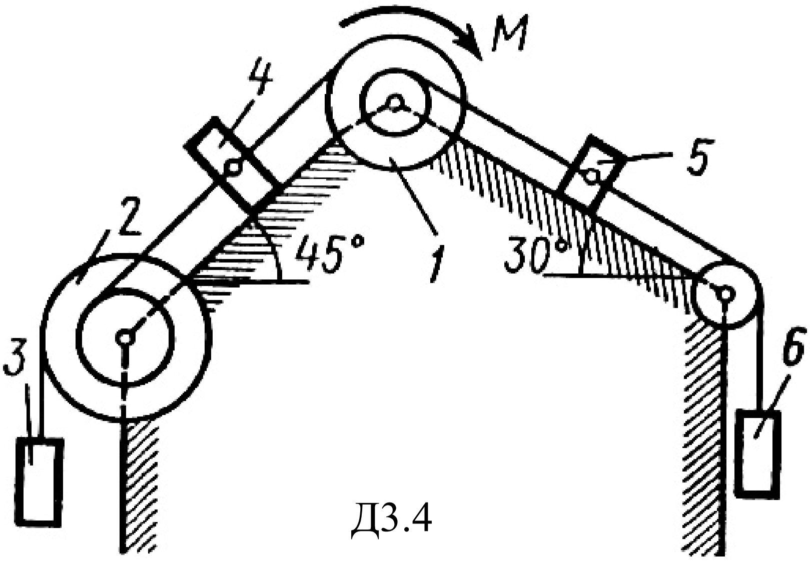


Д3.2

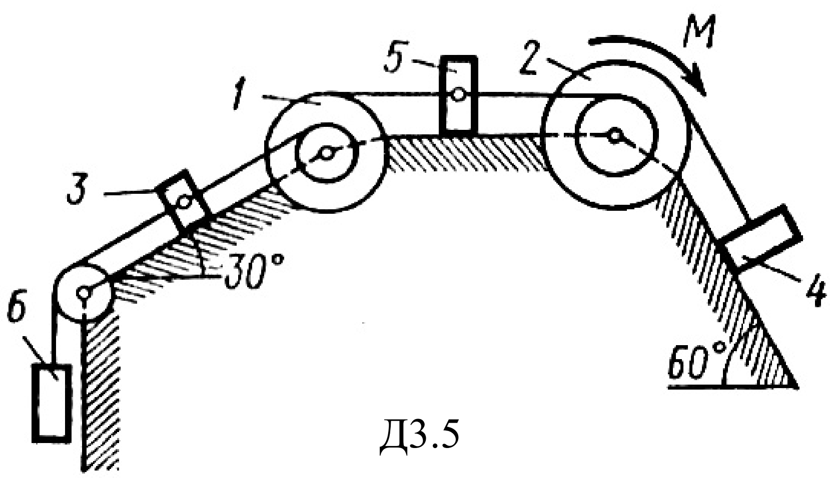
Рисунок 10



Д3.3

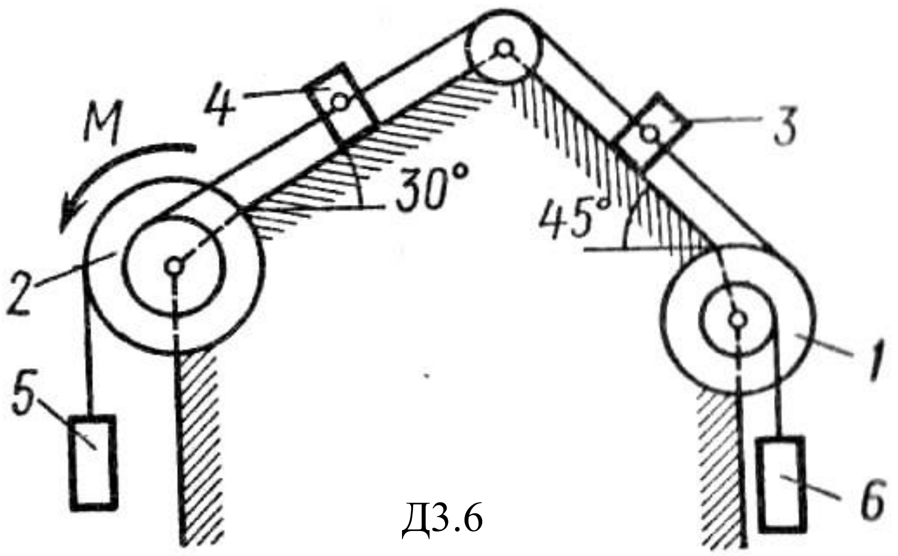


Д3.4

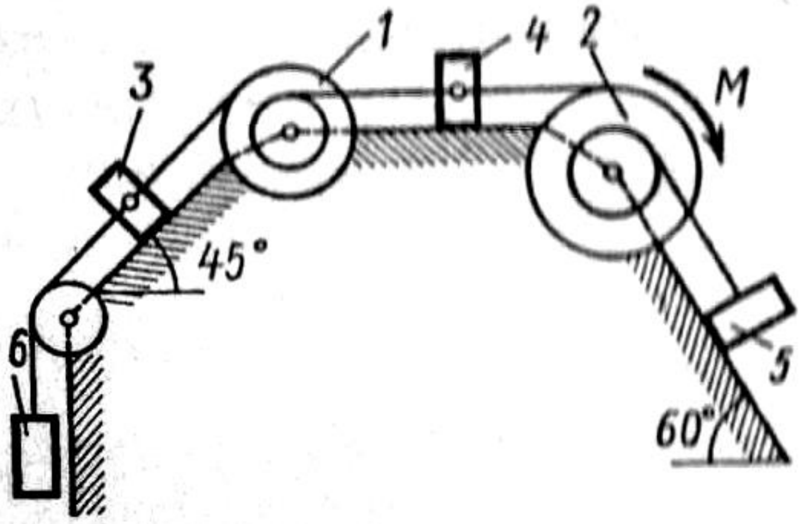


Д3.5

Рисунок 11

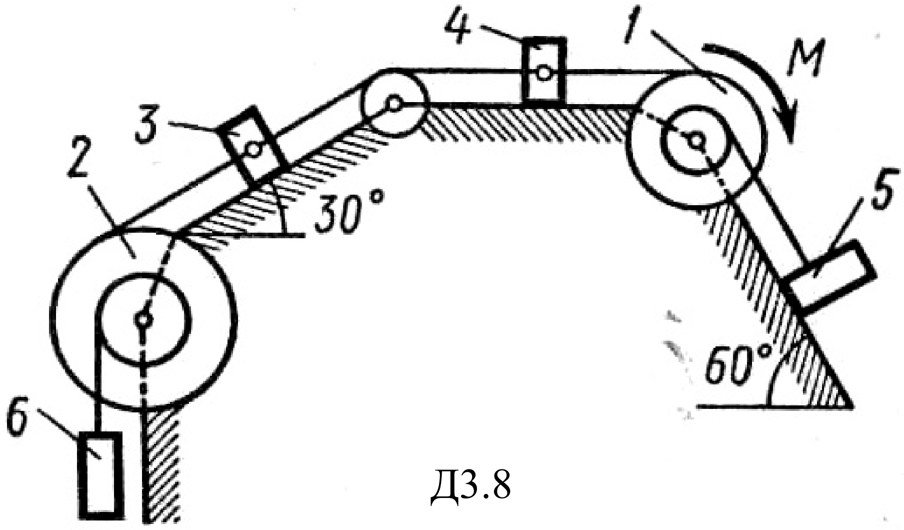


Д3.6

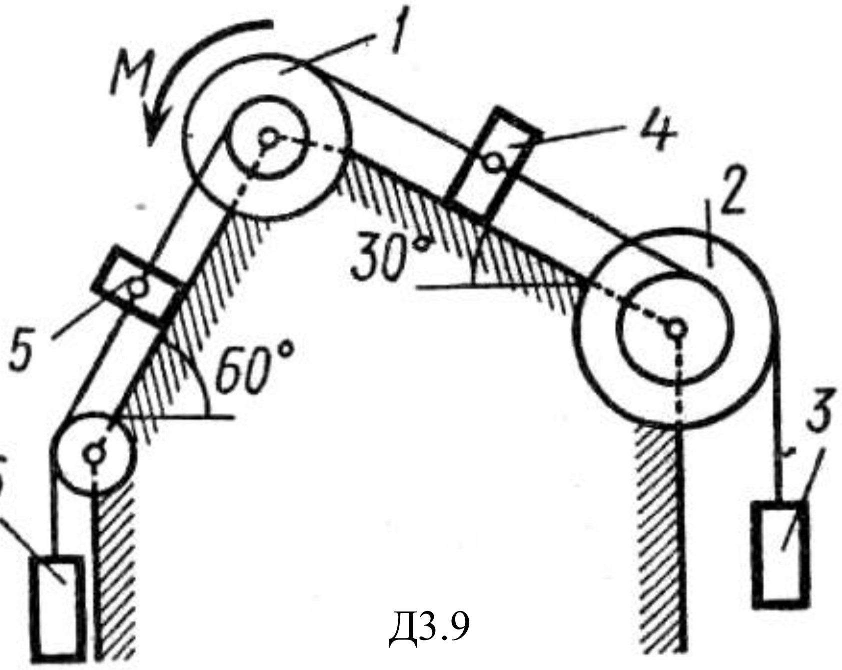


Д3.7

Рисунок 12



Д3.8



Д3.9

Рисунок 13

Вказівки до розв'язання задачі Д3. Приклад

Механічна система (рисунок 14) складається із обмотаних нитками блока 1 радіуса R_1 і ступінчастого шківа 2 (радіуси ступенів R_2 і r_2, радіус інерції відносно осі обертання ρ_2), а також вантажів 3 і 4, прикріплених до цих ниток. Система рухається у вертикальній площині під дією сил ваги і пари сил з моментом M, прикладеною до блока 1.

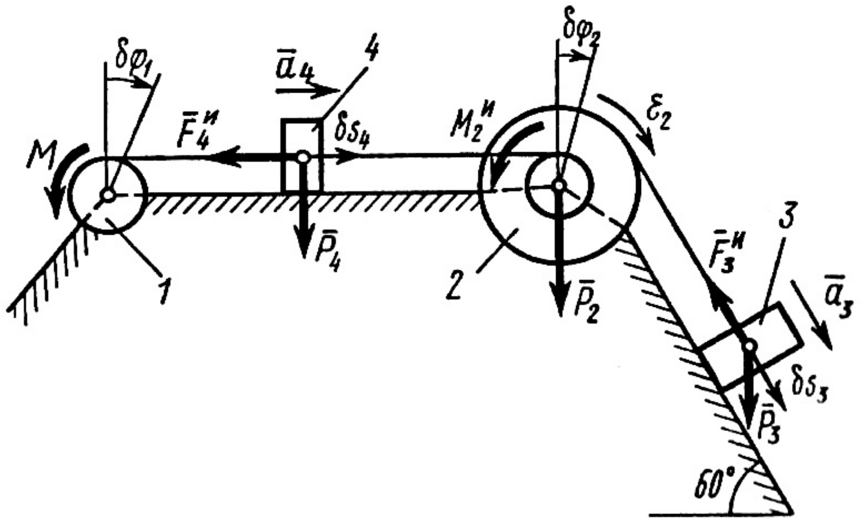


Рисунок 14

Дано:

$P_1 = 0$, $P_2 = 30H$, $P_3 = 40H$, $P_4 = 20H$, $M = 16H \cdot м$, $R_1 = 0{,}2м$, $R_2 = 0{,}3м$, $r_2 = 0{,}15м$, $\rho_2 = 0{,}2м$.

Визначити:

прискорення вантажу 3, нехтуючи тертям.

Розв'язання

1 Розглянемо рух механічної системи, яка складається з тіл 1, 2, 3, з'єднаних нитками. Система має один ступінь вільності. Зв'язки, які накладені на цю систему, – ідеальні.

Для визначення a_3 застосуємо загальне рівняння динаміки

$$\Sigma\delta A_k^a + \Sigma\delta A_k^u = 0, \qquad (4.1)$$

де $\Sigma\delta A_k^a$ – сума елементарних робіт активних сил;

$\Sigma\delta A_k^u$ – сума елементарних робіт сил інерції.

2 Зобразимо на кресленні активні сили $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ і пару сил з моментом M. Задаючись напрямком прискорення a_3, зобразимо на кресленні сили інерції $\overline{F}_3^u$, $\overline{F}_4^u$ і пару сил з моментом M_2^u, величини яких дорівнюють

$$F_3^u = \frac{P_3}{g}a_3; \quad F_4^u = \frac{P_4}{g}a_4; \quad M_2^u = \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2. \qquad (4.2)$$

3 Надаючи системі можливе переміщення і складаючи рівняння (4.1), отримаємо

$$\left(P_3 \sin 60^0 - F_3^u\right)\delta s_3 - M_2^u\delta\varphi_2 - F_4^u\delta s_4 - M\delta\varphi_1 = 0. \qquad (4.3)$$

Виразимо усі переміщення через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2\delta\varphi_2; \quad \delta s_4 = r_2\delta\varphi_2; \quad \delta\varphi_1 = \frac{r_1}{R_1}\delta\varphi_2. \qquad (4.4)$$

Підставивши величини (4.2) і (4.4) в рівняння (4.3), приведемо його до вигляду

$$\left[P_3\left(\sin 60^0 - \frac{a_3}{g}\right)R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 - \frac{P_4}{g}a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1}\right]\delta\varphi_2 = 0. \qquad (4.5)$$

Величини ε_2 і a_4, які входять до цього рівняння, виразимо через шукану величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}; \; a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2}a_3.$$

Потім, враховуючи, що $\delta\varphi_2 \neq 0$, прирівняємо до нуля вираз, який стоїть у формулі (4.5) у квадратних дужках.

З отриманого у результаті рівняння знайдемо

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^0 - M\dfrac{r_2}{R_1}}{P_3 R_2 + P_2\dfrac{\rho_2^2}{R_2} + P_4\dfrac{r_2^2}{R_2}} g .$$

Відповідь: $a_3 = -0{,}9\frac{м}{с^2}$. Знак вказує, що прискорення вантажу 3 та прискорення інших тіл спрямовані протилежно вказаним на рисунку 14.

Список літератури

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986.
2. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. – М., 1984. – Ч. 1, 2.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А. А. Яблонского. – М., 1985.
4. Комплексне методичне забезпечення до вивчення дисципліни „Теоретична механіка”. – Харків: УкрДАЗТ, 2004.
5. Аксьонова Н. А., Оробінський О. В. Теоретична механіка: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2015.