

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра інженерії вагонів та якості продукції**

**Р. І. Візняк, А. О. Ловська, А. В. Рибін**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ  
І СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ**

*Конспект лекцій*

**Частина 1**

**Харків 2023**

Візняк Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: Конспект лекцій. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Харків: УкрДУЗТ, 2023. – Ч. 1. – 77 с.

У конспекті лекцій наведено короткі відомості з теорії коливань. Розглянуто елементи коливальної системи. Наведено визначення коливань і їхніх видів. Також розглянуто класифікацію сил, що діють на коливальну систему. Наведено основні відомості стосовно вільних коливань. Розглянуто вільні коливання при в'язкому опорі (вплив опору на вільні коливання лінійних систем з одним ступенем вільності). Наведено особливості складання диференціальних рівнянь руху. Розглянуто крутильні коливання механічних систем.

Конспект лекцій призначено для здобувачів вищої освіти спеціальності 273 «Залізничний транспорт» першого (бакалаврського) рівня всіх форм здобуття освіти, а також він може бути корисним для науково-технічних працівників, які пов'язані з проектуванням, ремонтом та експлуатацією рухомого складу.

Іл. 33, табл. 1, бібліогр.: 8 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри інженерії вагонів та якості продукції 30 січня 2023 р., протокол № 5.

Рецензент  
доц. Д. І. Скуріхін

## ЗМІСТ

Тематичний план навчальної дисципліни	4
Вступ	5
1 Короткі відомості з теорії коливань. Елементи коливальної системи	7
1.1 Коливання. Види коливальних рухів	7
1.2 Коливальні системи	14
Питання для самоконтролю до теми 1	17
2 Класифікація сил	18
2.1 Позиційні сили	18
2.2 Дисипативні сили	27
2.3 Збурюючі сили	30
Питання для самоконтролю до теми 2	34
3 Вільні коливання. Лінійні системи з одним ступенем вільності без непружного опору	36
Питання для самоконтролю до теми 3	44
4 Вільні коливання при в'язкому опорі (вплив опору на вільні коливання лінійних систем з одним ступенем вільності)	45
Питання для самоконтролю до теми 4	63
5 Крутильні коливання механічних систем	65
Питання для самоконтролю до теми 5	76
Список літератури	77

## **Тематичний план навчальної дисципліни**

1 Короткі відомості з теорії коливань. Елементи коливальної системи.

2 Класифікація сил.

3 Вільні коливання. Лінійні системи з одним ступенем вільності без непружних опорів.

4 Вільні коливання при в'язкому опорі.

5 Крутильні коливання механічних систем.

## ВСТУП

Освоєння матеріалу дисципліни «Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу» є одним з основних завдань успішного входження і оволодіння дисципліною «Динаміка вагонів». Метою даної дисципліни є розвиток навичок аналітичного та фізичного мислення майбутніх інженерів стосовно руху залізничних транспортних засобів. Зокрема, здобувачі освіти дізнаються про теоретичні методи, що використовуються для визначення умов руху вагона по залізничній колії, а також стабільності його руху.

По закінченню курсу здобувачі вищої освіти матимуть глибоке розуміння фізичних процесів механічних коливань в різних коливальних системах, в тому числі в нетяговому рухомому складі. Вони також будуть озброєні знаннями, необхідними для проектування та розрахунку компонентів вагонів, створення конструктивних форм, визначення динамічних якостей та параметрів ходової частини.

Протягом курсу здобувачі освіти дізнаються про основи теорії коливань та ударів з акцентом на її застосування до динамічних процесів, що відбуваються в залізничних транспортних засобах. Встановлюючи прямий зв'язок між математичними методами та фізичною природою коливань в механічних системах, здобувачі освіти навчаться моделювати та розв'язувати задачі, пов'язані з коливальним рухом.

Цей курс спрямований на розвиток у здобувачів освіти наступних компетентностей:

Інтегральна – здатність розв'язувати складні спеціалізовані проблеми та практичні завдання, пов'язані з об'єктами залізничного транспорту, із застосуванням теорій та методів природничих, технічних, інформаційних та соціально-економічних наук.

Загальні – здатність проводити дослідження, управляти проектами, працювати автономно або в команді, абстрактно мислити, аналізувати та синтезувати.

Фахові – здатність розрізняти об'єкти залізничного транспорту та їх складові, визначати вимоги до їх конструкції, параметрів та характеристик, застосовувати методи та засоби технічних вимірювань, технічні регламенти, стандарти та інші нормативні документи при технічному діагностуванні об'єктів залізничного транспорту та використовувати сучасні програмні засоби для розробки конструкторської та технологічної документації.

В цілому, цей курс надає здобувачам вищої освіти знання та навички, необхідні для розуміння фізичних процесів та характеристик коливальних систем у залізничному транспорті. Розвиваючи свої навички аналітичного та фізичного мислення, вони будуть краще підготовлені до вирішення складних проблем, пов'язаних з об'єктами залізничного транспорт та у своїй професійній кар'єрі.

# **1 Короткі відомості з теорії коливань. Елементи коливальної системи**

## План лекції

Мета і задачі дисципліни. Коливання. Класифікація коливань. Види коливальних рухів. Елементи коливальної системи. Основні характеристики коливального процесу.

### **1.1 Коливання. Види коливальних рухів**

*Коливання* – це повторюваний змінний рух об'єкта навколо стійкої рівноважної точки, який може бути описаний характеристиками амплітуди, періоду та частоти [1].

Розглянемо найбільш поширені види коливальних рухів.

*Механічні коливання* – це повторювані рухи об'єктів вздовж шляху, що можуть бути описані зміною позиції, швидкості та прискорення в часі, наприклад коливання маятника годинника, конструкцій залізничних мостів, будівель і будівельних споруд, кораблів, що йдуть по хвилях, коливання струни гітари або іншого музичного інструмента, коливання пружини на маятнику або ваговій системі, коливання повітря в трубі органа або вітровому інструменті, коливання амортизаторів автомобіля при русі по нерівностях дороги, у т. ч. пружинних комплектів залізничних вагонів, частин конструкцій електричних і механічних машин при їхніх відхиленнях від положення рівноваги.

*Електромагнітні коливання* – це змінні електричні та магнітні поля, що поширюються в просторі у вигляді концентричних хвиль. Радіохвилі є прикладом електромагнітних коливань для передачі радіо-візуальних і радіо-аудіо потоків. Лазери генерують монохроматичні електромагнітні хвилі в діапазоні від інфрачервоного до ультрафіолетового

випромінювання. Хвилі радіації, наприклад гамма-випромінювання, являють собою хвилі електромагнітного випромінювання з дуже короткою довжиною хвилі та високою енергією.

Окрім цих видів коливань, дуже широко поширені такі види коливань, як електричні, світлові, звукові, електромеханічні та ін.

За формою коливання розрізняють гармонійні, прямокутні, пилоподібні та ін.

Коливання різної природи лежать в основі великої кількості явищ і фізичних процесів.

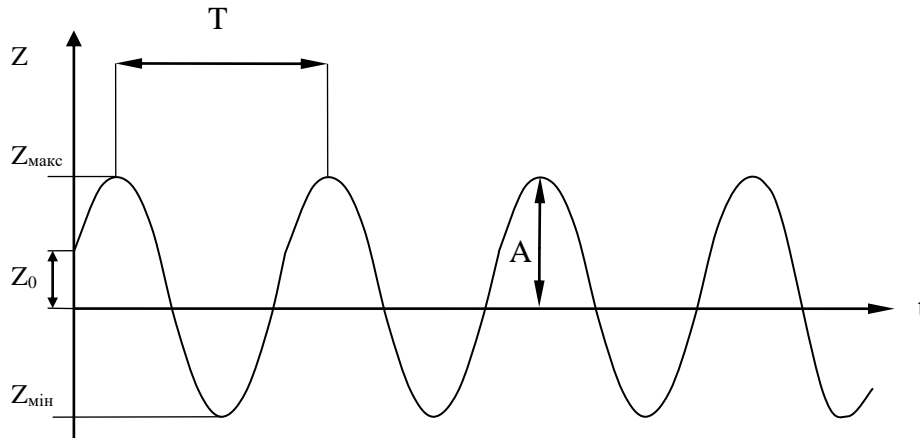
1 *Коливання кристалічної решітки* – це коливання атомів у кристалічній решітці внаслідок збудження їхніх внутрішніх енергетичних станів. Кожен атом у кристалічній решітці може коливатися навколо свого положення рівноваги, а також взаємодіяти з сусідніми атомами. Ці коливання передаються вздовж кристалічної решітки у вигляді хвиль, що називають фононами. *Амплітуда коливань* – це максимальне відхилення об'єкта від його рівноважного стану під час коливань. Іншими словами, це відстань від умовної середини до максимального відхилення об'єкта в будь-який момент часу в процесі коливань. При коливаннях кристалічної решітки вона тим вище, чим більше температура.

2 *Коливання земної кори* – це механічні коливання поверхні Землі, що виникають внаслідок рухів тектонічних плит та інших геологічних процесів.

3 *Колівальні реакції* – це явище, при якому коливання однієї системи спричиняють коливання в інших системах, що знаходяться у взаємодії з першою.

Отже, *коливання* – це повторювані зміни певної фізичної величини навколо рівноважного стану зі зміною в часі, зазвичай з регулярною частотою [2], тобто рухи або зміни стану систем з різною фізичною природою, для яких спостерігається регулярна повторюваність у часі, (відбуваються періодично) (рисунок 1.1).





$T$  – період коливань, [с];  $A$  – амплітуда коливань, [м];  
 $Z$  – переміщення, [м];  $Z_0$  – початкове переміщення, [м];  $t$  – час, [с]

Рисунок 1.1 – Графік коливань механічної системи

Стан коливальної системи зазвичай визначається узагальненою координатою (з переміщенням  $a$ , кутом  $\varphi$ , тиском  $p$ , електричною напругою  $u_{ел}$ , часом  $t$ , швидкістю  $v$ ). У теорії коливань досліджуються її зміни ( $Z$ ) у часі ( $t$ ):  $Z = z(t)$ , вони можуть бути періодичними і відбуватися як синусоїда або косинусоїда:

$$Z(t) = z(t + T), \quad (1.1)$$

де  $T$  – період коливань, [с].

*Період коливань* – це час, необхідний для здійснення одного повного циклу коливань, тобто повернення об'єкта до його початкового стану.

Наприклад, якщо маятник годинника здійснює один повний зворотний рух вліво і вправо за 2 с, то період його коливань дорівнює 2 с. Період зазвичай позначається символом  $T$  і вимірюється в секундах.

Величина, що є зворотною періоду коливань  $T$ , називається *лінійною частотою коливань* і показує кількість повних циклів коливань, що здійснюються за одиницю часу вздовж лінійного шляху руху об'єкта.

Лінійна частота вимірюється в герцах (Гц) і дорівнює кількості повних коливань, здійснених за 1 с. Наприклад, якщо об'єкт здійснює п'ять повних коливань за 1 с вздовж лінійного шляху, то його лінійна частота дорівнює 5 Гц.

$$\nu = 1/T \text{ [1/с = Гц]}. \quad (1.2)$$

При розрахунках часто використовують поняття кругової частоти. *Кругова частота коливань* – це міра швидкості зміни фази коливань вздовж кола. Вона показує, яку кількість повних коливань виконує об'єкт за одиницю часу, але відносно кутової міри, а не лінійної.

Кругова частота позначається символом  $\omega$  (омега) і вимірюється в радіанах на секунду. Вона пов'язана з лінійною частотою  $\nu$  таким співвідношенням:  $\omega = 2\pi \nu$ , де  $\pi$  – це число пі.

Наприклад, якщо об'єкт здійснює п'ять повних коливань за 1 с, то його кругова частота дорівнює  $2\pi * 5$  рад/с або близько 31,4 рад/с.

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T, \text{ [рад/с]}. \quad (1.3)$$

Окрім  $T$ ,  $\nu$ ,  $\omega$ , коливання характеризуються також амплітудою  $A$ , що визначає інтенсивність коливань і складає  $1/2$  загального розмаху коливання. Наприклад, у випадку пружного маятника амплітуда коливань визначається як максимальне відхилення маятника від його положення рівноваги під час коливання. Якщо маятник максимально відхиляється на 5 см від положення рівноваги, то його амплітуда коливань дорівнює 5 см. Тому якщо відхилення  $Z_{\text{макс}}$  найбільше, а  $Z_{\text{мін}}$  найменше значення  $X$  протягом періоду, то

$$A = 1/2 (Z_{\text{макс}} - Z_{\text{мін}}). \quad (1.4)$$

При синусоїдальних коливаннях значення величини  $Z$  близьке до середнього значення величини  $X_0$ . Воно може бути або задане, або визначатися як  $Z_0 = 1/2(Z_{\text{макс}} - Z_{\text{мін}})$ .

При однакових коливаннях такі значення одразу відповідають і стану рівноваги або положенню у спокої.

Якщо величина  $Z(t)$  відповідає умовам періодичності, тобто формула (1.1) отримана з достатнім наближенням, то максимально наближений до періодичного процес коливань

$$|Z(t) - z(t + T)| < \varepsilon, \quad (1.5)$$

де  $\varepsilon$  – раніше задана мала величина.

Якщо провести більш детальну класифікацію коливань за їхніми ознаками і результати звести до таблиці 1.1, отримаємо характеристики, що відповідають різним коливальним процесам.

Таблиця 1.1 – Класифікація коливань за різними ознаками

Ознака	Вид коливань	Пояснюючі відомості
1	2	3
Характер фізичних процесів	1 Механічні. 2 Електромагнітні. 3 Електромеханічні. 4 Світлові. 5 Звукові.	Коливання різної фізичної природи описуються однаковими характеристиками і рівняннями, а отже, до їх вивчення здійснюється єдиний підхід
Характер залежності від часу $f(t)$	1 Періодичні коливання (коливання, що характеризуються такими функціями, що при будь-якому значенні часу $t$ $f(t+T)=f(t)$ ). 2 Гармонійні коливання (окремий випадок періодичних коливань). 3 Неперіодичні коливання (якщо $f(t+T) \neq f(t)$ )	

Продовження таблиці 1.1

1	2	3
Спосіб збудження (породження процесу)	1 Вільні або власні	Коливання системи, що виникають без зовнішньої збуджуючої сили, тобто коливання, які відбуваються за рахунок внутрішніх сил системи
	2 Вимушені	Коливання механічної системи, що виникають під дією зовнішньої збуджуючої сили, яка працює з заданою частотою та амплітудою
	3 Параметричні	Коливання системи, що виникають за рахунок зміни одного або кількох параметрів системи в часі
	4 Автоколивання	Це коливання, що виникають у системі під дією внутрішніх відновлювальних сил, які постійно перетворюють потенціальну енергію в кінетичну та навпаки, відбуваються без зовнішньої дії. Внаслідок автоколивань системи відхиляються від стаціонарного стану та переходять у стан коливань зі змінними параметрами

З усіх видів коливань важливо виділити саме гармонійні коливання [1], оскільки всі коливання, що зустрічаються в природі й техніці, близькі до гармонійних коливань, а також різні періодичні процеси (наприклад будь-які повторення через однакові проміжки часу).

*Гармонійні коливання* – це коливання, що повторюються з однаковою частотою та амплітудою вздовж часу і описуються синусоїдальною функцією.

Наприклад, пружинно-маятниковий осцилятор здійснює гармонійні коливання, коли його відхилення від рівноважного стану пропорційне

зміні часу і описується синусоїдальною функцією. Такі коливання можуть бути описані за допомогою кругової частоти ( $\omega$ ) і фазової константи ( $\varphi$ ).

Гармонійні коливання зустрічаються в багатьох фізичних системах, включаючи механічні, електричні та оптичні. Вони мають важливе значення в фізиці та інженерії, оскільки дають змогу вивчати різноманітні процеси зі сталою частотою та амплітудою, такі як електричні коливання в радіотехніці або механічні коливання в будівництві.

Гармонійні коливання зазвичай описуються рівняннями такого типу:

$$Z = A \cos (\omega_0 t + \varphi)$$

або

$$Z = A \sin (\omega_0 t + \varphi),$$
(1.6)

де  $A$  – амплітуда коливань, [м];

$\omega_0$  – кругова (циклічна) частота, [рад/с];

$\varphi$  – початкова фаза коливань (фазова константа), [рад];

$(\omega_0 t + \varphi)$  – фаза коливань у момент часу  $t$ , [рад];

$Z$  – миттєве значення коливальної величини, [м].

З виразу (1.6) при  $t = 0$   $Z = A \cos \varphi$ ;  $Z_{\max} = A$ ; оскільки зміна  $\cos \varphi$  як функції знаходиться в межах  $[-1;1]$ , при цьому  $Z = [-A;A]$ ;  $T$  – період або проміжок часу  $t$ , протягом якого фаза коливань отримує приріст  $2\pi$ , тобто  $\omega_0 (t + T) + \varphi = (\omega_0 t + T) + 2\pi$ , звідки  $T=2\pi/\omega_0$  (або  $T$  – тривалість одного повного коливання, [с]).

## 1.2 Коливальні системи

*Коливальна система* – це система, що має здатність до виконання коливань. Такі системи мають елементи, які можуть зберігати потенціальну або кінетичну енергію та передавати її між різними елементами системи, що спричиняє зміну швидкості та прискорення.

Наприклад, механічний пружинний маятник є коливальною системою, що складається з маси, яка знаходиться на пружині. Коли маса відхиляється від положення рівноваги, пружина починає деформуватися, зберігаючи потенціальну енергію. Потім пружина повертає масу до положення рівноваги, передаючи свою потенціальну енергію в кінетичну енергію маси, що спричиняє її рух назад. Цей процес повторюється, спричиняючи коливання маси на пружині. Будь-яка коливальна система може бути поділена на такі види:

1) *консервативна коливальна система* – це система, у якій потенціальна енергія залежить тільки від координат мас, а не їхніх швидкостей. Іншими словами, внутрішня структура такої системи не втрачає енергію через тертя або опір, тобто енергія, що переходить між потенціальною та кінетичною формами, зберігається. Зазвичай такі системи моделюють з використанням пружин і мас, де рух мас визначається рівнянням Гука, амплітуда і період коливань є постійними, якщо відсутні зовнішні сили або збурення;

2) *дисипативна коливальна система* – це коливальна система, у якій енергія втрачається через дисипативні фактори, такі як сили опору середовища або тертя. Ці фактори викликають зменшення амплітуди коливань з часом, що призводить до поступового загасання коливань. У дисипативних системах енергія, витрачена на подолання сил опору або тертя, перетворюється в тепло, що втрачається в середовищі. Наприклад, коливання маятника, підвішеного на пружині, є дисипативними

коливаннями через наявність сил опору середовища, які витрачають енергію на подолання опору повітря і зменшують амплітуду коливань з часом;

3) *активна коливальна система* - це система, що має здатність здійснювати додаткову роботу, щоб забезпечити коливання. Наприклад, електрична система коливань, що складається з коливального контуру і джерела живлення, є прикладом активної коливальної системи. Джерело живлення забезпечує додаткову енергію, необхідну для збереження коливань, і може регулювати амплітуду і частоту коливань.

Колівальні системи можуть мати різні форми, включаючи механічні, електричні, оптичні та хімічні системи. Також їх розрізняють за кількістю ступенів свободи. У механічній коливальній системі матеріальні точки здійснюють коливання навколо рівноважних положень під дією внутрішніх сил, що виникають у цій системі. У механічній коливальній системі енергія перетворюється між потенціальною та кінетичною формами, і коливання можуть бути як вільними, так і вимушеними.

На коливальну систему можуть накладатись різні зв'язки, такі як пружні, в'язкі, інерційні, гравітаційні тощо.

Зв'язки визначають, як система реагує на зовнішні впливи, такі як сили, імпульси, тиск, температура тощо. Відповідно до типу зв'язку і характеру впливу на систему будуть відрізнятися її коливання і поведінка в просторі і часі.

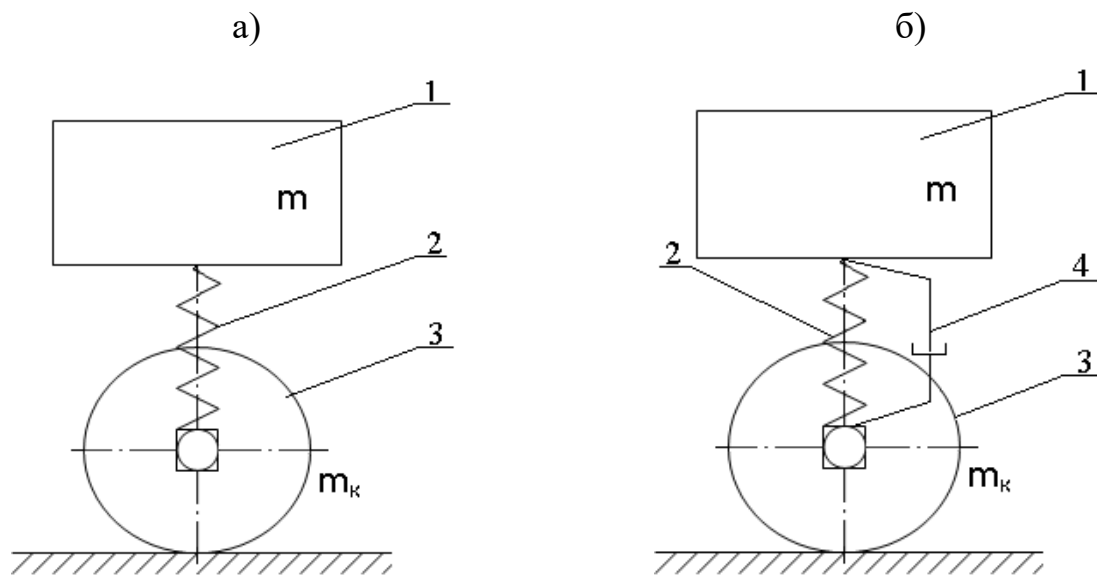
Наприклад, пружні зв'язки характеризуються законом Гука і діють на систему з протилежними силами, залежними від відхилення від рівноважного положення. В'язкі зв'язки характеризуються коефіцієнтом в'язкого опору і зменшують амплітуду коливань системи з часом. Інерційні зв'язки виникають у зв'язку з рухом системи і діють на неї у вигляді інерційних сил. Гравітаційні зв'язки пов'язані зі взаємодією системи з полем гравітації.

Також зв'язки бувають:

- *внутрішніми* (що накладаються на елементи коливальної системи, які взаємодіють між собою, наприклад пружини, маси, рідини тощо);
- *зовнішніми* (що накладаються на коливальну систему ззовні, наприклад від зовнішніх сил, тертя з повітрям або середовищем, зв'язки з іншими системами, які взаємодіють з коливальною системою).

Розглянемо прості схеми коливальних систем (рисунки 1.2, 1.3).

Конденсатор 2 утримує й накопичує заряд, який перенаправляється в котушку 3 через дроти 1, у результаті чого виникає активний опір, обумовлений загасанням коливань, як і реальний коливальний контур у цій системі.



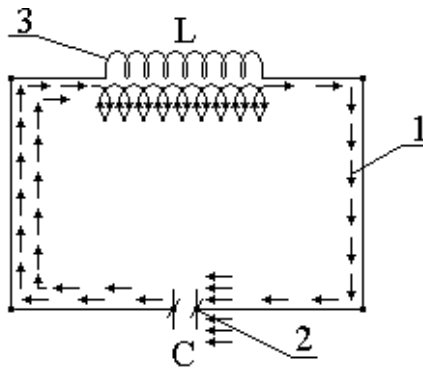
а) одновісна модель вагона з постійними зв'язками;

б) одновісна модель вагона з пружними зв'язками та гідравлічними демпферами (гасниками коливань);

1 – кузов; 2 – пружний зв'язок (підвішування); 3 – необресорений елемент; 4 – в'язкий зв'язок (гідравлічний демпфер);  $m$  – маса кузова;  $m_k$  – маса колеса

Рисунок 1.2 – Схеми коливальних систем з одним ступенем вільності





- 1 – електричний контур; 2 – конденсатор ємністю  $C$ , [Ф];  
 3 – котушка індуктивності  $L$ , [Тл]

Рисунок 1.3 – Коливальний контур замкненого електричного кола

### Питання для самоконтролю до теми 1

- 1 Визначення коливального процесу.
- 2 Яку розмірність має період коливань?
- 3 Як залежить кругова частота від статичного прогину ресорного підвішування?
- 4 Якими параметрами характеризується найпростіша динамічна система?
- 5 Що називають осьовим моментом інерції?
- 6 Яку розмірність має лінійна частота коливань?
- 7 Що таке кругова частота коливань?
- 8 Яку розмірність має статичний прогин ресорного підвішування?
- 9 Формула для знаходження осьового моменту інерції.
- 10 Зв'язок між круговою та лінійною частотами.
- 11 Формула для знаходження статичного прогину.
- 12 Визначення амплітуди коливань.
- 13 Формула для визначення періоду коливань.

## 2 Класифікація сил

### План лекції

Класифікація сил. Позиційні сили. Відновлювальні сили. Нелінійні механічні системи та їхні силові характеристики. Дисипативні сили. Збурюючі сили. Кількість ступенів вільності системи.

### 2.1 Позиційні сили

Зовнішні сили, що діють на механічну систему, яка складається з декількох тіл і безлічі точок, а також внутрішні реакції зв'язків різні за своєю природою і роллю, що вони відіграють у коливальному русі [1].

*Механічна система* – безліч матеріальних точок системи, об'єднаних механічними взаємодіями одна з одною.

*Матеріальна точка* – це ідеалізований об'єкт, який має масу, але не має розміру. У механіці матеріальну точку використовують для опису руху об'єкта, коли його розмір непомітний порівняно з іншими розмірами системи. Матеріальна точка може бути використана для опису руху об'єкта в різних механічних системах, включаючи механічні коливання. Наприклад, у механічному маятнику матеріальну точку можна використовувати для опису руху важеля, що має довжину, але поданий як точковий об'єкт. У механіці твердого тіла матеріальну точку можна використовувати для опису руху тіла, коли розмір тіла порівняно невеликий.

Хоча ідеалізація матеріальної точки не завжди є точною моделлю реального об'єкта, вона забезпечує зручний спосіб опису руху та розрахунку фізичних величин у різних системах, спрощуючи аналіз механічних процесів і систем.

Властивості різних типів сил можна описати відносно систем, що мають один ступінь вільності. У свою чергу *ступені вільності* (у механіці) – це кількість незалежних координат, що необхідно задати для повного опису стану системи. Іншими словами, ступінь вільності визначається кількістю ступенів руху, що може виконувати система незалежно один від одного. Наприклад, маятник має один ступінь вільності (кут відхилення від положення рівноваги), тоді як двомасова система має два ступені вільності (два незалежних зсуви). Кількість ступенів вільності може впливати на поведінку коливальної системи і вибір методу розв'язання диференціальних рівнянь руху, які описують її рух.

*Позиційні сили* –  $F = F^0(x)$  – це сили, що діють на тіло, яке перебуває в рівновазі або рухається зі сталою швидкістю, тобто на тіло, що перебуває у статичному або динамічному режимі. Позиційні сили виникають внаслідок взаємодії тіла з його оточенням або фіксованими елементами системи, у якій знаходиться тіло. Ці сили можуть бути зовнішніми або внутрішніми залежно від того, чи походять вони від інших об'єктів у системі, чи з самого тіла. Іншими словами, *позиційні сили* – сили, що залежать від координат системи.

*Узагальнені координати* – це координати, використовувані для опису руху системи з багатьох частинок. Вони об'єднують всі відносні координати частинок у системі в одну змінну або набір змінних, що зменшує кількість змінних, які потрібно враховувати для опису стану системи. У механіці узагальнені координати зазвичай використовуються для опису руху складних систем, таких як молекули, атоми або механічні системи зі складною конфігурацією. Узагальнені координати можуть бути будь-якого типу, такого як кутові координати, відносні координати, координати центра мас та ін.

Використання узагальнених координат дає змогу спростити складні рівняння руху системи та зменшити кількість змінних, які потрібно

враховувати, що полегшує розв'язання задач. Крім того, узагальнені координати допомагають зрозуміти геометрію руху системи та її фізичні властивості.

Вони є незалежними між собою, а їхні параметри позначаються як  $q_i \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , де  $n = (3N - m)$ ,  $N$  – кількість механічних точок цієї системи,  $m$  – кількість варіацій, що обмежують вибір можливих положень системи. Загальна кількість координат  $n$  також дорівнює кількості ступенів вільності коливальної системи, що визначає її фіксоване положення в просторі.

Якщо  $F^0$  та  $x$  мають різні знаки, то  $F^0$  – являє собою відновлювальну силу коливальної системи, тоді

$$F = - F^0(x). \quad (2.1)$$

За законом Роберта Гука (1678 р.), що описує залежність між силою, яку зазнає пружина, і її деформацією,

$$F^0 = - c x, \quad (2.2)$$

де  $c$  – узагальнений коефіцієнт жорсткості або пружності, [Н/м];

$x$  – подовження (деформація) тіла.

Розглянемо приклад, що показує сутність закону Гука. У цьому прикладі вісь симетрії циліндричної пружини проходить по одній лінії з прямою АХ (рисунок 2.1, а). Одна сторона пружини має фіксоване кріплення в опорі в точці А, а друга сторона пружини не зафіксована, і до неї прикріплена маса М. Коли пружина вільна, її незакріплена сторона знаходиться в точці С. Її вважатимемо початком системи координат з відстанню  $x$ , що визначає місцезнаходження вільної сторони пружини.

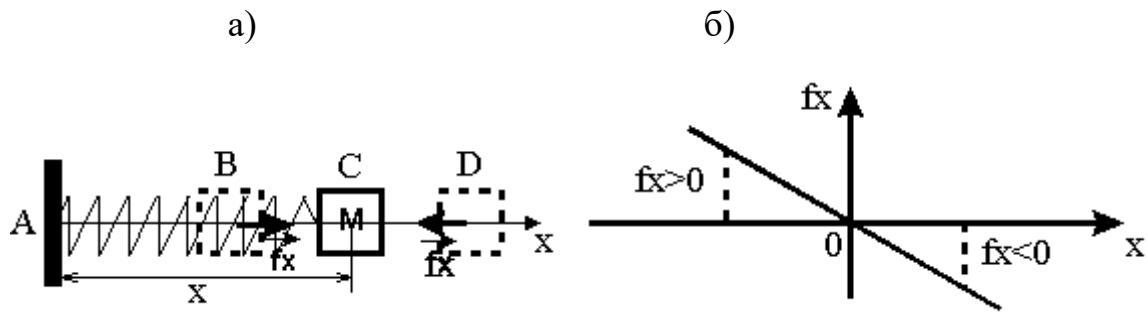


Рисунок 2.1 – Ілюстрація закону Гука

Закон Гука описує залежність між силою, якої зазнає пружина, і її деформацією. Фізична сутність закону Гука полягає в тому, що при зміщенні пружини відносно її рівноважного стану з'являється відповідна протилежна сила, яка намагається повернути пружину до рівноважного стану.

Закон Гука стверджує, що сила, якої зазнає пружина, пропорційна її деформації. Ця пропорційність відображує те, що пружина має певний коефіцієнт жорсткості, який визначає, наскільки важко змінити її форму. Закон Гука формулюється як  $F = -cx$ , де  $F$  – сила, якої зазнає пружина,  $x$  – деформація пружини, а  $c$  – коефіцієнт жорсткості.

Зрушимо пружину так, щоб її незакріплена сторона знаходилася в точці D, що має координату  $x > 0$ : тепер пружина діє на масу  $M$  з деякою пружною силою

$$F^0 = -cx < 0. \quad (2.3)$$

Зрушимо тепер пружину так, щоб її незакріплена сторона знаходилася в точці B, що має координату  $x < 0$ . Тепер пружина діє на масу  $M$  з такою пружною силою:

$$F^0 = -cx > 0. \quad (2.4)$$

З рисунка бачимо, що відносна проєкція сили пружності пружини на горизонтальну вісь  $AХ$  буде мати знак, протилежний знаку координати переміщення  $x$ , оскільки сила пружності буде направлена до положення рівноваги  $C$ . На рисунку 2.1, б зображено ілюстрацію закону Гука. Тут, по горизонталі відкладають значення переміщення  $x$  пружини, а вертикалі – величину сили пружності. Пружна сила  $F^0$  буде залежати від переміщення  $x$  лінійно, тому графік виконаний прямою лінією, що буде проходити через початок координат у точці  $O$ .

*Відновлювальна сила* – це сила, яка виникає в результаті відновлення системи в її рівноважному стані після зміщення від цього стану. Ця сила направлена протилежно зміщенню, тобто намагається повернути систему до її початкового положення.

Відновлювальна сила є характерною для систем, що можуть зазнавати коливань або вібрацій. Наприклад, у пружинної системи відновлювальна сила виникає після зміщення пружини від її рівноважного стану. Чим більше зміщення, тим сильніше відновлювальна сила.

Інші приклади систем з відновлювальною силою включають маятники, системи з вагою на пружинах, електричні коливальні кола, сили плавучості занурених у воду об'єктів та ін. Відновлювальна сила дозволяє системі повернутися до її рівноважного стану, що допомагає забезпечити стійкість і контроль над рухом системи.

Для прикладу, на рисунку 2.2, а бачимо ілюстрацію архімедової сили плавучості, що для тіла, зануреного в рідину, пропорційна глибині його занурення  $h$ .

Ще приклад відновлювальної сили під дією вантажу, показаний на рисунку 2.2, б, на якому величина  $G$  при невеликих відхиленнях маятника  $l$  буде пропорційна куту відхилення  $\varphi$ .

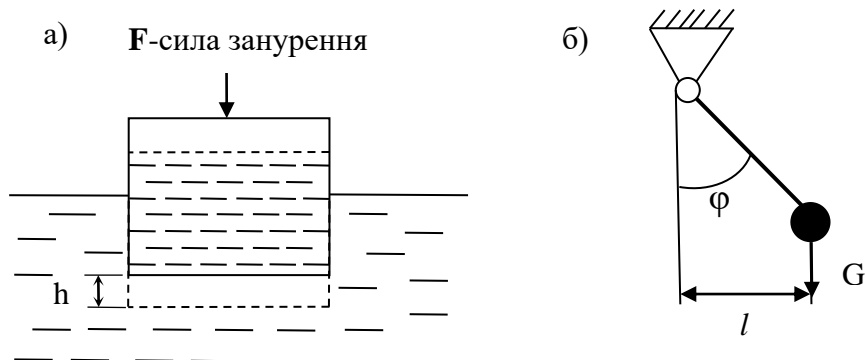


Рисунок 2.2 – Приклади дії відновлювальних сил

Часто відновлювальна сила  $F^0$  має змішаний характер, наприклад при одночасній дії сил тяжіння і пружності пружин.

Система, для якої силова характеристика є прямою в координатах  $x, F$ , називається *лінійною* (рисунок 2.3).

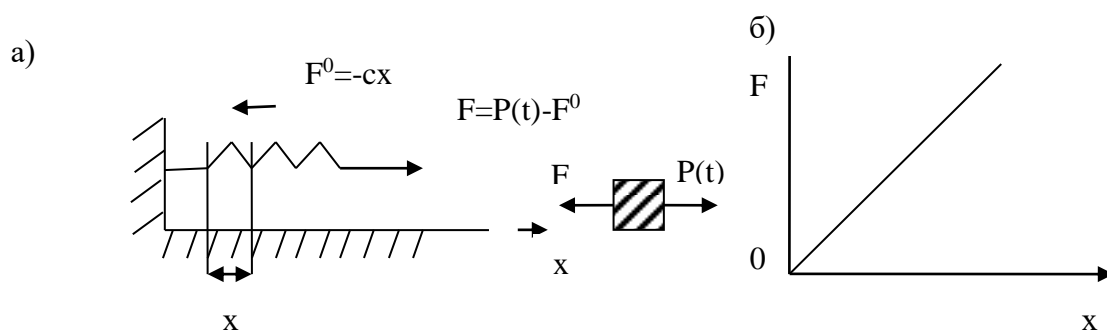


Рисунок 2.3 – Лінійна система: дія сили  $F$  на пружину – зовнішня сила, що прикладається до системи (а); силова характеристика системи (А – прямо пропорційна  $x$ ) (б)

У практиці часто зустрічаються механічні системи, для яких зв'язок узагальненої координати з узагальненою силою не виражається лінійною залежністю  $F(x)$  (рисунок 2.2, б).

*Нелінійні механічні системи* – це системи, які не задовольняють принцип суперпозиції, тобто їхня поведінка не може бути описана як сума поведінки їхніх окремих компонентів. Іншими словами, при збільшенні або зменшенні величини зовнішнього впливу на систему не завжди можна очікувати, що ця зміна буде пропорційною зміні відповідної системи.

Нелінійність може виникнути внаслідок неоднорідності матеріалів, неідеальності геометрії, нелінійної залежності від часу або зміни параметрів системи з часом.

Нелінійні механічні системи зустрічаються в багатьох науках, включаючи фізику, інженерію, біологію, економіку тощо. Прикладами нелінійних механічних систем є складні механічні конструкції, що мають нелінійні властивості, наприклад вібраційні системи з нелінійною відновлювальною силою, системи з контактними силами, які не можуть бути описані за допомогою лінійних моделей. Отже, графіки силових характеристик цих систем або лінійні, або частково лінійні.

Прийнято розрізняти жорсткі (із зростаючою формою) і м'які (з тією, що спадає) нелінійні характеристики (рисунок 2.4).

Наведемо декілька прикладів нелінійних систем [1], а також їхні силові характеристики (рисунок 2.5).

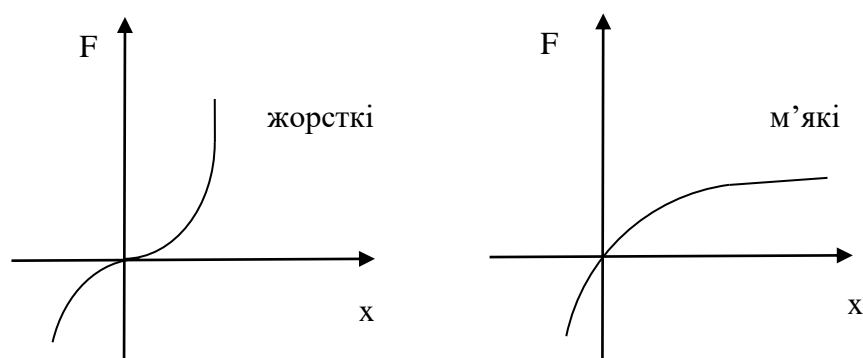


Рисунок 2.4 – Форми силових характеристик



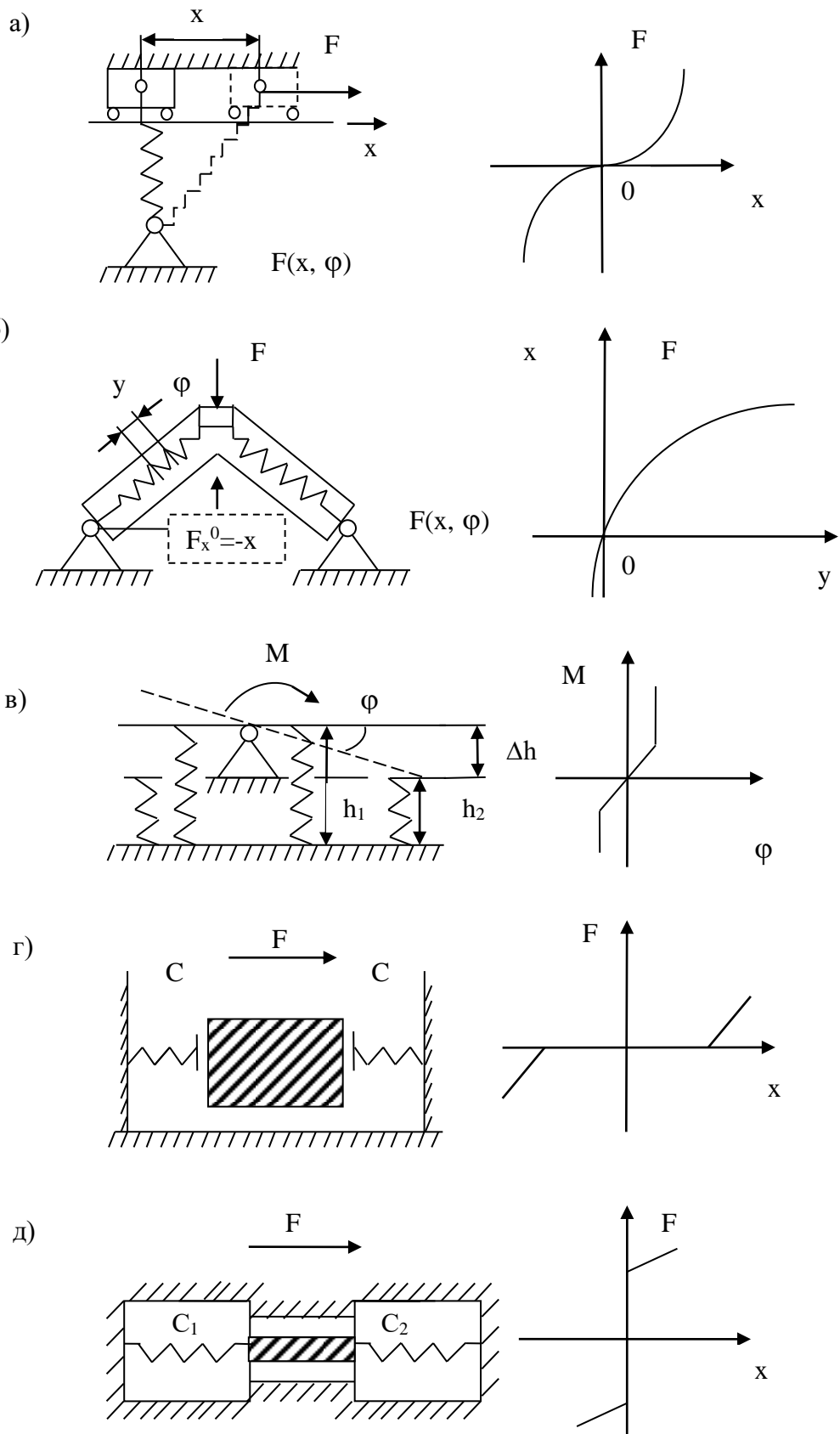


Рисунок 2.5 – Приклади нелінійних механічних систем і їхніх силових характеристик

Розглянемо кожен з наведених на рисунку 2.5, а-д випадків:

а) поступальний рух тіла обмежено вертикальним пружним зв'язком із достатньою горизонтальною жорсткістю пружин;

б) відновлювальний ефект у системі від сили  $F$  досягається за допомогою двох пружних елементів, розташованих під кутом  $\alpha$ , і опорної площини;

в) опора  $A$  системи, яка передає обертальний момент  $M$  через пружні елементи заввишки  $h_1$  і  $h_2$  на опорну площину. При збільшенні навантаження  $M$  послідовно включається в роботу елемент з  $h_2$ , тобто підресорювання в цьому випадку – білінійне (лат. *bi* – два), складається з двох частин, або подвоєне;

г) поперечні переміщення об'єкта в обидва боки обмежені однаковими горизонтальними пружними елементами, при контакті з якими відбувається відновлення і повернення об'єкта в первинне положення;

д) передача сили  $F$  на проміжний елемент призводить до послідовної активації тих же проміжно розташованих пружних елементів з деяким запізненням у результаті додаткової деформації поперечних розділювальних складових.

Позиційні сили в деяких лінійних механічних системах з декількома ступенями вільності запишемо за допомогою формул

$$\begin{aligned} F_1^0 &= -c_{11}q_1 - c_{12}q_2 - \dots - c_{1n}q_n; \\ F_2^0 &= -c_{21}q_1 - c_{22}q_2 - \dots - c_{2n}q_n; \\ F_n^0 &= -c_{n1}q_1 - c_{n2}q_2 - \dots - c_{nn}q_n, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де  $q$ ,  $F_t^0$  – узагальнені сили і координати;

$n$  – кількість ступенів вільності,

або

$$F_t^0 = -\sum_{k=0}^n c_i q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$F_t^0 = -\sum_{k=0} c_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.6)$$

де  $q_k$  і  $F^0$  – вектори узагальнених координат і сил;  
 $c_{ik}$  – коефіцієнти жорсткості елементів системи.

## 2.2 Дисипативні сили

Для того щоб описати властивості коливальної системи, розглянемо характеристику, яка відображує її пружно-в'язкі властивості і має назву коефіцієнт в'язкого опору демпфера [1]. *Коефіцієнт в'язкого опору* – це фізична величина, що відображує залежність сили опору середовища від швидкості руху тіла в цьому середовищі. Він визначається співвідношенням між силою опору і швидкістю тіла, яке просувається в середовищі з деяким коефіцієнтом.

Його використовують для опису різних опорів: повітря, рідини, рухомого середовища тощо. Наприклад, при русі поршня всередині циліндра з рідиною виникає сила в'язкого тертя, що протидіє переміщенню поршня і призводить до його зупинення.

Коефіцієнт в'язкого опору може залежати від різних факторів, таких як температура середовища, розмір тіла, форма тіла, рухова швидкість тощо.

*В'язкість* – це фізична величина, що характеризує рідину або газ, яка протидіє взаємному зсуву шарів речовини в цьому середовищі.

*Абсолютна в'язкість* – це величина, що визначає залежність між напругою зсуву та зсувною швидкістю в рідині або газі. Абсолютна в'язкість, як правило, позначається грецькою літерою  $\mu$  (мю) і має одиницю, що називається паскаль на секунду ( $[Pa \cdot s]$ ).

*Динамічна в'язкість* – це величина, що визначає залежність між напругою зсуву та зсувною швидкістю в рідині або газі, проте динамічна в'язкість відрізняється від абсолютної тим, що вона залежить від тиску та температури середовища. Динамічна в'язкість, як правило, позначається грецькою літерою  $\eta$  (ета) і має одиницю, що називається паскаль на секунду ( $[Pa \cdot s]$ ).

В'язкість визначається за формулою

$$\beta = \frac{P}{V}, \quad \left[ \frac{Hc}{M} \right], \quad (2.7)$$

де  $P$  – сила, [Н];

$V$  – швидкість, [м/с].

Також у коливальних системах присутні сили опору  $R^0$ , пов'язані зі швидкістю точок системи [1]. Їхня необоротна негативна робота здійснює дисипацію (розсіювання) механічної енергії. Це сили тертя  $F_{тр}$  в опорах і зчленованих системах; сили опору середовища (рідкої і газоподібної), у яких відбуваються коливання; внутрішні сили тертя  $F_{тр}$  в матеріалі системи (сили, що виникають при деформації спеціальних поглиначів енергії (демпферів (нім. *dämpfen* – зменшувати, заглушати))).

Розглянемо простий гідравлічний демпфер горизонтальної дії руху поршня 1 уздовж циліндра 2 (рисунок 2.6, а).

У першому випадку опір демпфера пропорційний швидкості стиску рідини усередині циліндра, тому силова характеристика лінійна – у вигляді прямої. У другому – опір демпфера залежить від швидкості та інших факторів, що впливають на її величину, тому графік силової характеристики нелінійний – у вигляді кривої.

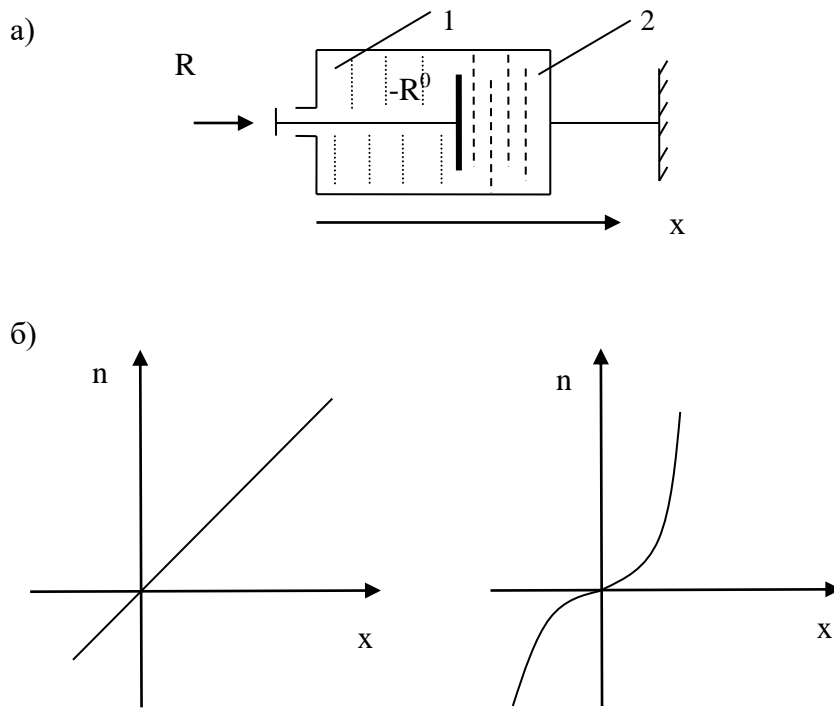


Рисунок 2.6 – Гідравлічний демпфер: принцип дії (а); лінійна силова характеристика й нелінійна (б)

Опір демпфера пропорційний швидкості

$$R = -R^0(\dot{x}), \quad (2.8)$$

де  $R$  – зовнішня сила, прикладена до поршня, [Н];

$\dot{x}$  – узагальнена швидкість, [м/с];

$R^0$  – узагальнена сила лінійного опору або вектор сил опору, [Н].

У механічних системах з декількома ступенями вільності вектор сил опору записується як

$$R^0 = -B\dot{x}, \quad (2.9)$$

де  $x$  – вектор узагальнених координат;

$B$  – матриця коефіцієнтів опору.

## 2.3 Збурюючі сили

*Збурююча сила* – це зовнішня сила, що діє на механічну систему та змінює її рух або стан рівноваги. Вона може бути постійною або залежати від часу. Збурююча сила може бути викликана зовнішніми факторами, такими як дотик, тиск, тертя або електричні чи магнітні поля. У деяких випадках збурююча сила може викликати коливання або хаотичний рух системи. Щоб дослідити вплив збурюючої сили на механічну систему, необхідно враховувати її взаємодію з усіма елементами системи та залежність цієї взаємодії від часу.

Розглянемо роботу неврівноваженого ротора (сердечника) в електричній машині (рисунок 2.7). Як відомо, він здійснює обертальний рух з великою кількістю оборотів  $n$ , об/хв [1].

$$P_{\text{ц}} = m\omega^2 e, \quad (2.10)$$

де  $e$  – ексцентриситет, [м];

$m$  – маса, [кг];

$\omega$  – кутова швидкість, [рад/с];

$\varphi$  – переміщення, [рад].

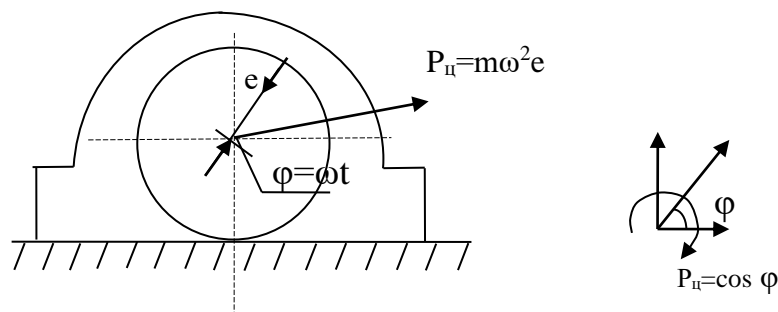


Рисунок 2.7 – Електрична машина на фундаменті з дисбалансом у роторі

$P_y = m\omega^2 e$  – відцентрова сила, що є причиною створення в системі вимушених коливань. Вона практично постійна, але її напрямок співпадає з горизонтальною і вертикальною складовими, а також момент відносно центру опори є змінним.

Найбільш розповсюджений закон зміни збудовуючих сил у часі – гармонійний (таблиця 1.1). Він діє в машинах з рівномірно обертальним неврівноваженим ротором, наприклад вібраційної машини типу УРАЛЦНИИ-МПС або її аналогів для очищення вагонів від залишків насипних вантажів (рисунок 2.8). Вона встановлюється на верхній обв'язувальний пояс і передає вагону періодичні вимушені коливання.

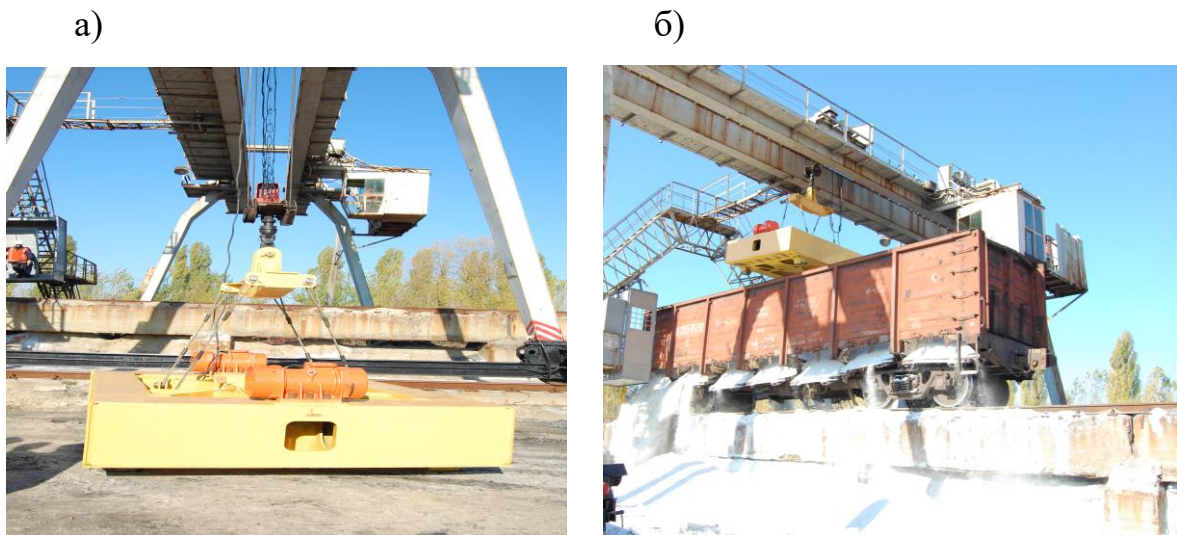


Рисунок 2.8 – Вібраційна машина для доочищення вагона від залишків вантажу: у вільному стані (а); розміщення на кузові (б)

Прикладом збудовуючої сили також може бути удар грейферного ковша по кузову вагона при його розвантаженні (рисунок 2.9).

Важливо сказати, що збудовуючі сили можуть завдаватися і у вигляді трохіди – кривої, яку описує у вертикальній площині точка А, що знаходиться на колі радіусом R (рисунок 2.10). Прикладом може бути рух морської хвилі [2–4].

а)



б)



Рисунок 2.9 – Технологія грейферного розвантаження напіввагонів в умовах морського порту: розвантажувальний майданчик (а); взаємодія грейфера з напіввагоном (б)

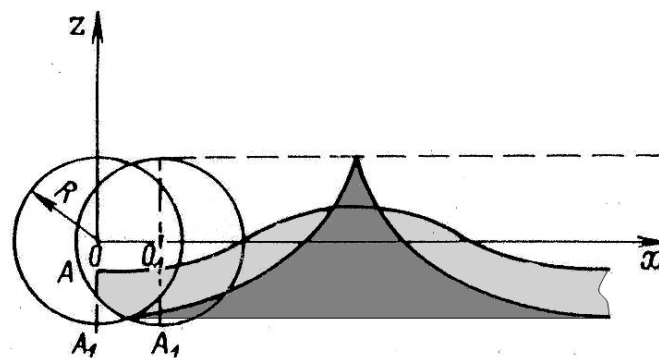


Рисунок 2.10 – Трохоїдальний характер хвильового утворення

Профіль трохіодальної хвилі описується рівняннями в параметричному вигляді

$$\begin{aligned} x &= a + Re^{kb} \sin(ka + \omega t) \\ z &= b - Re^{kb} \cos(ka + \omega t) \end{aligned} \quad , \quad (2.11)$$

де  $a$  та  $b$  – горизонтальна та вертикальна координати центра траєкторії, за якою обертається частинка, що має на певний час координати  $x$  та  $z$ ;



$R$  – радіус траєкторії, за якою здійснюється обертання частинки, [м];

$\omega$  – частота збурювання, [с<sup>-1</sup>];

$k$  – частота траєкторії збурюючого зусилля.

Що стосується вагона, то ці сили можуть мати місце при залізнично-поромних перевезеннях (рисунок 2.11) не тільки в Україні, а і за її межами [5].

а)



б)



а) залізничний пором «Герої Одеси»; б) залізничний пором «Петровськ»

Рисунок 2.11 – Залізнично-поромні перевезення вагонів

Як приклад дії зовнішніх збурюючих сил можна навести сили, що передаються вагону через колісні пари внаслідок нерівності поверхні кочення рейок і дії відцентрових сил.

У більшості механічних систем виникають сили змішаного характеру, що являють собою одночасну дію зовнішніх, відновлювальних і дисипативних сил [1]:

$$F^0(q) + R^0(\dot{q}) + P(t) = 0. \quad (2.12)$$

Як приклад маятникової параметричної системи розглянемо систему, зображену на рисунку 2.12. Коли маятник відхиляється, на вантаж, з одного боку, діє сила тяжіння  $mg$ , а з іншого - зовнішня сила  $P$ , що змушує систему коливатися. Внаслідок цього виникає силовий момент  $M$ , що діє відносно шарнірно-рухомої опори  $A$  маятника і може бути записаний у такому вигляді:

$$M = -(mg + P_0 \sin \omega t) \cdot l \cdot \sin \varphi. \quad (2.13)$$

Силовий момент  $M$  залежить від кута  $\varphi$ , на який відхиляється маятник, і часу  $t$ , тобто  $M(\varphi, t)$ , при цьому особливістю виразу є те, що неможливо чітко виділити його відновлювальну частину виразу  $M_1(\varphi)$  і збурюючу частину виразу  $M_2(t)$ .

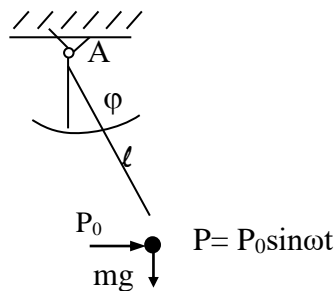


Рисунок 2.12 – Приклад маятникової параметричної системи

## Питання для самоконтролю до теми 2

- 1 Визначення позиційних сил.
- 2 Скільки ступенів вільності має тіло в декартовій системі координат?
- 3 Скільки ступенів вільності може мати тіло, на яке не накладені жорсткі зв'язки?

- 4 Як зміниться жорсткість системи при збільшенні навантаження на неї?
- 5 Що таке ступінь вільності динамічної системи?
- 6 Визначення сил інерції.
- 7 Визначення сил пружності.
- 8 Що таке жорсткість пружного елемента?
- 9 Яку силу треба прикласти до циліндричної пружини жорсткістю  $c = 2 \text{ кН/мм}$ , щоби її прогин склав  $5 \text{ мм}$ ?
- 10 Що таке гнучкість пружного елемента?
- 11 Яку розмірність має жорсткість пружного елемента?
- 12 Яку розмірність має гнучкість пружного елемента?
- 13 Який напрямок мають дисипативні сили в ресорному підвішуванні?
- 14 Які пристрої називають демпферами і для чого вони призначені?
- 15 Як залежить міра інертності від маси тіла?
- 16 Яку розмірність має коефіцієнт в'язкого опору  $\beta$ ?
- 17 Гармонійні коливання. Їхні особливості.
- 18 Визначення узагальненої координати системи.

### **3 Вільні коливання. Лінійні системи з одним ступенем вільності без непружного опору**

#### План лекції

Вільні коливання. Лінійні системи з одним ступенем вільності без непружних опорів. Комбінації конструкційних рішень розташування пружин у підвішуванні. Гнучкість системи.

*Вільні коливання* – це коливання механічної системи без зовнішньої збурюючої сили, тобто коливання системи, що на початку руху мала початкові швидкість і координату.

При вільних коливаннях система рухається з періодичним зміщенням відносно початкового положення і зміною потенціальної та кінетичної енергії. При цьому, якщо існує деяке загасання або відбувається поступова втрата енергії, амплітуда коливань зменшується з часом і, нарешті, система переходить у стан рівноваги. Вільні коливання можуть відбуватися в різних системах, наприклад маятниках, пружинах, гойдалках та інших механічних системах.

Як приклади для дослідження цього явища розглянемо одномасові системи, що моделюють сприйняття повздовжніх і вертикальних сил [1, 6].

*Одномасова система* – це механічна система, що складається з однієї матеріальної точки або одного тіла і має одну масу. Одномасові системи є досить простими для дослідження та аналізу і застосовуються в багатьох галузях. Один з прикладів одномасової системи – це маятник.

*Маятник* – це одномасова система, що складається з деякої маси, підвішеної до фіксованої точки. Маятник коливається вздовж вертикальної або горизонтальної лінії і може бути використаний для дослідження коливальних рухів.

Прикладом у цьому випадку може служити робота автозчепного пристрою вагона (рисунок 3.1) при розтягуванні (рисунок 3.1, а) і кузова вантажного вагона на ресорах (рисунок 3.1, б), а також їхнє подальше відновлення. Тут  $m$  – маса системи, [кг];  $c$  – жорсткість пружних елементів, виконаних у вигляді витих циліндричних пружин, [Н/м];  $P_x(t)$  і  $P_z(t)$  – відповідно зовнішня збурююча сила, прикладена у напрямі осей  $x$  і  $z$ ;  $-cx$  і  $-cz$  – відповідно відновлювальна (пружна) сила пружин.

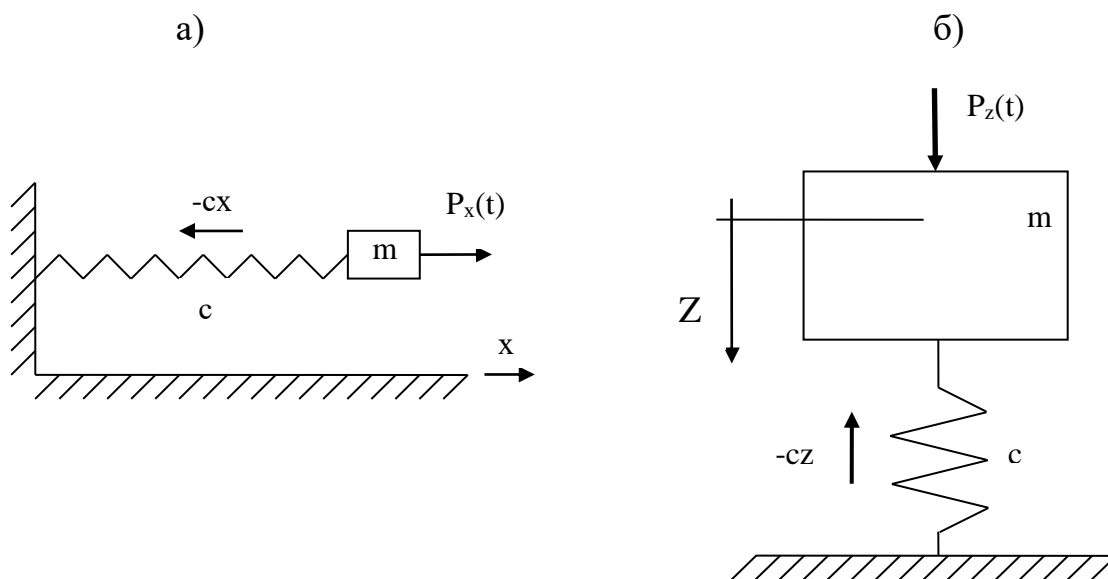


Рисунок 3.1 – Схеми одномасових систем з одним ступенем вільності без дисипації енергії з урахуванням передачі повздовжніх (а) і вертикальних сил (б)

Ураховуємо, що збурююча сила  $P_i(t)$  відсутня, але вже здійснено порушення стану рівноваги. Як видно тепер, система подаватиметься без повторних прикладань  $P_i(t)$ . Рухи, що при цьому виникли, – вільні коливання. Їх також називають власними коливаннями системи.

*Власні коливання* – це коливання системи, що виникають без зовнішньої збурюючої сили, тобто коливання відбуваються за рахунок внутрішніх сил системи. Коливання, що виникають у результаті взаємодії

системи з зовнішнім середовищем, називаються вимушеними коливаннями.

*Вимушені коливання* – це коливання механічної системи, що виникають під дією зовнішньої збурюючої сили, яка працює з заданою частотою та амплітудою. Якщо ця сила діє періодично з заданою частотою, то в системі виникає вимушений коливальний рух, що відрізняється від вільних коливань, що виникають у системі без зовнішнього впливу.

Власні коливання можуть мати різні форми, наприклад механічні коливання системи з пружними елементами, електричні коливання в коливальному контурі або коливання хвиль у рідині чи газі.

Причиною виникнення власних коливань є наявність внутрішньої енергії в системі, що може бути збережена в пружних елементах, механічних зв'язках, електричних конденсаторах або індуктивностях. Під час власних коливань система перетворює свою потенціальну та кінетичну енергії одна в одну і назад. Від частоти власних коливань залежить поведінка системи, яка може бути аперіодичною, періодичною або досить складною.

На початку на систему накладені умови  $x_0$ ,  $z_0$  – початкове переміщення,  $v_0$  – початкова швидкість.

Рівноважне положення таких систем характеризується початковими умовами

$$x(z) = x_0(z_0); v_{x(z)} = v_0 \text{ при } t=0.$$

Складемо рівняння руху таких систем.

$$m\ddot{x} = \sum x_i = P_x; m\ddot{z} = \sum z_i = P_z, \quad (3.1)$$

де  $P_x$  і  $P_z$  – відповідно відновлювальні сили (сили пружності пружин).

$$P_x = -cx; P_z = -cz. \quad (3.2)$$

Тоді очевидно, що

$$m\ddot{x} + cx = 0; m\ddot{z} + cz = 0, \quad (3.3)$$

або після нескладних перетворень

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0; \quad \ddot{z} + \frac{c}{m}z = 0; \quad (3.4)$$

$$\ddot{x} + p^2x = 0; \quad \ddot{z} + v^2z = 0,$$

де  $p, v = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}$ , – частоти вільних коливань системи, [Гц\*].

Вираз (3.4) являє собою звичайні лінійні диференціальні рівняння другого порядку (однорідні з постійними коефіцієнтами при незалежних  $x$  і  $z$ ).

Розв'язки цих рівнянь знаходять у вигляді (з урахуванням довільних постійних  $c_1$  і  $c_2$ ) ( $c_1 = x_0(z_0)$  й  $c_2 = \frac{\dot{x}_0}{v}(\frac{\dot{z}_0}{v})$ ):

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{v} \sin pt, \quad z = z_0 \cos vt + \frac{\dot{z}_0}{v} \sin vt. \quad (3.5)$$

Вирази (3.5) – це рівняння руху системи, розглянутих на рисунку 3.1.

В іншій, еквівалентній формі

$$x = A \sin(pt + \alpha), \quad z = B \sin(vt + \beta), \quad (3.6)$$

де  $A$  і  $B$  – амплітуди\*\* коливань, [м];

$\alpha$  і  $\beta$  – початкова фаза або величина положення системи в початковий момент часу  $t$ .

---

\*1 Гц (Герц (Hertz)) на честь німецького фізика Г. Р. Герца. Тобто частота періодичного процесу, при якій за час  $t = 1$  с відбувається один цикл процесу.

\*\* Амплітуда (от лат. Amplitudo – величина) - найбільше відхилення від нульового значення величини, що коливається.

Амплітуда коливального процесу

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}}{p}\right)^2}; \quad B = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}}{v}\right)^2}; \quad (3.7)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{px_0}{\dot{x}_0}\right), \quad \beta = \arctg\left(\frac{vz_0}{\dot{z}_0}\right), \quad (3.8)$$

де  $\dot{x}_0$  і  $\dot{z}_0$  – перші похідні від переміщення за часом або швидкістю руху, [м/с].

Окрім власних частот коливань цих систем  $p$  і  $v$ , залежних лише від їхніх фізичних властивостей, коливальний рух характеризується лінійною і круговою частотами коливань, тобто кількістю коливань, що здійснюються системою в одиницю часу – у цьому випадку за  $2\pi$  с.

$$p^* = \frac{1}{T}, \quad v^* = \frac{1}{T}; \quad (3.9)$$

$$\omega_1 = 2\pi p^* = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega_2 = 2\pi v^* = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.10)$$

Час, за який здійснюється одне повне коливання, – період [с].

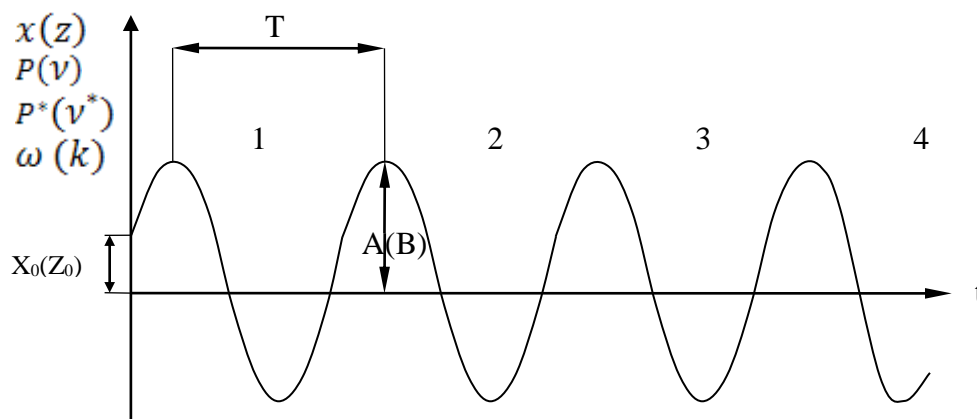
Власна або циклічна частота і період вільних коливань точок залежать лише від маси та жорсткості, що характеризує відновлювальну силу і не залежать від початкових умов.

Період  $T_i$  збільшується при збільшенні маси  $m_i$  і зменшується при збільшенні  $c_i$ ; у свою чергу частота  $p, v$  зменшується при збільшенні маси  $m_i$  точки і збільшується при зростанні  $c_i$ .

Графік, що відображує характер руху точок системи при вільних коливаннях систем, поданий на рисунку 3.2. Це гармонійні коливання з



вказаними частотами, що є кратними основній частоті першої гармоніки (характеру хвилі).



1, 2, 3, 4 – нумерація хвиль процесу

Рисунок 3.2 – Графік вільних коливань точок системи

Для загального випадку диференціальне рівняння коливального руху лінійної системи з одним ступенем вільності без непружних опорів (тертя у зв'язках) запишемо як

$$a\ddot{q} = -cq; a\ddot{q} + cq = 0, \quad (3.11)$$

де  $q$  – узагальнена координата;

$a$  – коефіцієнт інерції;

$c$  – узагальнений коефіцієнт жорсткості.

Тоді власна частота за аналогією з виразом (3.4) запишеться як

$$P = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (3.12)$$

Оскільки ресорне підвішування вагонів утворене декількома пружинами, а також їхнім конструкційним поєднанням, то доцільно розглянути такі приклади їхніх розташувань (рисунок 3.3):

а) послідовне розташування (рисунок 3.3, а):

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_2)} ; \quad (3.13)$$

б) паралельне розташування (рисунок 3.3, б):

$$C = C_1 + C_2 ; \quad (3.14)$$

в) система змішаного типу (рисунок 3.3, в).

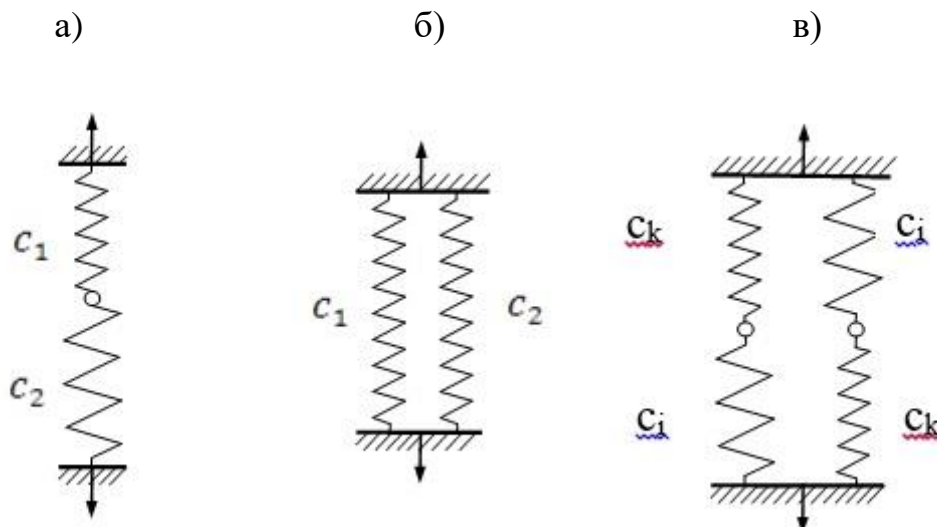


Рисунок 3.3 – Комбінації конструкційних рішень розташування пружин у підвішуванні

Визначимо коефіцієнт жорсткості для комбінованої системи:

$$C_1 = \frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)}; \quad (3.15)$$

$$C_2 = \frac{C_k \cdot C_i}{(C_k + C_i)}; \quad (3.16)$$

$$C_1 + C_2 = \frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} + \frac{C_k \cdot C_i}{(C_k + C_i)};$$

$$C_1 + C_2 = 2 \left[ \frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} \right];$$

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_2)};$$

$$C = \frac{\left( \frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} \cdot \frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} \right)}{\left( \frac{2C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} \right)}.$$

У кінцевому вигляді маємо

$$C = \frac{C_i \cdot C_k}{2 \cdot (C_i + C_k)}. \quad (3.17)$$

Для пружного елемента, навантаженого масою  $m$  (рисунок 3.1, б), рівняння рівноваги

$$mg - cf_{cm} = 0; \quad cf_{cm} = mg, \quad (3.18)$$

де  $f_{cm}$  – статичний прогин пружини, [м].

Коефіцієнт жорсткості

$$c = \frac{mg}{f_{cm}} = \frac{p}{f_{cm}}, \quad (3.19)$$

тобто величина сили, що викликала одиничне переміщення, [Н/м].

Величина, обернена жорсткості, – *гнучкість*

$$\lambda = \frac{1}{c} = \frac{f_{cm}}{p}, \quad (3.20)$$

тобто величина переміщення, викликаного одиничною силою, [Н/м].

### Питання для самоконтролю до теми 3

- 1 Визначення вільних коливань.
- 2 Що розуміють під ступенем вільності коливальної системи?
- 3 Яке визначення має частота власних коливань?
- 4 Яке визначення має період власних коливань?
- 5 Яке визначення має амплітуда власних коливань?
- 6 Що розуміють під гнучкістю і яку вона має розмірність?
- 7 Від яких параметрів залежать циклічна частота і період вільних коливань?
- 8 Як можна визначити жорсткість зв'язку при послідовному з'єднанні елементів?
- 9 Як можна визначити жорсткість зв'язку при паралельному з'єднанні елементів?
- 10 Як можна визначити жорсткість зв'язку при змішаному з'єднанні елементів?

#### 4 Вільні коливання при в'язкому опорі (вплив опору на вільні коливання лінійних систем з одним ступенем вільності)

##### План лекції

Вільні коливання при в'язкому опорі. Залежність сил демпфірування від переміщення. Силові характеристики систем з в'язким лінійним демпфером. Логарифмічний декремент загасання. Коливання вантажу на пружній підвісці. Методи складання диференціальних рівнянь руху.

Природа виникнення сил опору така [3]. Розглянемо систему з коливаннями, викликаними одноразовим зовнішнім збуренням (рисунок 4.1).

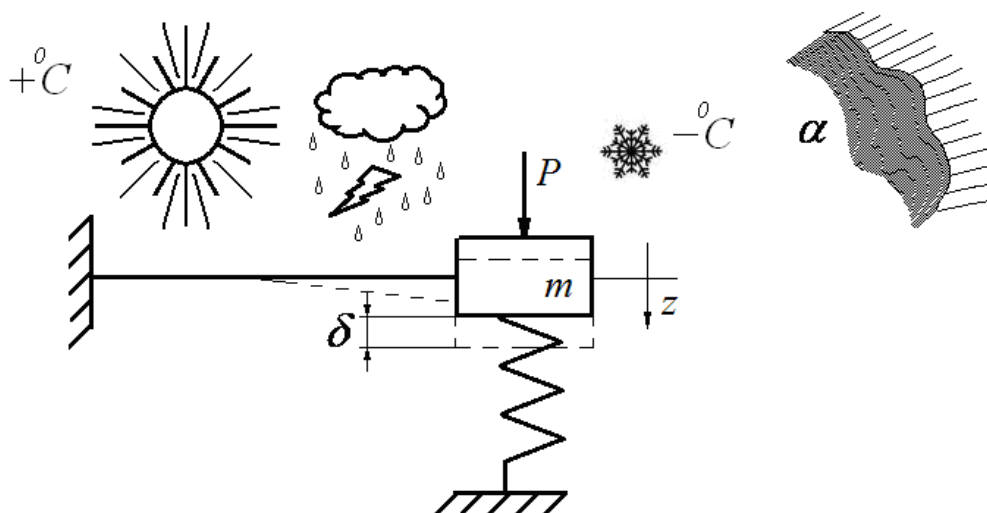


Рисунок 4.1 – Схема коливального руху системи

Після прикладення сили  $P$  виникають вільні коливання системи, що з часом загасають, причинами чого є розвинення дисипативних сил  $F(t)$ , крім сил пружності  $|cz|$ , тобто сил непружного опору, які розсіюють енергію коливальної системи, виведеної зі стану рівноваги. Ці сили пов'язані з незбійним тертям у кінематичних парах, тертям з середовищем  $\alpha$ , а також внутрішнім тертям у матеріалі конструкції, що коливається (на

атомічному рівні кристалічної решітки матеріалу). На здолання непружних опорів безперервно у зворотному напрямку витрачається робота, внаслідок чого повільно загасає загальний запас енергії та зменшуються розмахи коливань, амплітуда з протіканням часу, тобто  $A \rightarrow 0$  (рисунок 4.2).

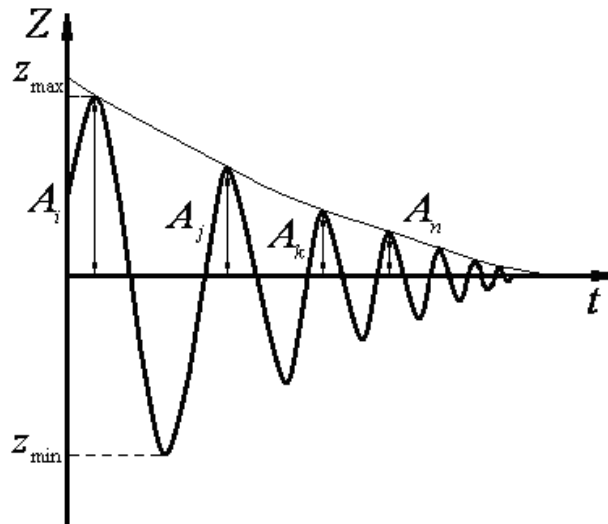


Рисунок 4.2 – Вільні коливання системи з характером загасання в часі

Якщо визначено, що опір прямо пропорційний першому ступеню швидкості, тоді сила опору (зокрема тертя) запишеться як

$$R = -k\dot{z}, \quad (4.1)$$

де  $k$  – емпіричний коефіцієнт пропорційності, який визначається дослідним шляхом.

Як приклад розглянемо роботу простого механічного осцилятора коливального контуру (рисунок 4.3).

Поршень призначений для створення демпфірування (пневморесори). Сила демпфірування  $R$  визначатиметься як

$$R = -k(d\dot{z}). \quad (4.2)$$

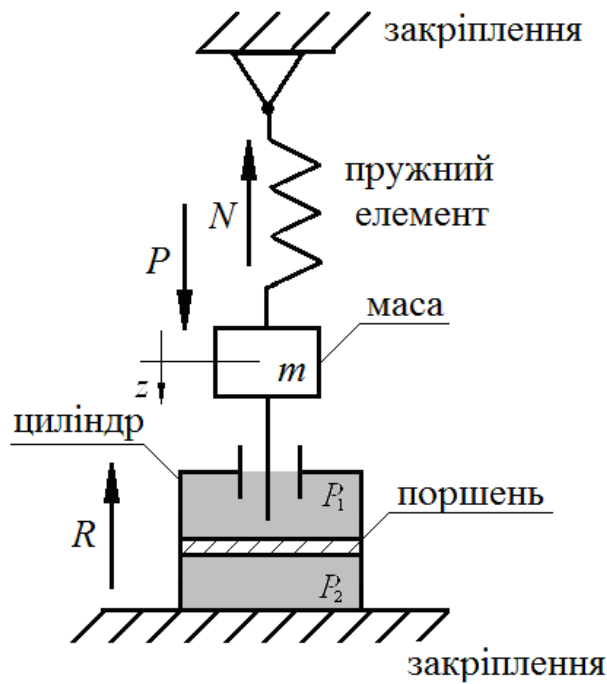


Рисунок 4.3 – Схема роботи механічного осцилятора

Сила демпфірування спрямована на гальмування руху. З урахуванням сили демпфірування, умова рівноваги набуває вигляду

$$F + R + N = 0 \quad (4.3)$$

або

$$m\ddot{z} + d\dot{z} + cz = 0. \quad (4.4)$$

На відміну від простої системи, позбавленої демпфірування (наприклад пружина ресорного підвішування (механічної частини візка)),

$$m\ddot{z} + cz = 0. \quad (4.5)$$

У кожному випадку демпфірувальний вплив є функцією швидкості, позначимо її через  $g(z') = a$ , сили опору  $f(z) = \frac{cz}{m}$  (4.4) після ділення його членів на коефіцієнт інерції  $m$ . Рівняння руху осцилятора

$$\ddot{z} + g(\dot{z}) + f(z) = 0 \quad (4.6)$$

При тісному зв'язку сил демпфірування та відновлювальних сил у рівнянні руху раціонально записати

$$\ddot{z} + f(z, \dot{z}) = 0. \quad (4.7)$$

Розуміється не тільки лінійне уявлення сил опору  $R$ , а і змішане, яке дозволяє розв'язувати більш складні задачі у вигляді

$$R = -k|\mathcal{G}|^{n-1}, \quad (4.8)$$

де  $n$  – також постійна ступеня, яка визначається експериментальним шляхом.

Наприклад,

при  $n = 1$ ,  $R = -k|\mathcal{G}|^{n-1} = -k\mathcal{G} \Rightarrow R \approx \mathcal{G}$  і характеристика тертя – пряма (рисунок 4.4, а);

$n = 0$ ,  $R = -k|\mathcal{G}|^{n-1} = -k\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -k$  – кулонове тертя і характеристика тертя – гіпербола (рисунок 4.4, б);

$n = 2$ ,  $R = -k|\mathcal{G}|^{2-1} = -k\mathcal{G}^2$  – квадратичний опір і характеристика тертя парабола (рисунок 4.4, в).

На рисунку 4.4, г наведена комбінована характеристика сухого тертя (пряма) з уточненням (пунктирна крива), за законом Амонтона–Кулона, який визначає залежність сили тертя між двома поверхнями від сили натиску і коефіцієнта тертя. За цим законом, сила тертя пропорційна силі натиску і коефіцієнту тертя.



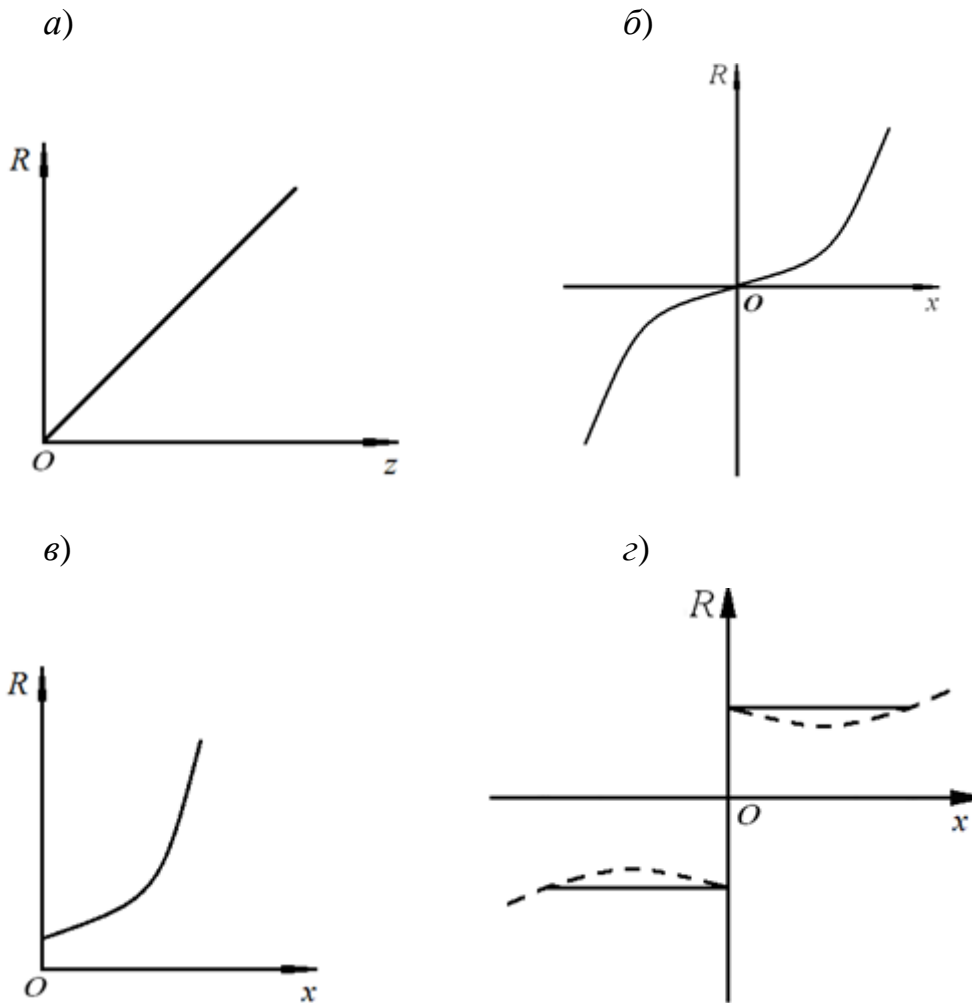


Рисунок 4.4 – Залежність сил демпфірування (дисипації) від переміщення точок системи: пряма (а); гіпербола (б); парабола (в); комбінована (г)

Для механічних систем із декількома ступенями вільності формулу (4.8) раціонально записати у матричному вигляді

$$R^0 = -B\dot{q};$$

$$R^0 = \begin{Bmatrix} R_1^0 \\ R_2^0 \\ R_n^0 \end{Bmatrix}; \quad \dot{q} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}; \quad B = \begin{Bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{Bmatrix}, \quad (4.9)$$

де  $R^0$  – вектор узагальнених сил опору;  
 $q$  – вектор узагальнених швидкостей;  
 $B$  – матриця коефіцієнтів опору;  
 $A$  – амплітуда переміщень.

При в'язкому терті в коливальній системі, що обумовлене наявністю в ресорному підвішуванні в'язкого лінійного демпфера, сили непружного опору  $R$ , природно, залежать від швидкості, тобто від частоти процесу деформування.

Це говорить про суттєву залежність площі петлі гістерезису\* від швидкості руху (рисунок 4.5).

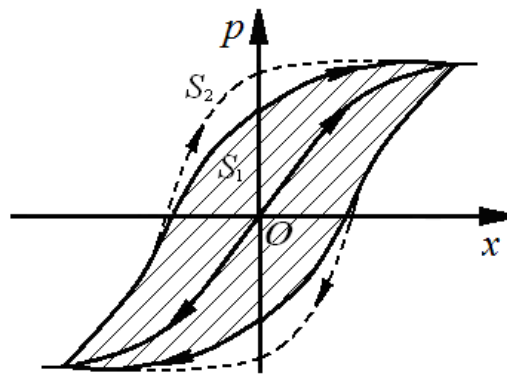


Рисунок 4.5 – Гілки та петлі гістерезису з різними характеристиками запізнення ( $S_1, S_2$  – відповідно площі петель гістерезисних явищ)

Петля гістерезису – це графічне зображення залежності напруження від деформації в матеріалах, які зазнають циклічних навантажень. Петля гістерезису може бути використана для опису поведінки різних матеріалів, таких як метали, пластмаси, гума тощо, під час повторного навантаження і розвантаження.

---

\* *hysteresis* (від гр.) – відставання, запізнення при змінненні фізичної величини, що характеризує стан речовини.

Петля гістерезису складається з двох гілок - гілки насичення при збільшенні деформації і гілки роздуття при зменшенні деформації. Різниця між напруженнями на кінцях цих гілок називається гістерезисною втратою енергії, яка проявляється у вигляді тепла, втраченого матеріалом під час циклічних навантажень. Форма і розмір петлі гістерезису залежать від типу матеріалу, його складу, структури та інших факторів. Петля гістерезису, навіть при існуванні малих амплітуд, відхиляється від відомого закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4.10)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу конструкції (для сталей, що застосовуються у вагонобудуванні,  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па).

Площу петлі гістерезису можна визначити за формулою, використововуваною для визначення площі петлі гістерезису в магнітних матеріалах:

$$\psi = kA^{n+1}, \quad (4.11)$$

де  $k_n$  – const, які залежать від інтервалу і типу конструкції.

Причини гістерезисних явищ (рисунок 4.5) також криються в механічних системах, в опорах і нерухомих з'єднаннях (при застосуванні нарізних, зварних, болтових та ін.).

Розглянемо приклад системи з в'язким лінійним демпфером, якій властива пропорційність поміж силами зв'язку опору та швидкостями їхньої зміни (рисунок 4.6).

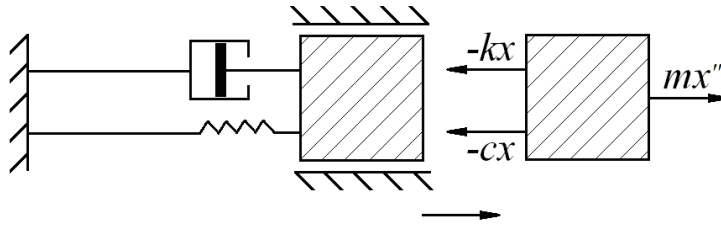


Рисунок 4.6 – Система з в'язким лінійним демпфером

Складемо диференціальні рівняння руху системи:

$$m\ddot{x} + cx + k\dot{x} = 0 \quad \text{або} \quad m\ddot{x} = -cx - k\dot{x}, \quad (4.12)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x + \frac{k}{m}\dot{x} = 0, \quad \text{де} \quad \frac{c}{m} = p^2,$$

позначимо  $\frac{k}{2m} = n$ ,

де  $n$  – показник в'язкості системи, який не є показником ступеня згідно з виразом (4.10).

$$\frac{c}{m} = p^2 \Rightarrow \ddot{x} + p^2x + 2n\dot{x} = 0;$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0. \quad (4.13)$$

Зазвичай необхідно намагатися проектувати ресорне підвішування, щоб виконувалося переважання квадрата частоти над в'язкістю системи, іншими словами, система не була передемпфрованою, а демпфірування сприяло змінному (поступовому) загасанню вільних коливань при великих амплітуд  $A$ .

Отже,

$$p = p^2 > n^2, \quad (4.14)$$

що характеризує випадок слабого демпфірування.

Загальний розв'язок рівняння (4.13) має вигляд

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2}t + \alpha), \quad (4.15)$$

де

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\mathcal{G}_0}{p}\right)^2} \text{ – амплітуда коливань;}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{px_0}{\mathcal{G}_0}\right) \text{ – фаза коливань.}$$

$$\text{Відомо, що } A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad c_1 = \frac{\mathcal{G}_0}{p},$$

$$c_2 = x_0 \Rightarrow x = c_1 \sin pt + c_2 \cos pt,$$

$$x = A \sin(pt + \alpha).$$

Для цього випадку маємо кінцеві вирази

$$A = \frac{\sqrt{x_0^2 + (\mathcal{G}_0 + nx_0)^2}}{(p^2 - n^2)}, \quad (4.16)$$

$$\alpha = \arctg\left[\frac{(x_0 \sqrt{p^2 - n^2})}{(\mathcal{G}_0 + nx_0)}\right], \quad (4.17)$$

або згідно з розв'язанням у попередній формі для вільних коливань без урахування опору гасника коливань

$$x = x_0 \cos pt + \left( \frac{\mathcal{G}_0}{p} \right) \sin pt. \quad (4.18)$$

Рівняння (4.15) остаточно запишеться як

$$x = e^{-nt} \left[ x_0 \cos \sqrt{p^2 - n^2} t + (\mathcal{G}_0 + nx_0) \sin \frac{\sqrt{p^2 - n^2} t}{\sqrt{p^2 - n^2}} \right]. \quad (4.19)$$

На рисунку 4.7 наведена силова характеристика для системи з одним ступенем вільності з в'язким лінійним демпфером.

Відомо, що складова  $F$  відповідає закону Гука, а складова  $R$  – напряму деформування, «+» – завантаження; «-» – розвантаження.

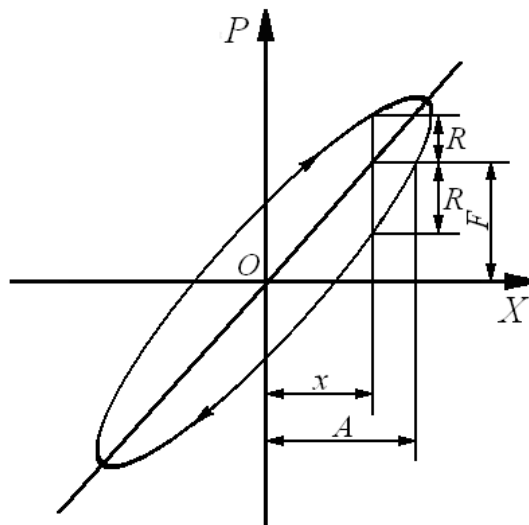
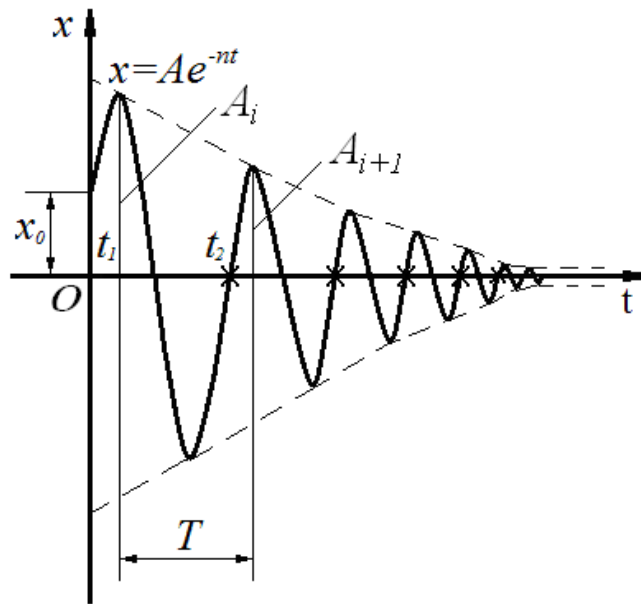


Рисунок 4.7 – Силова характеристика системи з в'язким лінійним демпфером ( $P$  – сили опору;  $F$  – лінійна складова  $P$ ;  $R$  – непружна складова  $P$ ;  $A$  – амплітуда)

На рисунку 4.8 наведено графік загасання коливань, що характеризує роботу системи з розміщенням різних в'язких демпферів.



$t_i$  – час максимального відхилення

Рисунок 4.8 – Графік (характер) коливального процесу

Частота коливального процесу для гармонійних коливань може бути визначена за формулою

$$p_z^* = \sqrt{p^2 - n^2} . \quad (4.20)$$

Вирази для амплітуд послідовних хвиль циклу коливань

$$A_1 = Ae^{-nt}; \quad A_2 = Ae^{-n(t_1+T)}; \quad A_3 = Ae^{-n(t_1+2T)}, \quad (4.21)$$

де  $e^{-nt}$  – експоненціальна (показникова) функція, що за наближенням характеризує загасання коливального процесу.

Період (не періодичність, а тривалість циклу коливань) визначається як

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}} - a;$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \dots = e^{nT} = \text{const}.$$

З урахуванням характерної геометричної прогресії при будь-якому  $i$ , а також відношенні послідовних циклових значень амплітуд переміщень маємо

$$nT = \ln\left(\frac{A_1}{A_{i+1}}\right), \quad (4.22)$$

де  $nT$  – логарифмічний декремент загасання коливань (характеристика дисипативних властивостей коливальної системи, швидкості загасання).

Тоді

$$\delta = nT. \quad (4.23)$$

Робота, здійснювана силою тертя  $F_{\text{тр}}$  за час  $T$ , – це втрати енергії за один новий цикл. Відношення цих втрат до середнього значення енергії за цикл характеризує швидкість загасання коливань та імітується коефіцієнтом поглинання:

$$\varphi = 2nT = 2\delta. \quad (4.24)$$

Як видно, це вдвічі більше за  $\delta$ .



Значення  $\varphi$  та  $\delta$  визначаються конструкцією, матеріалом та іншими власними властивостями коливальної системи.

Також разом з  $\delta$  та  $\varphi$  як характеристика дисипативних властивостей використовують величину  $\gamma$  – коефіцієнт втрат або коефіцієнт непружного опору, що визначається за формулою

$$\gamma = \frac{\delta}{\pi}. \quad (4.25)$$

Системи з комбінованими варіантами пружного та в'язкого опору дозволяють отримати належні динамічні характеристики при русі вагонів і локомотивів у складі єдиного поїзда і тому відіграють суттєву роль у конструкції ресорного підвішування екіпажної частини рухомого складу.

#### *Методи складання диференціальних рівнянь руху*

Існують різні методи складання диференціальних рівнянь руху залежно від конкретної задачі. Найбільш поширеними методами є:

- метод рівнянь енергії: застосовується для систем з відомими законами збереження енергії;
- метод рівнянь руху: застосовується для систем з визначеними рівняннями руху окремих частин системи;
- метод варіаційних рівнянь: застосовується для систем з визначеними відомостями про кінцеві стани системи;
- метод методу Больцмана: застосовується для опису систем з великою кількістю частинок, наприклад газів;
- метод рівнянь Лагранжа: застосовується для систем зі визначеними параметрами системи та обмеженнями на рух системи в цілому.

Ці методи можуть застосовуватися як окремо, так і в поєднанні один з одним залежно від складності задачі.

Є система (рисунок 4.9), що передає зовнішнє збурення  $X$  (сила бере участь у переміщенні) [3].

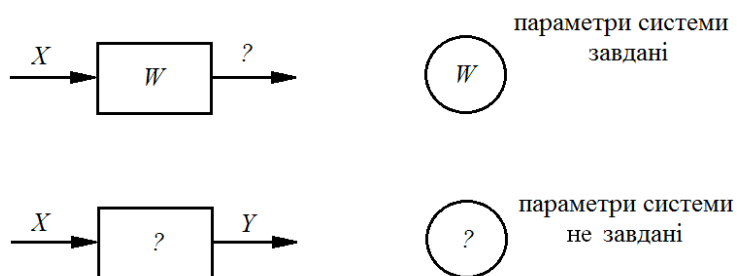


Рисунок 4.9 – Варіанти із різними параметрами систем

За другим основним законом динаміки, а також розділом теоретичної механіки, рівняння руху  $u$  прагне до  $min$ , де  $u$  – вихідний параметр (відомий), необхідно визначити задані параметри системи.

1 Метод, заснований на використанні рівняння Ж. Л. Лагранжа (1736–1813).

Метод Лагранжа для складання диференціальних рівнянь руху полягає в записі кінематичних характеристик механічної системи (координат, швидкостей і прискорень) через змінні, що не залежать від часу, тобто через узагальнені координати. Після цього використовують принцип віртуальної роботи для отримання рівнянь руху системи, які містять лише похідні в узагальнених координатах та інші величини, що можна визначити як функції узагальнених координат і їхніх похідних.

Цей метод є корисним для складання складних диференціальних рівнянь руху, оскільки дозволяє зменшити кількість змінних, що необхідно розглядати, і покращити структуру отримуваних рівнянь. Крім того, метод

Лагранжа є основою для формалізованого опису руху в теоріях керування, оптимізації та руху роботів.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{dq_i} \right) + \frac{dU}{dq_i} + \frac{d\Phi}{dq_i} = F_i. \quad (4.26)$$

Із загального рівняння динаміки

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^n = 0,$$

де  $\sum A$  – сума активних і реактивних сил, що діють на систему.

З нього отримуємо принцип Даламбера-Лагранжа – один з основних принципів теорії механіки, який дозволяє отримувати рівняння руху механічної системи. За цим принципом, рух механічної системи описується як рух з точки зору принципу мінімальної дії (принципу Лагранжа), тобто шляхом мінімізації різниці кінетичної і потенціальної енергії системи (різниці між роботою зовнішніх сил і зміною енергії внутрішніх сил системи) за час руху між двома точками.

За принципом Даламбера-Лагранжа, рух механічної системи описується диференціальним рівнянням другого порядку, яке називається рівнянням Лагранжа. При русі системи з ідеальними зв'язками в кожний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і всіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнюватиме нулю:

$$\sum [(F_{kx}^a + F_{kx}^n) \delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^n) \delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^n) \delta z_k] = 0. \quad (4.27)$$

Ці два рівняння дозволяють скласти диференціальні рівняння руху будь-якої механічної системи.

За формулою (4.26),

$$T - \text{кінетична енергія системи, } T = \sum \frac{mk \dot{q}_k^2}{2};$$

$$U - \text{потенційна енергія системи, } U = \sum \frac{cz^2}{2};$$

$$\Phi - \text{функція дисипативних сил - розсіювання, } \Phi = cz + \beta \dot{z};$$

$q_i$  - узагальнені координати (кількість узагальнених координат дорівнює кількості ступенів вільності системи), [м];

$\dot{q}_i$  - узагальнена швидкість, [м/с];

$F_i$  - узагальнена сила (активна), [Н];

Кількість рівнянь, що входять до системи (4.26), визначається кількістю ступенів вільності механічної системи.

Основна задача динаміки в узагальнених координатах: знаючи  $F_i, F_j, F_r$  та початкові умови, знайти закон руху у вигляді визначеної узагальненої координати, як  $f(t)$ .

$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), q_s = f_s(t)$  - кінематичне рівняння руху системи в узагальнених координатах.  $T$  залежить від узагальненої швидкості  $\dot{q}_1$ , що змінюється на  $\ddot{q}_1$  при диференціюванні за  $t$  - лівих частин системи.

З цього випливає, що рівняння Лагранжа - звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно  $q_1, q_2, \dots, q_g$ ;  $T = -U$ .

Для складання диференціальних рівнянь руху механічної системи необхідним є:

- встановити кількість ступенів її вільності та обрати узагальнені координати;

- скласти розрахункову схему (з зображенням передачі активних сил);
- визначити узагальнені сили  $Q_i$ :  $Q_i(j,k) = \sum F_k \frac{dr_k}{dq_1}$ , для  $i, j, r$  – координат з правильним напрямком узагальнених переміщень;
- визначити кінетичну енергію в абсолютному русі та виразити її через  $q_1$  та  $\dot{q}_1$ ;
- визначити похідні від кінетичної енергії за  $\dot{q}_1$  та  $q_1$ , підставити їх до рівняння (4.26).

З отриманих рівнянь, якщо відомі величини активних сил і початкові умови завдані, інтегруванням можна знайти закон руху.

2 Метод, заснований на використанні принципу Даламбера: сума всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, дорівнюють нулю.

Сила інерції точки (даламберова) визначається як

$$F_k^n = -m_k \omega_k,$$

$$F_k^e + F_k^i + F_k^n = 0. \quad (4.28)$$

За другим законом Ньютона,

$$m_k \omega_k = F_k^e + F_k^i,$$

де  $m\omega = F^n \dots$ ,

Принцип Даламбера та другий закон Ньютона еквівалентні для визначення умов за прикладенням до системи сил інерції, система буде в рівновазі, що дозволить використовувати до неї рівняння статички, а не динаміки.

Перевага принципу – можливість використання добре відомих рівнянь рівноваги.

На підставі принципів можливих переміщень Лагранжа та Даламбера складається принцип Даламбера-Лагранжа: при русі системи з ідеальними зв'язками в кожний певний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнюватиме нулю.

Приклад запису диференціальних рівнянь.

Для системи ресорного підвішування з одним ступенем вільності (рисунок 1.2, б), спочатку відкинемо зовнішні зв'язки та замінимо їх внутрішніми реакціями (рисунок 4.10):

$$m\ddot{z} = \sum p_z . \quad (4.29)$$

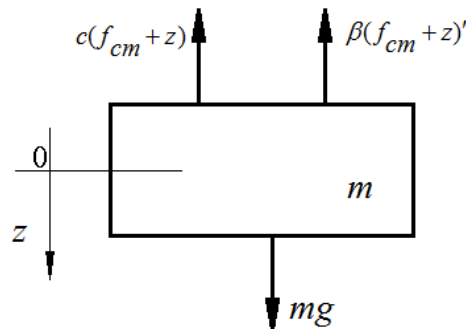


Рисунок 4.10 – Приклад системи ресорного підвішування

Записуючи суму проєкцій відносно вертикальної осі за принципом кінетостатики та подальші послідовні математичні перетворення, маємо

$$\sum p_z + F_{\text{опору}} + p = 0. \quad (4.30)$$

$$cf_{cm} = Q; Q = mg; cf_{cm} = mg;$$

$$\beta z' = \beta(f_{cm} + z)';$$

$$m\ddot{z} = mg - c(f_{cm} + z) - \beta\dot{z};$$

$$m\ddot{z} = Q - Q - cz - \beta\dot{z};$$

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + cz = 0;$$

$$\sum p_z + F_{опору} + p = 0. \quad (4.31)$$

У такий спосіб через вираз (4.31) отримано звичайне лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами при невідомих для системи підвішування візка залізничного рухомого складу, що може мати один або декілька в'язких демпферів. Тоді для транспортного засобу з підвішуванням візків  $n$  ресорних груп і  $k$  гасників коливань диференціальне рівняння (4.31) матиме вигляд

$$m\ddot{z} + k\beta\dot{z} + ncz = 0. \quad (4.32)$$

#### Питання для самоконтролю до теми 4

- 1 Які існують методи складання диференціальних рівнянь руху?
- 2 На чому заснований метод складання диференціальних рівнянь руху за принципом Даламбера?
- 3 Яку розмірність повинен мати кожний член диференціального рівняння руху тіла при його поступальних переміщеннях?
- 4 Яку розмірність повинен мати кожний член диференціального рівняння руху тіла при його кутових переміщеннях?

5 Які складові входять до рівняння Лагранжа II роду для неконсервативних систем?

6 Які складові входять до рівняння Лагранжа II роду для консервативних систем?

7 Що таке консервативна система?

8 Що таке неконсервативна система?

9 Рівнянням якого вигляду описується коливальний процес за умови однократної збурюючої дії на тіло?

10 Рівнянням якого вигляду описується коливальний процес за умови постійної збурюючої дії на тіло?



## 5 Крутильні коливання механічних систем

### План лекції

Крутильні коливання валів з дисками. Дія крутильних моментів на вал з дисками. Напруження, що виникають у двох- та чотиримасових коливальних системах. Власні форми коливань.

Як відомо з класичної механіки та опору матеріалів, кручення – це вид деформації, при якому в поперечних перерізах бруса виникають крутильні моменти як силові фактори [1, 3]. Кручення виникає у брусах, валах, осях колісних пар, гвинтових пружинах, стабілізуючих пристроях, торсіонах машин і вагонів та інших елементах конструкцій. Зазвичай кручення відносно цих елементів конструкції відбувається при навантаженні їх зовнішніми моментами, крутильними (парами сил), і площини дії яких перпендикулярні до його повздовжньої осі. При розрахунку валів часто величини зовнішніх крутильних моментів, визначають за величиною споживаної потужності та швидкістю руху вала. Крутильні моменти, які виникають у поперечних перерізах брусів, валів, пружин визначають за величинами зовнішніх крутильних моментів, з використанням методу перерізів (рисунок 5.1, а).

Крутильний момент у будь-якому поперечному перерізі бруса (на ділянці між зовнішніми моментами) за величиною дорівнює зовнішньому моменту  $|M_1| = |M_2|$ .

У більш складних випадках, коли до бруса прикладено декілька зовнішніх моментів, крутильний момент у поперечному перерізі будь-якої ділянки бруса неоднаковий (рисунок 5.1, б).

На підставі методу перерізів крутильний момент у довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх крутильних моментів, прикладених до бруса по один бік від перерізу, що розглядається.

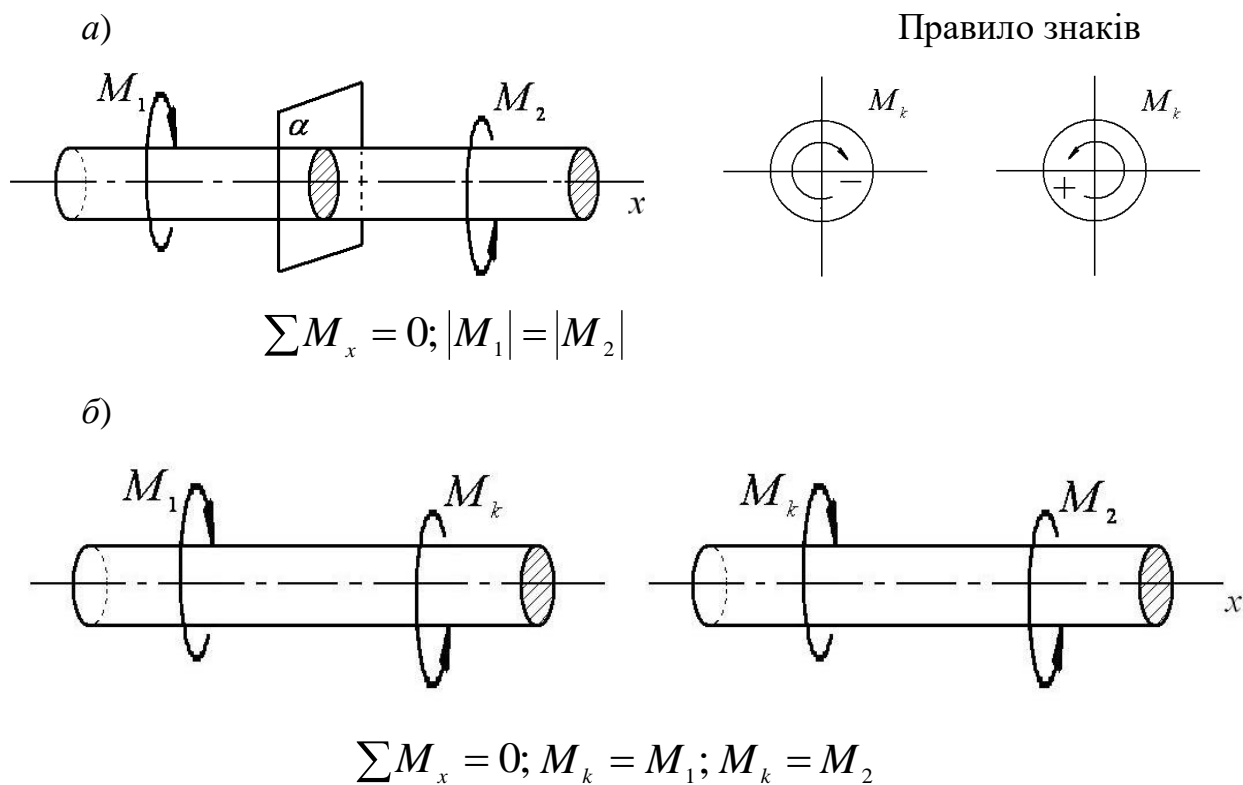


Рисунок 5.1 – Дія крутильних моментів на вал

Така епюра крутильних моментів вала наведена на рисунку 5.2.

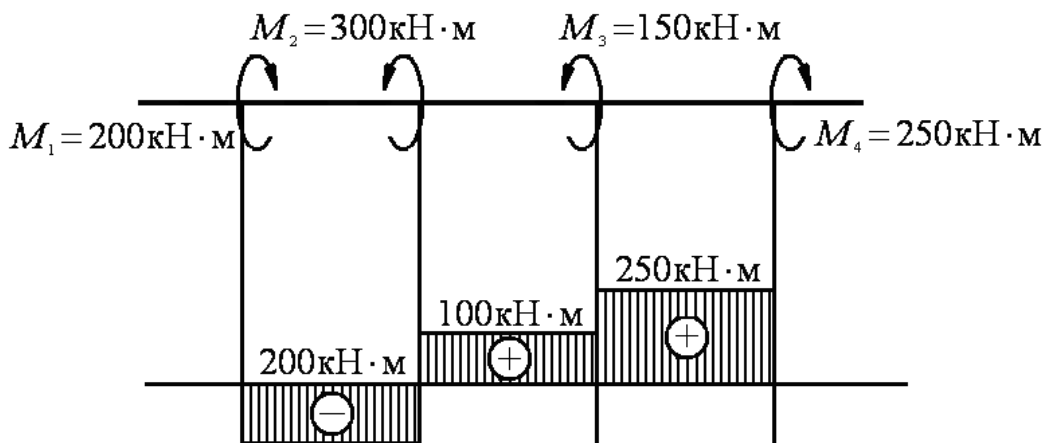
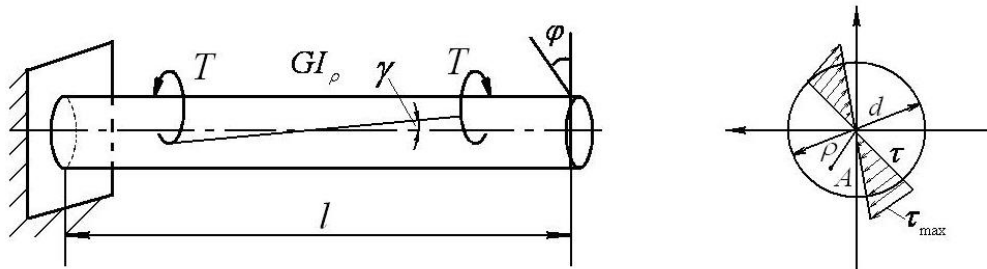


Рисунок 5.2 – Епюра крутильних моментів

Крутильний момент, що діє на зашцеplений брус, наведений на рисунку 5.3.



$\gamma$  – відносний зсув волокон матеріалу,  $\gamma = \vartheta \cdot \rho$

Рисунок 5.3 – Крутильний момент, що діє на зацемлений брус

Відносний кут закручування бруса визначається за формулою

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (5.1)$$

де  $d\varphi$  – повний кут закручування (оберту), [град];

$dx$  – ділянка довжини бруса, [м].

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot l}{G \cdot I_{\rho}}, \quad (5.2)$$

де  $G$  – модуль зсуву матеріалу бруса, [Н/м<sup>2</sup>];

$I_{\rho}$  – полярний момент інерції, [м<sup>4</sup>].

Радіус кривизни  $\rho$  від дослідної точки  $A$  до центра визначається за формулою

$$\rho d\varphi = \rho \vartheta dx, \quad (5.3)$$

$$\gamma = \vartheta \rho.$$

Тоді крутильний момент у поперечному перерізі бруса визначаємо за формулою

$$M_k = \mathcal{G}GI_p,$$

Для визначення дотичних напружень  $\tau$  проведемо нескладні математичні перетворення:

$$\mathcal{G} = \frac{M_k}{GI_p}, \Rightarrow \tau = \frac{M_k}{GI_p} \cdot \rho G = \frac{M_k}{I_p} \rho,$$

де  $GI_p$  – жорсткість перетину при скручуванні,  $[\text{Н} \cdot \text{м}^2]$ .

$$\tau = \gamma G = \mathcal{G} \rho G.$$

Максимальні дотичні напруження визначаються як

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (5.4)$$

де  $W_p$  – полярний момент опору,  $[\text{м}^3]$ .

З роботи [1] відомо, що для круглого поперечного перерізу можна записати

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4.$$

Тоді

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{2I_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (5.5)$$

Потенційна енергія  $U$  деформації при крученні за всією площею визначається як

$$U = \frac{M_k^2 \cdot l}{2GI_\rho} . \quad (5.6)$$

Якщо брус змінний за довжиною,

$$U = \sum \int \frac{M_k^2 \cdot l}{2GI_\rho} . \quad (5.7)$$

Умова міцності при крученні має вигляд  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ , тобто порівняння максимальних і допустимих дотичних напружень.

Вали, крім зусиль на кручення, сприймають деформацію згину, тому при розрахунку на кручення допустиму величину  $[\tau]$  знижують на  $20 \div 40$  МПа. Для бруса постійного перерізу непружним є перетин, де  $\tau = \max$ . Великі кути закручування вала особливо небезпечні при передачі їм змінних у часі моментів, оскільки при цьому виникають небезпечні для його міцності крутильні коливання. Вали мають бути при цьому розраховані на міцність і жорсткість.

Бруси некруглого поперечного перерізу сприймають деформацію, на відміну від круглих, що залишаються плоскими після деформації.

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} ,$$

де  $I_k$  – геометрична характеристика;

$W_k$  – коефіцієнт опору при скручуванні.

$$W_k = \frac{I_k}{b} = \frac{hb^2}{3}, \quad (5.8)$$

$$I_k = \frac{h \cdot b^3}{3}. \quad (5.9)$$

Для тонкостінного стрижня відкритого профілю некруглого (прямокутного) поперечного перерізу цей некруглий переріз доцільно спрощувати на кількість  $n$  прямокутних елементів.

Перейдемо до вивчення крутильних коливань механічних систем.

Розглянемо систему, що складаються з абсолютно жорсткого диска, закріпленого на пружному стрижні, враховуючи, що він безмасовий (рисунок 5.4).

Відновлювальний момент створюється дотичними напруженнями  $\tau_1, \tau_2$  у поперечному перерізі стрижня та коефіцієнтом жорсткості:

$$c = \frac{GI_\rho}{l}, \quad (5.10)$$

де  $l$  – довжина стрижня, [м].

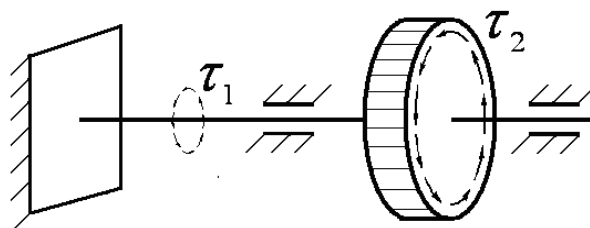


Рисунок 5.4 – Стрижневодискова умовна система

Розглянемо двомасову систему. Процес коливань відбувається так. Нехай на диску діє відносна деформація. Тоді, за рівнянням Ж. Л. Лагранжа, енергетичний баланс запишемо як

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{dq} \right) - \frac{dT}{dq} = \frac{d\Pi}{dq}; \quad (5.11)$$

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2; \quad (5.12)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c (\varphi_2 - \varphi_1)^2, \quad (5.13)$$

де  $T$  і  $\Pi$  – відповідно кінетична та потенційна енергії, [Дж].

Момент сил пружності вала запишемо як

$$M_{\text{пруж}} = c (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (5.14)$$

Нехай на диски діють рівні та протилежно спрямовані крутильні пари (рисунок 5.5), які за час  $t_0 = 0$  миттєво зникають.

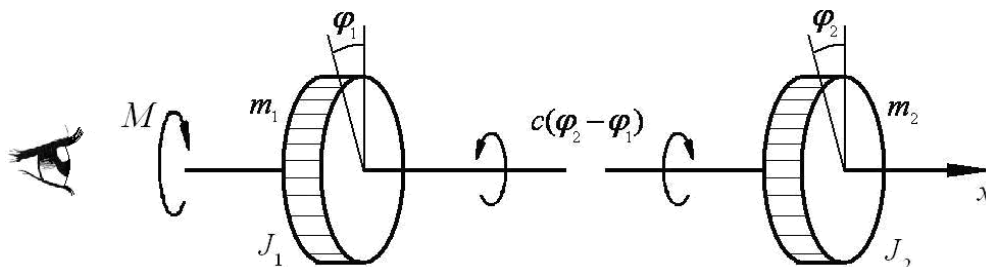


Рисунок 5.5 – Дія крутильних моментів на диски

Для деякого моменту часу  $t_0 > 0$  кут  $\varphi$  буде дорівнювати кутам  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , тому відносно кута  $\varphi$  момент сил пружності вала  $M_{\text{пруж}}$  діє на кожний з дисків,  $I_1$  та  $I_2$  – моменти інерції дисків вала. Запишемо диференціальне рівняння руху:

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi = 0. \quad (5.15)$$

Ураховуючи, що система подана як два тіла, запишемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\varphi}_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \\ I_2\ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

Аналогія знаків залишається як при повздовжніх, так і поперечних силах пружності, оскільки на другий диск також діє пружний момент, спрямований за ходом годинникової стрілки (від'ємний момент).

Поділивши перше рівняння на  $I_1$ , а друге на  $I_2$  і віднявши перше рівняння з другого, отримуємо

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 - \frac{c}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \\ \ddot{\varphi}_2 - \frac{c}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 - \frac{c}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{c}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 = \left( \frac{c}{I_1} - \frac{c}{I_2} \right) (\varphi_2 - \varphi_1).$$



Введемо до рівняння відносний кут  $\varphi$  дисків  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\ddot{\varphi} - \left( \frac{c}{I} \varphi \right) = 0.$$

Якщо покласти  $I = \frac{I_1 I_2}{(I_1 + I_2)}$ , то власну частоту будемо шукати у вигляді  $p = \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$  з урахуванням  $m_1 + m_2 = m$ .

$$p = \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{m I_1 I_2}}. \quad (5.17)$$

Результат не зміниться, якщо, окрім пружних коливань, відбувається обертання системи як жорсткого цілого. Деякий проміжний переріз – вузол коливань – не бере участь у коливальному процесі, для його визначення врахуємо, що в процесі власних коливань зовнішні моменти відсутні, отже в будь-який час  $\sum I \ddot{\varphi} = 0$  двох дисків відносно осі вала

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 - I_2 \ddot{\varphi}_2 = 0. \quad (5.18)$$

Позначимо через  $A_1$  та  $A_2$  амплітуди кутових переміщень, отримаємо прискорення:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -A_1 p^2 \sin(pt + \alpha); \\ \ddot{\varphi}_2 &= -A_2 p^2 \sin(pt + \alpha); \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$I_1 A_1 + I_2 A_2 = 0,$$

звідки  $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{I_2}{I_1}$ , тоді відношення амплітуд дисків обернено пропорційне

відношенню моментів, знак «-» означає, що відхилення відбувається:

$$I_1 A_1 = -\frac{I_2}{A_2}; \frac{A_1}{A_2} = -\frac{I_2}{I_1}; -\frac{A_1}{A_2} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Епюру крутильних моментів, що діють на двомасову систему, наведено на рисунку 5.6.

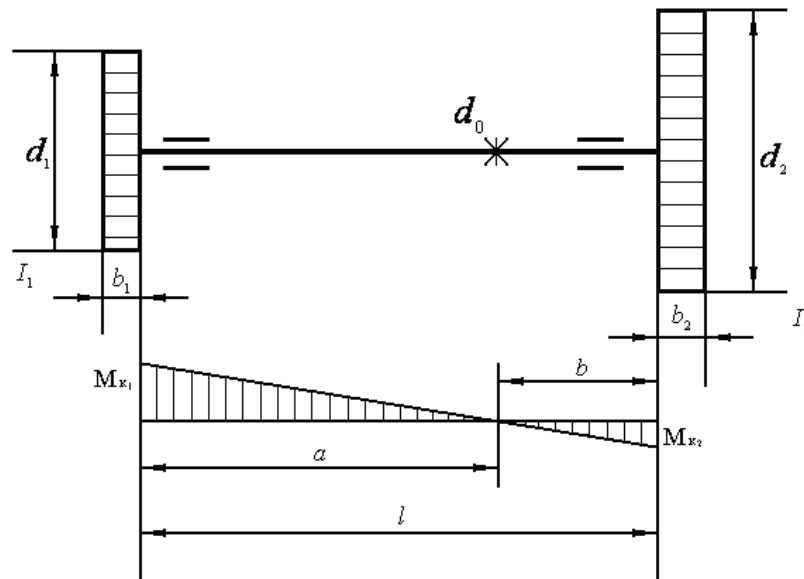


Рисунок 5.6 – Епюра крутильних моментів, що діють на двомасову систему

Відстань від вузла коливань до кінців вала

$$(I_1 + I_2)a = I_2 l; \quad a = \frac{I_2 l}{(I_1 + I_2)}; \quad b = I_1 l (I_1 + I_2), \quad (5.20)$$

$$\frac{I_1 + I_2}{I_2} = \frac{l}{a}; \quad I_1 + I_2 \cdot b = I_2 \cdot l,$$

$$\frac{I_1}{I_2} + 1 = \frac{l}{a}; \quad 1 + \frac{I_2}{I_1} = \frac{l}{b},$$

$$I_1 = \left(\frac{l}{a} - 1\right)I_2; \quad I_2 = \left(\frac{l}{b} - 1\right)I_1,$$

$$I_1 = I_2 \frac{l}{a} - I_2; \quad I_2 = I_2 \frac{l}{b} - I_1.$$

Складемо систему диференціальних рівнянь для чотиримасової системи, наведеної на рисунку 5.7.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{d\dot{q}} \right) - \frac{dT}{dq} = \frac{d\Pi}{dq};$$

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} (h\dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} c_{34} (\varphi_4 - h\varphi_2);$$

$$n = \frac{K_2}{K_3}; \quad \varphi_3 = -n\varphi_2;$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 - c_{12} (\varphi - \varphi_1) = 0 \\ (I_2 + n^2 I_3) \ddot{\varphi}_2 + c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + c_{34} n (\varphi_4 + n\varphi_2) = 0. \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 + c_{34} n (\varphi_4 + n\varphi_2) = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

Також слід зауважити, що в подібному режимі працюють торсіонні механізми кришок люків восьмивісних вагонів, поворотних і стабілізуючих пристроїв візків сучасних пасажирських вагонів та ін.

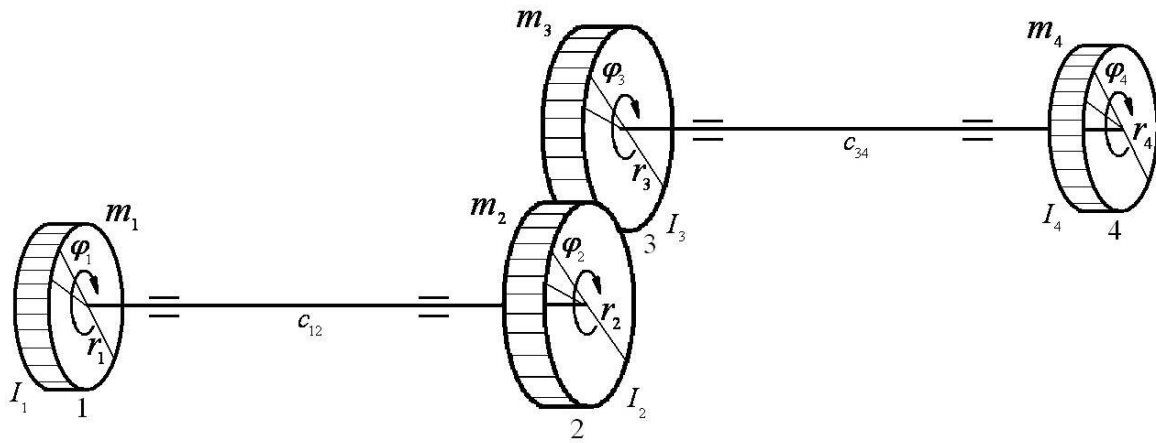


Рисунок 5.7 – Чотиримасова коливальна система

### Питання для самоконтролю до теми 5

- 1 Які напруження виникають у поперечному перерізі вала при крученні?
- 2 Визначення кутової жорсткості балки.
- 3 Визначення відносного кута закручування вала.
- 4 За якою формулою можна визначити полярний момент інерції для круглого суцільного перерізу вала?
- 5 За якою формулою можна визначити полярний момент опору для круглого суцільного перерізу вала?
- 6 За якою формулою можна визначити коефіцієнт твердості вала при крученні?
- 7 Визначення полярного моменту інерції.
- 8 Визначення осьового моменту опору.
- 9 Одиниці вимірювання полярного моменту інерції.
- 10 Одиниці вимірювання осьового моменту опору.
- 11 Визначення вузла коливань вала.
- 12 Визначення форми коливань вала.

## Список літератури

- 1 Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: навч. посіб. / О. В. Устенко, Р. І. Візник, А. О. Ловська, А. В. Рибін. Харків: УкрДУЗТ, 2021. 129 с.
- 2 Візник Р. І., Рибін А. В., Куденко І. О. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: конспект лекцій. Харків: УкрДАЗТ, 2012. Ч. 1. 25 с.
- 3 Візник Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: конспект лекцій. Харків: УкрДАЗТ, 2014. Ч. 2. 40 с.
- 4 Ловська А. О. Удосконалення несучих конструкцій кузовів напіввагонів для підвищення надійності їх кріплення на залізничних поромках: автореф. дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.22.07 – рухомий склад та тяга поїздів. Київ, 2013. 20 с.
- 5 Візник Р. І., Шевченко В. В., Ловська А. О. Дослідження динаміки кузова вагона при перевезенні його залізнично-поромним судном. *Збірник наукових праць УкрДАЗТ*. 2009. Вип. 107. С. 117–124.
- 6 Ловська А. О. Дослідження динамічної навантаженості вагона-платформи з контейнерами при перевезенні на залізничному поромі. *Залізничний транспорт України*. 2017. № 2. С. 16–20.
- 7 Ловська А. О. Визначення стійкості контейнера-цистерни відносно рами вагона-платформи при перевезенні на залізничному поромі. *Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна*. 2019. № 1 (79). С. 139–150.
- 8 Дьомін Ю. В., Черняк Г. Ю. Основи динаміки вагонів: навч. посіб. Київ: КУЕТТ, 2003. 269 с.

Візняк Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В.

## ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій

Частина 1

Відповідальний за випуск Рибін А. В.

Редактор Ібрагімова Н. В.

---

Підписано до друку 03.03.2023 р.

Умовн. друк. арк. 3,75. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018