ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛІННЯ ТРАНСПОРТНИМИ СИСТЕМАМИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання до індивідуальних робіт

Харків – 2018

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 4 грудня 2017 р., протокол № 4.

Методичні вказівки і завдання призначені для студентів освітнього рівня «Магістр» всіх форм навчання.

Укладачі:

доценти Н. Г. Панченко,
М. Є. Резуненко

Рецензент

проф. Т. В. Бутько

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛІННЯ ТРАНСПОРТНИМИ СИСТЕМАМИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
і завдання до індивідуальних робіт

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 27.12.17 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,5. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ПАРНА РЕГРЕСІЯ І КОРЕЛЯЦІЯ

Одна з найбільш поширених задач статистичного дослідження полягає у вивченні залежності фактора Y (результативної ознаки) від одного або декількох інших факторів. Для цього в статистиці використовується кореляційно-регресійний аналіз.

Терміни кореляція (correlation – співвідношення, взаємозв’язок, взаємозалежність) і регресія (regress – рухатися у зворотному напрямі) ввів Ф. Гальтон (1822-1911 р.р). У 1885 р. була видана його робота «Регресія в напряму до загального середнього розміру при наслідуванні росту», присвячена дослідженню залежності росту дітей від росту їхніх батьків. З часом відбулося узагальнення поняття регресії, яке спочатку використовувалося лише для процесів, що мали тенденцію рухатися в напрямі середнього, і сьогодні регресійний аналіз широко застосовується в різних галузях людської діяльності.

Задача кореляційного аналізу полягає у виявленні характеру і ступеня взаємозв'язку між факторами, які є випадковими величинами.

Задачею регресійного аналізу є визначення того, наскільки зміна одного фактора в середньому впливає на зміну результативної ознаки.

У кореляційному аналізі визначається один показник, що характеризує ступінь тісноти взаємозв'язку факторів, а в регресійному аналізі будується модель регресії у вигляді математичної функції, яка показує вплив факторів на результативну ознаку.

Випадкові величини можуть бути пов'язані або функціональною залежністю, або статистичною, або бути незалежними.

Функціональною називають залежність, при якій кожному значенню випадкової величини X за певним законом ставиться у відповідність єдине або декілька строго визначених значень випадкової величини Y.

Статистичною називають залежність, при якій значенню випадкової величини X ставиться у відповідність певний розподіл випадкової величини Y. Виникнення такого зв'язку обумовлено тим, що на залежну змінну можуть впливати неконтрольовані або невраховані фактори, а також випадкові помилки. У цьому випадку одному і тому самому значенню X можуть відповідати різні значення Y. Наприклад один і той самий товар продається в різних магазинах за різною ціною.

Умовним математичним сподіванням $M_x\left(Y\right)$ називається математичне сподівання змінної Y, обчислене у припущенні, що змінна X набула значення x.

Кореляційною називається статистична залежність, при якій кожному значенню однієї змінної відповідає певне умовне математичне сподівання іншої, тобто існує функціональна залежність між значеннями однієї змінної і умовним математичним сподіванням іншої:

$$M_x\left(Y\right) = f\left(x\right). \tag{1}$$

Рівняння (1) називається рівнянням регресії Y на X, а її графік – лінією регресії.

При цьому якщо умовне математичне сподівання змінюється за лінійним законом, то залежність називається лінійною, інакше – нелінійною.

За напрямом змін результативної та факторної ознаки залежності поділяють на прямі і зворотні.

Залежно від кількості факторів, включених у рівняння регресії, прийнято розрізняти парну (1 фактор) і множинну регресію (2 і більше факторів).

Регресійний аналіз включає такі етапи:

1) вибір форми зв'язку (виду аналітичного рівняння регресії);

2) оцінка параметрів рівняння;

3) оцінка якості рівняння регресії.

Розрізняють лінійні і нелінійні регресії. Найчастіше для опису статистичного зв'язку ознак використовується лінійна форма

$$y = a + bx + \varepsilon \text{ або } \hat{y} = a + bx,$$

де a і b – параметри рівняння регресії;

ε – випадкова величина, що сформувалася під впливом неконтрольованих або неврахованих факторів, а також випадкових помилок.

Випадкова величина ε характеризує відхилення фактичного значення результативної ознаки від теоретичного, отриманого за рівнянням регресії.

Нелінійні регресії поділяють на два класи:

1 Лінійні по оцінюваних параметрах, наприклад

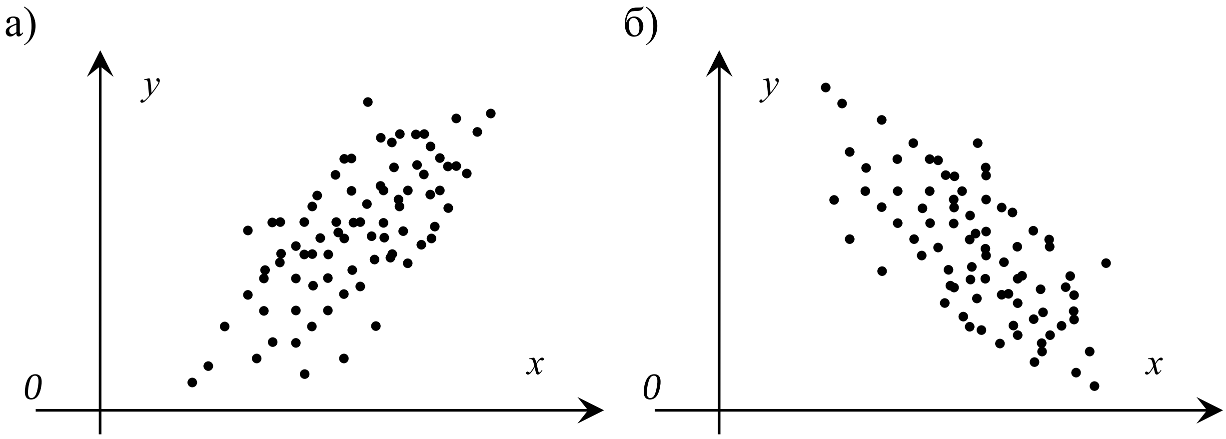
$$\hat{y} = a + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_k x^k,$$
$$\hat{y} = a + b \ln x, \quad \hat{y} = a + \frac{b}{x}.$$

2 Нелінійні по оцінюваних параметрах, наприклад

$$\hat{y} = ax^b, \ \hat{y} = ab^x, \ \hat{y} = e^{a+bx}, \ \ln \hat{y} = a + b \ln x.$$

Такі типи рівнянь регресії зводять до лінійних заміною змінних (лінеаризація).

Набір значень двох змінних x_i і y_i, $i = \overline{1, n}$ можна зобразити на площині XOY точками, отримавши поле кореляції (рисунок 1).



а) прямий зв'язок; б) зворотній зв'язок
Рисунок 1 – Поле кореляції

При графічному методі підбору виду рівняння парної регресії візуально порівнюють поле кореляції з основними типами кривих, які використовують при кількісній оцінці зв'язків (рисунок 2).

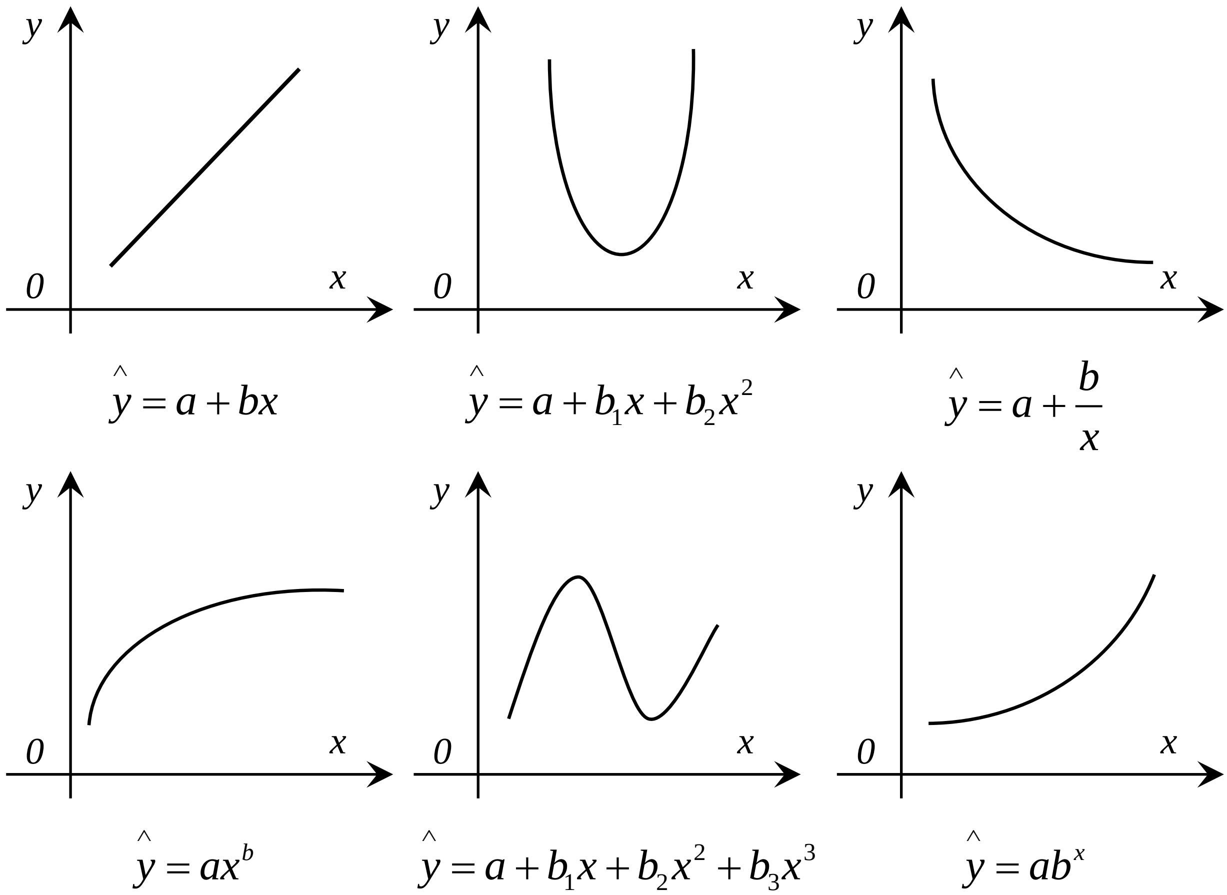


Рисунок 2 – Основні типи кривих, які використовують при кількісній оцінці зв'язків

Оцінки параметрів рівняння регресії найчастіше отримують, використовуючи метод найменших квадратів (МНК). МНК дозволяє отримати такі оцінки параметрів, при яких сума квадратів відхилень фактичних значень результативної ознаки y_i від теоретичних $\hat{y}_i$ буде мінімальною, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \to \min .$$

Для парної регресії

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)^2\rightarrow \min, \tag{2}$$

де n – об’єм вибірки.

Згідно з МНК пряма лінія вибирається таким чином, щоб сума квадратів відстаней по вертикалі між нею і точками кореляційного поля була б мінімальною (рисунок 3).

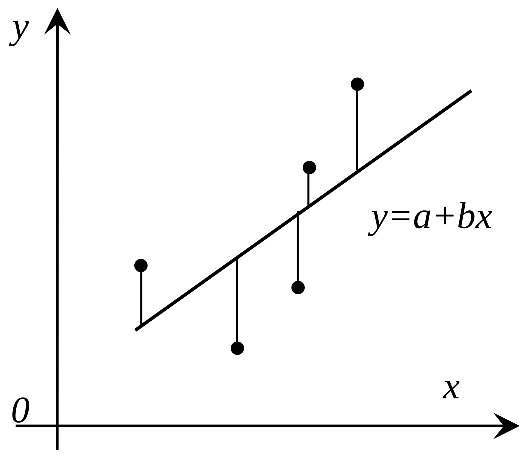


Рисунок 3 – Лінія лінійної регресії з зображеними залишками для кожної точки (вертикальні лінії)

Необхідні умови екстремуму функції (2)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)=0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)x_i=0\end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i \right) x_i = 0. \end{cases}$$

Для парноі регресії параметри a і b знаходять з системи лінійних рівнянь (3):

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \tag{3}$$

Знак коефіцієнта регресії b вказує напрям зв'язку (якщо $b > 0$ – зв'язок прямий, якщо $b < 0$, то зв'язок зворотний). Величина b показує, на скільки одиниць зміниться в середньому результативна ознака Y при зміні ознаки X на одиницю свого виміру. Одиницею виміру коефіцієнта регресії b є відношення одиниці виміру результативної ознаки Y до одиниці виміру ознаки X. Наприклад, якщо результативна ознака вимірюється в грошових одиницях, а факторна – у кількості вагонів, то коефіцієнт регресії b вимірюється в *грошових одиницях на вагон.* Величина коефіцієнта b змінюється при зміні розмірності X і Y.

Тіснота зв'язку між ознаками X і Y вимірюється коефіцієнтом лінійної парної кореляції r_{xy}:

$$r_{yx} = \frac{\overline{y \cdot x} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\sigma_y \cdot \sigma_x},$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ – середнє значення фактора X,

$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ – середнє значення результативної ознаки Y;

$\overline{yx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$;

$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$ – вибіркова дисперсія фактора X ;

$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2$ – вибіркова дисперсія результативної ознаки Y ;

σ_x, σ_y – середнє квадратичне відхилення фактора X і результативної ознаки Y відповідно.

Рівняння парної регресії можна також знайти за формулою

$$\hat{y}_x = a + b\,x = r_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \bar{x}\right) + \bar{y}.$$

Коефіцієнт кореляції є безрозмірною величиною, $r_{yx} \in [-1;1]$. Додатне значення r_{yx} вказує на прямий зв’язок, а від’ємне – на зворотний.

Для оцінки тісноти зв’язку можна користуватись такою класифікацією:

- якщо $0 < |r_{yx}| < 0,3$ – зв’язок практично відсутній;
- якщо $0,3 \le |r_{yx}| < 0,5$ – зв’язок помірний;
- якщо $0,5 \le |r_{yx}| < 0,7$ – зв’язок середній;
- якщо $0,7 \le |r_{yx}| < 0,9$ – зв’язок сильний;
- якщо $0,9 \le |r_{yx}| < 1$ – зв’язок дуже сильний.

Порівняння коефіцієнтів кореляції і регресії

Коефіцієнт кореляції	Коефіцієнт регресії
Набуває значення в інтервалі $[-1,1]$	Набуває будь-яких значень
Безрозмірна величина	Залежить від розмірності та факторної ознаки
Показує силу зв'язку між ознаками	Показує структуру зв'язку між ознаками
Знак коефіцієнта показує напрям зв'язку	Знак коефіцієнта показує напрям зв'язку

Для оцінки якості отриманого рівняння розраховують коефіцієнт детермінації R^2, який характеризує частку варіації результативної ознаки Y, що пояснюється отриманим рівнянням. Відповідно величина $1-R^2$ характеризує частку дисперсії Y, викликану впливом інших неврахованих у моделі факторів і помилками специфікації. Наприклад, якщо $R^2 = 0,92$, то це означає, що рівняння регресії пояснює 92 % дисперсії результативної ознаки, а на частку інших факторів припадає 8 %.

Коефіцієнт детермінації може бути обчислений за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2}. \tag{4}$$

Зокрема для парної лінійної регресії $R^2 = \left(r_{yx} \right)^2$.

Коефіцієнт детермінації R^2 набуває значень від 0 до 1. Якщо $R^2 = 1$, то між X і Y існує лінійна функціональна залежність.

Інший показник якості побудованої моделі – середня помилка апроксимації, тобто середнє відносне відхилення теоретичних значень від фактичних:

$$\overline{A} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\% .$$

Рівняння регресії вважається задовільним, якщо значення $\overline{A}$ не перевищує 10 %.

Середній коефіцієнт еластичності $\overline{E} = b \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$ показує, на скільки відсотків у середньому змінюється результативна ознака при зміні фактора на 1 % від свого середнього значення.

Після того як знайдено рівняння лінійної регресії, проводиться оцінка значущості як рівняння в цілому, так і окремих його параметрів.

Перевірка значущості рівняння регресії встановлює відповідність отриманої математичної моделі фактичним даним і проводиться на основі *F*-критерію Фішера. Для парної регресії обчислюють фактичне значення *F*-критерію Фішера за формулою

$$F = (n-2) \frac{r_{yx}^2}{1 - r_{yx}^2}, \qquad (5)$$

де n – об'єм вибірки;

r_{yx} – коефіцієнт лінійної парної кореляції.

Отримане за виразом (5) значення $F_{факт}$ порівнюють з табличним значенням $F_{крит}(\alpha, k_1, k_2)$ при заданому рівні значущості α та степенях вільності $k_1 = 1$ і $k_2 = n - 2$. У випадку, коли $F_{факт} > F_{крит}$, рівняння регресії вважають статистично значущим у цілому.

Для оцінки значущості параметрів рівняння для кожного з них визначається його стандартна похибка за формулою

$$m_a = \frac{S_{залишк} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sigma_x \cdot n}, \; m_b = \frac{S_{залишк}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}},$$

де $S_{залишк}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n-2}$ – залишкова дисперсія.

Параметри рівняння регресії будуть значущими у випадку, коли фактичні значення t-критерію Стьюдента $t_b = \dfrac{|b|}{m_b}$, $t_a = \dfrac{|a|}{m_a}$ для кожного параметра рівняння перебільшують табличне значення при заданому рівні значущості α і кількості степенів свободи $k = n - 2$.

Зв'язок між F-критерієм Фішера і t-статистикою Стьюдента: $t_b = \sqrt{F}$.

МНОЖИННА (БАГАТОФАКТОРНА) РЕГРЕСІЯ

Відомо, що більшість соціально-економічних показників формуються під впливом не одного, а багатьох факторів. Метод побудови моделі такого зв’язку має назву *множинного (багатофакторного) кореляційно-регресійного аналізу*. У цьому випадку результативна ознака $\hat{y}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ пов’язується за допомогою *рівняння множинної (багатофакторної)* регресії з двома або більше факторними ознаками $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\hat{y}_{x_1 x_2 \ldots x_m} = f(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

де $\hat{y}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ – залежна змінна (результативна ознака);

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ – незалежні змінні (факторні ознаки);

m – кількість факторів.

Метою множинної (багатофакторної) регресії є побудова моделі з кількома факторами та дослідження впливу на результативну ознаку як кожного фактора окремо, так і їх сукупності.

Розрізняють *лінійні* та *нелінійні* моделі множинної регресії залежно від виду функції $f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Особливе значення мають лінійні моделі завдяки простоті та логічності їх інтерпретації.

Регресійна модель називається *лінійною*, якщо $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ - лінійна функція, тобто

$$\hat{y}_{x_1 x_2 ... x_m} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_m x_m. \tag{6}$$

Параметри $b_1, b_2, ..., b_m$ називаються *коефіцієнтами* «чистої» регресії.

Коефіцієнти «чистої» регресії показують, як у середньому зміниться результативна ознака при зміні відповідного фактора на одиницю при фіксованих інших факторах.

Розглянемо лінійну модель множинної регресії (6). У подальшому для зручності будемо писати $\hat{y}$ замість $\hat{y}_{x_1 x_2 ... x_m}$.

Класичний підхід обчислення параметрів лінійної моделі множинної регресії, як і для парної регресії, заснований на методі найменших квадратів (МНК):

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 \to \min, \; i = \overline{1, n},$$

де n – об’єм вибірки.

Таким чином, необхідно знайти мінімум функції:

$$S(a, b_1, b_2, ..., b_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - ... - b_m x_{mi} \right)^2.$$

Прирівнюючи до нуля частинні похідні першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - \ldots - b_m x_{mi}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i}\left(y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - \ldots - b_m x_{mi}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_m} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} x_{mi}\left(y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - \ldots - b_m x_{mi}\right) = 0, \end{cases}$$

після елементарних перетворень отримаємо систему лінійних рівнянь для знаходження параметрів рівняння лінійної множинної регресії:

$$\begin{cases} na + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} + \ldots + b_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_{mi} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{1i})^2 + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + \ldots + b_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} x_{mi} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{1i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_{mi} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} x_{mi} + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} x_{mi} + \ldots + b_m \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{mi})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{mi}. \end{cases} \quad (7)$$

Зокрема для двофакторної моделі

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad (8)$$

система рівнянь (7) набуває вигляду

$$\begin{cases} na + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{1i})^2 + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{1i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{2i})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{2i}. \end{cases} \quad (9)$$

Аналогічно будують рівняння множинної регресії в стандартизованому вигляді

$$\hat{t}_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + ... + \beta_m t_{x_m},$$

де $\hat{t}_y, t_{x_1}, t_{x_2}, ..., t_{x_m}$ – стандартизовані змінні, які обчислюються за формулами

$$\hat{t}_y = \frac{y - \overline{y}}{\sigma_y}, t_{x_i} = \frac{x_i - \overline{x_i}}{\sigma_{x_i}},$$

де $\overline{y}, \overline{x_i}$ – середні значення результативної ознаки та факторних ознак відповідно,

σ_y, σ_{x_i} – середнє квадратичне відхилення результативної ознаки та факторних ознак відповідно.

Слід зауважити, що середнє значення стандартизованих змінних дорівнює нулю ($\overline{t_y} = \overline{t_{x_i}} = 0$), а їхнє середнє квадратичне відхилення дорівнює одиниці ($\sigma_{t_y} = \sigma_{t_{x_i}} = 1$).

Числа β_i, $i = \overline{1, m}$ називаються *стандартизованими коефіцієнтами* регресії.

Стандартизовані коефіцієнти регресії β_i можна також обчислити, використовуючи їхній зв’язок з коефіцієнтами чистої регресії b_i:

$$\beta_i = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y}, \ i = \overline{1, m}. \tag{10}$$

Стандартизовані коефіцієнти, як і коефіцієнти «чистої» регресії, характеризують зміну результативної ознаки t_y в середньому по відповідному фактору при зафіксованих інших факторах на своєму середньому значенні. Але, на відміну від коефіцієнтів «чистої» регресії $b_i, i = \overline{1, m}$, коефіцієнти β_i, $i = \overline{1, m}$ можна порівнювати між собою, що надає можливість ранжувати фактори за силою їх впливу на результат. У цьому полягає важлива перевага стандартизованих коефіцієнтів.

На основі лінійного рівняння множинної регресії (6) можуть бути знайдені середні *коефіцієнти еластичності*

$$\overline{E}_i = b_i \cdot \frac{\overline{x_i}}{\overline{y}},\ i = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Середній коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків у середньому змінюється результативна ознака при зміні відповідної факторної ознаки на 1 %.

Коефіцієнти еластичності можна порівнювати між собою, як і стандартизовані коефіцієнти регресії.

Практична значущість рівняння множинної регресії (6) оцінюється за допомогою *коефіцієнта множинної кореляції* $R_{yx_1x_2...x_m}$ та його квадрата $R^2_{yx_1x_2...x_m}$, який називається *коефіцієнтом детермінації*.

Далі для зручності будемо позначати $R^2_{yx_1x_2...x_m}$ через R^2.

Коефіцієнт детермінації R^2 показує, наскільки зміна результативної ознаки (у відсотках) пояснюється зміною сукупності факторних ознак, тобто це частка дисперсії ознаки Y, яка характеризується впливом обраних факторів.

Коефіцієнт множинної кореляції характеризує тісноту спільного впливу факторів на результативну ознаку та обчислюється за формулою

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{залишк}}{\sigma^2_y}}, \tag{12}$$

де σ^2_y – загальна дисперсія результативної ознаки,

$$\sigma^2_y = \frac{1}{n^2}\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\overline{y}\right)^2, \tag{13}$$

де $\sigma^2_{залишк}$ – залишкова дисперсія,

$$\sigma^2_{залишк} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 . \tag{14}$$

Коефіцієнт детермінації R^2 набуває значення від 0 до 1.

У випадку лінійного рівняння множинної регресії (6) коефіцієнт множинної кореляції можна також знайти за формулою

$$R = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\beta_k \cdot r_{yx_k}} , \tag{15}$$

де β_k – стандартизовані коефіцієнти регресії;

r_{yx_k} – парні коефіцієнти кореляції результативної ознаки з фактором x_k, $k = \overline{1,m}$,

$$r_{yx_k} = \frac{\overline{y \cdot x_k} - \left(\overline{y}\right)\cdot\left(\overline{x_k}\right)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_k}},\ k = \overline{1,m}, \tag{16}$$

де

$$\overline{y \cdot x_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i \cdot x_{k_i}\right), \tag{17}$$

$$\left(\overline{y}\right)\cdot\left(\overline{x_k}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_{k_i} . \tag{18}$$

Область допустимих значень коефіцієнта парної кореляції r_{yx_k} належить інтервалу [-1;1]. Якщо коефіцієнт парної кореляції близький до нуля, то зв’язок між величинами y і x_k, $k = \overline{1,m}$, відсутній. Якщо значення коефіцієнта кореляції дорівнює за модулем одиниці, то це означає, що між результативною і факторними змінними існує функціональний зв’язок. Знак коефіцієнта парної кореляції вказує на напрям зв’язку.

Коефіцієнт детермінації R^2 збільшується при додаванні нових змінних, хоча це може і не вказувати на поліпшення якості регресійної моделі. Для усунення можливого перебільшення тісноти зв'язку використовують *скоригований коефіцієнт множинної детермінації* $\hat{R}^2$:

$$\hat{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \cdot \frac{n-1}{n-m-1}. \quad (19)$$

Очевидно, що зі збільшенням кількості факторів m зростають відмінності між R^2 і $\hat{R}^2$ (чим більше кількість факторів, тим менше буде значення $\hat{R}^2$ порівняно з R^2). Таким чином, при введенні в модель нових змінних, які суттєво не впливають на залежну змінну, скоригований коефіцієнт $\hat{R}^2$ може зменшуватися.

Наряду з парними коефіцієнтами існують *коефіцієнти частинної кореляції* $r_{yx_i|x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_m}$, які характеризують тісноту зв'язку між результативною ознакою y і відповідним фактором x_i при усуненні впливу інших факторів, що входять у рівняння регресії.

Для рівняння регресії вигляду формули (6) коефіцієнти частинної кореляції обчислюють за формулою

$$r_{yx_i|x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_m} = \sqrt{1 - \frac{1-R^2}{1-R^2_{yx_1x_2...x_{i-1}x_{i+1}...x_m}}}, \quad (20)$$

де R^2 – коефіцієнт детермінації всіх m факторів;

$R^2_{yx_1x_2...x_{i-1}x_{i+1}...x_m}$ - коефіцієнт детермінації без введення в модель (6) фактора x_i.

Для двофакторної моделі (8) формула для обчислення коефіцієнтів частинної кореляції має вигляд

$$r_{yx_1|x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_2}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}}, \text{(фактор } x_2 \text{ - зафіксований)},$$

$$r_{yx_2|x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_1}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}}, \text{(фактор } x_1 \text{ - зафіксований)}, \tag{21}$$

де $r_{x_1x_2} = \dfrac{\overline{x_1 \cdot x_2} - \left(\overline{x_1}\right) \cdot \left(\overline{x_2}\right)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}$.

Коефіцієнти частинної кореляції, обчислені за формулами (21), як і коефіцієнт парної кореляції, змінюється в межах від -1 до +1, а за формулою (20) – від 0 до +1. За допомогою порівняння їх між собою можна ранжувати фактори за тіснотою їх зв’язку з результативною ознакою.

Частинний коефіцієнт кореляції можна використовувати для виключення з моделі зайвих факторів. При малих значеннях $r_{yx_i|x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_m}$, $i = \overline{1,m}$ не має сенсу залишати в рівнянні регресії фактор x_i, оскільки він має незначний вплив на результативну ознаку.

Оцінка значущості рівняння регресії в цілому проводиться на основі F-критерію Фішера. У математичній статистиці дисперсійний аналіз існує як самостійний інструмент статистичного аналізу. У регресійному аналізі його застосовують у якості допоміжного засобу для оцінки якості побудованої регресійної моделі.

Для розрахунку фактичного значення F-критерію зручно використовувати таблицю 1 (n – об’єм вибірки, m – кількість факторів).

Таблиця 1

Компоненти дисперсії	Сума квадратів відхилень	Кількість степенів вільності	Виправлена дисперсія
Загальна	$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2$	$n-1$	$S^2_{загальн}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2$
Факторна	$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_{x_i}-\overline{y}\right)^2$	m	$S^2_{факт}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_{x_i}-\overline{y}\right)^2$
Залишкова	$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_{x_i}-y_i\right)^2$	$n-m-1$	$S^2_{залишк}=\frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_{x_i}-y_i\right)^2$

Порівнюючи факторну та залишкову дисперсії, отримаємо величину F-критерію Фішера:

$$F_{факт}=\frac{S^2_{факт}}{S^2_{залишк}}=\frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-m-1}{m}. \tag{22}$$

Фактичне значення F-критерію Фішера ($F_{факт}$) порівнюють з табличним $F_{крит}(\alpha,k_1,k_2)$ при заданому рівні значущості α та степенях вільності $k_1=m$ і $k_2=n-m-1$, де n- об'єм вибірки, m-кількість факторів.

Якщо $F_{факт}>F_{крит}$, то з імовірністю $p=1-\alpha$ можна зробити висновок про статистичну значущість рівняння регресії. Тобто отриманий результат не є випадковим, а був сформований під впливом суттєвих факторів.

У лінійній регресії оцінюється значущість не тільки рівняння в цілому, але й окремих його коефіцієнтів. Для цього для кожного коефіцієнта визначається його *стандартна похибка* $m_{b_i}, i=\overline{1,m}$.

Для рівняння двофакторної моделі (8) стандартна похибка обчислюється за формулою

$$m_{b_i} = \frac{\sigma_y \cdot \sqrt{1-R^2}}{\sigma_{x_i} \cdot \sqrt{1-r^2_{x_1x_2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-3}}, \; i = 1,2, \qquad (23)$$

де σ_y – середнє квадратичне відхилення результативної ознаки y;

σ_{x_i} – середнє квадратичне відхилення фактора x_i;

R^2 – коефіцієнт детермінації;

$r_{x_1x_2}$ – коефіцієнт парної кореляції.

Відношення модуля коефіцієнта регресії до його стандартної похибки дає t-статистику Стьюдента при $(n-m-1)$ степенях свободи, яка застосовується для перевірки значущості коефіцієнтів регресії і для розрахунку його довірчих інтервалів. Для оцінки значущості коефіцієнта лінійної регресії його величину порівнюють з його стандартною похибкою, тобто визначають фактичне значення t-критерію Стьюдента:

$$t_{b_i} = \frac{|b_i|}{m_{b_i}}, i = \overline{1,m}, \qquad (24)$$

яке потім порівнюють з табличним значенням при заданому рівні значущості α і кількості степенів свободи $k = n-m-1$ для двосторонньої області.

Якщо фактичне значення t-критерію t_{b_i} перевищує табличне $t_{табл}(\alpha, k)$, то гіпотезу про статистичну значущість коефіцієнта b_i приймаємо. Якщо менше – відповідні коефіцієнти незначущі.

Побудова довірчих інтервалів для коефіцієнтів чистої регресії відповідає на питання, наскільки отримані оцінки можуть відрізнятися від точних значень. Довірчим інтервалом параметра b_i^* називається інтервал, який містить з заданою імовірністю точне значення параметра b_i^*:

$$b_i - m_{b_i} \cdot t_{табл} \le b_i^* \le b_i + m_{b_i} \cdot t_{табл}, \; i = \overline{1,m}. \quad (25)$$

Довірчі інтервали також відповідають на питання про статистичну значущість параметрів регресії.

Якщо довірчий інтервал містить нульове значення, тобто його нижня границя від’ємна, а верхня – додатна, то параметр, що оцінюється, є статистично незначущим.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Кореляційно-регресійний аналіз

1 Побудувати лінійну модель множинної регресії. Скласти стандартизоване рівняння множинної регресії. Знайти середні коефіцієнти еластичності. На основі стандартизованих коефіцієнтів регресії та коефіцієнтів еластичності ранжувати фактори за мірою їхнього впливу на результативну ознаку.

2 Обчислити коефіцієнти парної, множинної та частинної кореляції. Проаналізувати їх.

3 Обчислити скоригований коефіцієнт множинної детермінації.

4 При заданому рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ за допомогою F-крітерію Фішера дати статистичну оцінку значущості рівняння регресії в цілому.

5 При заданому рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ за допомогою t-крітерію Стьюдента оцінити статистичну значущість коефіцієнтів чистої регресії.

6 Записати остаточне рівняння регресії, визначивши значущі фактори.

Всі розрахунки округляти до третього знака після коми.

Варіант 1

№	y	x_1	x_2
1	82	18,9	43
2	70	22,8	54
3	66	23,1	48,8
4	60	22,8	57,2
5	50	27,3	44,2
6	38	32,4	65
7	37	31,5	65
8	24	37	73,6
9	20	39	77
10	19	39	83
11	17,5	42,7	62,2
12	16	42	64

Варіант 2

№	y	x_1	x_2
1	182	18,9	40
2	162	24,8	43
3	140	29	60
4	125	37	64
5	110	46,8	69,2
6	98	44,4	74,8
7	78	37,8	91
8	66	49	80
9	46	48,8	93,6
10	34	58	93,4
11	14	58,8	107
12	12	58	110

Варіант 3

№	y	x_1	x_2
1	24	25	12,5
2	26,8	31	19,2
3	28,2	34	21,2
4	29,6	57	37,4
5	31	40	48
6	32,4	43	55,6
7	33,8	46	56,8
8	35,2	69	73,8
9	36,6	52	83,6
10	35,9	55	92
11	37	60	80
12	38	64	85

Варіант 4

№	y	x_1	x_2
1	11	30	12,5
2	16	32	20
3	19	36	19,5
4	30	41	40
5	33	42	44,5
6	40	55	57
7	47	48	58
8	65	52	80
9	66	54	79
10	70	55	80
11	75	42,7	81
12	80	42	85

Варіант 5

№	y	x_1	x_2
1	24	25	12,5
2	26,8	31	19,2
3	34	9	25,5
4	33,2	7,6	17,1
5	40,4	10,8	29,8
6	39,6	9,2	37,3
7	46,8	12,6	54,6
8	47	10,4	55,5
9	53,2	14,4	57,4
10	52,4	12	55,7
11	59,6	16,2	68,2
12	58,8	13,2	79,9

Варіант 6

№	y	x_1	x_2
1	21	30	12,5
2	24	35	25,5
3	26,8	51	17,2
4	28,2	44	29,7
5	29,6	54,5	37,4
6	31	50	54,5
7	32,4	45	55,6
8	33,8	56	57,3
9	35,2	61	73,8
10	36,6	62	68,1
11	35,9	60	80
12	38	64	85

Варіант 7

№	y	x_1	x_2
1	8	3,6	25,5
2	8,8	36,2	17,2
3	9,2	4,5	29,7
4	9,6	1,3	37,4
5	10	5,1	54,5
6	10,4	45	55,6
7	10,8	5,7	57,3
8	9,9	6	80
9	10	6,3	68,1
10	11,2	61	73,8
11	11,2	61	73,8
12	11,6	6,3	68,1

Варіант 8

№	y	x_1	x_2
1	34	21,4	25,5
2	36,4	20,6	17,2
3	46,8	29,8	29,6
4	49,2	35	37,6
5	59,6	38,2	54,2
6	63	32,6	56
7	72,4	46,6	56,8
8	74,8	50,2	56,4
9	85,2	55	67,4
10	87,6	47,6	80,8
11	90	61	73,8
12	92	63	68,1

Варіант 9

№	y	x_1	x_2
1	145	21,4	25,5
2	163	20,6	17,2
3	202	31,4	19
4	212	32,6	9,2
5	282	43,8	14,1
6	330	51	21,6
7	344	56,2	37,7
8	399	52,6	32
9	442	68,6	25,3
10	478	74,2	24,4
11	524	81	34,9
12	525	75,6	40,8

Варіант 10

№	y	x_1	x_2
1	202	31,2	106
2	218	29,3	102,2
3	242	37,4	98,6
4	258	42,5	105,2
5	282	43,6	112
6	299	38,3	109
7	322	49,8	106,2
8	338	54,1	113,6
9	362	56,1	121,2
10	378	49,5	119
11	380	100,7	90
12	400	102	95

Варіант 11

№	y	x_1	x_2
1	95	44	80
2	101	47	100
3	109	58,3	97,8
4	121	56,4	93,4
5	129	68,9	94,8
6	141	65,8	93
7	150	79,5	91
8	161	75,2	84,8
9	169	90,1	86,4
10	181	94,6	85,8
11	189	100,7	90
12	190	102	91

Варіант 12

№	y	x_1	x_2
1	150	15	106
2	182	17	89,8
3	221	25,3	87,8
4	218	20,4	83,6
5	250	29,9	84,8
6	254	23,8	82,8
7	270	34,5	81
8	290	27,2	75
9	305	39,1	76,4
10	326	40,6	75,6
11	341	43,7	80
12	400	102	95

Варіант 13

№	y	x_1	x_2
1	126	21	93
2	182	54	89,8
3	162	51,2	104
4	174	46,3	97,8
5	194	61,4	91,4
6	206	73,5	94,8
7	226	71,6	98
8	239	63,3	91
9	258	81,8	83,8
10	270	93,1	86,4
11	290	92,1	88,8
12	302	82,5	85

Варіант 14

№	y	x_1	x_2
1	24	17	69,4
2	26	25,3	67,8
3	29	20,4	64
4	31	29,9	64,8
5	34	23,8	62,4
6	36	34,5	61
7	39	27,2	55,4
8	41	39,1	56,4
9	43	40,6	55,2
10	45	43,7	60
11	51	69	88,8
12	58	82,5	85

Варіант 15

№	y	x_1	x_2
1	49	17	31
2	48,5	16	37
3	48	16	46
4	47,6	15	52
5	47,3	12	71
6	46,9	11	91
7	46,5	11,5	92
8	46,3	11	145
9	46,1	10	190
10	45,9	10	204
11	45,7	9,5	222
12	45,6	8	271

Варіант 16

№	y	x_1	x_2
1	50	43	15
2	44	41	14,8
3	47	43,8	10,6
4	41	36,4	6,6
5	45	43,4	14,8
6	36	31,8	23,2
7	38	38	19,8
8	31	27,2	16,6
9	36	36,6	25,6
10	28	28	34,8
11	26	30,2	37
12	28	30	35

Варіант 17

№	y	x_1	x_2
1	249	17	91,9
2	237	15,3	92,2
3	219	20,4	92,7
4	207	39,9	95,2
5	189	23,8	97,9
6	177	24,5	99
7	159	27,2	100,3
8	147	49,1	103,6
9	129	30,6	107,1
10	117	33,7	109
11	108	41	109
12	100	30	112

Варіант 18

№	y	x_1	x_2
1	47	44	5,6
2	50	43,3	5
3	41	36,4	6,6
4	44	43,9	8,4
5	35	31,8	10,4
6	38	36,5	12,6
7	29	27,2	13,8
8	32	37,1	19,6
9	23	22,6	22,4
10	26	29,7	23,4
11	27	33	26
12	30	30	32

Варіант 19

№	y	x_1	x_2
1	27	44	8,2
2	36	43,8	7,8
3	33	36,4	7,6
4	42	43,4	11,6
5	39	31,8	15,8
6	48	37	16,2
7	45	27,2	16,8
8	54	36,6	21,6
9	51	22,6	26,6
10	60	30,2	27,8
11	62	33	29
12	65	34	32

Варіант 20

№	y	x_1	x_2
1	27	16,8	164,1
2	35	15,5	197
3	30	15,2	187,5
4	40	14,9	218,6
5	35	11,6	230,1
6	46	12,3	240,6
7	39	12	241
8	52	11,7	272,8
9	48	10,4	278
10	57	10	305
11	55	9	300
12	51	9	304

Варіант 21

№	y	x_1	x_2
1	270	16,8	152
2	350	15,5	197
3	414	2,1	520
4	468	1,9	450
5	498	1,8	610
6	552	1,9	720
7	582	1,4	750
8	636	1,5	770
9	666	1,4	850
10	720	1,6	830
11	750	1,3	990
12	804	1,1	980

Варіант 22

№	y	x_1	x_2
1	78	43	57,4
2	90	61,1	63,2
3	94	59,8	73,8
4	106	70,7	72,8
5	110	51	76
6	122	87,7	80,4
7	126	52,6	90,6
8	138	107,5	88
9	142	72,6	92,6
10	154	85	95,6
11	159	89	99
12	204	145	98

Варіант 23

№	y	x_1	x_2
1	7,2	31	15
2	7,9	45	16
3	9,2	61	19
4	9,4	72	18,2
5	11	75	17
6	11,3	77	18
7	11,5	85	13,9
8	12,3	83	15,4
9	13	99	11,7
10	13,8	98	13,2
11	14	95	15
12	17	98	22

Варіант 24

№	y	x_1	x_2
1	50	17	93
2	47	15,3	105
3	41	20,4	91,7
4	34	29,9	91,6
5	33	23,8	91,4
6	32	24,5	90
7	30	27,2	86
8	26	39,1	91
9	25	30,6	83,8
10	24	33,7	86,4
11	21	41	86,2
12	20	30	74

Варіант 25

№	y	x_1	x_2
1	59	43	28,2
2	67	61	29,6
3	71	59,8	35,4
4	79	70,8	34,4
5	83	51	38
6	91	87,6	37,2
7	95	52,6	41,8
8	103	107,6	40
9	107	72,6	45,8
10	115	112,6	42,8
11	141	95	52
12	172	98	54,1

Варіант 26

№	y	x_1	x_2
1	59	61	12
2	67	57,8	9,2
3	77	66	7,8
4	86	77,2	8,8
5	89	78	10
6	91	75	8,4
7	100	85	6,6
8	108	92,5	8
9	114	102	10
10	115	97	7
11	116	95	6
12	117	98	5

Варіант 27

№	y	x_1	x_2
1	59	12,6	9,4
2	67	12,9	9,4
3	71	15,4	9,6
4	79	18,1	10
5	83	18,2	10,6
6	91	18,1	11,4
7	95	21	12,4
8	103	24,1	13,6
9	107	23,8	15
10	115	23,3	16,6
11	116	25	18
12	59	12,6	9,4

Варіант 28

№	y	x_1	x_2
1	57	18,9	42
2	50	16,6	50,2
3	42	18,1	59,6
4	39	21,4	57,2
5	37	27,3	54
6	30	29,6	65
7	19	31,5	77,2
8	17	38,4	73,6
9	16	35,7	69,2
10	15	30,2	83
11	9	25	99
12	8	33,6	88

Варіант 29

№	y	x_1	x_2
1	62	18,9	43
2	56	22,8	50,2
3	56	23,1	48,8
4	54	22,8	57,2
5	54	27,3	44,2
6	42	32,4	65
7	34	41	65
8	29,8	46,8	73,6
9	28	48,7	62,2
10	21	52	83
11	20	51	89
12	15	64	102

Варіант 30

№	y	x_1	x_2
1	101	18,9	43
2	89	18,4	50,2
3	72	23,1	58,4
4	69	28	57,2
5	68	27,3	55,4
6	59	26,4	65
7	44	31,5	75,6
8	29	43,8	73,6
9	28	42,7	71
10	19	44,4	83
11	9	48	86,2
12	8	52	78

Завдання 2. Нелінійне програмування ([1], розділ 4)

Задача 2.1. Опукле програмування

Дано область *D*, визначену системою нерівностей. Для заданих функцій f і g:

1) знайти відповідні екстремальні значення графічним методом;

2) записати функцію Лагранжа і знайти її сідлову точку, використовуючи розв'язок задачі, отриманий графічно.

1	2
$D:\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ а) $f = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1{,}5)^2 \to \max$, б) $g = (x_1 - 2{,}5)^2 + (x_2 - 0{,}5)^2 \to \min$	$D:\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ а) $f = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min$, б) $g = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 1)^2 \to \max$

3 $D:\begin{cases}-x_1+x_2\le 1,\\ x_1\le 2,\\ x_1+2x_2\ge 2,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-1)^2-(x_2-1)^2\to\max$, б) $g=(x_1-1)^2+(x_2-5)^2\to\min$.	4 $D:\begin{cases}x_2\le 4,\\ x_1+x_2\ge 2,\\ 2x_1-x_2\le 4,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-5)^2-(x_2-1)^2\to\max$, б) $g=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2\to\min$
5 $D:\begin{cases}5x_1+6x_2\le 30,\\ x_2\ge 1,\\ 2x_1+x_2\ge 4,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\to\min$, б) $g=-(x_1+1)^2-(x_2-1)^2\to\max$	6 $D:\begin{cases}x_2\le 4,\\ x_1+x_2\ge 1,\\ 5x_1+4x_2\le 20,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-x_1^2-x_2^2\to\max$, б) $g=(x_1-3)^2+(x_2-1)^2\to\min$
7 $D:\begin{cases}3x_1+2x_2\le 6,\\ x_1-x_2\le 0,\\ -x_1+x_2\le 2,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1+2)^2-(x_2-1.5)^2\to\max$, б) $g=(x_1-0.5)^2+(x_2-1)^2\to\min$	8 $D:\begin{cases}-x_1+3x_2\ge 3,\\ x_1\le 5,\\ 4x_1+x_2\le 24,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1-4)^2+(x_2+1)^2\to\min$, б) $g=-(x_1-1)^2-(x_2-3)^2\to\max$
9 $D:\begin{cases}-x_1+x_2\le 2,\\ x_1+x_2\le 4,\\ 2x_1+x_2\ge 2,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2\to\min$, б) $g=-(x_1-5)^2-(x_2-3)^2\to\max$	10 $D:\begin{cases}-x_1+x_2\le 2,\\ x_1+x_2\le 6,\\ x_1-3x_2\le 3,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-9)^2-(x_2-8)^2\to\max$, б) $g=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2\to\min$

11 $D:\begin{cases}2x_1+3x_2\le 12,\\ x_1\le 5,\\ x_1+2x_2\ge 2,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1-5)^2+(x_2+2)^2\to\min$, б) $g=-(x_1-2)^2-(x_2-2)^2\to\max$	12 $D:\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 6,\\ x_1\le 4,\\ 2x_1+3x_2\ge 6,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1-1)^2+(x_2-7)^2\to\min$, б) $g=-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2\to\max$
13 $D:\begin{cases}x_1+x_2\ge 1,\\ x_1-x_2\le 1,\\ x_1+x_2\le 3,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1-5)^2+x_2{}^2\to\min$, б) $g=-(x_1-1)^2-(x_2-1)^2\to\max$	14 $D:\begin{cases}x_1-4x_2\le 4,\\ x_1\ge 1,\\ x_1+x_2\le 6,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-7)^2-(x_2-5)^2\to\max$, б) $g=(x_1-1)^2+x_2{}^2\to\min$
15 $D:\begin{cases}3x_1-2x_2\le 6,\\ x_2\le 4,\\ -x_1+x_2\le 3,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1+1)^2-(x_2-2)^2\to\max$, б) $g=(x_1-3)^2+(x_2-3)^2\to\min$	16 $D:\begin{cases}2x_1+x_2\ge 4,\\ x_2\le 5,\\ x_1\le 6,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1+5)^2+(x_2+1)^2\to\min$, б) $g=-(x_1-5)^2-(x_2-1)^2\to\max$
17 $D:\begin{cases}x_1+x_2\ge 4,\\ 2x_1-x_2\ge 2,\\ 10x_1+7x_2\le 70,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-5)^2-(x_2-1)^2\to\max$, б) $g=x_1^2+(x_2+2)^2\to\min$	18 $D:\begin{cases}3x_1+x_2\ge 6,\\ x_1+2x_2\ge 4,\\ x_1+x_2\le 5,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-6)^2-(x_2-3)^2\to\max$, б) $g=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\to\min$

19 $D:\begin{cases}4x_1+7x_2\le 28,\\3x_1+x_2\ge 6,\\-x_1+x_2\le 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1-5)^2+(x_2+1)^2\to\min$, б) $g=-(x_1-2)^2-(x_2-2)^2\to\max$	20 $D:\begin{cases}4x_1+x_2\ge 4,\\x_1\le 5,\\x_1+x_2\le 8,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-3)^2-(x_2-3)^2\to\max$, б) $g=(x_1-10)^2+(x_2-6)^2\to\min$
21 $D:\begin{cases}x_1+2x_2\le 10,\\x_1\le 5,\\x_1+x_2\ge 2,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-1)^2-(x_2-3)^2\to\max$, б) $g=(x_1+4)^2+(x_2+4)^2\to\min$	22 $D:\begin{cases}x_1+x_2\ge 3,\\2x_1-x_2\le 2,\\x_2\le 5,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1+1)^2-x_2^2\to\max$, б) $g=(x_1-2)^2+(x_2-4)^2\to\min$
23 $D:\begin{cases}x_1+x_2\le 5,\\x_2\ge 1,\\5x_1+x_2\ge 5,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1-3)^2+(x_2-6)^2\to\min$, б) $g=-(x_1-2)^2-(x_2-3)^2\to\max$	24 $D:\begin{cases}x_1+x_2\le 4,\\2x_1-x_2\le 2,\\x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1-6)^2-(\tilde{o}_2-3)^2\to\max$, б) $g=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2\to\min$
25 $D:\begin{cases}3x_1+5x_2\le 15,\\-x_1+x_2\le 2,\\x_1+5x_2\ge 5,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=(x_1+2)^2+(x_2-3)^2\to\min$, б) $g=-(x_1-2)^2-(x_2-1)^2\to\max$	26 $D:\begin{cases}x_1+x_2\ge 4,\\2x_1-x_2\le 2,\\10x_1+7x_2\le 70,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$ а) $f=-(x_1+5)^2-(x_2+5)^2\to\max$, б) $g=(x_1-1)^2+(x_2-7)^2\to\min$

27 $D:\begin{cases} x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ а) $f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min$, б) $g = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 3)^2 \to \max$	28 $D:\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ а) $f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min$, б) $g = -(x_1 - 6)^2 - (x_2 - 7)^2 \to \max$
29 $D:\begin{cases} x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ а) $f = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min$, б) $g = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 \to \max$	30 $D:\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_2 \le 3, \\ -x_1 + 4x_2 \ge -4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ а) $f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min$, б) $g = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 4)^2 \to \max$

Задача 2.2. Умовний екстремум функції двох змінних

Знайти умовний екстремум функції $f = f(x, y)$, якщо виконується відповідна умова.

1 $f = x_1^2 + x_2^2 + 1$, $2x_1 + x_2 = 4$	2 $f = 4x_1 + 2x_2 + 16$, $x_1^2 + x_2^2 = 20$
3 $f = 3x_1^2 + x_2^2 - 2$, $x_1 + 2x_2 = 26$	4 $f = 5x_1x_2 - 4x_2^2 + 17$, $2x_1 - 3x_2 = 28$
5 $f = x_1 + x_2 - 3$, $x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$	6 $f = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 + 18$, $3x_1 + 4x_2 - 79 = 0$
7 $f = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 4$, $x_1 + x_2 = 1$	8 $f = -2x_1 + 3x_2 + 19$, $x_1^2 + 4x_1x_2 + 33 = 0$
9 $f = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 + 5$, $2x_1 + x_2 = 14$	10 $f = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 20$, $4x_1 + 10x_2 = 13$
11 $f = 3x_1 + 5x_2 + 6$, $x_1 x_2 - 15 = 0$	12 $f = 3x_1^2 - 5x_1x_2 + 21$, $2x_1 + x_2 = 13$

13 $f=4x_1+2x_2+7$, $x_1^2+3x_1x_2=5$	14 $f=4x_1+x_2-22$, $x_1^2+4x_1+2x_2=6$
15 $f=2x_1^2-6x_1x_2+8$, $x_1+3x_2=1$	16 $f=2x_1^2-10x_1x_2+x_2^2+23$, $x_1-14x_2+11=0$
17 $f=-8x_1x_2+x_2^2+9$, $4x_1-3x_2=10$	18 $f=2x_1+x_2+24$, $x_1^2+3x_2^2=39$
19 $f=-4x_1^2+8x_1x_2-10$, $3x_1+x_2=3$;	20 $f=-3x_1x_2+2x_2^2-25$, $5x_1+4x_2=44$
21 $f=3x_1-6x_2+11$, $x_2^2-x_1x_2=1$;	22 $f=3x_1+4x_2+26$, $x_1^2-2x_1x_2+10=0$
23 $f=2x_1^2+6x_1x_2+x_2^2-12$, $3x_1+2x_2=19$;	24 $f=2x_1^2-10x_1x_2+x_2^2-27$, $-9x_1+11x_2=58$
25 $f=x_1^2+8x_1x_2+4x_2^2+13$, $7x_1+13x_2=121$;	26 $f=4x_1+6x_2+28$, $x_1x_2-96=0$
27 $f=-2x_1-3x_2-14$, $x_1x_2-54=0$;	28 $f=4x_1+3x_2+29$, $2x_1^2+x_2^2=17$
29 $f=6x_1x_2+4x_2^2-15$, $x_1-2x_2=16$;	30 $f=x_1^2+8x_1x_2+4x_2^2-30$, $x_1+3x_2=7$

Завдання 3. Динамічне програмування ([2], розділ 5)

Задача 3.1

Транспортний засіб вантажопідйомністю P, умов. од, завантажується вантажами трьох видів. Вага і вартість вантажу кожного виду дорівнюють p_1, p_2, p_3, умов. од ваги, і c_1, c_2, c_3, грош. од, відповідно. Знайти план завантаження транспортного засобу, який забезпечує максимальну сумарну вартість вантажу.

Варіант 1	Вага p_i	Вартість c_i
1	12	22
2	8	13
3	20	35
Вантажо-підйомність	28	

Варіант 2	Вага p_i	Вартість c_i
1	2	15
2	4	31
3	6	44
Вантажо-підйомність	10	

Варіант 3	Вага p_i	Вартість c_i
1	3	14
2	12	65
3	6	31
Вантажо-підйомність	17	

Варіант 4	Вага p_i	Вартість c_i
1	30	14
2	15	65
3	20	31
Вантажо-підйомність	35	

Варіант 5	Вага p_i	Вартість c_i
1	2	10
2	12	65
3	6	31
Вантажо-підйомність	17	

Варіант 6	Вага p_i	Вартість c_i
1	15	14
2	3	2
3	9	7
Вантажо-підйомність	20	

Варіант 7	Вага p_i	Вартість c_i
1	3	80
2	1	30
3	5	160
Вантажо-підйомність	8	

Варіант 8	Вага p_i	Вартість c_i
1	5	155
2	1	30
3	3	94
Вантажо-підйомність	8	

Варіант 9	Вага p_i	Вартість c_i
1	30	11
2	10	4
3	50	22
Вантажо-підйомність	60	

Варіант 10	Вага p_i	Вартість c_i
1	12	22
2	8	13
3	16	30
Вантажо-підйомність	28	

Варіант 11	Вага p_i	Вартість c_i
1	15	14
2	3	2
3	9	7
Вантажо-підйомність	24	

Варіант 12	Вага p_i	Вартість c_i
1	3	100
2	1	30
3	2	65
Вантажо-підйомність	8	

Варіант 13	Вага p_i	Вартість c_i
1	3	100
2	1	30
3	4	125
Вантажо-підйомність	8	

Варіант 14	Вага p_i	Вартість c_i
1	5	155
2	1	30
3	4	130
Вантажо-підйомність	7	

Варіант 15	Вага p_i	Вартість c_i
1	12	22
2	8	13
3	16	30
Вантажо-підйомність	36	

Варіант 16	Вага p_i	Вартість c_i
1	5	155
2	1	30
3	2	62
Вантажо-підйомність	8	

Варіант 17	Вага p_i	Вартість c_i
1	6	200
2	1	32
3	4	130
Вантажо-підйомність	7	

Варіант 18	Вага p_i	Вартість c_i
1	30	14
2	12	4
3	48	17
Вантажо-підйомність	50	

Варіант 19	Вага p_i	Вартість c_i
1	5	20
2	1	3
3	2	7
Вантажо-підйомність	7	

Варіант 20	Вага p_i	Вартість c_i
1	4	21
2	2	9
3	6	30
Вантажо-підйомність	15	

Варіант 21	Вага p_i	Вартість c_i
1	4	21
2	2	9
3	8	43
Вантажо-підйомність	15	

Варіант 22	Вага p_i	Вартість c_i
1	4	21
2	10	57
3	8	43
Вантажо-підйомність	25	

Варіант 23	Вага p_i	Вартість c_i
1	12	5
2	36	21
3	30	15
Вантажо-підйомність	60	

Варіант 24	Вага p_i	Вартість c_i
1	1	45
2	2	100
3	5	248
Вантажо-підйомність	7	

Варіант 25	Вага p_i	Вартість c_i
1	200	58
2	500	127
3	100	27
Вантажо-підйомність	900	

Варіант 26	Вага p_i	Вартість c_i
1	4	201
2	2	102
3	5	248
Вантажо-підйомність	9	

Варіант 27	Вага p_i	Вартість c_i
1	1	45
2	3	150
3	5	248
Вантажо-підйомність	8	

Варіант 28	Вага p_i	Вартість c_i
1	12	45
2	36	150
3	24	100
Вантажо-підйомність	84	

Варіант 29	Вага p_i	Вартість c_i
1	6	58
2	8	96
3	2	15
Вантажо-підйомність	12	

Варіант 30	Вага p_i	Вартість c_i
1	6	40
2	12	90
3	9	62
Вантажо-підйомність	27	

Задача 3.2. Задача заміни обладнання

Обладнання має середній термін експлуатації n років, після цього продається. На початку кожного року можна прийняти рішення зберегти обладнання або замінити його новим. Вартість нового обладнання складає p_0, грош. од. Після t років експлуатації $(1 \le t \le n)$ обладнання можна продати за за $\varphi(t)$, грош. од (ліквідна вартість). Витрати на експлуатацію протягом року залежать від віку t обладнання та дорівнюють $r(t)$, грош. од. Визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання, щоб сумарні витрати з урахуванням початкової покупки і заключного продажу були мінімальними.

1 $p_0 = 3520$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 500(t+1)$; $n = 6$.

2 $p_0 = 7680$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 4^{-t}$; $r(t) = 2000(t+1)$; $n = 4$.

3 $p_0 = 729$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 170(t+1)$; $n = 5$.

4 $p_0 = 5120$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 900(t+1)$; $n = 6$.

5 $p_0 = 4860$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 800(t+1)$; $n = 5$.

6 $p_0 = 5760$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 900(t+1)$; $n = 5$.

7 $p_0 = 2560$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 4^{-t}$; $r(t) = 400(t+1)$; $n = 4$.

8 $p_0 = 6075$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 1000(t+1)$; $n = 5$.

9 $p_0 = 7290$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 1300(t+1)$; $n = 6$.

10 $p_0 = 5120$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 4^{-t}$; $r(t) = 800(t+1)$; $n = 4$.

11 $p_0 = 4050$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 400(t+1)$; $n = 4$.

12 $p_0 = 7040$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 1100(t+1)$; $n = 5$.

13 $p_0 = 6075$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 900(t+1)$; $n = 5$.

14 $p_0 = 7680$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 4^{-t}$; $r(t) = 1200(t+1)$; $n = 4$.

15 $p_0 = 2880$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 400(t+1)$; $n = 6$.

16 $p_0 = 2000$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 500(t+1)$; $n = 4$.

17 $p_0 = 3645$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 700(t+1)$; $n = 5$.

18 $p_0 = 7290$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 1400(t+1)$; $n = 6$.

19 $p_0 = 5120$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 900(t+1)$; $n = 5$.

20 $p_0 = 6400$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 4^{-t}$; $r(t) = 1000(t+1)$; $n = 4$.

21 $p_0 = 4374$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 800(t+1)$; $n = 5$.

22 $p_0 = 3645$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 700(t+1)$; $n = 6$.

23 $p_0 = 2016$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 500(t+1)$; $n = 5$.

24 $p_0 = 1280$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 4^{-t}$; $r(t) = 300(t+1)$; $n = 4$.

25 $p_0 = 8748$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 1500(t+1)$; $n = 6$.

26 $p_0 = 6804$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 1100(t+1)$; $n = 5$.

27 $p_0 = 5346$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 900(t+1)$; $n = 5$.

28 $p_0 = 3840$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 4^{-t}$; $r(t) = 700(t+1)$; $n = 4$.

29 $p_0 = 3240$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 3^{-t}$; $r(t) = 600(t+1)$; $n = 4$.

30 $p_0 = 7040$; $\varphi(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$; $r(t) = 1400(t+1)$; $n = 6$.

Завдання 4. Потоки подій ([2], розділ 8)

Задача 4.1. На сортувальну станцію, що обслуговує промисловий район з трьома підприємствами, надходять подачі з вантажними вагонами. Середній час очікування простою партії вагонів під завантаженням на кожному підприємстві складає t_1, *год*, а надходження подач вагонів на станцію підлягає пуасонівському закону розподілу. Знайти середню кількість подач, що надійдуть протягом t_2, *год*. Знайти ймовірність того, що за t_3, *хв*, на станцію надійдуть:

а) рівно одна подача;

б) хоча б одна подача;

в) не більше двох подач.

Всі розрахунки округляти до третього знака після коми.

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t_1, *год*	2	3	4	4	2	3	2	2	2	3
t_2, *год*	2,5	2	1	3	1	1	3	1,5	3,5	1,5
t_3, *хв*	45	50	55	65	70	75	80	85	90	95

Варіант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
t_1, *год*	3	3	4	4	4	2,5	3,5	3,5	2,5	2,5
t_2, *год*	2,5	3,5	1,5	2,5	3,5	2	2	2,5	1,5	3,5
t_3, *хв*	100	105	110	115	125	130	135	140	145	150

Варіант	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
t_1, *год*	4,5	4,5	4,5	2,5	2,5	3,5	3,5	4,5	4,5	3,5
t_2, *год*	1,5	3	3,5	1	1,5	1	1,5	1	2	3
t_3, *хв*	155	160	165	170	175	185	190	195	200	205

Задача 4.2. Пасажири, що звертаються до білетної каси, утворюють найпростіший потік з інтенсивністю λ, *пас/хв*. Знайти ймовірність того, що:

1) за t_1, *хв* до каси звернеться 3 пасажири;

2) за t_1, *хв* до каси звернеться менше 3 пасажирів;

3) за t_1, *хв* до каси звернеться не менше 3 пасажирів;

4) за t_2, *хв* до каси не звернеться жодного пасажира;

5) за t_3, *хв* до каси звернеться принаймні 1 пасажир;

6) інтервал часу між сусідніми зверненнями менший за t_4, *хв*;

7) інтервал часу між сусідніми зверненнями не менший за t_5, *хв*;

8) інтервал часу між сусідніми зверненнями не менший за t_4, *хв*, і не більший за t_5, *хв.*

Всі розрахунки округляти до третього знака після коми.

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
λ, *пас/хв*	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
t_1, *хв*	30	20	35	25	15	30	20	35	25	15
t_2, *хв*	10	8	5	7	6	10	8	5	7	6
t_3, *хв*	5	6	15	4	3	5	6	15	4	3
t_4, *хв*	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8
t_5, *хв*	16	18	20	22	24	10	12	13	14	16

Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
λ, *пас/хв*	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
t_1, *хв*	30	20	35	25	15	30	20	35	25	15
t_2, *хв*	10	8	5	7	6	10	8	5	7	6
t_3, *хв*	5	6	15	4	3	5	6	15	4	3
t_4, *хв*	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8
t_5, *хв*	5	8	8	10	11	16	18	20	22	24

Варіант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
λ, *пас/хв*	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
t_1, *хв*	30	20	35	25	15	30	20	35	25	15
t_2, *хв*	10	8	5	7	6	10	8	5	7	6
t_3, *хв*	5	6	15	4	3	5	6	15	4	3
t_4, *хв*	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8
t_5, *хв*	10	12	13	14	16	5	8	8	10	11

Задача 4.3. Тривалість формування состава поїзда в парку відправлення підкорюється закону розподілу Ерланга другого порядку з інтенсивністю λ_2, *потяг/год*. Визначити ймовірність того, що тривалість формування складу буде більше t, *хв*. Відповідь округлити до третього знака після коми.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_2, *потяг/год*	1,5	1	1,25	1,5	1	1,25	1,5	1	1,25	1,5
t, *хв*	30	30	30	40	40	40	20	20	20	10

Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
λ_2, *потяг/год*	1	1,25	1,5	1	1,25	1,5	1	1,25	1,5	1
t, *хв*	10	10	15	15	15	25	25	25	35	35

Варіант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
λ_2, *потяг/год*	1,25	1,5	1	1,25	1,5	1	1,25	1,5	1	1,25
t, *хв*	35	45	45	45	24	24	24	18	18	18

Завдання 5. Багатоканальна СМО ([2], розділ 10)

До багатоканальної системи масового обслуговування надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю $\lambda,\ пас/хв$. Час обслуговування однієї заявки розподілений за показниковим законом і в середньому складає $\overline{T}_{обсл},\ хв$. Визначити:

1) мінімальну кількість $m_{\min}$ каналів, яка забезпечить ефективну роботу СМО з необмеженою чергою, та обчислити її показники ефективності;

2) показники ефективності для СМО з чотирма каналами обслуговування та чергою довжиною n;

3) Показники ефективності для СМО з відмовами, яка має чотири канали обслуговування.

Всі розрахунки округляти до третього знака після коми.

Показник	Варіант									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
λ, *пас/хв*	2,6	2,62	2,64	2,66	2,68	2,7	2,72	2,74	2,76	2,78
$\overline{T}_{обсл}$, *хв*	1,2	1,22	1,24	1,26	1,28	1,3	1,32	1,34	1,36	1,38
n	2	3	4	1	3	2	4	3	2	4

Показник	Варіант									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
λ, *пас/хв*	2,6	2,62	2,64	2,66	2,68	2,7	2,72	2,74	2,76	2,78
$\overline{T}_{обсл}$, *хв*	1,4	1,38	1,36	1,34	1,32	1,3	1,28	1,26	1,24	1,22
n	1	2	2	4	3	2	3	1	1	3

Показник	Варіант									
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
λ, *пас/хв*	2,6	2,62	2,64	2,66	2,68	2,7	2,72	2,74	2,76	2,78
$\overline{T}_{обсл}$, *хв*	1,22	1,2	1,18	1,16	1,14	1,12	1,2	1,18	1,16	1,14
n	4	2	3	3	2	2	1	2	3	3

ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Кореляційно-регресійний аналіз

Для дослідження залежності кількості пасажирів y, млн люд, які користувались залізничним транспортом, від кількості населення x_1, млн люд і середньомісячної номінальної заробітної плати x_2, грн, при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ необхідно:

1) побудувати лінійну модель множинної регресії. Скласти стандартизоване рівняння множинної регресії. Знайти середні коефіцієнти еластичності. На основі стандартизованих коефіцієнтів регресії та коефіцієнтів еластичності ранжувати фактори за мірою їхнього впливу на результативну ознаку;

2) обчислити коефіцієнти парної, множинної та частинної кореляції; проаналізувати їх;

3) обчислити скоригований коефіцієнт множинної детермінації;

4) за допомогою F-критерію Фішера дати статистичну оцінку значущості рівняння регресії в цілому;

5) за допомогою t-критерію Стьюдента оцінити статистичну значущість коефіцієнтів чистої регресії;

6) записати остаточне рівняння регресії, визначивши значущі фактори.

Статистичні дані [12] наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

№	Рік	y, млн люд	x_1, млн люд	x_2, грн
1	2001	467,9	48,9	311
2	2002	464,8	48,5	376
3	2003	476,7	48	462
4	2004	452,2	47,6	590
5	2005	445,6	47,3	806
6	2006	448,4	46,9	1041
7	2007	447,1	46,5	1351
8	2008	445,5	46,3	1806
9	2009	426	46,1	1906

Продовження таблиці 2

№	Рік	y, млн люд	x_1, млн люд	x_2, грн
10	2010	427,2	45,9	2239
11	2011	429,8	45,7	2633
12	2012	429,1	45,6	3026
13	2013	425,2	45,5	3265
14	2014	389,3	43	3480
15	2015	389,8	42,8	4195

Розв'язання

1 Для побудови моделі рівняння лінійної двофакторної регресії $\hat{y}_{x_1 x_2} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$ необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь (9) відносно невідомих a, b_1, b_2. Для зручності проведення обчислень помістимо результати проміжних розрахунків у таблицю 3.

З системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 15a + 694{,}6b_1 + 27487b_2 = 6564{,}6, \\ 694{,}6a + 32207{,}02b_1 + 1243783{,}8b_2 = 304578{,}91, \\ 27487a + 1243783{,}8b_1 + 72723767b_2 = 11618688 \end{cases}$$

отримаємо коефіцієнти чистої регресії:

$$a \approx -159{,}848,\ b_1 \approx 12{,}963,\ b_2 \approx -0{,}002.$$

Отже, рівняння множинної регресії має вигляд

$$\hat{y}_{x_1 x_2} = -159{,}848 + 12{,}963x_1 - 0{,}002x_2.$$

Порівняємо статистичні дані і дані, отримані за моделлю багатофакторної регресії (рисунок 4). Видно, що отримані теоретичні дані дають результати, які добре співпадають з емпіричними даними.

Таблиця 3

№	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y^2
1	467,9	48,9	311	22880,31	145516,9	15207,9	2391,21	96721	218930,41
2	464,8	48,5	376	22542,8	174764,8	18236	2352,25	141376	216039,04
3	476,7	48	462	22881,6	220235,4	22176	2304	213444	227242,89
4	452,2	47,6	590	21524,72	266798	28084	2265,76	348100	204484,84
5	445,6	47,3	806	21076,88	359153,6	38123,8	2237,29	649636	198559,36
6	448,4	46,9	1041	21029,96	466784,4	48822,9	2199,61	1083681	201062,56
7	447,1	46,5	1351	20790,15	604032,1	62821,5	2162,25	1825201	199898,41
8	445,5	46,3	1806	20626,65	804573	83617,8	2143,69	3261636	198470,25
9	426	46,1	1906	19638,6	811956	87866,6	2125,21	3632836	181476
10	427,2	45,9	2239	19608,48	956500,8	102770,1	2106,81	5013121	182499,84
11	429,8	45,7	2633	19641,86	1131663,4	120328,1	2088,49	6932689	184728,04
12	429,1	45,6	3026	19566,96	1298456,6	137985,6	2079,36	9156676	184126,81
13	425,2	45,5	3265	19346,6	1388278	148557,5	2070,25	10660225	180795,04
14	389,3	43	3480	16739,9	1354764	149640	1849	12110400	151554,49
15	389,8	42,8	4195	16683,44	1635211	179546	1831,84	17598025	151944,04
$\sum$	**6564,6**	**694,6**	**27487**	**304578,91**	**11618688**	**1243783,8**	**32207,02**	**72723767**	**2881812,02**
Середнє значення	**437,640**	**46,307**	**1832,467**	**20305,261**	**774579,2**	**82918,92**	**2147,135**	**4848251,133**	**192120,8**

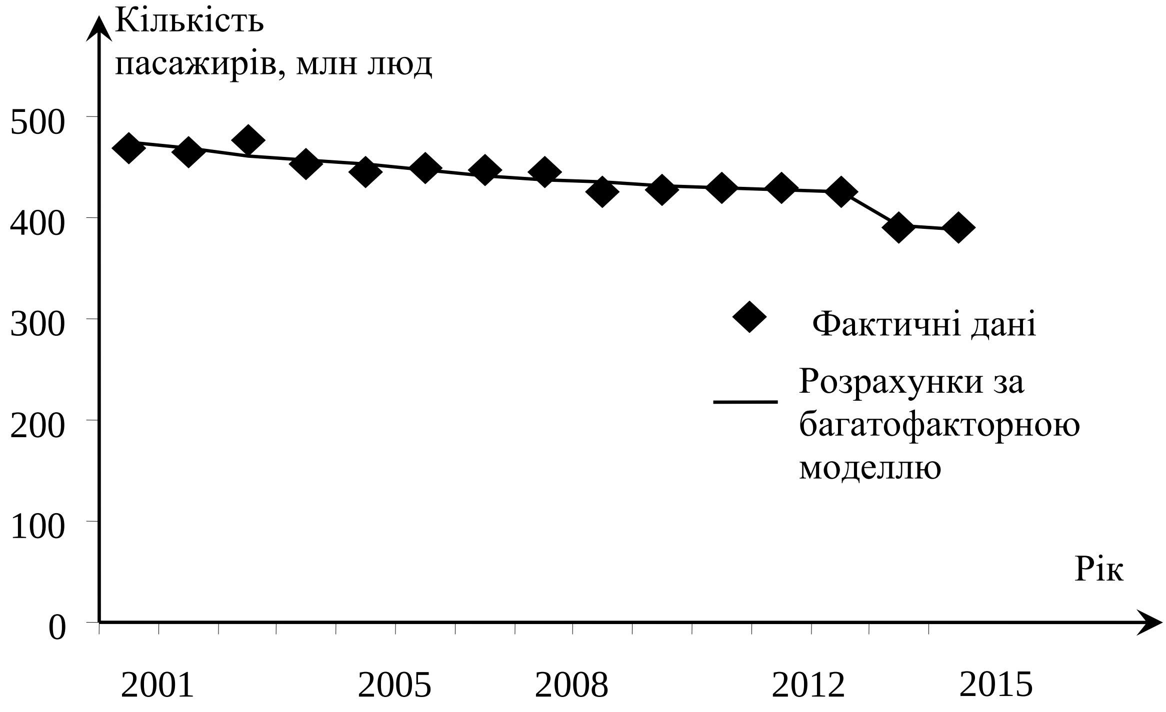


Рисунок 4 – Порівняння теоретичних і фактичних даних

Отримане рівняння регресії показує, що при збільшенні кількості населення України на 1 млн люд при сталому рівні заробітної плати кількість пасажирів на залізничному транспорті збільшиться в середньому на 13 млн люд.

Обчислимо середні квадратичні відхилення результативної ознаки σ_y та факторів σ_{x_1} і σ_{x_2} відповідно за формулою (13), використовуючи таблиця 3:

$$\sigma_y^2 = 192120{,}8 - 437{,}64^2 \approx 592{,}0304; \ \sigma_y \approx 24{,}332;$$

$$\sigma_{x_1}^2 = 2147{,}135 - 46{,}307^2 \approx 2{,}797; \ \sigma_{x_1} \approx 1{,}672;$$

$$\sigma_{x_2}^2 = 4848251{,}133 - 1832{,}467^2 \approx 1490315{,}827; \ \sigma_{x_2} \approx 1220{,}785.$$

Після побудови рівняння лінійної двофакторної регресії складаємо таблицю 4 для визначення теоретичних значень результативного фактора, залишкової дисперсії та середньої похибки апроксимації.

Таблиця 3

№	y	x_1	x_2	$\hat{y}$	$y-\hat{y}$	$\left(y-\hat{y}\right)^2$	$\dfrac{\left\lvert y-\hat{y}\right\rvert}{y}$	$\left(y-\bar{y}\right)^2$
1	467,9	48,9	311	473,4207	-5,521	30,478	0,0117989	915,668
2	464,8	48,5	376	468,1055	-3,305	10,926	0,0071117	737,666
3	476,7	48	462	461,452	15,248	232,502	0,0319866	1525,684
4	452,2	47,6	590	456,0108	-3,811	14,522	0,0084272	211,994
5	445,6	47,3	806	451,6899	-6,090	37,087	0,0136667	63,362
6	448,4	46,9	1041	446,0347	2,365	5,595	0,005275	115,778
7	447,1	46,5	1351	440,2295	6,871	47,204	0,0153668	89,492
8	445,5	46,3	1806	436,7269	8,773	76,967	0,0196927	61,780
9	426	46,1	1906	433,9343	-7,934	62,953	0,0186251	135,490
10	427,2	45,9	2239	430,6757	-3,476	12,080	0,008136	108,994
11	429,8	45,7	2633	427,2951	2,505	6,275	0,0058281	61,466
12	429,1	45,6	3026	425,2128	3,887	15,110	0,009059	72,932
13	425,2	45,5	3265	423,4385	1,761	3,103	0,0041428	154,754
14	389,3	43	3480	390,601	-1,301	1,693	0,0033419	2336,756
15	389,8	42,8	4195	386,5784	3,222	10,379	0,0082648	2288,666
$\sum$	**6564,6**	**694,6**	**27487**	**6551,406**	**13,1942**	**566,8734**	**0,1707231**	**8880,476**
Серед-нє значен-ня	**437,64**	**46,307**	**1832,467**	**436,7604**	**0,879613**	**37,79156**	**0,0113815**	**592,0317**

За формулою (14) залишкова дисперсія $\sigma^2_{залишк} = 37{,}792$.

Обчислюємо середню похибку апроксимації:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\lvert y_i - \hat{y}_i\right\rvert}{y_i}\cdot 100\% = 0{,}011381\cdot 100\% \approx 1{,}14\%.$$

Якість моделі – добра, оскільки середня похибка не перевищує 10 %.

Для побудови рівняння множинної регресії в стандартизованому вигляді $\hat{t}_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2}$ за формулою (10) обчислюємо коефіцієнти β_i, $i = 1{,}2$:

$$\beta_1 = b_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = 12{,}963 \cdot \frac{1{,}672}{24{,}332} \approx 0{,}891,$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = -0{,}002 \cdot \frac{1220{,}785}{24{,}332} \approx -0{,}1.$$

Отже, отримаємо стандартизоване рівняння регресії

$$\hat{t}_y = 0{,}891 t_{x_1} - 0{,}1 t_{x_2} .$$

Відомо, що стандартизовані коефіцієнти можна порівнювати між собою. Тому можна зробити висновок, що середньомісячна номінальна заробітна плата працівників впливає на загальну кількість пасажирів на залізничному транспорті менше, ніж кількість населення.

За формулою (11) обчислюємо середні коефіцієнти еластичності:

$$\overline{E}_1 = b_1 \cdot \frac{\overline{x_1}}{\overline{y}} = 12{,}963 \cdot \frac{46{,}307}{437{,}64} \approx 1{,}372,$$

$$\overline{E}_2 = b_2 \cdot \frac{\overline{x_2}}{\overline{y}} = -0{,}002 \cdot \frac{1832{,}467}{437{,}64} \approx -0{,}008.$$

Отже, збільшення середньої кількості населення на 1 % дає збільшення пасажирів на залізниці на 1,372 %, а збільшення заробітної плати на 1 % відповідно дає зменшення середньої кількості пасажирів на залізниці на 0,008 %.

2 За формулами (16)-(18) обчислюємо парні коефіцієнти кореляції результативної ознаки y з факторами x_1 і x_2 відповідно. Використовуючи таблицю 2, маємо

$$r_{yx_1} = \frac{20305{,}261 - 437{,}64 \cdot 46{,}307}{24{,}332 \cdot 1{,}672} \approx 0{,}970,$$

$$r_{yx_2} = \frac{774579{,}2 - 437{,}64 \cdot 1832{,}467}{24{,}332 \cdot 1220{,}785} \approx -0{,}922.$$

Зростання заробітної плати x_2 знижує кількість пасажирів на залізниці y тому, що $r_{yx_2} < 0$.

Оцінка степеня тісноти зв'язку між факторами x_1 і x_2

$$r_{x_1x_2} = \frac{\overline{x_1 \cdot x_2} - \left(\overline{x_1}\right)\cdot\left(\overline{x_2}\right)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{82918{,}92 - 46{,}307 \cdot 1832{,}467}{1{,}672 \cdot 1220{,}785} \approx -0{,}949$$

свідчить про значний зв'язок між факторами x_1 і x_2.

За формулами (21) обчислюємо коефіцієнти частинної кореляції:

$$r_{yx_1|x_2} = \frac{0{,}970 - (-0{,}922)\cdot(-0{,}949)}{\sqrt{\left(1-(-0{,}922)^2\right)\cdot\left(1-(-0{,}949)^2\right)}} \approx 0{,}778,$$

$$r_{yx_2|x_1} = \frac{-0{,}922 - 0{,}970\cdot(-0{,}949)}{\sqrt{\left(1-0{,}970^2\right)\cdot\left(1-(-0{,}949)^2\right)}} \approx -0{,}019.$$

Коефіцієнти частинної кореляції дають більш точну характеристику тісноти залежності двох ознак, ніж коефіцієнти парної кореляції, тому що вони «очищують» парну залежність від взаємодії даної пари з іншими змінними, які є в моделі. За нашими обчисленнями, сильний зв'язок існує між y і x_1 ($r_{yx_1|x_2} \approx 0{,}778$).

При порівнянні коефіцієнтів парної та частинної кореляції видно, що через вплив міжфакторної залежності між x_1 і x_2 ($r_{x_1x_2} \approx -0{,}949$) відбувається деяке завищення оцінки тісноти зв'язку між результативною ознакою та факторами відповідно. З цієї причини рекомендується за наявності сильного взаємозв'язку факторів x_1 і x_2 виключити з дослідження той фактор, у якого тіснота парної залежності з результативною ознакою менше, ніж тіснота міжфакторного зв'язку (між x_1 і x_2)

$$\left|r_{yx_1}\right| \approx 0{,}970 > \left|r_{x_1x_2}\right| \approx 0{,}949;$$
$$\left|r_{yx_2}\right| \approx 0{,}922 < \left|r_{x_1x_2}\right| \approx 0{,}949.$$

З цього можна зробити попередній висновок, що фактор x_2 можна буде в подальшому вилучити з рівняння регресії.

3 За формулою (12) обчислюємо коефіцієнт множинної кореляції:

$$R = \sqrt{1 - \frac{37,792}{592,030}} \approx 0,968.$$

Його значення свідчить про тісний спільний зв'язок факторів з результатом. Скорегований коефіцієнт кореляції за формулою (19)

$$\hat{R}^2 = 1 - \left(1 - 0,968^2\right) \cdot \frac{15-1}{15-2-1} \approx 0,927.$$

4 Оцінимо значущість рівняння регресії в цілому на основі F-критерію Фішера. За формулою (22) отримаємо статистику F-критерію Фішера

$$F_{факт} = \frac{0,968^2}{1-0,968^2} \cdot \frac{15-2-1}{2} \approx 89,274.$$

При заданому рівні значущості $\alpha = 0,05$ та степенях вільності $k_1 = 2$ і $k_2 = 15-2-1 = 12$ знаходимо $F_{крит}(\alpha = 0,05, k_1 = 2, k_2 = 12) = 3,88$ з таблиці критичних значень розподілу Фішера–Снедекора (додаток А). Отримали $F_{факт} = 9,274 > F_{крит} = 3,88$, тобто з імовірністю $p = 1 - \alpha = 0,95$ можна зробити висновок про статистичну значущість побудованого рівняння регресії.

Отже, отриманий результат не є випадковим, він був сформований під впливом суттєвих факторів. Таким чином, підтверджується статистична значущість всього рівняння двофакторної регресії та показника тісноти зв'язку R .

5 Для оцінки статистичної значущості параметрів чистої регресії застосуємо t-критерій Стьюдента. Стандартні похибки коефіцієнтів b_1 і b_2 знайдемо за формулами (23):

$$m_{b_1} = \frac{24{,}332 \cdot \sqrt{1-0{,}968^2}}{1{,}672 \cdot \sqrt{1-(-0{,}949)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{15-3}} \approx 3{,}344;$$

$$m_{b_2} = \frac{24{,}332 \cdot \sqrt{1-0{,}968^2}}{1220{,}785 \cdot \sqrt{1-(-0{,}949)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{15-3}} \approx 0{,}005.$$

.

Фактичні значення t -критерію Стьюдента

$$t_{b_1} = \frac{|b_1|}{m_{b_1}} = \frac{12{,}963}{3{,}344} \approx 3{,}876; \; t_{b_2} = \frac{|b_2|}{m_{b_2}} = \frac{0{,}002}{0{,}005} = 0{,}4.$$

Табличне значення критерію при $\alpha = 0{,}05$ і кількості степенів свободи $k = n - m - 1 = 15 - 2 - 1 = 12$ складає $t_{табл}(\alpha, k) = 2{,}18$ (додаток Б). Оскільки фактичне значення $t_{b_1} \approx 3{,}876$ перебільшує табличне значення, то статистична значущість коефіцієнта b_1 регресії підтверджується. Коефіцієнт b_2 виявився статистично незначущим.

Довірчі інтервали для параметрів чистої регресії знаходимо за формулою (25):

$$5{,}673 \le b_1^* \le 20{,}253; \; -0{,}013 \le b_2^* \le 0{,}009.$$

6 Загальний висновок полягає в тому, що двофакторна модель містить неінформативний фактор x_2, тому в рівнянні регресії доцільно обмежитися лише ознакою x_1, а саме кількістю населення країни. У цьому випадку отримаємо рівняння парної регресії (рисунок 5)

$$\hat{y}_{x_1} = a + b x_1 = r_{yx_1} \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} \left(x_1 - \overline{x_1} \right) + \overline{y},$$

$$\hat{y}_{x_1} = 0{,}970 \cdot \frac{24{,}332}{1{,}672} \left(x_1 - 46{,}307 \right) + 437{,}64 = 14{,}116 x_1 - 216{,}032,$$

$$R = r_{yx_1} \approx 0{,}970, \; R^2 = r_{yx_1}^2 \approx 0{,}9409.$$

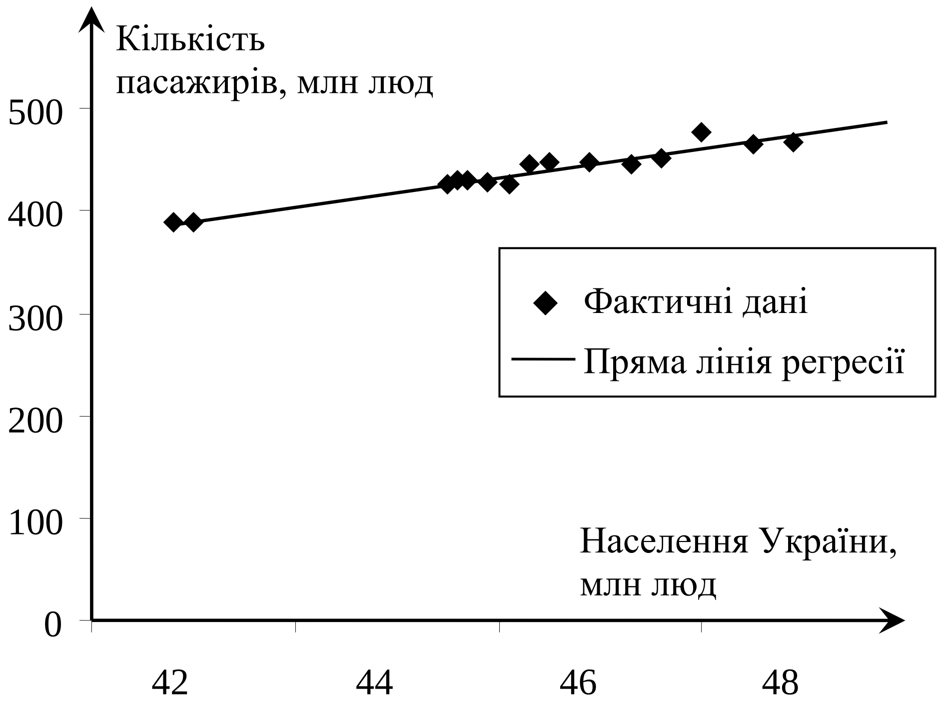


Рисунок 5 – Рівняння парної регресії

Завдання 2. Нелінійне програмування ([1], розділ 4)

Задача 2.1. Дано область *D*, визначену системою нерівностей. Для заданих функцій f і g:

1) знайти відповідні екстремальні значення графічним методом;

2) записати функцію Лагранжа і знайти її сідлову точку, використовуючи розв'язок задачі, отриманий графічно.

$$D:\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

а) $f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 8)^2 \to \min$,

б) $g = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 1)^2 \to \max$.

Розв’язання

Задача а):

$$f=(x_1-3)^2+(x_2-8)^2\to\min,$$

$$D:\begin{cases}5x_1-2x_2\ge 10,\\ x_1+x_2\le 9,\\ 2x_1+3x_2\ge 6,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$$

1 Використовуючи графічний метод розв’язання ([1], п. 4.2, 4.5.3), отримаємо точку $A(4;5)$ (рисунок 6).

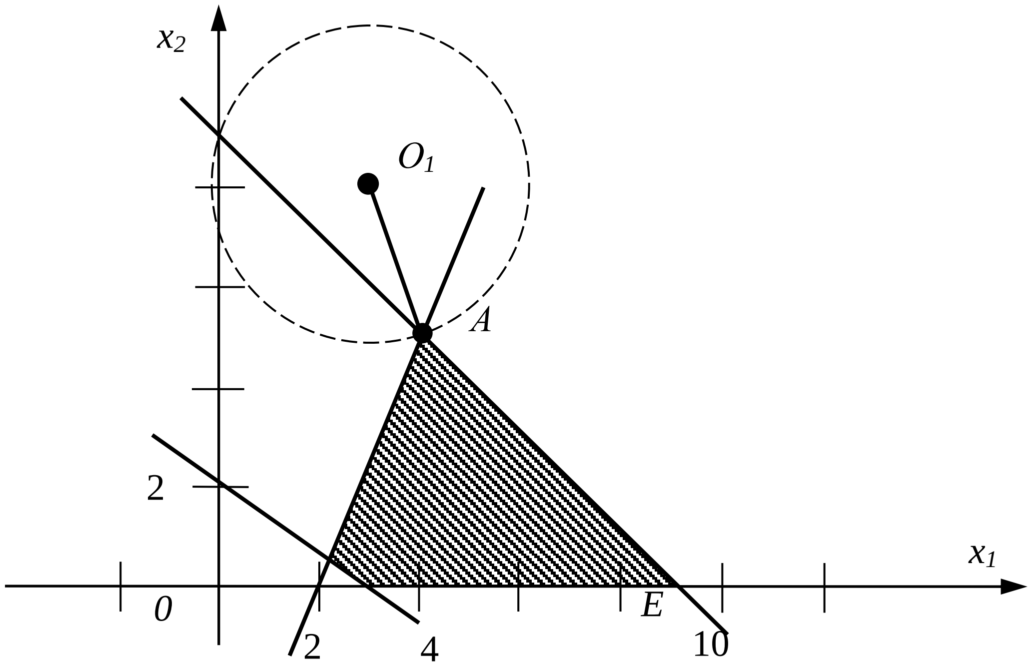


Рис. 6. Графічне розв’язання задачі А)

Таким чином, свого мінімального значення функція $f=(x_1-3)^2+(x_2-8)^2$ досягає в точці $A(4;5)$, тобто $\min f=f(4;5)=(4-3)^2+(5-8)^2=10$.

2. Знайдемо сідлову точку функції Лагранжа ([1], п. 4.5.2, 4.5.3)

$$L(X,\Lambda)=-(x_1-3)^2-(x_2-8)^2+\lambda_1(5x_1-2x_2-10)+\lambda_2(9-x_1-x_2)+$$
$$+\lambda_3(2x_1+3x_2-6),\ \lambda_i\ge 0,\ i=1,2,3.$$

Частинні похідні цієї функції

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -2(x_1 - 3) + 5\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -2(x_2 - 8) - 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 5x_1 - 2x_2 - 10, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 9 - x_1 - x_2, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 2x_1 + 3x_2 - 6. \end{cases}$$

Використовуючи умови ([1], формули (4.23), (4.25) та отриману графічним методом точку $A(4;5)$, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_1} = 4\left(-2(4-3) + 5\lambda_1^* - \lambda_2^* + 2\lambda_3^*\right) = 4\left(-2 + 5\lambda_1^* - \lambda_2^* + 2\lambda_3^*\right) = 0, \\ x_2^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_2} = 5\left(-2(5-8) - 2\lambda_1^* - \lambda_2^* + 3\lambda_3^*\right) = 5\left(6 - 2\lambda_1^* - \lambda_2^* + 3\lambda_3^*\right) = 0, \\ \lambda_1^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_1} = \lambda_1^*(20 + 10 - 10) = 0 \cdot \lambda_1^* = 0, \\ \lambda_2^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_2} = \lambda_2^*(9 - 4 - 5) = 0 \cdot \lambda_2^* = 0, \\ \lambda_3^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_3} = \lambda_3^*(8 + 15 - 6) = 17 \cdot \lambda_3^* = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} -2+5\lambda_1^*-\lambda_2^*+2\lambda_3^*=0, \\ 6-2\lambda_1^*-\lambda_2^*+3\lambda_3^*=0, \\ 0\cdot\lambda_1^*=0, \\ 0\cdot\lambda_2^*=0, \\ 17\cdot\lambda_3^*=0, \end{cases} \Rightarrow \lambda_1^*=\frac{8}{7}, \lambda_2^*=\frac{26}{7}, \lambda_3^*=0.$$

Сідлова точка функції Лагранжа $L(X^*,\Lambda^*)=\left(4{,}5,\frac{8}{7},\frac{26}{7},0\right)$. Перевіримо умови сідлової точки ([13], формула (4.21)):

$$L\left(X,\Lambda^*\right)=-(x_1-3)^2-(x_2-8)^2+\frac{8}{7}\cdot(5x_1-2x_2-10)+\frac{26}{7}\cdot(9-x_1-x_2)+$$
$$+0(2x_1+3x_2-6)=-x_1^2+8x_1-x_2^2+10x_2-51=$$
$$=-\left(x_1^2-8x_1+16\right)-\left(x_2^2-10x_2+25\right)-10=-(x_1-4)^2-(x_2-5)^2-10\le-10,$$

$$L\left(X^*,\Lambda^*\right)=-(4-3)^2-(5-8)^2+\frac{8}{7}\cdot(20-10-10)+\frac{26}{7}\cdot(9-4-5)+$$
$$+0(8+15-6)=-10,$$

$$L(X^*,\Lambda)=-(4-3)^2-(3-8)^2+\lambda_1^*\cdot(20+10-10)+\lambda_2^*\cdot(9-4-5)+$$
$$+\lambda_3^*(8+15-6)=-10+17\lambda_3^*\ge-10.$$

Умова сідлової точки $L\left(X,\Lambda^*\right)\le L\left(X^*,\Lambda^*\right)\le L\left(X^*,\Lambda\right)$ виконана, що вказує на те, що точка (4,5) є точкою, у якій функція $f=(x_1-3)^2+(x_2-8)^2$ досягає мінімального значення.

Відповідь: $\min f = f(4;5)=10$.

Задача б):

$$g=-(x_1-5)^2-(x_2-1)^2\to\max,$$

$$D:\begin{cases} 5x_1-2x_2\ge10, \\ x_1+x_2\le9, \\ 2x_1+3x_2\ge6, \\ x_1\ge0, x_2\ge0. \end{cases}$$

1 Для застосування графічного методу перепишемо задачу б) в еквівалентній формі:

$$\tilde{g} = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min,$$

$$D: \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Як видно з рисунка 7, мінімального значення функція $\tilde{g} = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 1)^2$ досягає в точці $O_2(5,1)$, тобто $\min \tilde{g} = \max g = g(5;1) = 0$.

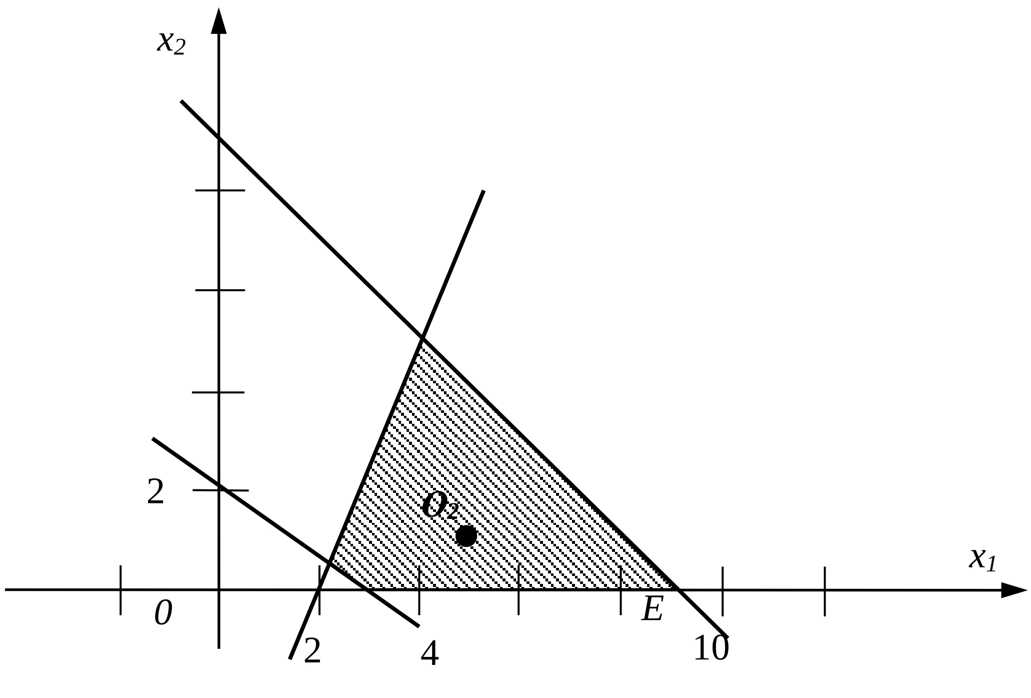


Рисунок 7 – Графічне розв’язання задачі б)

2 Знаходження сідлової точки. Функція Лагранжа має вигляд

$$L(X, \Lambda) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 1)^2 + \lambda_1(5x_1 - 2x_2 - 10) + \lambda_2(9 - x_1 - x_2) +$$
$$+ \lambda_3(2x_1 + 3x_2 - 6), \ \lambda_i \ge 0, \ i = 1,2,3.$$

Частинні похідні

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -2(x_1 - 5) + 5\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -2(x_2 - 1) - 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 5x_1 - 2x_2 - 10, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 9 - x_1 - x_2, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 2x_1 + 3x_2 - 6. \end{cases}$$

Використовуючи умови (4.23) і (4.25) [1] та отриману графічним методом точку $O_2(5{,}1)$, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_1} = 5\left(-2(5-5) + 5\lambda_1^* - \lambda_2^* + 2\lambda_3^*\right) = \left(5\lambda_1^* - \lambda_2^* + 2\lambda_3^*\right) = 0, \\ x_2^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_2} = 1\left(-2(1-1) - 2\lambda_1^* - \lambda_2^* + 3\lambda_3^*\right) = 1\left(-2\lambda_1^* - \lambda_2^* + 3\lambda_3^*\right) = 0, \\ \lambda_1^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_1} = \lambda_1^*(25 - 2 - 10) = 13\lambda_1^* = 0, \\ \lambda_2^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_2} = \lambda_2^*(9 - 5 - 1) = 3\lambda_2^* = 0, \\ \lambda_3^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_3} = \lambda_3^*(10 + 3 - 6) = 7\lambda_3^* = 0. \end{cases}$$

Сідлова точка функції Лагранжа $L(X^*, \Lambda^*) = (5{,}1{,}0{,}0{,}0)$. Перевіримо умови сідлової точки:

$$L\left(X, \Lambda^*\right) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 1)^2 + 0 \cdot (5x_1 - 2x_2 - 10) + 0 \cdot (9 - x_1 - x_2) + \\ + 0 \cdot (2x_1 + 3x_2 - 6) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 1)^2 \le 0,$$

$$L\left(X^*, \Lambda^*\right) = -(5-5)^2 - (1-1)^2 + 0 \cdot (25 - 2 - 10) + 0 \cdot (9 - 5 - 1) + 0 \cdot (10 + 3 - 6) = 0,$$

$$L(X^*,\Lambda)=-(5-5)^2-(1-1)^2+\lambda_1^*\cdot(25-2-10)+\lambda_2^*\cdot(9-5-1)+$$
$$+\lambda_3^*\cdot(10+3-6)=13\lambda_1^*+3\lambda_2^*+7\lambda_3^*\ge 0\;\;(\lambda_i\ge 0,\ i=1,2,3).$$

Умова сідлової точки $L(X,\Lambda^*)\le L(X^*,\Lambda^*)\le L(X^*,\Lambda)$ виконана.

Відповідь: $\max g = g(5;1)=0$.

Задача 2.2. Умовний екстремум функції двох змінних ([1], розділ 4)

Знайти екстремум функції $f=4x_1-x_2+7$ за умови $x_1^2+x_2^2=68$.

Розв'язання. Функція Лагранжа ([1], формула (4.13)) має вигляд

$$L=4x_1-x_2+7+\lambda\left(68-x_1^2-x_2^2\right).$$

Для знаходження стаціонарних точок запишемо систему ([1], формула (4.14)):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=4-2\lambda x_1=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=-1-2\lambda x_2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=68-x_1^2-x_2^2=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}2\lambda x_1=4,\\ 2\lambda x_2=-1,\\ x_1^2+x_2^2=68.\end{cases}$$

Система має два розв'язки $\left(X^1,\Lambda^1\right)=\left(8,-2,\dfrac{1}{4}\right)$ і $\left(X^2,\Lambda^2\right)=\left(-8,2,-\dfrac{1}{4}\right)$.

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2L=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}dx_1^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}dx_2^2=-2\lambda dx_1^2+2\cdot 0\cdot dx_1dx_2-2\lambda dx_2^2=$$
$$=-2\lambda\left(dx_1^2+dx_2^2\right).$$

З'ясуємо знак другого диференціала в кожній зі стаціонарних точок:

а) $\left(X^1,\Lambda^1\right)=\left(8,-2,\frac{1}{4}\right)$: $d^2L\left(X^1,\Lambda^1\right)=-\frac{1}{2}\left(dx_1^2+dx_2^2\right)<0$, тобто функція $f=4x_1-x_2+7$ має в точці $(8,-2)$ умовний максимум;

б) $\left(X^2,\Lambda^2\right)=\left(-8,2,-\frac{1}{4}\right)$: $d^2L\left(X^2,\Lambda^2\right)=\frac{1}{2}\left(dx_1^2+dx_2^2\right)>0$, тобто функція $f=4x_1-x_2+7$ має в точці $(8,-2)$ умовний мінімум.

Відповідь: $\max f=f(8,-2)=41$, $\min f=f(-8,2)=-27$.

Завдання 3. Динамічне програмування ([2], розділ 5)

Завдання 3.1. Задача про оптимальне завантаження транспортного засобу

Транспортний засіб вантажопідйомністю $P=20$ умов. од ваги завантажується вантажами трьох видів. Вага і вартість вантажу кожного виду відповідно дорівнюють $p_1=9,\ p_2=5,\ p_3=6$ умов. од ваги і $c_1=76, c_2=27, c_3=50$ грош. од. Знайти план завантаження транспортного засобу, який забезпечує максимальну сумарну вартість вантажу.

Розв'язання. Для зручності складаємо таблиці 5, розподіляючи предмети в порядку зростання ваги.

Таблиця 5

N	Вид вантажу	Вага, вагов. од	Прибуток, грош. од
1	2	5	27
2	3	6	50
3	1	9	76

Позначимо через $x_i,\ i=\overline{1,3}$ – кількість предметів i-го виду.

Розіб'ємо інтервал $[0;P]=[0;20]$ на однакові інтервали довжиною $l=\min\{5;НСД(6;9)\}=\min\{5;3\}=3$, де НСД – найбільший спільний дільник.

Розв'язання задачі розбивається на три етапи, на кожному з яких додається один вантаж. Послідовність завантаження визначається за таблицею 5. Для кожного етапу складається цільова функція $W_k(P)$ ([2], формула (5.21)).

Етап 1. $W_1(P)=c_2x_2=27x_2, x_2=0,1,2,3,4.$

Отримані значення $W_1^*(P)$ запишемо в таблицю 6.

Таблиця 6

Етап 1

N	Інтервал	$W_1(P)=27x_2$					Оптимальний розв'язок	
		x_2					$W_1^*(P)$	x_2^*
		0	1	2	3	4		
0	$[0;3)$	**0**	-	-	-	-	0	0
1	$[3;6)$	0	**27**	-	-	-	27	1
2	$[6;9)$	0	**27**	-	-	-	27	1
3	$[9;12)$	0	27	**54**	-	-	54	2
4	$[12;15)$	0	27	**54**	-	-	54	2
5	$[15;18)$	0	27	54	**81**	-	81	3
6	$[18;21)$	0	27	54	81	**108**	108	4

Етап 2.

$W_2^*(P)=\max\{c_3x_3+W_1^*(P-p_3x_3)\}=\max\{50x_3+W_1^*(20-6x_3)\}$, $x_3=0,1,2,3.$ Отримаємо таблицю 7.

Таблиця 7

Етап 2

N	Інтервал	$W_2(P)=50x_3+W_1^*(20-6x_3)$				Оптимальний розв'язок		
		$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$W_2^*(P)$	x_3^*	x_2^*
0	$[0;3)$	**0+0**	-	-	-	0	0	0
1	$[3;6)$	**0+27**	-	-	-	27	0	1
2	$[6;9)$	0+27	**50+0**	-	-	50	1	0
3	$[9;12)$	0+54	**50+27**	-	-	77	1	1
4	$[12;15)$	0+54	50+27	**100+0**	-	100	2	0
5	$[15;18)$	0+81	50+54	**100+27**	-	127	2	1
6	$[18;21)$	0+108	50+54	100+29	**150+0**	150	3	0

Етап 3.

$$W_3^*(P) = \max\{c_1x_1 + W_2^*(P - p_1x_1)\} = \max\{76x_1 + W_2^*(20 - 9x_1)\},$$

$x_1 = 0,1,2.$ Складаємо таблицю 8.

Таблиця 8

Етап 3

N	Інтервал	$W_3(P) = 76x_1 + W_2^*(20-9x_1)$			Оптимальний розв'язок			
		$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$W_3^*(P)$	x_1^*	x_3^*	x_2^*
0	$[0;3)$	0+0	-	-	0	0	0	0
1	$[3;6)$	**0+27**	-	-	27	0	0	1
2	$[6;9)$	**0+50**	-	-	50	0	1	0
3	$[9;12)$	**0+77**	76+0	-	77	0	1	1
4	$[12;15)$	0+100	**76+27**	-	103	1	0	1
5	$[15;18)$	**0+127**	76+50	-	127	0	2	1
6	$[18;21)$	0+150	**76+77**	152+0	**153**	**1**	**1**	**1**

За таблицею 8 можна зробити висновок, що максимальний прибуток, який можна отримати, складає 153 грош. од, при цьому повинно бути завантажено по одному предмету кожного виду.

Відповідь: $W_{\max} = 153$ грош. од, $X^*(1,1,1)$.

Задача 3.2. Задача заміни обладнання

Середній термін експлуатації обладнання складає 6 років. На початку кожного року можна прийняти рішення зберегти обладнання або замінити його новим, вартість якого складає $p_0 = 14580$ грош. од. Після t років експлуатації $(1 \le t \le 6)$ обладнання можна продати за за $\varphi(t) = 14580 \cdot 3^{-t}$ грош. од. (ліквідна вартість). Витрати на експлуатацію протягом року залежать від віку t обладнання та дорівнюють $r(t) = 1700(t+1)$ грош. од. Визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання, щоб сумарні витрати з урахуванням початкової покупки і заключного продажу були мінімальними.

Розв'язання. Розподіляємо процес управління на кроки: номер кроку $i, i = \overline{1,6}$ – номер року. За роботою [2], формула (5.11), складаємо показник ефективності i-го кроку (витрати на експлуатацію обладнання наприкінці i-го року):

$$W_i(t) = \min \begin{cases} 1700(t+1), & якщо U_i = U^н, \\ 14580 + 1700 - 14580 \cdot 3^{-t}, & якщо U_i = U^з. \end{cases}$$

Позначимо через $W_i^*(t), i = \overline{1,6}$ умовні оптимальні витрати на експлуатацію обладнання починаючи з i-го року і до 6-го включно за умови, що до початку i-го року обладнання має вік t років. Тоді оптимальні витрати за 6 років дорівнюють $W_{\min} = W_1^*(t)$.

Функціональне рівняння Беллмана для останнього стану процесу:

$$W_6^*(t) = \min \begin{cases} 1700(t+1) - 14580 \cdot 3^{-t}, & якщо U_6 = U^н, \\ 14580 + 1700 - 14580 \cdot 3^{-t} - 14580 \cdot 3^{-1}, & якщо U_6 = U^з. \end{cases}$$

Таким чином за роботою [2], формула (5.9), отримаємо

$$W_i^*(t) = \min \begin{cases} 1700(t+1) + W_{i+1}^*(t+1), & якщо U_i = U^н, \\ 16280 - 14580 \cdot 3^{-t} + W_{i+1}^*(1), & якщо U_i = U^з, \end{cases}$$

$i = 5,4,3,2,1.$

Будуємо граф станів (рисунок 8).

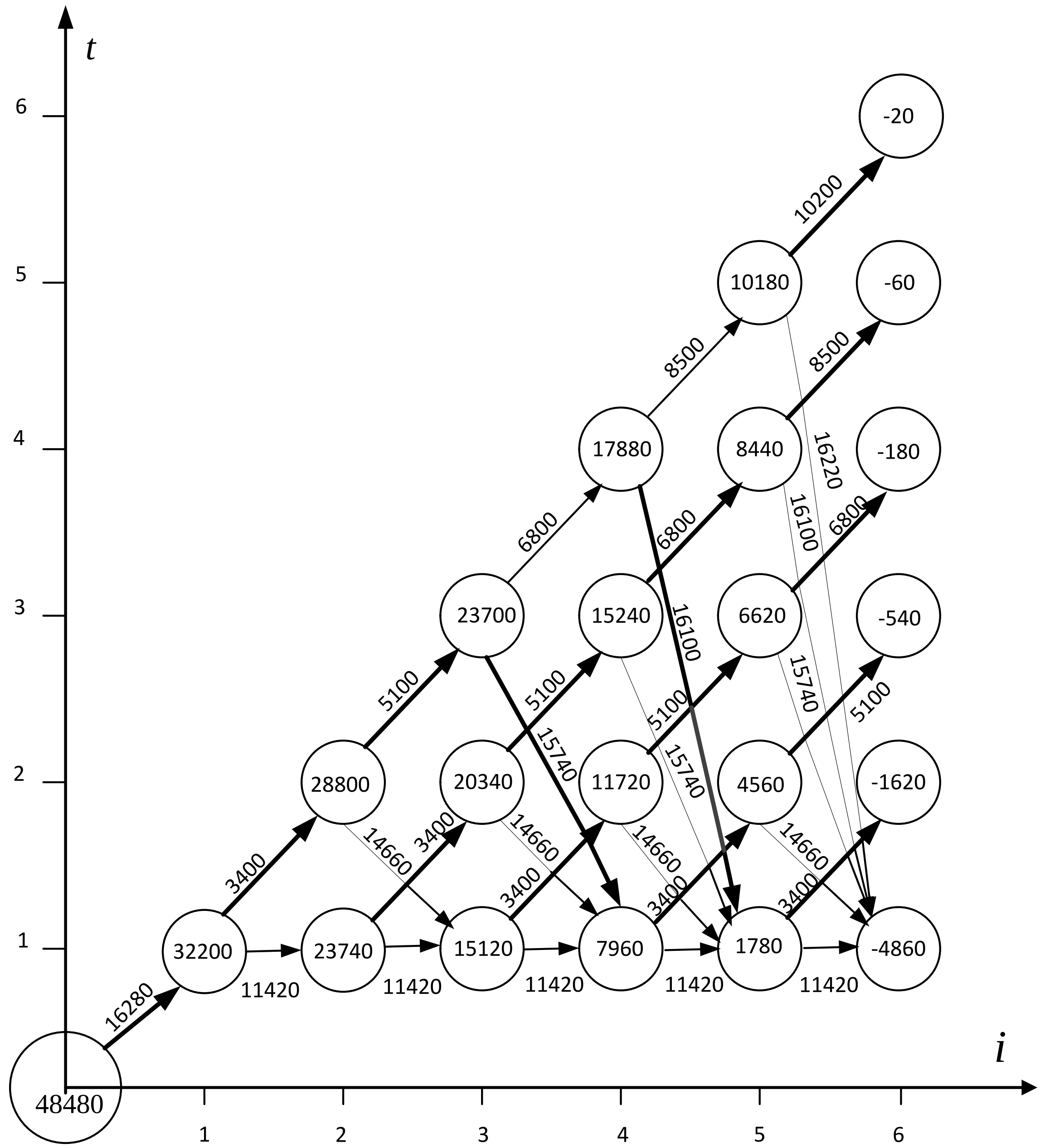


Рисунок 8 – Умовна оптимізація на графі

Отримаємо оптимальну траєкторію, переміщуючись з точки $S_0(0;0)$ за подвійними стрілками: $(0;0)\rightarrow(1;1)\rightarrow(2;2)\rightarrow(3;3)\rightarrow(4;1)\rightarrow(5;2)\rightarrow(6;3)$. Цей вибір відповідає оптимальному управлінню $U^* = \left(U^н, U^н, U^н, U^з, U^н, U^н\right)$.

Перевіримо правильність розрахунків (таблиця 9).

Таблиця 9

Перевірка обчислень

Рік	Купівля нового обладнання, грош. од.	Затрати на експлуатацію, грош. од.	Продаж обладнання, грош. од.	$\sum$
1	14580	1700	-	16280
2	-	3400	-	3400
3	-	5100	-	5100
4	14580	1700	-540	15740
5	-	3400	-	3400
6	-	5100	-540	4560
$\sum$	29160	20400	-1080	**48480**

Відповідь: оптимальний режим експлуатації полягає в тому, щоб замінити обладнання новим на початку 4-го року, при цьому витрати складуть 48480 грош. од.

Завдання 4. Потоки подій ([2], розділ 8)

Задача 4.1. На сортувальну станцію, що обслуговує промисловий район з трьома підприємствами, надходять подачі з вантажними вагонами. Середній час очікування простою партії вагонів під завантаженням на кожному підприємстві складає $t_1 = 2$ *год*, а надходження подач вагонів на станцію підлягає пуасонівському закону розподілу. Знайти середню кількість подач, що надійдуть протягом $t_2 = 4{,}5$ *год*. Знайти ймовірність того, що за $t_3 = 55$ *хв* на станцію надійдуть:

а) рівно одна подача;

б) хоча б одна подача;

в) не більше двох подач.

Розв'язання. Кількість подач, що надходять на станцію з одного підприємства за годину, дорівнює $\lambda_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ *потяг/год*, а загальна кількість подач з трьох підприємств за годину дорівнює $\lambda = 3\lambda_1 = 1{,}5$ *потяг/год*.

Середня кількість подач, що надійдуть протягом $t_2 = 4{,}5$ *год*, за формулою (8.8) [2] дорівнює математичному сподіванню $M(X) = \lambda \cdot t_2 = 1{,}5 \cdot 4{,}5 = 6{,}75$ *потяг*.

За формулами (8.7), (8.12) [2] імовірність того, що за час $t_3 = 55$ *хв* $= \frac{11}{12}$ *год* на станцію надійде:

а) одна подача

$$P_{t=\frac{11}{12}}(1) = P\left(X\left(t = \frac{11}{12}\right) = 1\right) = \frac{\left(1{,}5 \cdot \frac{11}{12}\right)^1}{1!} \cdot e^{-1{,}5 \cdot \frac{11}{12}} \approx 0{,}3477;$$

б) хоча б одна подача

$$P_{t=\frac{11}{12}}(k \geq 1) = P\left(X\left(t = \frac{11}{12}\right) \geq 1\right) = 1 - e^{-1{,}5 \cdot \frac{11}{12}} \approx 0{,}7472;$$

в) не більше двох подач

$$P_{t=\frac{11}{12}}(k \leq 2) = P\left(X\left(t = \frac{11}{12}\right) \leq 2\right) = P\left(X\left(t = \frac{11}{12}\right) = 0\right) +$$

$$+ P\left(X\left(t = \frac{11}{12}\right) = 1\right) + P\left(X\left(t = \frac{11}{12}\right) = 2\right) \approx 0{,}2528 + 0{,}3447 + 0{,}239 = 0{,}8395.$$

Відповідь: а) $P_{t=\frac{11}{12}}(1) \approx 0{,}3447$; б) $P_{t=\frac{11}{12}}(k \geq 1) \approx 0{,}7472$;

в) $P_{t=\frac{11}{12}}(k \leq 2) \approx 0{,}8395$.

Задача 4.2. Пасажири, що звертаються до білетної каси, утворюють найпростіший потік з інтенсивністю $\lambda = 0{,}2$ *пас/хв*. Знайти ймовірність того, що:

1) за $t_1 = 18$ *хв* до каси звернеться 3 пасажири;

2) за $t_1 = 18$ *хв* до каси звернеться менше 3 пасажирів;

3) за $t_1 = 18$ *хв* до каси звернеться не менше 3 пасажирів;

4) за $t_2 = 5$ *хв* до каси не звернеться жодного пасажира;

5) за $t_3 = 8$ *хв* до каси звернеться принаймні 1 пасажир;

6) інтервал часу між сусідніми зверненнями менший за $t_4 = 6$ *хв*;

7) інтервал часу між сусідніми зверненнями не менший за $t_5 = 12$ *хв*;

8) інтервал часу між сусідніми зверненнями не менший за $t_4 = 6$ *хв* і не більший за $t_5 = 12$ *хв*.

Розв'язання. За формулами (8.7)-(8.13) [2]:

1) $P(X(t=18)=3) = \dfrac{(0{,}2 \cdot 18)^3}{3!} \cdot e^{-0{,}2 \cdot 18} \approx 0{,}2125$;

2) $P(X(t=18)<3) = e^{-0{,}2 \cdot 18} \cdot \sum\limits_{m=0}^{2} \dfrac{(0{,}2 \cdot 18)^m}{m!} \approx 0{,}3027$;

3) $P(X(t=18) \geq 3) = 1 - P(X(t=18)<3) = 1 - 0{,}3027 = 0{,}6973$;

4) $P(X(t=5)=0) = e^{-0{,}2 \cdot 5} \approx 0{,}3679$;

5) $P(X(t=8) \geq 1) = 1 - e^{-0{,}2 \cdot 8} \approx 0{,}7981$;

6) $P(T<6) = 1 - e^{-0{,}2 \cdot 6} \approx 0{,}6988$;

7) $P(T \geq 12) = e^{-0{,}2 \cdot 12} \approx 0{,}0907$;

8) $P(6 \leq T \leq 12) = e^{-0{,}2 \cdot 6} - e^{-0{,}2 \cdot 12} \approx 0{,}2105$.

Відповідь: 1) $P(X(t=18)=3) \approx 0{,}2125$; 2) $P(X(t=18)<3) \approx 0{,}3027$; 3) $P(X(t=18) \geq 3) = 0{,}6973$; 4) $P(X(t=5)=0) \approx 0{,}3679$; 5) $P(X(t=8) \geq 1) \approx 0{,}7981$; 6) $P(T<6) \approx 0{,}6988$; 7) $P(T \geq 12) \approx 0{,}0907$; 8) $P(6 \leq T \leq 12) \approx 0{,}2105$.

Задача 4.3. Тривалість формування состава поїзда в парку відправлення підкорюється закону розподілу Ерланга другого порядку з інтенсивністю $\lambda_2 = 1{,}7$ *потяг/год*. Визначити ймовірність того, що тривалість формування состава буде більше $t = 35$ *хв*.

Розв'язання. За (8.38) [2] інтенсивність найпростішого потоку $\lambda = 2\lambda_2 = 2 \cdot 1{,}7 = 3{,}4$ *потяг/год*. Тоді за ([2], 8.34) складаємо щільність розподілу випадкової величини T:

$$f_2(t) = (3{,}4)^2 \cdot t \cdot e^{-3{,}4t}, \; t > 0.$$

Імовірність того, що тривалість формування состава буде від t_1 до t_2, обчислюється за відомою з теорії ймовірностей формулою

$$P\left(t_1 \le T \le t_2\right) = \int_{t_1}^{t_2} f_k(t)dt,$$

де $f_k(t)$ – щільність розподілу Ерланга k-го порядку.

Тоді імовірність того, що тривалість формування состава буде більше $t = 35\ хв = \frac{7}{12}\ год$ дорівнює

$$P\left(T > \frac{7}{12}\right) = (3{,}4)^2 \int_{\frac{7}{12}}^{+\infty} t \cdot e^{-3{,}4t} dt \approx 0{,}4105.$$

Відповідь: $P\left(T > \frac{7}{12}\right) \approx 0{,}4105$.

Завдання 5. Багатоканальна СМО ([2], розділ 10)

До багатоканальної системи масового обслуговування надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю 3,2 *пас/хв*. Час обслуговування однієї заявки розподілений за показниковим законом і в середньому складає 1,1 *хв*. Визначити:

1) мінімальну кількість $m_{\min}$ каналів, яка забезпечить ефективну роботу СМО з необмеженою чергою, та обчислити її показники ефективності;

2) показники ефективності для СМО з чотирма каналами обслуговування та чергою довжиною n=3;

3) показники ефективності для СМО з відмовами, яка має чотири канали обслуговування.

Розв’язання:

1 Коефіцієнт завантаження системи

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot M\left(T_{обсл}\right) = 3{,}2 \cdot 1{,}1 = 3{,}52.$$

Система буде ефективною, якщо $\frac{\rho}{m}<1$, де m – кількість каналів обслуговування. Отримаємо $m>\rho, m>3{,}52, m_{\min}=4$. Таким чином, мінімальна кількість каналів $m_{\min}=4$.

а) багатоканальна СМО з необмеженою чергою.

Показники ефективності системи при $m_{\min}=4$ обчислимо за формулами ([2], додаток 4).

- фінальні ймовірності станів

$$q_0^*=\left(1+\frac{3{,}52}{1!}+\frac{(3{,}52)^2}{2!}+\frac{(3{,}52)^3}{3!}+\frac{(3{,}52)^4}{4!}+\frac{(3{,}52)^5}{(4-3{,}52)\cdot 4!}\right)^{-1}\approx 0{,}014,$$

тобто в середньому 1,4 % часу система пребуває в стані простою;

$q_1^*=q_0^*\frac{\rho}{1!}=0{,}014\cdot\frac{3{,}52}{1!}\approx 0{,}049$ – імовірність того, що один канал зайнятий;

$q_2^*=q_0^*\frac{\rho^2}{2!}=0{,}014\cdot\frac{(3{,}52)^2}{2!}\approx 0{,}087$ – імовірність того, що два канали зайняті обслуговуванням;

$q_3^*=q_0^*\frac{\rho^3}{3!}=0{,}014\cdot\frac{(3{,}52)^3}{3!}\approx 0{,}102$ – імовірність того, що три канали зайняті обслуговуванням;

$q_4^*=q_0^*\frac{\rho^4}{4!}=0{,}014\cdot\frac{(3{,}52)^4}{4!}\approx 0{,}090$ – імовірність того, що всі канали зайняті обслуговуванням,

$q_5^*=q_{4+1}^*=q_0^*\frac{\rho^4}{4!}\cdot\frac{\rho}{4}=0{,}014\cdot\frac{(3{,}52)^4}{4!}\cdot\frac{3{,}52}{4}\approx 0{,}079$ – імовірність того, що в черзі знаходиться одна заявка і т. д.;

- імовірність відмови $P_{відм}=0$;
- відносна пропускна спроможність $Q=1$;
- абсолютна пропускна спроможність $A=3{,}2$;
- середня кількість заявок у черзі $\bar{r}=\frac{(3{,}52)^5}{3!\cdot(4-3{,}52)^2}\cdot 0{,}014\approx 5{,}473$;

- середній час очікування в черзі $\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{5,473}{3,2} \approx 1,710\ хв$;
- середня кількість зайнятих каналів $\overline{K} = \rho = 3,52$.
- середня кількість заявок у системі $\overline{Z}_{сист} = \bar{r} + \overline{K} = 5,473 + 3,52 \approx 8,993$;
- середній час перебування заявки в системі $\bar{t}_{сист} = \frac{\overline{Z}_{сист}}{\lambda} \approx \frac{8,993}{3,2} \approx 2,810\ хв$.

Відповідь: $\rho = 3,52$ $m_{\min} = 4$; $q_0^* \approx 0,014$; $P_{відм} = 0$; $Q = 1$; $A = 3,2$; $\bar{r} \approx 5,473$; $\bar{t}_{черг} \approx 1,710\ хв$; $\overline{K} = 3,52$; $\overline{Z}_{сист} \approx 8,993$; $\bar{t}_{сист} \approx 2,810\ хв$;

б) багатоканальна СМО з чергою довжиною n=3.

Показники ефективності системи при $m_{\min} = 4$ обчислимо за формулами ([2], додаток 5).

- фінальні ймовірності станів

$$q_0^* = \left(1 + \frac{3,52}{1!} + \frac{(3,52)^2}{2!} + \frac{(3,52)^3}{3!} + \frac{(3,52)^4}{4!} + \frac{(3,52)^4}{4!} \cdot \frac{\frac{3,52}{4} - \left(\frac{3,52}{4}\right)^4}{1 - \frac{3,52}{4}}\right)^{-1} \approx$$

$$\approx 0,025,$$

тобто в середньому 2,5 % часу система пребуває в стані простою;

$q_1^* = q_0^* \frac{\rho}{1!} = 0,025 \cdot \frac{3,52}{1!} \approx 0,088$ – імовірність того, що один канал зайнятий;

$q_2^* = q_0^* \frac{\rho^2}{2!} = 0,025 \cdot \frac{(3,52)^2}{2!} \approx 0,155$ – імовірність того, що два канали зайняті обслуговуванням;

$q_3^* = q_0^* \frac{\rho^3}{3!} = 0,025 \cdot \frac{(3,52)^3}{3!} \approx 0,182$ – імовірність того, що три канали зайняті обслуговуванням;

$q_4^* = q_0^* \frac{\rho^4}{4!} = 0,025 \cdot \frac{(3,52)^4}{4!} \approx 0,160$ – імовірність того, що всі канали зайняті обслуговуванням;

$q_5^* = q_{4+1}^* = q_0^* \frac{\rho^4}{4!} \cdot \frac{\rho}{4} = 0{,}025 \cdot \frac{(3{,}52)^4}{4!} \cdot \frac{3{,}52}{4} \approx 0{,}141$ – імовірність того, що в черзі знаходиться одна заявка і т. д.

- Імовірність відмови

$$P_{відм} = q_{4+3}^* = \frac{\rho^{4+3}}{4^3 \cdot 4!} \cdot q_0^* = \frac{(3{,}52)^7}{4^3 \cdot 4!} \cdot 0{,}025 \approx 0{,}109;$$

- відносна пропускна спроможність $Q = 1 - P_{відм} \approx 1 - 0{,}109 = 0{,}891$;
- абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda \cdot Q \approx 3{,}2 \cdot 0{,}891 \approx 2{,}851$;
- середня кількість заявок у черзі

$$\bar{r} = \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^n \cdot \left(n + 1 - \frac{n \cdot \rho}{m}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{m}\right)^2} \cdot q_0^* =$$

$$= \frac{(3{,}52)^5}{4 \cdot 4!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3{,}52}{4}\right)^3 \cdot \left(3 + 1 - \frac{3 \cdot 3{,}52}{4}\right)}{\left(1 - \frac{3{,}52}{4}\right)^2} \cdot 0{,}025 \approx 0{,}715;$$

- середній час очікування в черзі $\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{0{,}715}{3{,}2} \approx 0{,}223$ *хв*;
- середня кількість зайнятих каналів $\bar{K} = \frac{A}{\mu} = A \cdot M(T_{обсл}) = 2{,}851 \cdot 1{,}1 \approx 3{,}136$;
- середня кількість заявок в системі $\bar{Z}_{сист} = \bar{r} + \bar{K} = 0{,}715 + 3{,}136 \approx 3{,}851$;
- середній час перебування заявки в системі $\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{Z}_{сист}}{\lambda} \approx \frac{3{,}851}{3{,}2} \approx 1{,}203$ *хв*.

Відповідь: $\rho = 3{,}52$ $m_{\min} = 4$; $q_0^* \approx 0{,}025$; $P_{відм} \approx 0{,}109$; $Q \approx 0{,}891$; $A \approx 2{,}851$; $\bar{r} \approx 0{,}715$; $\bar{t}_{черг} \approx 0{,}223$ *хв*; $\bar{K} \approx 3{,}136$; $\bar{Z}_{сист} \approx 3{,}851$; $\bar{t}_{сист} \approx 1{,}203$ *хв*;

в) багатоканальна СМО з відмовами.

Показники ефективності системи при $m_{\min} = 4$ обчислимо за формулами ([2], додаток 6).

- фінальні ймовірності станів

$$q_0^* = \left(1 + \frac{3{,}52}{1!} + \frac{(3{,}52)^2}{2!} + \frac{(3{,}52)^3}{3!} + \frac{(3{,}52)^4}{4!}\right)^{-1} \approx 0{,}041,$$

тобто в середньому 4,1 % часу система перебуває в стані простою;

$q_1^* = q_0^* \dfrac{\rho}{1!} = 0{,}041 \cdot \dfrac{3{,}52}{1!} \approx 0{,}144$ – імовірність того, що один канал зайнятий;

$q_2^* = q_0^* \dfrac{\rho^2}{2!} = 0{,}041 \cdot \dfrac{(3{,}52)^2}{2!} \approx 0{,}254$ – імовірність того, що два канали зайняті обслуговуванням;

$q_3^* = q_0^* \dfrac{\rho^3}{3!} = 0{,}041 \cdot \dfrac{(3{,}52)^3}{3!} \approx 0{,}298$ – імовірність того, що три канали зайняті обслуговуванням;

$q_4^* = q_0^* \dfrac{\rho^4}{4!} = 0{,}041 \cdot \dfrac{(3{,}52)^4}{4!} \approx 0{,}262$ – імовірність того, що всі канали зайняті обслуговуванням.

- імовірність відмови $P_{відм} = q_4^* \approx 0{,}262$;
- відносна пропускна спроможність $Q = 1 - P_{відм} \approx 1 - 0{,}262 = 0{,}738$;
- абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda \cdot Q \approx 3{,}2 \cdot 0{,}738 \approx 2{,}362$;
- середня кількість зайнятих каналів $\overline{K} = \dfrac{A}{\mu} = A \cdot M(T_{обсл}) = 2{,}362 \cdot 1{,}1 \approx 2{,}598$.

Відповідь: $\rho = 3{,}52$ $m_{\min} = 4$; $q_0^* \approx 0{,}041$; $P_{відм} \approx 0{,}262$ $Q \approx 0{,}738$; $A \approx 2{,}362$; $\overline{K} \approx 2{,}598$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Оберіть правильну форму лінійного рівняння регресії:

а) $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$;

б) $\hat{y} = a \cdot b^x$;

в) $\hat{y} = a \cdot x^b$;

г) $\hat{y} = a + bx$;

д) інша відповідь.

2 Середній коефіцієнт еластичності показує (обрати правильну відповідь):

а) на скільки відсотків зміниться значення результативної ознаки y при зміні x на 1 %;

б) на скільки одиниць своєї розмірності зміниться значення результативної ознаки y при зміні x на 1 %;

в) на скільки відсотків зміниться значення результативної ознаки y при зміні x на одиницю своєї розмірності;

г) на скільки одиниць своєї розмірності зміниться значення результативної ознаки y при зміні x на одиницю своєї розмірності;

д) інша відповідь.

3 Суть методу найменших квадратів полягає в тому, що (обрати правильну відповідь):

а) оцінка визначається з умови мінімізації суми квадратів відхилень фактичних значень результативної ознаки y_i від теоретичних $\hat{y}_{x_i}$;

б) оцінка визначається з умови мінімізації суми відхилень фактичних значень результативної ознаки y_i від теоретичних $\hat{y}_{x_i}$;

в) оцінка визначається з умови мінімізації суми квадратів середніх значень ознак x_i;

г) інша відповідь?

4 Що показує парний коефіцієнт кореляції?

5 Який критерій використовують для перевірки значущості окремих коефіцієнтів рівняння множинної лінійної регресії?

6 За допомогою якого методу можна знайти оцінки параметрів рівняння лінійної регресії (обрати правильну відповідь):

а) дисперсійного аналізу;

б) кореляційно-регресійного аналізу;

в) методом найменших квадратів;

г) інша відповідь.

7 Який критерій використовують для перевірки статистичної значущості рівняння регресії?

8 Множинний коефіцієнт кореляції дорівнює 0,85. Який відсоток дисперсії результативної ознаки пояснюється впливом всіх факторних ознак (обрати правильну відповідь):

а) 85 %;

б) 72,25 %;

в) 8,5 %;

г) 0,85 %;

д) інша відповідь?

9 Коефіцієнт детермінації дорівнює 0,91. Який відсоток дисперсії результативної ознаки пояснюється впливом всіх факторних ознак? (обрати правильну відповідь):

а) 91 %;

б) 0,8281 %;

в) 19 %;

г) 9,1 %;

д) інша відповідь?

10 Як обчислити середню помилку апроксимації?

11 Побудувати ОДР, яка визначається системою обмежень

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12 Алгоритм графічного розв'язку ЗНП.

13 Записати функцію Лагранжа для задачі нелінійного програмування:

$$\text{а)}\ f = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min,$$

$$D:\begin{cases}2x_1 - x_2 \le 2,\\ x_2 \le 2,\\ x_1 + x_2 \ge 1,\\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.\end{cases}$$

б) $f = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 \to \max$,

$$D:\begin{cases}x_1 + x_2 \le 4,\\ -x_1 + x_2 \le 3,\\ x_1 + 2x_2 \ge 2,\\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

14 Задача динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана.

15 У чому полягає властивість стаціонарності потоку подій?

16 У чому полягає властивість ординарності потоку подій?

17 У чому полягає властивість відсутності післядії потоку подій?

18 Який потік називається найпростішим?

19 Як обчислити у випадку найпростішого потоку ймовірність появи за час t:

а) рівно k подій;

б) менше k подій;

в) не менше k подій;

г) жодної події;

д) хоча б однієї події?

20 Закон розподілу інтервалу часу між послідовними подіями найпростішого потоку.

21 Потік Ерланга k-го порядку.

22 Який закон розподілу називається законом Ерланга k-го порядку?

23 Інтенсивність найпростішого потоку, що породжує потік Ерланга, дорівнює $\lambda = 4$. Знайти інтенсивність потоку Ерланга четвертого порядку (обрати правильну відповідь):

а) 16;

б) 1;

в) 4;

г) $\frac{1}{4}$;

д) інша відповідь.

24 Класифікація систем масового обслуговування.

25 Основні елементи систем масового обслуговування.

26 Вхідний потік заявок.

27 Математична модель СМО.

28 Коефіцієнт завантаження СМО.

29 Потік пасажирів, що звертаються до залізничної каси з трьома касирами, є найпростішим з інтенсивністю λ=25 пас/год. Час обслуговування розподілений за показниковим законом і складає в середньому 4 хв. Проаналізувати ефективність роботи залізничної каси і знайти коефіцієнт завантаження такої системи масового обслуговування (обрати правильну відповідь):

а) неефективна, ρ=25/4;

б) неефективна, ρ=1;

в) ефективна, ρ=1/4;

г) ефективна, ρ=5/3;

д) інша відповідь.

30 Які показники характеризують ефективність обслуговуючої системи?

31 Якщо відносна пропускна спроможність *Q* дорівнює 0,82, то це означає, що (обрати правильну відповідь):

а) за одиницю часу обслуговується 0,82 заявки;

б) обслуговується 82 % заявок, що надходять;

в) 82 % заявок дістають відмову в обслуговуванні;

г) обслуговується 0,82 % заявок, що надходять;

д) інша відповідь.

32 Якщо абсолютна пропускна спроможність *A* дорівнює 0,82, то це означає, що в середньому (обрати правильну відповідь):

а) за одиницю часу обслуговується 82 % заявок;

б) обслуговується 18 % заявок, що надходять;

в) 82 % заявок дістають відмову в обслуговуванні;

г) обслуговується 0,82 % заявок, що надходять;

д) інша відповідь.

33 Поняття багатоканальної СМО з необмеженою чергою.

34 Поняття багатоканальної СМО з обмеженою чергою.

35 Поняття багатоканальної СМО з відмовами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Панченко, Н. Г. Елементи дослідження операцій в управлінні процесами перевезень [Текст] : підручник / Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – Ч. 1. – 280 с.

2 Панченко, Н. Г. Елементи дослідження операцій в управлінні процесами перевезень [Текст] : підручник / Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко. – Харків: «Діса плюс», 2015. – Ч. 2. – 314 с.

3 Зайченко, Ю. П. Исследование операций [Текст] / Ю. П. Зайченко. – К. : Вища школа, 1988. – 320 с.

4 Вентцель, Е. С. Исследование операций [Текст] / Е. С. Вентцель. – М. : Сов. радио, 1972. – 552 с.

5 Кузнецов, А. В. Высшая математика: математическое программирование [Текст] / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск : Высш. шк., 1994. – 286 с.

6 Калихман, И. С. Сборник задач по математическому программированию [Текст] / И. С. Калихман. – М. : Высш. шк., 1975. – 270 с.

7 Холод, Н. И. Пособие к решению задач по линейной алгебре и линейному программированию [Текст] / Н. И. Холод. – Минск : Издательство БГУ, 1971. – 176 с.

8 Ульянченко, О. В. Дослідження операцій в економіці: підручник для студентів вузів [Текст] / О. В. Ульянченко. – Харків : Гриф, 2002. – 580 с.

9 Наконечний, С. І. Економетрія [Текст] : підручник / С. І. Наконечний. – 4-те вид., доп. та перероб. – К.: КНЕУ, 2006. – 528 с.

10 Churchman, C. W. 1950. Introduction to Operations Research [Text] / C. W. Churchman, R. L. Ackoff, and E. L. Arnoff. – New York, NY, USA: Wiley, 1957. – 645 p.

11 Державна служба статистики України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.ukrstat.gov.ua.

ДОДАТОК А
Критичні точки розподілу Фішера (*F*-розподіл)

Кількість степенів свободи меншої дисперсії k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}1$																		
	Кількість степенів свободи більшої дисперсії k_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,50	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,12	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,08	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,01	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,96	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,94	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,92	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,84	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,73	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,68	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,62	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26

Продовження додатку А

Кількість степенів свободи меншої дисперсії k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$																		
	Кількість степенів свободи більшої дисперсії k_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	271	242	243	244	246	248	249	250	251	252	253
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35

Продовження додатку А

Кількість степенів свободи меншої дисперсії k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$																		
	Кількість степенів свободи більшої дисперсії k_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	4052	4999	5403	5624	5763	5858	5928	5981	6022	6055	6083	6106	6157	6208	6234	6260	6286	6313	6339
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53

ДОДАТОК Б
Критичні точки розподілу Стьюдента (*t*-розподілу)

Кількість степенів свободи k	Рівень значущості α (двостороння критична область)					
	0.10	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.002**	**0.001**
1	6.31	12.7	31.82	63.7	318.3	637.0
2	2.92	4.30	6.97	9.92	22.33	31.6
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.22	12.9
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.01	2.57	3.37	4.03	5.89	6.86
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.40
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.95
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.59	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.74
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.72
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.71	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29
	0.05	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.001**	**0.0005**
	Рівень значущості α (одностороння критична область)					