УДК 621.391 [1]

Н.А. ШТОМПЕЛЬ, канд. техн. наук, доцент, УкрГАЖТ, Харьков

МЕТОДЫ МЯГКОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ КОДОВ С МАЛОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРОВЕРОК НА ЧЕТНОСТЬ

В работе обоснована целесообразность применения помехоустойчивых кодов в волоконно-оптических телекоммуникационных системах для повышения достоверности передачи данных и проведено исследование особенностей методов мягкого декодирования кодов с малой плотностью проверок на четность.

Ключевые слова: коды с малой плотностью проверок на четность, мягкое декодирование, волоконно-оптические телекоммуникационные системы.

Постановка задачи и анализ литературы. Тенденцией развития современных проводных телекоммуникационных систем и сетей является использование универсальной физической среды передачи данных, в роли которой выступают различные типы оптических волокон [1]. При этом для увеличения эффективности использования пропускной способности отдельного оптического волокна применяются различные методы уплотнения (мультиплексирования) каналов, модуляции и линейного кодирования. Например, в волоконно-оптических телекоммуникационных системах (ВОТС), которые применяются в Украине, используется метод спектрального (волнового) уплотнения каналов, метод амплитудной модуляции (модуляции интенсивности) и метод линейного кодирования «без возврата к нулю». Применение данных методов позволяет увеличить объем передаваемых данных по одному волокну, снизить «стоимость» оптического канала, эффективнее использовать ранее проложенные волоконно-оптические линии передачи и т.д. [2]. С другой стороны внедрение более сложных методов уплотнения каналов, методов многоуровневой модуляции и усовершенствованных методов линейного кодирования приводит к повышению коэффициента битовых ошибок за счет возникновения взаимного влияния между каналами, более жестких требований к величинам хроматической и поляризационной модовой дисперсий, увеличения нелинейных эффектов, возникающих в оптическом волокне.

Таким образом, возникает противоречие между необходимостью повышения эффективности ВОТС и обеспечением заданного качества обслуживания, характеризуемого коэффициентом битовых ошибок не менее 10^{-12}. Известно [3], что традиционным подходом для повышения достоверности передаваемых данных в телекоммуникационных системах является применение помехоустойчивых кодов. Первым поколением помехоустойчивых кодов, применяемых в ВОТС, являются коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (коды

БЧХ) и коды Рида-Соломона (коды РС). На основе данных блоковых кодов и сверточных кодов строятся более эффективные последовательные каскадные кодовые конструкции. Например, широкое распространение в ВОТС получили каскадные коды, получаемые в результате объединения кодов РС и сверточных кодов, которые являются вторым поколением помехоустойчивых кодов в ВОТС. В настоящее время существенный интерес представляют итеративно декодируемые коды, к которым относятся турбо-коды на основе рекурсивных сверточных кодов и блоковых кодов, а также коды с малой плотностью проверок на четность (МППЧ-коды). Данный класс кодов рассматривается как третье поколение помехоустойчивых кодов, применяемых в ВОТС. В [4] показана перспективность МППЧ-кодов в качестве средства повышения достоверности передаваемых данных в ВОТС, которые поддерживают как жесткое, так и мягкое декодирование. При этом большей корректирующей способностью обладают методы мягкого декодирования МППЧ-кодов.

Целью статьи является исследование особенностей методов мягкого декодирования кодов с малой плотностью проверок на четность.

Основная часть. МППЧ-коды представляют собой линейные блоковые коды со специальной структурой проверочной матрицы H, содержащей малое число ненулевых элементов. Другими словами проверочная матрица H является разреженной, что приводит к сравнительно невысокой сложности декодирования данных кодов.

Известно, что задача декодирования состоит в определении наиболее вероятного кодового слова c на основе принятого вектора r, который искажен помехами в канале связи.

Оптимальным является декодирование по максимуму правдоподобия, заключающееся в нахождении по принятому из канала вектору r такого кодового слова c МППЧ-кода, которое максимизирует вероятность того, что передавалось слово c при условии принятия вектора r. Данный метод декодирования обладает максимальной вычислительной сложностью, так как требует перебора всех возможных кодовых слов МППЧ-кода. Таким образом, в этом случае задача декодирования представляет собой *NP*-полную задачу.

Особенностью ВОТС является высокая скорость передачи данных, что накладывает ограничение на вычислительную сложность декодирования при заданной достоверности передачи данных, поэтому в данных условиях целесообразно применять неоптимальные методы декодирования МППЧ-кодов.

В отличие от других блоковых кодов, например кодов РС или кодов БЧХ, при декодировании которых используются методы, учитывающие алгебраическую структуру данных кодов, для декодирования МППЧ-кодов применяются методы декодирования, основанные на вероятностном подходе и итеративном выполнении определенных действий [3].

Классическим методом мягкого декодирования МППЧ-кодов является метод суммы-произведения [5]. С графической точки зрения данный метод можно представить как обмен сообщениями о надежности декодируемых символов предполагаемого кодового слова c между проверочными и битовыми вершинами графа Таннера, соответствующего проверочной матрице H некоторого МППЧ-кода.

Сообщения, представляющие собой решения о значении каждого декодируемого символа, являются вероятностями, которые характеризуют надежность полученного решения.

Исходной информацией для данного метода является априорная вероятность каждого принятого символа, поступающая с выхода демодулятора, $p(c_i = 0)$ и $p(c_i = 1) = 1 - p(c_i = 0)$. При этом внешняя информация, которой обмениваются между собой вершины графа Таннера, также представляет собой вероятности.

Внешнее сообщение E_{ji} от проверочной вершины j, соединенной с битовой вершиной i, является оценкой проверочной вершины j о вероятности того, что $c_i = 1$, основанное на доступной для нее в данный момент времени информации. Таким образом, E_{ji} задает вероятность того, что $c_i = 1$ приведет к выполнению проверочного уравнения j. Отметим, что E_{ji} не определено, если символ i не входит проверочное уравнение j, так как в этом случае между вершинами i и j внешняя информация не передается.

Вероятность того, что проверочное уравнение выполняется при $c_i = 1$, соответствует вероятности того, что нечетное число символов в проверочном уравнении являются ненулевыми:

$$P_{ji}^{ext} = \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{i' \in B_j, i' \neq i}\left(1 - 2P_{ji'}\right)\right), \tag{1}$$

где $P_{ji'}$ – текущая оценка, доступная проверочной вершине j, о вероятности того, что $c_i = 1$; B_j – множество символов в j-ом проверочном уравнении матрицы H.

Тогда вероятность того, что проверочное уравнение j выполняется при $c_i = 0$, равна $1 - P_{ji'}^{ext}$.

Для снижения вычислительной сложности мягкого декодирования вместо обработки непосредственно вероятностей используется их логарифмическое отношение правдоподобия.

Так с учетом (1) логарифмическое отношение правдоподобия внешней информации E_{ji} от проверочной вершины j к битовой вершине i равно:

$$E_{ji} = LLR\left(P_{ji}^{ext}\right) = \ln\left(\frac{1 - P_{ji}^{ext}}{P_{ji}^{ext}}\right). \tag{2}$$

Тогда после подстановки (1) в (2):

$$E_{ji} = \ln \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \prod\limits_{i' \in B_j, i' \neq i}\left(1 - 2P_{ji'}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(1 - \prod\limits_{i' \in B_j, i' \neq i}\left(1 - 2P_{ji'}\right)\right)} = \ln \frac{1 + \prod\limits_{i' \in B_j, i' \neq i} \frac{1 - e^{-M_{ji'}}}{1 + e^{-M_{ji'}}}}{1 - \prod\limits_{i' \in B_j, i' \neq i} \frac{1 - e^{-M_{ji'}}}{1 + e^{-M_{ji'}}}}, \tag{3}$$

где $M_{ji'} = LLR\left(P_{ji'}\right) = \ln\left(\frac{1 - P_{ji'}}{P_{ji'}}\right)$.

Затем, используя тригонометрическое соотношение для $\tanh$, внешнюю информацию (3) можно представить следующим образом:

$$E_{ji} = \ln \frac{1 + \prod\limits_{i' \in B_j, i' \neq i} \tanh\left(M_{ji'}/2\right)}{1 - \prod\limits_{i' \in B_j, i' \neq i} \tanh\left(M_{ji'}/2\right)},$$

что эквивалентно

$$E_{ji} = 2\tanh^{-1} \prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \tanh\left(M_{ji'}/2\right). \tag{4}$$

Каждая битовая вершина имеет доступ к входному логарифмическому отношению правдоподобия и к логарифмическому отношению правдоподобия каждой связанной проверочной вершины, тогда суммарное логарифмическое отношение правдоподобия i-ого символа определяется по формуле:

$$LLR_i = LLR(P_i) = R_i + \sum_{j \in A_i} E_{ji}, \tag{5}$$

где $R_i = \ln \frac{p\left(c_i = 0 \mid y_i\right)}{p\left(c_i = 1 \mid y_i\right)}$ – входное логарифмическое отношение правдоподобия; A_i –проверочные уравнения для i -ого бита МППЧ-кода.

Однако, сообщения M_{ji}, передаваемые от битовых вершин к проверочным вершинам, являются неполным логарифмическим отношением правдоподобия для каждого символа. Чтобы избежать передачи обратно к каждой проверочной вершине уже имеющейся информации, сообщение переданное от i-ой битовой вершины к j-ой проверочной вершине описывается в (5) суммой без компоненты E_{ji}, полученной от j-ой проверочной вершины:

$$M_{ji} = \sum_{j' \in A_i, j' \neq j} E_{j'i} + R_i.$$

Таким образом, метод суммы-произведения вычисляет апостериорную вероятность каждого кодового символа $p_i = p\left\{ c_i = 1 \mid s = 0 \right\}$, которая является вероятностью того, что $c_i = 1$ при условии, что $s = 0$ (то есть все проверочные уравнения выполняются). При этом в качестве декодированного значения каждого символа выбирается значение с максимальной апостериорной вероятностью. Декодирование завершается, если предполагаемое кодовое слово удовлетворяет условию $cH^T = 0$.

Для уменьшения вычислительной сложности данного метода мягкого декодирования МППЧ-кодов применяются различные его модификации.

Например, элемент $M_{ji'}$ в (4) можно представить следующим образом:

$$M_{ji'} = \alpha_{ji'} \beta_{ji'} ,$$

где $\alpha_{ji'} = signM_{ji'}$ – «знак» решения (жесткое решение); $\beta_{ji'} = \left|M_{ji'}\right|$ – абсолютное значение (надежность) решения (мягкое решение).

Тогда (4) можно переписать как

$$\begin{aligned} E_{ji} &= 2\tanh^{-1} \prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \alpha_{ji'} \prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \tanh\left(\beta_{ji'}/2\right) = \\ &= \Big(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \alpha_{ji'}\Big) 2\tanh^{-1} \prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \tanh\left(\beta_{ji'}/2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

После перегруппировки членов и замены произведения на сумму выражение (6) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{ji} &= \Big(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \alpha_{ji'}\Big) 2\tanh^{-1} \ln^{-1} \ln \prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \tanh\left(\beta_{ji'}/2\right) = \\ &= \Big(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \alpha_{ji'}\Big) 2\tanh^{-1} \ln^{-1} \sum_{i' \in B_j, i' \neq i} \ln\tanh\left(\beta_{ji'}/2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда (7) можно записать, используя функцию $\phi(x)$:

$$E_{ji} = \Big(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \alpha_{ji'}\Big) \phi\Big(\sum_{i' \in B_j, i' \neq i} \phi(\beta_{ji'})\Big),$$

где $\phi(x) = -\ln\tanh\frac{x}{2} = \ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

В результате произведение «знаков» вычисляется с использованием операций «сложение по модулю 2» жестких решений для каждого значения $M_{ji'}$, а функция $\phi(x)$ реализуется в виде табулированных значений.

Метод минимальной суммы основан на дальнейшем упрощении вычисления (6). Учитывая, что член, соответствующий наименьшему значению $M_{ji'}$, доминирует в (6), данное выражение можно представить следующим образом:

$$E_{ji} \approx \prod_{i' \in B_j, i' \neq i} signM_{ji'} \min_{i'} \left|M_{ji'}\right|.$$

Тогда произведение «знаков» вычисляется с использованием операций «сложение по модулю 2» жестких решений для каждого значения $M_{ji'}$, в результате чего данный метод требует только сложений и вычисления минимального значения $M_{ji'}$.

Выводы. Из изложенного следует, что классический метод мягкого декодирования МППЧ-кодов обладает сравнительно высокой вычислительной сложностью, поэтому для снижения вычислительной сложности процесса декодирования применяются дополнительные модификации данного метода, использующие особенности соответствующих вычислительных процедур.

Список литературы: **1.** *Листвин А.В.* Оптические волокна для линий связи [Текст] / *А.В. Листвин, В.Н. Листвин, Д.В. Швырков.* – М.: ВЭЛКОМ, 2002. – 187 с. **2.** *Штомпель Н.А. В*ыбор метода модуляции в волоконно-оптических телекоммуникационных системах / *Н.А. Штомпель* // Системи обробки інформації. – 2013. – Вип. 1 (108). – С. 220-223. **3.** *Морелос-Сарагоса Р.* Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение: пер. с англ. [Текст] / *Р. Морелос-Сарагоса*. – М.: Техносфера, 2005. – 320 с. **4.** *Kumar P.V.* Error-control coding techniques and applications / *P. Vijay Kumar, Moe Z. Win, Hsiao-Feng Lu, Costas N. Georghiades* // Optical fiber telecommunication IV B: Systems and impairments / edited by *Ivan P. Kaminow, Tingye Li.* – Elseiver Science, 2002. – P. 902-964. **5.** *Галлагер Р.* Коды с малой плотностью проверок на четность пер. с англ. [Текст] / *Р.Галлагер*. – М.: Мир, 1963. – 144 с.

Поступила в редколлегию 15.04.2013

УДК 621.391

Методы мягкого декодирования кодов с малой плотностью проверок на четность / Н.А. Штомпель // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Техніка та електрофізика високих напруг. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 27 (1000). – С. 163-168. – Бібліогр.: 5 назв.

У роботі обґрунтовано доцільність використання завадостійких кодів у волоконно-оптичних телекомунікаційних системах для підвищення вірогідності передачі даних та проведене дослідження особливостей методів м’якого декодування кодів з малою щільністю перевірок на парність.

Ключові слова: коди з малою щільністю перевірок на парність, м'яке декодування, волоконно-оптичні телекомунікаційні системи.

In the work of the expediency of noiseproof codes in fiber-optic telecommunication systems to improve the reliability of data transmission and a study of the methods of soft decoding of low-density parity-check codes.

Keywords: low-density parity-check codes, soft decoding, fiber-optic telecommunication systems.