МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Частина 2

Харків – 2023

УДК 517(075)

П 16

Рекомендовано вченою радою Українського державного університету залізничного транспорту як навчальний посібник (витяг з протоколу № 4 від 21 червня 2023 р.)

Рецензенти:

Dr. Ariinas URBSYS (Ph.D. Technology Sciences, Measure111ents Engineering-lOT), Projects Development Director, IN RE, UAB (Lithuania);
доктор фіз-мат. наук, професор, член-кореспондент НАН України, академік ТАУ Р. В. Вовк (ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

П 16 Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: Навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2023. – Ч. 2. – 251 с., рис. 72, табл. 6.

ISBN

Навчальний посібник «Вища математика. Частина 2» призначений для здобувачів вищої освіти факультету «Управління процесами перевезень», а також може бути корисним для здобувачів інших технічних спеціальностей закладів вищої освіти.

Ця частина присвячена інтегральному численню функції однієї і багатьох змінних. У кожному розділі міститься необхідний теоретичний матеріал, завдання для самостійного розв’язання з відповідями, а також наведено значну кількість прикладів з поясненням способів їхнього розв'язання.

УДК 517(075)

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП **7**

РОЗДІЛ 1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ **9**

1.1. Визначення комплексного числа та уявної одиниці 9

1.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі 10

1.3. Геометричне зображення комплексного числа 12

1.4. Тригонометрична форма комплексного числа 13

1.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі 16

Питання до розділу 20

Завдання 21

Відповіді 22

РОЗДІЛ 2. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ **24**

2.1. Основні поняття інтегрального числення 24

2.2. Основні властивості невизначеного інтеграла 26

2.3. Таблиця основних інтегралів 27

2.4. Методи знаходження невизначених інтегралів 28

2.4.1. Метод безпосереднього інтегрування 28

2.4.2. Метод підстановки (метод заміни змінної інтегрування) 31

2.4.3. Метод інтегрування частинами 34

2.4.4. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен 38

2.4.5. Інтегрування раціональних функцій 44

2.4.6. Інтегрування тригонометричних функцій 61

2.4.7. Інтегрування деяких ірраціональних функцій 73

2.4.8. Інтеграли, що не можна виразити через елементарні функції 81

Питання до розділу 81

Завдання 82

Відповіді 85

РОЗДІЛ 3. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ **91**

3.1. Поняття визначеного інтеграла 91

3.2. Геометричний зміст визначеного інтеграла 93
3.3. Фізичний зміст визначеного інтеграла 93
3.4. Економічний зміст визначеного інтеграла 93
3.5. Властивості визначеного інтеграла 94
3.6. Формула Ньютона-Лейбніца 98
3.7. Методи обчислення визначених інтегралів 99
3.7.1. Заміна змінної у визначеному інтегралі 99
3.7.2. Інтегрування частинами визначеного інтеграла 102
Питання до розділу 105
Завдання 106
Відповіді 107
РОЗДІЛ 4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ 109
4.1. Невласні інтеграли першого роду (невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування) 109
4.2. Ознаки збіжності невласного інтеграла першого роду 116
4.3. Невласні інтеграли другого роду (невласні інтеграли від необмежених функцій) 121
4.4. Ознаки збіжності невласного інтеграла другого роду 128
Питання до розділу 134
Завдання 135
Відповіді 136
5. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА 138
5.1. Обчислення площі плоскої фігури 138
5.1.1. Площа фігури в декартовій системі координат 138
5.1.2. Задання кривої, заданої в параметричній формі 148
5.2. Довжина дуги плоскої кривої 149
5.2.1. Довжина дуги в декартовій системі координат 149
5.2.2. Обчислення довжини дуги кривої, заданої в параметричній формі 153

5.3. Об’єм тіла обертання 155
5.4. Площа поверхні тіла обертання 162
Питання до розділу 165
Завдання 165
Відповіді 168
РОЗДІЛ 6. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ 172
6.1. Подвійні інтеграли 172
6.1.1. Визначення подвійного інтеграла 172
6.1.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла 174
6.1.3. Основні властивості подвійного інтеграла 174
6.1.4. Обчислення подвійного інтеграла 176
6.2. Потрійні інтеграли 186
6.2.1. Визначення потрійного інтеграла 186
6.2.2. Обчислення потрійного інтеграла 187
6.3. Деякі застосування подвійного та потрійного інтегралів 191
Питання до розділу 195
Завдання 196
Відповіді 198
РОЗДІЛ 7. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ 200
7.1. Криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною дуги) 200
7.1.1. Визначення криволінійного інтеграла першого роду 200
7.1.2. Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду 202
7.1.3. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду 202
7.2. Криволінійний інтеграл другого роду 208
7.2.1. Визначення криволінійного інтеграла другого роду 208
7.2.2. Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду 210
7.2.3. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду 212

7.3. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду 218
Питання до розділу 219
Завдання 219
Відповіді 221
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК 222
ДОДАТКИ 228
Додаток 1 228
Додаток 2 229
Додаток 3 230
Додаток 4 231
Додаток 5 232
Додаток 6 233
Додаток 7 234
Додаток 8 235
Додаток 9 237
Додаток 10 239
Додаток 11 240
Додаток 12 241
Додаток 13 242
Додаток 14 244
Додаток 15 247
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК 248

ВСТУП

Це друга частина навчального посібника «Вища математика», який охоплює курс вищої математики, що вивчається здобувачами факультету «Управління процесами перевезень» дисциплін відповідно до навчальних планів та освітньо-професійних програм.

Перша частина охоплює лінійну і векторну алгебру, аналітичну, геометрію, диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних. Друга частина присвячена інтегральному численню функції однієї і багатьох змінних.

У першому розділі наведено деякі відомості про комплексні числа [1-10], що є розширенням множини дійсних чисел і невід'ємною складовою багатьох галузей науки і техніки. Другий розділ присвячено невизначеному інтегралу – одному з ключових понять математичного аналізу. У посібнику надано властивості невизначеного інтеграла та основні методи його знаходження, такі як метод підстановки, інтегрування частинами, інтегрування раціонального дробу та інші [1-9, 11-42]. Вивчення цієї теми є важливим кроком у підготовці здобувачів до вивчення визначеного інтеграла, розглянутого в третьому розділі. Невласному інтегралу, що є розширенням поняття визначеного інтеграла, приділено увагу в четвертому розділі. Визначений інтеграл має широке застосування в різних галузях науки і техніки і є важливим математичним інструментом для розв'язання різних прикладних задач. У п’ятому розділі розглядаються деякі застосування визначеного інтеграла. Останні два розділи присвячено кратним і криволінійним інтегралам [1-9, 11-50]. У додатках 1-15 систематизовано основні теоретичні відомості за переліченими темами. Посібник містить велику кількість детально розібраних прикладів, завдань з відповідями. Усе це дає змогу використовувати його як здобувачам для самостійної роботи з вивчення вищеназваних тем, так і викладачам на практичних заняттях з курсу вищої математики.

Навчальний посібник призначений у першу чергу для здобувачів спеціальності «Організація перевезень і управління на транспорті (залізничний транспорт)», але також може бути корисним і для здобувачів інших технічних спеціальностей закладів вищої освіти.

Розділ 1
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

1.1. Визначення комплексного числа та уявної одиниці

Визначення. Комплексним числом називається вираз

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

де x, y - дійсні числа;

i - уявна одиниця, що визначається рівністю

$$i^2 = -1. \tag{1.2}$$

Визначення. Форму запису комплексного числа (1.1) називають *алгебраїчною формою комплексного числа*.

Визначення. Число x називають *дійсною* частиною, а число y - *уявною* частиною комплексного числа (1.1).

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їхні дійсні та уявні частини, тобто

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Зауваження. Порівняти різні комплексні числа неможливо. Тобто неможливо сказати, яке з двох комплексних чисел більше $2 - 5i$ чи $1 + 3i$.

Визначення. Якщо два комплексних числа відрізняються одне від одного лише знаком уявної частини, то вони називаються *спряженими*. Число, спряжене з комплексним числом $z = x + iy$, позначають символом $\bar{z} = x - iy$.

Приклад 1.1. Знайти спряжені комплексні числа до заданих комплексних чисел:

1) $z = 2 - 5i$;

2) $z = -\sqrt{3} + \sqrt{7}\, i$;

3) $z = 2i$;

4) $z = 5$.

Відповідь: 1) $\bar{z} = 2 + 5i$; 2) $\bar{z} = -\sqrt{3} - \sqrt{7}\, i$; 3) $\bar{z} = -2i$; 4) $\bar{z} = 5$.

Визначення. Комплексні числа $z_1 = x + iy$ і $z_2 = -x - iy$ називають *протилежними.*

Визначення. Комплексне число $z = x + iy$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $x = y = 0$.

Дійсні числа є частинним випадком комплексних чисел (при $y = 0$).

Визначення. Комплексні числа, у яких дійсна частина дорівнює нулю ($x = 0$), називаються чисто уявними числами.

1.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання, віднімання, множення та піднесення в степінь комплексних чисел, заданих в алгебраїчній формі, виконуються за правилами дій над багаточленами. При цьому обов'язково слід враховувати, що

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ \ldots.$$

У загальному випадку

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ \forall n \in N,$$

наприклад

$$i^{35} = i^{4\cdot 8+3} = i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^{94} = i^{4\cdot 23+2} = i^2 = -1.$$

Отже, щоб додати (відняти) два комплексних числа, необхідно додати (відняти) окремо дійсні частини цих чисел і коефіцієнти при уявних частинах:

$$\pm\begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \\ \hline z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \end{array}$$

Множення двох комплексних чисел здійснюється за правилом множення двочленів з урахуванням умови (1.2) і зведення подібних:

$$\times\begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \\ \hline z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{array}$$

Очевидно, що сума й добуток двох комплексно спряжених чисел є дійсним числом, тобто

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x;$$

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2.$$

Ділення двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ виконується так:

1) необхідно чисельник і знаменник дробу $\frac{z_1}{z_2}$ домножити на число $\overline{z_2}$, спряжене до знаменника z_2;

2) спростити чисельник і знаменник (знаменник стає дійсним числом);

3) почленно розділити чисельник на знаменник і записати частку в алгебраїчній формі, тобто

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зауваження. Основні властивості наведених арифметичних операцій над комплексними числами співпадають з відповідними властивостями аналогічних операцій над дійсними числами.

Приклад 1.2. Задано два комплексних числа $z_1 = -4 + 2i$ і $z_2 = 3 - 5i$. Обчислити:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - \overline{z}_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$.

Розв'язання:

1) $z_1 + z_2 = (-4 + 2i) + (3 - 5i) = (-4 + 3) + (2 - 5)i = -1 - 3i$;

2) $z_1 - \overline{z}_2 = (-4 + 2i) - (3 + 5i) = (-4 - 3) + (2 - 5)i = -7 - 3i$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (-4 + 2i) \cdot (3 - 5i) = -12 + 6i + 20i - 10i^2 = -2 + 26i$.

Відповідь: 1) $-1 - 3i$; 2) $-7 - 3i$; 3) $-2 + 26i$.

1.3. Геометричне зображення комплексного числа

Кожному комплексному числу $z = x + iy$ можна поставити у відповідність точку $M(x; y)$ на координатній площині XOY. При цьому площина XOY називається *комплексною площиною* Z, вісь Ox - *дійсною* віссю, вісь Oy - *уявною* віссю.

Комплексне число зручно зобразити у вигляді вектора $\overrightarrow{OM}(x; y)$ (рис. 1.1).

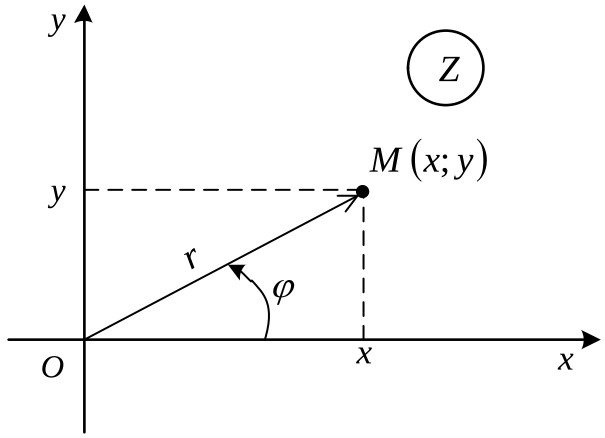


Рис. 1.1. Геометричне зображення комплексного числа

1.4. Тригонометрична форма комплексного числа

Визначення. Довжина вектора, що зображує комплексне число, називається *модулем* цього комплексного числа.

Модуль комплексного числа $z = x + iy$ позначається $r = |z|$ і обчислюється за формулою

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ . \tag{1.3}$$

Визначення. Кут між додатним напрямком осі Ox і вектором $\overrightarrow{OM}(x;y)$ називається *аргументом комплексного числа* і позначається $\varphi = \arg z$.

Зауваження. Будь-яке комплексне число, що не дорівнює нулю, має нескінчену множину аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$, $k \in Z$.

За рис. 1.1,

$$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi. \tag{1.4}$$

Аргумент φ комплексного числа z можна обчислити за формулами

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ і } \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

або

$$\varphi = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), x \geq 0; \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi,\ x < 0, y \geq 0; \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi,\ x < 0, y < 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

З урахуванням формули (1.4) комплексне число $z = x + iy$ можна записати як

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.6}$$

Визначення. Вид запису комплексного числа (1.6) називається *тригонометричною формою* комплексного числа.

Приклад 1.3. Зобразити комплексні числа на комплексній площині та записати їх у тригонометричній формі:

1) $z = 4$;

2) $z = 2i$;

3) $z = -\sqrt{3} + i$.

Розв'язання:

1) геометричним зображенням комплексного числа $z = 4$ $(x = 4; y = 0)$ є вектор $\overrightarrow{OM}_1 = (4;0)$ (рис. 1.2).

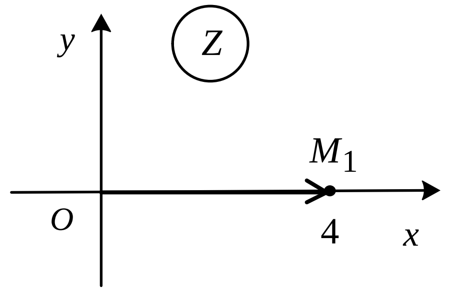


Рис. 1.2. Геометричне зображення комплексного числа $z = 4$

За формулами (1.3), (1.5),

$$r = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4,$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) = arctg\left(\frac{0}{4}\right) = 0.$$

Тригонометрична форма має вигляд

$$4 = 4(\cos 0 + i\sin 0);$$

2) вектор $\overrightarrow{OM}_2=(0;2)$ є геометричним зображенням числа $z=2i$ $(x=0;y=2)$ (рис. 1.3).

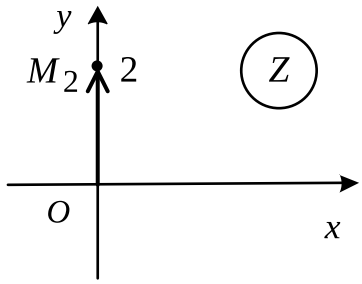


Рис. 1.3. Геометричне зображення комплексного числа $z=2i$

За формулами (1.3), (1.5),

$$r=\sqrt{0^2+2^2}=2,$$

$$\varphi=arctg\left(\frac{y}{x}\right)=arctg\left(\frac{2}{0}\right)=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Тригонометрична форма має вигляд

$$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

3) геометричним зображенням комплексного числа $z=-\sqrt{3}+i$ $(x=-\sqrt{3};\ y=1)$ є вектор $\overrightarrow{OM}_3=\left(-\sqrt{3};1\right)$, зображений на рис. 1.4.

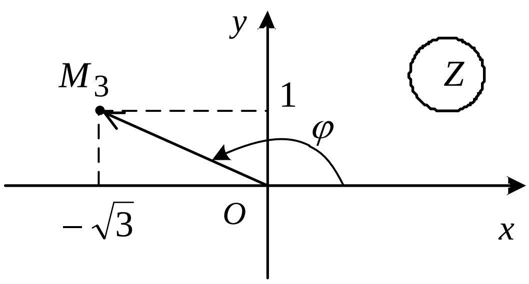


Рис. 1.4. Геометричне зображення комплексного числа $z=-\sqrt{3}+i$

За формулами (1.3), (1.5),

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2,$$

$$\varphi=arctg\left(\frac{y}{x}\right)+\pi=arctg\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)+\pi=$$

$$=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$

Тригонометрична форма числа $z=-\sqrt{3}+i$ має вигляд

$$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Відповідь: 1) $4=4(\cos 0+i\sin 0)$;

2) $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

1.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай задано два комплексних числа

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Множення:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right). \qquad (1.7)$$

Ділення:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right). \qquad (1.8)$$

Піднесення в степінь (формула Муавра):

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.9)$$

Добування кореня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \qquad (1.10)$$

де $k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$.

! Існує рівно n різних значень кореня степеня n з комплексного числа.

Приклад 1.4. Задано два комплексних числа в тригонометричній формі $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ і $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Обчислити:

1) $z_1 \cdot z_2$;

2) $\frac{z_1}{z_2}$.

Розв'язання: 1) за формулою (1.7),

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 12\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right);$$

2) за формулою (1.8),

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0,75\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= 0,75\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Відповідь: 1) $12\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

2) $0,75\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Зауваження. При знаходженні *коренів квадратного рівняння* бувають випадки, коли отримуємо *від'ємний дискримінант*. Це означає, що рівняння не має розв'язків на площині дійсних чисел. Але після введення в розгляд комплексних чисел стає можливим обчислення кореня з від'ємного дискримінанта і, як наслідок, знаходження розв'язку такого виду рівнянь. Припустимо, що маємо рівняння вигляду

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.11}$$

Тоді дискримінант знаходимо за формулою

$$D = b^2 - 4ac. \qquad (1.12)$$

У випадку, коли $D \ge 0$, отримуємо два дійсні корені

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \qquad (1.13)$$

Якщо $D < 0$, то, за формулою (1.2), отримаємо корені з дискримінанта

$$D = -k^2 \Rightarrow \sqrt{D} = \pm k \cdot i. \qquad (1.14)$$

Тоді розв'язок квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом обчислюємо за формулами

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm k \cdot i}{2a}. \qquad (1.15)$$

Приклад 1.5. Розв'язати квадратне рівняння:

1) $x^2 + 4x + 13 = 0$;

2) $3x^2 - 8x + 13 = 0$.

Розв'язання: 1) за формулами (1.12), (1.14),

$$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36, \sqrt{D} = \sqrt{-36} = \pm 6i.$$

За формулою коренів квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом (1.15),

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i;$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -2 + 3i, \\ x_2 = -2 - 3i. \end{array}\right.;$$

2) аналогічно обчислюємо

$$D=(-8)^2-4\cdot 3\cdot 13=-92,\ \sqrt{D}=\sqrt{-92}=\sqrt{-4\cdot 23}=\pm 2\sqrt{23}\,i\,.$$

Знайдене значення підставляємо до формули (1.15) для обчислення коренів:

$$x_{1,2}=\frac{8\pm 2\sqrt{23}i}{6}=\frac{4}{3}\pm\frac{\sqrt{23}}{3}i\,;$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{4}{3}+\dfrac{\sqrt{23}}{3}i, \\ x_2=\dfrac{4}{3}-\dfrac{\sqrt{23}}{3}i. \end{array}\right.$$

Відповідь: 1) $\left[\begin{array}{l} x_1=-2+3i, \\ x_2=-2-3i. \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{4}{3}+\dfrac{\sqrt{23}}{3}i, \\ x_2=\dfrac{4}{3}-\dfrac{\sqrt{23}}{3}i. \end{array}\right.$

Приклад 1.6. Обчислити $\sqrt{i}$.

Розв'язання. Спочатку запишемо комплексне число $z=i$ в тригонометричній формі. За формулами (1.3), (1.5),

$$r=\sqrt{0^2+1^2}=1,\ \varphi=\frac{\pi}{2},$$

а за формулою (1.6),

$$i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Тоді, за формулою (1.10), маємо

$$\sqrt{i}=\sqrt{1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi/2+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi/2+2\pi k}{2}\right)\right),\ k=0{,}1.$$

Підставляючи $k=0$ і $k=1$, отримаємо два корені:

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Зобразимо отримані корені на комплексній площині (рис. 1.5).

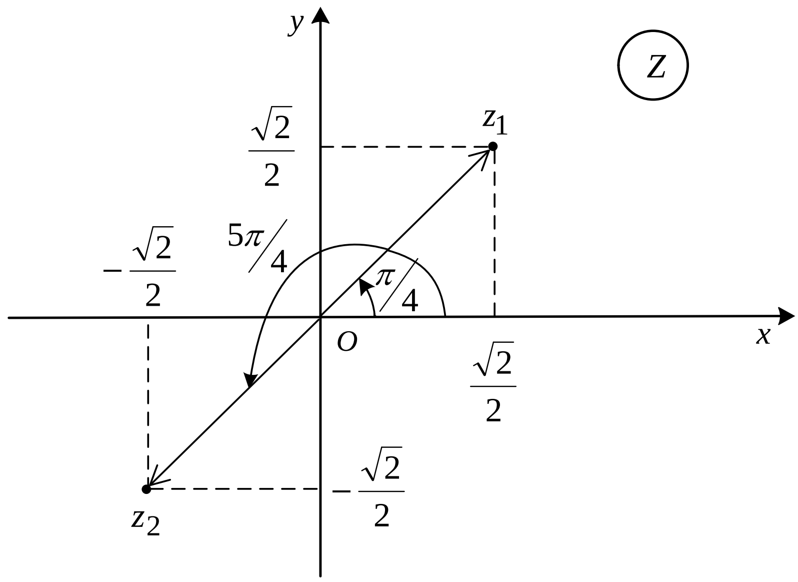


Рис. 1.5. Геометричне зображення коренів прикладу 1.6

Питання до розділу

1. Визначення комплексного числа.
2. Як визначається уявна одиниця?
3. Які комплексні числа називаються рівними, протилежними, спряженими?
4. Зображення комплексного числа на площині.
5. Алгебраїчна форма запису комплексного числа.

6. Модуль комплексного числа.

7. Аргумент комплексного числа.

8. Тригонометрична форма запису комплексного числа.

9. Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі.

10. Чому дорівнює сума та добуток комплексно-спряжених чисел?

11. Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі.

12. Формула Муавра. Яких форм запису комплексних чисел стосується ця формула?

Завдання

1. Задано два комплексних числа $z_1 = 3 + 2i$ і $z_2 = 4 - i$. Обчислити:

1) $z_1 \pm z_2$;

2) $z_1 \pm \overline{z_2}$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\overline{z_1} \cdot z_2$;

5) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2. Записати число $z = 1 - i$ в тригонометричній формі.

3. Записати число $z = -1 + i\sqrt{3}$ в тригонометричній формі.

4. Задано комплексні числа $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Обчислити $z_1 \cdot z_2$.

5. Обчислити:

1) $(1+i)^3$;

2) $(1+i)^6$.

6. Обчислити значення функції $f(x)=x^4+\dfrac{2+i}{x}-\left(2-3i\right)$, якщо $x=1-2i$.

7. Задано два комплексних числа $z_1=3+i$ і $z_2=2i$. Обчислити:

1) $\dfrac{z_2}{\overline{z_1}}$;

2) $\left(\dfrac{z_1+z_2}{3\overline{z_2}}\right)^8$.

8. Обчислити $\sqrt[6]{-1}$.

9. Розв’язати рівняння:

1) $x^2+x+1=0$;

2) $x^2+4=0$;

3) $x^2+2x+10=0$;

4) $3x^2-x+2=0$;

5) $7x^2+8x+3=0$.

Відповіді

1. 1) $z_1+z_2=7+i$, $z_1-z_2=-1+3i$;

2) $z_1+\overline{z_2}=7+3i$, $z_1-\overline{z_2}=-1+i$;

3) $z_1\cdot z_2=14+5i$;

4) $\overline{z_1}\cdot z_2=10-11i$;

5) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{10}{17}+\dfrac{11}{17}i$.

2. $z=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

3. $z=-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

4. $z_1\cdot z_2=6i$.

5. 1) $-2+2i$;

2) $-8i$.

6. $-9+28i$.

7. 1) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$; 2) $\frac{1}{16}$.

8. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\ i\ ;-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,-i\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

9. 1) $x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

2) $x_{1,2}=\pm 2i$;

3) $x_{1,2}=-1\pm 3i$;

4) $x_{1,2}=\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{23}}{6}i$;

5) $x_{1,2}=-\frac{4}{7}\pm\frac{\sqrt{5}}{7}i$.

РОЗДІЛ 2. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Інтегральне числення виникло у зв'язку з необхідністю знаходження функції $F(x)$, якщо відома її похідна $f(x)=F'(x)$. Ця задача є однією з основних задач інтегрального числення.

2.1. Основні поняття інтегрального числення

Визначення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на множині X, якщо для будь-якого значення $x\in X$ функція $F(x)$ диференційована і

$$F'(x)=f(x). \tag{2.1}$$

Наприклад, первісною для $f(x)=x$ на множині R є функція

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2.$$

Це можна перевірити, продиференціювавши функцію $F(x)=\frac{1}{2}x^2$:

$$F'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x.$$

Але первісними будуть також функції вигляду $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C\,,C\in R$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)'=x.$$

Теорема 2.1. Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на множині X, то множина всіх первісних для функції $f(x)$ має вигляд

$$F(x)+C,\ C\in R. \qquad (2.2)$$

Наслідок. Дві будь-які первісні для однієї й тієї самої функції відрізняються між собою на сталу величину.

Визначення. Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням* функції $f(x)$, а розділ, присвячений задачам знаходження функції за її похідною (диференціалом), називається *інтегральним численням*.

Для інтегрування функції на множині X необхідно або знайти всі первісні функції на цій множині X, або довести, що функція не має первісних на цій множині X. Очевидно, що для знаходження всіх первісних функцій достатньо знайти одну будь-яку первісну $F(x)$ на заданій множині X. Тоді, за теоремою 2.1, отримаємо $F(x)+C,\ C\in R$ - загальний вигляд всієї множини первісних на цій множині X.

Визначення. Множина всіх первісних (2.2) для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається як

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \qquad (2.3)$$

де $\int$ - знак невизначеного інтеграла;

$f(x)$ - підінтегральна функція;

$f(x)dx$ - підінтегральний вираз;

dx - диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла (2.3) полягає в тому, що функція $y=F(x)+C$ є рівнянням сім’ї кривих, які утворюються одна з одної в результаті паралельного перенесення вздовж осі OY (рис. 2.1).

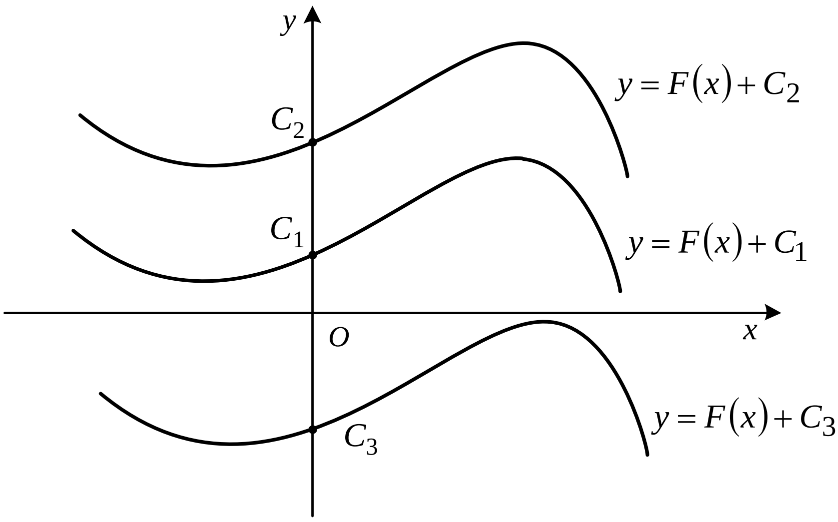


Рис. 2.1. Сім'я кривих $y = F(x) + C$, $C \in R$

Теорема 2.2. Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певній множині достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цій множині.

2.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x).$$

2. Сталий множник підінтегральної функції можна виносити за знак інтеграла

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in R.$$

3. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

4. Інтеграл від суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) інтегралів

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від похідної функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої

$$\int f'(x)dx=f(x)+C.$$

6. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

2.3. Таблиця основних інтегралів

Операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання, тому для кожної функції з основної таблиці похідних (п. 5.2.2 частини 1) можна написати відповідну їй первісну функцію (невизначений інтеграл). Отже, отримаємо таблицю невизначених інтегралів (табл. 2.1).

Доведення табличних інтегралів виконується за допомогою операції диференціювання і властивості 1. Наприклад,

$$\left(\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)'=\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C\right)'=$$

$$=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

Таблиця 2.1

Таблиця невизначених інтегралів

1	$\int dx = x + C$	10	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
2	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	11	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	12	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$, $a \neq 0$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$	13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$	14	$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C$
6	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	15	$\int \mathrm{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C$
7	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	16	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\mathrm{tg} \frac{x}{2}\right\| + C$
8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$	17	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$		

2.4. Методи знаходження невизначених інтегралів

2.4.1. Метод безпосереднього інтегрування

Суть методу безпосереднього інтегрування полягає в знаходженні невизначених інтегралів шляхом зведення їх до табличних (табл. 2.1) за допомогою тотожних перетворень підінтегральної функції та застосування властивостей невизначеного інтеграла (п. 2.2).

Приклад 2.1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \left(4 + 3x + x^3\right) dx$;

2) $\int \frac{x^3+5x^2-2}{x}dx$;

3) $\int\left(3^x+\cos x-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Розв'язання:

1) $\int\left(4+3x+x^3\right)dx=\int 4dx+3\int xdx+\int x^3dx=4x+3\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+C=$

$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+4x+C$;

2) $\int \frac{x^3+5x^2-2}{x}dx=\int\frac{x^3}{x}dx+5\int\frac{x^2}{x}dx-2\int\frac{dx}{x}=\int x^2dx+5\int xdx-2\int\frac{dx}{x}=$

$=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-2\ln|x|+C$;

3) $\int\left(3^x+\cos x-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx=\int 3^xdx+\int\cos x\,dx-2\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$

$=\frac{3^x}{\ln 3}+\sin x+2ctgx+C$;

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}=\int\frac{dx}{2\cdot\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$.

Відповідь:

1) $\int\left(4+3x+x^3\right)dx=4x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+C$;

2) $\int \frac{x^3+5x^2-2}{x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-2\ln|x|+C$;

3) $\int\left(3^x+\cos x-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx=\frac{3^x}{\ln 3}+\sin x+2ctgx+C$;

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$.

Зауваження. Іноді при безпосередньому інтегруванні зручно використовувати таке: якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C,\ C\in R. \tag{2.4}$$

Приклад 2.2. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int e^{4x}dx$;

2) $\int\frac{dx}{5x-3}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{7x+5}}$.

Розв'язання:

1) використовуємо формули $\int e^x dx=e^x+C$ та (2.4), отримаємо

$$\int e^{4x}dx=\frac{1}{4}e^{4x}+C;$$

2) за табличним інтегралом $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ і формулою (2.4),

$$\int\frac{dx}{5x-3}=\frac{1}{5}\ln|5x-3|+C;$$

3) за табличним інтегралом 4 табл. 2.1 і формулою (2.4),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x+5}} = \frac{2}{7}\sqrt{7x+5} + C.$$

Відповідь: 1) $\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C$;

2) $\int \frac{dx}{5x-3} = \frac{1}{5}\ln|5x-3| + C$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+5}} = \frac{2}{7}\sqrt{7x+5} + C$.

2.4.2. Метод підстановки (метод заміни змінної інтегрування)

Метод підстановки, або метод заміни змінної, полягає в переході від змінної інтегрування x до нової змінної t, що дасть змогу спростити початковий інтеграл або навіть звести його до табличного.

Теорема 2.3. Якщо $f(x)$ - неперервна функція, а функція $x = \phi(t)$ має неперервну похідну, то

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2.5}$$

Зауваження. Після знаходження інтеграла за новою змінною t обов'язково потрібно повернутися до початкової змінної x. При цьому для повернення до початкової змінної функція $t = \varphi(x)$ повинна мати обернену функцію $x = \varphi^{-1}(t)$:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(t) + C =$$

$$= \left| t = \varphi^{-1}(x) \right| = F(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Заміну змінної $t=\varphi(x)$ використовують у випадках, коли підінтегральна функція подана як добуток складеної функції $f\left(\varphi(x)\right)$ і похідної $\varphi'(x)$ або виразом, що відрізняється від похідної $\varphi'(x)$ сталим множником. Якщо функція $\varphi(x)$ має неперервну похідну, то

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx=\left|\begin{array}{l} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)dx \end{array}\right|=\int f(t)dt. \qquad (2.6)$$

Отже, зв’язок між змінними інтегрування x, t може бути задано у вигляді співвідношення, яке розв’язано:

- відносно x (формула (2.5));
- відносно t (формула (2.6)).

Приклад 2.3. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \sin^4 x\cos x dx$;

2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+5}}$;

3) $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx$;

4) $\int \sqrt{2-x^2}\,dx$.

Розв’язання

Для перших трьох інтегралів використаємо формулу (2.6):

1) $$\int \sin^4 x\cos x dx=\left|\begin{array}{l} t=\sin x \\ dt=(\sin x)'\,dx=\cos x dx \end{array}\right|=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}+C=\frac{\sin^5 x}{5}+C;$$

$$2)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+5}} = \left| \begin{array}{l} t = x^3+5 \\ dt = \left(x^3+5\right)' dx = 3x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+5} + C\ ;$$

$$3)\ \int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (\ln x)'\, dx = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \sqrt{t^3}dt = \frac{2t^{5/2}}{5} + C = \frac{2}{5}\cdot(\ln x)^{5/2} + C\ ;$$

4) за формулою (2.5),

$$\int \sqrt{2-x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos t \\ dx = \left(\sqrt{2}\cos t\right)' dt = -\sqrt{2}\sin t dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{2-\left(\sqrt{2}\cos t\right)^2}\left(-\sqrt{2}\sin t\right)dt = -\sqrt{2}\int \sqrt{2-2\cos^2 t}\sin t dt = -2\int \sin^2 t dt =$$

$$= -2\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\int (1-\cos 2t)\, dt = -t + \frac{1}{2}\sin 2t + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos t \Rightarrow t = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\cos t = \\ = 2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2-x^2} \end{array} \right| = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2} + C\ .$$

Зауважимо, що в цьому інтегралі ми могли зробити іншу заміну, а саме $x = \sqrt{2}\sin t$. Тоді відповідь мала би вигляд

$$\int\sqrt{2-x^2}\,dx = arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}+C.$$

Відповідь: 1) $\int \sin^4 x\cos x dx = \frac{\sin^5 x}{5}+C$;

2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+5}+C$; 3) $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx = \frac{2}{5}\cdot(\ln x)^{5/2}+C$;

4) $\int\sqrt{2-x^2}\,dx = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}+C.$

2.4.3. Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами застосовується у випадку, коли підінтегральна функція складається з добутку двох множників певного виду.

Формула *інтегрування частинами* має вигляд

$$\int u dv = uv - \int v du, \tag{2.7}$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – функції, що мають неперервні похідні.

Основну частину інтегралів, обчислюваних методом інтегрування частинами, можна поділити на три групи (табл. 2.2).

Зауваження:

- до інтегралів третього виду формулу інтегрування частинами (2.7) застосовують двічі, отримуючи лінійне рівняння відносно початкового інтеграла, після чого його знаходять з отриманої рівності;
- для знаходження невизначеного інтегралу першого типу формулу інтегрування частинами (2.7) необхідно застосовувати n разів, де n – степінь полінома $P(x)$;

- метод інтегрування частинами також комбінують із іншими методами.

Таблиця 2.2

Інтеграли, обчислювані методом інтегрування частинами

	Вигляд інтеграла	u	dv
I	$\int P(x)\cdot e^{kx}dx$, $\int P(x)\cdot a^{kx}dx$ $\int P(x)\cdot \sin xdx$, $\int P(x)\cdot \cos xdx$, де $P(x)$ - поліном, $k\in R, k\neq 0$	$u=P(x)$	$dv=e^{kx}dx$, $dv=a^{kx}dx$, $dv=\sin xdx$, $dv=\cos xdx$
II	$\int P(x)\cdot \arcsin xdx$, $\int P(x)\cdot \arccos xdx$, $\int P(x)\cdot arctgxdx$, $\int P(x)\cdot arcctgxdx$, $\int P(x)\cdot \ln xdx$, $\int P(x)\cdot \log_a xdx$, де $P(x)$ - поліном	$u=\arcsin x$, $u=\arccos x$, $u=arctgx$, $u=arcctgx$, $u=\ln x$, $u=\log_a x$	$dv=P(x)dx$
III	$\int a^{kx}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{kx}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{kx}\cos\beta x\,dx$, $\int a^{kx}\cos\beta x\,dx$, де $k,\beta\in R,\ k\neq 0, \beta\neq 0$	Ці інтеграли знаходять двократним інтегруванням частинами	

Приклад 2.4. Методом інтегрування частинами обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int x\cdot e^{-2x}dx$;

2) $\int\left(3x^2+4x+1\right)\cdot\ln x dx$;

3) $\int e^{3x}\cdot\cos(2x)dx$.

Розв'язання:

$$1)\ \int x\cdot e^{-2x}dx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=e^{-2x}dx \\ du=(x)'\,dx=dx, & v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C;$$

$$2)\ \int\left(3x^2+4x+1\right)\cdot\ln x dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & dv=\left(3x^2+4x+1\right)dx \\ du=(\ln x)'\,dx=\frac{dx}{x}, & v=\int\left(3x^2+4x+1\right)dx=x^3+2x^2+x\end{matrix}\right|=$$

$$=\left(x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x-\int\left(x^3+2x^2+x\right)\cdot\frac{dx}{x}=\left(x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x-$$

$$-\int\left(x^2+2x+1\right)dx=\left(x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x-\frac{x^3}{3}-x^2-x+C;$$

$$3)\ \int e^{3x}\cdot\cos(2x)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{3x} & dv=\cos(2x)dx \\ du=\left(e^{3x}\right)'dx=3e^{3x}dx & v=\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}\sin(2x)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\sin(2x)-\frac{3}{2}\int e^{3x}\cdot\sin(2x)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{3x} & dv=\sin(2x)dx \\ du=3e^{3x}dx & v=\int\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\sin(2x)-$$

$$-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\cos(2x)+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos(2x)dx\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x}\cos(2x)-\frac{9}{4}\int e^{3x}\cos(2x)dx+C.$$

Тобто

$$\int e^{3x}\cdot\cos(2x)dx=\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x}\cdot\cos(2x)-\frac{9}{4}\int e^{3x}\cdot\cos(2x)dx+C.$$

Позначимо $I=\int e^{3x}\cdot\cos(2x)dx$ і складемо рівняння відносно невідомого інтеграла:

$$I=\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x}\cdot\cos(2x)-\frac{9}{4}I+C,$$

$$I+\frac{9}{4}I=\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x}\cdot\cos(2x)+C,$$

$$\frac{13}{4}I=\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x}\cdot\cos(2x)+C.$$

Розв’язуючи отримане лінійне рівняння відносно змінної I, отримаємо

$$I=\frac{4}{13}\left(\frac{1}{2}e^{3x}\cdot\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x}\cdot\cos(2x)\right)+C.$$

Отже,

$$I=\int e^{3x}\cdot\cos(2x)dx=e^{3x}\left(\frac{2}{13}\sin(2x)+\frac{3}{13}\cos(2x)\right)+C.$$

Відповідь: 1) $\int x\cdot e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$;

2) $\int\left(3x^2+4x+1\right)\cdot\ln x dx=\left(x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x-\frac{x^3}{3}-x^2-x+C;$

3) $\int e^{3x}\cdot\cos(2x)dx=e^{3x}\left(\frac{2}{13}\sin(2x)+\frac{3}{13}\cos(2x)\right)+C.$

2.4.4. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

I. ***Інтеграли вигляду*** $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Такі інтеграли зводять до табличних, виділяючи повний квадрат у знаменнику.

Приклад 2.5. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{dx}{x^2+4x+13}$;

2) $\int\frac{dx}{4x^2+10x-24}$.

Розв’язання:

1) $$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\int\frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\begin{vmatrix}t=x+2\\ dt=dx\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{1}{3}arctg\left(\frac{t}{3}\right)+C=\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right)+C;$$

2) $$\int\frac{dx}{4x^2+10x-24}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+\frac{5}{2}x-6\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-6}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{121}{16}}=\begin{vmatrix}t=x+\frac{5}{4}\\ dt=dx\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot {}^{11}\!/_{4}}\cdot\ln\left|\frac{t-{}^{11}\!/_{4}}{t+{}^{11}\!/_{4}}\right|+C=\frac{1}{22}\cdot\ln\left|\frac{4t-11}{4t+11}\right|+C=\frac{1}{22}\cdot\ln\left|\frac{4\left(x+{}^{5}\!/_{4}\right)-11}{4\left(x+{}^{5}\!/_{4}\right)+11}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{22}\cdot\ln\left|\frac{4x-6}{4x+16}\right|+C=\frac{1}{22}\cdot\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|+C\,.$$

Відповідь: 1) $\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right)+C;$

2) $\int\frac{dx}{4x^2+10x-24}=\frac{1}{22}\cdot\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|+C\,.$

II. *Інтеграли вигляду* $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$

Цей інтеграл складніший від попереднього (приклад 2.5), тому що в чисельнику маємо лінійну функцію від x. Розглянемо на прикладі один зі способів знаходження інтегралів такого вигляду.

Приклад 2.6. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{x+5}{x^2+4x+7}\,dx$;

2) $\int\frac{3x+1}{2x^2+8x+1}\,dx$.

Розв'язання:

1) $\int\frac{x+5}{x^2+4x+7}\,dx=\left|\begin{array}{l}\textit{Спочатку в знаменнику}\\ \textit{виділяємо повний квадрат}\end{array}\right|=$

$$=\int\frac{x+5}{(x+2)^2+3}dx=\left|\begin{array}{l}\textit{Робимо заміну}\\ t=x+2,\ x=t\text{-}2\\ dt=dx\\ \textit{та розбиваємо інтеграл}\\ \textit{на два доданки}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{t\text{-}2+5}{t^2+3}\,dt=\int\frac{tdt}{t^2+3}+3\int\frac{dt}{t^2+3}=\left|\ \textit{За табл. } 2.1.\ \right|=$$

$$=\frac{1}{2}ln\left|t^2+3\right|+\frac{3}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}ln\left|(x+2)^2+3\right|+\sqrt{3}arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}ln\left|x^2+4x+7\right|+\sqrt{3}arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+C;$$

2) $$\int\frac{3x+1}{2x^2+8x+1}dx=\left|\begin{array}{l}\textit{В знаменнику}\\ \textit{виділяємо повний квадрат}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{3x+1}{x^2+4x+\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{3x+1}{(x+2)^2-\frac{7}{2}}dx=\left|\begin{array}{l}\textit{Аналогічно } 1)\ \textit{робимо заміну}\\ t=x+2,\ x=t-2\\ dt=dx\\ \textit{та розбиваємо інтеграл}\\ \textit{на два доданки}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{3(t\text{-}2)+1}{t^2-7/2}dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{t}{t^2-7/2}dt-\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t^2-7/2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{7}{2}\right|-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{7}{2}}}{t+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left|x^2+4x+\frac{1}{2}\right|-\frac{5\sqrt{14}}{28}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\left(x+2\right)-\sqrt{7}}{\sqrt{2}\left(x+2\right)+\sqrt{7}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left|x^2+4x+\frac{1}{2}\right|-\frac{5\sqrt{14}}{28}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{\frac{7}{2}}}{x+2+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+C\,.$$

Відповідь:

1) $\int\frac{x+5}{x^2+4x+7}dx=\frac{1}{2}ln\left|x^2+4x+7\right|+\sqrt{3}\,arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+C$;

2) $\int\frac{3x+1}{2x^2+8x+1}dx=\frac{3}{4}\ln\left|x^2+4x+\frac{1}{2}\right|-\frac{5\sqrt{14}}{28}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{\frac{7}{2}}}{x+2+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+C$.

III. ***Інтеграли вигляду*** $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Такі інтеграли знаходять аналогічно п. I.

Приклад 2.7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+12}}$;

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Розв'язання:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+12}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-1\right)^2+3}}=$

$$=\left|\begin{array}{l} t=x-1 \\ dt=dx \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{t^2+3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right|+C;$$

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}=\left|\begin{array}{l} t=x-\frac{3}{4} \\ dt=dx \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{16}-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4t}{5}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4\left(x-\frac{3}{4}\right)}{5}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right)+C.$$

Відповідь: 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+12}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right|+C;$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right)+C.$

IV. ***Інтеграли вигляду*** $\displaystyle\int\frac{Ax+By}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Метод знаходження такого інтегралу такий самий, як і для п. **II**.

Приклад 2.8. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{5-x}{\sqrt{6-x^2+7x}}\,dx .$$

Розв’язання

$$\int \frac{5-x}{\sqrt{6-x^2+7x}}\,dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{6-\left(x^2-7x\right)}}\,dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{6-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{4}}}\,dx =$$

$$= \int \frac{5-x}{\sqrt{\frac{73}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = x-\frac{7}{2}, \\ x = t+\frac{7}{2} \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{5-\left(t+\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{\frac{73}{4}-t^2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{3/2-t}{\sqrt{\frac{73}{4}-t^2}}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{73}{4}-t^2}} - \int \frac{t}{\sqrt{\frac{73}{4}-t^2}}\,dt = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{\frac{73}{4}-t^2} \\ du = -\frac{t}{\sqrt{\frac{73}{4}-t^2}}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2t}{\sqrt{73}}\right) + C + \int du = \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2t}{\sqrt{73}}\right) + u + C = \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{73}}\right) +$$

$$+\sqrt{\frac{73}{4}-t^2} + C = \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2x-7}{\sqrt{73}}\right) + \sqrt{6-x^2+7x} + C .$$

Відповідь: $\int \frac{5-x}{\sqrt{6-x^2+7x}}\,dx = \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2x-7}{\sqrt{73}}\right) + \sqrt{6-x^2+7x} + C .$

2.4.5. Інтегрування раціональних функцій

Визначення. Відношення двох многочленів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} \qquad (2.8)$$

називається *раціональним дробом або раціональною функцією.*

Визначення. Раціональний дріб (2.8) називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менша від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$. Якщо $n \geq m$, то раціональний дріб (2.8) називається *неправильним*.

Інтегрування раціональних функцій зводиться до інтегрування *найпростіших* дробів.

Визначення. Найпростішими (елементарними) раціональними дробами називаються дроби чотирьох видів:

I. $\dfrac{A}{x-a}$.

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$.

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$. (2.9)

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k \geq 2,\ k \in N$, $p^2 - 4q < 0.$

Інтеграли від найпростіших дробів мають вигляд:

I. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A\ln|x-a| + C$.

II. $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d\,(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$.

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ (п. 2.4.4):

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \left| \begin{array}{r} t = x + \frac{p}{2} \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dt =$$

$$= \int \frac{At}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dt + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dt .$$

IV. $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k \geq 2,\ k \in N,\ p^2 - 4q < 0$:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \left| \begin{array}{r} t = x + \frac{p}{2} \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^k}\,dt =$$

$$= \int \frac{At}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^k}\,dt + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^k}\,dt = \left| \begin{array}{l} \textit{позначимо} \\ a^2 = q - \frac{p^2}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{At}{\left(t^2 + a^2\right)^k}\,dt + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} .$$

Перший інтеграл знаходять за допомогою заміни $u = t^2 + a^2$. Для знаходження другого використовують рекурентну формулу

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} = \frac{t}{2a^2\left(k-1\right)\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2\left(k-1\right)} I_{k-1}\,, \tag{2.10}$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C\,.$$

Отже, послідовно можна знайти інтеграл I_k для будь-якого натурального показника k.

Теорема 2.4. Будь-який *неправильний* раціональний дріб можна записати у вигляді суми многочлена (цілої частини) і правильного раціонального дробу.

Тобто якщо задано неправильний раціональний дріб (2.8) ($n \geq m$), то, виконавши ділення, його можна подати як суму многочлена $L_{n-m}\left(x\right)$ і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)} = L_{n-m}\left(x\right) + \frac{W_r\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}\,,\ n \geq m\,, \tag{2.11}$$

де $L_{n-m}\left(x\right)$ – ціла частина;

$\dfrac{W_r\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}$ – правильний раціональний дріб.

Алгоритм ділення многочлена (полінома) $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$

Щоб знайти цілу частину $L_{n-m}(x)$ і залишок після ділення $W_r(x)$ (2.11), необхідно:

1. Записати обидва поліноми в порядку зниження степеня. Якщо в будь-якому поліномі відсутній доданок з відповідним показником степеня змінної, то його треба дописати з нульовим коефіцієнтом.

2. Доданок, що містить найбільший степінь невідомої полінома $P_n(x)$, ділимо на доданок, що містить найбільший степінь невідомої полінома $Q_m(x)$. Результат записуємо під роздільною лінією.

3. Перемножуємо отриманий результат на всі члени полінома $Q_m(x)$ і записуємо результат під членами полінома $P_n(x)$ з відповідними степенями.

4. Віднімаємо почленно доданки з однаковими степенями.

5. До отриманого результату приписуємо члени, що залишилися в поліномі $P_n(x)$.

6. Ділимо тепер доданок, що містить найбільший степінь невідомої отриманого полінома на доданок, що містить найбільший степінь невідомої полінома $Q_m(x)$. Повторюємо кроки 2-5.

7. Ці кроки повторюємо до тих пір, поки знову отриманий поліном не матиме степінь, менший за степінь $Q_m(x)$. Цей поліном і буде *залишком* від ділення $W_r(x)$.

8. Поліном, записаний під роздільною лінією, є *цілою частиною* $L_{n-m}(x)$.

Теорема 2.5. Будь-який правильний раціональний дріб (2.8) ($n < m$) можна подати у вигляді суми найпростіших (елементарних) дробів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{H_1}{x-x_r}+\frac{H_2}{(x-x_r)^2}+\ldots+\frac{H_{k_r}}{(x-x_r)^{k_1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{l_1}x+C_{l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}\right)+\ldots+ \tag{2.12}$$

$$+\left(\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_sx+q_s}+\ldots+\frac{B_{l_s}x+C_{l_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}\right),$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{ls}, C_1, C_2, \ldots, C_{ls}, H_1, H_2, \ldots, H_{k_r}$ - дійсні числа.

Для розкладання раціонального дробу на елементарні знаменник раціонального дробу розкладають на множники:

$$Q_m(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_r)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s},$$

де $k_1, \ldots, k_r$ - кратність дійсних коренів $x_1, \ldots, x_r$ відповідно, а квадратні тричлени $x^2+p_ix+q_i$ ($i=1,\ldots,s$) не мають дійсних коренів.

Зауваження. Кількість доданків у сумі (2.12) і їхній вигляд визначаються коренями знаменника $Q_m(x)$ за правилом:

1) якщо у знаменнику вихідного дробу присутній множник $(x-x_1)^{k_r}$, то до суми елементарних дробів входять дроби першого та другого типу з показниками степеня від 1 до k_r включно (табл. 2.3):

$$\frac{A_1}{x-x_r}+\frac{A_2}{(x-x_r)^2}+\ldots+\frac{A_{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}}; \tag{2.13}$$

2) якщо у знаменнику вихідного дробу присутній множник вигляду $\left(x^2+p_s x+q_s\right)^{l_s}$, то до суми елементарних дробів входять дроби третього та четвертого типу з показниками степеня від 1 до l_s включно (табл. 2.3):

$$\frac{B_1 x+C_1}{x^2+p_s x+q_s}+\ldots+\frac{B_{l_s} x+C_{l_s}}{\left(x^2+p_s x+q_s\right)^{l_s}}. \tag{2.14}$$

Таблиця 2.3

Правило розкладання на елементарні дроби

Множник знаменника	Елементарні дроби
$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-b)^k$	$\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}$
x^2+px+q	$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
$(x^2+px+q)^l$	$\frac{A_1 x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2 x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_l x+B_l}{(x^2+px+q)^l}$

Наприклад:

1) $\frac{x^2+4}{(x+1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$,

2) $\frac{x^2+4}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2}$,

3) $\frac{x^2+4}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$,

4) $$\frac{x^2+4}{(x^2+1)^3(x^2+6x+10)^2}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A_3x+B_3}{\left(x^2+1\right)^3}+$$
$$+\frac{A_4x+B_4}{x^2+6x+10}+\frac{A_5x+B_5}{\left(x^2+6x+10\right)^2}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів елементарних дробів використовують метод *невизначених коефіцієнтів,* або метод *окремих значень аргументу,* або комбінацію цих методів.

В основі методу невизначених коефіцієнтів лежить такий принцип: у рівних многочленів коефіцієнти при однакових степенях змінної також однакові. У результаті знаходження коефіцієнтів розкладу зводиться до розв’язання системи лінійних рівнянь.

При застосуванні методу окремих значень аргументу змінній надають конкретні значення стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів потрібно знайти.

На практиці зручно комбінувати обидва методи: спочатку деякі коефіцієнти визначати методом окремих значень аргументу, надаючи змінній значення дійсних коренів знаменника, а решту коефіцієнтів знаходити методом невизначених коефіцієнтів.

Алгоритм інтегрування раціональних функцій:

1) якщо підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу (2.11);

2) знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб записують у вигляді суми найпростіших дробів (табл. 2.3) і знаходять невідомі коефіцієнти розкладу;

3) інтегрують суму цілої частини та найпростіших дробів.

Приклад 2.9. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx$;

2) $\int \frac{\left(x^2+5\right)dx}{(x-1)\left(x^2+4x+11\right)}$;

3) $\int \frac{x^2+2x+11}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\,dx$;

4) $\int \frac{x^5+2x^3+1}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$;

5) $\int \frac{\left(1-x^2\right)^5}{4x^2\left(1+x^2\right)^4}\,dx$.

Розв'язання:

1) $\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx$.

Підінтегральний вираз – правильний раціональний дріб. Запишемо його у вигляді суми найпростіших (елементарних) дробів (2.12), попередньо розклавши знаменник на лінійні множники:

$$\frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}=\frac{x^2+2}{x\left(x^2+x-2\right)}=\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A,B,C методом невизначених коефіцієнтів. Для цього приведемо до спільного знаменника праву частину:

$$\frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Оскільки знаменники рівні, то для знаходження коефіцієнтів A, B, C отримаємо тотожність

$$x^2+2=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x

$$x^2+0\cdot x+2=A\left(x^2+x-2\right)+B\left(x^2+2x\right)+C\left(x^2-x\right),$$

$$1\cdot x^2+0\cdot x+2=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x+(-2A),$$

отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ A+2B-C=0, \\ -2A=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1, \\ B=1, \\ C=1. \end{cases}$$

Отже,

$$\frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}.$$

Зауважимо, що для цього прикладу дуже зручно було застосувати метод окремих значень аргументу. Дійсно, надаючи в тотожності

$$x^2+2=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

змінній значення дійсних коренів знаменника $x=0,\ x=1,\ x=-2$, отримаємо

$x=0: 0^2+2=A(0-1)(0+2)+B\cdot 0\cdot(0+2)+C\cdot 0\cdot(0-1)\Rightarrow 2=-2A, A=-1$,

$x=1: 1^2+2=A(1-1)(1+2)+B\cdot 1\cdot(1+2)+C\cdot 1\cdot(1-1)\Rightarrow 3=3B,\ B=1,$

$x=\text{-}2: (\text{-}2)^2+2=A(-2-1)(-2+2)+B\cdot(-2)\cdot(-2+2)+C\cdot(-2)\cdot(-2-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 6=6C,\ C=1.$

Як бачимо, отримаємо таку саму суму найпростіших (елементарних) дробів:

$$\frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}.$$

Використовуючи отриманий розклад, знайдемо невизначений інтеграл

$$\int\frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|+\ln|x+2|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right|+C=\ln\left|\frac{x^2+x-2}{x}\right|+C.;$$

2) $\int\frac{\left(x^2+5\right)dx}{(x-1)\left(x^2+4x+11\right)}$.

Підінтегральний вираз – правильний раціональний дріб. Запишемо його у вигляді суми найпростіших (елементарних) дробів (табл. 2.3). Знаменник містить квадратний тричлен і лінійний множник. Цей дріб за правилом (2.12) розкладається на суму найпростіших дробів I і III видів:

$$\frac{x^2+5}{(x-1)\left(x^2+4x+11\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+11}.$$

Зводимо до спільного знаменника праву частину та отримаємо

$$x^2+5=A\left(x^2+4x+11\right)+(Bx+C)(x-1).$$

Підставимо дійсний корінь $x=1$ знаменника $(x-1)\left(x^2+4x+11\right)$ у ліву і праву частини цієї тотожності

$$x=1: 1^2+5=A\left(1^2+4\cdot 1+11\right)+\left(B\cdot 1+C\right)(1-1),$$

$$6=16A\Rightarrow A=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

Підставимо інше значення невідомої, наприклад $x=0$ в $x^2+5=A\left(x^2+4x+11\right)+\left(Bx+C\right)(x-1)$. Тоді, ураховуючи, що $A=\frac{3}{8}$, отримаємо

$$5=11A-C\Rightarrow C=11A-5=11\cdot\frac{3}{8}-5=-\frac{7}{8}.$$

Для знаходження невідомого коефіцієнта B використаємо метод невідомих коефіцієнтів, прирівнявши коефіцієнти при x^2:

$$x^2\Big\| 1=A+B\Rightarrow B=1-A=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$$

Отримаємо розклад підінтегрального виразу

$$\frac{x^2+5}{(x-1)\left(x^2+4x+11\right)}=\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5x-7}{8\left(x^2+4x+11\right)}.$$

Замінюючи підінтегральний вираз отриманим розкладом на елементарні дроби, знаходимо заданий інтеграл:

$$\int\frac{\left(x^2+5\right)dx}{(x-1)\left(x^2+4x+11\right)}=\int\left(\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5x-7}{8\left(x^2+4x+11\right)}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{8}\int\frac{5x-7}{x^2+4x+11}\,dx.$$

Перший доданок цієї суми – елементарний дріб першого типу (2.9):

$$\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|+C.$$

Другий доданок знаходимо методом, показаним у п. 2.4.4:

$$\int \frac{5x-7}{x^2+4x+11}dx = \int \frac{5x-7}{(x+2)^2+7}dx = \left| \begin{array}{l} t = x+2, \\ x = t-2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{5(t-2)-7}{t^2+7}dt =$$

$$= \int \frac{5t-10-7}{t^2+7}dt = \int \frac{5t-17}{t^2+7}dt = 5\int \frac{tdt}{t^2+7} - 17\int \frac{dt}{t^2+7} = \frac{5}{2}\ln\left|t^2+7\right| -$$

$$-17 \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{t}{\sqrt{7}} + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+4x+11\right| - \frac{17}{\sqrt{7}} arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right) + C .$$

Просумувавши отримані інтеграли, остаточно отримаємо

$$\int \frac{\left(x^2+5\right)dx}{(x-1)\left(x^2+4x+11\right)} = \frac{3}{8}\ln|x-1| + \frac{5}{16}\ln\left|x^2+4x+11\right| - \frac{17}{8\sqrt{7}} arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right) + C.;$$

3) $\int \frac{x^2+2x+11}{(x-1)^2 \cdot (x+2)}dx .$

Підінтегральна функція є правильним дробом, знаменник якого має дійсні корені. Такий дріб розкладається на суму найпростіших дробів I і II видів методом невизначених коефіцієнтів. За табл. 2.3,

$$\frac{x^2+2x+11}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} .$$

Застосуємо метод невідомих коефіцієнтів. Складаємо тотожність для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\frac{x^2+2x+11}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} .$$

Звідси

$$x^2+2x+11=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2,$$

$$x^2+2x+11=A\left(x^2+x-2\right)+B(x+2)+C\left(x^2-2x+1\right),$$

$$1\cdot x^2+2x+11=(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+C=1, \\ x^1 & A+B-2C=2, \\ x^0 & -2A+2B+C=11; \end{array} \quad \begin{cases} A+C=1, \\ A+B-2C=2, \\ -2A+2B+C=11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{2}{9}, \\ B=\dfrac{14}{3}, \\ C=\dfrac{11}{9}. \end{cases}$$

Інтегруємо підінтегральну функцію, ураховуючи знайдені коефіцієнти:

$$\int \frac{x^2+2x+11}{(x-1)^2\cdot(x+2)}dx=\int\left(-\frac{2}{9(x-1)}+\frac{14}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{11}{9}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{14}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{11}{9}\ln|x+2|+C.;$$

4) $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^3+1}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

Підінтегральний вираз – неправильний раціональний дріб. За формулою (2.11) виділимо цілу частину раціонального дробу шляхом ділення чисельника на знаменник у стовпчик.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+0\cdot x^4+2x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1 & x^4+2x^3+2x^2 \\
\cline{2-2}
-\;x^5+2\cdot x^4+2x^3 & \underbrace{x-2}_{\textit{ціла частина}} \\
\cline{1-1}
-2\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1 & \\
-\;-2\cdot x^4-4x^3-4\cdot x^2 & \\
\cline{1-1}
\underbrace{4x^3+4\cdot x^2+0\cdot x+1}_{\textit{залишок}} &
\end{array}
$$

Отримаємо

$$\frac{x^5+2x^3+1}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Розкладаємо правильний раціональний дріб $\frac{4x^3+4x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2}$ на суму найпростіших дробів (табл. 2.3):

$$\frac{4x^3+4x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+1}{x^2\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Приводимо праву частину до спільного знаменника та отримаємо тотожність

$$4x^3+4x^2+1=Ax\left(x^2+2x+2\right)+B\left(x^2+2x+2\right)+\left(Cx+D\right)x^2,$$

тобто

$$4x^3+4x^2+1=\left(A+C\right)x^3+\left(2A+B+D\right)x^2+\left(2A+2B\right)x+2B.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A,B,C,D складаємо систему рівнянь

$$\begin{array}{c||c} x^3 & A+C=4, \\ x^2 & 2A+B+D=4, \\ x^1 & 2A+2B=0, \\ x^0 & 2B=1; \end{array} \qquad \begin{cases} A+C=4, \\ 2A+B+D=4, \\ 2A+2B=0, \\ 2B=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{2}, \\ B=\dfrac{1}{2}, \\ C=\dfrac{9}{2}, \\ D=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Як наслідок, маємо

$$\frac{4x^3+4x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{-1/2}{x}+\frac{1/2}{x^2}+\frac{9/2\,x+9/2}{x^2+2x+2}=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}.$$

Тоді підінтегральний вираз має вигляд

$$\frac{x^5+2x^3+1}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}.$$

Інтегруємо отриману рівність:

$$\int\frac{x^5+2x^3+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\int\left(x-2-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2x}+\frac{9}{2}\int\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx.$$

Знайдемо останній невизначений інтеграл окремо (п. 2.4.4):

$$\int\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+1}dx=\begin{vmatrix} t=x+1 \\ dt=dx \end{vmatrix}=\int\frac{t}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+C.$$

Отже, отримаємо загальну відповідь заданого інтеграла

$$\int \frac{x^5+2x^3+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{9}{4}\ln|x+2x+2| + C;$$

5) $\int \frac{\left(1-x^2\right)^5}{4x^2\left(1+x^2\right)^4}\,dx$.

Наведемо стисло розв'язання, опускаючи допоміжні розрахунки:

$$\int \frac{\left(1-x^2\right)^5}{4x^2\left(1+x^2\right)^4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(-1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{C_3x+D_3}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{C_4x+D_4}{\left(x^2+1\right)^4} \right)dx =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2} + \frac{2}{x^2+1} - \frac{8}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{12}{\left(x^2+1\right)^3} - \frac{8}{\left(x^2+1\right)^4} \right)dx.$$

Із використанням формули (2.10) отримаємо

$$k=2:\ \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + arctgx \right) + C,$$

$$k=3:\ \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + arctgx \right) + C =$$

$$= \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1} + arctgx \right) + C,$$

$$k=4:\ \int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5}{6}\left(\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1}+arctgx\right)\right)+C=$$

$$=\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5}{48}\left(\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3x}{x^2+1}+3arctgx\right)+C.$$

Тоді

$$=\int\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4x^2}+\frac{2}{x^2+1}-\frac{8}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{12}{\left(x^2+1\right)^3}-\frac{8}{\left(x^2+1\right)^4}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4x}+2arctgx-8\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+arctgx\right)+$$

$$+12\left(\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1}+arctgx\right)\right)-$$

$$-8\left(\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5}{48}\left(\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3x}{x^2+1}+3arctgx\right)\right)=$$

$$=-\frac{x}{4}-\frac{1}{4x}-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)}+\frac{4x}{3\left(x^2+1\right)^2}-\frac{4x}{3\left(x^2+1\right)^3}+C\,.$$

Відповідь: 1) $\int\frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx=\ln\left|\frac{x^2+x-2}{x}\right|+C$;

2) $\int\frac{\left(x^2+5\right)dx}{(x-1)\left(x^2+4x+11\right)}=$

$$=\frac{3}{8}\ln|x-1|+\frac{5}{16}\ln\left|x^2+4x+11\right|-\frac{17}{8\sqrt{7}}arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right)+C\,;$$

3) $\int \frac{x^2+2x+11}{(x-1)^2\cdot(x+2)}dx = -\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{11}{9}\ln|x+2| + C$;

4) $\int \frac{x^5+2x^3+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{9}{4}\ln|x+2x+2| + C$;

5) $\int \frac{\left(1-x^2\right)^5}{4x^2\left(1+x^2\right)^4}dx = -\frac{x}{4} - \frac{1}{4x} - \frac{2x}{\left(x^2+1\right)} + \frac{4x}{3\left(x^2+1\right)^2} - \frac{4x}{3\left(x^2+1\right)^3} + C$.

2.4.6. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо методи, застосовувані для знаходження інтегралів вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{2.15}$$

де R – раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$.

Будь-який інтеграл (2.15) зводиться до обчислення інтеграла від раціональної функції за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки*

$$t = tg\frac{x}{2}. \tag{2.16}$$

Виразимо dx, $\sin x$ і $\cos x$ через тангенс половинного кута:

$$x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad (2.17)$$

$$\cos x = \frac{\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Як бачимо, завдяки універсальній тригонометричній підстановці (2.16) інтеграл (2.15) перетворюється на інтеграл від раціональної функції змінної t

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

Приклад 2.10. Обчислити невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{5+4\cos x}$.

Розв’язання

Використовуємо універсальну тригонометричну підстановку (2.16) і формули (2.17):

$$\int\frac{dx}{5+4\cos x} = \int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(5+4\cdot\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right)} = \int\frac{2\left(1+t^2\right)dt}{\left(1+t^2\right)\left(5+5t^2+4-4t^2\right)} =$$

$$= 2\int\frac{dt}{9+t^2} = \frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C = \frac{2}{3}arctg\left(\frac{1}{3}tg\frac{x}{2}\right)+C.$$

Відповідь: $\int\frac{dx}{5+4\cos x} = \frac{2}{3}arctg\left(\frac{1}{3}tg\frac{x}{2}\right)+C.$

Зауваження. Хоча за допомогою універсальної тригонометричної підстановки завжди можна перейти від інтеграла (2.15) до інтеграла від раціональної функції аргументу t, на практиці ця підстановка доволі часто призводить до громіздких підінтегральних виразів, значно ускладнюючи розв'язання.

Наприклад, застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку до $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$, отримаємо

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\left(1-t^2\right)^5}{t^2 \cdot \left(1+t^2\right)^4} dt .$$

Для інтегрування отриманого раціонального дробу потрібно буде спочатку виділити цілу частину, потім розкласти на елементарні дроби, серед яких будуть дроби четвертого типу, що потребують застосування рекурентних формул. Але, як буде показано в прикладі 2.11, це можна зробити значно простіше!

Тому розглянемо інші підстановки, що дадуть змогу спростити знаходження інтегралів.

1. Інтегрування функцій, парних (непарних) відносно $\sin x$, $\cos x$

*Я*кщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тобто функція непарна відносно $\sin x$, то необхідно зробити заміну:

$$t = \cos x,\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ \sin x = \sqrt{1-t^2} . \qquad (2.18)$$

*Я*кщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тобто функція непарна відносно $\cos x$, то необхідно зробити заміну:

$$t = \sin x,\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ \cos x = \sqrt{1-t^2}. \qquad (2.19)$$

Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тобто функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, то необхідно зробити заміну:

$$t = tgx,\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad (2.20)$$

або

$$t = ctgx,\ dx = -\frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \ \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}. \qquad (2.21)$$

Приклад 2.11. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$;

2) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$.

Розв’язання:

1) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$.

Підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, тому, за формулою (2.19),

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^2} dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^2} dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2} - 2 + t^2 \right) dt = -\frac{1}{t} - 2t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Як бачимо, таким методом ми швидко отримали відповідь.

Зауваження. Цей інтеграл можна також обчислювати за допомогою універсальної тригонометричної підстановки (2.16) і, ураховуючи приклад 2.9, п.5, отримати

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{4x}{\left(x^2+1\right)} + \frac{8x}{3\left(x^2+1\right)^2} - \frac{8x}{3\left(x^2+1\right)^3} + C;$$

2) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$.

Підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, тому, за формулою (2.20),

$$\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x} =, \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{7}{1+t^2} + 16 \cdot \dfrac{t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{7+16t^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} arctg\left(\frac{4t}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{1}{4\sqrt{7}} arctg\left(\frac{4tgx}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

Відповідь: 1) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$;

2) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x} = \frac{1}{4\sqrt{7}} arctg\left(\frac{4tgx}{\sqrt{7}}\right) + C$.

2. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$

Такі інтеграли – це окремий випадок інтегралів, розглянутих у попередньому пункті.

Якщо $m=2k+1$ (показник степеня синуса – непарне число), то

$$\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx=\sin^{2k+1}x\cdot\cos^n x\,dx=\sin^{2k}x\cdot\sin x\cdot\cos^n x\,dx=$$

$$=\left(1-\cos^2 x\right)^k\cdot\sin x\cdot\cos^n x\,dx=\left|\begin{array}{l} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx\end{array}\right|=-\left(1-t^2\right)^k\cdot t^n\,dt.$$

Тоді отримаємо

$$\int\sin^{2k+1}x\cdot\cos^n x\,dx=-\int\left(1-t^2\right)^k\cdot t^n\,dt.$$

Якщо $n=2k+1$ (показник степеня косинуса – непарне число), то

$$\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx=\sin^m x\cdot\cos^{2k+1}x\,dx=\sin^m x\cdot\cos^{2k}x\cdot\cos x\,dx=$$

$$=\sin^m x\cdot\cos^{2k}x\cdot\cos x\,dx=\left|\begin{array}{l} t=\sin x \\ dt=\cos x dx\end{array}\right|=\left(1-t^2\right)^k\cdot t^m\,dt.$$

Як наслідок,

$$\int\sin^m x\cdot\cos^{2k+1}x\,dx=\int\left(1-t^2\right)^k\cdot t^m\,dt.$$

Якщо m і n – парні натуральні числа, тобто потрібно знайти інтеграли виду

$$\int\sin^{2n}x\,dx,\ \int\cos^{2n}x\,dx,\ \int\sin^{2n}x\cdot\cos^{2k}x\,dx,\ m,n\in N,$$

то необхідно знизити степінь синуса або косинуса, застосувавши тригонометричні формули

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad (2.22)$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Якщо $m+n=-2k, k>0$, то використовують підстановки (2.20) або (2.21). Причому m і n можуть бути дробовими числами.

Зауваження. При знаходженні інтегралів такого вигляду після відповідної заміни змінної отримаємо інтеграли від степеневих функцій.

Приклад 2.12. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\, dx$;

2) $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x\, dx$;

3) $\int \sin^4 x\, dx$;

4) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx$.

Розв'язання:

1) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| =$

$$= -\int \left(1-t^2\right) \cdot t^2 dt = -\int \left(t^2 - t^4\right) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C;$$

2) $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x\, dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| =$

$$= \int t^4 \cdot \left(1-t^2\right)^2 dt = \int t^4 \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C;$$

3) $\int \sin^4 x\, dx$.

За формулою (2.22) знижуємо степінь підінтегрального виразу:

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right) = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(2-4\cos 2x+1+\cos 4x\right) = \frac{1}{8}\left(3-4\cos 2x+\cos 4x\right).$$

Отже, отримаємо

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int\left(3-4\cos 2x+\cos 4x\right)dx = \frac{1}{8}\left(3x-2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C =$$

$$= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;$$

4) $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx$.

Спочатку спрощуємо підінтегральний вираз:

$$\sin^4 x\cdot\cos^2 x = \sin^2 x\left(\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right) = \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{\sin^2 2x}{4} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-\cos 2x\right)\cdot\sin^2 2x.$$

Тоді отримаємо

$$\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int\left(1-\cos 2x\right)\cdot\sin^2 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx\cdot\cos 2xdx.$$

Розглянемо кожен інтеграл у правій частині окремо.

$$\int \sin^2 2x\,dx = \int\frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C,$$

$$\int \sin^2 2x\,dx \cdot \cos 2x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin 2x \\ dt = 2\cos 2x dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{6}\sin^3 2x + C.$$

Маємо загальну відповідь

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C;$$

Відповідь: 1) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C;$

2) $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x\,dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C;$

3) $\int \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;$

4) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$

Приклад 2.13. Обчислити невизначений інтеграл $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}}\,dx$.

Розв'язання

$$\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}}\,dx = \int \sqrt{tgx}\,\frac{dx}{\cos^2 x} \left| \begin{matrix} t = tgx, \;\; x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2},\; \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \sqrt{t} \cdot \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}} = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(tgx)^{3/2} + C.$$

Відповідь: $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}}\,dx = \frac{2}{3}(tgx)^{3/2} + C.$

3. Інтеграли вигляду $\int tg^n x\,dx$, $\int ctg^n x\,dx$, $n \in N$

До таких інтегралів треба застосовувати підстановку $t = tgx$ або $t = ctgx$ відповідно:

$$\int tg^n x\,dx = \left| \begin{array}{c} t = tg\,x,\; x = arctg\,t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^n}{t^2+1}dt,$$

$$\int ctg^n x\,dx = \left| \begin{array}{c} t = ctg\,x,\; x = arcctg\,t \\ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{t^n}{t^2+1}dt.$$

Приклад 2.14. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int tg^5 x\,dx$;

2) $\int ctg^6 x\,dx$.

Розв'язання:

1) $$\int tg^5 x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^5}{t^2+1}dt.$$

Після заміни отримаємо підінтегральну функцію – неправильний раціональний дріб. За формулою (2.11),

$$\begin{array}{r|l} t^5 & \;t^2+1 \\ \cline{2-2} -\;\underline{t^5 + t^3} & \;\underbrace{t^3 - t}_{\text{ціла частина}} \\ -t^3 & \\ -\;\underline{-t^3 - t} & \\ t(\text{залишок}) & \end{array}$$

тобто

$$\frac{t^5}{t^2+1}=t^3-t+\frac{t}{t^2+1},$$

як наслідок,

$$\int\frac{t^5}{t^2+1}dt=\int\left(t^3-t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|+C=$$

$$=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg^2x+1\right|+C=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-\ln\left|\cos x\right|+C;$$

2) $\int ctg^6x\,dx=\left|\begin{array}{l} t=ctgx \\ x=arcctgt \\ dx=-\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=-\int\frac{t^6}{t^2+1}dt.$

Аналогічно 1), за формулою (2.11),

$$\begin{array}{r|l} t^6 & \;t^2+1 \\ \cline{2-2} -\;\;t^6+t^4 & \underbrace{t^4-t^2+1}_{\text{ціла частина}} \\ \cline{1-1} -t^4 & \\ -\;\;-t^4-t^2 & \\ \cline{1-1} t^2 & \\ -\;\;t^2+1 & \\ \cline{1-1} -1(\text{залишок}) & \end{array}$$

$$-\int\frac{t^6}{t^2+1}dt=-\int\left(t^4-t^2+1+\frac{-1}{t^2+1}\right)dt=-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t-arcctgt+C=$$

$$=-\frac{ctg^5x}{5}+\frac{ctg^3x}{3}-ctgx-x+C.$$

Відповідь: 1) $\int tg^5 x\,dx = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln\left|\cos x\right| + C$;

2) $\int ctg^6 x\,dx = -\frac{ctg^5 x}{5} + \frac{ctg^3 x}{3} - ctgx - x + C$.

4. Інтеграли вигляду $\int \sin(ax)\cos(bx)dx$, $\int \cos(ax)\cos(bx)dx$, $\int \sin(ax)\sin(bx)dx$

Такі інтеграли обчислюються за допомогою відомих формул тригонометрії:

$$\begin{aligned}
\sin(ax)\cos(bx) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right), \\
\cos(ax)\cos(bx) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right), \\
\sin(ax)\sin(bx) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Приклад 2.15. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \sin 5x \cdot \cos 7x\,dx$;

2) $\int \cos 4x \cdot \cos 9x\,dx$;

3) $\int \sin 2x \cdot \cos 5x\,dx$.

Розв'язання

Ураховуючи, що $\sin(-x) = -sin\,x$, $\cos(-x) = \cos x$, отримаємо:

1) $\int \sin 5x \cdot \cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin(-2x) + \sin(12x)\right)dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 12x + C$;

2) $\int \cos 4x \cdot \cos 9x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 5x + \cos 13x\right)dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{26}\sin 13x + C$;

3) $\int \sin 2x \cdot \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin\left(-3x\right) + \sin 7x\right)dx = \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C$.

Відповідь: 1) $\int \sin 5x \cdot \cos 7x\,dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 12x + C$;

2) $\int \cos 4x \cdot \cos 9x\,dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{26}\sin 13x + C$;

3) $\int \sin 2x \cdot \cos 5x\,dx = \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C$.

2.4.7. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Визначення. Ірраціональним називається алгебраїчний вираз, що містить операцію добування кореня.

1. ***Інтеграли вигляду*** $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(ax+b\right)^m}\right)dx,\ m,n \in N$

Зауваження. Символ $R(x)$ означає раціональну залежність від змінної x .

Такі інтеграли обчислюються за допомогою заміни

$$t^n = ax + b,$$

з якої отримаємо

$$x = \frac{1}{a}\left(t^n - b\right),\ dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

Приклад 2.16. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{\left(2x+5\right)^2}}$.

Розв'язання

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{\left(2x+5\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} t^3 = 2x+5 \\ x = \frac{1}{2}\left(t^3 - 5\right) \\ dx = \frac{3}{2}t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}\left(t^3-5\right)\cdot\frac{3}{2}t^2dt}{t^2} = \frac{3}{4}\int\left(t^3-5\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{t^4}{4} - 5t\right) + C = \frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(2x+5\right)^4} - \frac{15}{4}\sqrt[3]{2x+5} + C.$$

Відповідь: $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{\left(2x+5\right)^2}} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(2x+5\right)^4} - \frac{15}{4}\sqrt[3]{2x+5} + C$.

2. *Інтеграли вигляду* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx$, $m,n \in N$

У такому випадку необхідно зробити заміну

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Тоді

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\; x = \frac{d\cdot t^n - b}{a - c\cdot t^n},\; dx = \frac{ad-bc}{\left(a-ct^n\right)^2} n t^{n-1}dt .$$

Приклад 2.17. Обчислити невизначений інтеграл $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^2}=\left|\begin{array}{l} t^2=\frac{x-1}{x+1} \\ x-1=t^2\left(x+1\right) \\ x=\frac{t^2+1}{1-t^2} \\ dx=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt \end{array}\right|=\int\frac{t\cdot\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}\cdot\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt=$$

$$=4\int\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt=4\int t\cdot\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} \textit{За формулою}\ (2.7): u=t; dv=\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt; du=dt; \\ v=\int\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=\left|\begin{array}{l} z=1+t^2 \\ dz=2tdt \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{2z}=-\frac{1}{2\left(1+t^2\right)} \end{array}\right|=$$

$$=4\left(-\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=-\frac{2t}{1+t^2}+2arctgt+C=$$

$$=-2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{x+1}}+2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C==-2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{x+1}{2x}+$$

$$+2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C=-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C.$$

Відповідь: $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$.

3. *Інтеграли вигляду*

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

$$m_1, m_2, ..., m_k \in N, \;\; n_1, n_2, ..., n_k \in N$$

Для обчислення такого виду інтегралів необхідно використовувати заміну змінної

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

де n - найменше спільне кратне знаменників показників степеня

$$n = НСК\left(n_1, n_2, ..., n_k\right).$$

Приклад 2.18. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

Розв'язання

Маємо $x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{6}}, x^{\frac{1}{3}}$. Тобто $n_1 = 3,\ n_2 = 6$. Оскільки $n = НСК\left(3; 6\right) = 6$, застосовуємо підстановку $x = t^6$:

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx = \left| \begin{array}{l} x = t^6,\ dx = 6t^5dt, \\ x^{\frac{2}{3}} = \left(t^6\right)^{\frac{2}{3}} = t^4, \\ x^{\frac{1}{6}} = \left(t^6\right)^{\frac{1}{6}} = t, \\ x^{\frac{1}{3}} = \left(t^6\right)^{\frac{1}{3}} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6\cdot\left(1-t^2\right)}\cdot 6t^5dt =$$

$$=6\int\frac{t^6\left(t^5+t^3+1\right)}{t^6\left(1-t^2\right)}dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1-t^2}dt=-6\int\frac{t^5+t^3+1}{t^2-1}dt.$$

Підінтегральний вираз $\dfrac{t^5+t^3+1}{t^2-1}$ - неправильний раціональний дріб. За формулою (2.11),

$$\begin{array}{r|l}
t^5+0\cdot t^4+t^3+0\cdot t^2+0\cdot t+1 & t^2-1 \\
\cline{2-2}
-\underline{t^5+0\cdot t^4-t^3\qquad\qquad\quad} & \underbrace{t^3+2t}_{\text{ціла}\quad\text{частина}} \\
2t^3+0\cdot t^2+0\cdot t+1 & \\
-\underline{2t^3+0\cdot t^2-2t\quad} & \\
\underbrace{2t+1}_{\text{залишок}} &
\end{array}$$

$$\frac{t^5+t^3+1}{t^2-1}=t^3+2t+\frac{2t+1}{t^2-1}.$$

Повертаючись до останнього інтеграла, маємо

$$-6\int\left(t^3+2t+\frac{2t+1}{t^2-1}\right)dt=-6\left(\frac{t^4}{4}+\frac{2t^2}{2}+\int\frac{2tdt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=$$

$$=-6\left(\frac{t^4}{4}+t^2+\ln\left|t^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C=$$

$$=-\frac{3}{2}t^4-6t^2-6\ln\left|t^2-1\right|-3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-6\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

Відповідь:

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} - 6\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right| - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C\,.$$

4. *Інтеграли вигляду* $\int R\left(x,\sqrt{k^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-k^2}\right)dx$,

$$\int R\left(x,\sqrt{k^2+x^2}\right)dx$$

Для обчислення таких інтегралів необхідно виконати відповідні заміни змінних (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Тригонометричні підстановки

Вигляд інтеграла	Підстановки	
	Варіант 1	Варіант 2
$\int R\left(x,\sqrt{k^2-x^2}\right)dx$	$x=k\sin t$, $dx=k\cdot\cos t\,dt$, $\sqrt{k^2-x^2}=$ $=k\sqrt{1-\sin^2 t}=k\cdot\cos t$	$x=k\cos t$, $dx=-k\cdot\sin t\,dt$, $\sqrt{k^2-x^2}=$ $=k\sqrt{1-\cos^2 t}=k\cdot\sin t$
$\int R\left(x,\sqrt{x^2-k^2}\right)dx$	$x=\frac{k}{\sin t}$, $dx=-\frac{k\cos t}{\sin^2 t}\cdot dt$, $\sqrt{x^2-k^2}=$ $=k\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=$ $=k\cdot ctg\ t$	$x=\frac{k}{\cos t}$, $dx=\frac{k\sin t}{\cos^2 t}\cdot dt$, $\sqrt{x^2-k^2}=$ $=k\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=$ $=k\cdot tg\ t$
$\int R\left(x,\sqrt{k^2+x^2}\right)dx$	$x=k\cdot tg\,t$, $dx=\frac{k}{\cos^2 t}\cdot dt$, $\sqrt{k^2+x^2}=k\sqrt{1+tg^2 t}=$ $=\frac{k}{\cos t}$	$x=k\cdot ctg\,t$, $dx=-\frac{k}{\sin^2 t}\cdot dt$, $\sqrt{k^2+x^2}=k\sqrt{1+ctg^2 t}=$ $=\frac{k}{\sin t}$

Приклад 2.19. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$;

2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$.

Розв'язання

За табл. 2.4:

$$1)\ \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{9\text{-}9\sin^2 t}}{9\sin^2 t} \cdot 3\cos t dt =$$

$$= \int \frac{9\cos^2 t}{9\sin^2 t}\,dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -ctgt - t + C =$$

$$= \left| t = \arcsin \frac{x}{3} \right| = -ctg\left(\arcsin \frac{x}{3} \right) - \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

Зауважимо, що відповідь можна спростити за допомогою тригонометричної формули:

$$ctgt = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \left| t = \arcsin \frac{x}{3} \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\sin^2\left(\arcsin \frac{x}{3}\right)}{\sin^2\left(\arcsin \frac{x}{3}\right)}} = \sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{9}}{\frac{x^2}{9}}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

Тоді

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} - \arcsin \frac{x}{3} + C;$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} = \left| \begin{array}{l} x = 4tgt \\ dx = \dfrac{4}{\cos^2 t}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{16tg^2t} \cdot \frac{1}{\sqrt{16tg^2t+16}} \cdot \frac{4}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{16}\int \frac{1}{tg^2t} \cdot \frac{1}{\sqrt{tg^2t+1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{tg^2t} \cdot \frac{1}{1/\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{16}\int \frac{\cos t}{tg^2t \cdot \cos^2 t}dt = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t \cdot \cos t}dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \left| \begin{array}{l} z = \sin t \\ dz = \cos t dt \end{array} \right| = \frac{1}{16}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{z} + C = -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sin t} + C =$$

$$= \left| t = arctg\frac{x}{4} \right| = -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sin\left(arctg\dfrac{x}{4}\right)} + C.$$

Враховуючи, що

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{1}{1+tg^2t}} = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \left| t = arctg\frac{x}{4} \right| =$$

$$= \frac{tg\left(arctg\dfrac{x}{4}\right)}{\sqrt{1+tg^2\left(arctg\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{x/4}{\sqrt{1+x^2/16}} = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}},$$

отримаємо остаточну відповідь

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} = -\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x} + C.$$

Відповідь: 1) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} - \arcsin\frac{x}{3} + C$;

2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} = -\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x} + C.$

2.4.8. Інтеграли, що не можна виразити через елементарні функції

Інтегрування – більш складна операція порівняно з диференціюванням. Раніше ми розглядали методи, що дають можливість виразити первісну через елементарні функції. Проте існують випадки, коли інтеграл від елементарної функції не можна виразити через елементарні функції.

Розглянемо інтеграл $\int e^{-x^2}dx$. Такий інтеграл називається інтегралом Пуассона і широко використовується в теорії ймовірностей, математичній статистиці тощо. Але він належить до інтегралів, що «не беруться», тобто не виражаються через елементарні функції. Його первісна містить спеціальну функцію, що називається функцією Лапласа, таблиці значень якої можна знайти у виданнях, присвячених теорії ймовірностей і математичній статистиці.

Наведемо ще декілька прикладів таких інтегралів:

- ✓ $\int \frac{\sin x}{x}dx$ (*інтегральний синус*),
- ✓ $\int \frac{\cos x}{x}dx$ (*інтегральний косинус*),
- ✓ $\int \frac{dx}{\ln x}$ (*інтегральний логарифм*),
- ✓ $\int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx$ (*інтеграли Френеля*),
- ✓ $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,\ \ |k|<1$ (*еліптичний інтеграл*).

На практиці для знаходження таких інтегралів користуються спеціальними довідниками [51, 52].

Питання до розділу

1. Дати визначення первісної функції та невизначеного інтеграла.
2. Сформулювати основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Геометричний зміст невизначеного інтеграла.

4. Навести формули основних табличних інтегралів.

5. У чому полягає суть методу безпосереднього інтегрування?

6. У чому полягає суть методу підстановки (методу заміни змінної)?

7. Навести формулу інтегрування частинами. Інтеграли яких типів інтегруються частинами?

8. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен.

9. Дайте визначення раціонального дробу. Який дріб називається правильним, неправильним?

10. Типи найпростіших (елементарних) раціональних дробів.

11. Як розкласти правильний дріб у суму елементарних дробів?

12. Алгоритм інтегрування раціональних функцій.

13. Методи інтегрування тригонометричних функцій.

14. Універсальна тригонометрична підстановка.

15. Методи інтегрування ірраціональних функцій.

16. Наведіть приклади інтегралів, що не можна виразити через елементарні функції.

Завдання

Знайти невизначені інтеграли.

1. $\int x\sqrt{x}dx$. **2.** $\int\left(3x^2+\frac{4}{1+x^2}\right)dx$. **3.** $\int\frac{xe^x-4x+8}{x}dx$.

4. $\int\left(3x^2-2x+\frac{5}{x}\right)dx$. **5.** $\int\left(2^{x+1}+3^{x-1}\right)dx$. **6.** $\int\frac{5x^3+6}{x^2}dx$.

7. $\int\left(2x^2+\sqrt{x}-\frac{4}{x}\right)dx$. **8.** $\int\left(4^x-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$. **9.** $\int\frac{dx}{x^2+5}$.

10. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$. **11.** $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$.

12. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$. **13.** $\int\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$. **14.** $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

15. $\int tg^2 x dx$.

16. $\int \left(5^x - \dfrac{x^2+1}{x}\right)dx$.

17. $\int \dfrac{dx}{5+4x^2}$.

18. $\int \dfrac{dx}{2x^2-3}$.

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x^2+6}}$.

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-5x^2}}$.

21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5x^2-7}}$.

22. $\int \dfrac{x^2}{x^2+4}dx$.

23. $\int \left(1-3^x\right)^2 dx$.

24. $\int \left(3e^x - 2\sin x + \dfrac{5}{x^2+9}\right)dx$.

25. $\int \dfrac{2\cdot 3^x + 3\cdot 2^x}{3^x}dx$.

26. $\int \sin(3x-1)dx$.

27. $\int e^{4x+5}dx$.

28. $\int \dfrac{2+\ln x}{x}dx$.

29. $\int \dfrac{3+tg^2 x}{\sin^2 x}dx$.

30. $\int e^{\cos x}\cdot \sin x dx$.

31. $\int \dfrac{xdx}{x^2+1}$.

32. $\int \dfrac{dx}{x\left(4+\ln^2 x\right)}$.

33. $\int \dfrac{x^2 dx}{x^6+3}$.

34. $\int \dfrac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

35. $\int \dfrac{x^7 dx}{5x^8+3}$.

36. $\int \dfrac{x^3 dx}{x^8-25}$.

37. $\int \dfrac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^{10}}}$.

38. $\int \dfrac{e^x dx}{9+e^{2x}}$.

39. $\int \dfrac{\sqrt{5+tgx}}{\cos^2 x}$.

40. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{9+x^2}}$.

41. $\int \dfrac{3^x dx}{1+9^x}$.

42. $\int \dfrac{x^2 dx}{7-x^6}$.

43. $\int \dfrac{\sqrt[3]{5-\ln x}}{x}dx$.

44. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{5-\ln x}}$.

45. $\int \dfrac{3ctg^2 x+4}{\sin^2 x}dx$.

46. $\int \dfrac{e^x dx}{3+2e^x}$.

47. $\int x\cdot e^{x^2}dx$.

48. $\int e^{3x+7}dx$.

49. $\int \dfrac{dx}{10-3x}$.

50. $\int e^{arctg\,2x}\cdot \dfrac{dx}{1+4x^2}$.

51. $\int \dfrac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

52. $\int \dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$.

53. $\int \frac{\cos x dx}{3-2\sin x}$. **54.** $\int 3^{-x^2} \cdot x dx$. **55.** $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-2)}$.

56. $\int \frac{dx}{3x+4}$. **57.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x+5}$. **58.** $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

59. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$. **60.** $\int \frac{dx}{x^2+4x-8}$. **61.** $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2-2x+5}$.

62. $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2-2x-5}$. **63.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **64.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

65. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$. **66.** $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$. **67.** $\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}$.

68. $\int x \cdot \sin(3x) dx$. **69.** $\int (2x+3) \cdot \sin x dx$. **70.** $\int x \cdot arctg(2x) dx$.

71. $\int (2x+5) \cdot e^{-3x} dx$. **72.** $\int \left(x^2+1\right) \cdot \cos 4x dx$. **73.** $\int x^2 \cdot e^x dx$.

74. $\int (x+1) \cdot \ln x dx$. **75.** $\int x^2 \cdot \ln x dx$. **76.** $\int x \cdot arctgx dx$.

77. $\int arctg(2x) dx$. **78.** $\int \frac{x dx}{\sin^2 3x}$. **79.** $\int e^{2x} \cdot \sin(5x) dx$.

80. $\int \arcsin x dx$. **81.** $\int x \cdot 5^x dx$. **82.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

83. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$. **84.** $\int \sqrt{x^2-3} dx$. **85.** $\int \sqrt{3-x^2} dx$.

86. $\int \sin(\ln x) dx$. **87.** $\int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx$. **88.** $\int \sqrt{x^2+2x+8} dx$.

89. $\int \sqrt{3+4x-x^2} dx$. **90.** $\int \frac{x^2}{x-1} dx$. **91.** $\int \frac{x^4+x^3-6}{x^3-4x} dx$.

92. $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$. **93.** $\int \frac{x dx}{x^3-8}$. **94.** $\int \frac{x^2+4x+8}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$.

95. $\int \frac{x^2+2}{(x-2)^3(x+4)} dx$. **96.** $\int \frac{3x+1}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)} dx$.

97. $\int \frac{dx}{x^4-81}$. **98.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$. **99.** $\int \frac{\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

100. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. **101.** $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x+1}}$. **102.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{1-x}}$.

103. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}$. **104.** $\int \cos^2 xdx$. **105.** $\int \sin^2 x\cdot\cos xdx$.

106. $\int \cos^4 x\cdot\sin xdx$. **107.** $\int \sin 5x\cdot\cos 7xdx$. **108.** $\int \cos 5x\cdot\cos 7xdx$.

109. $\int \sin 5x\cdot\sin 7xdx$. **110.** $\int \sin^5 x\cdot\cos^2 xdx$. **111.** $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^7 x}$.

112. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. **113.** $\int \frac{dx}{3-4\cos x}$. **114.** $\int \frac{dx}{2+4\sin x-5\cos x}$.

115. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. **116.** $\int \sin^7 xdx$. **117.** $\int \frac{\sin^3 xdx}{1+\cos x}$.

118. $\int tg^5 xdx$. **119.** $\int \frac{dx}{\sin^8 x}$. **120.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Відповіді

1. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$. **2.** $x^3+4arctgx+C$. **3.** $e^x-4x+8\ln|x|+C$.

4. $x^3-x^2+5\ln|x|+C$. **5.** $\frac{2^{x+1}}{\ln 2}-\frac{3^{x-1}}{\ln 3}+C$. **6.** $\frac{5}{2}x^2-\frac{6}{x}+C$.

7. $\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\ln|x|+C$. **8.** $\frac{4^x}{\ln 4}+3ctgx+C$.

9. $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$. **10.** $x-\cos x+C$.

11. $\frac{4}{5}x^{5/4}-\frac{24}{5}x^{17/12}+\frac{4}{3}x^{3/4}+C$. **12.** $e^x+\frac{1}{x}+C$.

13. $tgx-\sin x+C$. **14.** $-ctgx-tgx+C$. **15.** $tgx-x+C$.

16. $\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{x^2}{2}-\ln|x|+C$. **17.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{2x}{\sqrt{5}}+C$.

18. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{3}}\right|+C$.

19. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C$.

20. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\sqrt{5}\,x\right)+C$.

21. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{7}{5}}\right|+C$.

22. $x-2arctg\frac{x}{2}+C$.

23. $x-\frac{2}{\ln 3}\cdot 3^x+\frac{9^x}{2\ln 3}+C$.

24. $3e^x+2\cos x+\frac{5}{3}arctg\frac{x}{3}+C$.

25. $2x+\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}+C$.

26. $-\frac{1}{3}\cos(3x-1)+C$. **27.** $\frac{1}{4}e^{4x+5}+C$. **28.** $2\ln|x|+\frac{1}{2}\ln^2|x|+C$.

29. $-3ctgx+tgx+C$. **30.** $-e^{\cos x}+C$. **31.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$.

32. $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\ln x}{2}\right)+C$.

33. $\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right)+C$.

34. $-\sqrt{1+2\cos x}+C$.

35. $\frac{1}{40}\ln\left(5x^8+3\right)+C$.

36. $\frac{1}{40}\ln\left|\frac{x^4-5}{x^4+5}\right|+C$. **37.** $\frac{1}{5}\arcsin x^5+C$. **38.** $\frac{1}{3}arctg\left(\frac{e^x}{3}\right)+C$.

39. $\frac{2}{3}(5+tgx)\cdot\sqrt{5+tgx}+C$.

40. $\frac{3}{4}\left(9+x^2\right)^{3/2}+C$.

41. $\frac{1}{\ln 3}arctg\left(3^x\right)+C$.

42. $\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{7}}{x^3-\sqrt{7}}\right|+C$.

43. $-\frac{3}{4}(5-\ln x)^{4/3}+C$.

44. $-2\sqrt{5-\ln x}+C$.

45. $-\frac{3}{4}ctg^4x-4ctgx+C$. **46.** $\frac{1}{2}\ln\left(3+2e^x\right)+C$. **47.** $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

48. $\frac{1}{3}e^{3x+7}+C$. **49.** $-\frac{1}{3}\ln|10-3x|+C$. **50.** $\frac{1}{2}e^{arctg\,2x}+C$.

51. $\frac{1}{8}\arcsin^4 2x+C$. **52.** $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$. **53.** $-\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sin x\right)+C$.

54. $-\frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{-x^2}+C$. **55.** $\frac{1}{3}tg\left(3x-2\right)+C$. **56.** $\frac{1}{3}\ln|3x+4|+C$.

57. $\frac{1}{\sqrt{14}}arctg\left(\frac{3x-1}{\sqrt{14}}\right)+C$. **58.** $\frac{2}{\sqrt{31}}arctg\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)+C$.

59. $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)+C$. **60.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{3}}{x+2+2\sqrt{3}}\right|+C$.

61. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right)+\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$.

62. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$.

63. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$. **64.** $\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$.

65. $2\sqrt{x^2+2x+3}-5\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$. **66.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$.

67. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+10x-3\right|-\frac{9}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{7}}{x+5+2\sqrt{7}}\right|+C$.

68. $-\frac{x}{3}\cos\left(3x\right)+\frac{1}{9}\sin\left(3x\right)+C$.

69. $-\left(2x+3\right)\cdot\cos x+2\sin x+C$.

70. $\frac{x^2}{2}\cdot arctg\left(2x\right)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}arctg\left(2x\right)+C$.

71. $-\frac{1}{3}\left(2x+5\right)\cdot e^{-3x}-\frac{2}{9}e^{-3x}+C$.

72. $\frac{1}{4}\left(x^2+1\right)\cdot\sin 4x+\frac{1}{8}x\cdot\cos 4x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

73. $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.

74. $\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x-\dfrac{x^2}{4}-x+C$.

75. $\dfrac{x^3}{3}\cdot\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C$.

76. $\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)\cdot arctgx-\dfrac{x}{2}+C$.

77. $x\cdot arctg\left(2x\right)-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+C$.

78. $-\dfrac{1}{3}x\cdot ctg3x+\dfrac{1}{9}\ln\left|\sin 3x\right|+C$.

79. $\dfrac{e^{2x}}{29}\left(2\sin\left(5x\right)-5\cos\left(5x\right)\right)+C$.

80. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

81. $\dfrac{5^x}{\ln 5}\cdot x-\dfrac{5^x}{\ln^2 5}+C$.

82. $2\sqrt{x}\cdot\ln x-4\sqrt{x}+C$.

83. $\ln\left|\sin x\right|-xctgx+C$.

84. $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-3}+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|\right)+C$.

85. $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{3-x^2}+3\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)+C$.

86. $\dfrac{x}{2}\left(\sin\left(\ln x\right)-\cos\left(\ln x\right)\right)+C$.

87. $e^{2x}\left(\dfrac{3}{13}\sin\left(3x\right)+\dfrac{2}{13}\cos\left(3x\right)\right)+C$.

88. $\dfrac{1}{2}\left(\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+8}+7\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+8}\right|\right)+C$.

89. $\dfrac{1}{2}\left(\left(x-2\right)\cdot\int\sqrt{3+4x-x^2}+7\arcsin\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{7}}\right)\right)+C$.

90. $x+\dfrac{x^2}{2}+\ln\left|x-1\right|+C$.

91. $\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2}\ln\left|x\right|+\dfrac{9}{4}\ln\left|x-2\right|+\dfrac{1}{4}\ln\left|x+2\right|+C$.

92. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\dfrac{1}{2}arctgx+C$.

93. $\dfrac{1}{6}\ln\left|x-2\right|-\dfrac{1}{12}\ln\left|x^2+2x+4\right|+\dfrac{\sqrt{3}}{6}arctg\left(\dfrac{\sqrt{3}\left(x+1\right)}{3}\right)+C$.

94. $\dfrac{13}{2}\ln\left|x-1\right|-20\ln\left|x-2\right|+\dfrac{29}{2}\ln\left|x-3\right|+C$.

95. $\dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+4}\right|-\dfrac{1}{2\left(x-2\right)}-\dfrac{1}{2\left(x-2\right)^2}+C$.

96. $\frac{4}{5}\ln|x-1|-\frac{2}{5}\ln\left(x^2+2x+2\right)+\frac{7}{5}arctg\left(x+1\right)+C$.

97. $\frac{1}{108}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{54}arctg\left(\frac{x}{3}\right)+C$. **98.** $2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$.

99. $3\sqrt[3]{2+x}+\frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{2+x}-1\right|-\frac{3}{8}\ln\left|\sqrt[3]{(2+x)^2}+\sqrt[3]{2+x}+2\right|-$

$-\frac{33\sqrt{7}}{28}arctg\left(\frac{\sqrt{7}\left(2\sqrt[3]{2+x}+1\right)}{7}\right)+C$.

100. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$. **101.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+C$.

102. $-2\sqrt{1-x}-4\sqrt[4]{1-x}-4\ln\left|\sqrt[4]{1-x}-1\right|+C$.

103. $6\sqrt[6]{x}-6\sqrt{2}arctg\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{2}}\right)+C$. **104.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$.

105. $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$. **106.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$.

107. $\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{24}\cos(12x)+C$. **108.** $\frac{1}{24}\sin(12x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$.

109. $\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{24}\sin(12x)+C$. **110.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C$.

111. $-\frac{1}{4}ctg^4 x-\frac{1}{6}ctg^6 x+C$. **112.** $-\frac{2}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}+C$.

113. $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{7tg\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{7}}{7tg\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{7}}\right|+C$. **114.** $\frac{1}{\sqrt{37}}\ln\left|\frac{7tg\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{37}+4}{7tg\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{37}+4}\right|+C$.

115. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)+2}{tg\left(\frac{x}{2}\right)-2}\right|+C$. **116.** $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\cos^3 x-\cos x+C$.

117. $\frac{1}{2}\cos^2 x-\cos x+C$. **118.** $\frac{1}{4}tg^4x-\frac{1}{2}tg^2x-\ln\left|\cos x\right|+C$.

119. $-ctgx-ctg^3x-\frac{3}{5}ctg^5x-\frac{1}{7}ctg^7x+C$. **120.** $\frac{1}{3}tg^3x+tgx+C$.

РОЗДІЛ 3. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

3.1. Поняття визначеного інтеграла

Припустимо, що задана деяка неперервна на інтервалі $[a;b]$ функція $y = f(x)$ (рис. 3.1.).

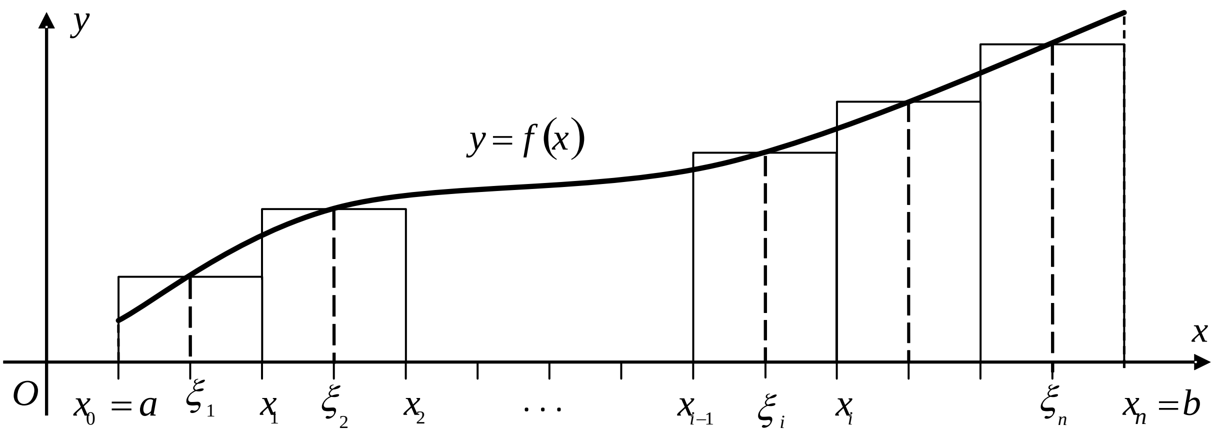


Рис. 3.1. Побудова інтегральної суми

Розіб'ємо інтервал $[a;b]$ на n частин точками $x_i, i = \overline{1,n}$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

На кожному інтервалі візьмемо довільну точку ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$і обчислимо значення функції $f(\xi_i)$ у вибраній точці.

Позначимо довжину часткового інтервалу через $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ і складемо суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta_i,$$

яка називається *інтегральною сумою*.

Як видно з рис. 3.1, геометричний зміст інтегральної суми – це сума площ прямокутників з основами Δ_i та висотами $f(\xi_i)$.

Позначимо через λ довжину найбільшого часткового інтервалу $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta_i$.

Визначення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття $[a;b]$ на частини $\Delta_i, i = \overline{1,n}$, ні від вибору точок ξ_i, $i = \overline{1,n}$, то ця границя називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ і позначається як

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta_i = \int_a^b f(x)dx, \tag{3.1}$$

де $\int\limits_a^b$ - знак визначеного інтеграла;

a і b - нижня і верхня межі інтегрування відповідно;

$f(x)$ - підінтегральна функція;

$f(x)dx$ - підінтегральний вираз;

dx - диференціал змінної інтегрування.

Зауваження. Величина визначеного інтеграла (3.1) залежить від підінтегральної функції $f(x)$, меж інтегрування a, b і не залежить від змінної інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Визначення. Функція, для якої на проміжку $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, називається *інтегрованою* на цьому проміжку.

Зауваження. Неперервні функції – інтегровані.

3.2. Геометричний зміст визначеного інтеграла

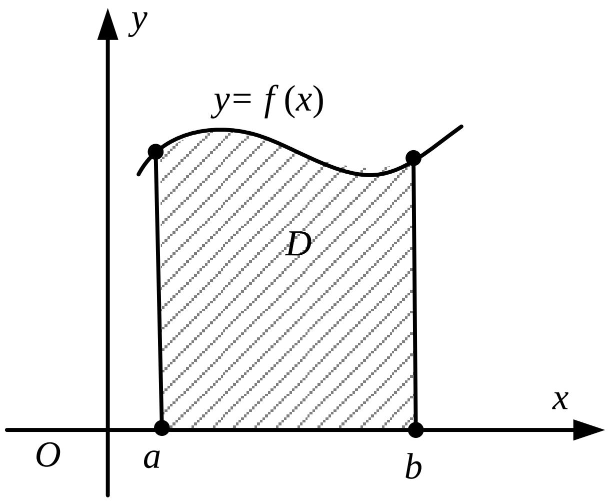


Рис. 3.2. Геометричний зміст визначеного інтеграла $\left(f\left(x\right)\geq 0\right)$

Якщо $f\left(x\right)$ неперервна і $f\left(x\right)\geq 0$ на інтервалі $\left[a;b\right]$, то визначений інтеграл (3.1) чисельно дорівнює *площі криволінійної трапеції*, обмеженої лініями $y=f\left(x\right)$, $x=a, x=b, y=0$ (рис. 3.2):

$$S_D=\int_a^b f\left(x\right)dx. \tag{3.2}$$

3.3. Фізичний зміст визначеного інтеграла

Якщо функція $v=v\left(t\right)$ задає швидкість точки, що рухається в момент часу t, то визначений інтеграл $\int_{t_1}^{t_2} v\left(t\right)dt$ *визначає шлях* S, пройдений точкою за проміжок часу $\left[t_1;t_2\right]$, тобто

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v\left(t\right)dt. \tag{3.3}$$

3.4. Економічний зміст визначеного інтеграла

Якщо $u=u\left(t\right)$ - продуктивність праці в момент часу t, то визначений інтеграл $\int_{t_1}^{t_2} u\left(t\right)dt$ визначає *обсяг продукції*, що випускається за проміжок часу $\left[t_1;t_2\right]$, тобто

$$Q=\int_{t_1}^{t_2} u\left(t\right)dt. \tag{3.4}$$

3.5. Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, причому $f(x)=C$, $C=const$, $C\in R$, то

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

2. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k=const,\ k\in R.$$

3. Для будь-якої інтегровної функції $f(x)$ визначений інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

4. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить свій знак на протилежний ($f(x)$ інтегровна на $[a,b]$):

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5. Визначений інтеграл від суми (різниці) двох функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, інтегровних на $[a,b]$, дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Ця властивість поширюється на будь-яку кількість доданків.

6. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то для будь-якої точки $c \in [a;b]$ справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ця властивість з геометричної точки зору полягає в такому. Якщо криволінійну трапецію (рис. 3.3) поділити прямою $x = c$ на дві частини, то

$$S = S_1 + S_2,$$

$$S_{ABCD} = S_{ABKL} + S_{LKCD}.$$

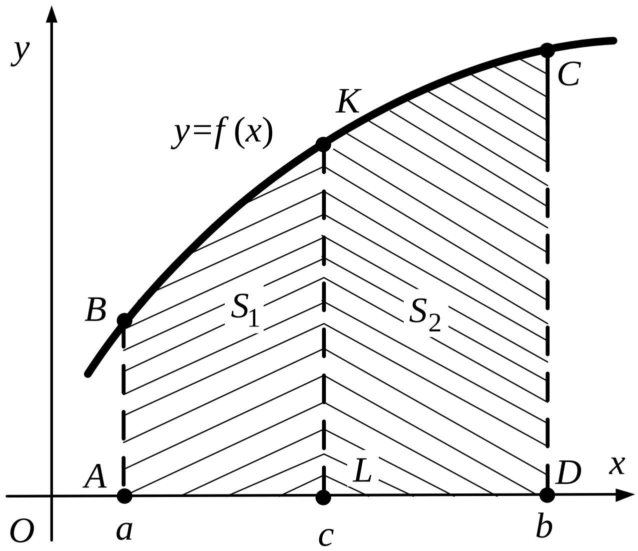


Рис. 3.3. Геометрична інтерпретація властивості 6

7. Якщо $f(x)$ інтегровна і $f(x) \geq 0$ на інтервалі $[a;b]$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. Якщо $f(x), \varphi(x)$ інтегровні на $[a;b]$ і $f(x) \le \varphi(x)$ для $x \in [a;b]$, $a < b$, то виконується нерівність

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx .$$

9. Якщо $f(x)$ інтегровна на інтервалі $[a;b]$, $a < b$ та $m \le f(x) \le M$ для $x \in [a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Геометрична інтерпретація цієї властивості полягає в тому, що площа криволінійної трапеції, яка відповідає визначеному інтегралу, не може бути менше за площу прямокутника з основою $(b-a)$ і висотою m (найменше значення функції на $[a, b]$) і більше площі прямокутника з основою $(b-a)$ і висотою M (найбільше значення функції на $[a, b]$) (рис. 3.4).

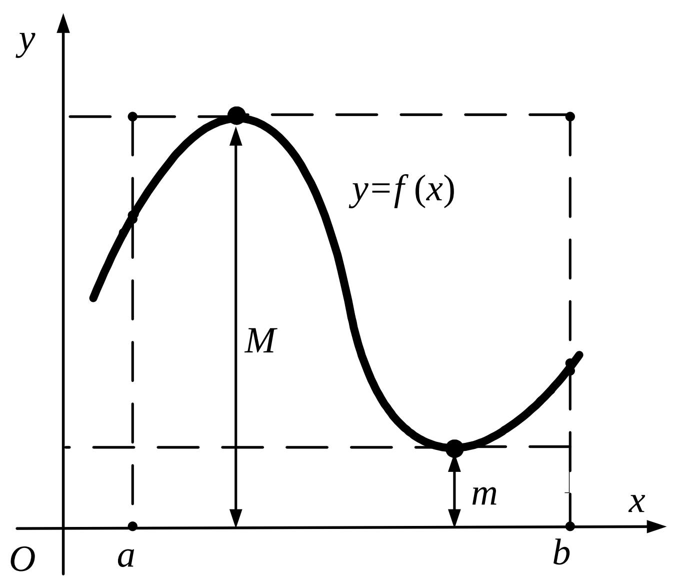


Рис. 3.4. Геометрична інтерпретація властивості 9

10. Теорема (*про середнє значення функції*). Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка c, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Визначення. Середнім значенням функції $f(x)$ називається відношення визначеного інтеграла від цієї функції на відрізку $[a,b]$ до довжини відрізка інтегрування:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Геометрична інтерпретація теореми про середнє значення функції: площа під кривою $y = f(x)$ $\left(f(x) \ge 0\right)$ на відрізку інтегрування $[a,b]$ дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ та основою $[a,b]$ (рис. 3.5).

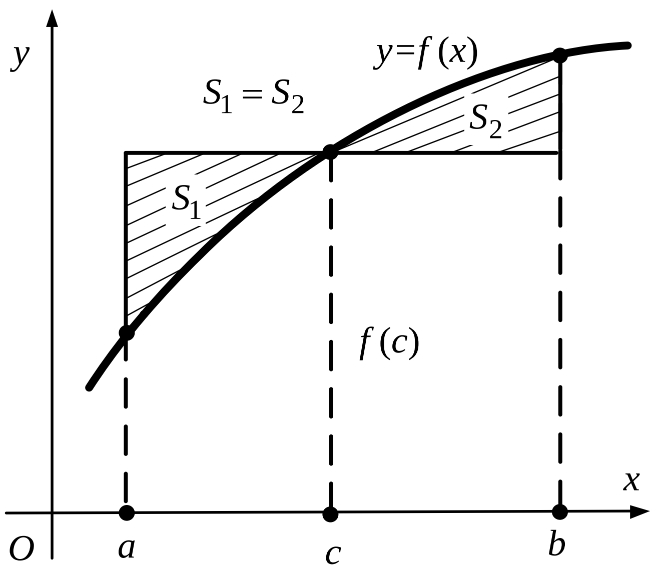


Рис. 3.5. Геометрична інтерпретація властивості 10

3.6. Формула Ньютона-Лейбніца

Зазначена формула встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;b]$ і відома її первісна $F(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{3.5}$$

Формула (3.5) називається *формулою Ньютона-Лейбніца*. Іноді її називають *основною формулою інтегрального числення.*

Приклад 3.1. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^2 x^4 dx$;

2) $\int_0^1 3^x dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Розв'язання. За формулою (3.5) обчислюємо:

1) $\int_1^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{(2)^5}{5} - \frac{(1)^5}{5} = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$;

2) $\int_0^1 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 3}\cdot\left(3^1 - 3^0\right) = \frac{2}{\ln 3}$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: 1) $\int\limits_1^2 x^4 dx = \frac{31}{5}$; 2) $\int\limits_0^1 3^x dx = \frac{2}{\ln 3}$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.7. Методи обчислення визначених інтегралів

3.7.1. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нагадаємо, що використовуються два типи підстановок із застосуванням нової змінної: $t = \psi(x)$ і $x = \varphi(t)$ (п. 2.4.1).

Теорема. Припустимо, що потрібно обчислити інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ - неперервна функція на $[a;b]$. Якщо виконуються такі умови:

1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

2) функція $\varphi(t)$ і її похідна $\varphi'(t)$ неперервні на $[\alpha;\beta]$;

3) складена функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha;\beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (3.6)$$

Зауваження

1. У багатьох випадках замість підстановки $x = \varphi(t)$ використовують підстановку $t = \psi(x)$. Тоді нові межі інтегрування обчислюються

безпосередньо $\alpha=\psi(a), \beta=\psi(b)$. Але тоді необхідно враховувати, що функція $x=\psi^{-1}(t)$ (обернена до функції $t=\psi(x)$) має задовольняти умови теореми.

2. При знаходженні визначеного інтеграла за допомогою заміни змінної після отримання первісної потрібно використати формулу Ньютона-Лейбніца, не повертаючись до початкової змінної.

Приклад 3.2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

3) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

4) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Розв'язання:

1) $$\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{array}{l} t=\ln x,\ \ dt=\dfrac{dx}{x} \\ x_н = e \to t_н = \ln e = 1 \\ x_в = e^2 \to t_в = \ln e^2 = 2 \end{array} \right| = \int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

2) $$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \left| \begin{array}{l} t=x+1,\ \ dt=dx \\ x_н = 0 \to t_н = 0+1=1 \\ x_в = 1 \to t_в = 1+1=2 \end{array} \right| = \int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_1^2=\ln\left|2+\sqrt{5}\right|-\ln\left|1+\sqrt{2}\right|=\ln\left|\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right|;$$

3) $$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{2x+1} \\ x=\dfrac{t^2-1}{2},\ \ dx=tdt, \\ x_н=0\to t_н=\sqrt{2\cdot 0+1}=1 \\ x_в=4\to y_в=\sqrt{2\cdot 4+1}=3 \end{array}\right|=\int_1^3\frac{tdt}{t+1}=\int_1^3\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$=\int_1^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(t-\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_1^3=\left(3-\ln 4\right)-\left(1-\ln 2\right)=2-\ln 2;$$

4) $$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=2\cos t,\ dx=-2\sin tdt \\ t=\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right) \\ x_н=0\to t_н=\arccos\left(\dfrac{0}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2} \\ x_в=1\to t_в=\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right|=$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi/3}\sqrt{4-4\cos^2 t}\cdot\left(-2\sin t\right)dt=4\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin^2 tdt=$$

$$=4\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(1-\cos 2t\right)dt=2\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}=$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sin\left(2\pi/3\right)}{2}\right)=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь. 1) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\ln 2;$ 2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\ln\left|\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right|;$

3) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = 2 - \ln 2$; 4) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.7.2. Інтегрування частинами визначеного інтеграла

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$. Оскільки $(uv)' = u'v + uv'$, то після інтегрування обох частин у межах від a до b отримаємо

$$\int\limits_a^b (uv)' dx = \int\limits_a^b (u'v + uv') dx = \int\limits_a^b (vdu + udv).$$

Ураховуючи, що $\int\limits_a^b (uv)'\, dx = uv \Big|_a^b$,

$$uv \Big|_a^b = \int\limits_a^b vdu + \int\limits_a^b udv.$$

Отже, маємо

$$\int\limits_a^b udv = uv \Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \qquad (3.7)$$

Формула (3.7) називається формулою *інтегрування частинами* визначеного інтеграла.

Зауваження. Правила вибору множників u та dv залишаються такими самими, як і для визначеного інтеграла.

Приклад 3.3. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 \ln x dx$;

2) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x \cdot arctgxdx$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \arccos xdx$;

4) $\int\limits_{0}^{\pi} e^{x} \cdot \cos^{2} xdx$.

Розв’язання:

1) $$\int\limits_{1}^{2} \ln xdx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x \Big|_{1}^{2} - \int\limits_{1}^{2} x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x \Big|_{1}^{2} - \int\limits_{1}^{2} dx =$$

$$= 2\ln 2 - \ln 1 - x \Big|_{1}^{2} = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1;$$

2) $$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x \cdot arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^{2}} & v = \dfrac{x^{2}}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^{2}}{2} \cdot arctgx \Big|_{0}^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^{2}dx}{1+x^{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} arctg\sqrt{3} - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1+x^{2}-1}{1+x^{2}} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^{2}} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx - \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^{2}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - arctg\sqrt{3} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2};$$

3) $$\int\limits_{0}^{1} \arccos xdx = \left| \begin{matrix} u = \arccos x & dv = dx \\ du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \arccos x \Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^{2}}} =$$

$$=\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{l} x=\sin t \\ t=\arcsin x \\ dx=\cos t dt \\ x_н=0\to t_н=arcsin 0=0 \\ x_в=1\to t_в=arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\cdot\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin t dt=-\cos t\Big|_0^{\pi/2}=-\cos\pi/2+\cos 0=0+1=1;$$

4) $\int_0^{\pi} e^x\cdot\cos^2 xdx=$

$$=\left|\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cdot(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cdot\cos 2xdx.$$

Кожний інтеграл у правій частині обчислюємо окремо:

$$I_1=\int_0^{\pi} e^x dx=e^x\Big|_0^{\pi}=e^{\pi}-1;$$

$$I_2=\int_0^{\pi} e^x\cdot\cos 2xdx=\left|\begin{array}{ll} u=e^x & dv=\cos 2xdx \\ du=e^x dx & v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right|=\frac{1}{2}e^x\cdot\sin 2x\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cdot\sin 2xdx=0-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cdot\sin 2xdx=\left|\begin{array}{ll} u=e^x & dv=\sin 2xdx \\ du=e^x dx & v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^x\cdot\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cdot\cos 2xdx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cdot\cos 2xdx\right)=\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^x\cdot\cos 2xdx.$$

Отримаємо

$$I_2 = \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}I_2,$$

$$\frac{5}{4}I_2 = \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4},$$

$$I_2 = \frac{1}{5}e^{\pi} - \frac{1}{5}.$$

Отже, остаточно заданий інтеграл дорівнює

$$\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}e^{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{\pi} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}e^{\pi} - \frac{3}{5}.$$

Відповідь: 1) $\int_1^2 \ln x dx = 2\ln 2 - 1$; 2) $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot arctgx dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\int_0^1 \arccos x dx = 1$; 4) $\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos^2 x dx = \frac{3}{5}e^{\pi} - \frac{3}{5}$.

Питання до розділу

1. Визначення визначеного інтеграла.

2. Геометричний, фізичний та економічний зміст визначеного інтеграла.

3. Властивості визначеного інтеграла.

4. Формула Ньютона-Лейбніца.

5. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

6. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Завдання

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_{-1}^{2}\left(2x-3x^2+1\right)dx$. **2.** $\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{3}x+2\sqrt{x}-1\right)dx$. **3.** $\int_{0}^{\pi}\sin x dx$.

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}dx$. **5.** $\int_{0}^{16}\frac{dx}{\sqrt{2x+4}}$. **6.** $\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)^2 dx$.

7. $\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^5 dx$. **8.** $\int_{0}^{1/2}\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$. **9.** $\int_{0}^{\pi/3}\cos 2x dx$.

10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sin 2x-1\right)dx$. **11.** $\int_{2}^{6}\sqrt{2x-3}dx$. **12.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

13. $\int_{0}^{\pi}x\cdot\sin 2x dx$. **14.** $\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2 x\cdot\sin x dx$. **15.** $\int_{0}^{\ln 3}e^x\cdot\sqrt{e^x-1}dx$.

16. $\int_{0}^{\ln 3}e^{2x+1}dx$. **17.** $\int_{0}^{\pi/2}\cos^3 x\cdot\sin 2x dx$. **18.** $\int_{2}^{7}\frac{xdx}{\sqrt{2+x}}$.

19. $\int_{0}^{0,5}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **20.** $\int_{0}^{e-2}\ln\left(x+2\right)dx$. **21.** $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

22. $\int_{1}^{8}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$. **23.** $\int_{0}^{1}\left(1+e^{2x}\right)^3\cdot e^{2x}dx$. **24.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

25. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

26. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{2+\sqrt{2x+1}}$.

27. $\int\limits_0^3 x\cdot e^{2x}dx$.

28. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

29. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$.

30. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

31. $\int\limits_0^{\pi/4} x\cdot tg^2 xdx$.

32. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos(2x)dx$.

33. $\int\limits_1^e x^2\cdot \ln xdx$.

34. $\int\limits_0^1 arctgxdx$.

35. $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}}$.

Відповіді

1. -3.

2. $4\sqrt{3}-\frac{3}{2}$.

3. 2.

4. $2-\sqrt{2}$.

5. 4.

6. $\frac{28}{15}$.

7. $-\frac{665}{3}$.

8. $\frac{12-3\sqrt[3]{36}}{16}$.

9. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

10. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

11. $\frac{26}{3}$.

12. $arctg3-arctg2$.

13. $-\frac{\pi}{2}$.

14. $\frac{1}{3}$.

15. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

16. $4e$.

17. $\frac{2}{5}$.

18. $\frac{26}{3}$.

19. $\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

20. $2-\ln 4$.

21. $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

22. $\frac{51}{14}+\frac{48\sqrt{2}}{7}$.

23. $\frac{e^8}{8}+\frac{e^6}{2}+\frac{3e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{15}{8}$.

24. $arctge-\frac{\pi}{4}$. **25.** $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.** $2\ln\frac{3}{5}+2$. **27.** $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}e^6$.

28. $2\ln\frac{3}{2}$. **29.** $\ln\sqrt{2}$. **30.** $e-\sqrt{e}$. **31.** $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\ln\sqrt{2}$.

32. $\frac{\pi}{2}$. **33.** $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}e^3$. **34.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$. **35.** $\frac{\pi}{24}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}$.

РОЗДІЛ 4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

У визначенні визначеного інтеграла (3.1) має виконуватися два припущення:

1) проміжок інтегрування $\left[a;b\right]$ – скінченний;

2) підінтегральна функція $f\left(x\right)$ – неперервна на $\left[a;b\right]$.

Якщо не виконується хоча б одна з цих умов, то визначення визначеного інтеграла стає неприйнятним. Але на практиці часто виникає необхідність знаходження інтегралів на нескінчених півінтервалах $\left(-\infty;b\right],\left[a;+\infty\right)$, інтервалі $\left(-\infty;+\infty\right)$ або від функції, що має на відрізку інтегрування $\left[a;b\right]$ розрив другого роду.

Залежно від того, яка умова порушена, розглядають невласні інтеграли першого та другого родів:

1. Інтеграл від функції на нескінченому проміжку (невласний інтеграл першого роду).
2. Інтеграл від необмеженої функції (невласний інтеграл другого роду).

4.1. Невласні інтеграли першого роду (невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування)

1. Нехай функція $y=f\left(x\right)$ визначена на проміжку $\left[a;+\infty\right)$ і є неперервною на будь-якому відрізку $\left[a;b\right]$, де $-\infty<a<b<+\infty$ (рис. 4.1). Тоді існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

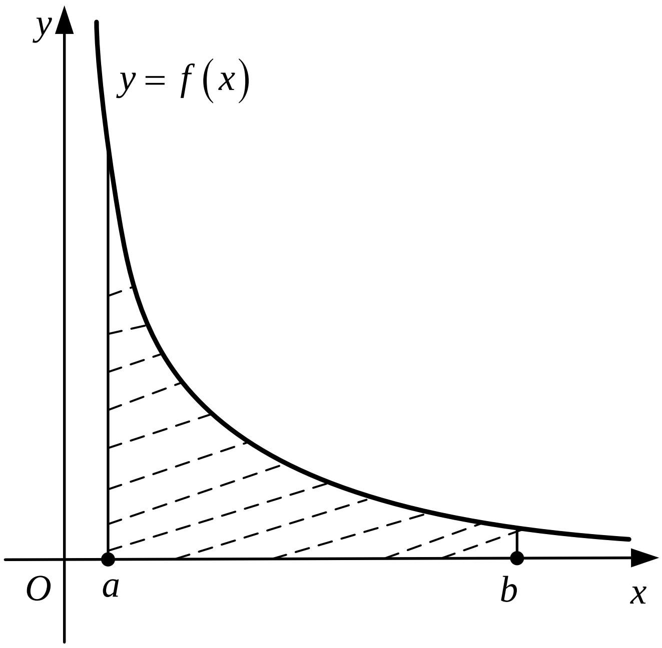


Рис. 4.1. Функція $y = f(x)$ визначена на $[a;+\infty)$ і неперервна на $[a;b]$

Визначення. Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, коли $b \to +\infty$, то цю границю називають *невласним інтегралом першого роду* і позначають як

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{4.1}$$

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ у цьому випадку називається *збіжним* (або кажуть, що він збігається), а підінтегральна функція $f(x)$ - інтегрованою на проміжку $[a;+\infty)$.

Якщо границя (4.1) не існує або нескінченна, то невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається *розбіжним* (або кажуть, що він розбігається), а функція $f(x)$ - неінтегрованою на проміжку $[a;+\infty)$.

2. Невласний інтеграл першого роду на проміжку $\left(-\infty;b\right]$ визначається аналогічно (рис. 4.2), тобто

$$\int_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f\left(x\right)dx. \tag{4.2}$$

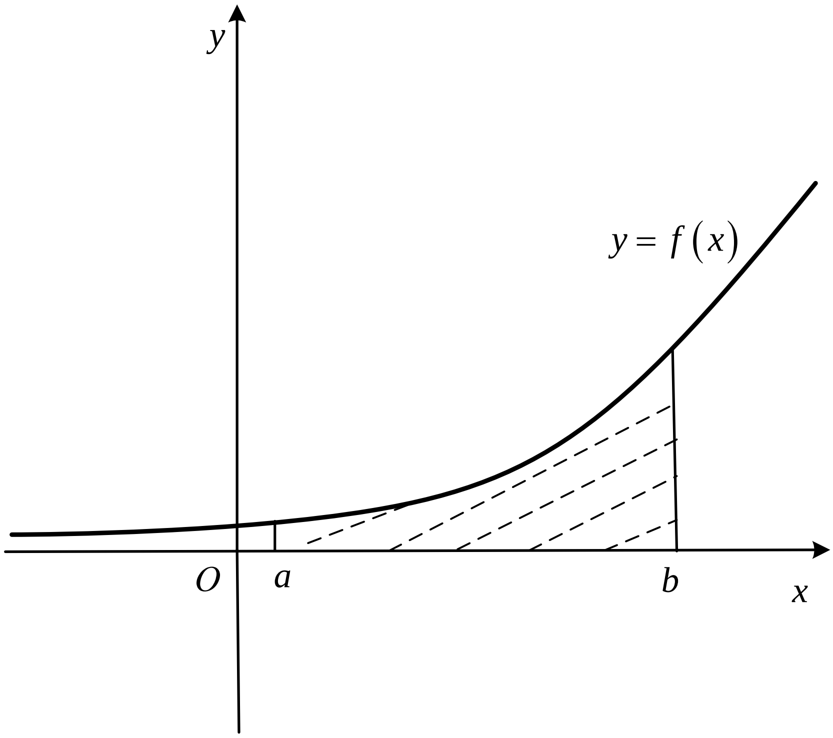


Рис. 4.2. Функція $y = f\left(x\right)$ визначена на $\left(-\infty;b\right]$ і неперервна на $\left[a;b\right]$

3. Невласний інтеграл першого роду на проміжку $\left(-\infty;+\infty\right)$ (рис. 4.3) визначається рівністю

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^{c} f\left(x\right)dx + \int_{c}^{+\infty} f\left(x\right)dx = \\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f\left(x\right)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f\left(x\right)dx,\ c\in R.\end{aligned} \tag{4.3}$$

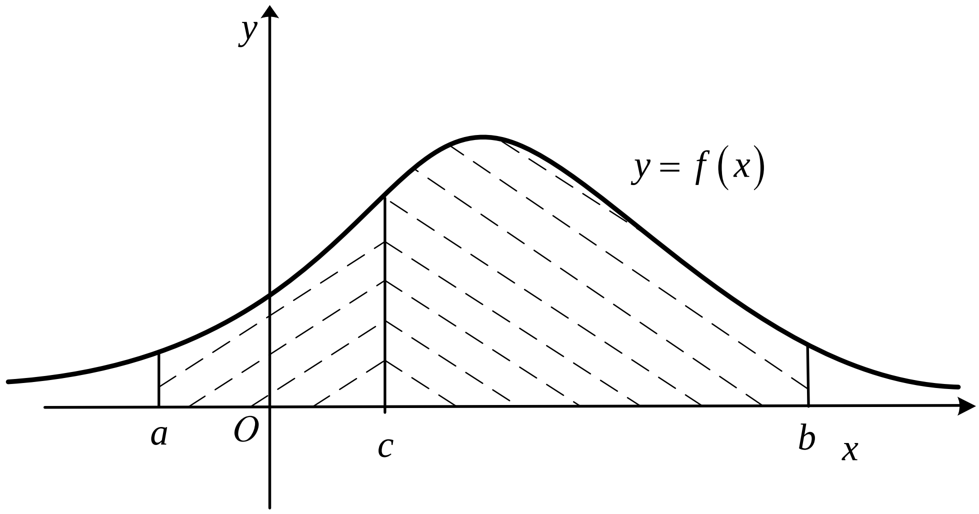


Рис. 4.3. Функція $y = f(x)$ визначена на $(-\infty;+\infty)$ і неперервна на $[a;b]$

! Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ існує і є *збіжним* тоді і тільки тоді, коли є збіжними обидва інтеграли в правій частині формули (4.3).

Алгоритм знаходження невласного інтеграла першого типу (на прикладі інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$):

1) обчислюють визначений інтеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, де b – змінна верхня межа інтегрування;

2) знаходять границю визначеного інтеграла при $b \to +\infty$.

Геометричний зміст невласного інтеграла першого роду

Нехай задано функцію $y = f(x)$, причому $f(x) \geq 0$ і неперервна на проміжку $[a;+\infty)$. Якщо інтеграл (4.1) збігається, то він виражає площу області, обмежену лініями $y = f(x)$, $x = a$ і віссю Ox.

Приклад 4.1. Дослідити на збіжність невласні інтеграли першого роду $(a > 0)$:

1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$;

2) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \neq 1$.

Розв'язання:

1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\ln|x| \right)\Big|_a^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \{\ln b - \ln a\} = +\infty \Rightarrow$ інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ розбігається;

2) ураховуючи, що $\int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ при $\alpha \neq 1$, отримаємо

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg| \right)_a^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \to +\infty} \left\{ b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right\} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, \alpha > 1; \\ +\infty, \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ розбігається;

2) $$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, \alpha > 1, \textit{збігається} \\ +\infty, \quad \alpha < 1, \textit{розбігається.} \end{cases}$$

Висновок.

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, \quad \textit{при } \alpha > 1 \ \textit{збігається,} \\ +\infty, \quad \textit{при } \alpha \leq 1, \ \textit{розбігається.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Зауваження. Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, a > 0$ називають *еталонним*, тому що його часто використовують для дослідження невласних інтегралів першого роду на збіжність.

Приклад 4.2. Обчислити невласні інтеграли першого роду або встановити їхню розбіжність:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

2) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$;

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(5x)dx$.

Розв'язання:

1) за формулою (4.3) розбиваємо цей інтеграл на два та обчислюємо невласні інтеграли першого роду:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left\{ arctgx\Big|_a^0 \right\} + \lim_{b\to+\infty}\left\{ arctgx\Big|_0^b \right\} = \lim_{a\to-\infty}\left\{ arctg0 - arctga \right\} +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}\left\{ arctgb - arctg0 \right\} = 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 0 = \pi,$$

тобто інтеграл збігається і дорівнює π;

2) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} =$

$$=\left|\begin{array}{l} t=x+\dfrac{1}{2} \\ dt=dx \\ x_н=2\to t_н=\dfrac{5}{2} \\ x_в=b\to t_в=b+\dfrac{1}{2} \end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int_{5/2}^{b+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}}=\lim_{b\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right|\right\}\Bigg|_{\frac{5}{2}}^{b+\frac{1}{2}}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left\{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{b+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{b+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}\right|\right\}=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left\{\ln\left|\frac{b-1}{b+2}\right|-\ln\frac{1}{4}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln 4=\frac{2}{3}\ln 2.$$

Це доводить, що невласний інтеграл збігається, оскільки границя дорівнює скінченному числу $\frac{2}{3}\ln 2$;

3) $$\int_0^{+\infty}\cos(5x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\cos(5x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left\{\frac{1}{5}\sin(5x)\Big|_0^b\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty}\{\sin(5b)-\sin 0\}=\frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty}\{\sin(5b)\}.$$

Оскільки $\lim\limits_{b\to+\infty}\{\sin(5b)\}$ не існує, то невласний інтеграл першого роду $\int\limits_0^{+\infty}\cos(5x)\,dx$ розбігається.

Відповідь: 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$;

2) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}\ln 2$;

3) $\int\limits_0^{+\infty}\cos(5x)\,dx$ розбігається.

4.2. Ознаки збіжності невласного інтеграла першого роду

У багатьох випадках достатньо не обчислювати самий інтеграл, а порівняти його з невласним інтегралом, поведінка якого відома.

Наведемо нижче ознаки порівняння невласних інтегралів першого роду.

Теорема (***перша ознака порівняння***). Нехай виконуються такі умови:

1. Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a;+\infty)$.

2. Для будь-якого $x\in[a;+\infty)$ $0\le f(x)\le g(x)$.

Тоді:

1) якщо $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається;

2) якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається.

Зауваження. Ця теорема має геометричну інтерпретацію (рис. 4.4):

1. Якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченною величиною, то площа меншої області є також скінченною величиною.

2. Якщо площа меншої за розмірами необмеженої області є нескінченно великою величиною, то площа більшої області є також нескінченно великою величиною.

Теорема (***друга ознака порівняння – гранична***). Нехай виконуються умови:

1. Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a;+\infty)$.

2. Для будь-якого $x\in[a;+\infty)$ $f(x)>0,\ g(x)>0$.

Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k,\ 0<k<+\infty,$$

то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

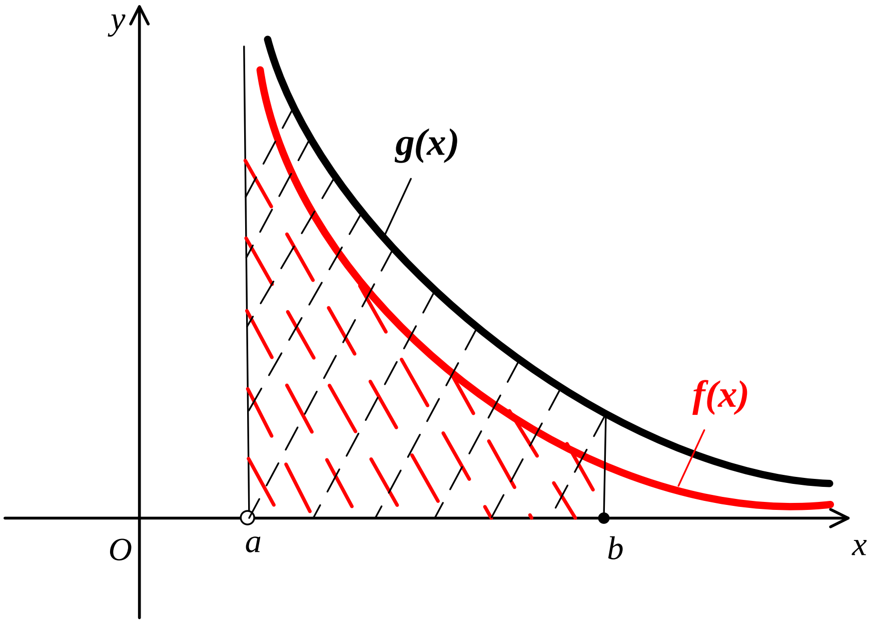


Рис. 4.4. Геометрична інтерпретація

Зауваження. У попередніх двох теоремах було розглянуто невласні інтеграли першого роду від невід'ємних функцій. Розглянемо випадок, коли підінтегральна функція є знакозмінною.

Теорема (***абсолютна збіжність***). Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Зауваження:

1. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*, а підінтегральна функція $f(x)$ - *абсолютно інтегрованою* на проміжку $[a;+\infty)$.

2. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left| f(x) \right| dx$ розбігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ називається *умовно збіжним*.

Наприклад $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ - *умовно збіжні, а* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ - абсолютно *збіжні.*

Приклад 4.3. Дослідити на збіжність невласні інтеграли першого роду:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+4\right)}{x} dx$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{3+x^2}}$.

Розв'язання:

1) розглянемо підінтегральну функцію $f(x) = \frac{\ln\left(x^2+4\right)}{x}$. Вона додатна та неперервна на проміжку $x \in [1;+\infty)$. Підбираємо функцію $g(x)$ для порівняння:

$$x \in [1;+\infty): \quad \ln\left(x^2+4\right) > \ln x \Rightarrow f(x) = \frac{\ln\left(x^2+4\right)}{x} > \frac{\ln x}{x} = g(x).$$

Отже, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Досліджуємо на збіжність невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{matrix} t=\ln x \\ dt=\dfrac{dx}{x} \\ x_н=1\to t_н=0 \\ x_в=b\to t_в=\ln b \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{\ln b} tdt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\ln b} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln^2 b - 0\right) = +\infty.$$

Отже, $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ розбігається. Тоді, за першою ознакою порівняння, інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ також розбігається;

2) підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{3+x^2}}>0$ і неперервна на проміжку $x\in[1;+\infty)$. Для використання другої ознаки порівняння (граничної) розглянемо функцію $g(x)=\dfrac{1}{x^3}$. Обчислюємо границю:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2\sqrt{3+x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{x^2}+1}} = 1.$$

Інтеграл $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$, за формулою (4.4), збігається ($\alpha=3$).

Отже, за граничною ознакою отримаємо, що інтеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2\sqrt{3+x^2}}$ також збігається.

Відповідь: 1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+4\right)}{x}dx$ розбігається;

2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{3+x^2}}$ збігається.

Приклад 4.4. Дослідити на збіжність $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{25+x^2}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\sin 3x}{25+x^2}$ неперервна і змінює свій знак на проміжку $[0;+\infty)$. Досліджуємо спочатку на збіжність:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} |f(x)|dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\sin 3x|}{25+x^2}dx.$$

Для використання теореми порівняння підберемо функцію $g(x)$:

$$x \in [0;+\infty): \quad 0 \le \frac{|\sin 3x|}{25+x^2} \le \frac{1}{25+x^2} = g(x).$$

Досліджуємо $\int\limits_{0}^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{25+x^2}dx$ на збіжність:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{25+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{1}{25+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{5} arctg\,\frac{x}{5}\right)\Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty}\left\{arctg\,\frac{b}{5} - 0\right\} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10},$$

тобто $\int\limits_{0}^{+\infty} g(x)dx$ збігається.

Тоді, за першою ознакою порівняння, $\int\limits_{0}^{+\infty} |f(x)|dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\sin 3x|}{25+x^2}dx$ також збігається.

Як наслідок, за теоремою про абсолютну збіжність, заданий інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{25+x^2}dx$ збігається абсолютно, а функція $f(x)=\frac{\sin 3x}{25+x^2}$ на проміжку $[0;+\infty)$ є абсолютно інтегрованою.

Відповідь: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{25+x^2}dx$ збігається абсолютно.

4.3. Невласні інтеграли другого роду (невласні інтеграли від необмежених функцій)

Розглянемо інтеграли від функцій, що мають точки розриву другого роду, тобто хоча б одна з односторонніх границь функції $y=f(x)$ у цих точках дорівнює нескінченності. Це означає, що при наближенні до точок розриву функція $y=f(x)$ необмежено спадає або зростає.

Такі точки називаються *особливими точками* функції $y=f(x)$.

Особливою точкою може бути будь-яка точка відрізка (як гранична, так і внутрішня), причому таких точок всередині проміжку може бути декілька. Геометрично це означає, що якщо $x=b$ - особлива точка, то пряма $x=b$ - вертикальна асимптота графіка функції $y=f(x)$.

1. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на $[a;b)$ і має в точці $x=b$ розрив другого роду. Виберемо деяке додатне число $\varepsilon>0$ і розглянемо відрізок $[a;b-\varepsilon]$, на якому функція обмежена і неперервна (рис. 4.5).

Точка $x=b$ - *особлива* точка функції $y=f(x)$.

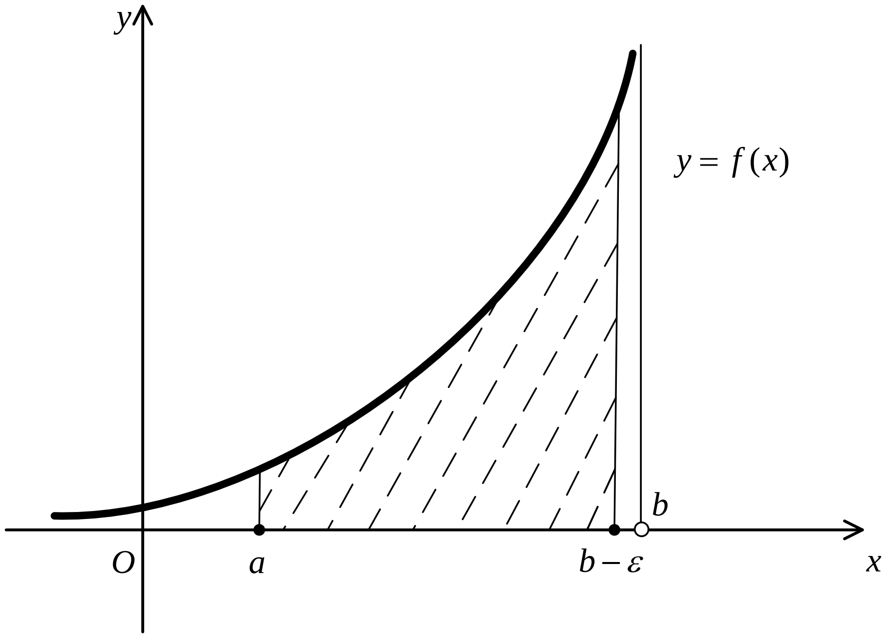


Рис. 4.5. $x=b$ - особлива точка функції $y=f\left(x\right)$

Визначення. Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f\left(x\right)dx$ при $\varepsilon \to 0$, то цю границю називають *невласним інтегралом другого роду* від функції $y=f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$ і позначають як

$$\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f\left(x\right)dx, \tag{4.5}$$

причому цей невласний інтеграл називають *збіжним*.

Якщо границя (4.5) не існує або нескінченна, то невласний інтеграл називають *розбіжним*.

2. Аналогічно розглянемо інший випадок.

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ неперервна на $\left(a;b\right]$ і має в точці $x=a$ розрив другого роду. Розглянемо відрізок $\left[a+\varepsilon;b\right], \varepsilon>0$, на якому функція обмежена і неперервна. Особливою точкою функції $y=f\left(x\right)$ у цьому випадку є точка $x=a$ (рис. 4.6).

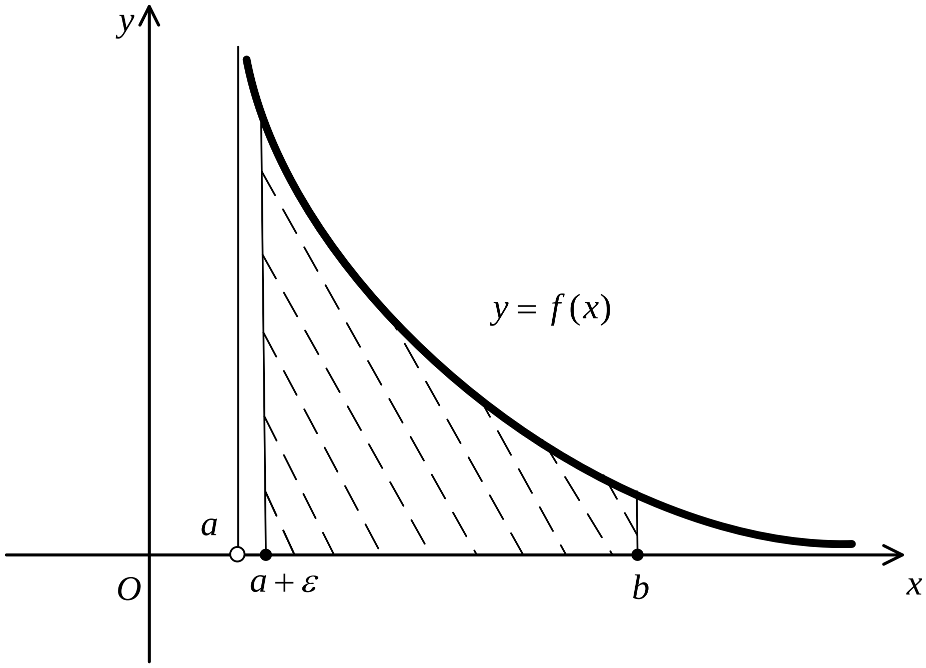


Рис. 4.6. $x = a$ - особлива точка функції $y = f\left(x\right)$

Визначення. Границю визначеного інтеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f\left(x\right)dx$ при $\varepsilon \to 0$ називають *невласним інтегралом другого роду* від функції $y = f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$ і позначають як

$$\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f\left(x\right)dx, \qquad (4.6)$$

причому цей невласний інтеграл називають *збіжним*.

Якщо існує скінченна границя (4.6), то невласний інтеграл називають *збіжним*, якщо границя (4.6) не існує або нескінченна, то невласний інтеграл називають *розбіжним*.

3. Функція $y = f\left(x\right)$ необмежена у внутрішній точці $x = c$, $c \in \left(a;b\right)$ (рис. 4.7).

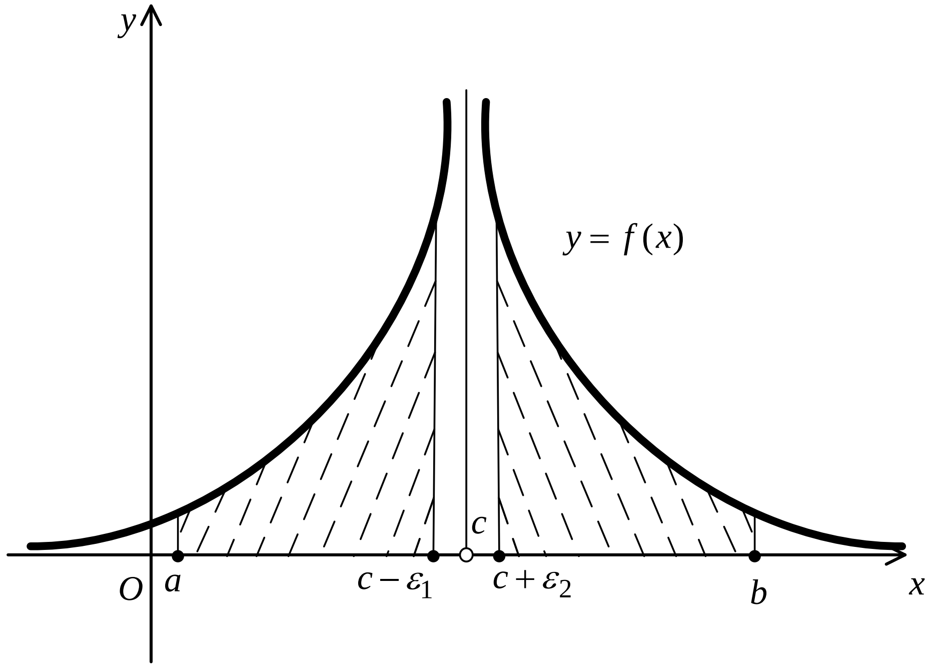


Рис. 4.7. $x=c$ - особлива точка функції $y=f\left(x\right)$

У цьому випадку невласний інтеграл визначається як

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx+\int_c^b f\left(x\right)dx \qquad (4.7)$$

і є *збіжним* лише тоді, коли є збіжними обидва невласних інтеграли в правій частині.

Знаходження невласних інтегралів другого роду відбувається аналогічно обчисленню невласних інтегралів першого роду:

- обчислюють визначений інтеграл на скінченному відрізку;
- знаходять границю при $\varepsilon\to 0$ або $\varepsilon_1\to 0,\ \varepsilon_2\to 0$ залежно від умови.

Приклад 4.5. Дослідити на збіжність невласний інтеграл другого роду

$$\int_a^b \frac{dx}{\left(x-a\right)^{\alpha}},\ \alpha>0.$$

Розв’язання

Розглянемо два випадки:

$$1)\ \alpha=1:\quad \int\limits_a^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\ln|x-a|\right\}\Big|_{a+\varepsilon}^b=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\ln(b-a)-\ln\varepsilon\right\}=+\infty,\ \varepsilon>0,\ a+\varepsilon<b.;$$

$$2)\ \alpha\neq 1:\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\}\Bigg|_{a+\varepsilon}^d=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(b-a)^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}\right\}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, 0<\alpha<1;\\ +\infty, \qquad \alpha>1.\end{cases}$$

Відповідь: $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, 0<\alpha<1, \textit{ збігається},\\ +\infty, \qquad \alpha\geq 1, \textit{ розбігається}.\end{cases}$

Висновок.

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\ \textit{при}\ 0<\alpha<1,\ \textit{збігається},\\ +\infty\ \textit{при}\ \alpha\geq 1,\ \textit{розбігається}.\end{cases} \tag{4.8}$$

Зауваження. Інтеграл $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \alpha>0$ називають *еталонним*, тому що його часто використовують для дослідження невласних інтегралів другого роду на збіжність.

Зокрема

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{при } 0<\alpha<1, \text{ збігається}, \\ \text{при } \alpha \ge 1, \text{ розбігається}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Приклад 4.6. Обчислити невласні інтеграли другого роду або встановити їхню розбіжність:

1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$;

3) $\displaystyle\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

Розв'язання:

1) підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ на проміжку $[0;3]$ має особливу точку $x=3$, тому

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\arcsin\frac{x}{3}\right\}\Bigg|_0^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3} - \arcsin 0\right\} = \frac{\pi}{2} \text{ (інтеграл збігається);}$$

2) підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ на $[1;2]$ має особливу точку $x=1$. Отримаємо

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\dfrac{dx}{x} \\ x_н = 1+\varepsilon \to t_н = \ln(1+\varepsilon) \\ y_в = 2 \to t_в = \ln 2 \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\ln|t|\right\}\Big|_{\text{n}(1+\varepsilon)}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\ln|\ln 2| - \ln|\ln(1+\varepsilon)|\right\} = +\infty.$$

Як наслідок, інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ - розбігається;

3) бачимо, що підінтегральна функція $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ на проміжку має особливу точку $x = 3 \in [0;5]$. Розбиваємо відрізок $[0;5]$ на два $[0;3-\varepsilon_1]$ і $[3+\varepsilon_2;5]$ $(\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0)$, на яких функція $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ інтегрована. Тоді

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{3-\varepsilon_1} \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{3+\varepsilon_2}^{5} \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left\{-\frac{3}{4}\left(9-x^2\right)^{2/3}\right\}\Bigg|_0^{3-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left\{-\frac{3}{4}\left(9-x^2\right)^{2/3}\right\}\Bigg|_{3+\varepsilon_2}^{5} =$$

$$= -\frac{3}{4}\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left\{\left(9-(3-\varepsilon_1)^2\right)^{2/3} - 9^{2/3}\right\} - \frac{3}{4}\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left\{\left(9-5^2\right)^{2/3} - \left(9-(3+\varepsilon_2)^2\right)^{2/3}\right\} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(9^{2/3} - 16^{2/3}\right) \approx -1{,}517 \text{ (інтеграл збігається).}$$

Відповідь: 1) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ (інтеграл збігається);

2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ розбігається;

3) $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}} = \frac{3}{4}\left(9^{2/3} - 2^{8/3}\right)$ (інтеграл збігається).

4.4. Ознаки збіжності невласного інтеграла другого роду

Для дослідження невласних інтегралів другого роду також застосовуються ознаки збіжності, аналогічні ознакам збіжності для невласних інтегралів першого роду.

Теорема (***перша ознака порівняння***). Нехай виконуються такі умови:

1. Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a;b)$ і мають особливу точку $x=b$.

2. Для будь-якого $x\in[a;b)$ $0\le f(x)\le g(x)$.

Тоді:

1) якщо $\int\limits_a^b g(x)dx$ збігається, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається;

2) якщо $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається, то $\int\limits_a^b g(x)dx$ розбігається.

Теорема (***друга ознака порівняння – гранична***). Нехай виконуються такі умови:

1. Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a;b)$ і мають особливу точку $x=b$.

2. Для будь-якого $x \in [a;b)$ функції $f(x),\ g(x)$ невід'ємні.

Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < +\infty,$$

то інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_a^b g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

У випадку знакозмінної підінтегральної функції застосовують таку **теорему** (***абсолютної збіжності***). Якщо $x=b$ - особлива точка функції $f(x)$, а інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Зауваження:

1. Якщо інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*, а підінтегральна функція $f(x)$ - *абсолютно інтегрованою* на проміжку $[a;b)$.

2. Якщо інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ розбігається, а інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається *умовно збіжним*.

3. Аналогічні ознаки справедливі і для невласних інтегралів другого роду $\int\limits_a^b f(x)dx$, коли функція $f(x)$ має особливу точку $x=a$.

Приклад 4.7. Дослідити на збіжність невласні інтеграли другого роду:

1) $\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$;

2) $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{\left(4-x^2\right)^8}}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1-x\right)}$.

Розв’язання:

1) підінтегральна функція $f\left(x\right)=\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ неперервна та додатна на проміжку $\left(0;1\right]$. Точка $x=0$ - особлива точка $f\left(x\right)$. Для використання першої ознаки порівняння розглянемо функцію $g\left(x\right)$:

$$x\in\left(0;1\right]:\ f\left(x\right)=\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\le\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=g\left(x\right).$$

Розглянемо невласний інтеграл $\int\limits_0^1 g\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$, що, за формулою (4.9), збігається $\left(\alpha=\frac{1}{4}\right)$. Як наслідок, за першою ознакою порівняння інтеграл $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ також збігається;

2) підінтегральна функція $f\left(x\right)=\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{\left(4-x^2\right)^8}}\ge 0$ на проміжку $\left(0;2\right]$. Точка $x=2$ - особлива точка $f\left(x\right)$. За формулами скороченого множення, підінтегральну функцію можна записати як

$$f\left(x\right)=\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{\left(4-x^2\right)^8}}=\frac{x^2}{\sqrt[5]{\left(2+x\right)^8}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\left(2-x\right)^8}}.$$

Для використання другої ознаки порівняння (граничної) розглянемо функцію $g(x)$:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{(2-x)^8}},\ \lim_{x\to 2-0} g(x)=+\infty.$$

Обчислюємо границю:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{x^2}{\sqrt[5]{\left(2-x^2\right)^8}}\cdot\sqrt[5]{(2-x)^8}\right)=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2\cdot\sqrt[5]{(2-x)^8}}{\sqrt[5]{(2-x)^8}\cdot\sqrt[5]{(2+x)^8}}=$$

$$=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{(2+x)^8}}=\frac{4}{\sqrt[5]{4^8}}=\frac{1}{2\sqrt[5]{2}}>0.$$

Тоді, за другою ознакою порівняння, $\int_0^2 f(x)dx$ і $\int_0^2 g(x)dx$ збігаються та розбігаються одночасно. Розглянемо

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[5]{(2-x)^8}}=\int_0^2\frac{dx}{(2-x)^{8/5}}$$ - розбігається, за формулою (4.8) $\left(\alpha=\frac{8}{3}>1\right)$.

Як наслідок, $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{\left(4-x^2\right)^8}}$ також розбігається;

3) підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$ додатна на проміжку $(0;1)$ і має дві особливі точки $x_1=0$ і $x_2=1$. Тоді заданий інтеграл розбиваємо на

суму двох, обравши будь-яку внутрішню точку проміжку $(0;1)$, наприклад $x_1 = 0,5$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} = \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} + \int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} = I_1 + I_2 .$$

Досліджуємо на збіжність кожний інтеграл у правій частині окремо:

а) $I_1 = \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$.

Підінтегральна функція $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$ додатна на проміжку $(0;0,5]$. Особлива точка $x_1 = 0$. Розглянемо функцію

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \to 0+0} g_1(x) = +\infty.$$

Оскільки границя

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)} = 1 > 0 \ ,$$

то, за другою ознакою порівняння, інтеграли $\int_0^{0,5} f_1(x)dx$ і $\int_0^{0,5} g_1(x)dx$ поводять себе однаково (збігаються або розбігаються одночасно).

Інтеграл $\int_0^{0,5} g_1(x)dx = \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ збігається, за формулою (4.9) $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$. Як наслідок, і інтеграл $I_1 = \int_0^{0,5} f_1(x)dx = \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$ збігається;

б) другий доданок $I_2=\int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$.

Підінтегральна функція $f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$ додатна на проміжку $[0,5;1)$, особлива точка $x_2=1$. Аналогічно I_1 розглянемо функцію

$$g_2(x)=\frac{1}{1-x},\quad \lim_{x\to 1-0} g_2(x)=+\infty.$$

Границя

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}=1>0\ .$$

Тобто, за другою ознакою порівняння, інтеграли $\int\limits_{0,5}^{1} f_2(x)dx$ і $\int\limits_{0,5}^{1} g_2(x)dx$ ведуть себе однаково.

Ураховуючи, що $\int\limits_{0,5}^{1} g_2(x)dx=\int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{1-x}$ розбігається $(\alpha=1)$, робимо висновок, що $I_2=\int\limits_{0,5}^{1} f_2(x)dx=\int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$ також розбігається.

Звідси, оскільки

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}=\underbrace{\int\limits_{0}^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}}_{\textit{збігається}}+\underbrace{\int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}}_{\textit{розбігається}},$$

то заданий інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$ розбігається.

Відповідь: 1) $\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ збігається;

2) $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{\left(4-x^2\right)^8}}$ розбігається;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$ розбігається.

Питання до розділу

1. Визначення невласного інтеграла першого роду.

2. Визначення збіжного (розбіжного) невласного інтеграла першого роду.

3. Геометричний зміст невласного інтеграла першого роду.

4. Ознаки збіжності невласного інтеграла першого роду.

5. Абсолютна збіжність невласного інтеграла першого роду.

6. Умовна збіжність невласного інтеграла першого роду.

7. Визначення невласного інтеграла другого роду.

8. Визначення збіжного (розбіжного) невласного інтеграла другого роду.

9. Ознаки збіжності невласного інтеграла другого роду.

10. Абсолютна збіжність невласного інтеграла другого роду.

11. Умовна збіжність невласного інтеграла другого роду.

Завдання

Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{5}{x^4} dx$.

2. $\int\limits_{1}^{+\infty} (3x+1) dx$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2}$.

5. $\int\limits_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$.

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+8x+17}$.

7. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

8. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{x^8+1}$.

10. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

11. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

12. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$.

13. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{arctg^2 xdx}{x^2+1}$.

15. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

16. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$.

17. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x^2) arctgx}$.

18. $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

19. $\int\limits_{1}^{2} \frac{3dx}{x\sqrt[4]{\ln x}}$.

20. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$.

Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

21. $\int\limits_{1}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

22. $\int\limits_{1}^{+\infty}\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)dx$.

23. $\int\limits_{0}^{4}\frac{\ln(2x+1)dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

24. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

25. $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

26. $\int\limits_{1}^{2}\frac{2dx}{x\ln^3 x}$.

27. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{3dx}{(x+1)^4}$.

28. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$.

29. $\int\limits_{0}^{1/e}\frac{dx}{x\ln^4 x}$.

30. $\int\limits_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

Відповіді

1. Збігається і дорівнює $\frac{5}{3}$.

2. Розбігається.

3. Збігається і дорівнює 1.

4. Збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

5. Збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

6. Збігається і дорівнює π.

7. Збігається і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

8. Розбігається.

9. Збігається і дорівнює 0.

10. Збігається і дорівнює $\frac{1}{2\ln^2 2}$.

11. Збігається і дорівнює $\frac{2}{3}\ln 2$.

12. Розбігається.

13. Збігається і дорівнює $1-\ln 2$.

14. Збігається і дорівнює $\frac{\pi^3}{12}$.

15. Збігається і дорівнює 2.

16. Розбігається.

17. Розбігається.

18. Збігається і дорівнює -1,5.

19. Збігається і дорівнює $4\sqrt[4]{\ln^3 2}$.

20. Збігається і дорівнює $\frac{10}{7}$.

21. Збігається.

22. Збігається.

23. Збігається.

24. Збігається.

25. Збігається.

26. Розбігається.

27. Розбігається.

28. Розбігається.

29. Збігається.

30. Збігається.

РОЗДІЛ 5. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

За допомогою визначеного інтеграла можна знайти площі плоских фігур, об'єму тіл обертання навколо осей координат і обчислити довжину дуги плоскої кривої.

5.1. Обчислення площі плоскої фігури

5.1.1. Площа фігури в декартовій системі координат

У підрозд. 3.2 було надано геометричний зміст визначеного інтеграла (рис. 5.1).

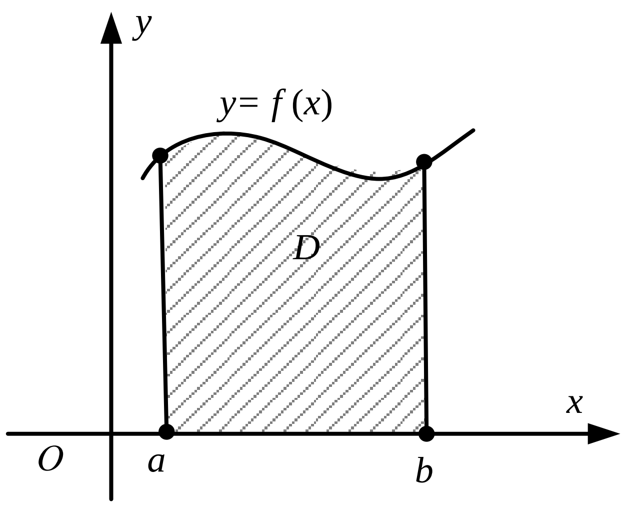


Рис. 5.1. Геометричний зміст визначеного інтеграла $\left(f\left(x\right)\geq 0\right)$

Якщо $f\left(x\right)$ неперервна і $f\left(x\right)\geq 0$ на інтервалі $\left[a;b\right]$, то визначений інтеграл (3.1) чисельно дорівнює *площі криволінійної трапеції*, обмеженої лініями $y=f\left(x\right)$, $x=a, x=b, y=0$ (рис. 5.2):

$$S_D=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx. \qquad (5.1)$$

Зауваження:

1. Якщо $f\left(x\right)$ неперервна і $f\left(x\right)\leq 0$ на інтервалі $\left[a;b\right]$ (рис. 5.2), то

$$S_D = -\int_a^b f(x)dx. \tag{5.2}$$

2. Якщо фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a, x = b$ (рис. 5.3), то

$$S_D = \int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\}dx, \ f_2(x) \geq f_1(x). \tag{5.3}$$

3. Якщо плоска фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (рис. 5.4), то

$$S_D = \int_{x_1}^{x_2} \{f_2(x) - f_1(x)\}dx, \ f_2(x) \geq f_1(x), \tag{5.4}$$

де границі інтегрування знаходять як абсциси точок перетину кривих $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = f_1(x), \\ y = f_2(x). \end{cases}$$

4. Якщо фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, при цьому функція, що обмежує фігуру зверху, задана рівнянням $f_2(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), a \leq x \leq c, \\ \varphi_2(x), c \leq x \leq b, \end{cases}$ то в цьому випадку фігура розбивається на стільки частин, скількома аналітичними виразами задана $y = f_2(x)$, а площа обчислюється як сума площ побудованих фігур (рис. 5.5):

$$S_D = S_{D_1} + S_{D_2}, \ f_2(x) \geq f_1(x). \tag{5.5}$$

5. Якщо фігура обмежена неперервною кривою $x=g(y)$ і прямими $y=c, y=d, x=0$ (рис. 5.6), то її площу обчислюють як

$$S_D=\int_c^d g(y)dy. \tag{5.6}$$

Формули, аналогічні формулам (5.2)-(5.5), можна також застосовувати при побудові проєкції на вісь Oy.

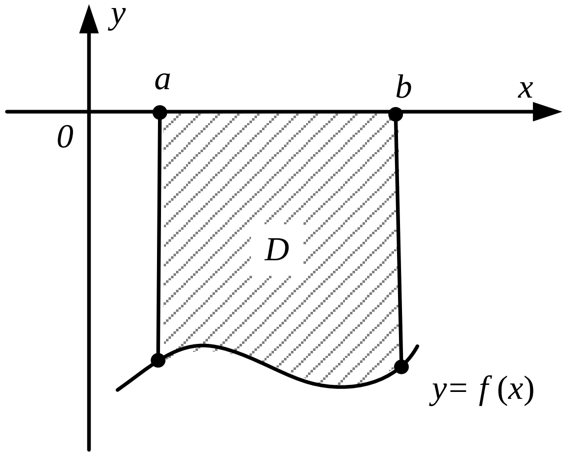


Рис. 5.2. Площа фігури, обмеженої кривою $y=f(x)$ $(f(x)\le 0)$ і прямими $x=a,\ x=b,\ y=0$

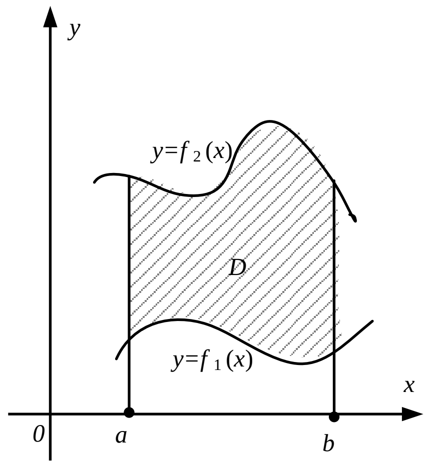


Рис. 5.3. Площа фігури, обмеженої кривими $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$ і прямими $x=a, x=b$

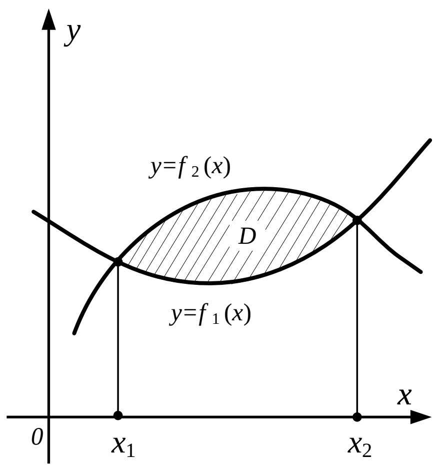


Рис. 5.4. Площа фігури, обмеженої кривими $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$

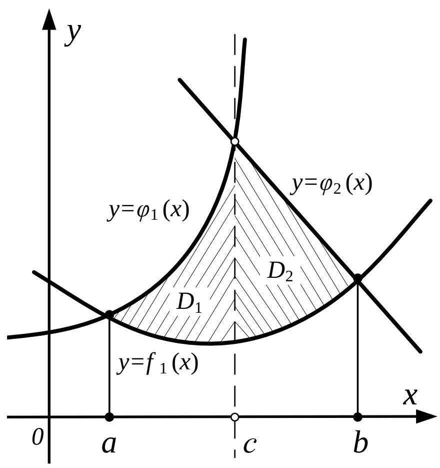


Рис. 5.5. Площа фігури, обмеженої кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$

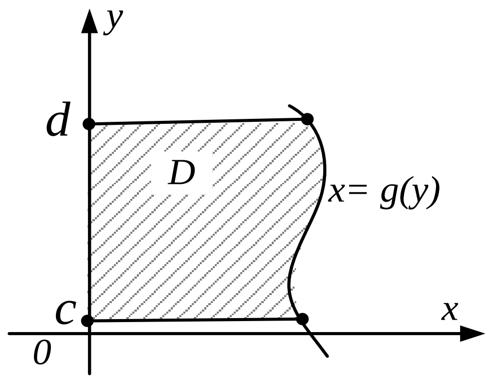


Рис. 5.6. Площа фігури, обмеженої лініями $x = g(y)$ і прямими $y = c, y = d, x = 0$

Розглянемо, як обчислити площу криволінійної трапеції, на прикладі.

Приклад 5.1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 + 1, x = -2, x = 1, y = 0$;

2) $y = 2x - x^2, y = x - 2$;

3) $y = \dfrac{2}{x}, y = 2x, x = 2, y = 0, \; x > 0$;

4) $y = \sin x, x = \dfrac{\pi}{2}, x = 2\pi, y = 0$;

5) $x = y^2 - 2y, x = 2 - y$.

Розв'язання:

1) спочатку будуємо фігуру (рис. 5.7), площу якої будемо обчислювати за формулою (5.1).

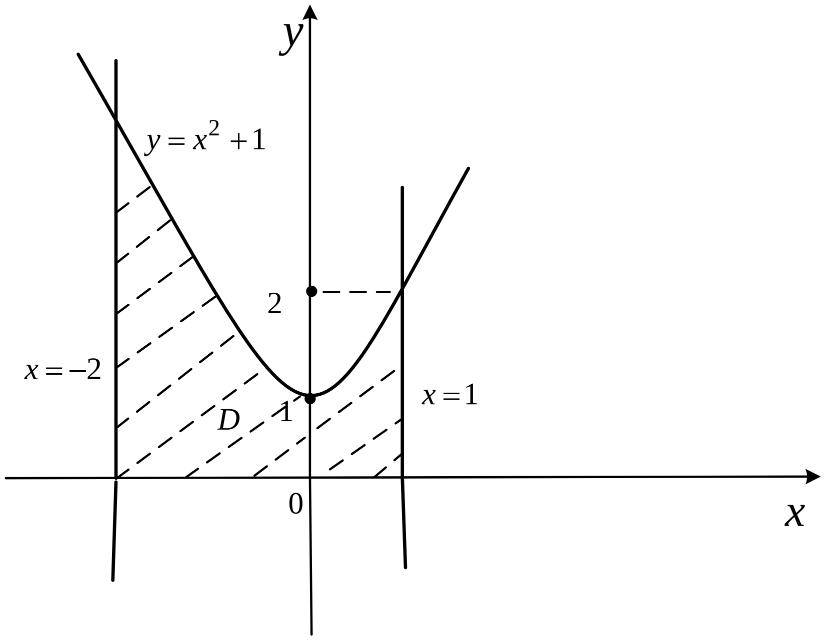


Рис. 5.7. Приклад 5.1, п. 1)

$$S_D = \int_{-2}^{1}\left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}-2\right) = 6 \text{ (кв. од.)};$$

2) побудуємо параболу $y = 2x - x^2$ і пряму $y = x - 2$ (рис. 5.8) та отримаємо область D.

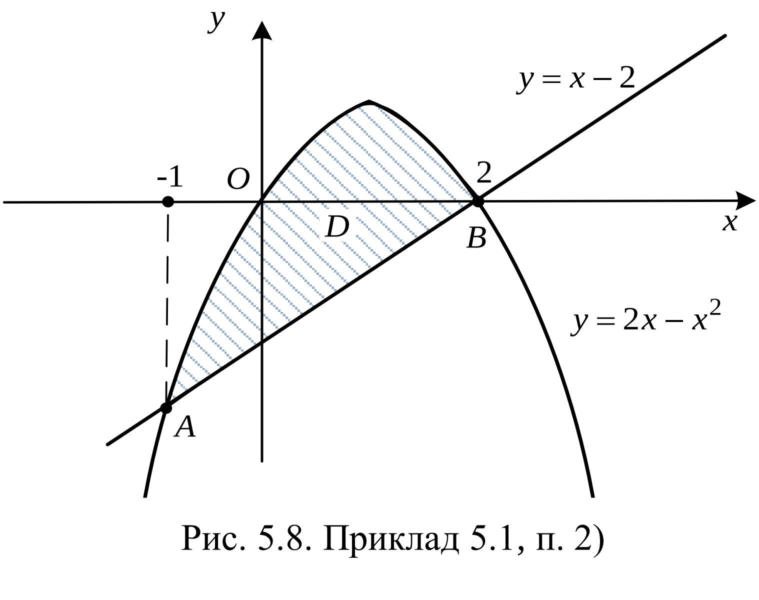


Рис. 5.8. Приклад 5.1, п. 2)

Обчислюємо точки перетину параболи з прямою:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = x - 2; \end{cases} \Leftrightarrow 2x - x^2 = x - 2;\ x^2 - x - 2 = 0; \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{array}\right.$$

За рис. 5.8 видно, що доцільно застосовувати формулу (5.4):

$$S_D = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_2(x) - f_1(x) \right\} dx = \int_{-1}^{2} \left\{ 2x - x^2 - x + 2 \right\} dx = \int_{-1}^{2} \left\{ x - x^2 + 2 \right\} dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \left(2 - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) = 4{,}5 \text{ (кв. од.)};$$

3) фігура подана на рис. 5.9.

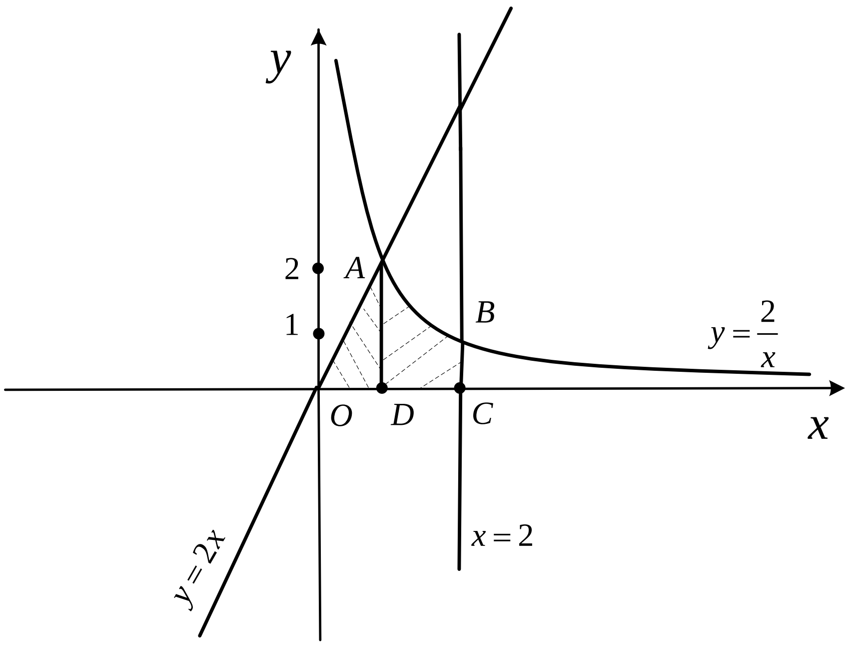


Рис. 5.9. Приклад 5.1, п. 3)

Очевидно, що

$$S_{OABC} = S_{OAD} + S_{DABC}.$$

Знайдемо координати точки A:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = \dfrac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \ \frac{2}{x} = 2x, \ 2x^2 = 2, \ x^2 = 1, \ x = \pm 1.$$

За рис. 5.9 бачимо, що фігура $OABC$ розташована в I чверті, тому обираємо $x = 1$. Отже, $A(1;2)$. Тому за формулою (5.1) обчислюємо:

$$S_{OAD} = \int_0^1 2x dx = 2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 1 \text{ (кв. од.)},$$

$$S_{DABC} = \int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2\ln|x|\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 2\ln 1 = 2\ln 2 \text{ (кв. од.)},$$

$$S_{OABC} = 1 + 2\ln 2 \approx 2{,}39 \text{ (кв. од.)};$$

4) будуємо фігуру, площу якої треба знайти (рис. 5.10).

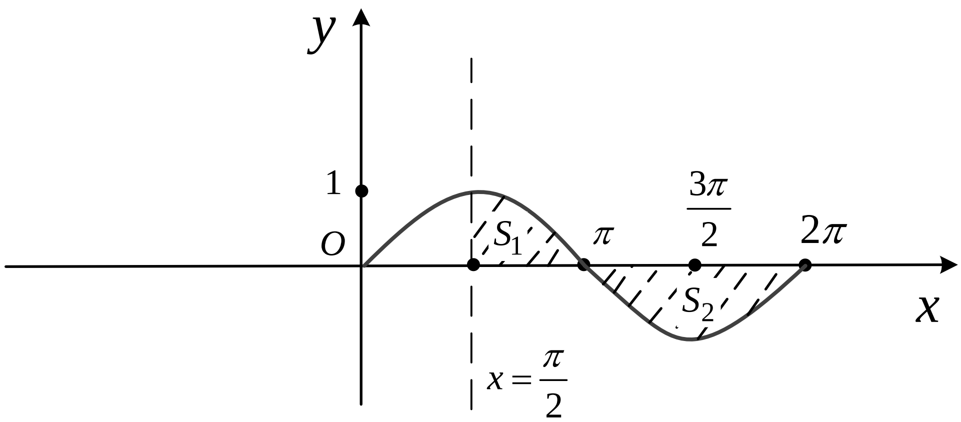


Рис. 5.10. Приклад 5.1, п. 4)

Бачимо, що функція $y = \sin x$ на проміжку $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ є додатною, а на проміжку $x \in (\pi; 2\pi)$ від'ємною. Розбиваючи прямою $x = \pi$ область на дві частини за формулою (5.5), отримаємо $S = S_1 + S_2$. Тоді за формулами (5.1) і (5.2) відповідно

$$S = S_1 + S_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right).$$

Знайдемо кожний інтеграл окремо:

$$S_1 = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} = 1 \text{ (кв. од.)};$$

$$S_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos \pi = 2 \text{ (кв. од.)}.$$

Тоді остаточно маємо

$$S = S_1 + S_2 = 3 \text{ (кв. од.)};$$

5) спосіб 1.

Виконаємо побудову фігури, обмеженої лініями $x = y^2 - 2y,\ x = 2 - y$ (рис. 5.11).

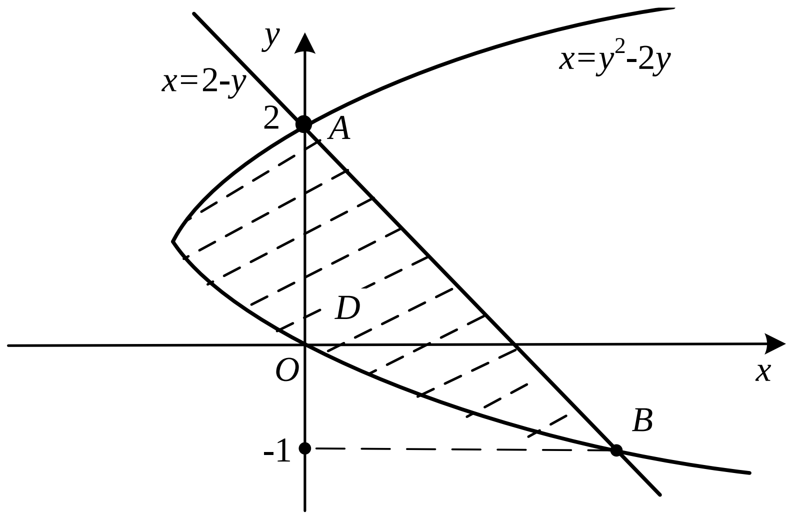


Рис. 5.11. Приклад 5.1, п. 5. Проєкція на вісь *Oy*

Ординати точок A, B перетину параболи та прямої знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ x = 2 - y, \end{cases} \Rightarrow y_1 = -1,\ y_2 = 2.$$

Тоді

$$S_D = \int_c^d \left(g_2(y) - g_1(y)\right)dy = \int_{-1}^{2} \left(2 - y - \left(y^2 - 2y\right)\right)dy =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-y^2 + y + 2\right)dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4{,}5 \text{ (кв. од).}$$

Спосіб 2.

Цю саму площу можна знайти і за формулами (5.4), (5.5). Зобразимо задану фігуру. Будуємо пряму $x = 2 - y$ (або $y = 2 - x$) і параболу $x = y^2 - 2y$ або $y = 1 \pm \sqrt{x+1}$ (рис. 5.12).

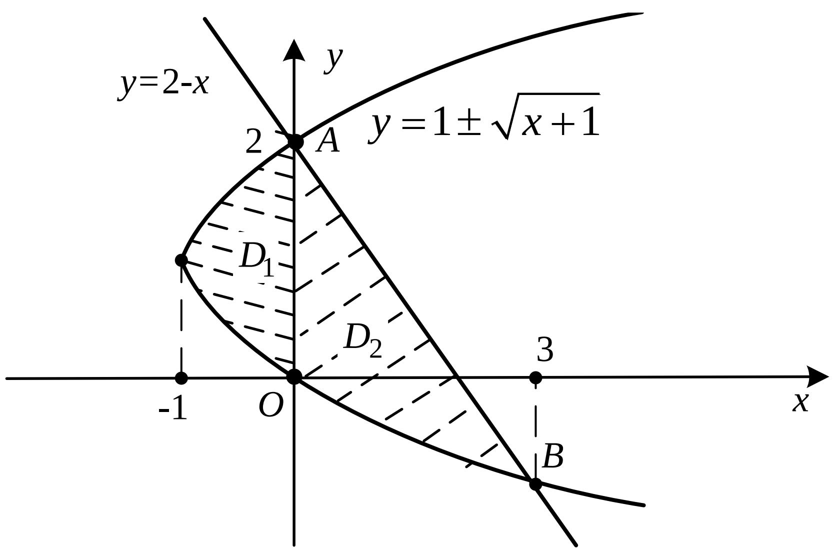


Рис. 5.12. Приклад 5.1, п. 5. Проєкція на вісь Ox

Прямою OA (лежить на осі Oy) розіб'ємо фігуру на дві частини. Тоді $S = S_{D_1} + S_{D_2}$.

Фігура D_1 знизу обмежена гілкою параболи $y = 1 - \sqrt{x+1}$, зверху – гілкою параболи $y = 1 + \sqrt{x+1}$, а її проєкція на вісь Ox – це відрізок $[-1;0]$. Отже,

$$S_{D_1} = \int_{-1}^{0} \left(1 + \sqrt{x+1} - \left(1 - \sqrt{x+1}\right)\right) dx = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\, dx = \frac{4}{3} \text{ (кв. од).}$$

Фігура D_2 знизу обмежена гілкою параболи $y = 1 - \sqrt{x+1}$, зверху прямою $y = 2 - x$. Проєкція фігури D_2 на вісь Ox – відрізок $[0;3]$. Тому

$$S_{D_2} = \int_{0}^{3} \left(2 - x - \left(1 - \sqrt{x+1}\right)\right) dx = \int_{0}^{3} \left(1 - x + \sqrt{x+1}\right) dx = \frac{19}{6} \text{ (кв. од).}$$

$$S = S_{D_1} + S_{D_2} = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2} \text{ (кв. од.)}$$

Зауваження. Для розв'язання цього прикладу було запропоновано два способи. Як ми побачили, спосіб 1 призводить до обчислення одного інтеграла, а спосіб 2 – двох інтегралів. Очевидно, що оптимальнішим був спосіб 1. Тобто, розв'язуючи завдання, намагайтесь обирати той метод, що призводить або до найменшої кількості інтегралів, або до більш простих інтегралів.

Відповідь: 1) 6 кв. од.; 2) 4,5 кв. од.; 3) $1 + 2\ln 2 \approx 2{,}39$ кв. од.; 4) 3 кв. од.; 5) 4,5 кв. од.

5.1.2. Задання кривої, заданої в параметричній формі

Якщо крива, що обмежує криволінійну трапецію, задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

то площу криволінійної трапеції можна обчислити за формулою (5.1), зробивши при цьому у визначеному інтегралі заміну змінної $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt.$ Тобто

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt, \tag{5.7}$$

де границі інтегрування t_1, t_2 визначаються з рівнянь $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, а функції $\varphi(t), \psi(t)$ - диференційовані та мають неперервні похідні $\varphi'(t), \psi'(t)$ на $[t_1; t_2]$.

Приклад 5.2. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \; t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

Розв'язання

Еліпс симетричний відносно осей Ox та Oy (рис. 5.13).

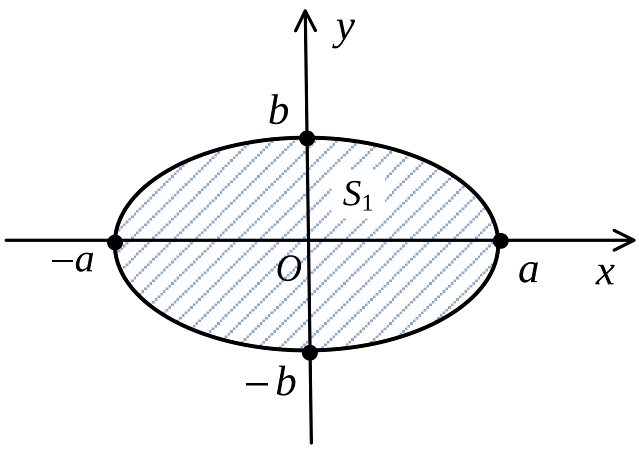


Рис. 5.13. Приклад 5.2

Ураховуючи симетрію, можна знайти площу однієї з частин $S_1 = \int_0^a y dx$ і помножити її на 4:

$$S = 4S_1 \text{ або } S = 4\int_0^a y dx.$$

За умовою задачі $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, а границі інтегрування

$$x_н = a\cos t \Rightarrow 0 = a\cos t,\ t_н = \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$x_в = a\cos t \Rightarrow a = a\cos t,\ t_в = \arccos 1 = 0.$$

За формулою (5.7),

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$= 4ab\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t}{2}dt\right) = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Відповідь: $S = \pi ab$ кв. од.

5.2. Довжина дуги плоскої кривої

5.2.1. Довжина дуги в декартовій системі координат

Нехай у декартовій системі координат на площині задана неперервна на $[a;b]$ крива рівнянням $y = f(x)$, причому $f(x)$ на $[a;b]$ має неперервну похідну.

Розіб’ємо відрізок $[a;b]$ на часткові відрізки точками розподілу: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (рис. 5.14) та отримаємо відповідні часткові дуги $AK_1, K_1K_2, ..., K_{i-1}K_i, ..., K_{n-1}B$.

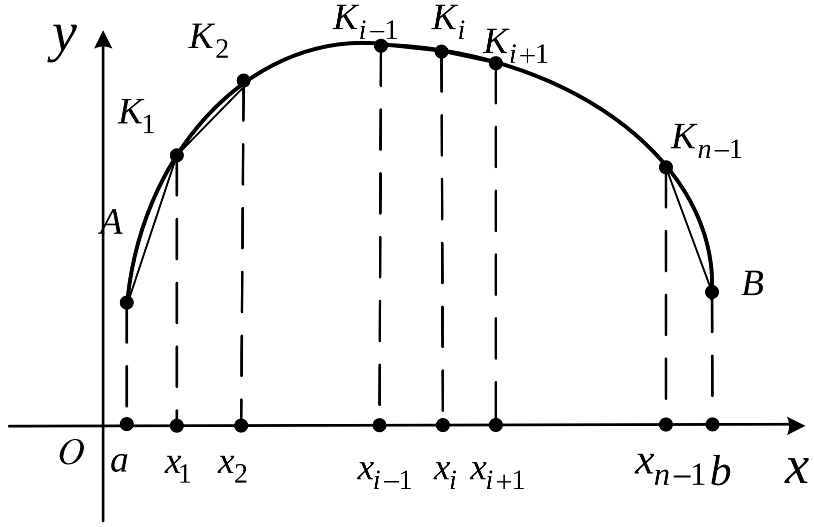


Рис. 5.14. Розбиття дуги AB на часткові дуги

У кожну дугу впишемо хорду, що з’єднує кінці дуги. Отримаємо ламану $AK_1K_2...K_i...K_{n-1}B$. Позначимо довжини часткових дуг $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$ відповідно. Отже, довжина ламаної

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \,. \tag{5.8}$$

Визначення. Довжиною L дуги AB називається границя, до якої наближається довжина вписаної в неї ламаної, за умови, що кількість ланок ламаної необмежено збільшується, а довжина її найбільшої ланки наближається до нуля:

$$L = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \,, \ \Delta l = \max_{1 \le i \le n} \Delta l_i \,. \tag{5.9}$$

Розглянемо i –ту ланку $K_{i-1}K_i$ ламаної і побудуємо відрізок $K_{i-1}M_i$ паралельно осі Ox (рис. 5.15).

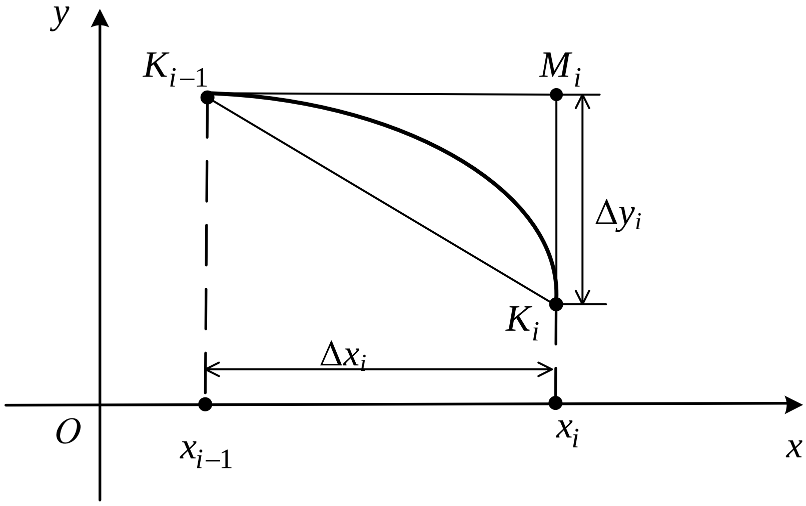


Рис. 5.15. Відрізок $K_{i-1}K_i$

З прямокутного трикутника $K_{i-1}K_iM_i$ отримаємо

$$K_{i-1}M_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

$$K_iM_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta y_i,$$

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Розглянемо відношення $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$. На наступному кроці, застосувавши до останньої рівності формулу про скінченний приріст, а саме $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i$, отримаємо

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Як наслідок, довжина ламаної (5.8) має вигляд

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i\ .$$

Тоді з формули (5.9) отримаємо, що довжина дуги може бути знайдена як границя від інтегральної суми:

$$L=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\ .$$

Отримаємо остаточно формулу для обчислення довжини кривої $y=f(x),\ x\in[a;b]$:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\ . \tag{5.10}$$

Приклад 5.3. Обчислити довжину дуги лінії $y=1-\ln\cos x,\ \ x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Розв'язання

За умовою $y=1-\ln\cos x,$ тоді $y'=-\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=tgx,$ $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\cos x},\ x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. За формулою (5.10),

$$L=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos x}dx=\left|\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2},\quad x=2arctgt, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_н=0\Rightarrow t_н=0 \\ x_в=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t_в=tg\frac{\pi}{8} \end{array}\right|=\int_0^{tg\frac{\pi}{8}}\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int_0^{tg\frac{\pi}{8}}\frac{dt}{1-t^2}=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_0^{tg\frac{\pi}{8}}=-\ln\left|\frac{tg\frac{\pi}{8}-1}{tg\frac{\pi}{8}+1}\right|+\ln 1=\ln\left|\frac{tg\frac{\pi}{8}+1}{tg\frac{\pi}{8}-1}\right|\approx 0{,}88\ \textit{од.}$$

Відповідь: $L\approx 0{,}88$ *од.*

5.2.2. Обчислення довжини дуги кривої, заданої в параметричній формі

Нехай крива задана в параметричній формі:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta], \end{cases}$$

причому функції $\varphi(t),\psi(t)$ - диференційовані та мають неперервні похідні $\varphi'(t),\psi'(t)$ на $[\alpha;\beta]$, $\varphi'(t)\neq 0$. За таких умов існує похідна $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

За формулою (5.10),

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\sqrt{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)(dx)^2}= \\ =\sqrt{(dx)^2+\left(f'(x)dx\right)^2}=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \\ dx=x'(t)dt,\ \ dy=y'(t)dt \\ x_н=a\to t_н=\varphi^{-1}(x)=\alpha \\ y_в=b\to t_в=\psi^{-1}(y)=\beta\end{array}\right|=.$$

Отже, для параметрично заданої кривої довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \tag{5.11}$$

Приклад 5.4. Обчислити довжину дуги кривої:

1) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \, t \in [0; 2\pi]; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \dfrac{t^3}{3}, \, t \in \left[0; \sqrt{3}\right]. \end{cases}$

Розв'язання:

1) $x'_t = 4(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 4t\cos t, \;\; y'_t = 4(\cos t - \cos t + t\sin t) = 4t\sin t,$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{(4t\cos t)^2 + (4t\sin t)^2} = \sqrt{16t^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = 4t, \, t \in [0; 2\pi].$$

За формулою (5.11),

$$L = \int_0^{2\pi} 4t dt = 2t^2 \Big|_0^{2\pi} = 8\pi^2 \approx 78,96 \text{ (од.)};$$

2) $x'_t = 2t, \;\; y'_t = 1 - t^2, \; \sqrt{(x'_t)^2 + (y_t)^2} = \sqrt{4t^2 + \left(1 - t^2\right)^2} =$

$$= \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = \sqrt{\left(t^2 + 1\right)^2} = t^2 + 1.$$

За формулою (5.11),

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \left(t^2 + 1\right) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ (од.)}.$$

Відповідь: 1) $\approx 78,96$ *од.*; 2) $\approx 3,46$ *од.*

5.3. Об'єм тіла обертання

Розглянемо криволінійну трапецію в декартовій системі координат, обмежену графіком функції $y = f\left(x\right)$, прямими $x = a,\ x = b$ і відрізком осі Ox. Обертаючи цю криволінійну трапецію навколо осі Ox, отримаємо тіло у просторі (рис. 5.16).

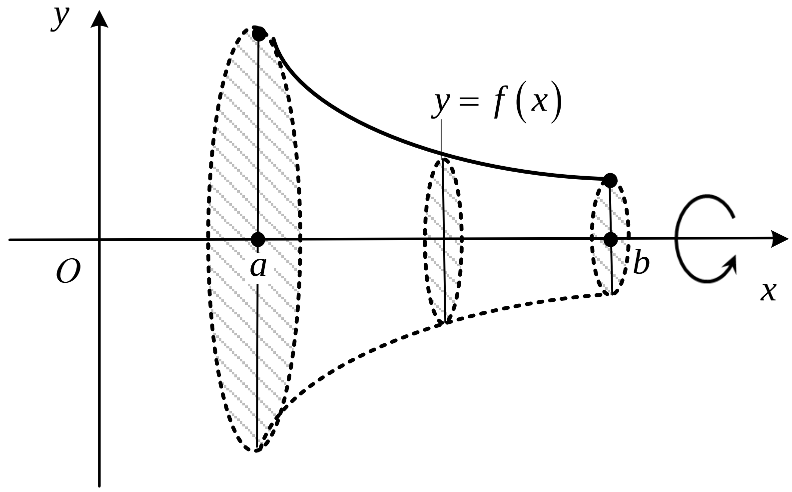


Рис. 5.16. Тіло обертання у просторі навколо осі Ox

Об'єм отриманого тіла обчислюється за формулою

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx. \qquad (5.12)$$

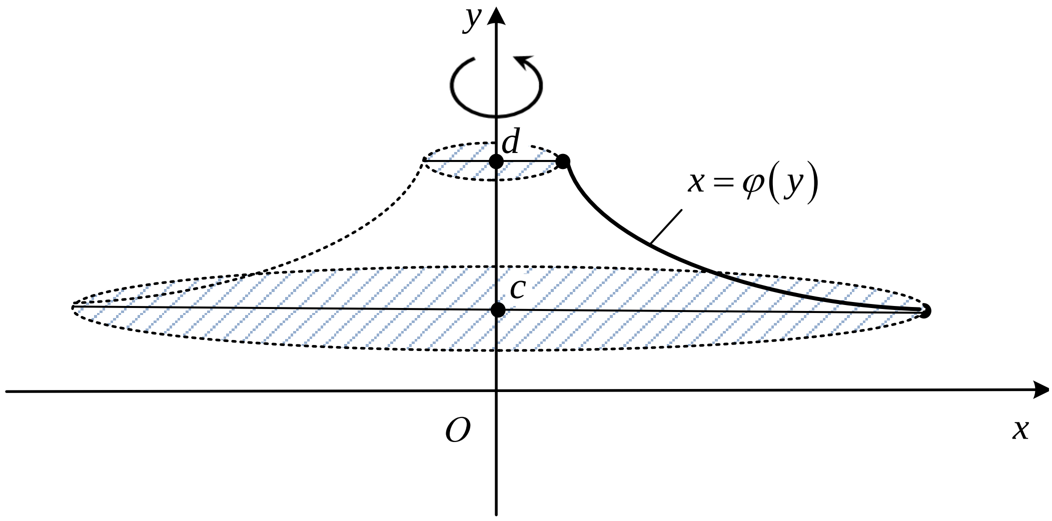
Зауваження:

1. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої прямими $x = a,\ x = b$ і графіками функцій $y = f_1\left(x\right)$, $y = f_2\left(x\right)$, де $f_1\left(x\right)$ і $f_2\left(x\right)$ - неперервні, невід'ємні функції, причому $f_1\left(x\right) \le f_2\left(x\right)$, $x \in \left[a;b\right]$, обчислюється як

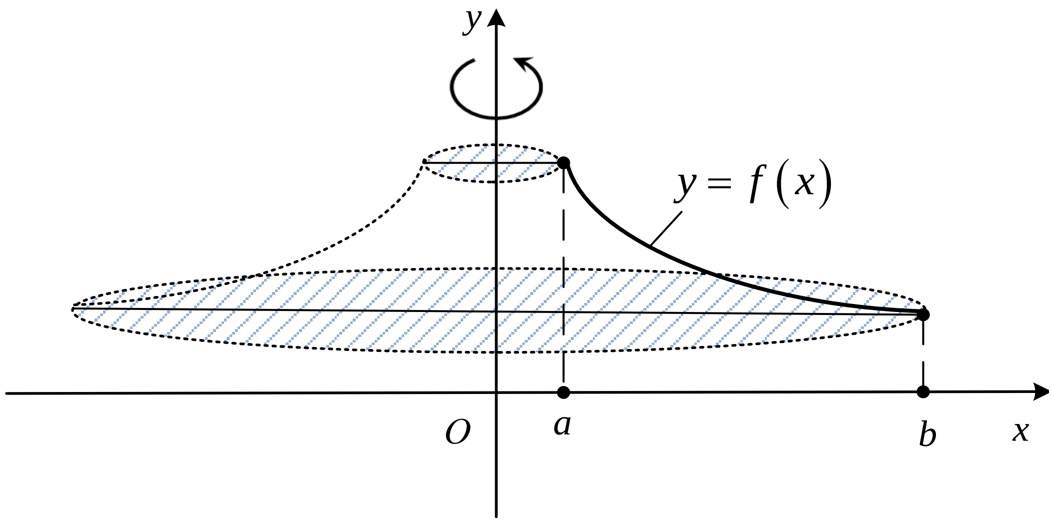
$$V_{Ox} = \pi\int_a^b \left\{ f_2^2\left(x\right) - f_1^2\left(x\right)\right\} dx. \qquad (5.13)$$

2. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy (рис. 5.17, а), фігури, обмеженої лініями $y=c, y=d, x=0$, $x=\varphi(y)$, де $x=\varphi(y)$ - невід'ємна, однозначна неперервна функція на $[c;d]$, обернена до $y=f(x)$ обчислюється за формулою

$$V_{Oy}=\pi\cdot\int\limits_{c}^{d}x^{2}(y)\,dy. \tag{5.14}$$



а



б

Рис. 5.17. Тіло обертання у просторі навколо осі Oy (проєкція на вісь Oy)

3. Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy (рис. 5.17, б), яка обмежена лініями $x=a, x=b$, $y=f(x)$, де $f(x)$ - невід’ємна, однозначна неперервна функція на $[a;b]$ обчислюється за формулою:

$$V_{Oy}=2\pi\cdot\int_a^b xf(x)dx \qquad (5.15)$$

Приклад 5.5. Обчислити об’єми тіл, утворених обертанням плоских фігур Ox і навколо осі Oy:

1) $xy=2, x=1, x=2, y=0$;

2) $y=x^3, x=0, y=8$;

3) $y=2x-x^2, y=2-x$.

Розв’язання:

1) побудуємо фігуру, обмежену лініями $y=\frac{2}{x}$ (гіпербола), $x=1, x=2, y=0$ (прямі) (рис. 5.18). Знайдемо об’єм тіла (рис. 5.19), утвореного при обертанні цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox.

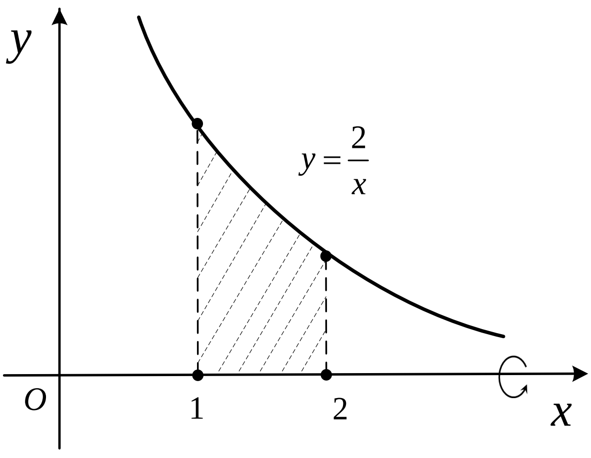


Рис. 5.18. Криволінійна трапеція обертається навколо осі Ox

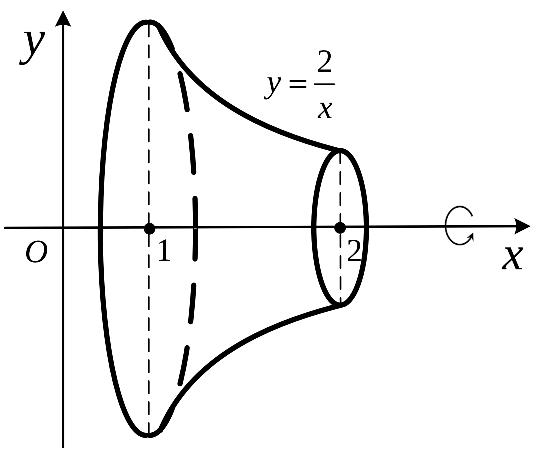


Рис. 5.19. Тіло обертання навколо осі Ox

За формулою (5.12),

$$V_{Ox}=\pi\int_1^2\left(\frac{2}{x}\right)^2dx=4\pi\int_1^2\frac{dx}{x^2}=-4\pi\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^2=-4\pi\left(\frac{1}{2}-1\right)=2\pi\approx 6,28 \text{ (куб. од.).}$$

Знайдемо тепер об’єм тіла (рис. 5.21), утвореного при обертанні цієї самої криволінійної трапеції (рис. 5.20) навколо осі Oy.

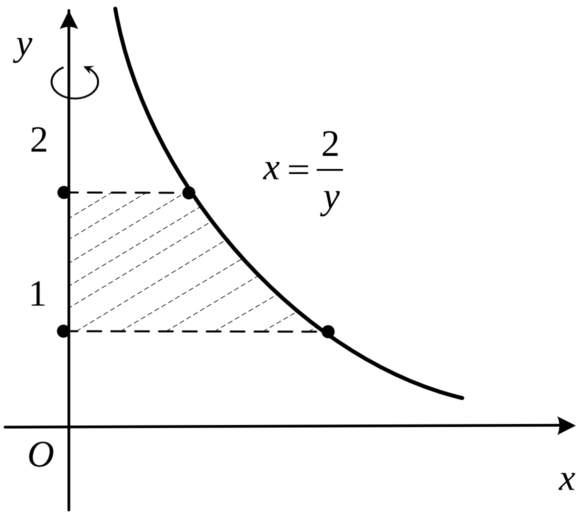


Рис. 5.20. Криволінійна трапеція обертається навколо осі Oy

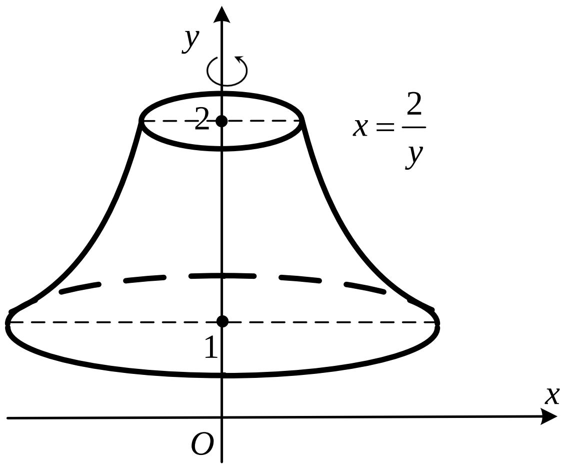


Рис. 5.21. Тіло обертання навколо осі Oy

За формулою (5.14),

$$V_{Oy}=\pi\cdot\int_1^2\left(\frac{2}{y}\right)^2dy=2\pi\approx 3,28 \text{ (куб. од.);}$$

2) побудуємо фігуру, утворену $y=x^3$ (кубічна парабола) і $y=8$ (пряма) (рис. 5.22).

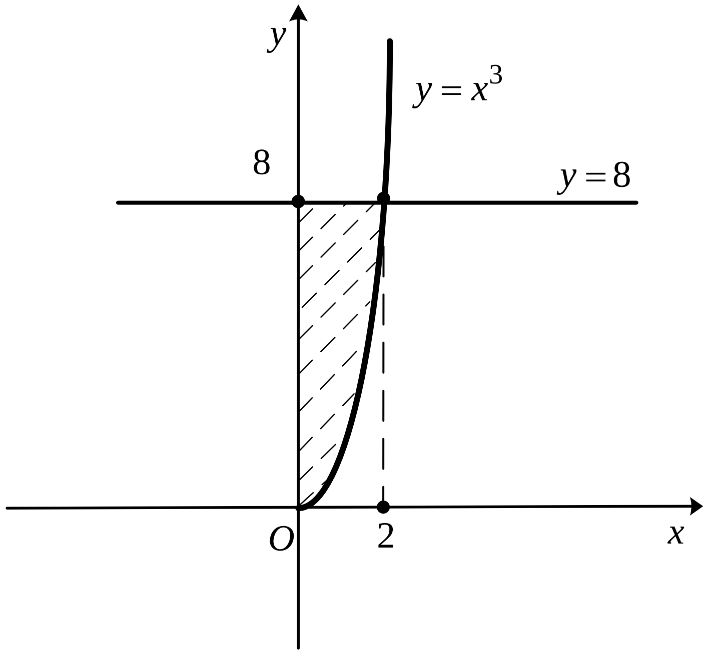


Рис. 5.22. Приклад 5.5, п. 2

Знаходимо точки перетину параболи з прямою:

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 8; \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = 8,\ x = 2.$$

Для обчислення об'єму тіла обертання навколо осі Ox використовуємо формулу (5.13).

$$V_{Ox} = \pi\int_0^2 \left\{8^2 - \left(x^3\right)^2\right\}dx = \pi\int_0^2 \left\{64 - x^6\right\}dx = \pi\left(64x - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi\left(128 - \frac{128}{7}\right) = \frac{768}{7}\pi \approx 344{,}68 \text{ (куб. од.).}$$

Знайдемо об'єм тіла, утвореного при обертанні цієї самої фігури навколо осі Oy:

$$V_{Oy} = \pi \cdot \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \frac{96}{5}\pi \approx 60{,}32 \text{ (куб. од.);}$$

3) будуємо фігуру, обмежену лініями $y = 2x - x^2$ (парабола з вершиною в точці (1; 1)), пряма $y = 2 - x$ (рис. 5.23).

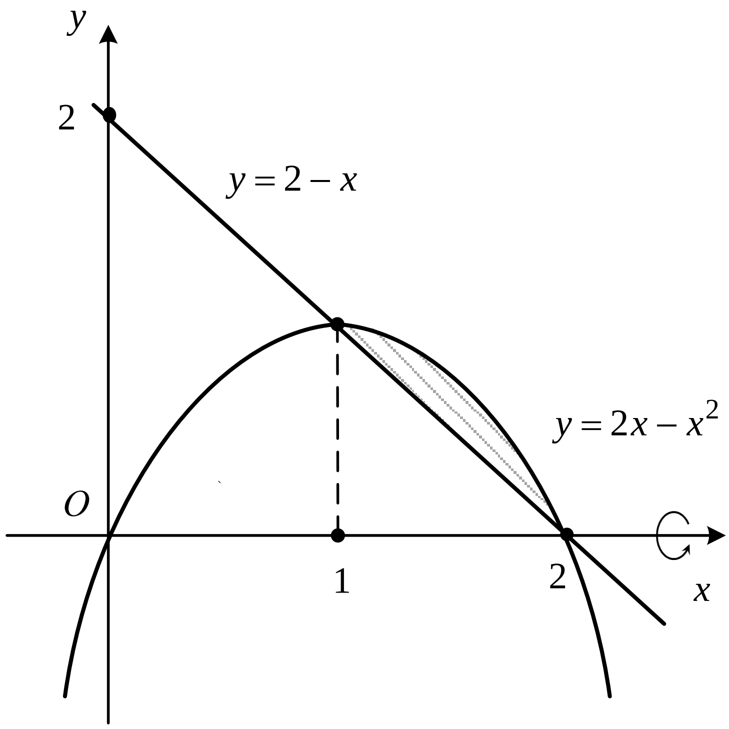


Рис. 5.23. Обертання навколо осі Ox

Обчислимо точки перетину параболи з прямою:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 2 - x; \end{cases} \Leftrightarrow 2x - x^2 = 2 - x;\ x^2 - 3x + 2 = 0; \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{array} \right.$$

Для обчислення об’єму тіла обертання навколо осі Ox використовуємо формулу (5.13):

$$V_{Ox} = \pi \int_1^2 \left\{ \left(2x - x^2\right)^2 - \left(2 - x\right)^2 \right\} dx =$$

$$= \pi \int_1^2 \left\{ 4x^2 - 4x^3 + x^4 - 4 + 4x - x^2 \right\} dx = \pi \int_1^2 \left\{ x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 \right\} dx =$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+x^3+2x^2-4x\right)\Bigg|_1^2=\pi\left(\frac{32}{5}-16+8+8-8\right)-\pi\left(\frac{1}{5}-1+1+2-4\right)=$$

$$=\pi\left(-\frac{8}{5}+\frac{9}{5}\right)=\frac{\pi}{5}\approx 0{,}63 \text{ (куб. од.).}$$

Для того щоб знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні цієї самої фігури навколо осі Oy, потрібно попередньо виразити x через y:

$$y=2x-x^2 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{1-y}\,,$$

$$y=2-x \Rightarrow x=2-y\,.$$

Як видно з рис. 5.24, фігура обмежена гілкою параболи $x=1+\sqrt{1-y}$ і прямою $x=2-y$.

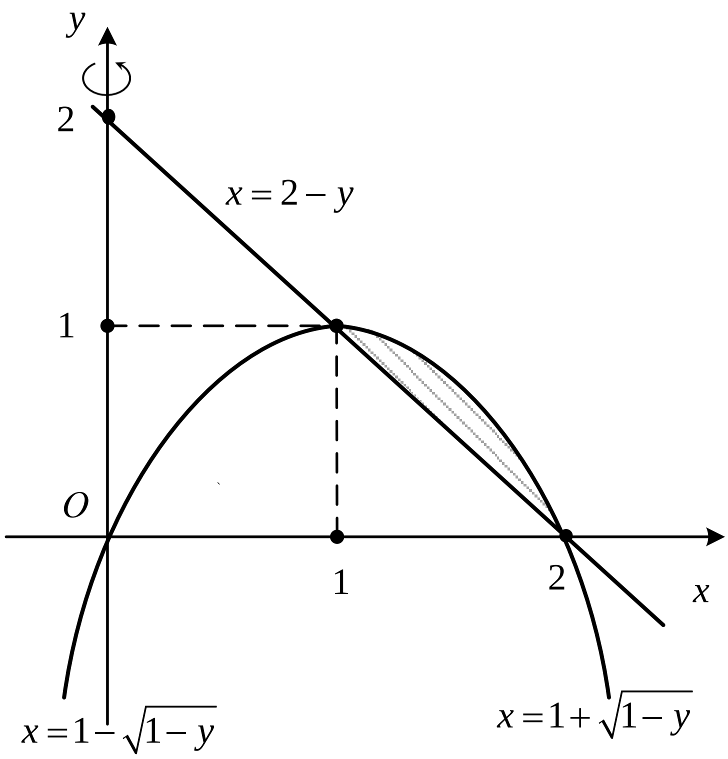


Рис 5.24. Обертання навколо осі Oy

Тоді

$$V_{Oy}=\pi\int_0^1\left(\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2-\left(2-y\right)^2\right)dy=\pi\int_0^1\left(-2+3y-y^2+2\sqrt{1-y}\right)dy=$$

$$=\pi\left(-2+3y-y^2+2\sqrt{1-y}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57\text{ (куб. од.).}$$

Також об'єм тіла, утвореного при обертанні цієї фігури навколо осі Oy, можна обчислити і за формулою (5.15):

$$V_{Oy}=2\pi\int_1^2\left(x\left\{2x-x^2-2+x\right\}\right)dx=2\pi\int_1^2\left(3x^2-x^3-2x\right)dx=$$

$$=2\pi\left(x^3-\frac{x^4}{4}-x^2\right)\Bigg|_1^2=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57\text{ (куб. од.).}$$

Відповідь: 1) $V_{Ox}=V_{Oy}=2\pi\approx 6{,}28$ *куб. од.*;

2) $V_{Ox}=\frac{768}{7}\pi\approx 344{,}68$ *куб. од.*; $V_{Oy}=\frac{96}{5}\pi\approx 60{,}32$ *куб. од.*;

3) $V_{Ox}=\frac{\pi}{5}\approx 0{,}63$ *куб. од.*, $V_{Oy}=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$ *куб. од.*

5.4. Площа поверхні тіла обертання

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лініями $y=f(x)$, $x=a,\ x=b,\ y=0$, причому функція $y=f(x)$ неперервна і має похідну на $[a;b]$. Обертаючи цю трапецію навколо осі Ox, отримаємо тіло у просторі (рис. 5.16), площу поверхні якого можна обчислити за формулою

$$S_{Ox}=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (5.16)$$

Зауваження.

1. Якщо крива обмежена лініями $y=c, y=d, x=0$, $x=\varphi(y)$, де $x=\varphi(y)$ - невід'ємна, однозначна неперервна функція на $[c;d]$, обернена до $y=f(x)$ (рис. 5.17, а), то

$$S_{Oy}=2\pi\int_c^d \varphi(y)\cdot\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy\,. \tag{5.17}$$

2. Якщо крива задана в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta], \end{cases}$$

то для обчислення площі поверхні тіла обертання навколо осі Ox використовують формулу

$$S_{Ox}=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt\,. \tag{5.18}$$

Приклад 5.6. Обчислити площі поверхонь тіл, утворених обертанням кривих навколо осі Ox:

1) $y^2=4+x,\ x\in[0;2]$;

2) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t\left(\dfrac{1}{3}-t^2\right),\ t\in\left[0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]. \end{cases}$

Розв'язання:

1) для обчислення площі поверхні обертання використовуємо формулу (5.16). Для нашого прикладу $f(x)=\sqrt{4+x}$ (для отримання тіла обертання достатньо однієї гілки параболи),

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4+x}},$$

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4(4+x)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x+17}{x+4}}.$$

Тоді

$$S_{Ox}=2\pi\int_0^2\left(\sqrt{4+x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x+17}{x+4}}\right)dx=\pi\int_0^2\sqrt{4x+17}\,dx=\pi\cdot\frac{2}{12}\left(4x+17\right)^{3/2}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(25^{3/2}-17^{3/2}\right)=\frac{\pi}{6}\left(125-17^{3/2}\right)\approx 28{,}75\ \text{(кв. од.)};$$

2) площу поверхні обчислюємо за формулою (5.18):

$$\begin{cases} x'=2t, \\ y'=\frac{1}{3}-3t^2; \end{cases}$$

$$\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}=\sqrt{(2t)^2+\left(\frac{1}{3}-3t^2\right)^2}=\sqrt{4t^2+\frac{1}{9}-2t^2+9t^4}=$$

$$=\sqrt{9t^4+2t^2+\frac{1}{9}}=\sqrt{\left(3t^2+\frac{1}{3}\right)^2}=3t^2+\frac{1}{3};$$

$$S_{Ox}=2\pi\int_0^{\sqrt{3}/3}t\left(\frac{1}{3}-t^2\right)\cdot\left(3t^2+\frac{1}{3}\right)dt=2\pi\int_0^{\sqrt{3}/3}\left(\frac{1}{3}t-t^3\right)\cdot\left(3t^2+\frac{1}{3}\right)dt=$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}/3}\left(t^3-3t^5+\frac{1}{9}t-\frac{1}{3}t^3\right)dt=2\pi\int_0^{\sqrt{3}/3}\left(-3t^5+\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{9}t\right)dt=$$

$$= 2\pi\left(-\frac{t^6}{2}+\frac{t^4}{6}+\frac{t^2}{18}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}/3} = 2\pi\left(-\frac{\left(\sqrt{3}/3\right)^6}{2}+\frac{\left(\sqrt{3}/3\right)^4}{6}+\frac{\left(\sqrt{3}/3\right)^2}{18}\right)=$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{54}+\frac{1}{54}+\frac{1}{54}\right)=\frac{\pi}{27}\approx 0{,}12 \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: 1) $\frac{\pi}{6}\left(125-17^{3/2}\right)\approx 28{,}75$ кв. од.; 2) $\frac{\pi}{27}\approx 0{,}12$ кв. од.

Питання до розділу

1. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислити площу плоскої фігури?

2. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислити довжину дуги плоскої кривої?

3. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислити об’єм тіла обертання навколо осі Ox, Oy?

4. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислити площу поверхонь тіл, утворених обертанням кривих навколо осі Ox, Oy?

Завдання

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=(x+2)^2$, $y=4-x$; 2) $y=2-x^2$, $y=5-4x^2$;

3) $xy=5$, $x+y=6$; 4) $y=1-x^2$, $y=x^2-7$;

5) $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; 6) $y=x^2-6x+5$, $y=0$;

7) $y = 6x - x^2$, $y = 0$; 8) $y = -\dfrac{x^2}{9}$, $y = -1$, $x = 0$, $x = 3$;

9) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{x^3}{2}$, $x = 0$; 10) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

11) $y = x + 1$, $y = \cos x$, $x = -1$;

12) $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$;

13) знайти площу фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

14) знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ і $x = 1$ $(x \le 1)$.

15) знайти площу фігури, обмеженої віссю Ox і однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

16) знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою

$$\begin{cases} x = 5\cos t(1 + \cos t), \\ y = 5\sin t(1 + \cos t). \end{cases}$$

2. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями:

1) $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$;

2) $y = x\sqrt{x}$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(3;3\sqrt{3})$;

3) $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;

4) $y = \sqrt{(x-2)^3}$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(6;8)$;

5) $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$;

6) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 1 - t^2, \quad t \in [0;1]; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), t \in [0; 2\pi]; \end{cases}$

8) $y = \ln(\cos x)$ від точки $A(0;0)$ до точки $B\left(\frac{\pi}{3}; \ln 0,5\right)$.

3. Обчислити довжину однієї арки циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

4. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ від точки $A(0;a)$ до точки $B(x;y)$.

5. Знайти довжину астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 15^{\frac{2}{3}}$.

6. При якому значенні a довжина дуги кардіоїди $\begin{cases} x = 6\cos t(1 + \cos t), \\ y = 6\sin t(1 + \cos t) \end{cases}$ дорівнює довжині однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$?

7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 2x + 1, x = 1, x = 4, y = 0;$ 2) $y = x^2, x = 1, y = 0;$

3) $y = -x^2 + 2x, y = 0;$ 4) $y = \sin x, x \in [0; 2\pi].$

8. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями: $y = 2x,\ x + y = 10,\ x = 1$.

9. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі Ox та навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями: $x = y^2 + 4, x = -y^2 + 12$.

10. Обчислити площу поверхні тіла обертання навколо осі Ox кривої

$$\begin{cases} x = 7(t\sin t + \cos t), \\ y = 7(\sin t - t\cos t), t \in [0;\pi]. \end{cases}$$

11. Обчислити площу поверхні кулі з центром в початку координат і радіусом R.

12. Знайти площу поверхні тіла, отриманої при обертанні кривої $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$:

а) навколо осі Ox;

б) навколо осі Oy.

13. Знайти об'єм тіла обертання і площу поверхні тіла, отриманих при обертанні кривої $(x-4)^2 + y^2 = 9$:

а) навколо осі Ox;

б) навколо осі Oy.

Відповіді

1. 1) $\frac{125}{6}$ *кв. од.*; 2) 4*кв. од.*; 3) $12 - 5\ln 5 \approx 3{,}95$*кв. од.*;

4) $\frac{64}{3}$ *кв. од.*; 5) $\ln 3 \approx 1{,}1$ *кв. од.;* 6) $\frac{32}{3}$ *кв. од.*;

7) 36 *кв. од.*; 8) 2 *кв. од.*; 9) $\frac{2\pi - 1}{8} \approx 0{,}66$*кв. од.*;

10) 1 *кв. од.*; 11) $\sin(1) - \frac{1}{2} \approx 0{,}34$*кв. од.;*

12) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \approx 0{,}05$*кв. од.;* 13) $6\pi \approx 18{,}8$ *кв. од.* (рис. 5.25);

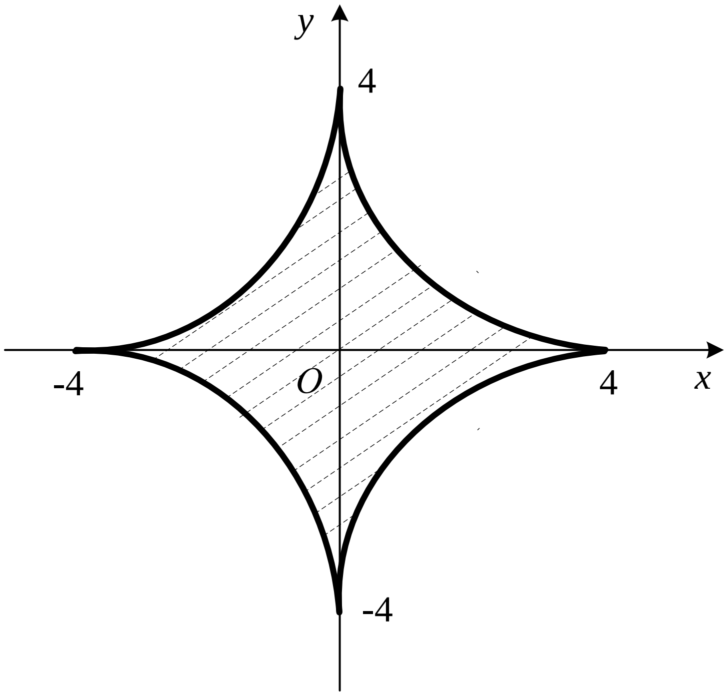


Рис. 5.25. Астроїда

14) $16\pi \approx 50{,}27$ *кв. од.* (рис. 5.26);

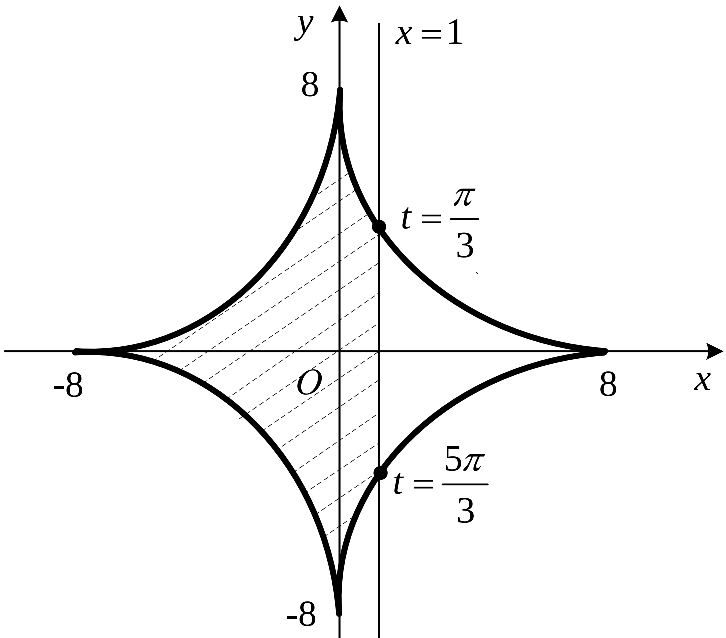


Рис. 5.26. Завдання 1.14

15) $27\pi \approx 84{,}82$ *кв. од.* (рис. 5.27);

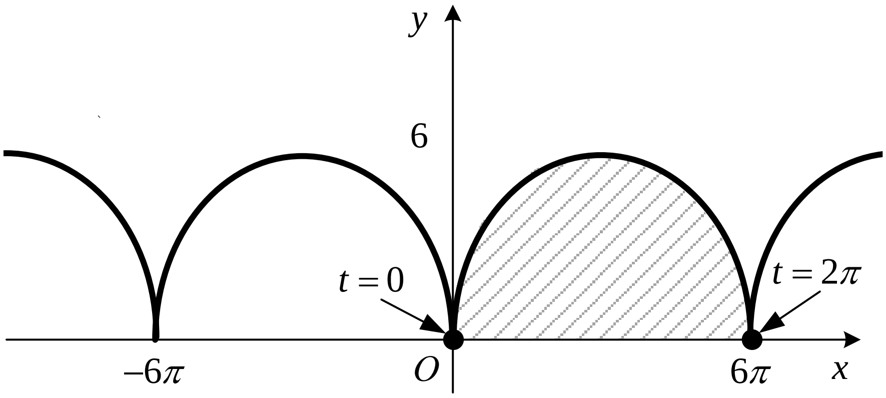


Рис. 5.27. Циклоїда

16) $\dfrac{75}{2}\pi \approx 117{,}81$ *кв. од*. (рис. 5.28).

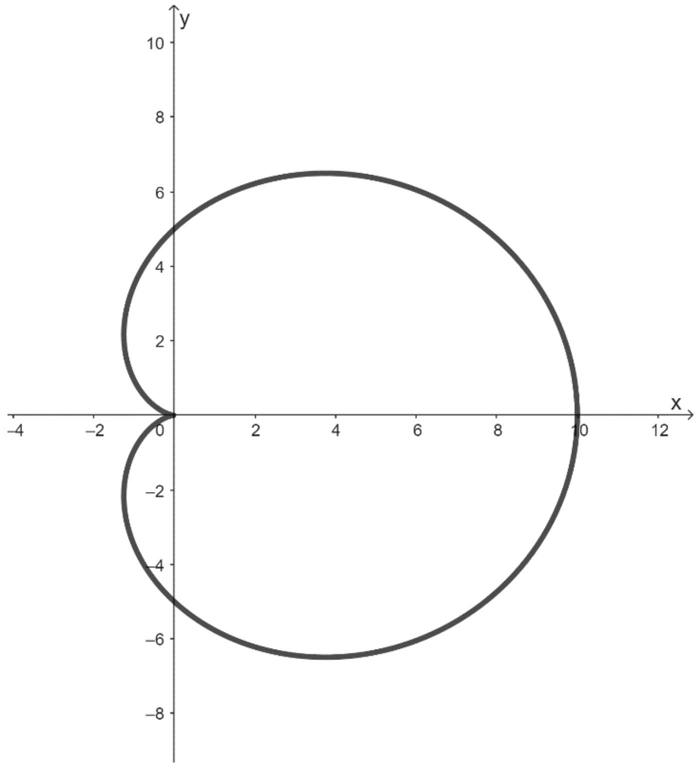


Рис. 5.28. Кардіоїда

2. 1) $\sqrt{5}+\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)\approx 2{,}96$ *од.*; 2) $\dfrac{31\sqrt{31}-8}{27}\approx 6{,}1$ *од.;*

3) $1+\dfrac{1}{2}\ln\left(1{,}5\right)\approx 1{,}2$ *од.*; 4) $\dfrac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\approx 9{,}07$ *од.*;

5) $2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{5}\right)\approx 2{,}29$ *од.*; 6) $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ *од.*;

7) $8\pi^2\approx 78{,}96$ *од.*; 8) $\approx 1{,}32$ *од.*

3. $8a$ *од.* **4.** $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$ *од.* **5.** 90 *од.*

6. $a=6$. **7.**1) 117π *куб. од.*; 2) $\frac{\pi}{5}$ *куб. од.*;

3) $\frac{16\pi}{15}\approx 3{,}35$ *куб. од.*; 4) π^2 *куб. од.*

8. $\frac{784\pi}{27}\approx 91{,}22$ *куб. од.*

9. $V_{Ox}=16\pi\approx 50{,}27$ *куб. од.*; $V_{Oy}=\frac{1024}{3}\pi\approx 1072{,}33$ *куб. од.*

10. $294\pi^2\approx 2901{,}66$ *кв. од.*

11. $4\pi R^2$ *кв. од.*

12. а) $S_{Ox}=\frac{12\pi}{5}\approx 7{,}54$ *кв. од.*;

б) $S_{Oy}=\frac{12\pi}{5}\approx 7{,}54$ *кв. од.*

13. а) $V_{Ox}=36\pi\approx 113{,}1$ *куб. од.*; $S_{Ox}=36\pi\approx 113{,}1$ *кв. од.*;

б) $V_{Oy}=72\pi^2\approx 710{,}61$ *куб. од.*; $S_{Oy}=48\pi^2\approx 473{,}74$ *кв. од.*

РОЗДІЛ 6. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

6.1. Подвійні інтеграли

Подвійні інтеграли широко використовуються при розв'язанні прикладних задач у різних галузях.

6.1.1. Визначення подвійного інтеграла

Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$ і нехай $D \subset R^2$ - деяка замкнена область, що належить області визначення функції $f(x, y)$. Розіб'ємо область D на n частин D_i, $i = 1, 2, ..., n$, що не мають спільних внутрішніх точок, і позначимо їхні площі через ΔS_i, $i = 1, 2, ..., n$ відповідно (рис. 6.1). У кожній області D_i, $i = 1, 2, ..., n$ візьмемо довільну точку $M(\xi_i, \eta_i)$ і складемо суму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \tag{6.1}$$

Вираз (6.1) називається *інтегральною сумою* для функції $z = f(x, y)$ за областю D.

Позначимо через λ_i відстань між двома найвіддаленішими точками, що належать області D_i (діаметр області), а символом λ - найбільший з діаметрів областей D_i:

$$\lambda_i = \max_{1 \le i \le n} d(D_i), \ \lambda = \max_{1 \le i \le n} \lambda_i.$$

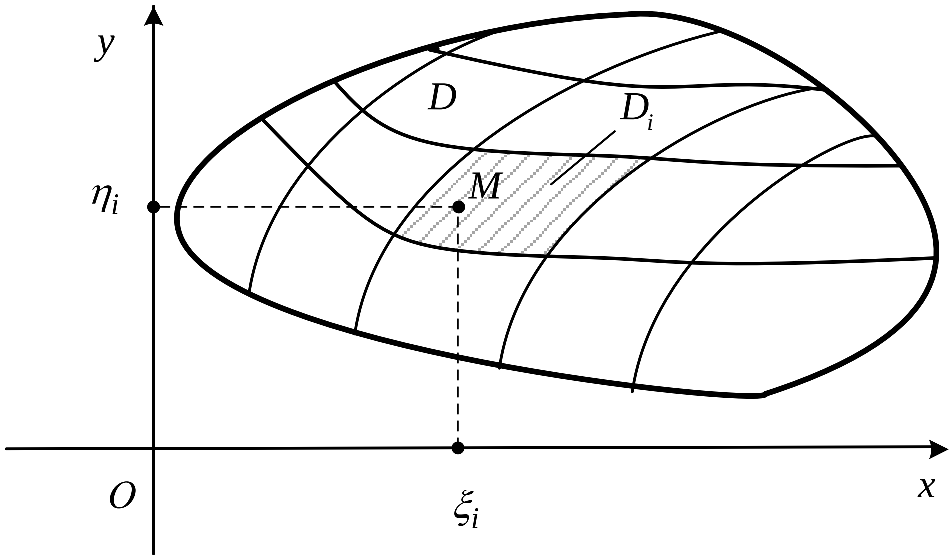


Рис. 6.1. Розбиття області D на n частин

Визначення. Якщо інтегральна сума (6.1) при $\lambda \to 0$ має скінчену границю, що не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i, $i = 1, 2, ..., n$, ні від вибору в них точок $M(\xi_i, \eta_i)$, то ця границя називається *подвійним інтегралом.*

Подвійний інтеграл позначається як

$$\iint_D f(x, y)dxdy \quad \text{або} \quad \iint_D f(x, y)dS. \tag{6.2}$$

Отже, за визначенням,

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Функція $f(x, y)$ називається *інтегровною в області* D; D – областю інтегрування; x, y – змінними інтегрування; $dxdy = dS$ – *елементом площі*.

6.1.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла

Припустимо, що функція $z = f\left(x, y\right)$ неперервна і невід'ємна в області D. Тоді геометричний зміст подвійного інтеграла (6.2) полягає в тому, що його значення дорівнює об'єму тіла, яке називається *криволінійним циліндром* (рис. 6.2).

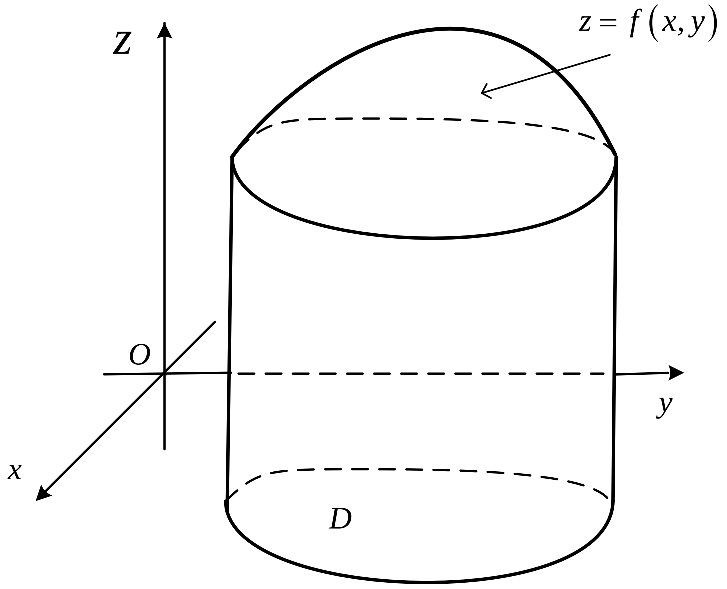


Рис. 6.2. Криволінійний циліндр

Зауваження. Криволінійний циліндр будується так:

- ✓ основа циліндра – область D, що лежить у площині Oxy;
- ✓ з боків – циліндрична поверхня, твірна якої паралельна осі Oz, а напрямна – границя області D;
- ✓ зверху – поверхня $z = f\left(x, y\right)$.

6.1.3. Основні властивості подвійного інтеграла

Вважаємо, що $f\left(x; y\right)$ і $g\left(x; y\right)$ - інтегровні в області D, а k - стала.

Інтеграл від функції $f(x;y)=1$ *за областю* D *дорівнює площі цієї області:*

$$\iint_D dxdy = S,\ S \text{ - площа області } D;$$

Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Інтеграл суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\iint_D \{f(x,y) \pm g(x;y)\}dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy.$$

Якщо $D = D_1 \cup D_2$, причому області D_1 та D_2 не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Якщо $f(x;y) \geq 0$, то $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

Якщо $f(x;y) \leq g(x;y)$, то $\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$.

Якщо m – найменше значення функції $f(x;y)$, а M – найбільше значення функції $f(x;y)$ в області D, то

$$m \cdot S \leq \iint_D f(P)ds \leq M \cdot S,$$ де S – площа області D.

Терема про середнє. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна в замкненій області D, то знайдеться така точка $(x_0;y_0)$, що

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0;y_0)\cdot S,$$

де S - площа області D.

6.1.4. Обчислення подвійного інтеграла

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторного (двократного) інтеграла від функції двох змінних – двох звичайних визначених інтегралів.

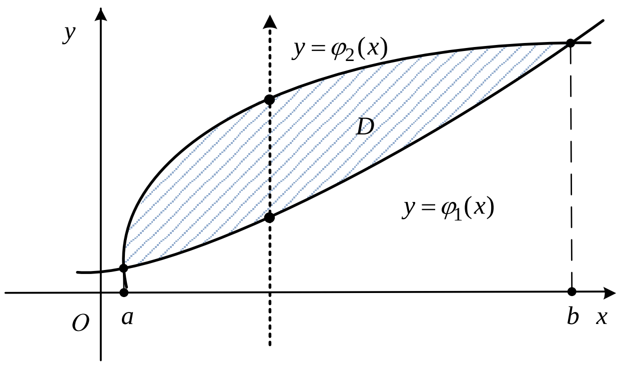


Рис. 6.3. Область, обмежена $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$

Розглянемо область D, що перетинається з будь-якою вертикальною прямою не більш ніж у двох точках. Нехай нижня межа області обмежена кривою $y=\varphi_1(x)$, а верхня – $y=\varphi_2(x)$. На вісь Ox область D проєктується у відрізок $[a;b]$ (рис. 6.3).

Тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \tag{6.3}$$

Визначення. $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ називається *внутрішнім інтегралом*, а інтеграл за змінною x називається *зовнішнім інтегралом*.

Праву частину формули (6.3) називають *повторним (двократним) інтегралом* від функції $f(x,y)$ за областю D. У повторному інтегралі (6.3) інтегрування виконується спочатку за змінною y (при цьому x вважається сталою), а потім за змінною x.

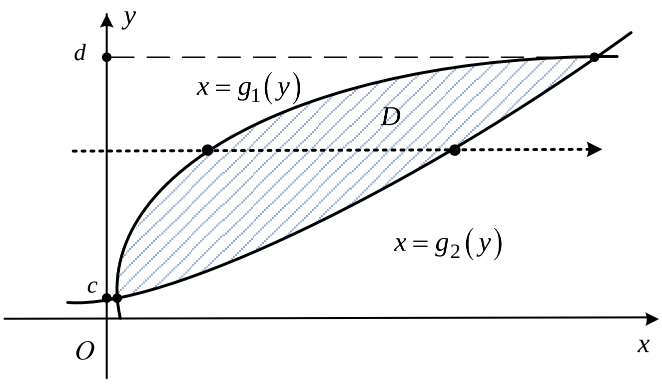


Рис. 6.4. Область, обмежена $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$

Якщо область D з будь-якою горизонтальною прямою перетинається не більш ніж у двох точках, ліва межа описується рівнянням $x = g_1(y)$, а права межа $-$ $x = g_2(y)$. На вісь Oy область D проєктується у відрізок $[c;d]$ (рис. 6.4).

У цьому випадку справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right) dy. \qquad (6.4)$$

Тут $\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx$ - внутрішній інтеграл, а інтеграл за змінною y - зовнішній інтеграл.

Отже, обчислення двократного інтеграла зводиться до послідовного обчислення двох звичайних визначених інтегралів. Підкреслимо, що межами інтегрування у внутрішньому інтегралі можуть бути як функції, так і числа, але в зовнішньому інтегралі тільки числа.

Зауваження:

1. Якщо межа області D має більш складну форму (тобто існують вертикальні або горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більш ніж у двох точках, або область обмежена зверху чи знизу (зліва чи справа) декількома кривими (рис. 6.5)), то таку область необхідно розбити на частини і записати подвійний інтеграл у вигляді суми подвійних інтегралів за кожною частиною окремо:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy.$$

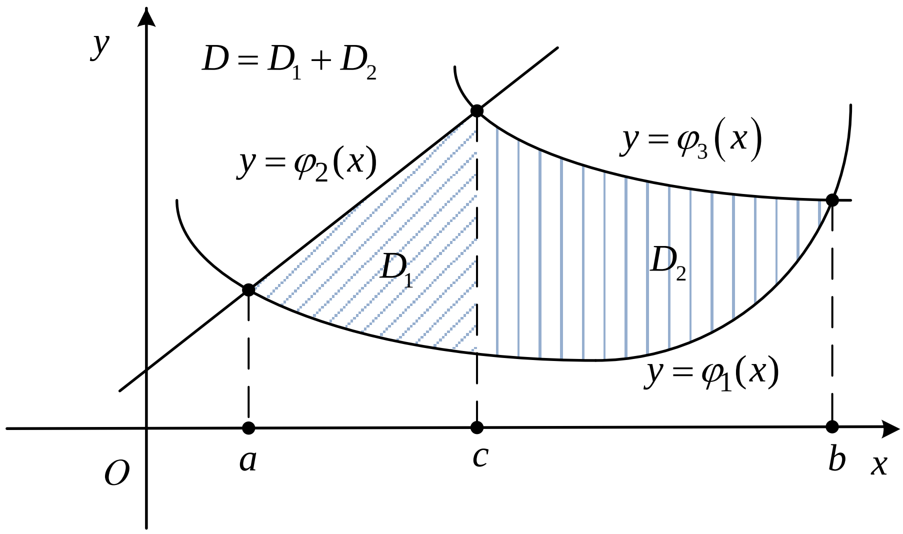


Рис. 6.5. Адитивність за областю інтегрування

2. Існують ситуації, коли за однією зі змінних інтеграл легко береться, а за іншою його взяти не можна. Отже, завжди потрібно шукати оптимальний шлях інтегрування.

3. Рівняння ліній, що обмежують контур, завжди мають бути розв’язані відносно змінної, за якою обчислюється внутрішній інтеграл.

4. Для правильної розстановки меж інтегрування обов’язково потрібно робити рисунок заданої області.

Приклад 6.1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(x^2 + y + 5\right)dxdy$, де область D обмежена лініями $y = 2\sqrt{x},\ y = 3 - x,\ x = 0$, двома способами:

1) внутрішній інтеграл у двократному береться за змінною y, а зовнішній – за змінною x;

2) внутрішній інтеграл у двократному береться за змінною x, а зовнішній – за змінною y.

Розв'язання

Будуємо область D (рис. 6.6).

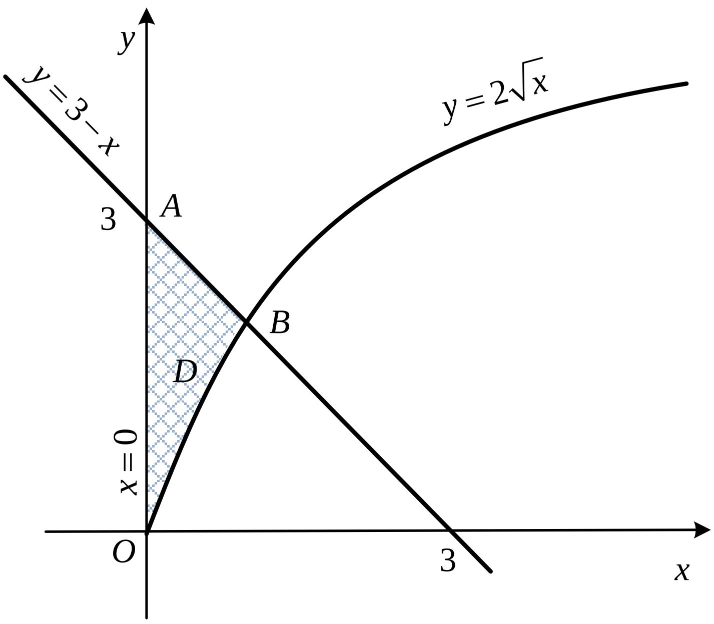


Рис. 6.6. Область D

Нам необхідно обчислити координати точки B як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{x}, \\ y = 3 - x; \end{cases}$$

$$3 - x = 2\sqrt{x};\ t = \sqrt{x}\,(t \ge 0) \Rightarrow 3 - t^2 = 2t\,,\ t^2 + 2t - 3 = 0\,.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо два корені $t_1 = 1$ і $t_2 = -3$. Корінь $t_2 = -3$ є зайвим коренем ірраціонального рівняння. Отже, маємо $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$, тоді $y = 2\sqrt{1} = 2$.

Отже, точка B має координати $(1;2)$.

1) з рис. 6.6 видно, що необхідно застосувати формулу (6.3):

$$\iint\limits_D \left(x^2+y+5\right)dxdy=\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(x^2+y+5\right)dy.$$

Границя області D перетинається будь-якою прямою, паралельною осі ординат, у двох точках. Межі інтегрування визначаємо так (рис. 6.7):

- нижня межа у внутрішньому інтегралі задається кривою $y=2\sqrt{x}$, що обмежує область D знизу;

- верхня межа у внутрішньому інтегралі пряма $y=3-x$, що обмежує область D зверху;

- нижня межа в зовнішньому інтегралі пряма $x=0$, що обмежує область D зліва;

- верхня межа в зовнішньому інтегралі пряма $x=1$, що обмежує область D справа.

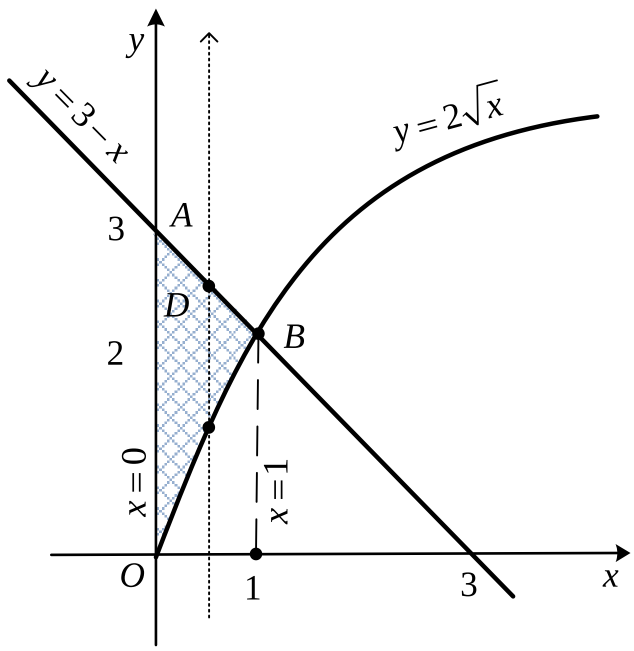


Рис. 6.7. Проєкція на вісь Ox області D

Отже,

$$\iint\limits_{D}\left(x^2+y+5\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2\sqrt{x}}^{3-x}\left(x^2+y+5\right)dy.$$

Обчислимо повторний інтеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2\sqrt{x}}^{3-x}\left(x^2+y+5\right)dy.$ Спочатку візьмемо внутрішній інтеграл (змінна x при цьому вважається сталою):

$$\int\limits_{2\sqrt{x}}^{3-x}\left(x^2+y+5\right)dy=\left(x^2y+\frac{y^2}{2}+5y\right)\Bigg|_{2\sqrt{x}}^{3-x}=$$

$$=x^2(3-x)+\frac{(3-x)^2}{2}+5(3-x)-\left(2x^2\sqrt{x}+\frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2}{2}+10\sqrt{x}\right)=$$

$$=3x^2-x^3+\frac{(3-x)^2}{2}+5(3-x)-2x^{5/2}-2x-10x^{1/2},$$

потім зовнішній інтеграл:

$$\int\limits_0^1\left(3x^2-x^3+\frac{(3-x)^2}{2}+5(3-x)-2x^{5/2}-2x-10x^{1/2}\right)dx=$$

$$=\left(x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{(3-x)^3}{6}-\frac{5(3-x)^2}{2}-\frac{4x^{7/2}}{7}-x^2-\frac{20x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{4}{3}-10-\frac{4}{7}-1-\frac{20}{3}\right)-\left(-\frac{9}{2}-\frac{45}{2}\right)=\frac{229}{28}.$$

Остаточно отримаємо, що

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2\sqrt{x}}^{3-x}\left(x^2+y+5\right)dy=\frac{229}{28};$$

2) розглянемо тепер випадок, коли внутрішній інтеграл у двократному береться за змінною x, а зовнішній – за змінною y. Для заданої області D безпосередньо формулу (6.4) застосовувати неможливо, тому що ця область обмежена справа не однією, а двома лініями. Через точку B проведемо пряму, паралельну осі Ox (рис. 6.8). Для визначення меж інтегрування внутрішнього інтеграла лінії, що обмежують область D, мають бути розв'язані відносно змінної y, тобто

$$x = 3 - y\,,\ x = \frac{y^2}{4}\,.$$

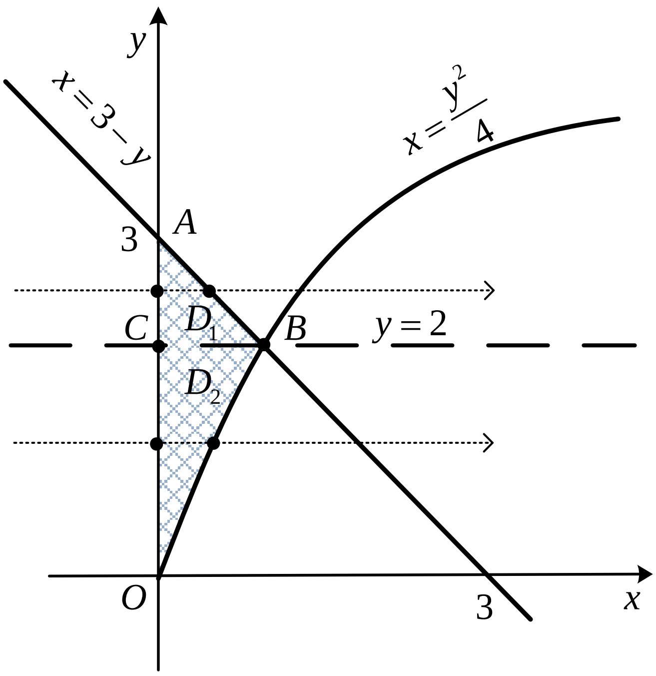


Рис. 6.8. Розбиття області D на дві частини

Пряма CB $(y=2)$ розбиває область D на дві частини D_1 і D_2. Використовуючи властивості подвійного інтеграла

$$\iint\limits_{D}\left(x^2+y+5\right)dxdy=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y+5\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y+5\right)dxdy$$

і формулу (6.4) для кожного доданка правої частини, отримаємо

$$\iint_D \left(x^2+y+5\right)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^{y^2/4}\left(x^2+y+5\right)dx+\int_2^3 dy\int_0^{3-y}\left(x^2+y+5\right)dx.$$

Межі інтегрування в першому двократному інтегралі за областю D_1 визначаємо так:

- нижня межа у внутрішньому інтегралі задається прямою $x=0$, що обмежує область D_1 зліва;

- верхня межа у внутрішньому інтегралі - крива $x=\frac{y^2}{4}$, що обмежує область D_1 справа;

- змінна y в області D_1 змінюється на відрізку $0\le y\le 2$.

Аналогічно визначаються межі інтегрування за областю D_2 у внутрішньому інтегралі за змінною x.

Обчислюємо кожний інтеграл окремо. Розглянемо спочатку перший інтеграл $\int_0^2 dy\int_0^{y^2/4}\left(x^2+y+5\right)dx$. Обчислюємо внутрішній (y - стала величина) і зовнішній інтеграли:

$$\int_0^{y^2/4}\left(x^2+y+5\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+yx+5x\right)\right|_0^{y^2/4}=\frac{y^6}{192}+\frac{y^3}{4}+\frac{5y^2}{4};$$

$$\int_0^2\left(\frac{y^6}{192}+\frac{y^3}{4}+\frac{5y^2}{4}\right)dy=\left.\left(\frac{y^7}{1344}+\frac{y^4}{16}+\frac{5y^3}{12}\right)\right|_0^2=\frac{128}{1344}+1+\frac{10}{3}=\frac{93}{21}=\frac{31}{7}.$$

Тобто

$$\int_0^2 dy\int_0^{y^2/4}\left(x^2+y+5\right)dx=\frac{93}{21}.$$

Аналогічно обчислюємо другий інтеграл $\int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{0}^{3-y} \left(x^2 + y + 5\right) dx$.
Обчислюємо спочатку внутрішній, потім зовнішній інтеграли:

$$\int\limits_{0}^{3-y} \left(x^2 + y + 5\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + yx + 5x \right)\Bigg|_0^{3-y} = \frac{(3-y)^3}{3} + y(3-y) + 5(3-y) =$$

$$= \frac{(3-y)^3}{3} + 3y - y^2 + 15 - 5y = \frac{(3-y)^3}{3} - y^2 + 15 - 2y;$$

$$\int\limits_{2}^{3} \left(\frac{(3-y)^3}{3} - y^2 + 15 - 2y \right) dy = \left(-\frac{(3-y)^4}{12} - \frac{y^3}{3} + 15y - y^2 \right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= (0 - 9 + 45 - 9) - \left(-\frac{1}{12} - \frac{8}{3} + 30 - 4 \right) = \frac{15}{4}.$$

Тобто другий інтеграл $\int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{0}^{3-y} \left(x^2 + y + 5\right) dx = \frac{15}{4}$.

Остаточно отримаємо

$$\iint\limits_{D} \left(x^2 + y + 5\right) dxdy = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{y^2/4} \left(x^2 + y + 5\right) dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{0}^{3-y} \left(x^2 + y + 5\right) dx =$$

$$= \frac{31}{7} + \frac{15}{4} = \frac{229}{28}.$$

Відповідь: $\frac{229}{28}$.

Приклад 6.2. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int_{1}^{2}dx\int_{x/2}^{2/x} f\left(x,y\right)dy .$$

Розв'язання

Встановимо область D, використовуючи межі інтегрування заданого подвійного інтеграла. Ураховуючи порядок інтегрування, маємо, що область D задана так:

$$1\le x\le 2,\ \frac{x}{2}\le y\le \frac{2}{x}.$$

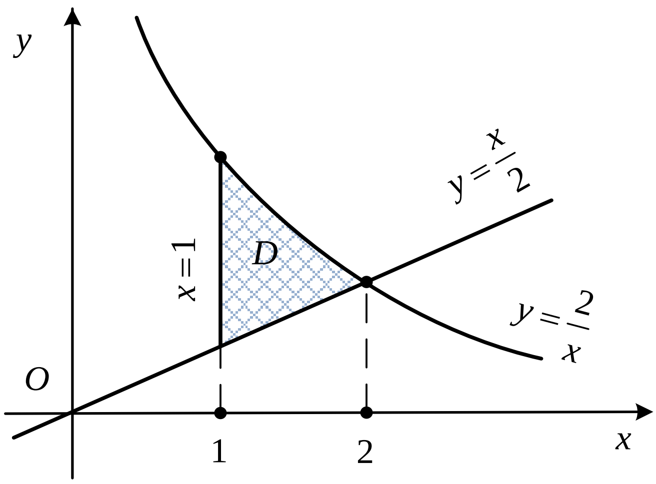


Рис. 6.9. Проєкція на вісь Ox

Тобто область інтегрування обмежена прямими $x=1$, $y=\frac{x}{2}$ і гіперболою $y=\frac{2}{x}$.

Зобразимо область інтегрування D (рис. 6.9).

З рис. 6.9 видно, що при зміненні порядку інтегрування потрібно розбити область на дві горизонтальною прямою, що проходить через точку перетину ліній $y=\frac{x}{2}$ і $y=\frac{2}{x}$.

Розв'яжемо рівняння ліній відносно змінної y і, користуючись рис. 6.10, запишемо обмеження для областей:

$$D_1:\ 1\le y\le 2;\ 1\le x\le \frac{2}{y}; \qquad D_2:\ 0{,}5\le y\le 1;\ 1\le x\le 2y .$$

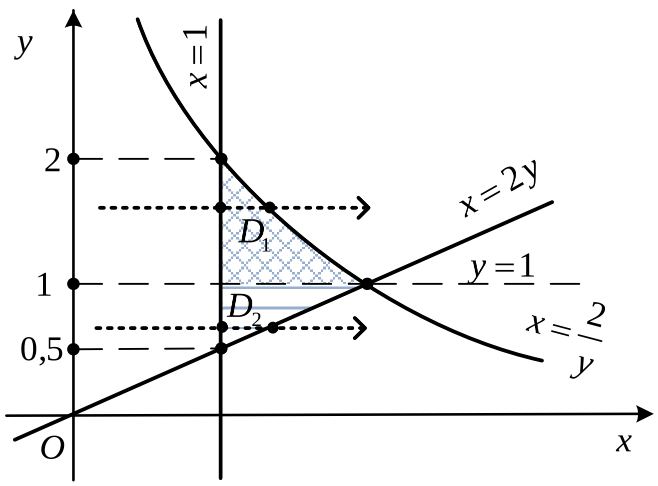


Рис. 6.10. Проєкція на вісь Oy

Тоді

$$\int_{1}^{2} dy \int_{1}^{2/y} f(x,y)\,dx + \int_{0,5}^{1} dy \int_{1}^{2y} f(x,y)\,dx.$$

Відповідь: $\int_{1}^{2} dx \int_{x/2}^{2/x} f(x,y)\,dy = \int_{0,5}^{1} dy \int_{1}^{2y} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{1}^{2/y} f(x,y)\,dx.$

6.2. Потрійні інтеграли

6.2.1. Визначення потрійного інтеграла

Аналогічно тому, як для функції двох змінних вводилося визначення подвійного інтеграла, надаємо визначення потрійного інтеграла для функції трьох змінних.

Нехай функція $u = f(x;y;z)$ визначена і обмежена в деякій замкненій і обмеженій області V. Розділимо цю область V на n частин $V_1, V_2, ..., V_n$ і позначимо їхні об'єми через $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$ відповідно. У кожній частині

$V_i,\ i=1,2,...,n$ виберемо по одній точці $M_i\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)$. Аналогічно виразу (6.1) складаємо суму:

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)\cdot\Delta v_i. \qquad (6.5)$$

Визначення. Сума (6.5) називається *інтегральною сумою* функції $u=f\left(x;y;z\right)$ за областю V.

Нехай $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d\left(V_i\right)$ — найбільший з діаметрів областей V_i.

Визначення. Якщо існує границя інтегральної суми (6.5) при $\lambda\to 0$, то вона називається потрійним інтегралом від функції $f\left(x;y;z\right)$ за областю V і позначається одним із символів

$$\iiint\limits_V f\left(x;y;z\right)dxdydz \quad \text{або} \quad \iiint\limits_V f\left(x;y;z\right)dV.$$

Зауваження. Основні властивості потрійного інтеграла повторюють основні властивості подвійного інтеграла.

6.2.2. Обчислення потрійного інтеграла

Знаходження потрійних інтегралів зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Припустимо, що область V обмежена:

- знизу поверхнею $z=f_1\left(x;y\right)$;
- зверху поверхнею $z=f_2\left(x;y\right)$;
- з боків – циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні осі Oz.

Нехай D - проєкція області V на площину xOy (рис. 6.11).

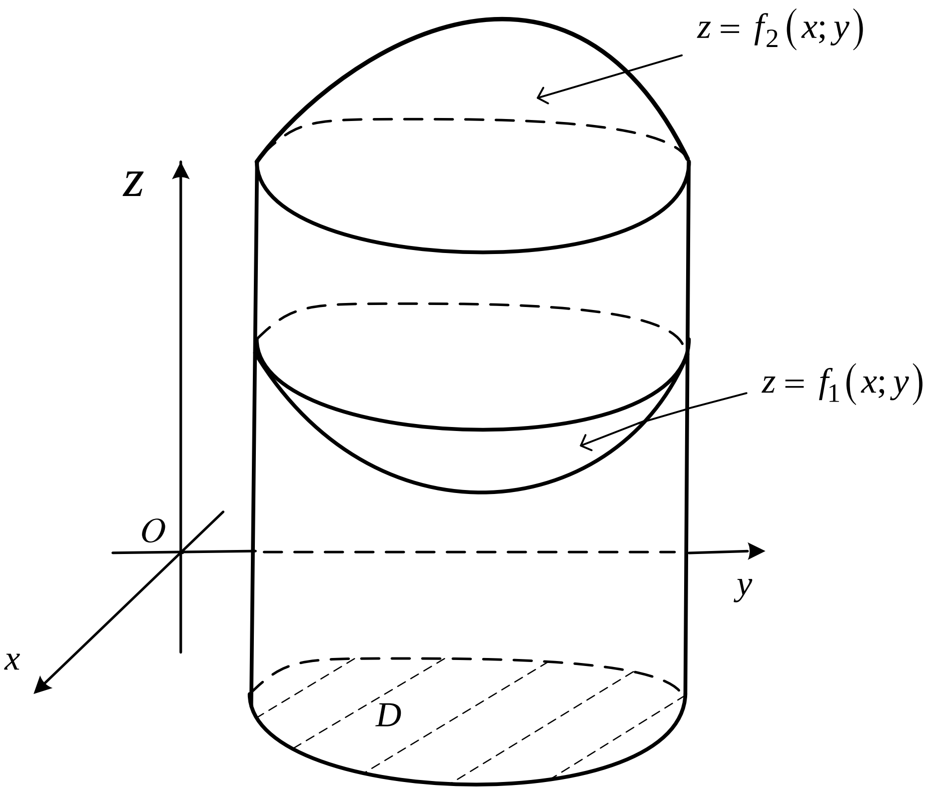


Рис. 6.11. Криволінійний циліндр

Тоді потрійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{f_1(x;y)}^{f_2(x;y)} f(x;y;z)dz \qquad (6.6)$$

або у вигляді трикратного інтеграла (якщо область $D: y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b$)

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{f_1(x;y)}^{f_2(x;y)} dz\,. \qquad (6.7)$$

Зауваження:

1. Зручніше використовувати формулу (6.7), у якій межі інтегрування у двох зовнішніх інтегралах (за змінними x і y) визначаються як межі інтегрування для подвійного інтеграла за областю D.

2. При обчисленні у трикратному інтегралі можливі інші порядки інтегрування.

Приклад 6.3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (2x+y)\,dxdxdz$, якщо V - область, обмежена площинами $x+2y+3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв’язання

Спочатку будуємо область інтегрування V (рис. 6.12) і її проєкцію на площину Oxy $(z=0)$ (рис. 6.13).

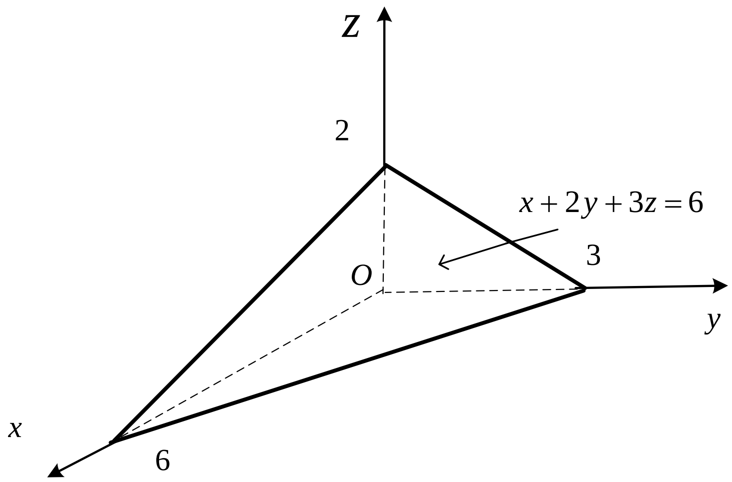


Рис. 6.12. Область інтегрування V (приклад 6.3)

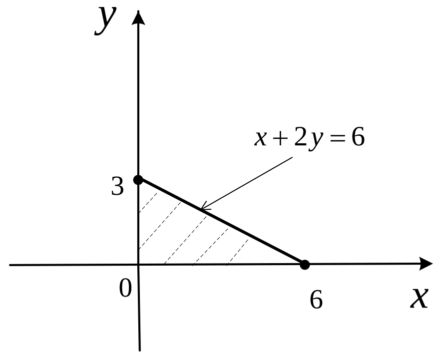


Рис. 6.13. Проєкція області інтегрування V на площину Oxy

З рис. 6.12 і 6.13 видно, що область інтегрування V

$$0 \le z \le \frac{-x-2y+6}{3},\ 0 \le y \le \frac{-x+6}{2},\ 0 \le x \le 6.$$

За формулою (6.7),

$$\iiint\limits_V (2x+y)\,dxdxdz = \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+3} dy \int\limits_0^{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+2} (2x+y)\,dz\,.$$

Обчислюємо перший внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_0^{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+2}(2x+y)\,dz=\begin{vmatrix} z-\text{змінна}\\ x,y-\text{сталі}\end{vmatrix}=(2x+y)z\Big|_0^{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+2}=$$

$$=(2x+y)\cdot\left(-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+2\right)=-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}xy+4x-\frac{1}{3}xy-\frac{2}{3}y^2+2y=$$

$$=-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}xy+4x-\frac{2}{3}y^2+2y.$$

Обчислюємо другий внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+3}\left(-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}xy+4x-\frac{2}{3}y^2+2y\right)dy=\begin{vmatrix} y-\text{змінна}\\ x-\text{стала}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(-\frac{2}{3}x^2y-\frac{5}{6}xy^2+4xy-\frac{2}{9}y^3+y^2\right)\Bigg|_0^{-\frac{1}{2}x+3}=-\frac{2}{3}x^2\left(-\frac{1}{2}x+3\right)-$$

$$-\frac{5}{6}x\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2+4x\left(-\frac{1}{2}x+3\right)-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^3+\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2-\frac{5}{6}x\left(\frac{1}{4}x^2-3x+9\right)-2x^2+12x+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^3+\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2-\frac{5}{24}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{15}{2}x-2x^2+12x+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^3+\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2=$$

$$=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^3+\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int\limits_0^6\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^3+\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{4}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^4+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^3\right)\Bigg|_0^6=$$

$$=\left(\frac{1296}{32}-\frac{216}{2}+\frac{324}{4}\right)-(9-18)=22{,}5.$$

Відповідь: $\iiint\limits_V (2x+y)\,dxdxdz = 22{,}5.$

6.3. Деякі застосування подвійного та потрійного інтегралів

Деякі застосування подвійного та потрійного інтегралів подано в табл. 6.1 і 6.2.

Таблиця 6.1

Деякі застосування подвійного інтеграла

Назва величини	Формула для обчислення
Об'єм циліндричного тіла	$V=\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$
Площа плоскої пластини D	$S_D=\iint\limits_D dxdy$
Площа кусково-гладкої поверхні	$S=\iint\limits_D \sqrt{1+f_x'^2(x;y)+f_y'^2(x;y)}\,dxdy$
Маса плоскої пластини	$m=\iint\limits_D \rho(x;y)\,dxdy$, де $\rho(x;y)$ - густина
Статичні моменти пластини відносно осей Ox, Oy	$M_x=\iint\limits_D y\rho(x;y)\,dxdy$, $M_y=\iint\limits_D x\rho(x;y)\,dxdy$
Координати центра мас пластини	$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x;y)\,dxdy$, $\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x;y)\,dxdy$

Таблиця 6.2

Деякі застосування потрійного інтеграла

Назва величини	Формула для обчислення
Об'єм тіла	$V=\iiint\limits_V dxdydz$
Маса тіла	$m=\iiint\limits_V \rho(x;y;z)dxdydz$, де $\rho(x;y;z)$ - густина
Статичні моменти пластини відносно площини Oxy, Oxz, Oyz	$M_{xy}=\iiint\limits_V z\rho(x;y;z)dxdydz$, $M_{xz}=\iiint\limits_V y\rho(x;y;z)dxdydz$, $M_{yz}=\iiint\limits_V x\rho(x;y;z)dxdydz$
Координати центра маси тіла	$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x;y;z)dxdydz$, $\bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x;y;z)dxdydz$, $\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x;y;z)dxdydz$

Приклад 6.4. За допомогою подвійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=4-y^2$, $x=0$, $x=6$, $z=0$.

Розв'язання

Поверхня $z=4-y^2$- це параболічний циліндр, напрямною якого є парабола $z=4-y^2$ в площині Oyz, а твірні паралельні осі Ox;

$x=0$, $z=0$ – координатні площини Oyz, Oxy відповідно;

$x=6$ – площина, паралельна площині Oyz.

Побудуємо рисунок тіла в просторі (рис. 6.14, а) і його проєкцію D на площину Oxy (рис. 6.14, б).

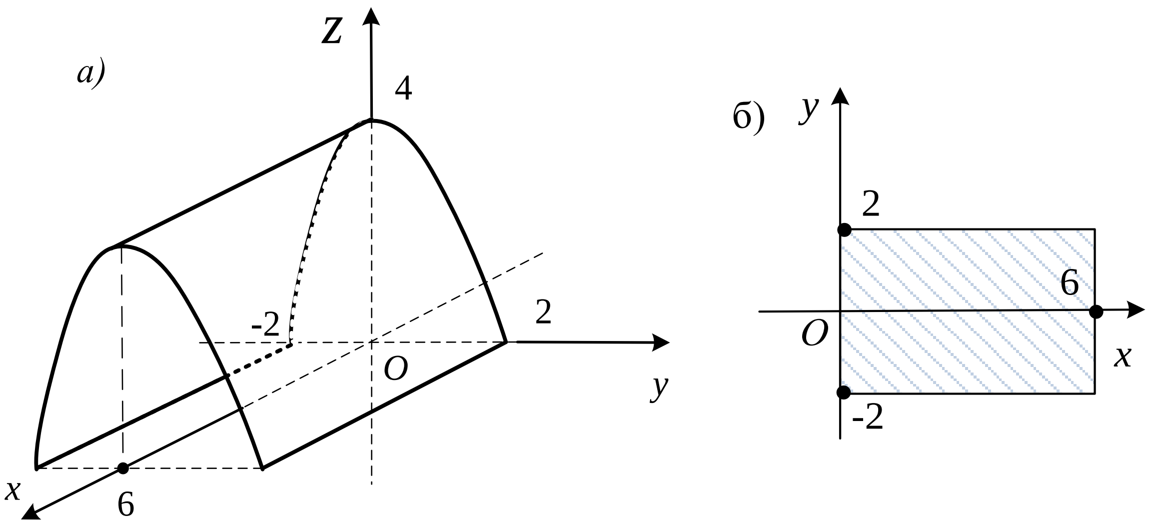


Рис. 6.14. Приклад 6.4

Об'єм тіла будемо обчислювати за формулою $V=\iint\limits_D f\left(x;y\right)dxdy$, де область $D:0\le x\le 6,-2\le y\le 2$.

Тоді

$$V=\iint\limits_D\left(4-y^2\right)dxdy=\int\limits_0^6 dx\int\limits_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)dy=x\Big|_0^6\cdot\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=64\,(\text{куб. од.}).$$

Відповідь: $V=64$ (куб. од.).

Приклад 6.5. За допомогою потрійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+z^2=9,\ x-y+4=0, y=1$.

Розв'язання

Поверхня $x^2+z^2=9$ - це циліндр, напрямною якого є коло $x^2+z^2=9$ у площині Oxz, а твірні паралельні осі Oy;

$x-y+4=0$ – площина, паралельна осі Oz;

$y=1$– площина, паралельна площині Oxz.

Побудуємо рисунок тіла в просторі (рис. 6.15, а) і його проєкцію D на площину Oxz (рис. 6.15, б).

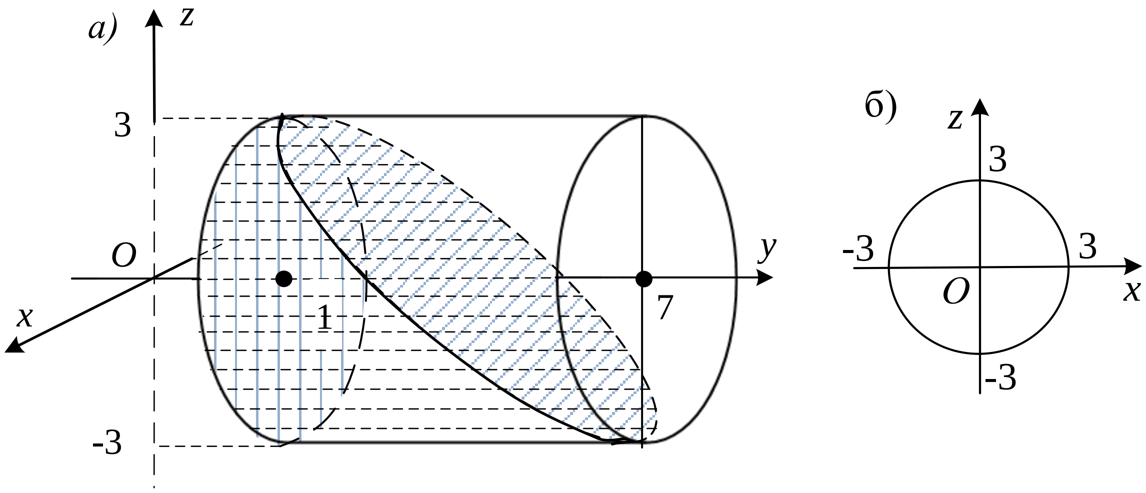


Рис. 6.15. Приклад 6.5

Об’єм тіла будемо обчислювати за формулою $V=\iiint\limits_V dxdydz$, де область $V:-3\le x\le 3,-\sqrt{9-x^2}\le z\le\sqrt{9-x^2},1\le y\le 4+x$.

Тоді

$$V=\iiint\limits_V dxdxdz=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dz\int\limits_{1}^{4+x}dy=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dz\cdot y\Bigg|_{1}^{4+x}=$$

$$=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(4+x-1)dz=\int\limits_{-3}^{3}(3+x)dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dz=\int\limits_{-3}^{3}(3+x)dx\cdot z\Bigg|_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}=$$

$$=\int\limits_{-3}^{3}(3+x)\cdot 2\sqrt{9-x^2}dx=\int\limits_{-3}^{3}\left(6\sqrt{9-x^2}+2x\sqrt{9-x^2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{3}6\sqrt{9-x^2}dx+\int\limits_{-3}^{3}2x\sqrt{9-x^2}dx.$$

Розглянемо окремо кожний інтеграл в сумі.

$\int\limits_{-3}^{3} 2x\sqrt{9-x^2}dx = 0$, оскільки це інтеграл від непарної функції за симетричним проміжком.

$\int\limits_{-3}^{3} 6\sqrt{9-x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{3} 6\sqrt{9-x^2}dx = 12\int\limits_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$ як інтеграл від парної функції за симетричним проміжком.

$$V = 12\int\limits_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t, dx = 3\cos t dt \\ t = \arcsin\dfrac{x}{3}, \\ t_н = \arcsin 0 = 0, \\ t_в = \arcsin\dfrac{3}{3} = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = 12\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{9-(3\sin t)^2}\,3\cos t dt =$$

$$= 108\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^2 t dt = 54\int\limits_{0}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = 54\left(t\Big|_{0}^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_{0}^{\pi/2}\right) = 27\pi \text{ (куб. од.).}$$

Відповідь: $V = 27\pi \approx 84{,}82$ (куб. од.).

Питання до розділу

1. Визначення подвійного інтеграла.
2. Властивості подвійного інтеграла.
3. Зведення подвійного інтеграла до повторного.
4. Геометричний зміст подвійного інтеграла.
5. Визначення потрійного інтеграла.
6. Обчислення потрійного інтеграла.
7. Геометричний зміст потрійного інтеграла.

Завдання

1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ до двократного (повторного) двома способами:

а) внутрішній інтеграл у двократному береться за змінною y, а зовнішній – за змінною x;

б) внутрішній інтеграл у двократному береться за змінною x, а зовнішній – за змінною y,

якщо область D обмежена лініями:

1) $y = x+1,\ y = (x-1)^2$;

2) $y = 2,\ x = y,\ y = \sqrt{1-x^2} + 1$;

3) $y = x^2,\ y = 0,\ y = \sqrt{2x - x^2}$;

4) $y = x^2,\ y = \sqrt{2 - x^2}$;

5) $y^2 = 2 - x^2,\ x = 0,\ y = \sqrt{2x - x^2}$;

6) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2},\ y = 0,\ x = \sqrt{y}$.

2. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{x^2} \left(4x^2y + x\right)dy$.

3. Змінити порядок інтегрування в заданому інтегралі:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{9-x} f(x;y)dy$;

2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x;y)dx$;

3) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{x-3}^{1/x^2} f(x;y)dy$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ двома способами, якщо:

1) $f(x;y)=x$, $D: y=0,\ y=3x^2,\ y=3(2-x)$;

2) $f(x;y)=x-y$, $D: y=2-x^2, y=2x-1$;

3) $f(x;y)=xy$, $D: y=0,\ y=2-x, y=\sqrt{x}$;

4) $f(x;y)=x+2y$, $D: x=0, x=y^2-4$;

5) $f(x;y)=x+3y$, $D: y=x,\ x=y^3,\ x\geq 0$;

6) $f(x;y)=x\cdot\sin(xy)$, $D: x=\dfrac{\pi}{2},\ x=\pi, y=1,\ y=2$;

7) $f(x;y)=x^2\cdot e^{-\frac{xy}{4}}$, $D: x=2,\ y=0,\ y=x$.

5. Обчислити площу області D, обмеженої лініями:

1) $x+y^2=4,\ y=x+2$;

2) $y^2-2x+x^2=0,\ y^2-4x+x^2=0,\ x=y,\ y=0$.

6. Обчислити $\iiint\limits_V (x-2)dxdydz, V; x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=2$.

7. Обчислити $\iiint\limits_V 12xdxdydz, V; x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=0,\ z=1-x$.

8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $z=0, z=1-x^2,\ y=0,\ y=3-x$;

2) $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=6$;

3) $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ z=1-x^2-y^2,\ y\leq 1-x$;

4) $y=x^2,\ y=\sqrt{x},\ x+y+z=2,\ z\geq 0$;

5) $x=\dfrac{5\sqrt{y}}{2},\ x=\dfrac{5y}{6},\ z=0,\ z=\dfrac{5}{6}\left(3+\sqrt{y}\right)$.

Відповіді

1.1) $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{(x-1)^2}^{x+1} f(x;y)\,dy$,

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x;y)\,dx+\int\limits_1^4 dy\int\limits_{y-1}^{1+\sqrt{y}} f(x;y)\,dx;$$

2) $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{1+\sqrt{1-x^2}}^{2} f(x;y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^2 f(x;y)\,dy$;

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{y} f(x;y)\,dx;$$

3) $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x;y)\,dy$;

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x;y)\,dx;$$

4) $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)\,dy$;

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)\,dx;$$

5) $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)\,dy$;

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x;y)\,dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)\,dx;$$

6) $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} f(x;y)\,dy$;

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x;y)\,dx.$$

2. $-\frac{83}{420}$.

3. 1) $\int_0^1 dx\int_{2x^2}^{9-x} f(x;y)\,dy=\int_0^2 dy\int_0^{\frac{\sqrt{2y}}{2}} f(x;y)\,dx+\int_2^8 dy\int_0^1 f(x;y)\,dx+$

$+\int_8^9 dy\int_0^{9-y} f(x;y)\,dx$;

2) $\int_0^1 dy\int_{2y^2}^{3-y} f(x;y)\,dx=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{\sqrt{2x}}{2}} f(x;y)\,dy+\int_2^3 dx\int_0^{3-x} f(x;y)\,dy$;

3) $\int_1^2 dx\int_{x-3}^{1/x^2} f(x;y)\,dy=\int_{-2}^{-1} dy\int_1^{y+3} f(x;y)\,dx+\int_{-1}^{1/4} dy\int_1^2 f(x;y)\,dx+$

$+\int_{1/4}^{1} dy\int_1^{1/\sqrt{y}} f(x;y)\,dx$.

4.1) $\frac{11}{4}$; 2) $\frac{64}{15}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $-\frac{256}{15}$; 5) $\frac{52}{105}$;

6) -1; 7) $\frac{8}{e}$.

5.1) $\frac{125}{6}$ *кв. од.*; 2) $\frac{3\pi+6}{4}\approx 3{,}86$ *кв. од.* **6.** -2. **7.** 1.

8. 1) 4 *куб. од. Вказівка* $\int_{-1}^{1} dx\int_0^{3-x} dy\int_0^{1-x^2} dz$; 2) $24\pi\approx 75{,}4$ *куб. од.*;

3) $\frac{1}{3}$ *куб. од.*; 4) $\frac{11}{30}$ *куб. од.* ; 5) 45 *куб. од.*

РОЗДІЛ 7. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Криволінійний інтеграл є узагальненням визначеного інтеграла у випадку, коли областю інтегрування є дуга деякої кривої на площині чи у просторі, а не відрізок. Розрізняють криволінійні інтеграли першого і другого роду.

7.1. Криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною дуги)

7.1.1. Визначення криволінійного інтеграла першого роду

Нехай функція $f(x;y)$ визначена і неперервна на дузі AB кривої L. Розіб'ємо дугу AB довільно на n частин точками $A = K_0, K_1, ..., K_n = B$ (рис. 7.1).

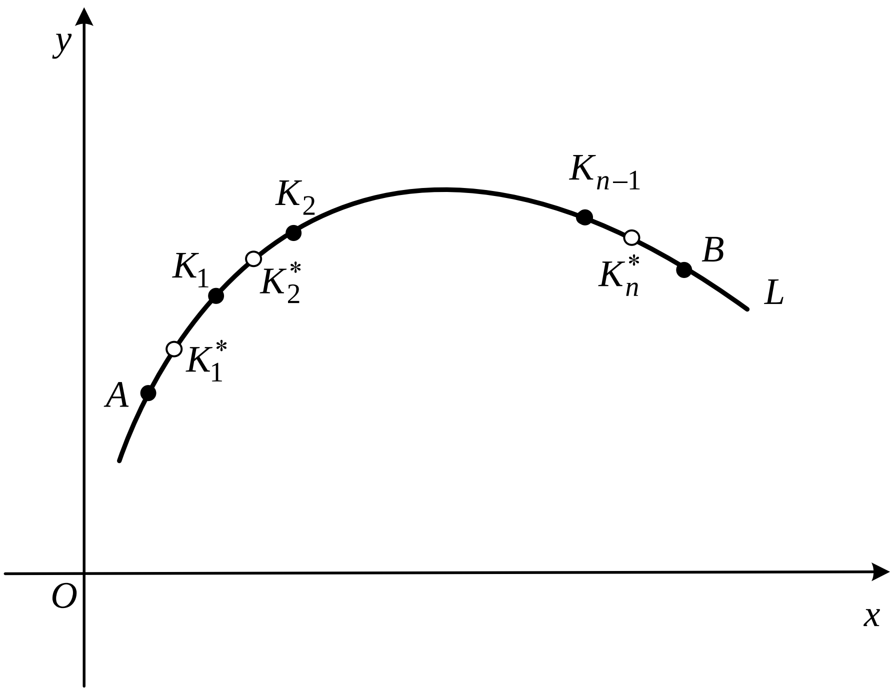


Рис. 7.1. Розбиття дуги AB довільно на n частин

На кожній дузі $K_{i-1}K_i$, $i=1,2,...,n$ виберемо довільну точку $K_i^*\left(\xi_i;\eta_i\right)$.

Позначимо через Δl_i довжини часткових дуг $K_{i-1}K_i$ відповідно, $i=1,2,...,n$, а найбільше значення довжини цих дуг через λ $\left(\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i\right)$.

Складаємо інтегральну суму для функції $f\left(x;y\right)$ за дугою AB:

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i;\eta_i\right)\cdot\Delta l_i\,. \qquad (7.1)$$

Визначення. Якщо інтегральна сума (7.1) має скінченну границю при $\lambda\to 0$, що не залежить від способу розбиття кривої AB і вибору точок $K_i^*\left(\xi_i;\eta_i\right)$, $i=1,2,...,n$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом першого роду* від функції $f\left(x;y\right)$ за дугою AB і позначається як

$$\int\limits_{AB}f\left(x;y\right)dl,$$

де AB - контур інтегрування, точки A і B - початкова і кінцева точки інтегрування відповідно;

dl - диференціал дуги.

У випадку просторової кривої криволінійний інтеграл першого роду за дугою AB визначається аналогічно і позначається як

$$\int\limits_{AB}f\left(x;y;z\right)dl\,.$$

Зауваження. У випадку, коли підінтегральна функція $f\left(x;y\right)\equiv 1$ $\left(f\left(x;y;z\right)\equiv 1\right)$, криволінійний інтеграл першого роду (7.2) дорівнює довжині кривої L між точками A і B (рис. 7.1):

$$l_{AB}=\int\limits_{AB}dl\,. \qquad (7.2)$$

7.1.2. Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду

1. Сталу можна виносити за знак інтеграла:

$$\int\limits_{AB} k\, f(x;y)dl = k \int\limits_{AB} f(x;y)dl .$$

2. Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int\limits_{AB} \left(f(x;y) \pm g(x;y) \right) dl = \int\limits_{AB} f(x;y)dl \pm \int\limits_{AB} g(x;y)dl .$$

3. Якщо точка *C* розбиває дугу AB на дві частини AC і CB, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{AC} f(x;y)dl + \int\limits_{CB} f(x;y)dl .$$

4. Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку шляху інтегрування:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl .$$

5. *Теорема про середнє*. Для неперервної функції $f(x;y)$ на дузі AB знайдеться точка $(x_c;y_c)$ така, що

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = f(x_c;y_c) \cdot l_{AB} , \tag{7.3}$$

де l_{AB} - довжина дуги AB.

7.1.3. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Обчислення таких інтегралів зводиться до обчислення звичайних визначених інтегралів.

а) якщо дуга AB кривої L задана рівнянням $y=y(x), x\in[a;b]$, а функція $y=y(x)$ неперервна разом зі своєю похідною на $x\in[a;b]$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}dx, \qquad (7.4)$$

де $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ - *диференціал дуги* заданої кривої;

б) нехай на площині Oxy задана дуга AB кривої L своїм рівнянням у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[\alpha;\beta], \end{cases}$$

причому функції $x(t), y(t)$ неперервні і мають неперервні похідні $x'(t), y'(t)$ (де $x'(t)$ і $y'(t)$ одночасно не дорівнюють нулю) на відрізку $[\alpha;\beta]$.

Тоді

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt, \qquad (7.5)$$

де $dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$ - *диференціал дуги* заданої кривої.

Зауваження. Для кривої L в просторі, що задана параметрично,

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$$

де функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ – неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[\alpha;\beta]$, криволінійний інтеграл першого роду за дугою AB $(t\in[\alpha;\beta])$ обчислюється за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t);y(t);z(t)\right)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z(t)\right)^2}\,dt.$$

Приклад 7.1. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду:

1) $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)dl$, де AB - дуга кола $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t,\ t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]; \end{cases}$

2) $\int\limits_{AB}\dfrac{dl}{x+y}$, де AB - відрізок прямої $y=2x+3$ між точками $A(1;5)$ і $B(2;7)$;

3) $\int\limits_{AB}\dfrac{10z}{x^2+y^2}dl$, де AB - один виток гвинтової лінії $\begin{cases} x=12\cos t, \\ y=12\sin t, \\ z=5t, \end{cases}$ $t\in[0;2\pi]$.

Розв'язання:

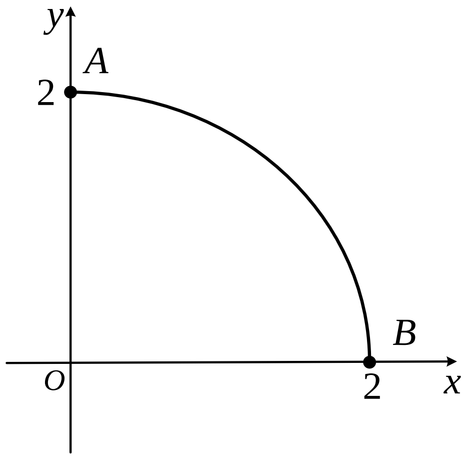


Рис. 7.2. Контур інтегрування прикладу 7.1, п. 1

1) контур інтегрування (рис. 7.2) за умовою задано параметрично $x=2\cos t, y=2\sin t$ на дузі $AB: t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, тому для обчислення інтеграла використовуємо формулу (7.5), знайшовши спочатку диференціал дуги кривої:

$$dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt=\sqrt{\left((2\cos t)'\right)^2+\left((2\sin t)'\right)^2}dt$$

$$=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}dt=\sqrt{4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}dt=2dt.$$

Тоді

$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((2\cos t)^2+(2\sin t)^2\right)\cdot 2dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2 t+4\sin^2 t\right)dt=$$

$$=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt=8t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=8\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi;$$

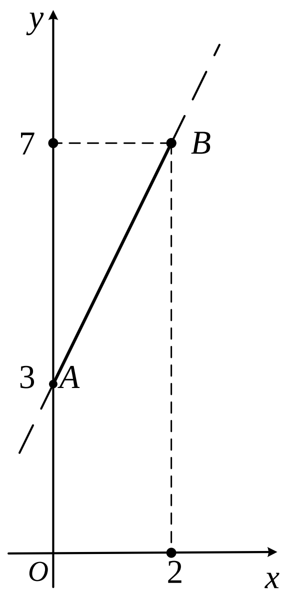


Рис. 7.3. Контур інтегрування прикладу 7.1, п. 2

2) контур інтегрування (рис. 7.3) задано в явному вигляді $y=2x+3$, тому використовуємо формулу (7.4). Ураховуючи, що $y'(x)=(2x+3)'=2$,

$$dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx=\sqrt{1+4}dx=\sqrt{5}dx.$$

Тоді

$$\int\limits_{AB}\frac{dl}{x+y}=\int\limits_1^2\frac{\sqrt{5}}{x+2x+3}dx=\int\limits_1^2\frac{\sqrt{5}}{3x+3}dx=\frac{\sqrt{5}}{3}\int\limits_1^2\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\ln|x+1|\Big|_1^2=\frac{\sqrt{5}}{3}(\ln 3-\ln 2)=\frac{\sqrt{5}}{3}\ln\frac{3}{2}.;$$

3) контур інтегрування зображено на рис. 7.4. Оскільки диференціал дуги кривої дорівнює

$$dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}dt=\sqrt{\left((12\cos t)'\right)^2+\left((12\sin t)'\right)^2+\left((5t)'\right)^2}dt=$$

$$=\sqrt{(-12\sin t)^2+(12\cos t)^2+5^2}dt=\sqrt{144\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+25}\,dt=13dt,$$

то

$$\int\limits_{AB}\frac{10z}{x^2+y^2}\,dl=\int\limits_0^{2\pi}\frac{10\cdot 5t}{(12\cos t)^2+(12\sin t)^2}13dt=\frac{650}{144}\int\limits_0^{2\pi}tdt=\frac{325}{72}\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{325\pi^2}{36}.$$

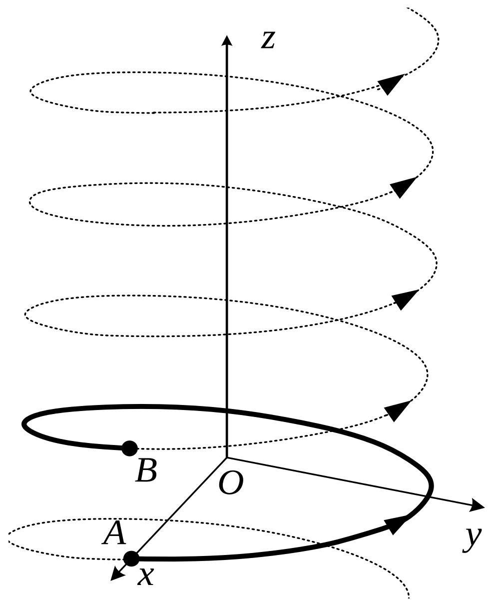


Рис. 7.4. Гвинтова лінія

Відповідь: 1) $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)dl=4\pi$; 2) $\int\limits_{AB}\frac{dl}{x+y}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ln\frac{3}{2}$;

3) $\int\limits_{AB}\frac{10z}{x^2+y^2}\,dl=\frac{325\pi^2}{36}$.

Приклад 7.2.

а) знайти довжину одного витка гвинтової лінії $\begin{cases} x=24\cos t, \\ y=24\sin t, \\ z=7t; \end{cases}$

б) знайти середнє значення функції $f(x,y)=2x+3y$, якщо $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=5\sin t, \end{cases}$ $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання:

а) один виток гвинтової лінії (рис. 7.4) - це один повний оберт навколо осі Oz. Оскільки період тригонометричних функцій $\cos t$, $\sin t$ дорівнює 2π, то при зміні параметра t на величину $2\pi k, k\in Z$ значення координат x і y не змінюється. Тому для знаходження довжини одного витка візьмемо $0\le t\le 2\pi$. За формулою (7.2),

$$l_{AB}=\int\limits_{AB} dl=\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{\left((24\cos t)'\right)^2+\left((24\sin t)'\right)^2+\left((7t)'\right)^2}\,dt=$$

$$=25t\Big|_0^{2\pi}=50\pi\approx 157,08 \text{ (од.)};$$

б) для того щоб знайти середнє значення функції на дузі, потрібно скористатися властивістю (7.3):

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=f(x_c;y_c)\cdot l_{AB}.$$

Звідси

$$f_{сер}=f(x_c;y_c)=\frac{1}{l_{AB}}\int\limits_{AB} f(x;y)dl.$$

Знайдемо спочатку довжину заданої дуги. Використовуючи формулу (7.2), отримаємо

$$l_{AB}=\int\limits_{AB} dl=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left((5\cos t)'\right)^2+\left((5\sin t)'\right)^2}\,dt=5\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{5\pi}{2}.$$

Зазначимо, що можна було знайти довжину і за допомогою відомої формули довжини кола, оскільки наша дуга - це чверть кола радіуса $R=5$.

Отже, для середнього значення функції маємо

$$f_{сер}=\frac{1}{5\pi/2}\int\limits_{AB}(2x+3y)dl=\left|dl=5dt\right|=\frac{2}{5\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(10\cos t+15\sin t)\cdot 5dt=$$

$$=\frac{10}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+3\sin t)dt=\frac{10}{\pi}(2\sin t-3\cos t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{50}{\pi}\approx 15{,}92.$$

Відповідь: а) $l=50\pi\approx 157{,}08$ (од.); б) $f_{сер}=\dfrac{50}{\pi}\approx 15{,}92$.

7.2. Криволінійний інтеграл другого роду

7.2.1. Визначення криволінійного інтеграла другого роду

Нехай на площині Oxy задана гладка крива AB, на якій задані дві обмежені функції $P(x;y)$ і $Q(x;y)$. Розіб'ємо дугу AB довільно на n частин точками $A=K_0,K_1,\ldots,K_n=B$. На кожній дузі $K_{i-1}K_i$, $i=1,2,\ldots,n$ виберемо довільну точку $K_i^*(\xi_i;\eta_i)$. Проєкції вектора $\overrightarrow{K_{i-1}K_i}$, $i=1,2,\ldots,n$ на координатні осі Ox та Oy позначимо через Δx_i та Δy_i відповідно (рис. 7.5).

Очевидно, що $\Delta x_i=\pm\left|\overrightarrow{K_{i-1,x}K_{i,x}}\right|$, $\Delta y_i=\pm\left|\overrightarrow{K_{i-1,x}K_{i,x}}\right|$ $\Delta y_i=\pm\left|\overrightarrow{K_{i-1,y}K_{i,y}}\right|$. Позначимо через Δl_i - довжину дуги $K_{i-1}K_i$, $i=1,2,\ldots,n$, $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$.

Складаємо інтегральні суми за координатами x і y відповідно:

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta x_i,\\ \sigma_2&=\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta y_i,\end{aligned}\qquad (7.6)$$

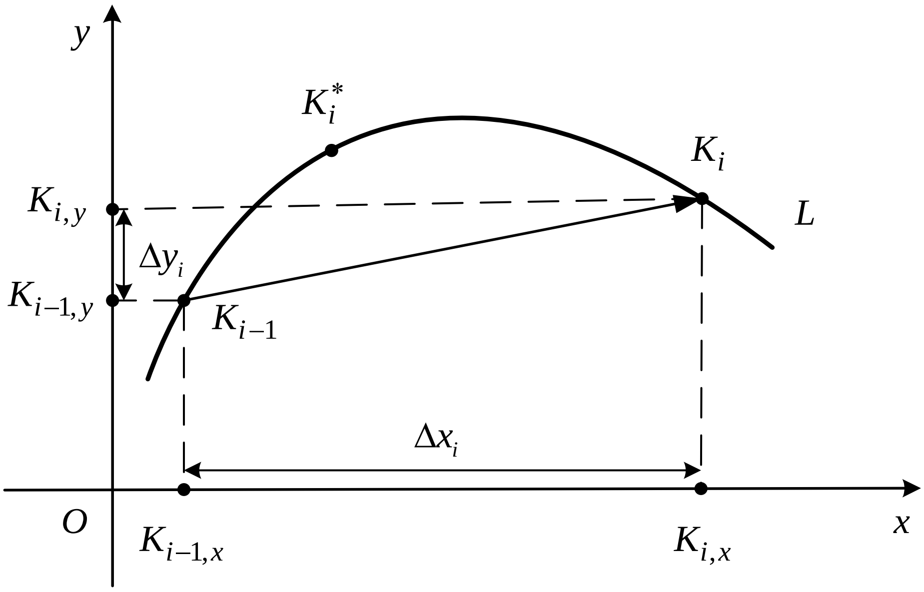


Рис. 7.5. Проєкції вектора $\overrightarrow{K_{i-1}K_i}$ на координатні осі Ox та Oy

Визначення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_1 при $\lambda \to 0\,(n \to \infty)$, що не залежить від способу розбиття кривої AB і вибору точок $K_i^*(\xi_i;\eta_i)$, $i=1,2,...,n$, то вона називається *криволінійним інтегралом за координатою* x (або *криволінійним інтегралом* другого роду) від функції $P(x;y)$ за кривою AB і позначається як

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta x_i. \tag{7.7}$$

Аналогічно вводиться інтеграл від функції $Q(x;y)$ за координатою y:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta y_i. \tag{7.8}$$

Визначення. Сума $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)dy$ називається *криволінійним інтегралом другого роду (або криволінійним інтегралом за координатами)* на площині і позначається як

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy\,. \tag{7.9}$$

Аналогічно визначається загальний інтеграл другого роду за кривою AB у тривимірному просторі

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz\,. \tag{7.10}$$

Криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування, якщо підінтегральний вираз $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ є повним диференціалом деякої функції:

$$dU(x;y) = P(x;y)dx + Q(x;y)dy\,.$$

7.2.2. Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду

1. При зміні напрямку інтегрування загальний криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int\limits_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy\,. \tag{7.11}$$

Якщо поміняти місцями початкову і кінцеві точки інтегрування, то множники Δx_i і Δy_i в інтегральних сумах (7.6) поміняють свій знак на протилежний.

2. Якщо точка *C* розбиває дугу AB на дві частини AC і CB, то

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{AC} P(x;y)dx + Q(x;y)dy + \int\limits_{CB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

3. $\int\limits_{AB} 0dx = \int\limits_{AB} 0dy = 0.$

4. а) $\int\limits_{AB} P(x;y)dx = 0$, якщо пряма, що проходить через точки A, B, перпендикулярна до осі Ox;

б) $\int\limits_{AB} Q(x;y)dx = 0$, якщо пряма, що проходить через точки A, B, перпендикулярна до осі Oy.

Для випадків, коли контур інтегрування L - замкнена лінія, криволінійний інтеграл позначають так:

$$\oint\limits_{L} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy, \quad \oint\limits_{L} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz.$$

Оскільки для замкненого контуру початкова і кінцева точки співпадають, не показуючи напрямок руху, то тут важливо вказувати напрямок обходу контуру.

Додатним вважається напрямок обходу контуру L, при якому обмежена ним область D залишається зліва (рис. 7.6). В іншому випадку напрямок вважається від'ємним (рис. 7.7).

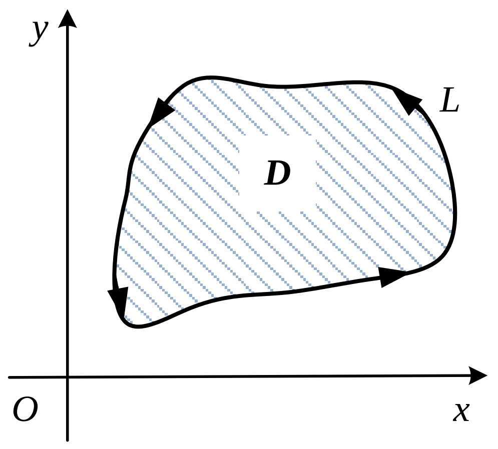


Рис. 7.6. Додатний напрямок

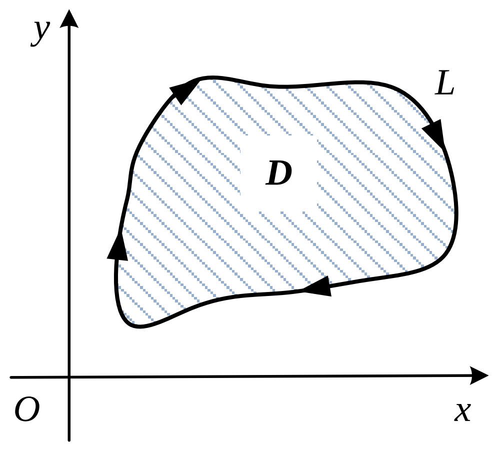


Рис. 7.7. Від'ємний напрямок

Одним із застосувань криволінійного інтеграла другого роду є знаходження площі області D. Якщо D - область, обмежена замкненим контуром L, то площу цієї області можна розрахувати за формулою

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx. \tag{7.12}$$

7.2.3. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

1. Якщо крива AB задана в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha;\beta], \end{cases}$$

причому точці A відповідає $t=\alpha$, а точці B - $t=\beta$, то криволінійні інтеграли другого роду обчислюються за формулами

$$\int_{AB} P(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t);y(t))\cdot x'(t)dt,$$

$$\int_{AB} Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t);y(t))\cdot y'(t)dt,$$

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\Big(P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)\Big)dt. \tag{7.13}$$

2. Якщо крива інтегрування задана в явному вигляді $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, причому точці A відповідає $x=a$, а точці B - $x=b$, то криволінійні інтеграли другого роду обчислюються за формулами

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \int\limits_a^b P(x;y(x))dx,$$

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = \int\limits_a^b Q(x;y(x))\cdot y'(x)dx,$$

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b \left(P(x;y(x)) + Q(x;y(x))\cdot y'(x)\right)dx. \qquad (7.14)$$

Зауваження. Якщо крива AB задана у просторі параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in [\alpha;\beta], \end{cases}$$

причому точці A відповідає $t=\alpha$, а точці B - $t=\beta$, то криволінійні інтеграли другого роду обчислюються за формулою

$$\begin{gathered} \int\limits_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz = \\ = \int\limits_\alpha^\beta \left(P(x(t);y(t);z(t))x'(t) + Q(x(t);y(t);z(t))y'(t) + R(x(t);y(t);z(t))z'(t)\right)dt. \end{gathered} \qquad (7.15)$$

Приклад 7.3. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:

1) $\int\limits_{OB} 3xydx + x^2dy$, де OB - дуга кривої $y=x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(2;4)$;

2) $\int\limits_{AB} 3ydx - 2xdy$, де AB - дуга еліпса $x=2\cos t, y=\sin t$ від $t_1=0$ до $t_2=\pi$;

3) $\oint\limits_L 5y^2dx-(x+2y)dy$, де L - контур трикутника ABC з вершинами в точках $(2;1),(2;3),(6;1)$. Напрямок обходу контуру - додатний.

Розв'язання:

1) за умовою контур інтегрування (рис. 7.8) задано в явному вигляді $y=x^2$, тоді, за формулою (7.14),

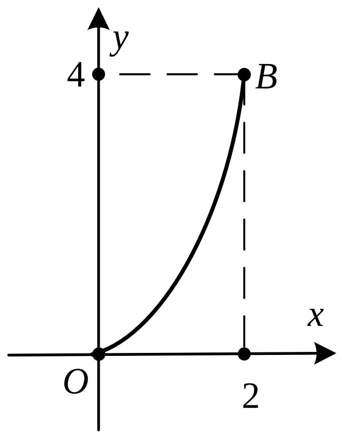


Рис. 7.8. Приклад 7.3, п. 1

$$\int\limits_{OB} 3xydx+x^2dy=\left|\begin{array}{l} y=x^2\\ dy=2xdx\\ x_н=0\\ x_в=2\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^2\left(3x\cdot x^2+x^2\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(3x^3+2x^3\right)dx=5\int\limits_0^2 x^3dx=5\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2=\frac{5}{4}\cdot 2^4=20;$$

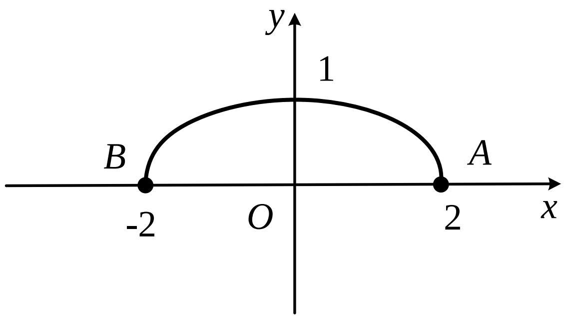


Рис. 7.9. Приклад 7.3, п. 2

2) крива AB (рис. 7.9) задана параметрично. За умовою точці A відповідає $t_1=0$, а точці B - $t_2=\pi$. За формулою (7.13),

$$\int\limits_{AB} 3ydx-2xdy=\left|\begin{array}{l} x=2\cos t\\ y=\sin t\\ dx=-2\sin tdt\\ dy=\cos tdt\\ t_н=0\\ t_в=\pi\end{array}\right|=\int\limits_0^{\pi}\left(3\sin t\cdot(-2\sin t)-2\cdot 2\cos t\cdot\cos t\right)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(-6\sin^2 t-4\cos^2 t\right)dt=-\int_0^{\pi}\left(6\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+4\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=-\int_0^{\pi}\left(3-3\cos 2t+2+2\cos 2t\right)dt=-\int_0^{\pi}\left(5-\cos 2t\right)dt=-\left(5t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\left(5\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)+\left(0-\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot 0\right)\right)=-5\pi.;$$

3) на рис. 7.10 показано контур інтегрування, а також стрілкою вказано напрямок обходу.

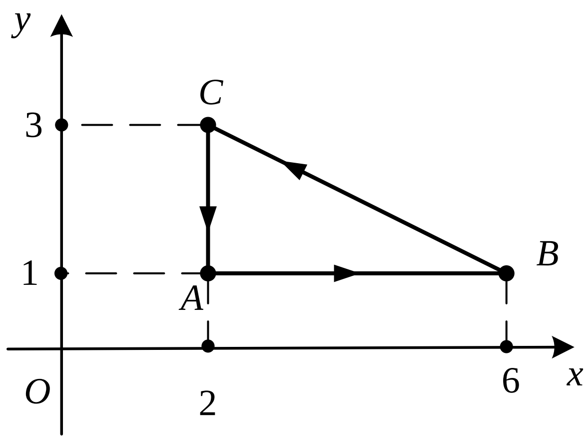


Рис. 7.10. Приклад 7.3, п. 3

Контур складається з трьох відрізків AB, BC і CA, тому

$$\oint_L 5y^2dx-\left(x+2y\right)dy=\int_{AB}5y^2dx-\left(x+2y\right)dy+$$
$$+\int_{BC}5y^2dx-\left(x+2y\right)dy+\int_{CA}5y^2dx-\left(x+2y\right)dy.$$

Знайдемо інтеграл на кожній стороні трикутника, для цього спочатку потрібно скласти рівняння сторін трикутника ABC. Використовуючи формулу рівняння прямої через дві задані точки $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$, отримаємо

$$AB:\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-1}{1-1},\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{0},4(y-1)=0\Rightarrow AB:y=1$$

$$BC:\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-3}{1-3},\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-2},-2(x-2)=4(y-3)\Rightarrow BC:y=-\frac{x}{2}+4$$

$$CA:\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-3}{1-3},\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{-2},-2(x-2)=0\Rightarrow CA:x=2;$$

а) сторона $AB:y=1$. Тоді

$$\int\limits_{AB}5y^2dx-(x+2y)dy=\begin{vmatrix} y=1 \\ dy=0 \\ x_н=2 \\ x_в=6 \end{vmatrix}=\int\limits_2^6 5dx=5x\Big|_2^6=20;$$

б) сторона $BC:y=-\frac{x}{2}+4$. Тоді

$$\int\limits_{BC}5y^2dx-(x+2y)dy=\begin{vmatrix} y=-\frac{x}{2}+4 \\ dy=-\frac{1}{2}dx \\ x_н=6 \\ x_в=2 \end{vmatrix}=$$

$$=\int\limits_6^2\left[5\left(-\frac{x}{2}+4\right)^2-\left(x+2\left(-\frac{x}{2}+4\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right]dx=\int\limits_6^2\left[84-20x+\frac{5}{4}x^2\right]dx=-\frac{308}{3};$$

в) сторона $AB:x=2$. Тоді

$$\int\limits_{AB}5y^2dx-(x+2y)dy=\begin{vmatrix} x=2 \\ dx=0 \\ y_н=3 \\ y_в=1 \end{vmatrix}=-\int\limits_3^1(2+2y)dy=-(y+1)^2\Big|_3^1=12.$$

Отже,

$$\oint_L 5y^2dx-(x+2y)dy=20-\frac{308}{3}+12=-\frac{212}{3}.$$

Відповідь: 1) $\int_{AB} 3xydx+x^2dy=20$; 2) $\int_{AB} 3ydx-2xdy=-5\pi$;

$$3)\ \oint_L 5y^2dx-(x+2y)dy=-\frac{212}{3}.$$

Приклад 7.4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2$, $y=x-2$, за допомогою криволінійного інтеграла.

Розв'язання

Площу такої фігури ми вже знаходили в розд. 5 (приклад 5.1) за допомогою визначеного інтеграла, де було показано два способи розв'язання. Давайте розглянемо ще один спосіб знаходження площі фігури за допомогою криволінійного інтеграла другого роду. Нагадаємо, що раніше було отримано відповідь $S=4{,}5$ (кв. од).

Контур L нашої області утворюють дві лінії (рис. 7.11):

1) L_1 - пряма $y=x-2$;

2) L_2 - парабола $y=2x-x^2$.

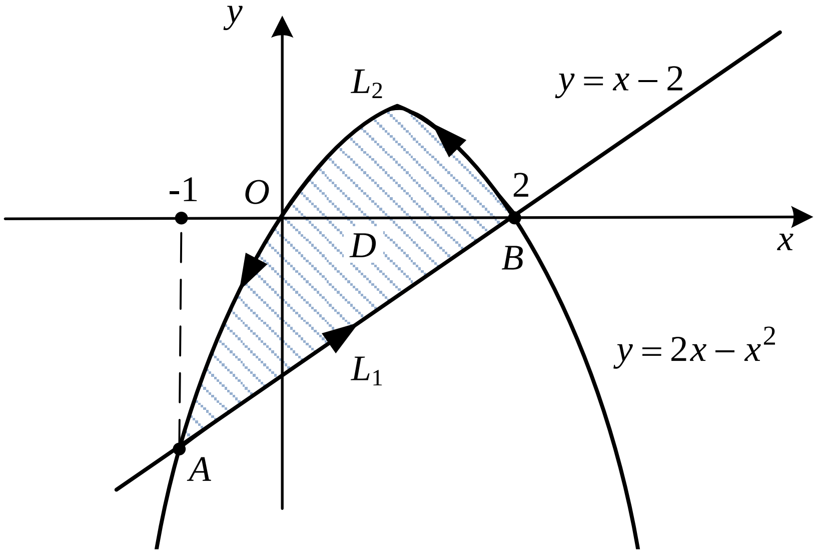


Рис. 7.11. Приклад 7.4

Тому, за формулою (7.12), обходячи наш контур у додатному напрямку (рис. 7.11), маємо

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\left(\int_{L_1} xdy - ydx + \int_{L_2} xdy - ydx\right).$$

Обчислимо окремо кожний інтеграл в правій частині:

$$\int_{L_1} xdy - ydx = \left|\begin{array}{l} y = x-2 \\ dy = dx \\ x_н = -1 \\ x_в = 2 \end{array}\right| = \int_{-1}^{2}\left(xdx - (x-2)dx\right) = \int_{-1}^{2} 2dx = 2x\Big|_{-1}^{2} = 6,$$

$$\int_{L_2} xdy - ydx = \left|\begin{array}{l} y = 2x - x^2 \\ dy = (2-2x)dx \\ x_н = 2 \\ x_в = -1 \end{array}\right| = \int_{2}^{-1}\left(x(2-2x)dx - \left(2x - x^2\right)dx\right) =$$

$$= \int_{2}^{-1}\left(-x^2\right)dx = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(2^3 - (-1)^3\right) = 3.$$

Отже,

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}(6+3) = 4{,}5 \text{ (кв. од).}$$

Відповідь: $S_D = 4{,}5$ (кв. од).

7.3. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду

$$\int_{AB}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dl = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz,$$

де α, β, γ - кути, що утворює напрямний вектор дотичної до кривої AB у точці $M(x;y)$. Напрямок руху від точки A до точки B вважають додатним напрямком дотичної.

Питання до розділу

1. Криволінійний інтеграл першого роду: визначення та властивості.
2. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.
3. Криволінійний інтеграл другого роду: визначення та властивості.
4. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.

Завдання

1. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L - відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$ між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$.

2. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2+6y\right)dl$, де L - відрізок прямої між точками $A(1;-1)$ і $B(2;1)$.

3. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2y^2z\right)dl$, де L - частина лінії кола
$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \ 0\le t\le \pi/2. \\ z=3, \end{cases}$$

4. Обчислити $\int\limits_L y\sqrt{1+y^2}dl$, де L - дуга кривої $x=\ln y$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(\ln 10;10)$.

5. Обчислити $\int\limits_L (2x+y)dl$, де L - контур ΔABO з вершинами $A(2;0)$, $B(0;3)$, $O(0;0)$.

6. Обчислити $\int\limits_L ydx+\frac{x}{y}dy$ вздовж дуги L: $y=e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;e)$.

7. Обчислити $\int\limits_L (x+y)dx - xdy$ вздовж дуги L: $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

8. Обчислити $\int\limits_L \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy$, де L - відрізок прямої між точками $A(1;1)$ і $B(3;2)$.

9. Обчислити $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy$, де L - дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

10. Обчислити $\int\limits_L \left(x^3+y\right)dx + \left(x+y^3\right)dy$, де L - ламана ABC з вершинами $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$.

11. Обчислити $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$, де L - дуга параболи $y = \frac{x^2}{4}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;1)$.

12. Обчислити $\int\limits_L y^2dx + xydy$, де L - дуга еліпса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ при додатному напрямку обходу.

13. Знайти довжину кривих L, заданих рівняннями:

1) $L: y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, x \in [-1;1]$;

2) $L: x = e^y, x \in [1;b]$;

3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

14. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 4x + 3, y = 3 + 2x - x^2$;

2) $y = (x-2)^3,\ y = 2x - x^2,\ x = 3$;

3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} y = \dfrac{b\sqrt{3}}{2} \left(y \geq \dfrac{b\sqrt{3}}{2} \right).$

Відповіді

1. $\sqrt{5}\ln 2$. **2.** $\dfrac{7\sqrt{5}}{3}$. **3.** 6π. **4.** 342. **5.** $\dfrac{17 + 7\sqrt{13}}{2}$.

6. $\dfrac{1}{2} - e$. **7.** $-\dfrac{2}{3}$. **8.** $3 - \dfrac{1}{2}\ln 3$. **9.** $\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{6}$. **10.** 190.

11. 0. **12.** $-\dfrac{ab^2}{3}$. **13. 1)** 4. **13. 2)** $\dfrac{2\ln b + b^2 - 1}{2}$.

13. 3) $6a$ (астроїда). **13. 4)** $8a$ (арка циклоїди).

14. 1) 9 (кв. од.). **14. 2)** $\dfrac{19}{12} \approx 1{,}58$ (кв. од.).

14. 3) $\dfrac{3}{8}\pi a^2$ (кв. од.). **14. 4)** $ab\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (кв. од.).

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Вища математика: підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків та ін. Тернопіль : Вид-во Карп'юка, 2003. 480 с.

2. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика: підруч. для студ. вищ. техн. навч. закл. Київ: Либідь, 1996. 440 с.

3. Кононюк А. Ю. Вища математика (модульна технологія навчання): навч. посіб.: у 2 кн. Кн. 2. Київ: КНТ, 2009. 788 с.

4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закл. Київ: А.С.К., 2006. 648 с.

5. Петрук В. А., Прозор О. П., Клєопа І. А. Вища математика: навч. посіб. Вінниця, 2020. Ч. 2. 132 с.

6. Диференціальне та інтегральне числення: навч. посібник / Є. З. Могульський, Г. П. Бородай, А. О. Дрогаченко та ін. Харків: УкрДАЗТ, 2011. 311 с.

7. Вища математика у прикладах та задачах: навч. посіб. для студ. ВНЗ: у 4 ч. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення / А. Д. Тевяшев, Г. М. Кривошеєва, О. Г. Литвин та ін. Київ: Кондор, 2006. 605 с.

8. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі: навч. посіб. Київ: Книги України ЛТД, 2009. 470 с.

9. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика. Практикум: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Вид. 2-ге, переоб. та доп. Київ: Центр навчальної літератури, 2005. 535 с.

10. Босовський М. В. Теорія функцій комплексної змінної : навч.-метод. посіб. Черкаси: Редакційно-видавничий відділ Черкаського державного університету ім. Б. Хмельницького, 2000. 59 с.

11. Овчинніков П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / за заг. ред. П. П. Овчинікова. Київ: Техніка, 2003. 600 с.

12. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: навч. посіб.: у 2 ч. Київ: КНЕУ, 2001. Ч. 2. 451 с.

13. Вища математика: підручник: у 2 кн. Кн. 1. Основні розділи / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординьский та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 400 с.

14. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т. 1. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник та ін.; за ред. Л. В. Курпи. Харків: НТУ «ХПІ», 2009. 532 с.

15. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики: навч. посіб. Вид. 3-тє, випр. і доп. Тернопіль: ТНЕУ, 2010. 303 с.

16. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. Вища математика: підручник. Вінниця: Нова книга, 2014. 632 с.

17. Бугір М. К. Математика для економістів: посібник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2003. 520 с.

18. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: підруч. для студ. вищ. техн. навч. закл.: у 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. Київ: Техніка, 2003. 598 с.

19. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2003. 432 с.

20. Курченко О. О. Інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. Київ, 2016. 140 с.

21. Інтегральне числення та диференціальні рівняння: практичний посібник з вищої математики / уклад.: Н. Д. Федоренко та ін. Київ: КНУБА, 2018. 100 с.

22. Зайцев Є. П. Вища математика: інтегральне числення функції однієї та багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння, ряди: навч. посіб. Київ: Алерта, 2018. 608 с.

23. Задерей П. В., Лагода О. А., Нестеренко О. Б., Харитонова М. О. Інтегральне числення: навч. посіб. Київ: КНУТД, 2021. 216 с.

24. Вища математика. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних / О. В. Барабаш, Г. М Власик, Н. Б. Дахно та ін. Київ: ДУТ, 2019. 232 с.

25. Турчанінова Л. І., Доля О. В. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. Київ: Видавництво Ліра-К, 2018. 348 с.

26. Вища математика у прикладах та задачах: навч. посіб. для студ. ВНЗ: у 4 ч. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та ін. Київ : Кондор, 2006. 455 с.

27. Іваненко Т. В. Вища математика. Практикум. Ч. 4. Інтегральне числення, Диференціальні рівняння: посіб. для самост. роб. студ. Київ: Університет економіки та права «КРОК», 2010. 95 с.

28. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Київ: Книги України ЛТД, 2010. 470 с.

29. Ковтонюк І. Ю., Корнілович Є. Ю., Олешко Т. І. Вища математика: навч. посіб. Модуль 6. Інтегральне числення функцій однієї змінної /за заг. ред. Т. І. Олешко. Київ: Книжкове вид-во НАУ, 2005. 112 с.

30. Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння: навч. посіб. для студ. техн. спец. / Г. М. Кулик, О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Степаненко, Н. П. Ярема. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. 278 с.

31. Валяшек В. Б., Каплун А. В., Козбур Г. В. Навчальний посібник з курсу вищої математики для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання. Тернопіль: В-во ТНТУ, 2015. 113 с.

32. Кагадій Т. С., Сушко Л. Ф., Говоруха В. Б. Інтегральне числення: навч. посіб. Дніпро: ДДАЕУ, 2018. 117 с.

33. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Трусевич О. М. Інтегральне числення: навч. посіб. Львів, 2019. 134 с.

34. Підченко Ю. П., Пастушенко С. М. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.: у 2 ч. Ч. 1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Функції, границі. Диференційне та інтегральне числення функції однієї змінної. Київ: Діал, 2004. 192 с.

35. Курс вищої математики : навч. посіб. / В. К. Григоренко, М. М. Жолонко, О. О. Куцоконь, С. А. Ричка. Черкаси: Чабаненко Ю. А., 2013. Ч. 1. 512 с.

36. Тріщ Б. М. Основи вищої математики: Теореми, приклади і задачі: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Львів: Видавництво ЛНУ ім. І. Франка, 2008. 404 с.

37. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика: підруч. для студ. вищ. пед. навч. закл.: у 2 кн. Кн. 1 / гол. ред.: А. С. Мнишенко. Київ: Либідь, 2010. 592 с.

38. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика: підруч. для студ. вищ. пед. навч. закл.: у 2 кн. Кн. 2 / гол. ред. А. С. Мнишенко. Київ: Либідь, 2010. 496 с.

39. Коваленко І. П. Вища математика: навч. посіб. Київ: Слово, 2011. 456 с.

40. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів: підручник. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. 341 с.

41. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Грималюк та ін.; ред. І. В. Скрипник. Київ: Віпол, 2003. Ч. 1. 324 с.

42. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Київ: Центр навчальної літератури, 2005. 448 с.

43. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб.: у 2 т. Т. 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди / Л. В. Курпа [та ін.]; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». Харків: НТУ «ХПІ», 2009. 432 с.

44. Жиленко Т. І., Білоус О. А. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів: навч. посіб. Суми: Сумський державний університет, 2017. 224 с.

45. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Київ: Книги України ЛТД, 2009. 400 с.

46. Аршава О. О., Харченко А. П., Щелкунова Л. І. Інтегральне числення функцій багатьох змінних: навч. посіб. Харків: ТОВ «Цифрова типографія», 2018. 137 с.

47. Кузьма О. В., Яцюк В. Т. Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Основи теорії поля: навч.-метод. посіб. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. 113 с.

48. Габрусєв Г. В., Габрусєва І. Ю., Шелестовський Б. Г. Вища математика. Част. 3: Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Тернопіль: СМП «Тайп», 2021. 60 с.

49. Підченко Ю. П., Пастушенко С. М. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.: у 2 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних. Кратні

і поверхневі інтеграли. Ряди. Диференціальні рівняння. Елементи теорії поля. Київ: Діал, 2004. 198 с.

50. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Грималюк та ін.; ред. І. В. Скрипник. Київ: Віпол, 2003. Ч. 2. 399 с.

51. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Изд. 13-е, испр. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 544 с.

52. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of Integrals, Series, and Products 5 Edition, Academic, New York, 1996. 1762 p.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Формули скороченого множення	
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	Різниця квадратів
$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	Квадрат суми (різниці)
$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$	Сума кубів
$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$	Різниця кубів
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	Куб суми
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	Куб різниці
$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, де $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ – корені рівняння $ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$. Корені також можна знайти за теоремою Вієта: якщо x_1 і x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$	Розкладання квадратного тричлена на множники
$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$	Виділення повного квадрата
$x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$	Виділення повного квадрата для приведеного рівняння

Додаток 2

Комплексні числа	
Форма запису	Дії над числами
Алгебраїчна $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$	$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$; 2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$; 3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$
Тригонометрична $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \begin{cases} arctg\left(\frac{y}{x}\right), x \geq 0; \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi,\ x < 0, y \geq 0; \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi,\ x < 0, y < 0. \end{cases}$	$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. 1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$; 2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$; 3) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$; 4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$ $= \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$, де $k = 0,1,2,...,(n-1)$
Показникова $z = re^{i\varphi}$, $r = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg z$	$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$. 1) $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; 2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$; 3) $z^n = r^n e^{in\varphi}$; 4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, де $k = 0,1,2,...,(n-1)$

Додаток 3

Таблиця невизначених інтегралів			
1	$\int dx = x + C$	12	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$, $a \neq 0$
2	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	14	$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$	15	$\int \mathrm{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$	16	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left\| tg \frac{x}{2} \right\| + C$
6	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	17	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left\| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\| + C$
7	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	18	$\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$
8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$	19	$\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$	20	$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	21	$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C$
11	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$		

Додаток 4

Типи заміни в невизначеному інтегралі	
1 тип. Лінійна заміна	$\int f\left(ax+b\right)dx = \left\lvert \begin{matrix} ax+b=t \\ dx=\frac{1}{a}dt \end{matrix} \right\rvert = \frac{1}{a}\int f\left(t\right)dt = \frac{1}{a}F\left(t\right)+C = \frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C$
2 тип	$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = \left\lvert \begin{matrix} t=g\left(x\right) \\ dt=g'\left(x\right)dx \end{matrix} \right\rvert = \int f\left(t\right)dt = F\left(t\right)+C = F\left(g\left(x\right)\right)+C$
3 тип	$\int f\left(x\right)dx = \left\lvert \begin{matrix} x=h\left(t\right) \\ dx=h'\left(t\right)dt \end{matrix} \right\rvert = \int f\left(h\left(t\right)\right)h'\left(t\right)dt = H\left(t\right)+C = H\left(g\left(x\right)\right)+C,$ де $t=g\left(x\right)$ є розв'язком рівняння $x=h\left(t\right)$

Додаток 5

№	Вид інтеграла	u	dv
I	$\int P(x)\cdot e^{kx}dx$, $\int P(x)\cdot a^{kx}dx$ $\int P(x)\cdot \sin x dx$, $\int P(x)\cdot \cos x dx$, де $P(x)$ - поліном, $k\in R, k\neq 0$	$u=P(x)$	$dv=e^{kx}dx$, $dv=a^{kx}dx$, $dv=\sin x dx$, $dv=\cos x dx$
II	$\int P(x)\cdot \arcsin x dx$, $\int P(x)\cdot \arccos x dx$, $\int P(x)\cdot \mathrm{arctg} x dx$, $\int P(x)\cdot \mathrm{arcctg} x dx$, $\int P(x)\cdot \ln x dx$, $\int P(x)\cdot \log_a x dx$, де $P(x)$ - поліном	$u=\arcsin x$, $u=\arccos x$, $u=\mathrm{arctg} x$, $u=\mathrm{arcctg} x$, $u=\ln x$, $u=\log_a x$	$dv=P(x)dx$
III	$\int a^{kx}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{kx}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{kx}\cos\beta x\,dx$, $\int a^{kx}\cos\beta x\,dx$, де $k,\beta\in R$, $k\neq 0, \beta\neq 0$	Ці інтеграли знаходять двократним інтегруванням частинами	

Додаток 6

Схема розкладання правильного раціонального дробу

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0}$ **(**$n<m$**) на суму елементарних дробів**

Елементарні дроби знаходять, розклавши знаменник на множники:

$$Q_m(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}...(x-x_r)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}...\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s},$$

де $k_1,...,k_r$ - кратність дійсних коренів $x_1,...,x_r$ відповідно,
квадратні тричлени $x^2+p_ix+q_i$ ($i=1,...,s$), що не мають дійсних коренів.

Множник знаменника	Елементарні дроби
$x-a$	$\dfrac{A}{x-a}$
$(x-b)^k$	$\dfrac{B_1}{x-b}+\dfrac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\dfrac{B_k}{(x-b)^k}$
x^2+px+q	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$
$(x^2+px+q)^l$	$\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\dfrac{A_lx+B_l}{(x^2+px+q)^l}$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{H_1}{x-x_r}+\frac{H_2}{(x-x_r)^2}+...+\frac{H_{k_r}}{(x-x_r)^{k_1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{l_1}x+C_{l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_sx+q_s}+\ldots+\frac{B_{l_s}x+C_{l_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}\right)$$

Додаток 7

Схема розкладання неправильного раціонального дробу на суму елементарних дробів
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}\quad (n\geq m).$$ Якщо раціональний дріб неправильний, то, виконавши ділення, його можна подати як суму многочлена $L_{n-m}(x)$ і правильного раціонального дробу: $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=L_{n-m}(x)+\frac{W_r(x)}{Q_m(x)},$$ де $L_{n-m}(x)$ – ціла частина; $\frac{W_r(x)}{Q_m(x)}$ – правильний раціональний дріб. Після цього правильний раціональний дріб $\frac{W_r(x)}{Q_m(x)}$ розкладаємо на суму елементарних дробів (*дод. 6*)

Додаток 8

Основні формули тригонометрії	
Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$, $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$
Формули додавання	$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$, $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$, $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$, $\operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$, $\operatorname{ctg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y-1}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}$, $\operatorname{ctg}(x-y)=-\dfrac{\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y+1}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} y}$
Формули подвійного аргументу	$\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$, $\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{2}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}$, $\operatorname{ctg} 2x=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg} x}=\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}{2}$
Формули половинного аргументу (зниження степенів)	$\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$, $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

Продовження дод. 8

Формули перетворення добутку в суму	$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x+\sin(m+n)x\right)$, $\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right)$, $\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right)$
Вираз тригонометричних функцій через тангенс половинного кута	$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\quad\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\quad\operatorname{ctg}x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

Додаток 9

Інтегрування тригонометричних функцій			
		Вид інтеграла	**Метод інтегрування**
I		$\int R(\sin x, \cos x)dx$	*Універсальна тригонометрична підстановка* $t = tg\dfrac{x}{2}, x \in (-\pi;\pi)$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dt = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
II	1	$\int R(\sin x)\cos x dx$	*Заміна:* $t = \sin x$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$
	2	$\int R(\cos x)\sin x dx$	*Заміна:* $t = \cos x$, $dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\sin x = \sqrt{1-t^2}$
	3	$\int R(tgx)dx$, $\int R(ctgx)dx$	*Заміна:* $t = tgx$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. *Заміна:* $t = ctgx$, $dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$
III	1	$\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^{2m} x dx$, n,m - цілі числа, $n \geq 0$	*Заміна:* $t = \cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
	2	$\int \cos^{2n+1} x \cdot \sin^{2m} x dx$, n,m - цілі числа, $n \geq 0$	*Заміна:* $t = \sin x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

IV	1	$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx,\ m-n=2k\ge 0,$ k - ціле	*Заміна:* $t=tgx,\ \ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
	2	$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx,\ m-n=2k\ge 0,$ k - ціле	*Заміна:* $t=ctgx,\ dx=-\frac{dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
V		$\int \sin^{2m} x\cdot\cos^{2n} xdx,$ n,m - цілі невід'ємні числа	*Пониження степеня:* $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\quad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$
VI		$\int \sin nx\cdot\cos mxdx,$ $\int \sin nx\cdot\sin mxdx,$ $\int \cos nx\cdot\cos mxdx,$ n,m - дійсні числа	*Заміна добутку функцій сумою* $\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x+\sin(m+n)x\right),$ $\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right),$ $\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right)$

Додаток 10

Вид інтеграла	Заміна
$\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx$, $m,n \in N$	$t^n = ax+b$, $t = \sqrt[n]{ax+b}$, $x = \dfrac{t^n - b}{a}$, $dx = \dfrac{n}{a} t^{n-1} dt$
$\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$ $m_1, m_2, ..., m_k \in N$, $n_1, n_2, ..., n_k \in N$	$t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, $x = \dfrac{d \cdot t^n - b}{a - c \cdot t^n}$, $dx = \dfrac{ad - bc}{(a - ct^n)^2} nt^{n-1} dt$, де n - найменший спільний знаменник дробів $\dfrac{m_1}{n_1}, \dfrac{m_2}{n_2}, \ldots$
$\int R\left(x, \sqrt{k^2 - x^2}\right)dx$	$x = k\sin t$, $dx = k \cdot \cos t\, dt$, $\sqrt{k^2 - x^2} = k \cdot \cos t$ або $x = k\cos t$, $dx = -k \cdot \sin t\, dt$, $\sqrt{k^2 - x^2} = k \cdot \sin t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - k^2}\right)dx$	$x = \dfrac{k}{\sin t}$, $dx = -\dfrac{k \cos t}{\sin^2 t} dt$, $\sqrt{x^2 - k^2} = k \cdot ctgt$ або $x = \dfrac{k}{\cos t}$, $dx = \dfrac{k \sin t}{\cos^2 t} dt$, $\sqrt{x^2 - k^2} = k \cdot tgt$
$\int R\left(x, \sqrt{k^2 + x^2}\right)dx$	$x = k \cdot \mathrm{tg}\, t$, $dx = \dfrac{k}{\cos^2 t} dt$, $\sqrt{x^2 + k^2} = \dfrac{k}{\cos t}$ або $x = k \cdot \mathrm{ctg}\, t$, $dx = -\dfrac{k}{\sin^2 t} dt$, $\sqrt{x^2 + k^2} = \dfrac{k}{\sin t}$

Додаток 11

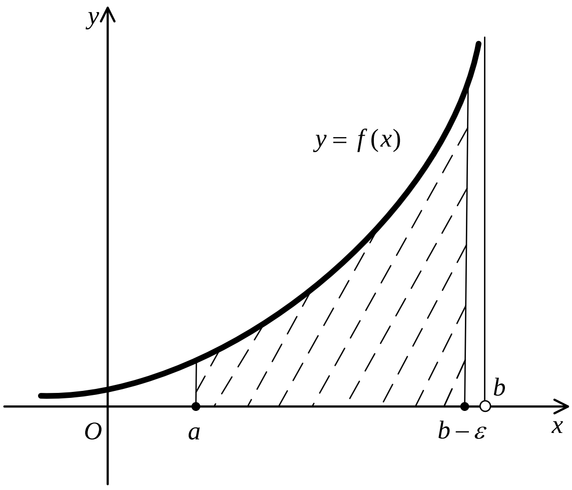
Визначений інтеграл	
Формула Ньютона-Лейбніца	$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$
Заміна змінної	$\int\limits_a^b f(x)dx = \left\vert \begin{array}{c} x=\varphi(t) \\ \varphi(\alpha)=a \\ \varphi(\beta)=b \end{array} \right\vert = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$
Інтегрування частинами	$\int\limits_a^b udv = uv\Big\vert_a^b - \int\limits_a^b vdu$

Додаток 12

Невласні інтеграли першого роду (невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування)
Функція $f\left(x\right)$ визначена на $\left[a;+\infty\right)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $\left[a;b\right]$, $-\infty<a<b<+\infty$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx$, то її називають невласним інтегралом першого роду і позначають як $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$
За визначенням, $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx$. 1. Якщо границя скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*, а підінтегральну функцію $f\left(x\right)$ називають інтегрованою на проміжку $\left[a;+\infty\right)$. 2. Якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл називається *розбіжним*, а $f\left(x\right)$ називається неінтегрованою на $\left[a;+\infty\right)$
Аналогічно визначається невласний інтеграл на проміжку $\left(-\infty;b\right]$: $$\int_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx$$
Невласний інтеграл з двома нескінченними межами. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{c} f\left(x\right)dx+\int_{c}^{+\infty} f\left(x\right)dx,$$ де c - довільне число, є *збіжним* лише тоді, коли є збіжними обидва невласних інтеграла в правій частині
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\textit{збігається при } \alpha>1,\\ \textit{розбігається при } \alpha\le 1\end{cases}$$

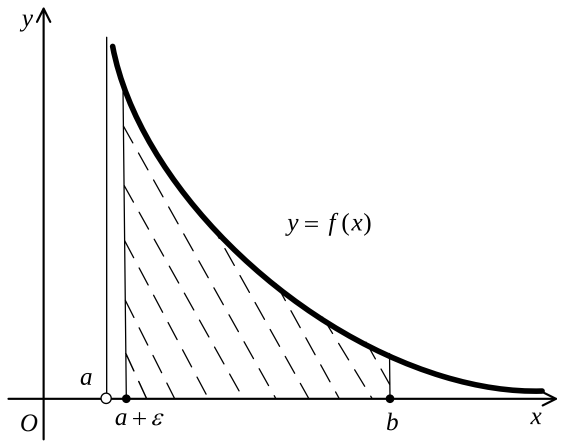
Додаток 13

Невласні інтеграли другого роду (невласні інтеграли від необмежених функцій)



Функція $f(x)$ визначена на $[a;b)$, має в $x=b$ особливу точку ($f(x)\underset{x\to b-0}{\to}\infty$) та інтегрована на відрізку $[a;b-\varepsilon]$, $(\varepsilon>0, b-\varepsilon>a)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

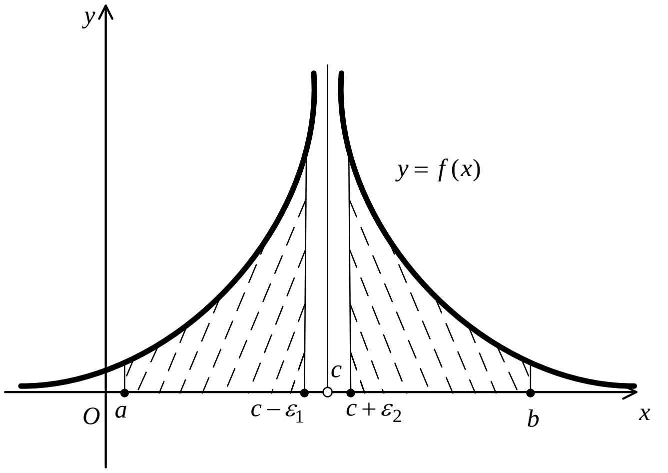


Аналогічно, якщо $x=a$ - особлива точка:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

1. Якщо границя скінченна, то невласний інтеграл *збігається.*

2. Якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл *розбігається*



Якщо $f\left(x\right)$ необмежена в околі точки $c\in\left(a;b\right)$, то невласний інтеграл

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx+\int_c^b f\left(x\right)dx$$

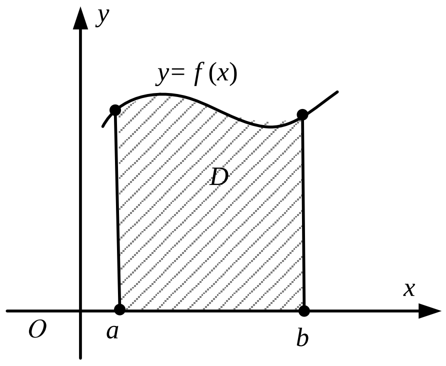
є *збіжним* лише тоді, коли є збіжними обидва невласних інтеграла в правій частині

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases} \textit{збігається при } \alpha<1, \\ \textit{розбігається при } \alpha\geq 1 \end{cases}$$

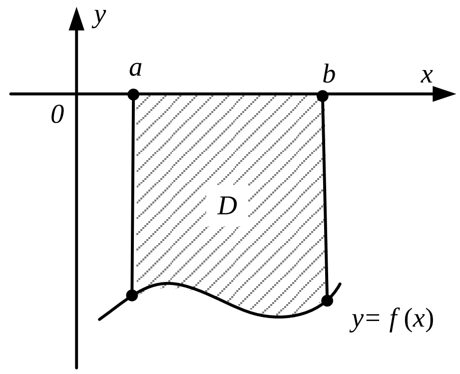
Додаток 14

Застосування визначеного інтеграла

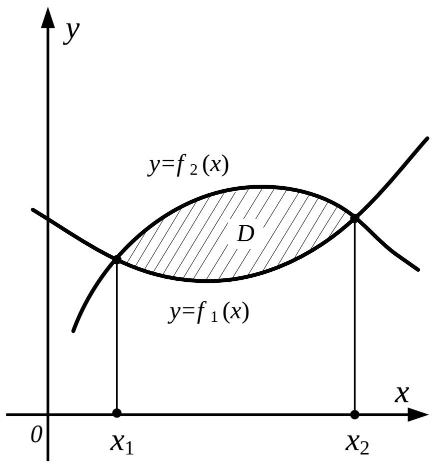
Обчислення площі криволінійної трапеції



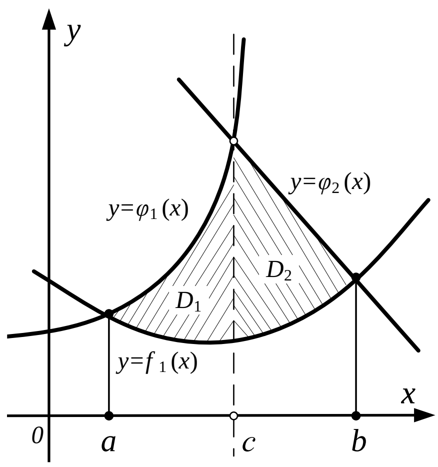
$$S_D=\int_a^b f\left(x\right)dx$$



$$S_D=-\int_a^b f\left(x\right)dx$$

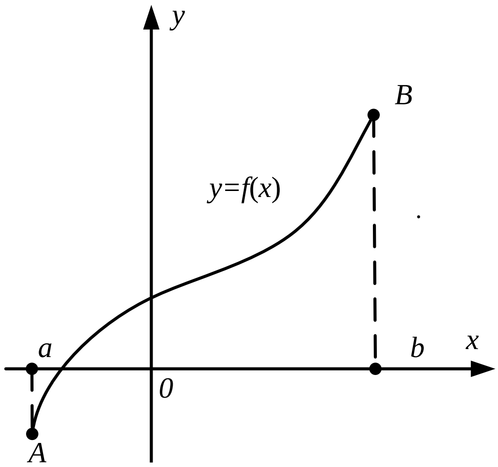


$$S_D=\int_{x_1}^{x_2}\{f_2\left(x\right)-f_1\left(x\right)\}dx,$$
$$f_2(x)\ge f_1(x)$$



$$S=S_{D_1}+S_{D_2}$$

Довжина L дуги плоскої кривої



Крива задана в декартовій системі координат $y=f(x),\ x\in[a;b]$

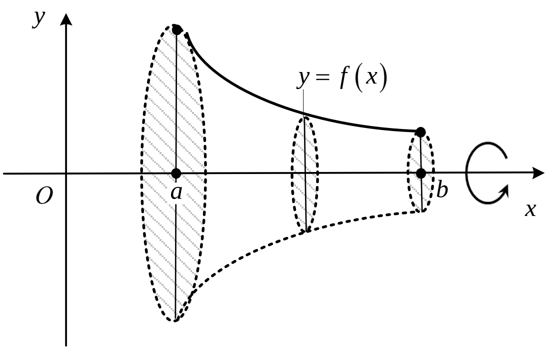
$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Крива задана в параметричній формі

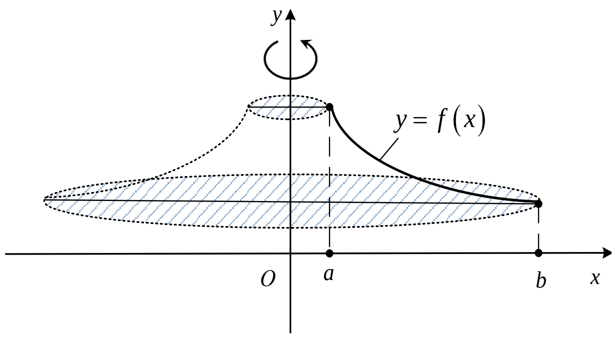
$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta]\end{cases}$$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

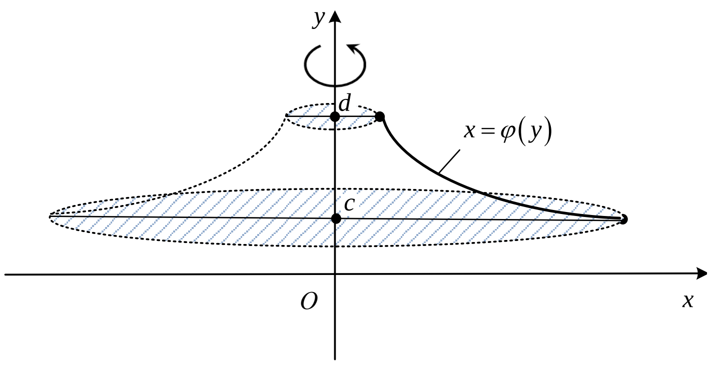
Об'єм тіла обертання



$$V_{Ox}=\pi\cdot\int_a^b y^2(x)\,dx$$



$$V_{Oy}=2\pi\cdot\int_a^b xf(x)\,dx$$



$$V_{Oy}=\pi\cdot\int_c^d x^2(y)\,dy$$

Площа поверхні тіла обертання	
Крива задана в декартовій системі координат $y = f(x)$, $x = a, x = b, y = 0$	$S_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$
Крива задана в параметричній формі $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \ t \in [\alpha; \beta] \end{cases}$	$S_{Ox} = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt$

Додаток 15

Криволінійні інтеграли
Криволінійний інтеграл першого роду
Якщо дуга AB кривої L задана рівнянням $y=y(x),\ x\in[a;b]$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою $$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_a^b f\left(x;y(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx,$$ де $dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$ - *диференціал дуги* заданої кривої. Якщо дуга AB кривої L в параметричному вигляді $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), \quad t\in[\alpha;\beta],\end{cases}$ то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою $$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t);y(t)\right)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt),$$ де $dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt$ - *диференціал дуги* заданої кривої
Криволінійний інтеграл другого роду
Якщо крива AB задана параметрично: $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою $$\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_\alpha^\beta\left[P\left(x(t),y(t)\right)x'(t)+Q\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt$$
Якщо крива AB задана явно: $y=y(x),\ a\le x\le b:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою $$\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_a^b\left[P\left(x,y(x)\right)+Q\left(x,y(x)\right)y'(x)\right]dx$$
Якщо контур інтегрування L - замкнена лінія, криволінійний інтеграл позначають так (додатним вважається напрямок обходу контуру L, при якому обмежена ним область залишається зліва): $$\oint\limits_L P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

В

Визначений інтеграл 91, 92, 240

- властивості 94
- геометричний зміст 93
- економічний зміст 93
- застосування 138, 244
- фізичний зміст 93

Д

Дріб

- елементарний 44, 49, 233
- раціональний 44, 46, 47, 234
- - правильний 44
- - неправильний 44

Диференціал дуги 201

І

Інтеграл

- визначений 91
- внутрішній 177
- двократний 177
- зовнішній 152, 177
- кратний 172
- криволінійний першого роду 200
- криволінійний другого роду 208
- невизначений 25
- невласний 109, 119
- - першого роду 109, 241

- - другого роду 121, 242
- повторний 177
- подвійний 172
- потрійний 187
Інтегральна сума 91, 152, 187, 208

К
Комплексна площина 12
- дійсна вісь 12
- уявна вісь 12
Комплексне число 9
- алгебраїчна форма 9
- аргумент 13
- геометрична форма 14
- дійсна частина 9
- модуль 13
- спряжене 9
- уявна частина 9
Криволінійний інтеграл другого роду 208
- властивості 210
- обчислення 212
Криволінійний інтеграл першого роду 201
- властивості 202
- обчислення 202

М
Метод невизначених коефіцієнтів 50

Н
Невизначений інтеграл 25

- властивості 26
Невласний інтеграл другого роду 121
- абсолютно збіжний 129
- збіжний 122,123
- ознаки збіжності 128
- розбіжний 122,123
- умовно збіжний 129
Невласний інтеграл першого роду 109
- абсолютно збіжний 117
- збіжний 110
- ознаки збіжності 116
- розбіжний 110
- умовно збіжний 118
Неправильний раціональний дріб 44

П
Первісна 24
Повторний інтеграл 177
Подвійний інтеграл 172
- властивості 174
- геометричний зміст 174
- обчислення 176
Потрійний інтеграл 186
Правильний раціональний дріб 44

Ф
Формула
- додавання комплексних чисел 11
- ділення комплексних чисел 11

- - алгебраїчна форма 11
- - тригонометрична форма 16
- добування кореня комплексного числа 16
- інтегрування частинами визначеного інтеграла 102
- інтегрування частинами невизначеного інтеграла 34
- множення комплексних чисел,
- - алгебраїчна форма 11
- - тригонометрична форма 16
- Муавра 16
- Ньютона-Лейбніца 98
- обчислення
- - довжини дуги кривої,
- - - заданої параметрично 153, 245
- - - заданої явно 152, 245
- - криволінійного інтегралу другого роду 212
- - криволінійного інтегралу першого роду 202
- - об'єму тіла,
- - об'єму тіла обертання 155
- - - - навколо осі Ox 155
- - - навколо осі Oy 156, 157
- - об'єму циліндричного тіла 191
- - площі криволінійної трапеції 93, 138, 244
- - площі поверхні тіла обертання 162, 246

Функція,
- інтегровна 92
- середнє значення 97

Навчальний посібник

Панченко Наталія Георгіївна,

Резуненко Марина Євгенівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 31.05.2023 р.
Умовн. друк. арк. 15,5. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.