

УДК 539.12; 539.17

НЕПРОТИВОРЕЧИВАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ВЫСОКОСПИНОВЫХ БОЗОНОВ С ДВУМЯ БЕССПИНОВЫМИ ЧАСТИЦАМИ II. АСИМПТОТИКА ТОКОВ

Е.В. Рыбачук*Украинская Государственная Академия Железнодорожного Транспорта,
61050, Украина г. Харьков, пл. Фейербаха, 7, e-mail: Kulish@kart.edu.ua
Поступила в редакцию 17 ноября 2006 г.*

В непротиворечивой модели получена скалярная функция тока взаимодействия высокоспинового бозона (ВБ) с двумя бесспиновыми частицами. Эта функция обеспечивает сходимость двойных несобственных интегралов по p_0 и p_3 (где импульс ВБ $p = (p_0, 0, 0, p_3)$) от модуля произведения тока на импульс ВБ. Функция получена для любого спина ВБ $J (J \geq 1)$ при одном исключении. Это исключение связано с некоторыми импульсами бесспиновых частиц. В последнем случае интегралы расходятся логарифмически. Эту расходимость необходимо сравнить с квадратичной расходимостью подобных интегралов для токов в суперперенормируемой $\lambda \varphi^3$ - теории. Используя найденную скалярную функцию, получено асимптотическое поведение токов. Эти токи для любого J должны убывать при $|p_V| \rightarrow \infty$ по меньшей мере как $|p_V|^{-4J-16}$. Поэтому в нашем подходе амплитуды взаимодействий ВБ должны иметь лучшее асимптотическое поведение (лучшую сходимость), чем амплитуды взаимодействий бесспиновых частиц в $\lambda \varphi^3$ - теории.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: высшие спины, бозон, интеграл, сходимость, взаимодействие, ток, непротиворечивость.

Асимптотика токов взаимодействий высокоспиновых частиц важна для нахождения поведения вкладов таких частиц при больших импульсах частиц. Вклады высокоспиновых частиц со спином $J (J \geq 1)$, как правило, изучаются в подходах с пропагаторами, содержащими в числителях произведения $2l$ компонентов вектора p/M ($p-4$ -импульс, и M – масса высокоспиновой частицы, соответственно); $J=l$ для высокоспинового бозона (ВБ) и $J=l+1/2$ для высокоспинового фермиона). При этом вершинные функции строятся с учётом только одного условия инвариантности относительно преобразований группы Лоренца. Это приводит, в формализме Рариты-Швингера для высокоспиновых частиц, к условию симметрии по индексам тензоров токов взаимодействий высокоспиновых частиц. В [1] показано, что такие подходы (которые мы называем традиционными или обычными) имеют следующие недостатки: 1) противоречивость уравнений; 2) степенные расходимости в амплитудах для петлевых диаграмм и степенной энергетический рост в амплитудах для древесных диаграмм; 3) неоднозначности вершинных функций.

В [2-4] показано, что в непротиворечивой теории, которая не должна иметь недостатков традиционных подходов, токи взаимодействия высокоспиновых частиц должны, кроме условия симметрии, удовлетворять теореме о полях и токах и теореме об асимптотике токов. Простейшим взаимодействием ВБ является их взаимодействие с двумя бесспиновыми частицами, которое можно рассматривать как обобщение $\lambda \varphi^3$ - взаимодействия трёх бесспиновых частиц. В [1, 2] получена тензорная структура токов взаимодействия ВБ с двумя бесспиновыми частицами. Токи должны удовлетворять теореме об асимптотике токов (для ВБ [3] и для высокоспиновых фермионов [4]), т.е. должны сходиться интегралы по импульсам высокоспиновых частиц от модуля произведения этих импульсов на токи взаимодействия.

Настоящая работа представляет собой продолжение [1]. Мы будем использовать обозначения работы [1] и при ссылках на формулы [1] к номеру формулы будем добавлять римскую цифру I. В [1] показано, что токи взаимодействия ВБ обязательно должны содержать скалярную функцию $f(p, q)$ ($p-4$ -импульс ВБ; для переходов $J(p) \rightarrow O(q_1) + O(q_2)$ и $O(q_1) + O(q_2) \rightarrow J(p)$ $q = q_1 - q_2$, а для $J(p) + O(q_1) \rightarrow O(q_2)$, $O(q_1) \rightarrow J(p) + O(q_2)$ $q = q_1 + q_2$). Эта функция должна обеспечивать сходимость интегралов (I.13), (I.14), (I.23), (I.28) и таким образом определяет асимптотику токов. При анализе сходимости интегралов вектор q полагаем постоянным. Тогда среди этих интегралов найдутся расходящиеся для функций $f(p, q) = \tilde{f}(p^2, q^2)$ и $f(p, q) = \tilde{f}(pq, q^2)$ [1]. Поэтому функция $f(p, q)$ обязательно должна содержать скалярные переменные p^2 и (pq) .

ФУНКЦИЯ $f_1(p, q)$

Рассмотрим переменную

$$C \frac{(pq)^2}{q^2} - p^2, \quad (1)$$

где C - постоянная. Для времени-подобных q можно взять вектор $q = (q_0, 0, 0, 0)$. Тогда (1) сводится к $(C-1)p_0^2 + \vec{p}^2$. Далее рассмотрим случай $C = 2$. Тогда переменная (1) становится равной $p_0^2 + \vec{p}^2$. В связи с этим рассмотрим функцию

$$f_1(p, q) = \frac{1}{\left[C \frac{(pq)^2}{q^2} - p^2 \right]^{2n_1} + a^{4n_1}}, \quad (2)$$

где a - положительная постоянная, n_1 целое число ($n_1 \geq 1$), при $C = 2$.

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ С $f_1(p, q)$ ПРИ $\vec{q} = 0$

Рассмотрим интегралы (I.23), (I.28) с функцией $f_1(p, q)$ для $q = (q_0, 0, 0, 0)$ при чётных числах m_0 и m_3 . Эти интегралы легко вычисляются в полярной системе координат:

$p_0 = r \cos \alpha$, $p_3 = r \sin \alpha$, $2 \frac{(pq)^2}{q^2} - p^2 = r^2$. Тогда для интеграла (I.23), имеем:

$$\begin{aligned} J_{m_0 m_3}(\vec{q} = 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 f_1(p, q) p_0^{m_0} p_3^{m_3} = 4 \int_0^{\infty} \frac{r^{m+1} dr}{r^{4n_1} + a^{4n_1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m_0} \alpha \sin^{m_3} \alpha d\alpha = \\ &= \frac{\pi}{2n_1} \frac{1}{a^{4n_1 - m - 2}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n_1} (m+2)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m_0+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_0+m_3+1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы использовали интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m_0} \alpha \sin^{m_3} \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m_0+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_0+m_3+1}{2}\right)}, \quad (4a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{r^m dr}{r^{2n} + a^{2n}} = \frac{\pi}{2n} \frac{1}{a^{2n-m-1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n} (m+1)}. \quad (4б)$$

Значение интеграла (4б) при чётных m легко получить с помощью теоремы о вычетах, а при нечётных m с помощью неопределённого интеграла [5 с. 29]. Для сходимости интеграла (4б) должно быть $2n \geq m+2$. Поэтому в (3) $4n_1 \geq m+3$ при целых положительных n_1 и m ($m = 2l+2$). Таким образом, получаем

$$n_1 > \frac{l}{2} + \frac{5}{4}. \quad (5)$$

Отметим, что при этом ограничении сходятся также интегралы (I.23), (I.28) для функции $f(p, q)$, если использовать переменную (1) при $C > 1$.

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ С $f_1(p, q)$ ПРИ $q_3 = 0, q^2 > 0$

Для $q = (q_0, q_1, q_2, 0)$

$$2 \frac{(pq)^2}{q^2} - p^2 = p_0^2 \beta + p_3^2, \quad \beta = \frac{q_0^2 + \bar{q}_\perp^2}{q_0^2 - \bar{q}_\perp^2}, \quad \bar{q}_\perp^2 = q_1^2 + q_2^2. \quad (6)$$

Видно, что при $q^2 > 0$ ($q_0^2 > \bar{q}_\perp^2$) $\beta > 0$ переменная (1) при $C = 2$ положительная. Поэтому с помощью замены $p_0 \rightarrow p_0' \beta$ соответствующие интегралы типа (I.23) $J_{m_0 m_3}(q_3 = 0, q^2 > 0)$ выражаются через интегралы (3):

$$J_{m_0 m_3}(q_3 = 0, q^2 > 0) = \beta^{-\frac{m_0+1}{4}} J_{m_0 m_3}(\bar{q} = 0). \quad (7)$$

Вследствие этого интегралы $J_{m_0 m_3}(q_3 = 0, q^2 > 0)$ сходятся при выполнении условия (5).

РАСХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ С $f_1(p, q)$ ПРИ $q_3 = 0$ И $q^2 < 0$

Для пространственно-подобных $q^2 (q_0^2 < \bar{q}_\perp^2)$ величина β в (6) отрицательная. Если сделать замену $p_0 \rightarrow p_0' (-\beta)^{\frac{1}{2}}$, то подынтегральная функция $f_1(p, q)$ станет функцией переменной $(p_0'^2 - \bar{p}^2)$ и среди интегралов типа (I.23) от этой функции найдутся расходящиеся (подобно интегралам (I.24), (I.25)).

ФУНКЦИЯ $f_2(p, q)$

Рассмотрим функцию

$$f_2(p, q) = \frac{1}{\left[2 \frac{(pq)^2}{q^2} - p^2 \right]^{2n_1} + a^{4n_1}} \cdot \frac{1}{(pq)^{2n_2} + b^{4n_2}} = \frac{f_1(p, q)}{(pq)^{2n_2} + b^{4n_2}}, \quad (8)$$

где a и b - положительные постоянные.

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ С $f_2(p, q)$ ПРИ $q_3 = 0$

Интегралы (I.23), (I.28) с функцией $f_2(p, q)$ (8) будем сначала брать по p_3 а затем по p_0 . Так как $(pq) = p_0 q_0$ при $q_3 = 0$, то для чётных m_0 и m_3 имеем при $q_0^2 < \bar{q}_\perp^2$ ($\beta < 0$)

$$J_{m_0 m_3}(q_3 = 0, q^2 < 0) = 4 \int_0^\infty \frac{p_0^{m_0} dp_0}{(p_0 q_0)^{2n_2} + b^{4n_2}} \cdot \int_0^\infty \frac{p_3^{m_3} dp_3}{\left[p_3^2 - |\beta| p_0^2 \right]^{2n_1} + a^{4n_1}} \quad (9)$$

в интеграле по dp_3 подынтегральная функция непрерывная для $p_3 \in [0, \infty)$ и расходимость может быть только на верхнем пределе. Если сходится интеграл с $p_3^{m_3+3}$, то сходится и интеграл (9) с $p_3^{m_3}$, где $m_3 \leq m < m + 3$.

Введём переменную $x = p_3^2 - |\beta|p_0^2$ и величину $l_0 = -1$ для нечётных l и $l_0 = 0$ для чётных l . Тогда $p_3^{m+3+2l_0} dp_3 = \frac{1}{2} (p_3^2)^{l+2+l_0} dx$ ($m = 2l + 2$) и

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{p_3^{m+3+2l_0} dp_3}{(p_3^2 - |\beta|p_0^2)^{2n_1} + a^{4n_1}} &= \frac{1}{2} \int_{-p_0^2|\beta|}^{\infty} \frac{(x + |\beta|p_0^2)^{l+2+l_0}}{x^{2n_1} + a^{4n_1}} dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + |\beta|p_0^2)^{l+2+l_0}}{x^{2n_1} + a^{4n_1}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{l+2+l_0} \binom{l+2+l_0}{k} (p_0^2|\beta|)^{l+2+l_0-k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k dx}{x^{2n_1} + a^{4n_1}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{l+2+l_0} \binom{l+2+l_0}{k} (p_0^2|\beta|)^{l+2+l_0-k} [1 + (-1)^k] \cdot \frac{\pi}{2n_1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n_1(k+1)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Мы использовали (46).

Интегралы в (10) сходятся при $2n_1 > k+1$, и при максимальном k имеем $2n_1 > l+3+l_0$, т.е. $n_1 > \frac{l+l_0}{2} + \frac{3}{2}$. Для чётных l имеем $n_1 \geq \frac{l}{2} + 2$, а для нечётных l $n_1 \geq \frac{l+1}{2} + 2$. Эти условия можно объединить в виде одного неравенства для целых n_1

$$n_1 \geq \frac{l}{2} + 2. \quad (11)$$

Это условие несколько более жёсткое по сравнению с (5).

Из (10) видно, что интеграл по dx содержит сумму слагаемых с множителями $(p_0^2|\beta|)^{l+2+l_0-k}$. Подставляя эти слагаемые в интеграл (9), получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{p_0^{m_0} p_0^{2(l+2+l_0-k)} dp_0}{(p_0 q_0)^{2n_2} + b^{4n_2}}. \quad (12)$$

Так как подынтегральная функция в (12) непрерывная, то интеграл может расходиться только на верхнем пределе. Поэтому будем рассматривать в (12) наибольшие значения m_0 и $l-k$, т.е. положим $m_0 = 2l+2$ и $k=0$. При этих значениях m_0 и k интегралы (12) могут сходиться только при $2n_2 > 4l+7+2l_0$, т.е.

$$\begin{aligned} n_2 &\geq 2l+4 && \text{для чётных } l \\ n_2 &\geq 2l+3 && \text{для нечётных } l \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что в (9), (12) должно быть $q_0 \neq 0$. Таким образом, в (9), (12) должны быть исключены векторы $q = (0, q_1, q_2, 0)$, при $\vec{q}_{\perp} \neq 0$. Этот случай рассмотрим позднее.

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ С $f_2(p, q)$ ПРИ $q^2 > 0$

Интегралы $J_{m_0 m_3}(q)$ (I.23) с функцией $f_2(p, q)$ сходятся также и для времени-подобных q (как при $\vec{q} = 0$, так и при $q_3 = 0$, $q_0^2 > \vec{q}_{\perp}^2$), поскольку согласно (8)

$$f_2(p, q) \leq \frac{f_1(p, q)}{b^{4n_2}}. \quad (14)$$

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ С $f_2(p, q)$ ПРИ $q_0 = 0$

Для пространственно-подобных $q = (0, q_1, q_2, q_3)$

$$2 \frac{(pq)^2}{q^2} - p^2 = -p_3^2 \gamma - p_0^2, \quad \gamma = \frac{q_3^2 - \bar{q}_\perp^2}{q_3^2 + \bar{q}_\perp^2} \quad (15)$$

видно, что имеется две области: $q_3^2 > \bar{q}_\perp^2$ и $q_3^2 < \bar{q}_\perp^2$.

- 1) При $q_3^2 > \bar{q}_\perp^2$ знаки при p_0^2 и p_3^2 в (15) одинаковые. Так как переменная (15) входит в $f_1(p, q)$ и $f_2(p, q)$ в чётной степени, то интегралы (I.23) с $f_2(p, q)$ сходятся аналогично интегралам (3), (6)

$$J_{m_0 m_3} (q_3 = 0, q_3^2 > \bar{q}_\perp^2) = 4 \int_0^\infty dp_0 \cdot \int_0^\infty dp_3 \frac{p_3^{m_3} \cdot p_0^{m_0}}{[p_0^2 + \gamma p_3^2]^{2n_1} + a^{4n_1}} \cdot \frac{1}{(p_3^2 q_3^2)^{n_2} + b^{4n_2}} \leq \frac{4}{b^{4n_2}} \frac{1}{\gamma^2} J_{m_0 m_3} (\bar{q} = 0); \quad (16)$$

- 2) При $q_3^2 < \bar{q}_\perp^2$ имеем

$$J_{m_0 m_3} (q_0 = 0, q_3^2 < \bar{q}_\perp^2) = 4 \int_0^\infty dp_0 \cdot \int_0^\infty dp_3 \frac{p_3^{m_3} \cdot p_0^{m_0}}{[p_0^2 - p_3^2 |\gamma|]^{2n_1} + a^{4n_1}} \cdot \frac{1}{(p_3^2 q_3^2)^{n_2} + b^{4n_2}}. \quad (17)$$

Этот интеграл можно свести к интегралу (9) с помощью замен $p_0 \leftrightarrow p_3$, $m_0 \leftrightarrow m_3$, $\gamma \rightarrow \beta$. Поэтому интегралы (17) также сходятся при выполнении условий (11), (13). Интегралы (17) также имеют особый случай $q_0 = q_3 = 0$, т.е. $q = (0, q_1, q_2, 0)$, $(pq) = 0$.

- 3) При $q_3^2 = \bar{q}_\perp^2$, $q_0 = 0$ имеем $(pq) = -p_3 q_3$, $2(pq)^2 / q^2 - p^2 = -p_0^2$, $\gamma = 0$. Двойные интегралы в этом случае представляют собой произведение однократных интегралов

$$J_{m_0 m_3} (q_0 = 0, q_3^2 = \bar{q}_\perp^2) = \int_{-\infty}^\infty dp_3 \frac{p_0^{m_0} \cdot dp_0}{p_0^{4n_1} + a^{4n_1}} \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{p_3^{m_3} \cdot dp_3}{(p_3 q_3)^{2n_2} + b^{4n_2}}. \quad (18)$$

Для сходимости интегралов в (18) достаточно взять $4n_1 > (m_0)_{\max} + 1$ (для чётного m_0 $(m_0)_{\max} = 2l + 2$ и $n_1 > \frac{l}{2} + \frac{3}{4}$) а $2n_2 > (m_3)_{\max} + 1$ (при $(m_3)_{\max} = 2l + 2$ $n_2 > l + \frac{3}{2}$). Эти ограничения слабее ограничений (11), (13). Поэтому при выполнении (11), (13) интегралы (18) сходятся.

ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ $q^2 = 0$

При $q^2 = 0$ функции $f_1(p, q)$ (2) и $f_2(p, q)$ (8) обращаются в нуль. Поэтому интегралы (I.23), (I.26) для свето-подобных q ($q^2 = 0$) можно считать сходящимися. Как частный случай такой сходимости можно считать также сходимость интеграла (6) при $q_3 = 0$ и $q_0^2 = \bar{q}_\perp^2$, если рассматривать предел $\bar{q}_\perp^2 \rightarrow q_0^2$, $\beta \rightarrow \infty$. В связи с поведением интегралов при $q^2 = 0$ отметим, что для непротиворечивости теории необходима сходимость интегралов (I.23), (I.26). Непрерывность этих интегралов как функции q^2 является дополнительным требованием.

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ $(pq) = 0$

Для вектора $q = (0, q_1, q_2, 0)$ интегралы (9), (12), (17) расходятся. На первый взгляд эти расходимости степенные. Выясним характер расходимостей. Снова рассматриваем чётные $m_0, m_3, m = m_0 + m_3 = 2l + 2$. Напишем интеграл (I.28) по импульсам ВБ $p = (p_0, 0, 0, p_3)$ с функцией $f_2(p, q)$

$$I(q)_{\mu_1 \dots \mu_{2l+2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 f_2(p, q) p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots p_{\mu_{2l+2}}, \quad (19)$$

где $\mu_k = 0, 3$ ($k = 1, 2, \dots, 2l + 2$). При $(qp) = 0$ этот интеграл (19) выражается только через сумму произведений $l + 1$ метрических тензоров $g_{\mu_i \mu_k}$ ($i, k = 0, 3$). Поскольку произведение компонентов импульса p под знаком интеграла в (19) симметрично по индексам, то интеграл должен быть симметричным. Поэтому

$$J_{\mu_1 \dots \mu_{2l+2}} = K \cdot S(g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \dots g_{\mu_{2l+1} \mu_{2l+2}}), \quad (20)$$

где K - некоторое число, S оператор симметризации. Тензор (20) содержит $2l + 1$ слагаемое. Чтобы найти число K свернём (19) с $g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \dots g_{\mu_{2l+1} \mu_{2l+2}}$. Учитывая, что индексы μ принимают два значения и $g_{\mu\mu} = 2$, получаем

$$K = \frac{1}{(2l+2)!} \cdot \frac{1}{b^{4n_2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{|p^2|^{l+1}}{p^{4n_1 + a^{4n_1}}}. \quad (21)$$

Для вычисления этого интеграла сделаем замену переменных $p_0 = u + v$, $p_3 = u - v$. Тогда

$$K = \frac{1}{(2l+2)!} \frac{16}{b^{4n_2}} \int_0^u du \int_0^v dv \frac{(4uv)^{l+1}}{(4uv)^{2n_1} + a^{4n_1}} = \frac{4}{(2l+2)!} \frac{1}{b^{4n_2}} \int_0^u \frac{du}{u} \int_0^{4u^2} \frac{t^{l+1} dt}{t^{2n_1} + a^{4n_1}}. \quad (22)$$

Предел интеграла по dt при $u \rightarrow \infty$ конечный в случае $n_1 \geq \frac{l}{2} + 2$ (т.е. при условии (11)) и равен

$\left[2n_1 a^{2(2n_1 - l - 2)} \sin \frac{\pi}{2n_1} (l + 2) \right]^{-1}$. Поэтому интеграл (19) расходится всего лишь логарифмически.

Сравним взаимодействия ВБ с двумя бесспиновыми частицами в нашей модели и взаимодействие трёх бесспиновых частиц в $\lambda\phi^3$ -теории. В последнем случае ток взаимодействия $\lambda\phi^2$ не зависит от импульса p и интегралы от токов (I.13), (I.14), (I.26) (в этом случае $m_0 = m_3 = 0$) расходятся квадратично. Тем не менее, как известно [6], в перенормированной теории амплитуды взаимодействий бесспиновых частиц остаются конечными. Поэтому можно предположить, что применение процедуры перенормировок в квантовой теории взаимодействий ВБ, основанный на нашем подходе, также позволит получить конечные амплитуды взаимодействий.

АСИМПТОТИКА ТОКОВ

Интегралы (I.13), (I.14), (I.23) с функцией $f_2(p, q)$ (8) сходятся при фиксированном 4-импульсе q при ограничениях (11), (13) (за исключением вектора $q = (0, q_1, q_2, 0)$ для которого имеется логарифмическая расходимость). Согласно (I.15), (I.16) асимптотика токов определяется произведением $|p_\nu|^{2l}$ и функцией $f_2(p, q)$ в физическом токе $j(p, q)_{\mu_1 \dots \mu_l}$ т.е. при $|p_\nu| \rightarrow \infty$

$$|j(p, q)_{\mu_1 \dots \mu_l}| \sim |p_V|^{2l-4n_1-2n_2}. \quad (23)$$

При ограничениях (11), (13) на целые числа n_1 и n_2 в (8) имеем для произвольных l

$$|j(p, q)_{\mu_1 \dots \mu_l}| \leq |p_V|^{-4l-16}. \quad (24)$$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы видим, что интегралы (I.23), (I.26) от функции $f_2(p, q)$ (8), умноженной на модули импульсов ВБ в некоторых степенях, сходятся при достаточно больших целых числах n_1 и n_2 для фиксированных значений разности (в другом канале суммы) импульсов бесспиновых частиц во времени-подобной, свето-подобной и пространственно-подобной областях (за исключением случая $q = (0, q_1, q_2, 0)$, $\vec{q}_\perp^2 \neq 0$). Однако в этом исключительном случае расходимость всего лишь логарифмическая, в то время как в суперперенормируемой $\lambda\varphi^3$ теории расходимость аналогичного интеграла квадратичная. Следует отметить, что интегралы (I.23), (I.26) будут сходить и при $q = (0, q_1, q_2, 0)$, если в качестве $f(p, q)$ взять $f_3(p, q) = f_2(p, q)(pq)^{m_1}$, где m_1 достаточно большое целое положительное число. Но $f_3(p, q) = 0$ для $(pq) = 0$ и вследствие равенства $(pq) = q_1^2 - q_2^2$ будут обращаться в нуль амплитуды хорошо наблюдаемых распадов, например $\rho \rightarrow 2\pi$, $\varphi^0 \rightarrow K^+K^-$, $f^0(1250) \rightarrow 2\pi$. Для канала рассеяния $p + q_1 = q_2$, $q = q_1 + q_2$, $(pq) = q_1^2 - q_2^2$ и должны обращаться в нуль амплитуды, соответствующие вкладу ρ -мезона в t -канальные амплитуды πN -рассеяния. Поэтому такую возможность получения сходящихся интегралов мы отвергаем и оставляем в качестве функции $f(p, q)$ функцию $f_2(p, q)$.

Функцию $f_2(p, q)$ (8) можно видоизменить, а именно включить зависимость от q^2 . Действительно можно рассмотреть вариант, в котором постоянные a^{4n_1} и b^{4n_2} можно заменить на функции q^2 , поскольку сходимость интеграла (I.13), (I.14), (I.23) мы исследовали при постоянном q . Мы предлагаем следующую функцию:

$$f_4(p, q) = \frac{1}{\left[2\frac{(pq)^2}{q^2} - p^2\right]^{2n_1} + a_1^2 q^{4n_3} + a_2^{4n_1}} \cdot \frac{1}{(pq)^{2n_2} + b_1^2 q^{4n_4} + b_2^{4n_2}}, \quad (25)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 -постоянные, которые можно выбрать положительными; n_1, n_2, n_3, n_4 - целые положительные числа. При этом знаменатели в (8), (25) положительные при любых p и q . Можно предположить, что в (25) $2n_3 = n_1$ и $2n_4 = n_2$ так как в этом случае слагаемые в знаменателях в (25) будут иметь одинаковую масштабную размерность.

Интегралы (I.13), (I.14), (I.23), (I.26), (I.28) с $f_2(p, q)$ (8) сходятся при фиксированном q (за исключением $q = (0, q_1, q_2, 0)$) в случае выполнения условий с (11), (13) на целые числа n_1 и n_2 . Выполнение этих условий приводит к асимптотическому убыванию компонентов физических токов при $|p_V| \rightarrow \infty$, которое усиливается с ростом спина ВБ $J = l$. Например, для спина $J = 1, 2, 3, 4$ из (24) получаем, соответственно

$$|j_\mu(p, q)| \leq |p_V|^{-20}, \quad |j(p, q)_{\mu_1 \mu_2}| \leq |p_V|^{-24}, \quad |j(p, q)_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}| \leq |p_V|^{-28}, \quad |j(p, q)_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}| \leq |p_V|^{-32}. \quad (26)$$

Возможно, что наблюдаемое убывание амплитуд взаимодействий ВБ с ростом l при больших $|p_V|$, как раз и объясняется таким асимптотическим поведением токов. Представляет интерес сравнение вкладов ВБ и бесспиновой частицы в амплитуды. С этой целью можно исследовать в однопетлевом приближении вклад пары

виртуальных частиц (ВБ и бесспиновой частицы) в оператор собственной энергии бесспиновой частицы. Известно, что вклад двух бесспиновых виртуальных частиц дает логарифмическую расходимость [6, с. 288]. В традиционных подходах вклад бесспиновой частицы и ВБ в этот оператор дает степенную расходимость. Мы ожидаем, что в нашем подходе, вследствие асимптотического поведения токов (24), оператор собственной энергии бесспиновой частицы для ВБ с любым спином остается конечным.

Мы рассматривали вещественную положительную функцию $f(p, q)$. Однако можно допустить, что функция $f(p, q)$ может быть вещественной знакопеременной или даже комплексной. Тогда такие функции должны быть непрерывными при конечных значениях импульса ВБ p , а при $|p_V| \rightarrow \infty$ должны иметь асимптотику модуля, совпадающую с асимптотикой функции $f_2(p, q)$ (8).

В данной работе и в [1] для произвольного спина ВБ построена непротиворечивая модель простейшего взаимодействия ВБ, а именно, с двумя бесспиновыми частицами. Физические токи взаимодействия ВБ со спиновыми частицами можно построить аналогичным образом. В этом случае физический ток может содержать несколько слагаемых. Тогда интегралы (I.13) должны сходиться для каждого из этих слагаемых. При этом различные слагаемые могут содержать функции $f_2(p, q)$ (8) (или $f_4(p, q)$ (25)) с разными значениями чисел n_1 и n_2 . В связи с этим можно рассмотреть два обобщения нашей модели. В первом случае мы рассматриваем вершины взаимодействия одной высокоспиновой частицы с двумя частицами обладающими спином 0 или $\frac{1}{2}$.

Например, при условии сохранения чётности переход $J(p) \leftrightarrow \frac{1}{2}(q_1) + \frac{1}{2}(q_2)$ описывается двумя парциальными амплитудами, соответствующими двум тензорам. Каждая из этих амплитуд содержит свою функцию $f(p, q)$. Во втором случае рассматриваем вершину взаимодействия нескольких высокоспиновых частиц. В этом случае мы имеем теоремы о полях и токах и теоремы об асимптотике токов для каждой высокоспиновой частицы. Эти теоремы будут удовлетворены, если все парциальные амплитуды будут содержать произведения функций $f(p, q)$ (8) или (25), соответствующих каждой высокоспиновой частице. Поэтому следует ожидать, что при больших импульсах вершинные функции взаимодействия нескольких высокоспиновых частиц будут убывать быстрее вершинных функций взаимодействий одной высокоспиновой частицы и ещё быстрее взаимодействий частиц обладающих спинами 0 или $\frac{1}{2}$ (при близких значениях спинов высокоспиновых частиц).

Полученные в данной работе функции (8), (25) не единственные, которые удовлетворяют условию сходимости интегралов (I.13), (I.14), (I.23). Они основаны на пробной функции вида $x^m / (x^{2n} + a^{2n})$. Можно рассмотреть функции на основе другой пробной функции - $x^m / (x^4 + a^4)^n$. Однако неопределённый интеграл от этой функции имеет довольно сложный вид и это затрудняет анализ сходимости двойного интеграла. Ещё более сложным является анализ сходимости двойного интеграла от экспоненты, поскольку она должна зависеть от релятивистских инвариантов, а неопределённые интегралы от функций вида $\exp x / (x^2 + a^2)$ не выражаются через элементарные функции.

Недостаточное убывание компонентов токов в импульсном представлении (т.е. при расходимости интегралов (I.13), (I.14), (I.23)) амплитуды взаимодействий будут иметь степенной рост, что противоречит эксперименту. Например, распространение такого поведения на область асимптотически больших s может привести к тому, что вклад высокоспиновых частиц будет превышать ограничение Фруассара (полные сечения не должны возрастать при $s \rightarrow \infty$ быстрее $\ln^2 s$). В пространственно – временной картине такое поведение будет приводить к различным типам разрывов (например, к линиям скачков, δ - образным особенностям и производным δ - функции), т.е. разрывов, которые отсутствуют у токов бесспиновых частиц. Это можно

продемонстрировать на примере функции $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos px dp / (p^4 + a^4)$. Эта функция, её первая и вторая производная непрерывны, а третья производная имеет разрыв типа скачок [1]. Четвёртая производная содержит слагаемое $2\pi \delta(x)$, а пятая производная слагаемое $2\pi \delta'(x)$ и т.д. При этом интегралы, соответствующие четвёртой и пятой производных функции $\varphi(x)$ расходятся линейно и квадратично, соответственно.

При описании реакций взаимодействий высокоспиновых частиц с целью улучшения согласия с экспериментальными данными в вершинные функции, как правило, вводятся скалярные функции (формфакторы), которые устраняют степенной рост полюсных амплитуд. Однако при этом следует учитывать тензорную структуру токов. Если в некоторой модели токи не удовлетворяют теореме о полях и токах, то как обсуждалось в [1], [4], [5], система уравнений для компонентов поля противоречива, т.е. решение системы не существует при конечных значениях компонентов полевого тензора. Однако в случае спина $J = 1$ ток должен

удовлетворяют только условию сохранения. В некоторых частных случаях ток ВБ с $J = 1$ может сохраняться неявно. Так, если ток взаимодействия ВБ с двумя бесспиновыми частицами имеет вид $g(q_1 - q_2)_\mu$ (I.7), то этот ток сохраняется в случае $q_1^2 = q_2^2$ (например, при равных массах бесспиновых частиц). Поэтому в этом случае система уравнений совместная. Введение формфактора в вершинную функцию взаимодействия ВБ может улучшить согласие с экспериментальными данными в некоторой кинематической области. Расширение области изменения переменных довольно часто приводит к ухудшению согласия с экспериментом. Как правило рассматриваются формфакторы монополюсного или дипольного типа в области или только пространственно-подобных значений аргумента или только времени-подобных значений аргумента. Легко видеть, что учёт вершин взаимодействий частиц в области с противоположным знаком аргумента будет давать бесконечности. Эти бесконечности всегда возникают в амплитудах соответствующих петлевым диаграммам и в амплитудах, соответствующих некоторым полюсным диаграммам. Поэтому вершинные функции с формфакторами монополюсного и дипольного типов нельзя использовать в любых амплитудах. В связи с этим отметим, что функция $f(p, q)$ (8) (а также (25)) конечны при любых значениях компонентов импульсов p и q .

Можно предположить, что функции $f(p, q)$ при определённых значениях параметров, должны вычисляться в квантовой хромодинамике. Однако в настоящее время такие вычисления по-видимому не могут считаться надёжными.

В физике элементарных частиц и ядерной физике довольно часто используются значения констант и формфакторов в вершинных функциях полученные из экспериментальных данных. Рассмотрим вопрос об определении функции $f(p, q)$ из экспериментальных данных. В качестве бесспиновых частиц рассмотрим пионы. Среди ВБ рассмотрим резонансы, которые имеют довольно большие парциальные ширины распадов на два пиона: $\rho(770)$ (спин 1, отрицательная четность, изоспин 1, $M = 770 \pm 3$ МэВ, $\Gamma_i(\rho) = 153 \pm 2$ МэВ, $\Gamma(\rho \rightarrow \pi\pi) \approx \Gamma_i(\rho)$), $f_2(1270)$ (спин 2, положительная четность, изоспин 0, $M = 1274 \pm 5$ МэВ, $\Gamma_i(f_2) = 185 \pm 20$ МэВ, $\Gamma(f_2 \rightarrow \pi\pi) / \Gamma_i(f_2) = 0,86$), $\rho_3(1690)$ (спин 3, отрицательная четность, изоспин 1, $M = 1691 \pm 3$ МэВ, $\Gamma_i(\rho_3) = 215 \pm 20$ МэВ, $\Gamma(\rho_3 \rightarrow \pi\pi) / \Gamma_i(\rho_3) = 0,263$), $f_4(2050)$ (спин 4, положительная четность, изоспин 0, $M = 2047 \pm 11$ МэВ, $\Gamma_i(f_4) = 204 \pm 13$ МэВ, $\Gamma(f_4 \rightarrow \pi\pi) / \Gamma_i(f_4) = 0,17$) [7].

Функцию $f(p, q)$ (8) можно определить из экспериментальных данных, если выделить вклад диаграммы на рис. 1 для реакции $\pi N \rightarrow NB^*$ (с последующим распадом $B^* \rightarrow 2\pi$).

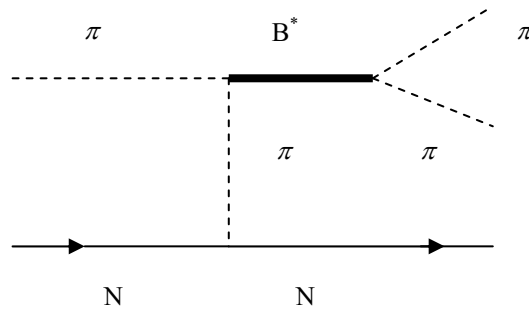


Рис.1. Диаграмма Фейнмана для реакции образования высокоспинового бозонного резонанса

Для пионов в реальном состоянии $(pq) = q_1^2 - q_2^2 = 0$. Поэтому в этом случае функция $f(p, q)$ (8) имеет вид $b^{-4n_2} [p^{4n_1} + a^{4n_1}]^{-1}$, т.е. зависит от одной переменной. К функции одной переменной в этом случае сводится и $f(p, q)$ (25), так как $p^2 + q^2 = 4\mu^2$, где μ - масса пиона. Амплитуда, соответствующая диаграмме на рис. 1, содержит произведение двух функций $f(p, q)$: одну для двух реальных пионов, а вторую для одного реального пиона и для другого виртуального пиона (который взаимодействует с нуклонами). С помощью метода экстраполяции в пионный полюс можно получить обе функции одинаковых аргументов и определить параметры $g^2 b^{-4n_2}$ и a из экспериментальных данных. Затем рассматривая виртуальный пион при переданном импульсе $t (t = (p_{2N} - p_{1N})^2)$, из экспериментальных данных можно определить константу g в токе и параметр b в функции $f(p, q)$, так как $(pq)^2 = (t - \mu^2)^2$. Реакция $\pi\pi$ - рассеяния описывается одной амплитудой и поэтому измеряется только дифференциальное сечение, из которого можно найти только модуль амплитуды. Для определения параметра в функции $f(p, q)$ из экспериментальных данных желательно иметь реальную и мнимую часть амплитуды $\pi\pi$ - рассеяния. С этой точки зрения более надёжным может оказаться

определение параметров в функции $f(p, q)$ для токов взаимодействий высокоспиновых фермионов (нуклонных резонансов) из экспериментальных данных относительно πN - рассеяния.

Реакция pp -рассеяния описывается одной амплитудой и поэтому измеряется только дифференциальное сечение, из которого можно определить только модуль амплитуды. Для определения параметров в функции $f(p, q)$ из экспериментальных данных желательно иметь реальную и мнимую части амплитуды. С этой точки зрения более надежным может оказаться определение параметров в функции $f(p, q)$ для токов взаимодействий высокоспиновых фермионов (нуклонных резонансов) из экспериментальных данных относительно pN - рассеяния.

ВЫВОДЫ

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

- 1) Убывание компонентов токов при $|p_\nu| \rightarrow \infty$ получено нами из условия сходимости интегралов (как следствие теоремы о асимптотике токов) без всякого сравнения с экспериментальными данными;
- 2) Функция $f(p, q)$ (8) обеспечивает выполнение теоремы об асимптотике токов при любых значениях констант a и b , отличных от нуля, в случае фиксированных значений компонентов вектора q ;
- 3) Представляет интерес проверка сходимости петлевых амплитуд с учетом вкладов ВБ и, прежде всего, вкладов ВБ в оператор собственной энергии бесспиновой частицы;
- 4) Важное значение имеет сравнение поведения вкладов ВБ с произвольным спином в полюсные диаграммы (например, для pp -рассеяния) при больших энергиях в нашем и традиционных подходах;
- 5) В связи с существованием высокоспиновых фермионов возникает необходимость построения токов их взаимодействий, которые удовлетворяют теореме о полях и токах, а также теореме об асимптотике токов.

В заключении автор благодарит Ю.В. Кулиша за постановку задачи и стимулирующие обсуждения, а также В.И. Храбустовского и О.А. Осмаева за важные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыбачук Е.В. Непротиворечивая модель взаимодействий высокоспиновых бозонов с двумя бесспиновыми частицами. I. Тензорная структура токов // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2006. - №. -744.- Вип. 3(31). – С.75-82.
2. Kulish Yu.V., Rybachuk E.V. Properties of high-spin boson interaction currents and elimination of power divergences // Problems of Atomic Science and Technology. - 2001. - №6(1). - P.84-87.
3. Куліш Ю.В., Рыбачук О.В. Властивості струмів взаємодій масивних високоспінових бозонів // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2003. - №585. – Вип. 1/21/. – С. 49-55.
4. Куліш Ю.В., Рыбачук О.В. Властивості струмів взаємодій високоспінових ферміонів // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2004. - №.619. – Вип. 1/23/. – С. 49-57.
5. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1984. – 598 с.
7. Particle Data Group. Review of particles properties // Phys. Lett. B. – 1988. – V.204. – P.1-486.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF CURRENTS FOR HIGH-SPIN BOSON INTERACTION WITH TWO SPINLESS PARTICLES IN CONSISTENT MODEL

E.V. Rybachuk

Ukrainian State Academy of Railway Transport
61050, Ukraine, Kharkov, Sq. Feyerbach, 7, e-mail: Kulish@kart equ.ua

The scalar function in the current for the interaction of high-spin boson (HSB) with two spinless particles is derived in a consistent model. This scalar function provides the convergence of the double infinite integrals of the module for these currents times the HSB momentum with respect to p_0 and p_3 (where HSB momentum $p = (p_0, 0, 0, p_3)$). The function is found for any HSB spin J ($J \geq 1$) at one exception. This exception is related to some spinless particle moments. In last case the integrals diverge logarithmically. This divergence must be compared with the quadratic divergence of similar integral for the current in the superrenormalizable $\lambda \varphi^3$ - theory. Using the found scalar function the asymptotic behaviour of the HSB interaction currents is derived. These currents for any spin J must decrease at least as $|p_\nu|^{-4J-16}$ when $|p_\nu| \rightarrow \infty$. In such a way, these currents must decrease with J . Therefore in our approach the amplitudes for HSB interactions must have better asymptotic behaviour (better convergence) than the amplitudes for the spinless particle interactions in $\lambda \varphi^3$ - theory.

KEY WORDS: higher spin, boson, integral, convergence, interaction, current, consistency.