ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина II

Харків – 2019

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 8 квітня 2019 р., протокол № 7.

Рекомендуються для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр» факультету УПП всіх форм навчання

Укладачі:

доценти Н. Г. Панченко,
М. Є. Резуненко,
старш. викл. О. В. Рибачук

Рецензент

проф. Р. В. Вовк (ХНУ імені В. Н. Каразіна)

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина II

Відповідальний за випуск Резуненко М. Є.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 24.04.19 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 2,5. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ 1. Область визначення функції

Знайти область визначення функції.

Варіант	Функція	
1	а) $y=\frac{3x-1}{2-x}$	б) $y=\arccos(2x-5)+\sqrt{4-x}$
2	а) $y=\sqrt{3-2x}$	б) $y=\ln(8-2x)+\frac{6}{\sqrt{x-3}}$
3	а) $y=7-\sqrt{5+3x}$	б) $y=\sqrt{3^{2x-5}-1}$
4	а) $y=\frac{x-2}{\sqrt{7+21x}}$	б) $y=\lg\left(10x^2-x\right)+\sqrt{3+5x}$
5	а) $y=(x-2)\cdot\sqrt[3]{x-1}$	б) $y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\left(\frac{3x-1}{2}\right)$
6	а) $y=\frac{x^2-2x+1}{x-3}$	б) $y=\arccos\left(\frac{x-1}{2}\right)-\sqrt{x-2}$
7	а) $y=\frac{x^2+3x-3}{x-3}$	б) $y=\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{\log_2 x-1}$
8	а) $y=\sqrt{25-x^2}$	б) $y=\frac{\ln(1+x)}{1-x}$
9	а) $y=(x-2)\sqrt{x}$	б) $y=\frac{1}{\ln\left(4x-x^2-3\right)}$
10	а) $y=\sqrt{(x+1)(9-4x)}$	б) $y=\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)+\lg(4-x)$
11	а) $y=\ln\left(4-x^2\right)$	б) $y=\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)+\sqrt{x-2{,}5}$
12	а) $y=\frac{5}{x\sqrt{4-x^2}}$	б) $y=\log_4 x-3\cdot 2^x$
13	а) $y=\frac{x^2-1}{1+5x}$	б) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{3x+x^2-7}$
14	а) $y=\frac{x^3}{x^2-25}$	б) $y=\sqrt{1-\log_2 x}$
15	а) $y=\frac{3x}{2+x^2}$	б) $y=\arccos\left(\frac{2x-3}{2}\right)-\sqrt{x-1}$

16	а) $y=\dfrac{1}{x^2+7x}$	б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x+1}}}$
17	а) $y=\dfrac{x}{(3-x)^2}$	б) $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$
18	а) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2-x}$	б) $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-3}$
19	а) $y=x+4-2\sqrt{x+4}$	б) $y=\lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
20	а) $y=\dfrac{x}{3\sqrt[3]{x^2-16}}$	б) $y=(\arcsin x)^{-0,5}$
21	а) $y=\dfrac{3x+1}{2-x^2}$;	б) $y=\ln(7+2x)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
22	а) $y=\sqrt{x^2+2x-3}$;	б) $y=2^{\frac{1}{1+x}}+\sqrt{x^2-9x}$
23	а) $y=\dfrac{x}{x^2-4x}$;	б) $y=\sqrt{-3x}+\dfrac{1}{\sqrt{3+x}}$
24	а) $y=\dfrac{x-1}{(2-x)^3}$;	б) $y=\arccos\left(\dfrac{3x-1}{4}\right)+\sqrt{x-1}$
25	а) $y=\dfrac{1}{3x}-(3x)^2$;	б) $y=\dfrac{e^x}{x^2-x-6}$
26	а) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$;	б) $y=\sqrt{4x-x^3}+\ln\left(x^2-1\right)$
27	а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}$;	б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\arcsin 2x$
28	а) $y=\dfrac{x^2-1}{2x}$	б) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln x}$
29	а) $y=\sqrt{3+\ln x}$;	б) $y=\arccos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x^2+1}$
30	а) $y=\dfrac{2x}{x^2+4}$;	б) $y=\arcsin\left(\dfrac{2x+1}{4}\right)+\sqrt{x+1}$

ЗАВДАННЯ 2. Неперервність функції

Завдання 2.1. Дослідити функцію $y = f(x)$ на неперервність. Побудувати ескіз графіка функції.

Варіант	$y = f(x)$	Варіант	$y = f(x)$
1	$y = 3^{\frac{1}{5-x}}$	**16**	$y = 64^{\frac{1}{2x-2}}$
2	$y = 7^{\frac{1}{x+5}}$	**17**	$y = 7^{\frac{2}{x-3}}$
3	$y = 4^{\frac{1}{x+1}}$	**18**	$y = 5^{\frac{1}{3x-6}}$
4	$y = 8^{\frac{2}{x-3}}$	**19**	$y = 16^{\frac{2}{2x+4}}$
5	$y = 11^{\frac{4}{3+x}}$	**20**	$y = 27^{\frac{3}{1+x}}$
6	$y = 18^{\frac{3}{x-7}}$	**21.**	$y = 4^{\frac{2}{x-7}}$
7	$y = 9^{\frac{1}{x-5}}$	**22**	$y = 9^{\frac{1}{x-5}}$
8	$y = 2^{\frac{4}{3+x}}$	**23**	$y = 3^{\frac{4}{2x-5}}$
9	$y = 13^{\frac{1}{x-8}}$	**24**	$y = 10^{\frac{4}{7-x}}$
10	$y = 9^{\frac{8}{4+2x}}$	**25**	$y = 3^{\frac{1}{4-x}}$
11	$y = 5^{\frac{6}{x-4}}$	**26**	$y = 5^{\frac{3}{2x-3}}$
12	$y = 6^{\frac{3}{1+2x}}$	**27**	$y = 2^{\frac{2}{x-1}}$
13	$y = 8^{\frac{1}{1+x}}$	**28**	$y = 8^{\frac{2}{4x-5}}$
14	$y = 35^{\frac{5}{3+2x}}$	**29**	$y = 10^{\frac{1}{6-x}}$
15	$y = 13^{\frac{1}{4-x}}$	**30**	$y = 8^{\frac{4}{3x-6}}$

Завдання 2.2. Задана функція $f(x)$. Дослідити функцію на неперервність. Побудувати ескіз графіка функції.

1	$f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ якщо } x<-1; \\ 2-x, \text{ якщо } -1\le x<1; \\ 2x, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$	**16**	$f(x)=\begin{cases} 2-x, \text{ якщо } x<1; \\ x^2, \text{ якщо } 1\le x<3; \\ 2x+1, \text{ якщо } x\ge 3. \end{cases}$
2	$f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x<-1; \\ x^2, \text{ якщо } -1\le x<1; \\ -2x+3, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$	**17**	$f(x)=\begin{cases} x+3, \text{ якщо } x\le 0; \\ 1-x, \text{ якщо } 0<x\le 1; \\ 2x-2, \text{ якщо } x>1. \end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x\le 0; \\ x-1, \text{ якщо } 0\le x<2; \\ 3-x, \text{ якщо } x\ge 2. \end{cases}$	**18**	$f(x)=\begin{cases} -8, \text{ якщо } x\le \text{-}2; \\ x^3, \text{ якщо } -2<x\le 1; \\ x-2, \text{ якщо } x>1. \end{cases}$
4	$f(x)=\begin{cases} 3x, \text{ якщо } x\le 0; \\ x^2, \text{ якщо } 0<x<1; \\ x-3, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$	**19**	$f(x)=\begin{cases} 3x, \text{ якщо } x\le -1; \\ x+2, \text{ якщо } -1<x<3; \\ 5, \text{ якщо } x\ge 3. \end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases} 4-3x, \text{ якщо } x\le 1; \\ x, \text{ якщо } 1<x\le 3; \\ x+3, \text{ якщо } x>3. \end{cases}$	**20**	$f(x)=\begin{cases} 2x+4, \text{ якщо } x\le -1; \\ x, \text{ якщо } -1\le x<1; \\ 2x-1, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$
6	$f(x)=\begin{cases} -4x+1, \text{ якщо } x<0; \\ 2x, \text{ якщо } 0\le x<2; \\ 2+x, \text{ якщо } x\ge 2. \end{cases}$	**21**	$f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ якщо } x<1; \\ 3x-2, \text{ якщо } 1\le x<2; \\ x+2, \text{ якщо } x\ge 2. \end{cases}$
7	$f(x)=\begin{cases} -x+1, \text{ якщо } x<-1; \\ x+3, \text{якщо } -1\le x<0; \\ 3x, \text{ якщо } x\ge 0. \end{cases}$	**22**	$f(x)=\begin{cases} 3x+6, \text{ якщо } x<-1; \\ 3-2x, \text{ якщо } -1\le x<2; \\ -1, \text{ якщо } x\ge 2. \end{cases}$
8	$f(x)=\begin{cases} -2x, \text{ якщо } x\le 0; \\ x-2, \text{ якщо } 0\le x<4; \\ 2, \text{ якщо } x\ge 4. \end{cases}$	**23**	$f(x)=\begin{cases} -2, \text{ якщо } x\le -1; \\ x-1, \text{ якщо } -1<x<1; \\ 5-x, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$
9	$f(x)=\begin{cases} -1+x, \text{ якщо } x\le 0; \\ 2x, \text{ якщо } 0<x\le 3; \\ x+3, \text{ якщо } x>3. \end{cases}$	**24**	$f(x)=\begin{cases} 2x+8, \text{ якщо } x<-2; \\ 2-2x, \text{ якщо } -2\le x<2; \\ x-1, \text{ якщо } x\ge 2. \end{cases}$
10	$f(x)=\begin{cases} -3x-2, \text{ якщо } x<-1; \\ x^2, \text{ якщо } -1\le x<1; \\ 2x, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$	**25**	$f(x)=\begin{cases} x+3, \text{ якщо } x\le 0; \\ 4-x, \text{ якщо } 0<x<2; \\ 2, \text{ якщо } x\ge 2. \end{cases}$

11	$f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ якщо } x<0;\\ x+2, \text{ якщо } 0\le x<1;\\ 3x, \text{ якщо } x\ge 1.\end{cases}$	**26**	$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ якщо } x\le -2;\\ 5-x, \text{ якщо } -2<x\le 1;\\ 4x, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$
12	$f(x)=\begin{cases}3x, \text{ якщо } x\le -1;\\ x+1, \text{ якщо } -1<x\le 2;\\ 5-x, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$	**27**	$f(x)=\begin{cases}3x+1, \text{ якщо } x<0;\\ x^2, \text{ якщо } 0\le x\le 1;\\ 1, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$
13	$f(x)=\begin{cases}x+4, \text{ якщо } x\le -1;\\ 2-x, \text{ якщо } -1<x\le 1;\\ x-3, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$	**28**	$f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ якщо } x\le 1;\\ 3x, \text{ якщо } 1<x\le 2;\\ 2-x, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$
14	$f(x)=\begin{cases}4x, \text{ якщо } x\le 1;\\ 5-x, \text{якщо} 1<x<2;\\ x-2, \text{ якщо } x\ge 2.\end{cases}$	**29**	$f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ якщо } x<0;\\ x^2, \text{ якщо } 0\le x<2;\\ 4, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$
15	$f(x)=\begin{cases}-2+x, \text{ якщо } x\le -1;\\ x^3, \text{ якщо } -1<x<0;\\ 2x, \text{ якщо } x\ge 0.\end{cases}$	**30**	$f(x)=\begin{cases}3-x, \text{ якщо } x\le 0;\\ x-1, \text{ якщо } 0<x<4;\\ 3, \text{ якщо } x\ge 4.\end{cases}$

ЗАВДАННЯ 3. Границя функції

Знайти границі функцій.

Варіант 1

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}+2}{3x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{tg^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+5}\right)^{2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}$; 7) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{ctgx}$.

Варіант 2

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x^2-5x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 x}{1-\cos 4x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{2-3x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}-\sqrt[3]{x^6+1}}{2x^2+4}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\cdot tg 3x}$.

Варіант 3

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-10x^2+1}{10x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot tg 2x}{arctg^2 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{2x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x}$.

Варіант 4

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2}{0{,}1x^4-x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x\cdot tg 2x}{arctg^2 8x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{2}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+24}-\sqrt[3]{12x-9}}{\sqrt{x+1}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin 2x}}$.

Варіант 5

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 11x}{1-\cos x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{5x+2}-3}{1-\sqrt{x-4}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2\cos 3x}{tgx}}$.

Варіант 6

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)(x+3)}{2x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x-32}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}}{x-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin 12x}{tg^2 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)^{\frac{1}{x^2+x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Варіант 7

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-7}{3x^3+4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+22}-5}{\sqrt{x+1}-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x}{\sin 7x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x+4}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{3x^2-1}{1-x^2}}$.

Варіант 8

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+5}{0{,}1x^2-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+5x-14}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot ctg 2x)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{2-3x}\right)^{\frac{1}{2x^2+4x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos 3\pi x}{tg^2\pi x}$.

Варіант 9

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x-9}{0{,}2x^3-2x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-x-30}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{26-x}-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2+x-56}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos 2x}\right)^{ctg^2 2x}$.

Варіант 10

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x-5}{\sqrt{x^7+x^4-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{tg^2\frac{x}{2}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2+1}{1-3x^2}\right)^{\frac{4}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1+\cos 3\pi x}{\sin^2\pi x}$.

Варіант 11

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x-9}{x^3+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-2x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2-x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot(1-\cos 2x)}{x\cdot\sin^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{tg\pi x}}$.

Варіант 12

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+3x^2+3x^4}{(2+3x)(1+2x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{4-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2\cdot\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+4}{3x+4}\right)^{\frac{1}{5x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\ln(1-4\sin x)}$.

Варіант 13

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+7}{(x+2)(4x+1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-5x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin 3x}{x\cdot tg 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{x^3}{5}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^3-2x-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{e^{2x}-1}$.

Варіант 14

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+1}{2-7x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+6x+9}{9-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin^2 x}{x\cdot tg2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-5x^2+25x-125}{x^3-5x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{e^{4x}-1}$.

Варіант 15

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x}{x^2+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}-x}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg(3x)^2}{5x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-x^2}{7-x^2}\right)^{3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9+2x^2}-x}{2x-\sqrt{x^2+27}}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{\cos7x-\cos3x}$.

Варіант 16

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+3x-14}{3x^2-x-10}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{1-\cos2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}(1+6x)^{\frac{2}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{e^{x^2}-1}$.

Варіант 17

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2-48}{2x^2+3x-44}$; 3) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2-9x}{\sqrt{x+7}-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{4x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-4x}{2-4x}\right)^{\frac{1+3x^2}{x+2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{10-x}-\sqrt{9x}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{1+3x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{\sin^3 2x}$.

Варіант 18

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+11x^2}{7x-4x^3+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-2x-21}{9-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-1}{x\cdot tg5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5-2x}{5+3x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{3-\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[3]{6+x}-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin\frac{\pi x}{2}}$.

Варіант 19

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x-x^3}{1-x-x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2-2x-33}{x^2-9}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3x}{2x-\sqrt{x^2+27}}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-2x}{11-2x}\right)^{\frac{1+3x^2}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4+2x-x^3}{x^3+x^2-12}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$.

Варіант 20

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{tg\left(x^2-2x\right)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{5x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-2}{x^2+3x-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

Варіант 21

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+7x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{10-x}-\sqrt{9x}}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\left(x^2+3x\right)}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+3}\right)^{1+x}$; 6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{4x}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

Варіант 22

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^3+3x^2-4x-1}{x^2+x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{1+3x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin x}{2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{x^3}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$; 7) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Варіант 23

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x}{11-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{\sqrt{x^2+5}-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{tg 2x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3-1}{3x^3-4}\right)^{5x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx$.

Варіант 24

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-4}{3+5x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-17x+72}{x^2-8x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{6-\sqrt{x^2+11}}{x^2-25}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 3x}{x\cdot\sin 4x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{7}{3x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4+7x^2-5x-4}{x^3+x-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(1+ctgx\right)^{\frac{1}{2\cos x}}$.

Варіант 25

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-13x+40}{x^2-64}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^3 2x}{x^2\cdot\sin 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt[3]{4x+15}}{\sqrt[3]{3x-10}+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2x^2-1}{\sin^2 x}}$.

Варіант 26

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x-2x^3}{6-3x+5x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-64}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+2x}{tg5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^2+3x-10}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^3 2x-1}{\sin 4x}$.

Варіант 27

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-4}{3x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-6x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\arcsin(x-2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+7}\right)^{\frac{x^2+3}{2x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\cos\pi x-\sin\pi x}{tg4\pi x}$.

Варіант 28

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+8x^3-3x^4}{x^5+2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x^2-7x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{3x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{5x^2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x-1}{x^3+x^2+5x-7}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

Варіант 29

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^2}{5+8x^3-3x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x^2-12x+35}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctgx}{\sin^2\frac{x}{3}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{6x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-3}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{\sqrt[3]{21x-20}-\sqrt[3]{-5x+6}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+arctg\,2x)}{\sqrt{1+8x}-1}$

Варіант 30

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x^2}{3x^2-2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x^2-11x+28}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10}-\sqrt{x^2-3}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg\,4x}{1-\cos 4x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+3x^2}{4-x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^3+x-10}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(2x)}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Завдання 1. Знайти область визначення функції:

а) $y=\dfrac{5x-2}{4-x}$;

б) $y=9-\sqrt{4+7x}$;

в) $y=\lg(1-3x)+\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Розв’язання

Процес знаходження ОДЗ можна розбити на кроки:

1 Записати елементарні функції, з яких складається задана функція.

2 Скласти у вигляді системи рівностей і нерівностей області визначення кожної елементарної функції. Область допустимих значень елементарних функцій подані в додатку А.

3 Розв’язати отриману систему.

4 Розв’язок системи є областю визначення даної функції.

а) задана дробово-раціональна функція $y=\dfrac{5x-2}{4-x}$. Оскільки вираз у знаменнику дробу не може дорівнювати нулю, то для знаходження ОДЗ:

1) прирівнюємо знаменник до нуля: $4-x=0$;

2) розв’язуємо отримане рівняння: $x=4$;

3) записуємо відповідь, виключивши отриману точку з проміжку $(-\infty;+\infty)$.

Відповідь: $D(y)=\{x: x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty)\}$;

б) функція $y=9-\sqrt{4+7x}$ містить змінну під знаком квадратного кореня. Вираз під знаком квадратного кореня не може бути від’ємним, тому:

1) складаємо нерівність $4+7x\ge 0$;

2) розв’язуємо отриману нерівність $x\ge -\dfrac{4}{7}$.

Відповідь: $D(y)=\left\{x: x\in\left[-\dfrac{4}{7};+\infty\right)\right\}$;

в) $y=\lg(1-3x)+\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1) ця функція являє собою суму двох функцій: $y_1=\lg(1-3x)$ і $y_2=\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$;

2) оскільки $D(y_1)=\{x: 1-3x>0\}$, $D(y_1)=\left\{x: -1\le\dfrac{x}{2}\le 1\right\}$, то система нерівностей для визначення ОДЗ має вигляд:

$$\begin{cases}1-3x>0,\\ -1\le\dfrac{x}{2}\le 1;\end{cases}\Rightarrow\ \Rightarrow\begin{cases}x<\dfrac{1}{3},\\ -2\le x\le 2;\end{cases}\Rightarrow -2\le x<\dfrac{1}{3}.$$

Відповідь: $D(y)=\left\{x: x\in\left[-2;\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

Завдання 2

Завдання 2.1. Дослідити функцію $f(x)$ на неперервність. Побудувати графік функції.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x, & x<-3;\\ \frac{1}{2}x+\frac{7}{2}, & -3\le x\le 1;\\ 2x+2, & x>1.\end{cases}$$

Розв'язання

Обчислюємо ліву і праву границі функції при $x\to-3$, а також значення функції в цій точці:

$$\lim_{x\to-3-0} f(x)=\lim_{x\to-3-0}\left(\frac{1}{3}x\right)=-1;$$

$$\lim_{x\to-3+0} f(x)=\lim_{x\to-3+0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)=2;$$

$$f(-3)=\left.\left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)\right|_{x=-3}=2.$$

Отримаємо $\lim\limits_{x\to-3-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-3+0} f(x)$. Отже, точка $x=-3$ є точкою розриву першого роду.

Аналогічно розглянемо точку $x=1$:

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)=4;$$

$$\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}(2x+2)=4;$$

$$f(1)=\left.\left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)\right|_{x=1}=4;$$

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1+0} f(x)=f(1)=4.$$

Отже, у точці $x=1$ функція неперервна.

Побудуємо графік функції (рисунок 1).

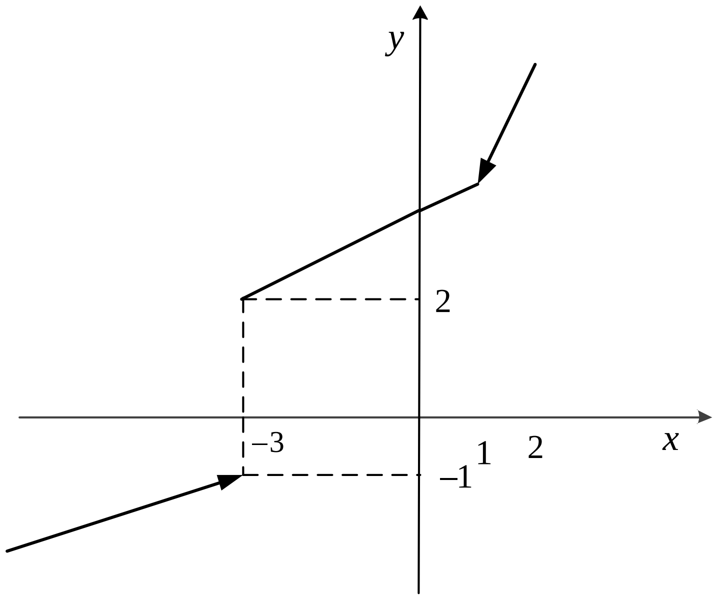


Рисунок 1 – Графік функції завдання 2.1

Відповідь: $x=-3$ – точка розриву першого роду (стрибок).

Завдання 2.2. Дослідити функцію $y=3^{\frac{1}{x-2}}$ на неперервність.

Розв'язання

Враховуючи, що $D(y)=\{x: x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)\}$, то $x=2$ – точка розриву.

Обчислюємо ліву границю:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}}=\left[3^{-\infty}=\frac{1}{3^{+\infty}}\right]=0.$$

Обчислюємо праву границю:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}}=\left[3^{+\infty}\right]=+\infty.$$

Оскільки одна з границь дорівнює ∞, $x=2$ - точка розриву другого роду.

Побудуємо схематичний графік функції $y=3^{\frac{1}{x-2}}$ (рисунок 2).

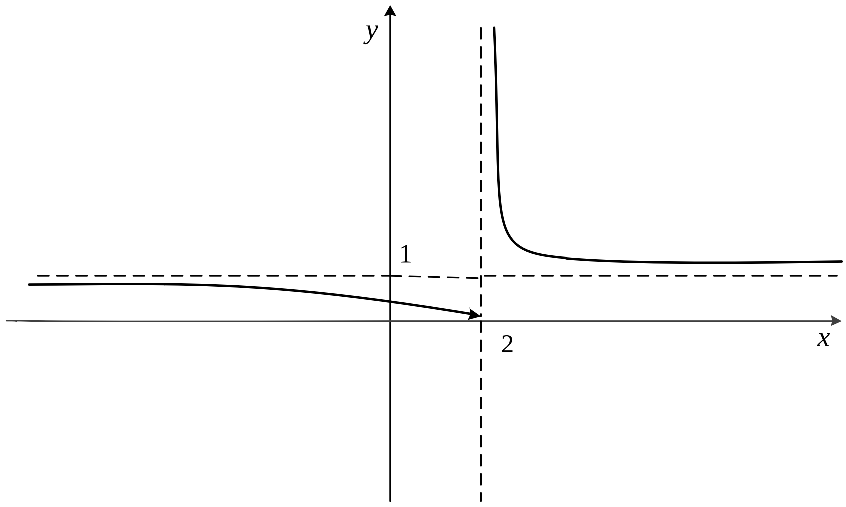


Рисунок 2 – Графік функції завдання 2.2

Відповідь: $x=2$ - точка розриву другого роду.

Завдання 3. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x^2}{3x^2+3x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-2x-15}$; 3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3-x}-2}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4tg^2 3x}{1-\cos 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{3+x}\right)^{\frac{x^2-1}{x-5}}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+8}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}$.

Розв'язання

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5-2x^2}{3x^2+3x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}5-2x^2\underset{x\to\infty}{\sim}\left(-2x^2\right),\\ 3x^2+3x-1\underset{x\to\infty}{\sim}3x^2\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $-\frac{2}{3}$;

2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{x^2-2x-15}=\left[\frac{(-3)^2+3\cdot(-3)}{(-3)^2-2\cdot(-3)-15}=\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{x^2-2x-15}=\left|\begin{array}{l} ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \\ \textit{де } x_1, x_2 - \textit{корені квадратного рівняння} \\ ax^2+bx+c=0. \\ x^2-2x-15=(x+3)(x-5) \end{array}\right|=$$

$$=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x(x+3)}{(x+3)(x-5)}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x}{x-5}=\frac{3}{8}.$$

Відповідь: $\frac{3}{8}$;

3) для розв'язання цього завдання необхідно скористатися формулами скороченого множення

$$\begin{array}{l} (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2, \\ a^2-b^2=(a-b)(a+b), \\ a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right). \end{array}$$

Позбудемося ірраціональності в чисельнику, домноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз до чисельника:

$$\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2}{x^2-1}=\left[\frac{\sqrt{3-(-1)}-2}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{3-x}-2\right)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-2^2}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{3-x-4}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}=$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-x-1}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3-x}+2\right)} = \lim_{x \to -1} \frac{-(x+1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3-x}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-1}{(x-1)\left(\sqrt{3-x}+2\right)} = \frac{-1}{(-1-1)\left(\sqrt{3-(-1)}+2\right)} = \frac{1}{8}.$$

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

4) для обчислення границі функції необхідно використовувати першу важливу границю

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

та еквівалентні співвідношення (додаток Б):

$$\lim_{x \to 0} \frac{4tg^2 3x}{1-\cos 2x} = \left[\frac{4tg^2(3 \cdot 0)}{1-\cos(2 \cdot 0)} = \frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{4\mathrm{tg}^2 3x}{2\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} tg^2 3x \underset{x \to 0}{\sim} 9x^2, \\ \sin^2 x \underset{x \to 0}{\sim} x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot 9x^2}{x^2} = 18.$$

Відповідь: 18;

5) для обчислення границі функції необхідно використовувати другу важливу границю

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ або } \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

та еквівалентні співвідношення (додаток А).

Для розкриття такої невизначеності потрібно представити основу степеня у вигляді $(1+\alpha(x))$, а в показнику степеня виділити множник $\dfrac{1}{\alpha(x)}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3+x}\right)^{\frac{x^2-1}{x-5}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{3+x}-1\right)^{\frac{x^2-1}{x-5}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2-3-x}{3+x}\right)^{\frac{x^2-1}{x-5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3+x}\right)^{\frac{x^2-1}{x-5}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{3+x}\right)^{\frac{3+x}{-5}}\right]^{\frac{-5}{3+x}\cdot\frac{x^2-1}{x-5}}=$$

$$=\left|\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3+x}\right)^{\frac{3+x}{-5}}=e\right|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-5}{3+x}\cdot\frac{x^2-1}{x-5}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2+5}{x^2-2x-15}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}-5x^2+5\underset{x\to\infty}{\sim}-5x^2,\\ x^2-2x-15\underset{x\to\infty}{\sim}x^2\end{array}\right|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2}{x^2}}=e^{-5}.$$

Відповідь: e^{-5};

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+8}-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+2\sqrt[3]{x+8}+2^2\right)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{x+8}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+2\sqrt[3]{x+8}+2^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(\sqrt{x+4}\right)^2-2^2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+2\sqrt[3]{x+8}+2^2\right)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^3-2^3\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+4-4)\left(\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+8} + 4\right)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)(x+8-8)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+8} + 4}{\sqrt{x+4}+2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4}{\sqrt{4}+2} = 3.$$

Відповідь: 3;

7) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} \sin 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x, \\ \ln(1+3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Визначення границі функції.

2 У чому полягає геометричний зміст границі функції в точці?

3 Які величини називаються нескінченно малими?

4 Які величини називаються нескінченно великими?

5 Властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин.

6 Які нескінченно малі величини називаються еквівалентними?

7 Перша важлива границя.

8 Наслідки першої важливої границі.

9 Друга важлива границя.

10 Наслідки другої важливої границі.

11 Визначення неперервності функції в точці.

12 Який розрив називається розривом першого роду?

13 Який розрив називається розривом другого роду?

14 Класифікація точок розриву.

15 Визначення неперервної функції в точці, на інтервалі.

Тестові завдання для самоконтролю

Обчислити границі функцій:

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{5x-4}$

А	Б	В	Г	Д
3	-3	$\dfrac{1}{3}$	0,4	інша відповідь

2 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{3x+9}$

А	Б	В	Г	Д
2	-1	-2	0	інша відповідь

3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$

А	Б	В	Г	Д
-1	2	$-\dfrac{1}{7}$	7	інша відповідь

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$

А	Б	В	Г	Д
-1,5	2	$-\dfrac{1}{3}$	0	інша відповідь

5 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)\sqrt{1-x}}{9-x^2}$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{3}$	2	$-\dfrac{1}{3}$	0	інша відповідь

6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$

А	Б	В	Г	Д
0	-1	4	-4	інша відповідь

7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$

А	Б	В	Г	Д
0,4	-0,4	0	5	інша відповідь

8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$

А	Б	В	Г	Д
0	3	4	0,75	інша відповідь

9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{arctg\,4x}$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{24}$	$-\dfrac{1}{24}$	0,75	-0,75	інша відповідь

10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x^2}$

А	Б	В	Г	Д
1,5	-1,5	0	$\dfrac{9}{4}$	інша відповідь

11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{1-\cos 5x}$

А	Б	В	Г	Д
2	-2	0	4	інша відповідь

12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg 11x}$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{6}{11}$	$-\dfrac{6}{11}$	0	4	інша відповідь

13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(3x+1)}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	2	інша відповідь

14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+\sin 6x}{\sin 9x-\sin 5x}$

А	Б	В	Г	Д
3,5	– 3,5	0	14	інша відповідь

15 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^3+2x^2-7x+3}{8x^3-x+1}$

А	Б	В	Г	Д
1,5	$\frac{5}{8}$	0	3	інша відповідь

16 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+4}}$

А	Б	В	Г	Д
1,5	0,5	0	3	інша відповідь

17 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

А	Б	В	Г	Д
1	-1	0	2	інша відповідь

18 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

А	Б	В	Г	Д
1	e^3	e^6	e^2	інша відповідь

19 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2-x}{x}}$

А	Б	В	Г	Д
1	e^3	e^6	e^{-2}	інша відповідь

20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2+4}\right)^{x+2}$

А	Б	В	Г	Д
∞	e^3	e^2	0	інша відповідь

21 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2+4}\right)^{\frac{2x+1}{x+7}}$

А	Б	В	Г	Д
0	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{2}{3}$	e^2	інша відповідь

22 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\right)^{2x^2+5}$

А	Б	В	Г	Д
∞	e^{10}	e^{-8}	e^2	інша відповідь

23 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{2}{\cos x}}$

А	Б	В	Г	Д
1	e^2	2	$\dfrac{\pi}{2}$	інша відповідь

24 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin(1+x)}{x^2-1}$

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	e^3	інша відповідь

25 Функція $f(x)$ в точці x_0 має розрив I роду (усувний розрив), якщо:

А)	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ мають скінченні значення, причому $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$
Б)	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ мають скінченні значення, причому $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$
В)	хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ дорівнює нескінченності або не існує
Г)	інша відповідь

26 Функція $f(x)$ в точці x_0 має розрив I роду (стрибок), якщо:

А)	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ мають скінченні значення, причому $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$
Б)	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ мають скінченні значення, причому $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$
В)	хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ дорівнює нескінченності або не існує
Г)	інша відповідь

27 Функція $f(x)$ в точці x_0 має розрив II роду, якщо:

А)	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ мають скінченні значення, причому $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$
Б)	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ мають скінченні значення, причому $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$

В)	хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ дорівнює нескінченності або не існує
Г)	інша відповідь

28 Функція $f(x)=\dfrac{sin5x}{x}$ в точці $x=0$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

29 Функція $f(x)=\dfrac{3x}{x-3}$ в точці $x=3$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

30 Функція $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x^2}$ в точці $x=0$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

31 Функція $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ в точці $x=2$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

32 Функція $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\le -1\\ x^2, \quad x>-1\end{cases}$ в точці $x=-1$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок, величина якого дорівнює 2)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив першого роду (стрибок, величина якого дорівнює 1)	інша відповідь

33 Функція $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\le -1\\ x^2, \quad x>-1\end{cases}$ в точці $x=0$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок, величина якого дорівнює 2)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив першого роду (стрибок, величина якого дорівнює 1)	інша відповідь

34 Функція $f(x)=5^{\frac{2}{x-6}}$ в точці $x=-1$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

35 Функція $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-9}$ в точці $x=3$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

36 Функція $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-9}$ в точці $x=0$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

37 Функція $f(x)=\frac{x^3-27}{x-3}$ в точці $x=3$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

38 Функція $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x}$ в точці $x=0$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

39 Функція $f(x)=\begin{cases} 2, & x\le 0 \\ 2-x, & 0<x\le 2 \\ x^2+1, & x>2 \end{cases}$ в точці $x=0$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

40 Функція $f(x)=\begin{cases} 2, & x\le 0 \\ 2-x, & 0<x\le 2 \\ x^2+1, & x>2 \end{cases}$ в точці $x=2$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

41 Функція $f(x)=\begin{cases}2, & x\le 0\\ 2-x, & 0<x\le 2\\ x^2+1, & x>2\end{cases}$ в точці $x=3$:

А	Б	В	Г	Д
неперервна	має розрив першого роду (стрибок)	має розрив першого роду (усувний розрив)	має розрив другого роду	інша відповідь

42 Визначити точки розриву функції $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2x}$.

А	Б	В	Г	Д
$x_1=2$	$x_1=1,\ x_2=0$	точки розриву відсутні	$x_1=-2$, $x_2=0$	інша відповідь

43 Визначити точки розриву функції $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x^2+3x-10}$ та вказати їхній тип:

А	Б	В	Г	Д
$x_1=-2,\ x_1=5$ - точки усувного розриву	$x_1=1$ - точка розриву другого роду	$x_1=5$ - точка усувного розриву	$x_1=2,\ x_1=-5$ - точки розриву другого роду	$x_1=2,\ x_1=-5$ - точки усувного розриву

44 Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ і дослідити їхній характер:

А	Б	В	Г	Д
$x = 3$ - точка розриву першого роду	$x = 1$ - точка розриву першого роду	$x = 3$ - точка розриву другого роду	точки розриву відсутні	інша відповідь

45 Знайти точки розриву функції $y = \frac{\sin x}{x}$ і дослідити їх характер:

А	Б	В	Г	Д
$x = 0$ - точка розриву першого роду	$x = 1$ - точка розриву першого роду	$x = 0$ - точка розриву другого роду	точки розриву відсутні	інша відповідь

46 Знайти точки розриву функції $y = \frac{1}{x^2 - 9}$ і дослідити їхній характер:

А	Б	В	Г	Д
$x = \pm 3$ - точки розриву першого роду	$x = \pm 1$ - точки розриву першого роду	$x = \pm 3$ - точки розриву другого роду	точки розриву відсутні	інша відповідь

47 Знайти точки розриву функції $y = arctg\left(\frac{1}{x - 2}\right)$ і дослідити їхній характер:

А	Б	В	Г	Д
$x = 2$ - точка розриву першого роду	$x = 0$ - точка розриву першого роду	$x = 2$ - точка розриву другого роду	точки розриву відсутні	інша відповідь

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Київ : А.С.К., 2001. 648 с.

2 Вища математика : збірник задач : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик та ін. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.

3 Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне інтегральне числення / П. П. Овчинніков, Ф. П.Яремчук, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчинікова. Київ : Техніка, 2003. 600 с.

4 Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навч. посібник для техн. вузів. Ч. 1 : Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі Київ : Книги України ЛТД, 2009. 578 с.

5 Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навч. посібник для вищих навч. закладів. 2-ге вид., випр. та допов. Львів : Магнолія 2006, 2015. 342 с.

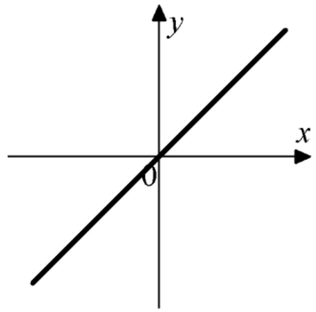
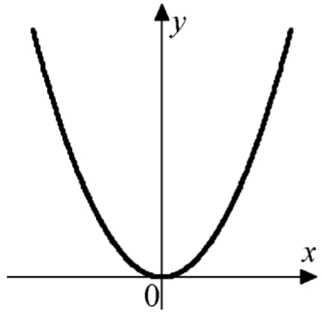
6 Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. Москва : Астрель; АСТ, 2001. 656 с.

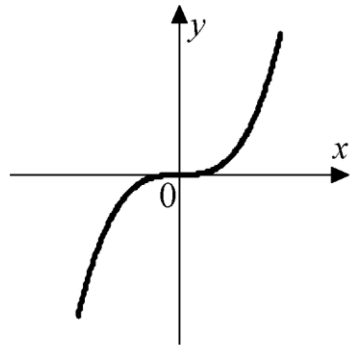
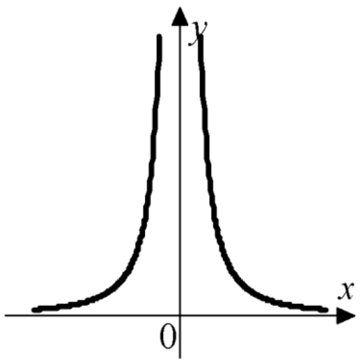
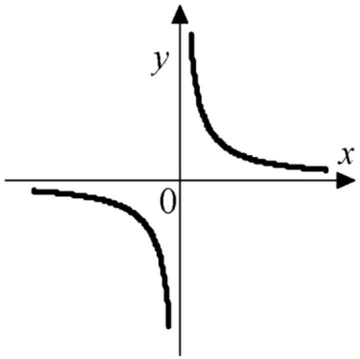
7 Юрчак Н. С., Волохова Н. І., Панченко Н. Г. Завдання до контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» для студ. факультета ОПУТ заочної форми навчання. Харків : УкрДАЗТ, 2009. Ч. 1. 50 с.

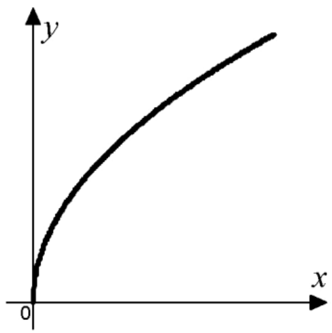
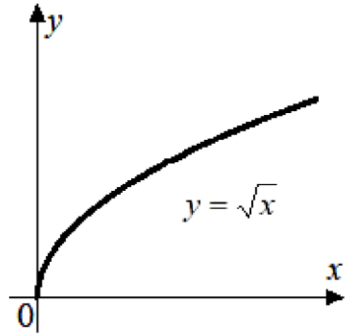
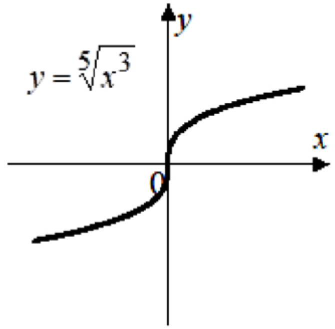
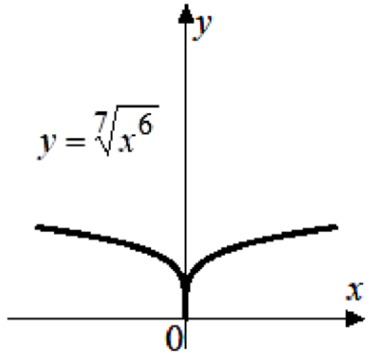
8 Єфременко Р. О., Резуненко М. Є., Рибалко А. П. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Ряди. Ч. І: Завдання та робочий зошит для виконання контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» студентами спеціальності «Організація перевезень та управління на транспорті (залізничний транспорт)» заочної форми навчання. Харків : УкрДАЗТ, 2009. 30 с.

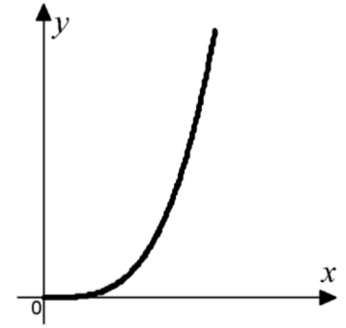
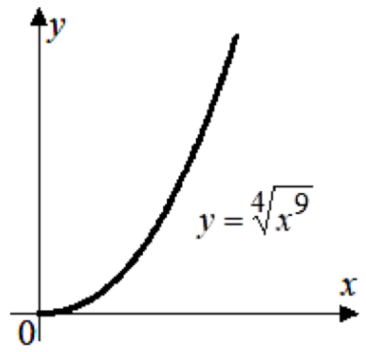
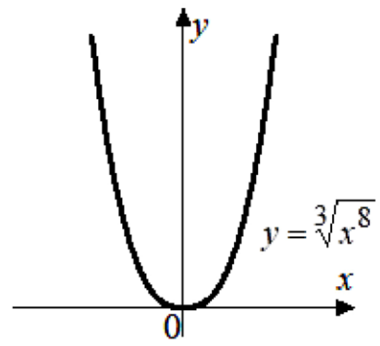
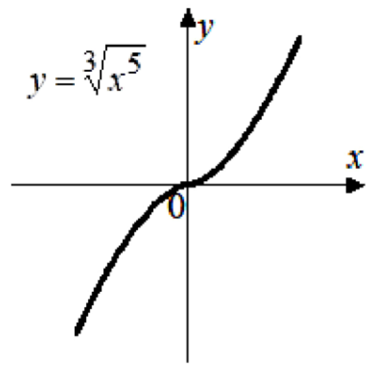
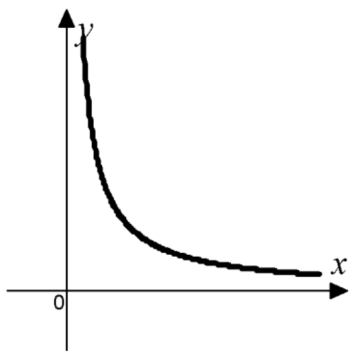
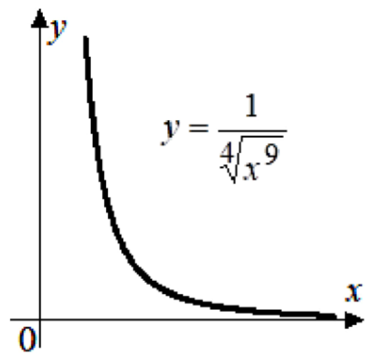
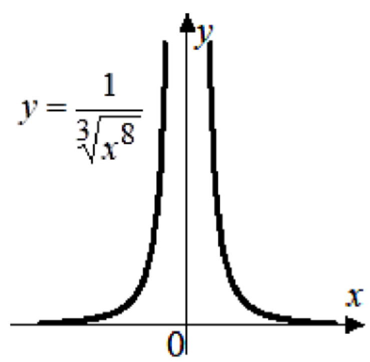
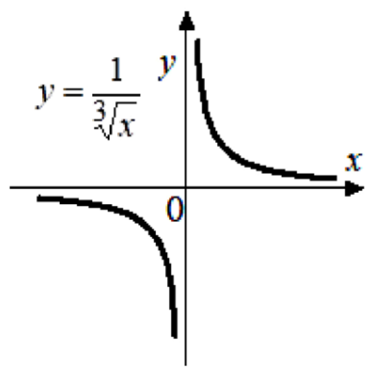
9 Давидов Р. М., Науменко В. В. Вступ до математичного аналізу : метод. вказівки і завдання до контрольної роботи з розділу дисципліни «Вища математика» для студ. інженерно-технічних спеціальностей заочної форми навчання. Харків : ХарДАЗТ, 2000. 55 с.

ДОДАТОК А
Графіки елементарних функцій

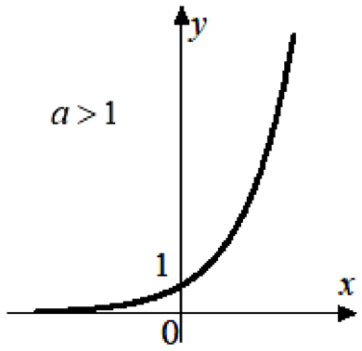
Степенева функція $y = x^p$, $p \in R$		
$p = 1$		Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. Множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$. Функція непарна. $(0;0)$ - точка перетину з вісями координат. Точок екстремуму, точок перегину і асимптот нема
$p = 2,4,6...$ - парне додатне число		Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. Множина значень $E(f)$: $y \in [0; +\infty)$. Функція парна. $(0;0)$ - точка перетину з осями координат і точка мінімуму функції. Асимптот і точок перегину нема

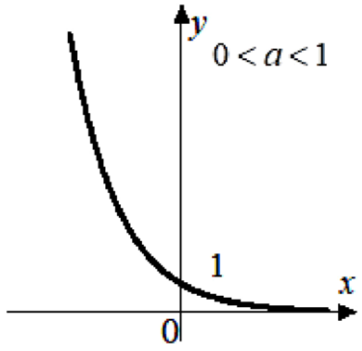
$p=1,3,5...$ - непарне додатне число		Область визначення $D(f)$: $x\in(-\infty;+\infty)$. Множина значень $E(f)$: $y\in(-\infty;+\infty)$. Функція непарна. $(0;0)$ - точка перетину з осями координат і точка перегину графіка функції. Асимптот і точок екстремуму нема
$p=-2,-4,-6...$ - парне від'ємне число		Область визначення $D(f)$: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Множина значень $E(f)$: $y\in(0;+\infty)$. Функція парна. Точок перетину з осями координат, точок екстремуму і точок перегину нема. $y=0, x=0$ - асимптоти графіка функції
$p=-1,-3,-5...$ - непарне від'ємне число		Область визначення $D(f)$: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Множина значень $E(f)$: $y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Функція непарна. Точок перетину з осями координат, точок екстремуму і точок перегину нема. $y=0, x=0$ - асимптоти графіка функції

<table>
<tr>
<td>$p=\dfrac{m}{n}, 0<\dfrac{m}{n}<1$</td>
<td>Область визначення та множина значень степеневої функції $y=\sqrt[n]{x^m}$ залежать від значення показника степеня p.
Якщо функція парна, то вона продовжується симетрично відносно осі OY.
Якщо функція непарна, то вона продовжується симетрично відносно початку координат</td>
</tr>
<tr>
<td>І чверть
</td>
<td>  </td>
</tr>
<tr>
<td>$p=\dfrac{m}{n},\ \dfrac{m}{n}>1$</td>
<td>Область визначення та множина значень степеневої функції $y=\sqrt[n]{x^m}$ залежать від значення показника степеня p.
Якщо функція парна, то вона продовжується симетрично відносно осі OY.
Якщо функція непарна, то вона продовжується симетрично відносно початку координат</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>I чверть
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$p=\frac{m}{n},\ \frac{m}{n}<0$</td>
<td colspan="3">Область визначення та множина значень степеневої функції $y=\sqrt[n]{x^m}$ залежать від значення показника степеня p.
$y=0, x=0$ - асимптоти графіка функції.
Якщо функція парна, то вона продовжується симетрично відносно осі OY.
Якщо функція непарна, то вона продовжується симетрично відносно початку координат</td>
</tr>
<tr>
<td>I чверть
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

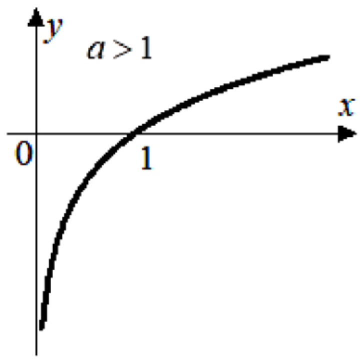


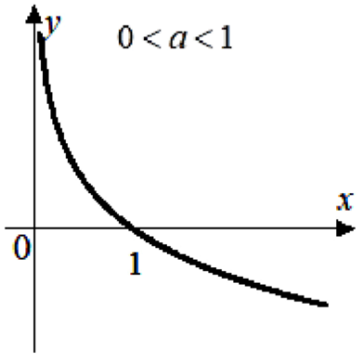


Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень $E(f)$: $y \in (0;+\infty)$.

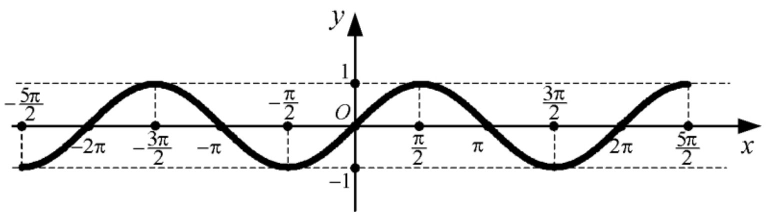
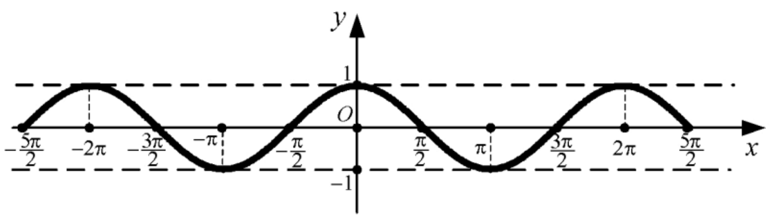
$(0;1)$ - точка перетину з осями координат.
Точок екстремуму і точок перегину нема.
$y = 0$ - асимптота графіка функції

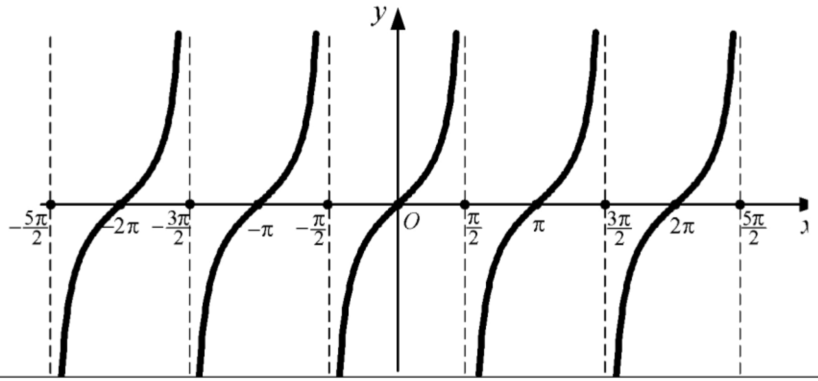
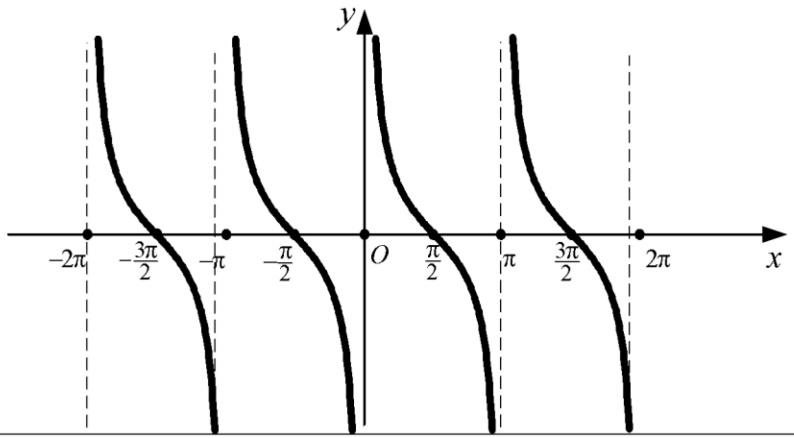
Логарифмічна функція $y = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

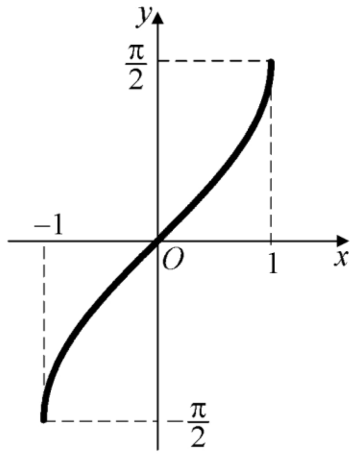
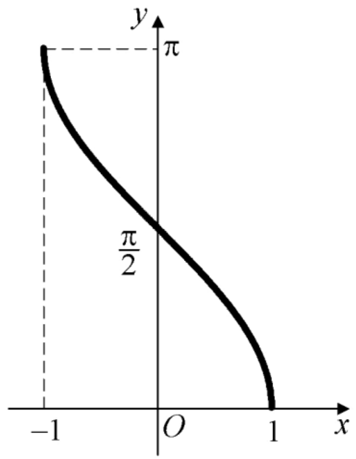


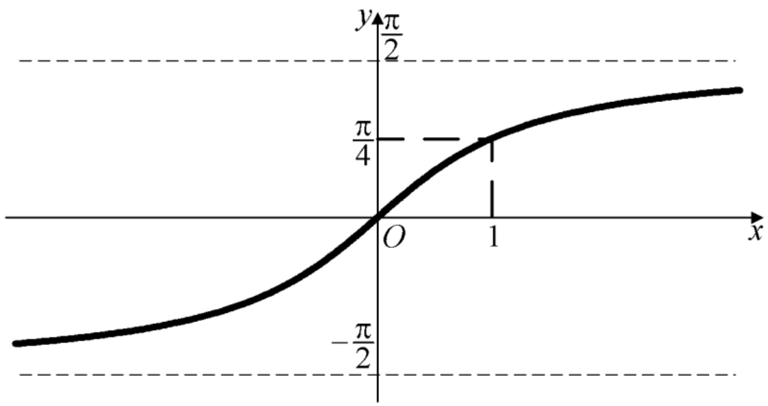
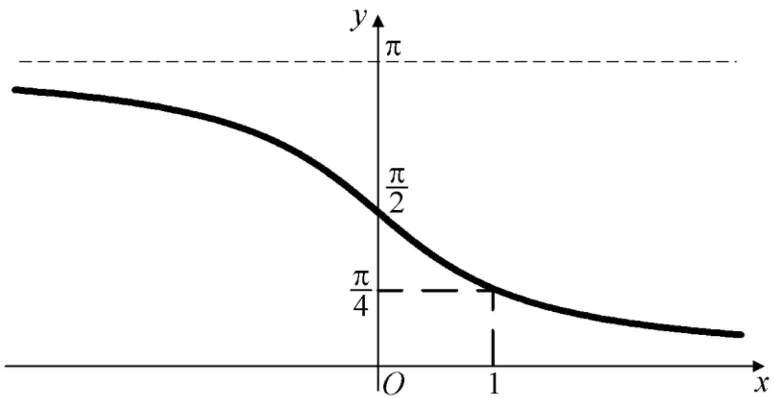


Область визначення $D(f)$: $x \in (0; +\infty)$.
Множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$.
$(1;0)$ - точка перетину з осями координат.
Точок екстремуму і точок перегину нема.
$x = 0$ - асимптота графіка функції

<table>
<tr><th colspan="2">Тригонометричні функції</th></tr>
<tr><td>$y = sin\, x$
</td><td>Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень $E(f)$: $y \in [-1; 1]$.
$(\pi k;0),\, k \in Z$ - точки перетину з вісями координат і точки перегину графіка функції.
$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right),\, k \in Z$ - точки максимуму функції.
$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -1\right),\, k \in Z$ - точки мінімуму функції.
Асимптот нема</td></tr>
<tr><td>$y = cos\, x$
</td><td>Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень $E(f)$: $y \in [-1; 1]$.
$\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z$ - точки перетину з осями координат і точки перегину графіка функції.
$(2\pi k, 1),\, k \in Z$ - точки максимуму функції.
$(-\pi + 2\pi k, -1),\, k \in Z$ - точки мінімуму функції.
Асимптот нема</td></tr>
</table>

$y = tgx$ 	Область визначення $D(f)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$. $(\pi k; 0), k \in Z$ - точки перетину з осями координат і точки перегину графіка функції. Точок екстремуму нема. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ - асимптоти графіка функції
$y = ctgx$ 	Область визначення $D(f)$: $x \neq \pi k, k \in Z$. Множина значень $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z$ - точки перетину з осями координат і точки перегину графіка функції. $x = \pi k, k \in Z$ - асимптоти графіка функції

Обернені тригонометричні функції	
$y = arc\sin x$ 	Область визначення $D(f): x \in [-1, 1]$. Множина значень $E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $(0;0)$ - точка перетину з осями координат і точка перегину графіка функції. Точок екстремуму і асимптот графіка функції нема
$y = arc\cos x$ 	Область визначення $D(f): x \in [-1, 1]$. Множина значень $E(f): y \in [0, \pi]$. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ і $(1;0)$ - точки перетину з осями координат. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ - точка перегину графіка функції. Точок екстремуму і асимптот графіка функції нема

$y = arctgx$ 	Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. Множина значень $E(f)$: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $(0;0)$ - точка перетину з осями координат і точка перегину графіка функції. Точок екстремуму нема. $y = \pm\frac{\pi}{2}$ - асимптоти графіка функції
$y = arcctgx$ 	Область визначення $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. Множина значень $E(f)$ $y \in (0;\pi)$. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ - точка перетину з осями координат і точка перегину графіка функції. Точок екстремуму нема. $y = 0$ і $y = \pi$ - асимптоти графіка функції

ДОДАТОК Б
Таблиця еквівалентних величин

Наслідки першої важливої границі	Наслідки другої важливої границі
$\sin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $tg\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $arctg\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $1-\cos\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \frac{\alpha^2(x)}{2}$	$e^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $\ln(1+\alpha(x)) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$, $\log_a(1+\alpha(x)) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \frac{\alpha(x)}{\ln a}$, $a^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)\cdot\ln a$, $(1+\alpha(x))^n-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} n\alpha(x)$