УДК 539.12; 539.17

НЕПРОТИВОРЕЧИВАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЫСОКОСПИНОВЫХ БОЗОНОВ С ДВУМЯ БЕССПИНОВЫМИ ЧАСТИЦАМИ I. ТЕНЗОРНАЯ СТРУКТУРА ТОКОВ

Е.В. Рыбачук
Укринская Государственная Академия Железнодорожного Транспорта.
61050, Украина, г. Харьков, пл. Фейербаха, 7, e-mail: Kulish@kart.edu.ua
Поступила в редакцию 4 октября 2006 г.

Предложены токи взаимодействия высокоспинового бозона $(J \geq 1)$ с двумя бесспиновыми частицами в непротиворечивой модели. Получены в явном виде токи взаимодействий для спина $J = 1,2,3,4$. Непротиворечивость модели определяется двумя теоремами. Согласно одной из них тензоры токов должны быть бесследовыми и сохраняющимися, так же как и полевые тензоры высокоспиновых бозонов (ВБ). Поэтому системы уравнений для компонентов полей ВБ совместны. Согласно второй теореме токи должны содержать скалярную функцию, которая обеспечивает сходимость двойных интегралов по компонентам импульсов ВБ. При этом подынтегральные выражения являются модулями произведений тензоров токов на компоненты импульсов ВБ. Показано, что скалярная функция одной любой переменной (из трёх возможных переменных) приводит к расходимостям таких интегралов.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: высокий спин, бозон, интеграл, сходимость, взаимодействие, токи, совместность.

В настоящее время хорошо известно, что все адроны состоят из кварков и антикварков, т.е. не являются элементарными частицами. Вместе с тем, при описании реакций с участием нуклонов, пионов и других адронов можно достигнуть довольно хорошее согласие с опытом в моделях, в которых эти адроны рассматриваются как элементарные частицы. Такое описание достигнуто в областях малых, резонансных и промежуточных энергий, а также при довольно больших энергиях s и малых переданных импульсах t (на основе модели полюсов Редже). Следует отметить, что описание таких экспериментальных данных, в составных моделях, основанных на квантовой хромодинамике, сейчас практически невозможно и не может конкурировать с моделями, в которых нуклоны и пионы рассматриваются как элементарные частицы. Повышение точности вычислений амплитуд взаимодействий адронов, а также ядер в этих областях энергиий требует учёта вкладов высокоспиновых частиц, в том числе и высокоспиновых бозонов (ВБ). Вклады высокоспиновых частиц $(J \geq 1)$ изучаются с начала шестидесятых годов. Эти вклады учитываются по аналогии с вкладами низкоспиновых частиц ($J = 0$ и $1/2$). Известно несколько формализмов для описания высокоспиновых частиц [1, 2]. Вследствие простых трансформационных свойств тензоров при преобразованиях группы Лоренца наиболее часто используется формализм Рариты-Швингера. В рамках этого формализма изучались свободные поля с произвольным спином [3-8]. Поиски новых подходов к описанию свободных высокоспиновых полей продолжаются и в последнее время [9-12].

В связи с успехом теории электрослабых взаимодействий Глэшоу-Вайнберга –Салама появилась надежда построения перенормируемой теории взаимодействий высокоспиновых частиц на основе калибровочных теорий [13, 14]. Предполагается, что безмассовые высокоспиновые чатицы приобретут массу благодаря механизму Хиггса. В связи с большим количеством массивных высокоспиновых частиц ведутся поиски калибровочных групп с мультиплетами большой размерности. Особенностью калибровочных теорий взаимодействий высокоспиновых частиц является жесткая взаимосвязь масс и констант взаимодействий. Например, электрослабая теория предсказывает определённые значения магнитного и квадрупольного моментов W-бозона. Поскольку у существующих высокоспиновых адронов и ядер массы и константы взаимодействий имеют весьма различные значения, то построение теории взаимодействий высокоспиновых частиц на основе калибровочных теорий может оказаться проблематичным.

Для вычисления амплитуд взаимодействий высокоспиновых частиц, по аналогии с частицами со спином 0 и 1/2, нам необходимо знать правила Фейнмана, пропагаторы высокоспиновых частиц, а также вершинные функции (лагранжианы взаимодействий). Правила Фейнмана получены в [15], а пропагаторы можно представить в виде произведения пропагатора бесспиновой частицы на проекционный оператор высокоспиновой частицы [16,17]. Для ВБ со спином $J = l$ (где l - целое положительное число) этот проекционный оператор представляет собой тензор ранга $2l$, который содержит слагаемое с произведением $2l$ множителей p/M, где p и M - 4- импульс и масса ВБ.

Построение вершинной функции взаимодействия ВБ на первый взгляд не представляет большой трудности. Вершинная функция является инвариантом относительно преобразований группы Лоренца и представляет собой произведения полевого тензора ВБ $U(x)_{\mu_1...\mu_l}$ и тока взаимодействия $j(x)_{\mu_1...\mu_l}$ ($U(p)_{\mu_1...\mu_l}$ и $j(p)_{\mu_1...\mu_l}$ в импульсном представлении соответственно). Обычно на тензоры токов налагаются только условия симметрии по всем индексам. Подходы, в которых используются симметричные тензоры токов (без дополнительных условий), мы называем традиционными (или обычными). Традиционные подходы имеют недостатки, такие как: 1) несовместность уравнений; 2) степенные расходимости или энергетический рост амплитуд; 3) неоднозначности.

1) Несовместность уравнений. Предположим, что взаимодействия ВБ описываются неоднородными уравнениями Клейна-Гордона

$$(\Box + M^2)U(x)_{\mu_1...\mu_l} = j(x)_{\mu_1...\mu_l} \tag{1}$$

где $U(x)_{\mu_1...\mu_l}$ и $j(x)_{\mu_1...\mu_l}$ симметричные тензоры полей и токов, соответсвенно. В формализме Рарита-Швингера полевые тензоры для спина $J = l$ удовлетворяют условиям

$$\partial_{\mu_k} U(x)_{\mu_1...\mu_l} = 0, \tag{2}$$

$$g_{\mu_i \mu_k} U(x)_{\mu_1...\mu_l} = 0, \tag{3}$$

где $i, k = 1,2,...,l$. Вследствие этих условий тензор $U(x)_{\mu_1...\mu_l}$ имеет $2l+1$ независимых компонентов. Если тензор тока удовлетворяет только условию симметрии по индексам, то он имеет, как и любой полностью симметричный тензор ранга l в 4-х мерном пространстве, $N_l = (l+1)(l+2)(l+3)/6$ независимых компонентов. Действительно в n – мерном пространстве полностью симметричный тензор ранга l имеет $n(n+1)(n+2)...(n+l-1)/l!$ независимых компонентов. При $n = 4$ имеем N_l независимых компонентов. Видно, что $N_l > 2l+1$ при $l > 0$. Поэтому система уравнений (1) противоречива. Чтобы увидеть это, рассмотрим (1) в импульсном представлении. Тогда система линейных дифференциальных уравнений в частных производных (1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений порядка N_l. Попытаемся решить эту систему по методу Крамера, т.е. будем находить компоненты полевых тензоров при известных компонентах токов. Определитель системы (порядка N_l) вследствие (2), (3) равен нулю. Наибольший порядок определителя, порожденного матрицей системы равен $2l+1$ (ранг матрицы системы равен $2l+1$). Если в определителе системы любой из столбцов заменить столбцом свободных членов (т.е. фурье-компонентами токов $j(p)_{\mu_1...\mu_l}$), то новый определитель станет отличным от нуля (т.е. ранг расширенной матрицы системы равен N_l). Так как $2l+1 < N_l$, то вследствие теоремы Кронекера - Капелли эта система линейных алгебраических уравнений несовместна, т.е. она не имеет решения.

2) Степенные расходимости. Подстановка в диаграммах Фейнмана пропагаторов и вершинных функций высокоспиновых частиц вместо пропагаторов и вершинных функций частиц со спином 0 или 1/2 ведет к степенным расходимостям для петлевых диаграмм и к энергетическому росту сечения для древесных диаграмм. При этом с ростом величины спина количество расходящихся диаграмм увеличивается. Имеется два источника расходимостей: пропагаторы и вершинные функции (связанные с токами взаимодействий).

а) Пропагаторы. Наибольшую степень расходимости в пропагаторе дает слагаемое

$$\frac{p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_l} p_{\nu_1} \cdots p_{\nu_l}}{M^{2l}\left(p^2 - M^2 + i\varepsilon\right)}. \tag{4}$$

Потому масштабная размерность пропагатора частицы со спином l равна $2l-2$. Импульс ВБ в петлевой диаграмме выражается через импульс интегрирования и это дает степенные расходимости, растущие с l. В древесной диаграмме импульс виртуального ВБ выражается через импульсы внешних частиц и это ведёт к энергетическому росту амплитуд и сечений взаимодействий.

б) Токи. Для взаимодействия $J(p) \leftrightarrow O(q_1) + O(q_2)$ токи в традиционных подходах могут быть представлены в любой из трёх форм:

$$J_{\mu_1....\mu_l} = \begin{cases} g q_{1\mu_1} ... q_{1\mu_l} \varphi_1 \varphi_2 \ \text{или} & (5) \\ g q_{2\mu_1} ... q_{2\mu_l} \varphi_1 \varphi_2 \ \text{или} & (6) \\ g (q_1 - q_2)_{\mu_1} ... (q_1 - q_2)_{\mu_l} \varphi_1 \varphi_2, & (7) \end{cases}$$

где g - константа. Токи (5)-(7) содержат произведения импульсов частиц дополнительные к произведениям полей бесспиновых частиц (по сравнению с $\lambda\varphi^3$ - теорией). Эти импульсы также ведут к расходимостям.

в) Неоднозначности. Использование токов (5)-(7) в амплитудах ведёт к различным амплитудам и даже к разным степеням расходимостей. Такие неоднозначности были отмечены в [18]. Может возникнуть вопрос: какой ток правильный? Можно показать, что все три тока (5)-(7) неправильные.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С целью устранения этих недостатков в работах [19-21] изучаются общие свойства токов (в [19-20] для ВБ, а в [21] для высокоспиновых фермионов). Согласно [19-21] токи взаимодействий высокоспиновых частиц с произвольной массой должны удовлетворять теореме о полях и токах, а также теореме об асимптотике токов. Именно теорема о полях и токах позволяет получать непротиворечивые системы уравнений взаимодействий высокоспиновых частиц. В [19-21] показано, что токи и поля обязательно должны иметь одинаковые свойства, т.е.

$$\partial_{\mu_k}\ j(x)_{\mu_1\ldots\mu_l}=0,. \tag{8}$$

$$g_{\mu_i\mu_k}\ j(x)_{\mu_1\ldots\mu_l}=0, \tag{9}$$

где $i,k=1,2,\ldots,l$. При выполнении условий (8), (9) ранг матрицы системы линейных алгебраических уравнений (соответствующих системе дифференциальных уравнений (1) в импульсном представлении) и ранг расширенной матрицы этой системы становятся одинаковыми и равными $2l+1$ Нарушение условий (8), (9) приводит к противоречивости системы линейных алгебраических уравнений для компонентов поля в импульсном представлении. Ранее сохранение тока (8) было предложено в [18], [22]. Для построения токов $j(x)_{\mu_1\ldots\mu_l}$ удовлетворяющих (8), (9), в [18-22] предложено надлежащее релятивистское обобщение проекционного оператора $\Pi(x)_{\mu_1\ldots\mu_l,\nu_1\ldots,\nu_l}$ [17]. Ток $j(x)_{\mu_1\ldots\mu_l}$ в [19, 20] представлен в виде:

$$j(x)_{\mu_1\ldots\mu_l}=\Box^l\,\Pi(x)_{\mu_1\ldots\mu_l,\nu_1\ldots\nu_l}\,\eta(x)_{\nu_1\ldots\nu_l}\ , \tag{10}$$

где $\eta(x)_{\nu_1\ldots\nu_l}$ - любой ток взаимодействия ВБ, полученный в традиционном подходе. Проекционный оператор $\Pi(p)_{\mu_1\ldots\mu_l,\nu_1\ldots\nu_l}$ [18-21] в импульсном представлении обладает свойствами, следующими из (2), (3):

$$\Pi(p)_{\mu_1\ldots\mu_l,\nu_1\ldots\nu_l}\,p_{\mu_k}=\Pi(p)_{\mu_1\ldots\mu_l,\nu_1\ldots\nu_l}\,p_{\nu_k}=0\ , \tag{11}$$

$$\Pi(p)_{\mu_1\ldots\mu_l,\nu_1\ldots\nu_l}\,g_{\mu_i\mu_k}=\Pi(p)_{\mu_1\ldots\mu_l,\nu_1\ldots\nu_l}\,g_{\nu_i\nu_k}=0\ . \tag{12}$$

Далее токи $j(x)_{\mu_1\ldots\mu_l}$ будем называть физическими, а токи $\eta(x)_{\mu_1\ldots\mu_l}$ - общими. Для токов в [20] доказана теорема об асимптотике токов. Эта теорема основана на том факте, что уравнения (1) для компонентов полей являются системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Можно получить совокупность уравнений для состояний с определённой проекцией спина, но порядок каждого из уравнений возрастает до $2l+2$, а общие токи должны принадлежать классу C_{2l+1}, т.е. их компоненты должны быть непрерывными и иметь непрерывные частные производные до порядка $2l+1$ включительно. Таким образом, значения производных не должны зависеть в любой пространственно-временной точке от направления приближения к этой точке. Это обусловлено тем, что у нас нет никакой информации о точках разрыва общих токов и их производных. Рассмотрим Фурье-компоненты общих токов $\eta(p)_{\mu_1\ldots\mu_l}$ (p-4импульс ВБ). Тогда интегралы от Фурье–компонентов для токов $\eta(x)_{\mu_1\ldots\mu_l}$ и их производных должны сходиться равномерно. Используя признак равномерной сходимости Вейерштрасса для интегралов, зависящих от параметров (преобразования Фурье), в [20] получено, что должны сходиться все интегралы

$$\int d^4p\left|j(p)_{\mu_1\ldots\mu_l}\,p_\nu\right|, \tag{13}$$

$$\int d^4p\left|\eta(p)_{\mu_1\ldots\mu_l}\,p_{\nu_1}\cdots p_{\nu_{2l+1}}\right|. \tag{14}$$

В приложении продемонстрировано применение признака Вейерштрасса для анализа непрерывности производных функции, которая является интегралом, зависящим от параметра. Таким образом, в непротиворечивой теории компоненты общих токов $\eta(p)_{\mu_1\ldots\mu_l}$ при $|p_\nu|\to\infty$ должны убывать, по меньшей мере, как $|p_\nu|^{-5-2l}$.

В настоящей работе мы строим токи взаимодействий ВБ с двумя бесспиновыми частицами. Эти токи удовлетворяют теореме о полях и токах.

ТЕНЗОРНАЯ СТРУКТУРА ФИЗИЧЕСКИХ ТОКОВ

Будем рассматривать токи переходов $J(p) \leftrightarrow O(q_1) + O(q_2)$ (токи других переходов рассматриваются аналогично). Если бесспиновые частицы принадлежат некоторому мультиплету внутренней симметрии (например, группы ароматов $SU(2)$ или $SU(3)$ или $SU(4)$), то общие токи вследствие Бозе-симметрии содержат только вектор $q = q_1 - q_2$. Но в общем случае у нас есть три возможности (5)-(7).

Общий ток перехода $J(p) \to O(q_1) + O(q_2)$ выберем в виде

$$\eta(p,q)_{\mu_1 \dots \mu_l} = gf(p,q) q_{\mu_1} \dots q_{\mu_l} \varphi^*{}_1(q_1) \varphi^*_2(q_2), \tag{15}$$

где g - константа взаимодействия, $f(p,q)$ - скалярная функция. Если в (15) вместо q взять q_1 или q_2, то вследствие (11) новый физический ток будет отличаться от физического тока, построенного на основе (6, 7), множителем 2^{-l} или $(-2)^{-l}$. Это отличие легко учесть, переопределяя константу взаимодействия.

Токи других переходов можно написать аналогично (15). Например, для $J(p) + O(q_1) \leftrightarrow O(q_2)$ полагаем $p = q_2 - q_1, \quad q = q_1 + q_2$. Физические токи в импульсном представлении получаем как соотношение (10) между фурье – компонентами:

$$j(p,q)_{\mu_1 \dots \mu_l} = \left(-p^2\right)^l \Pi(p)_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l} \eta(p,q)_{\nu_1 \dots \nu_l}. \tag{16}$$

В (16) учтено, что токи зависят не только импульса ВБ p, но и от q.

При небольших J можно написать физические токи в явном виде

$$J = 1, \quad j(p,q)_\mu = ig_1 f(p,q) Q_\mu \varphi_1^*(q_1) \varphi_2^*(q_2), \tag{17}$$

$$J = 2, \quad j(p,q)_{\mu_1\mu_2} = i\frac{g_2}{2} f(p,q)\left[3Q_\mu Q_\nu + d_{\mu\nu} Q^2\right], \tag{18}$$

$$\begin{aligned} J = 3, \quad j(p,q)_{\mu_1\mu_2\mu_3} = i\frac{g_3}{10} f(p,q)\Big[&5Q_{\mu_1}Q_{\mu_2}Q_{\mu_3} + \\ &+ Q^2\left(d_{\mu_1\mu_2}Q_{\mu_3} + d_{\mu_1\mu_3}Q_{\mu_2} + d_{\mu_2\mu_3}Q_{\mu_1}\right)\Big], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} J = 4, \quad j(p,q)_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = i\frac{g_4}{35} f(p,q)\Big[&35Q_{\mu_1}Q_{\mu_2}Q_{\mu_3}Q_{\mu_4} + 5Q^2\Big(Q_{\mu_1}Q_{\mu_2}d_{\mu_3\mu_4} + \\ &+ Q_{\mu_1}Q_{\mu_3}d_{\mu_2\mu_4} + Q_{\mu_1}Q_{\mu_4}d_{\mu_2\mu_3} + Q_{\mu_2}Q_{\mu_3}d_{\mu_1\mu_4} + \\ &+ Q_{\mu_2}Q_{\mu_4}d_{\mu_1\mu_3} + Q_{\mu_3}Q_{\mu_4}d_{\mu_1\mu_2}\Big) + \\ &+ Q^4\left(d_{\mu_1\mu_2}d_{\mu_3\mu_4} + d_{\mu_1\mu_3}d_{\mu_2\mu_4} + d_{\mu_1\mu_4}d_{\mu_2\mu_3}\right)\Big], \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$d_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu / p^2 = \Pi(p)_{\mu\nu} \tag{21}$$

проекционный оператор частицы со спином один,

$$Q_\mu = -d_{\mu\nu} p^2 q_\nu = p^2 q_\mu - p_\mu (pq),\ d_{\mu\mu} = -3,\ d_{\mu\nu} p_\nu = d_{\mu\nu} p_\mu = 0,\ d_{\mu\nu} Q_\nu = -Q_\mu. \tag{22}$$

В системе покоя ВБ $p = (q_0, 0)$ и $d_{oo} = 0$, $d_{oi} = 0, d_{ik} = \delta_{ik}$, $\quad Q = \left(0, p^2 \vec{q}\right)$.

Зависимость физических токов от импульсов ВБ, согласно (15), (16) определяется произведением $2l$ компонентов импульса p_ν и скалярной функции $f(p,q)$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $f(p,q)$

Функция $f(p,q)$ в токах должна обладать следующими свойствами: 1) Скалярная функция $f(p,q)$ должна зависеть от релятивистских инвариантов; 2) Вследствие (13), (14) естественно взять действительную неотрицательную функцию $f(p,q)$; 3) Функция должна существовать при любых значениях p и q; 4) Функция должна быстро убывать при $|p_\nu| \to \infty$ чтобы удовлетворить (13), (14); 5) Для анализа сходимости интегралов (13), (14) удобно взять $f(p,q)$ в виде рациональной дроби. Тогда легко получить возможную расходимость интегралов типа (14) с произведением импульсов, в количестве большем $2l + 1$.

Из векторов p и q можно образовать три скалярных произведения: $p^2 = p_0^2 - p_3^2$, $(pq) = p_0 q_0 - p_3 q_3$, q^2. Другой набор скалярных произведений: p^2, $q^2{}_1$, $q^2{}_2$. Эти два набора связаны соотношениями $(pq) = q_1^2 - q_2^2$, $p^2 + q^2 = 2\left(q_1^2 + q_2^2\right)$. Заметим, что эти соотношения справедливы и для переходов $J(p) \leftrightarrow O(q_1) + O(q_2)$ и для переходов $J(p) + O(q_1) \leftrightarrow O(q_2)$. Для функции векторов $f(p,q)$ мы будем использовать также обозначения $f(p,q) = \tilde{f}\left(p^2,(pq),q^2\right)$ и в некоторых случаях рассматривать функции одной или двух скалярных переменных.

Рассмотрим уравнение (1) в импульсном представлении. Полевые и токовые тензоры зависят от 4-импульса ВБ p с определенными компонентами. Это справедливо как для реальных ВБ (при $p^2 = M^2$ и $p_0>0$), так и для виртуальных ВБ (при произвольных p). Будем считать, что ВБ движется вдоль оси z. Тогда поля и токи в координатном пространстве зависят от координат x_0 и x_3. Фурье - компоненты полей и токов зависят от компонентов 4-импульса ВБ p_0 и p_3, т.е. $p = (p_0, 0, 0, p_3)$. Поэтому Фурье - компоненты токов должны быть пропорциональными $\delta(p_1)\,\delta(p_2)$. Вследствие (13), (14) должны сходиться интегралы

$$J_{m_0 m_3}(q) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_3 \left| f(p,q) p_0^{m_0} p_3^{m_3} \right|, \qquad m_0 + m_3 = m\,, \tag{23}$$

где m_0 и m_3 - целые положительные числа. Сходимость интегралов (14), (23) следует из непрерывности частных производных общего тока в координатном представлении порядка $2l+1$. Но при этом должны быть непрерывными сами токи и все производные порядков до $2l$ включительно. Таким образом должны сходиться все интегралы (14), (23) с меньшими $m_0 + m_3$, т.е. фактически $m_0 + m_3 = \overline{m}$, $0 \le \overline{m} \le m$, $m = 2l+1$. Теория будет корректной если будут сходиться все интегралы типа (23) при любых q. Функция $f(p,q)$ должна убывать при $|p_\nu| \to \infty$ сильнее чем $|p_\nu|^{-(2l+3)}$. Возможно, что в квантованной теории при использовании процедуры перенормировок степень убывания можно понизить с $2l+3$ до $2l+1$. Действительно в $\lambda\varphi^3$-теории для взаимодействия трёх бесспиновых частиц токи являются константами и интегралы типа (23) (при $m = 0$) расходятся квадратично. Тем не менее, как известно, различные амплитуды взаимодействий получаются конечными после перенормировок [23].

При анализе сходимости интегралов (23) будем считать компоненты вектора q фиксированными. Покажем сначала, что для функции $f(p,q)$ зависящей только от одной переменной, всегда найдутся расходящиеся интегралы.

РАСХОДИМОСТЬ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ С $\tilde{f}\left(p^2\right)$

В интегралах (23) для $f(p,q) = \tilde{f}\left(p^2\right)$ (а также $\tilde{f}\left(p^2, q^2\right)$) перейдём к новым переменным: $p_0 = u + v$, $p_3 = u - v$. Тогда $p^2 = 4uv$ и

$$J_{m_0 m_3} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_3 \left| \tilde{f}\left(p^2\right) p_0^{m_0} p_3^{m_3} \right| = 8 \int\limits_{0}^{+\infty} du \int\limits_{-u}^{u} \tilde{f}(4uv)(u+v)^{m_0} (u-v)^{m_3}\, dv\,. \tag{24}$$

Рассмотрим интеграл (24) при $m_0 = m_3 = l$. В этом случае $(u+v)^{m_0}(u-v)^{m_3} = \left(u^2 - v^2\right)^l = = \sum\limits_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k u^{4k-2l} t^{2(l-k)}$, где $t = uv$. Подставляя это выражение в (24), получаем

$$J_{ll} = 16 \int\limits_0^\infty \frac{du}{u} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k u^{4k-2l} \int\limits_{-u^2}^{u^2} t^{2(l-k)} \tilde{f}(4t)\, dt = 16 \int\limits_0^\infty g(u)\, du\,. \tag{25}$$

Будем рассматривать такие функции $\tilde{f}\left(p^2\right)$, что все интегралы $F_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{2(l-k)} \tilde{f}(4t)\, dt$ сходятся. Исследуем сходимость интеграла (25) по du на верхнем пределе. Отметим, что подынтегральная функция положительная.

Наибольшую степень расходимости в (25) получаем при $k=l$. Легко видеть, что при $u\to\infty$ $g(u)$ эквивалентно F_0u^{2l-1}. Поэтому интеграл (25) расходится при $u\to\infty$ как u^{2l}.

НЕКОВАРИАНТНОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ (23)

Анализ сходимости интегралов (23) можно выполнить при известном неопределённом интеграле. Однако явные выражения этого двойного интеграла довольно сложны (представляют собой двойную сумму). Мы поступим следующим образом. Свяжем интегралы (23) от модуля функций с интегралами от функций. Сложность анализа сходимости интегралов связана с тем, что интегралы (23) не являются тензорами. Действительно, интегралы можно представить в виде

$$J_{m_0m_3}=2\int\limits_0^\infty dp_0\int\limits_0^\infty dp_3\left[f(p,q)+f(p,\tilde{q})\right]p_0^{m_0}p_3^{m_3}, \tag{26}$$

где $\tilde{q}=(-q_0,q_1,q_2,q_3)$ ($f(p,q)\ge 0$). При преобразованиях Лоренца вдоль оси OZ $p_0'=\dfrac{p_0+vp_3}{\sqrt{1-v^2}}$, $p_3'=\dfrac{p_3+vp_0}{\sqrt{1-v^2}}$ и область с $p_0\ge 0$ и $p_3\ge 0$ не всегда отображается в себя. Например, при скорости $v<0$ $(|v|<1)$ точка $M_1(p_0,0)$ $(p_0>0)$ отображается в точку $M_2\left(\dfrac{p_0}{\sqrt{1-v^2}},-\dfrac{|v|p_0}{\sqrt{1-v^2}}\right)$, которая не находится в области $p_3\ge 0$. Таким образом, область $p_0\ge 0, p_3\ge 0$ не инвариантна относительно преобразований Лоренца. Поэтому интегралы (23) (а также (13), (14)) не являются тензорами из-за наличия модуля под знаком интеграла. Это можно также продемонстрировать на более простом случае интегралов

$$\int d\Omega_2 n_in_k=\int\limits_0^{2\pi} n_in_k\,d\varphi=\pi\,\delta_{ik}\quad,\ \int d\Omega_2|n_in_k|=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} n_in_k\,d\varphi=\begin{cases}\pi, & i=k\\ 2, & i\ne k\end{cases}. \tag{27}$$

Отметим, что интегралы от n_in_k и $|n_in_k|$ равны при $i=k$. Это естественно, так как $n_i^2\ge 0$.

Будем предполагать, что функция $f(p,q)$ непрерывная при любых конечных p и q. Поэтому интегралы от произведения $f(p,q)$ на компоненты импульсов p_0 и p_3 по любой области с конечными p_0 и p_3 будут конечными числами. Таким образом, расходимости интегралов

$$I(q)_{\mu_1\ldots\mu_m}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp_3 f(p,q)p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_m} \tag{28}$$

могут возникать только при $|p_\nu|\to\infty$. Чем выше величина m в (23), (28), тем большей может быть степень расходимости. Однако, если интегралы (23), (28) сходятся при некотором m, то они сходятся и при всех меньших $\overline{m}$, т.е. при $\overline{m}=0,1,\ldots.m-1$. Так как в (23) наибольшее $m=m_0+m_3=2l+1$, то одно из чисел m_0 или m_3 должно быть чётным, а другое нечётным. Теперь заменим нечётное число (m_0 или m_3) на большее на единицу. Тогда оба числа станут чётными, а число m в (23), (28) станет равным $2l+2$. Если сходятся интегралы (23) при $m=2l+2$, то сходятся и интегралы (20) при $m=2l$ и $2l+1$. Интегралы (28) являются тензорами ранга m. При $m=2l+2$ эти тензоры выражаются через произведения тензоров $q_{\mu_i}q_{\mu_k}$ и $g_{\mu_i\mu_k}$ при $i,k=1,2,\ldots,2l+2$. Коэффициенты в разложениях интегралов (28) по произведениям тензоров $g_{\mu_i\mu_k}$ и $q_{\mu_i}q_{\mu_k}$ должны зависеть только от q^2. Поэтому сходимость интегралов (28) (а с ними и (23)) в областях ($q^2>0,\ q^2=0,\ q^2<0$) можно исследовать в некоторых различных системах отсчёта. Если окажется, что интегралы (28) в этих определённых системах отсчёта существуют как ограниченные функции q^2, то, следовательно, интегралы (23), (28) сходятся в данной области q^2 ($q^2>0$ или $q^2=0$ или $q^2<0$).

РАСХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ С $\tilde{f}((pq))$

Рассмотрим непрерывные неотрицательные функции $f(p,q)$ в общем токе (15), которые зависят от одной переменной $(pq)=p_0q_0-p_3q_3$. Если расходятся интегралы при $m=2l$, то расходятся и при

$m = 2l + 1$, $2l + 2$. Будем рассматривать чётные m_0 и m_3. В интеграле (23) для $\tilde{f}((pq))$ обозначим $(pq) = t$. Тогда

$$J_{m_0 m_3} = q_0^{-1-m_0} \sum_{k=0}^{m_0} \binom{m_0}{k} q_3^{m_0-k} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \, p_3^{m-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) t^k \, dt . \tag{29}$$

Легко найти функции $\tilde{f}(t)$, для которых интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) t^k dt$ сходятся для всех $k = 0,2,....,l$ (или $l + 1$). Однако для любой такой функции интегралы (29) расходятся по dp_3. Таким образом, интегралы (23) для функции $\tilde{f}((pq))$ расходятся.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы получили тензорную структуру физических токов взаимодействия одного ВБ с двумя бесспиновыми частицами. Эти токи строятся с помощью проекционного оператора и удовлетворяют теореме о полях и токах. Тензорная структура физического тока одинаковая для общих токов всех трёх типов. Поэтому в нашем подходе амплитуды рассеяния при учёте взаимодействий ВБ с бесспиновыми частицами не имеют неоднозначностей, отмеченных ранее.

Физические токи должны содержать скалярную функцию, которая обеспечивает сходимость интегралов от модуля компонентов физических токов, умноженных на импульс ВБ. Мы показали, что при фиксированном q такие интегралы расходятся, если скалярные функции зависят только от одной переменной, т.е. в общем случае $f(p,q) = \tilde{f}(p^2, q^2)$, а также $f(p,q) = \tilde{f}((pq), q^2)$. Очевидно, что интегралы (23), (28) с $\tilde{f}(q^2)$ расходятся. Таким образом, становится важной задачей поиск функции $f(p,q) = \tilde{f}(p^2, (pq), q^2)$, которая позволяет получить сходящиеся интегралы.

В заключение автор благодарит Ю.В. Кулиша за постановку задачи и стимулирующие обсуждения, а также О.А. Осмаева и В.И. Храбустовского за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Продемонстрируем связь между существованием высших производных у интеграла, зависящего от параметра, и сходимостью интегралов на примере функции

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{p^4 + a^4} dp . \tag{П.1}$$

Значение этого интеграла можно найти с помощью вычетов:

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{a^3} e^{-\frac{a|x|}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{a|x|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{П.2}$$

Для производных получаем

$$\varphi'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p \sin px}{p^4 + a^4} dp = -\frac{\pi}{a^2} e^{-\frac{a|x|}{\sqrt{2}}} \sin\frac{ax}{\sqrt{2}} . \tag{П.3}$$

$$\varphi''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2 \cos px}{p^4 + a^4} dp = \frac{\pi}{a} e^{-\frac{a|x|}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{a|x|}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{П.4}$$

$$\varphi'''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^3 \sin px}{p^4 + a^4} dp = \pi\left(|x|'\right) e^{-\frac{a|x|}{\sqrt{2}}} \cos\frac{ax}{\sqrt{2}} . \tag{П.5}$$

Значения этих производных можно получить двумя способами: вычисляя интеграл или дифференцируя $\varphi(x)$ (П.2). Функции $\varphi(x), \varphi'(x)$, и $\varphi''(x)$ непрерывны при любом x, а $\varphi'''(x)$ имеет разрыв в т. $x = 0$ вследствие пропорциональности $\varphi'''(x)$ производной модуля x. Заметим, что с помощью признака равномерной сходимости Вейерштрасса можно сделать заключение о непрерывности функции $\varphi(x)$ и её производных без вычисления интегралов (П.1)-(П.5). Действительно, из сходимости интегралов с бесконечными пределами от функций $\left(p^4 + a^4\right)^{-1}$, $|p| \cdot \left(p^4 + a^4\right)^{-1}$, $p^2 \cdot \left(p^4 + a^4\right)^{-1}$ следует непрерывность $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$. А такой несобственный интеграл от $\left|p^3\right| \cdot \left(p^4 + a^4\right)^{-1}$ расходится и это соответствует разрывности $\varphi'''(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берестецкий В.Б., Лифший Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория, Ч.1.-М: Наука,1968. - 480 с.
2. Новожилов Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц. - М.: Наука, 1972. - 472 с.
3. Singh L.P.S., Hagen C.R. Lagrangian formulation for arbitrary spin. I. The boson case //Phys. Rev.-1974.-V.D9, № 4 .- P. 898-909.
4. Singh L.P.S., Hagen C.R. Lagrangian formulation for arbitrary spin. II. The fermion case //ibid. P. 910-920.
5. Fronsdal C. Massless fields with integer spin //Phys. Rev. 1978.-V. D18, №10.-P 3624-3629.
6. Fang J., Fronsdal C. Massless fields with half-integer spin //ibid. P. 3630-3633.
7. Singh L.P.S. Noncausal propagation of classical Rarita-Schwinger wawes //Phys. Rev.-1973.-V. D7, №4.-P.1256-1258.
8. De Wit B., Freedman D.Z. Systematics of higher-spin gauge fields //Phys. Rev.-1980.-V.D21, №2.-P. 358-367.
9. Зима В.Г., Вальверде Х. Спиновая частица и уравнения Даффина-Кеммера-Петью //Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2003. -№585. – Вип.1/21.-С.818.
10. Fedoruk S., Zima V.G. Bitwistor formulation of massive spinning particle //Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2003. - №585. – Вип.1/21/.-С.39-48.
11. Tyutin I.V., Vasiliev M.A., Lagrangian formulation of irreducible massive fields of arbitrary spin in (2+1)-dimension //Theor. Math. Phys.-1997.-V. 113.-P. 1244-1254; Preprint FIAN/TD/04-97, 1997, 11 p.
12. Bandos I., Bekaert X., de Azcarraga J.A. et. al. Dynamics of higher spin fields and tensorial space. //hep-th/0501113.
13. Vasiliev M.A. Higher spin gauge theories in four-dimensions, three-dimensions and two-dimensions //Int. J. Mod. Phys. - 1996.-V. D5.- P. 763-797; Preprint FIAN-TD-24-96, 1996.
14. Васильев М.А. Калибровочные теории высших спинов //УФН.-2003.-Т.173.- Вып.2. – С.226-232.
15. Weinberg S. Feynman rules for any spin //Phys. Rev. B.-1964.-V.133, №5. - P.1318-1332.
16. Scadron M. //Phys. Rev. - 1968. - V.165, №5. - P.1640-1647.
17. Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Росетти К. Токи в физике адронов.- М.: Мир, 1977. - 672 с.
18. Кулиш Ю.В. Модель взаимодействий адронов без степенных расходимостей и поляризационные явления //ЯФ. - 1989. - Т.50.-Вып. 6.-С. 1697-1704.
19. Kulish Yu.V., Rybachuk E.V. Properties of high-spin boson interaction currents and eliminations of power divergences //Problems of atomic science and technology. KIPT. – 2001. - №6(1). - P.-84-87.
20. Куліш Ю.В., Рибачук О.В. Властивості струмів взаємодій масивних високоспінових бозонів //Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2003. - №585. – Віпуск 1/21/.-С.49-55.
21. Куліш Ю.В., Рибачук О.В. Властивості струмів взаємодій високоспінових ферміонів //Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2004. -№619. – Вип.1/23/. - С.49-57.
22. Kulish Yu. V. Polarization investigations and verification of the high-spin hadron model without power divergences.; High-Energy Spin Physics Proceedings of the 9-th International Symposium Held at Bonn, FRG, 6-15 September 1990, Berlin: Springer-Verlag, 1991. - V.1. - P. 600-603.
23. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1984. - 598 с.

CONSISTENT MODEL FOR INTERACTION OF HIGH-SPIN BOSON AND TWO SPINLESS PARTICLES

E.V. Rybachuk

Ukrainian State Academy of Railway Transport

61050, Ukraine, Kharkov, Sq. Feyerbach, 7, e-mail: Kulish@kart equ.ua

The currents for the interaction of the massive high-spin boson ($J \geq 1$) with two spinless particles are proposed in a consistent model. The current tensors are derived for the spin $J = 1, 2, 3, 4$ explicitly. The consistency of the model is determined by two theorems. According to one of them the derived current tensors must be traceless and conserved as well as the field tensors for high-spin boson (HSB). Therefore the equation systems for the components of HSB fields are consistent. According to the second theorem the currents must include the scalar function, which provides the convergence of the double integrals with respect to the HSB momentum components. The integrands are the modulus of the products of the current tensors and the HSB momentum components. It is shown that the scalar function of any one variable (from three possible scalar variables) leads to the divergence of such integrals.

KEY WORDS: higher spin, boson, integral, convergence, interaction, current, consistensy.