

УДК 624.016.001.2

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ШПРЕНГЕЛЬНЫХ БАЛОК

Д-р техн. наук Г. Л. Ватуля, кандидати техн. наук Ю. П. Китов, М. А. Веревичева, асп. С. Д. Синчук

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ШПРЕНГЕЛЬНИХ БАЛОК

Д-р техн. наук Г. Л. Ватуля, кандидати техн. наук Ю. П. Кітов, М. А. Веревічева, асп. С. Д. Сінчук

SOME PECULIARITIES OF TRUSSED BEAMS OPTIMIZATION PROBLEM

Doctor of techn. sciences G. Vatulia, candidate of technical sciences Yu. Kitov, M. Verevicheva, post graduate student S. Sinchuk

Запропоновано алгоритм оптимізації шпренгельної балки, який базується на її конструктивних властивостях і на вимозі мінімуму згинальних моментів. Вузли нижнього пояса розташовані на мотузковій кривій. Параметрами оптимізації є відстані між стояками. Ефективність алгоритму підтверджується тестовим прикладом. Показано, що запропонований метод оптимізації забезпечує також мінімум об'єму шпренгельної балки.

Ключові слова: оптимізація, шпренгельна балка, згинальний момент, алгоритм.

Предложен алгоритм оптимизации шпренгельной балки, основанный на ее конструктивных особенностях и на требовании минимума изгибающих моментов. Узлы нижнего пояса располагаются на веревочной кривой. Параметрами оптимизации являются расстояния между стойками. Эффективность алгоритма подтверждается тестовым примером. Показано, что предложенный метод оптимизации обеспечивает также минимум объема шпренгельной балки.

Ключевые слова: оптимизация, шпренгельная балка, изгибающий момент, алгоритм.

The authors proposed the algorithm of trussed beam optimization based on its design features and requirement of bending moment's minimum. The statically determinate trussed beam was assumed in the article as a composite structure. The optimization was done under the constant loading. Nodes of truss bottom chord located on a funicular curve. Distances between pillars were assumed as optimization parameters. The materials cost for the truss beam construction, which consists of one material, is determined either by mass, or by volume. The optimization criterion of the truss beam with given topology will be the sum of the beam volumes and the truss, which are dependent on the variations of topology variables. The authors assumed that efficiency function (volume function) is smooth and continuous and its minimum is located in the point where all partial derivative from function of the unknown variables are equal to zero. The algorithm's efficiency was confirmed by the test example. It is proved that the offered optimization method also helps to obtain minimum of trussed beam's volume. Utilizing of described procedure helps to provide the logical design of structure optimization taking into account loading condition, combined loading and system indeterminacy.

Keywords: optimization; trussed beam; bending moment; algorithm; optimality criterion.

Введение. В настоящее время вопросы экономии материалов приобретают все большую актуальность при проектировании сооружений.

Распространенным видом искусственных сооружений, строящихся на пересечениях пешеходных и транспортных потоков, являются пешеходные мосты. Современное состояние техники строительства создает возможность применения прогрессивных расчетных схем, в частности комбинированных. В качестве одного из элементов пролетных строений пешеходных мостов применяется балка, усиленная шпренгелем.

Разработан ряд методов решения различных задач оптимального проектирования конструкций в канонической постановке [1-8]. Один из методов оптимизации трехпролетной балки, позволяющий улучшить показатели материалоемкости, представлен в [9, 10].

В настоящей работе предлагается метод оптимизации шпренгельных балок, основанный на двух положениях: 1) в комбинированных балочных конструкциях определяющими по затратам материала являются элементы, испытывающие напряженное состояние в виде сжатия с изгибом; 2) в элементах, работающих на сжатие с изгибом, уменьшение размеров сечения в большей степени определяется

уменьшением изгибающего момента. Поэтому в данной работе предлагается критерий оптимальности шпренгельных балок, основанный на минимизации значений изгибающих моментов.

Цель и задача исследований. Шпренгельные балки как представители распорных систем обладают следующим свойством: если нижний пояс шпренгеля очерчен по веревочной кривой, соответствующей заданной постоянной нагрузке, и связи балки с нижним поясом шпренгеля образуют некоторый континуум, то изгибающие моменты в балке равны нулю. На самом деле конструкция предполагает, что связь балки и нижнего пояса шпренгеля осуществляется в виде ряда стоек (рис. 1). В результате в балке все же возникнут изгибающие моменты – отрицательные над стойками и положительные между ними. Величины их зависят от количества стоек и их расположения по пролету.

Целью работы является разработка алгоритма определения оптимального расположения стоек z_j при заданном их количестве n (z_j – расстояние между стойками с номерами $j-1$ и j , $j=1, K, n/2$).

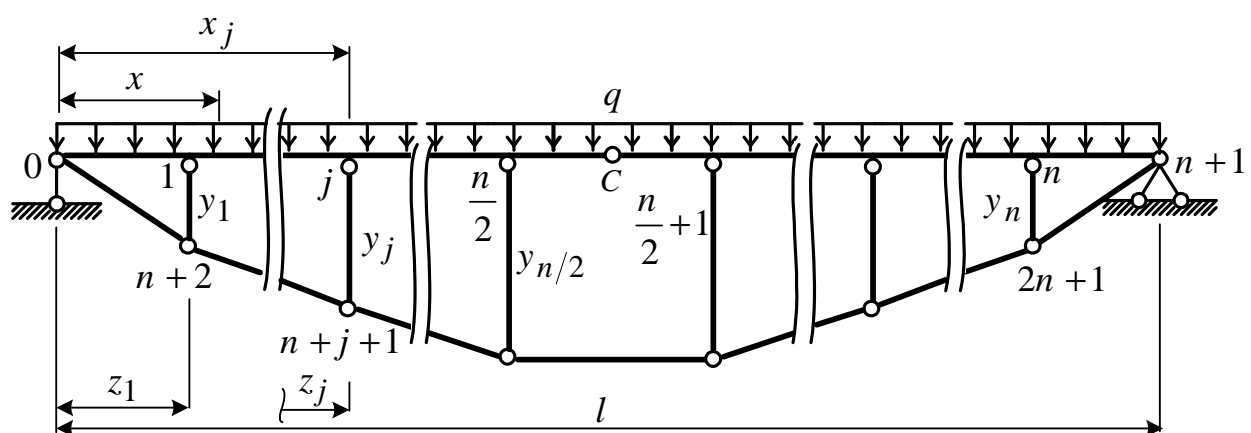


Рис. 1. Схема шпренгельной балки

Для получения оптимального проекта шпренгельной балки необходимо найти такие значения переменных, чтобы затраты на изготовление балки (объем материала, масса и стоимость) были наименьшими. При этом должны удовлетворяться:

– условие прочности растянутых элементов

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq mR_y, \text{ или } A \geq \frac{N}{mR_y}; \quad (1)$$

– условие устойчивости сжатых стержней

$$\sigma = \frac{|N|}{\varphi A} \leq mR_y, \text{ или } A \geq \frac{|N|}{\varphi mR_y}; \quad (2)$$

– условие прочности для балки постоянного сечения, работающей на изгиб со сжатием

$$\sigma = \frac{|M|}{W} + \frac{|N|}{A} \leq mR_y, \text{ или } A \geq \frac{|N|}{\varphi mR_y}; \quad (3)$$

– конструктивные ограничения гибкости стержней

$$\lambda \leq \lambda_{adm}, \text{ или } A(\lambda) \geq A_{adm}. \quad (4)$$

Последнее условие можно записать в виде

$$A_{adm} = \left(\frac{l}{m_1 \lambda_{adm}} \right)^2, \quad m_1 = \sqrt{\frac{J}{A^2}}. \quad (5)$$

Для решения задачи оптимизации получим общие зависимости для определения реакций, усилий, площадей сечений и объема шпренгельной балки от оптимизируемых переменных (размеры панелей z_j и стрела веревочной кривой f). Зависимости приведены для левой половины конструкции.

Реакции и усилия. Очевидно, при заданном нагружении (рис. 1) $R_0 = \frac{ql}{2}$.

Усилия в сечениях балочного элемента

Усилие N_{cp} в среднем (горизонтальном) элементе нижнего пояса (рис. 1, 2):

$$M_c = 0: \quad R_0 \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} - N_{cp} \cdot y_{n/2} = 0, \quad N_{cp} = \frac{ql^2}{8y_{n/2}}.$$

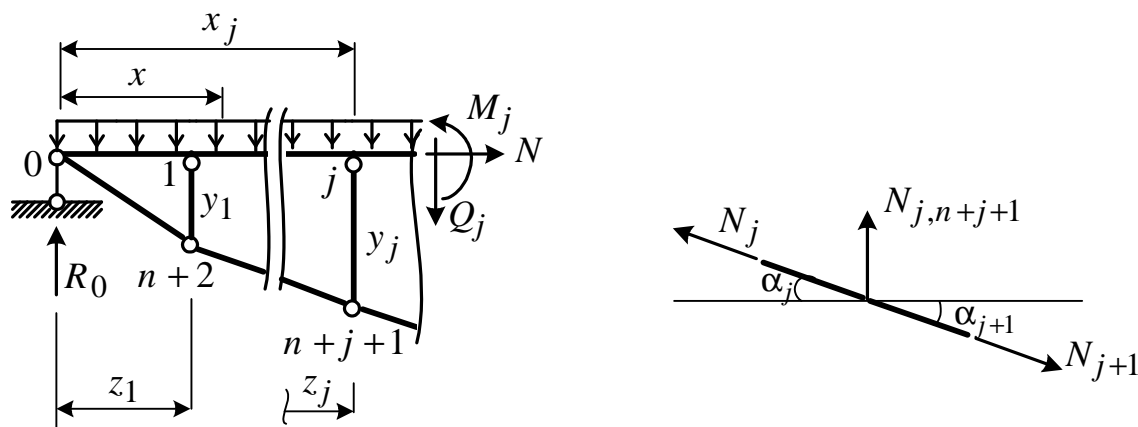


Рис. 2. Усилия, возникающие в элементах и узлах шпренгельной балки

Из условия $\sum X = 0$ следует

$$N = -N_{cp} = -\frac{ql^2}{8y_{n/2}}.$$

Далее, $\sum_{лев} M = 0$, откуда в произвольном сечении x , где $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ (рис. 2), имеем

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{8y_{n/2}} \left[y_{j-1} + \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}(x - x_{j-1}) \right], \quad (6)$$

в частности в сечениях над стойками (в опорных сечениях)

$$M_j = \frac{ql}{2}x_j - \frac{qx_j^2}{2} - \frac{ql^2}{8y_{n/2}}y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n/2. \quad (7)$$

Усилия в стойках:

$$N_{j,n+j+1} = -\frac{ql^2}{8y_{n/2}}(\operatorname{tg} \alpha_j - \operatorname{tg} \alpha_{j+1}) = -\frac{ql^2}{8y_{n/2}} \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{z_j} - \frac{y_{j+1} - y_j}{z_{j+1}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n/2. \quad (8)$$

Усилия в элементах нижнего пояса

Принимаем, что номер элемента нижнего пояса совпадает с номером соответствующей панели. Тогда

$$N_j = \frac{ql^2}{8y_{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\cos \alpha_j} = \frac{ql^2}{8y_{\frac{n}{2}}} \frac{\sqrt{(y_j - y_{j-1})^2 + z_j^2}}{z_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n/2, \quad N_{cp} = N_{n/2+1} = \frac{ql^2}{8y_{n/2}}. \quad (9)$$

Объем материала шпренгельной балки. Целевая функция. Затраты материала для изготовления шпренгельной балки, состоящей из материала одного вида, определяются либо объемом, либо массой, что фактически одно и то же. Поэтому в качестве целевой функции при оптимальном проектировании шпренгельной балки с заданной топологией принимают сумму объемов всех элементов, зависящих от вариации топологических переменных.

Балочный элемент

В пределах каждой панели (участок балки между стойками) балочного элемента ($j = 1, 2, \dots, n/2$) изгибающий момент достигает некоторого наибольшего значения $M_{j,max}$. Используя каждое из этих значений, можно согласно формуле (6) определить объем балочного элемента:

$$V^{(b,j)} = \frac{l}{mR_y} \left(\frac{A}{W} |M_{j,max}| + |N| \right).$$

Расчетное сечение балочного элемента определяется исходя из наибольшего значения изгибающего момента:

$$V^{(\bar{\sigma})} = \max V^{(\bar{\sigma},j)}.$$

Если наибольшее по модулю значение момента M_{s0} достигается в точке x_{s0} на интервале $x_{s-1} \leq x_{s0} \leq x_s$, то

$$V^{(\bar{\sigma})} = \frac{l}{mR_y} \left(\frac{A}{W} |M_{s0}| + |N| \right),$$

и согласно выражению (6)

$$V^{(\bar{\sigma})} = \frac{ql}{2mR_y} \left\{ \frac{A}{W} \left| x_{s0} (l - x_{s0}) - \frac{l^2}{4y_{n/2}} \left[y_{s-1} + \frac{y_s - y_{s-1}}{x_s - x_{s-1}} (x_{s0} - x_{s-1}) \right] \right| + \frac{l^2}{4y_{n/2}} \right\}. \quad (10)$$

Стойки

Согласно формулам (2) (8), объемы стоек равны:

$$V_{j,n+j+1} = \frac{ql^2 y_j}{8 y_{n/2} \varphi_{j,n+j+1} mR_y} \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{z_j} - \frac{y_{j+1} - y_j}{z_{j+1}} \right), \quad j = 1, K, \frac{n}{2} - 1;$$

$$V_{n/2,n+n/2+1} = \frac{ql^2}{8 \varphi_{n/2,n+n/2+1} mR_y} \frac{y_{n/2} - y_{n/2-1}}{z_{n/2}}. \quad (11)$$

Определение площадей сечений сжатых стержней производится методом последовательных приближений. Для этого используется аналитическая зависимость

$\varphi_j(\lambda)$, полученная с помощью интерполяционного полинома Лагранжа на основе табличных значений [11] для интервала гибкости $60 \leq \lambda \leq 150$:

$$\varphi_j(\lambda) = 1,111 \cdot 10^{-6} \cdot \lambda_{np}^3 - 1,389 \cdot 10^{-4} \lambda_{np}^2 - 2,5 \cdot 10^{-3} \lambda_{np} + 0,86, \quad \frac{y_j}{m_1 \sqrt{A}} - 0,6. \quad (12)$$

Если $\lambda < 60$, принимается $\varphi = 1$.

Элементы нижнего пояса

Согласно формулам (1), (9), объемы элементов нижнего пояса равны:

$$V_j = \frac{ql^2}{8y_{n/2}mR_y} \frac{(y_j - y_{j-1})^2 + z_j^2}{z_j}, \quad j = 1, K, \frac{n}{2}; \quad V_{n/2+1} = \frac{ql^2}{8y_{n/2}mR_y} (l - 2x_{n/2}). \quad (13)$$

Таким образом, с учетом формул (10) – (12), объем шпренгельной балки (или целевая функция) имеет вид

$$V = V^{(\delta)} + 2 \sum_{j=1}^{n/2} V_{j,n+j+1} + 2 \sum_{j=1}^{n/2+1} V_j. \quad (14)$$

Вид первого слагаемого целевой функции $V^{(\delta)}$ зависит от значений переменных, в частности от положения сечения, в котором достигается наибольший момент. Как видно из формул (6), (7) и (10), при непрерывном изменении переменных z_j максимальный изгибающий момент может скачкообразно переходить от одного сечения к другому. Из этого следует, что целевая функция (14) является разрывной, и ее минимизация приравнением производной нулю невозможна. Значит, классический метод оптимизации конструкции не является приемлемым.

Ниже предлагается метод оптимизации, основанный на использовании конструктивных особенностей шпренгельной балки.

Метод оптимизации, основанный на свойствах распорных систем

Предлагается метод оптимизации шпренгельных балок, основанный на следующих положениях.

1. В комбинированных балочных конструкциях определяющими по затратам материала являются элементы, испытывающие напряженное состояние в виде сжатия с изгибом.

2. В элементах, работающих на сжатие с изгибом, уменьшение размеров сечения в большей степени определяется уменьшением изгибающего момента.

3. Изгибающие моменты возрастают от опоры к середине пролета.

4. Шпренгельные балки относятся к распорным системам, представителями которых являются арки. Следовательно, у тех и других имеются некоторые общие свойства, например, в трехшарнирных статически определимых арках сечения испытывают внецентренное сжатие, т. е. в них возникают изгибающий момент и продольная сила. Естественно, чем меньше

значения изгибающих моментов, тем меньше размеры сечения, исходя из условия прочности, а значит, меньше затраты материала на изготовление арки, меньше ее стоимость.

Поэтому рациональной, или оптимальной аркой, находящейся под действием, например, только постоянной нагрузки, принято называть арку, ось которой очерчена по веревочной кривой, определяемой видом нагрузки. Во всех сечениях такой арки изгибающие моменты равны нулю, и для ее изготовления необходимо затратить меньше материала, чем для арок, очерченных по другим кривым.

Можно предположить, что этим свойством обладают при определенных условиях и шпренгельные балки. А именно, если нижний пояс шпренгеля очерчен по кривой, соответствующей действующей постоянной нагрузке, и связи балочного элемента с нижним поясом шпренгеля образуют некоторый континуум, то изгибающие моменты в балочном элементе равны нулю.

На самом деле конструкция шпренгельной балки (рис. 1) предполагает, что связи балочного элемента и нижнего пояса шпренгеля осуществляются в виде ограниченного количества стержней (стоек). В результате в балке все же возникнут изгибающие моменты – отрицательные над стойками и преимущественно положительные между ними. Значения их зависят от количества стоек и их расположения в пролете. При изменении положения стоек величины одних моментов увеличиваются, других – уменьшаются. Рациональным является такое их расположение, при котором абсолютные значения моментов уравниваются и являются наименьшими.

5. Изгибающие моменты не зависят от стрелы шпренгеля, если шпренгель очерчен по веревочной кривой для трехшарнирной

арки. Это будет видно далее из формул (20).

На основании анализа вышеизложенных положений предлагается метод

оптимизации шпренгельных балок, основанный не на минимизации объема, а на минимизации изгибающих моментов в балочном элементе конструкции, т. е.

$$M_{расч} = \max_{j=1, 2, K, n/2} \left(\left| M_j^{on} \right|, \left| M_j^{max} \right| \right) \rightarrow \min, \quad (15)$$

где M_j^{on} – изгибающий момент в сечении балочного элемента над j -й стойкой;

M_j^{max} – экстремальный изгибающий момент в сечении между $(j-1)$ -й и j -й стойками (в пределах j -й панели).

При этом должны удовлетворяться два условия оптимальности.

Первое условие

$$\left| M_{n/2}^{on} \right| = \left| M_{n/2}^{max} \right| \quad (16)$$

должно выполняться всегда.

Второе условие будет различным, оно выбирается в зависимости от вида оптимизируемой конструкции балочного элемента:

а) при балочном элементе постоянного сечения по длине всего пролета

$$M_j^{max} = M_{n/2}^{max}, \quad j=1, 2, K, n/2-1; \quad (17)$$

б) при балочном элементе кусочно-постоянного сечения (постоянного в промежутках между стойками)

$$M_j^{max} = \left| M_j^{on} \right|, \quad j=1, 2, K, n/2-1. \quad (18)$$

Алгоритм оптимизации

Сформулируем алгоритм оптимального решения задачи для случая шпренгельной балки, которая находится под действием постоянной равномерно распределенной нагрузки q . В этом случае веревочной кривой является квадратная парабола. Поэтому узлы нижнего пояса шпренгеля считаем расположенными на квадратной параболе:

$$y(x) = 4f x(l-x)/l^2. \quad (19)$$

Опорный и максимальный изгибающие моменты согласно формулам (6), (7), (18) выражаются следующим образом:

$$M_j^{max} = \frac{ql}{2} x_{j,max} - \frac{q(x_{j,max})^2}{2} - \frac{ql^2}{8(l-x_{n/2})x_{n/2}} \times \left[(l-x_{j-1})x_{j-1} + \frac{(l-x_j)x_j - (l-x_{j-1})x_{j-1}}{z_j} (x_{j,max} - x_{j-1}) \right] \quad (20)$$

где $x_{j,max}$ – расстояние от начала балки до экстремума в j -й панели,

$$x_{j,max} = \frac{l}{2} \left\{ 1 - \frac{l[(l-x_j)x_j - (l-x_{j-1})x_{j-1}]}{4z_j(l-x_{n/2})x_{n/2}} \right\}. \quad (21)$$

Как было сказано ранее, поперечное сечение балочного элемента может быть либо постоянным по длине пролета, либо кусочно-постоянным (постоянным в пределах одной панели). Поэтому предложенный итерационный алгоритм оптимизации, начиная со второго приближения, разделяется на два подвида, указанных ранее.

Алгоритм оптимизации балочного элемента постоянного сечения

Приближение 0. В начальном приближении расстояния между стойками принимаем одинаковыми, разбивая полупролет на $(n/2)+1$ равных частей:

$$z_j^{(0)} = \frac{l}{2(n/2+1)}, \quad j=1, K, n/2.$$

Вычисляем по формулам (20), (21) изгибающие моменты M_j^{max} , M_j^{on} ($j=1, K, n/2$) в начальном (нулевом) приближении.

Далее будем изменять каждое значение z_j , $j=1, K, n/2$ с заранее выбранным шагом, например, $\Delta z = 0,01 \text{ м}$ до достижения некоторого указанного ниже условия. Правила изменения z_j приведены при описании процесса оптимизации.

Приближение 1. Начинаем оптимизацию с панели с номером $n/2$. На первом приближении необходимо уравнивать значения $|M_{n/2}^{max}|$ и $|M_{n/2}^{on}|$, изменяя для этого $z_{n/2}$.

Если $M_{n/2}^{max} < 0$ или $M_{n/2}^{max} > 0$, но $M_{n/2}^{max} < |M_{n/2}^{on}|$, то для удовлетворения условия (16) начальное значение переменной $z_{n/2}^{(0)}$ необходимо

увеличивать. При $M_{n/2}^{max} > |M_{n/2}^{on}|$ значение $z_{n/2}^{(0)}$ нужно уменьшать.

Для каждого полученного значения $z_{n/2}$ вычисляем соответствующие $M_{n/2}^{max}, M_{n/2}^{on}$ до тех пор, пока не будет достигнуто приближенное равенство $|M_{n/2}^{max}| \approx |M_{n/2}^{on}|$ (очевидно, что при этом будет получено $M_{n/2}^{max} > 0$). Это имеет место при выполнении условия, при котором величины $|M_{n/2}^{max}| - |M_{n/2}^{on}|$ при двух соседних значениях ($i, i+1$) имеют разные знаки.

Соответствующее значение $z_{n/2}$ обозначаем $z_{n/2}^{(1)}$. Таким образом, значения переменных после первого приближения равны $(z_{n/2}^{(0)}, z_{n/2}^{(0)}, z_{n/2}^{(1)})$.

Приближение j. На j -м приближении изменяем значение панелей с номерами $n/2, n/2-1, K, n/2-j+1$.

Изменяем $z_{n/2}, z_{n/2-1}, z_{n/2-j+1}$ пошагово по формулам:

$$z_{n/2}^{(j,i)} = z_{n/2}^{(j,i-1)} \pm \Delta z, \quad i=1,2,K,$$

$$z_{n/2-1}^{(j,k1)} = z_{n/2-1}^{(j,k1-1)} \pm \Delta z, \quad k1=1,2,K$$

.....

$$z_{n/2-j+1}^{(j,kj)} = z_{n/2-j+1}^{(j,kj-1)} \pm \Delta z, \quad kj=1,2,K,$$

$$z_m = z_m^{(0)} = const, \quad m \leq n/2 - j.$$

Верхний индекс (j, k) или (j, i) означает: j – номер приближения, k или i – номер шага на этом приближении.

Знак добавки Δz выбирается в соответствии со следующим правилом:

– если выполняется одно из соотношений

$$M_m^{max} < 0 \text{ или } 0 < M_m^{max} < M_{m+1}^{max},$$

то z_m нужно увеличивать; если не выполняется ни одно из этих условий, z_m нужно уменьшать;

– если $M_{n/2}^{max} < |M_{n/2}^{on}|$, то $z_{n/2}$

нужно увеличивать, иначе – уменьшать.

Изменяем далее переменные пошагово по сформулированному правилу (т. е. прибавляя или отнимая Δz) до одновременного выполнения условий:

$$M_{n/2}^{max} \approx |M_{n/2}^{on}| \quad \text{и} \quad M_m^{max} \approx M_{m+1}^{max}$$

($m = n/2 - j + 1, K, n/2 - 1$), т. е. когда

$$\left(M_{n/2}^{max} - |M_{n/2}^{on}|\right) \quad \text{и} \quad \left(M_m^{max} - M_{m+1}^{max}\right)$$

($m = n/2 - j + 1, K, n/2 - 1$) на двух соседних шагах имеют разные знаки.

Соответствующие значения переменных после j -го приближения оптимизации равны

$$\left(z_1^{(0)}, K, z_{n/2-j}^0, z_{n/2-j+1}^{(j)}, K, z_{n/2}^{(j)}\right).$$

Аналогичным образом варьируем все z_j ($j = 1, K, n/2$), совершая при этом $n/2$ приближений.

В результате получим оптимальные значения $\left(z_1^{(n/2)}, K, z_{n/2}^{(n/2)}\right)$.

Алгоритм оптимизации балки кусочно-постоянного сечения

Алгоритм оптимизации балочного элемента этого подвида отличается от алгоритма балочного элемента с постоянным сечением критерием оптимизации (см. формулы (17), (18)) и правилами, по которым пересчитываются переменные z , начиная со второго приближения.

Правила расчетов на 0-м и 1-м приближениях оптимизации не изменяются.

Приближение j . На j -м знак добавки Δz выбирается в соответствии со следующим правилом:

– если выполняется одно из соотношений

$$M_m^{max} < 0 \quad \text{или} \quad 0 < M_m^{max} < |M_m^{on}|,$$

$$m = n/2 - j + 1, K, n/2 - 1,$$

то z_m нужно увеличивать; если не выполняется ни одно из этих условий, z_m нужно уменьшать;

– если $M_{n/2}^{max} < |M_{n/2}^{on}|$, то $z_{n/2}$ нужно

увеличивать, а если $M_{n/2}^{max} > |M_{n/2}^{on}|$ – уменьшать.

Изменяем далее переменные пошагово по сформулированному правилу (т. е. прибавляя или отнимая Δz) до одновременного выполнения условий:

$$M_{n/2}^{max} \approx |M_{n/2}^{on}| \quad \text{и} \quad M_m^{max} \approx |M_m^{on}|$$

($m = n/2 - j + 1, K, n/2 - 1$), т. е. когда

$$\left(M_{n/2}^{max} - |M_{n/2}^{on}|\right) \quad \text{и} \quad \left(M_m^{max} - |M_m^{on}|\right)$$

на двух соседних шагах имеют разные знаки.

Соответствующие значения переменных после j -го приближения равны

$$\left(z_1^{(0)}, K, z_{n/2-j}^0, z_{n/2-j+1}^{(j)}, K, z_{n/2}^{(j)}\right).$$

Аналогичным образом варьируем все z_j ($j = 1, K, n/2$), совершая при этом $n/2$ приближений.

Оптимизация стрелы шпренгеля

Если узлы шпренгеля лежат на теоретической кривой, очерченной по квадратной параболе, то опорный и максимальный изгибающие моменты не зависят от стрелы f . Это видно из выражений (20). Значит, и размеры панелей z_j не изменяются при изменении f .

Поэтому можно определять оптимальное значение стрелы f , считая размеры панелей постоянными и равными уже определенным оптимальным значениям $z_1^{(n/2)}, K, z_{n/2}^{(n/2)}$. Для этого нужно составить и решить уравнение с одним неизвестным:

$$\partial V / \partial f = 0. \quad (22)$$

Согласно формуле (14), это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{\partial V^{(b)}}{\partial f} + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} \frac{\partial V_j^{(c)}}{\partial f} + \frac{\partial V_{n/2}^{(c)}}{\partial f} + 2 \sum_{j=1}^{n/2} \frac{\partial V_j^{(u)}}{\partial f} + \frac{\partial V_{n/2+1}^{(u)}}{\partial f} = 0. \quad (23)$$

Все производные в уравнении (23) кратны множителю $K = ql/2mR_y$, на который можно сократить обе части уравнения. Выражения для производных имеют вид:

– для балочного элемента из формулы (10)

$$\frac{1}{K} \frac{\partial V_b}{\partial f} = - \frac{l^4}{16f^2 x_{n/2} (l - x_{n/2})}; \quad (24)$$

очевидно, эта формула справедлива в случае постоянного и кусочно-постоянного сечения;

– для стоек, согласно формулам (11), (12)

$$\frac{1}{K} \frac{\partial V_j^{(c)}}{\partial f} = \frac{x_j (l - x_j) (x_{j+1} - x_{j-1})}{l x_{n/2} (l - x_{n/2})} \frac{1}{\varphi_j^2} \left(\varphi_j - f \frac{\partial \varphi_j}{\partial f} \right), \quad j = 1, n/2 - 1; \quad (25)$$

$$\frac{1}{K} \frac{\partial V_{n/2}^{(c)}}{\partial f} = \frac{l - x_{n/2} - x_{n/2-1}}{l} \frac{1}{\varphi_{n/2}^2} \left(\varphi_{n/2} - f \frac{\partial \varphi_{n/2}}{\partial f} \right); \quad (26)$$

– для элементов нижнего пояса, согласно формуле (13),

$$\frac{1}{K} \frac{\partial V_{n/2+1}^{(u)}}{\partial f} = - \frac{l^2}{16f^2 x_{n/2} (l - x_{n/2})} (l - 2x_{n/2}); \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \frac{\partial V_j^{(u)}}{\partial f} = & - \frac{l^3}{16f (x_j - x_{j-1}) x_{n/2} (l - x_{n/2})} \times \\ & \times \left\langle - \frac{1}{f} \left\{ \frac{16f^2}{l^4} [x_j (l - x_j) - x_{j-1} (l - x_{j-1})]^2 + (x_j - x_{j-1})^2 \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{32f}{l^4} [x_j (l - x_j) - x_{j-1} (l - x_{j-1})]^2 \right\rangle, \quad j = 1, K, n/2. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставив в уравнение (23) решим его, например, методом выражения для производных (24) – (28), половинного деления.

Результаты оптимизации шпренгельной балки

В соответствии со сформулированным алгоритмом, была численно решена задача оптимизации шпренгельной балки с тремя стойками ($n = 6$), пролет балки $l = 24 \text{ м}$; начальное значение стрелы $f = 3,6 \text{ м}$; интенсивность распределенной нагрузки $q = 6 \text{ т/м}$; материал балки – сталь (расчетное сопротивление $mR_y = 2000 \text{ кг/см}^2$). Сечение балочного элемента – прямоугольное с соотношением размеров высоты и ширины $h/b = 5$; сечение стоек и элементов нижнего пояса – кольцевое с диаметром D и толщиной стенки $0,025D$.

В предположении, что сечение балочного элемента постоянно, получены значения пролетов $z_1 = 3,11 \text{ м}$, $z_2 = 3,6 \text{ м}$, $z_3 = 3,88 \text{ м}$. При этом объем балки $V = 497625,2 \text{ см}^3$. Для случая кусочно-постоянного сечения получено $z_1 = 2,34 \text{ м}$, $z_2 = 3,68 \text{ м}$, $z_3 = 4,38 \text{ м}$. Значение объема $V = 36492632 \text{ см}^3$, что на 26,7 % меньше объема балки постоянного сечения.

При найденных ранее оптимальных значениях панелей получены оптимальная стрела и объем:

– для балочного элемента постоянного сечения

$$f = 6,55 \text{ м}, V = 428425,4 \text{ см}^3,$$

что меньше объема при оптимальных значениях панелей и начальном значении стрелы ($f = 3,6 \text{ м}$) на 14 %;

– для балочного элемента кусочно-постоянного сечения

$$f = 6,71 \text{ м}, V = 315924,6 \text{ см}^3,$$

что меньше объема балки при оптимальных значениях панелей и начальном значении стрелы на 13,4 % и меньше объема балки с постоянным сечением и оптимальной в случае постоянного сечения стрелой на 26,3 %.

Выводы. Исследование свойств функции объема шпренгельной балки показало, что величина объема не может быть принята в качестве целевой функции при оптимизации, т. к. является разрывной. Поэтому классический метод нахождения оптимального решения оказывается неприемлемым.

В работе предложен метод и алгоритм оптимизации, основанный на использовании конструктивных особенностей шпренгельной балки и требующий минимизации возникающих изгибающих моментов.

Показано, что в случае постоянной распределенной нагрузки расположения узлов нижнего пояса на веревочной кривой можно определять оптимальное значение стрелы при постоянных значениях панелей. На основании предложенного алгоритма проведены численные оценки размеров шпренгельной балки заданных размеров. Показано, что предложенный метод обеспечивает минимизацию объема балки (примерно на 39 % по сравнению с балкой с одинаковыми панелями), причем объем в случае кусочно-постоянного сечения балочного элемента существенно меньше объема в случае постоянного сечения (примерно на 27 %). Для заданной балки получено оптимальное значение стрелы, которое уменьшает объем балки еще примерно на 14 %.

Список использованных источников

1. Виноградов, А. И. Проблема оптимального проектирования в строительной механике [Текст] / А.И Виноградов. – Харьков: Вища школа, 1973. – 168 с.

2. Лазарев, И. Б. Математические методы оптимального проектирования конструкций [Текст] / И.Б. Лазарев. – Новосибирск: НИИЖТ, 1974. – 191 с.
3. Китов, Ю. П. Влияние параметров проектирования на оптимальность конструкции стальных балок [Текст] / Ю.П. Китов, Г.Л. Ватуля // Зб. наук. праць. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – Вип. 125. – С. 24-33.
4. Китов, Ю. П. Некоторые соображения о критериях оптимальности [Текст] / Ю.П. Китов, Г.Л. Ватуля, М.А. Веревичева // Зб. наук. праць Укр. держ. акад. залізнич. трансп. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – Вип. 143. – С. 124-131.
5. Клюев, С. В. Оптимальное проектирование строительных конструкций на основе эволюционных и генетических алгоритмов [Текст] / С.В. Клюев, А.В. Клюев. – Lambert, 2011. – 128 с.
6. Чихладзе, Е.Д. Спрощена діаграма граничних станів сталобетонного елемента в задачах оптимізації стержневих конструкції [Текст] / Е.Д. Чихладзе, М.Г. Черненко // Зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2003. – Вип. 59. – Кн. 1. – С. 310 – 317.
7. Farzin Aminifar. Optimal Design of Truss Structures via an Augmented Genetic Algorithm [Text] / Farzin Aminifar, Farrokh Aminifar, Daryoush Nazarpour // Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences. – Vol. 37 (2013) – p. 56 – 68.
8. Dimou C. K. Reliability-Based Optimal Design of Truss Structures Using Particle Swarm Optimization [Text] / С. К. Dimou, V. К. Koumousis // Journal of Computing in Civil Engineering, ASCE. – Vol. 2/3 (2009) – p. 100 – 109.
9. Основы расчета и проектирования комбинированных и сталобетонных конструкций [Текст] / Э.Д. Чихладзе, Г.Л. Ватуля, Ю.П. Китов и др.; под ред. Э.Д. Чихладзе. – К.: Транспорт Украины, 2006. – 136 с.
10. Китов, Ю.П. Определение частот и периодов собственных колебаний комбинированных конструкций [Текст] / Ю.П. Китов, Г.Л. Ватуля // Теорія і практика будівництва: вісник Національного університету «Львівська політехніка». – Львів, 2010. – Вип. 662. – С. 225-229.
11. Фесик, С.П. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / С.П. Фесик. – К.: Будівельник, 1982. – 230 с.

Ватуля Глеб Леонідович, д-р техн. наук, доцент, заведувач кафедри будівельної механіки і гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел. (057) 730-10-70. E-mail: vatulya@kart.edu.ua.

Кітов Юрій Петрович, канд. техн. наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки і гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел. (057) 730-10-70.

Веревичева Марина Анатоліївна, канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки і гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел. (057) 730-10-70.

Сінчук Софія Димитріївна, аспірант кафедри будівельної механіки і гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел. (057) 730-10-70.

Glib Vatulia, DSc, Associated Professor, Head of Building Mechanics and Hydraulics Department. Tel. (057) 730-10-70.

Yurij Kitov, PhD, Associated Professor, Professor of Building Mechanics and Hydraulics Department. Tel. (057) 730-1070

Marina Verevicheva, PhD, Associated Professor, Associated Professor of Building Mechanics and Hydraulics Department. Tel. (057) 730-10-70.

Sofia Sinchuk, Post Graduate Student of Building Mechanics and Hydraulics Department. Tel. (057) 730-10-70.

Стаття прийнята 18.04.2016 р.