

МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механіки і проектування машин

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання розрахунково-графічних робіт
з дисципліни**

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ «Динаміка»

Загальні принципи механіки.

**Використання загального рівняння динаміки
до дослідження механічної системи**

Харків – 2019

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 11 лютого 2019 р., протокол № 10.

Методичні вказівки призначені для студентів всіх спеціальностей будівельного та механіко-енергетичного факультетів денної форми навчання.

Укладачі:

доценти Н. А. Аксьонова,
О. В. Оробінський,
К. В. Іванченко

Рецензент

проф. О. В. Братченко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково-графічних робіт
з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ «Динаміка»

Загальні принципи механіки.

Використання загального рівняння динаміки
до дослідження механічної системи

Відповідальний за випуск Аксьонова Н. А.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 12.04.19 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 2,5. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Методичні поради до виконання розрахунково-графічних робіт.....	4
2 Теоретичні рекомендації.....	5
3 Задачі і типові звіти.....	30
Питання для самоконтролю і підготовки до захисту РГР, модульного тестування, заліків та іспитів з тематики задачі.....	45
Список літератури.....	46

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механіко-енергетичного та будівельного факультетів на I та II курсах дисципліни «Теоретична механіка». При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль належить лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів «Статика», «Кінематика», «Динаміка» [1, 2]. У ході вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять і виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР).

Тематика даної методичної розробки «Використання загального рівняння динаміки до дослідження механічної системи» є однією із найскладніших в розділі «Динаміка точки». Вищесказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичних вказівок до виконання розрахунково – графічних робіт студентів будівельного та механіко-енергетичного факультетів, які дають комплексну уяву про склад, тематику і загальний обсяг окремої задачі розділу, типовий звіт з принципами виконання і варіанти задач для РГР, питання для самоконтролю і підготовки до тестування, іспиту (або заліку), а також рекомендовану літературу.

Методичне забезпечення призначено для студентів денної форми навчання усіх спеціальностей.

1 МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ

Програмою дисципліни «Теоретична механіка» передбачено виконання розрахунково-графічних робіт (РГР) з розділу «Динаміка».

Зміст РГР, а саме номери варіантів, уточнюються викладачем під час аудиторних занять.

Кожна задача супроводжується рисунками і таблицею (номер рисунка з тим самим номером, що й умова задачі в таблиці).

РГР виконуються на аркушах формату А4. Типові звіти до РГР здійснюються відповідно до встановлених вимог: обов'язково вказуються назва кафедри, дисципліни, номер роботи, рік, прізвище та ініціали студента.

Розв'язання задач повинно супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати й ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв'язання задач мають бути зроблені акуратно із застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх використовуваних величин: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Слід звернути увагу на те, що розрахункова схема виконується строго згідно з вихідними даними свого варіанта задачі, і тоді в більшості випадків вона має бути простішою, ніж на загальному рисунку.

Розрахунково-графічні роботи, що не відповідають всім зазначеним вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

2 ТЕОРЕТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Механікою називається наука про механічний рух або рівновагу матеріальних тіл і взаємодію між ними, що виникає при цьому.

Механіку зараховують до природничих наук. З розвитком механіки як науки в ній з'явилася ціла низка самостійних галузей, пов'язаних із вивченням механіки твердих деформованих тіл, рідин і газів: теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка, опір матеріалів, будівельна механіка, теорія механізмів і машин, гідравліка, динаміка споруд та інші спеціальні інженерні дисципліни. В усіх цих галузях поряд зі специфічними для кожної з них закономірностями і методами дослідження використовуються поняття, закони і методи механіки, які є загальними для них.

Теоретична механіка – це частина механіки, в якій вивчаються загальні закони механічного руху або рівноваги матеріальних тіл і механічної взаємодії між ними.

Механічною взаємодією називаються такі взаємодії матеріальних тіл, які змінюють або намагаються змінити характер їхнього механічного руху чи форми (створити деформацію).

Механічний рух – найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простого переміщення за часом фізичних тіл з одного положення в просторі в інше. В основі теоретичної механіки лежать закони Ньютона, тому вона називається ньютонівською, або класичною. Класична механіка, яка є граничним випадком релятивістської механіки А. Ейнштейна, з великою точністю задовольняє багато галузей сучасної техніки при швидкостях руху тіл, досить малих порівняно зі швидкістю світла, тобто таких, що можна порівняти із швидкістю нашого руху [3].

Теоретична механіка має велике значення в підготовці інженерів усіх галузей народного господарства. Вона є науковим фундаментом для вивчення таких загальноінженерних дисциплін, як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, приладів і робототехнічних пристроїв, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеро- і гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування тощо.

Розуміння положень, методів і законів теоретичної механіки, які правильно відображують об'єктивні реалії механічних процесів, існуючих взаємозв'язків механічних рухів і перетворення енергії, дає змогу науково передбачати закономірності у нових задачах, що виникають у процесі розвитку науки, техніки і технології [4].

За характером задач, що вивчаються, теоретична механіка, поділяється на статику, кінематику, динаміку.

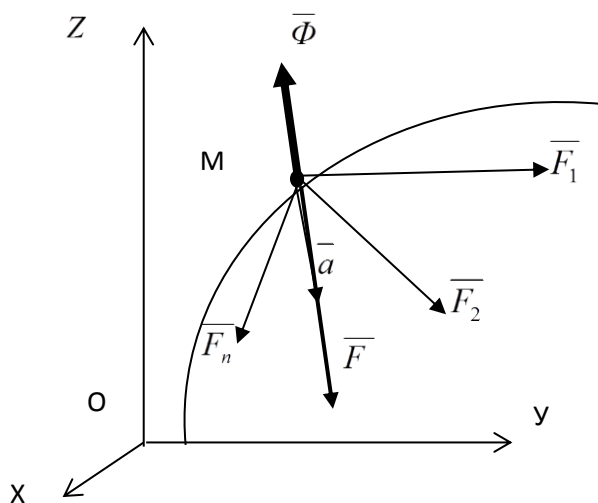
Методи розв'язання задач механіки базуються на рівняннях, що витікають безпосередньо із законів Ньютона або загальних теорем, які є наслідками тих самих законів. Однак такий шлях розв'язання не є єдиним. Виявляється, що рівняння руху або умови рівноваги механічної системи можна отримати, поклавши за основу замість законів Ньютона інші загальні положення, які називають **принципами механіки**. В ряді випадків використання

цих принципів дозволяє знайти більш ефективні методи розв'язання відповідних задач [7].

Загальні принципи механіки

2.1 Принцип Даламбера

Принцип Даламбера (принцип кінетостатики) є одним із найзагальніших принципів механіки, за допомогою якого рівнянням динаміки за формою надається вигляд рівнянь статyki.



Матеріальна точка M , маси m рухається з прискоренням \bar{a} під дією прикладених (активних) сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ (рисунок 1). Рівнодійну такої системи можна позначити \bar{F}^A .

Рисунок 1

Основне рівняння динаміки руху точки M таке:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

Якщо ввести до розгляду силу інерції, то рух точки буде відповідати властивості: якщо в будь-який момент часу до діючих на точку активних сил додати **силу інерції**, то отримана система сил буде зрівноваженою. А для невідної матеріальної точки при цьому треба враховувати ще й відповідні реакції зв'язків з рівнодійною \bar{F}^R .

Сила інерції, або даламберова сила $\bar{\Phi}$ – векторна величина, яка має розмірність сили, що за модулем дорівнює добутку маси точки на її прискорення, та спрямована протилежно цьому прискоренню.

$$\overline{\Phi} = -m \cdot \overline{a}.$$

Принцип Даламбера для вільної матеріальної точки: якщо в кожний момент часу до сил, що фактично діють на матеріальну точку додати силу інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою, тобто

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n + \overline{\Phi} = 0. \quad (1)$$

Принцип Даламбера для невідільної матеріальної точки: якщо в кожний момент часу до фактично діючих на точку активних та реактивних сил додати силу інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою, тобто

$$\overline{F}^A + \overline{F}^R + \overline{\Phi} = 0. \quad (2)$$

Розглянемо невідільну механічну систему, що складається з n матеріальних точок. До кожної з точок M_n цієї системи застосуємо принцип Даламбера, за яким у будь-який момент часу геометрична сума рівнодіючих заданих сил, реакцій зв'язків і сили інерції для кожної точки матеріальної невідільної механічної системи дорівнює нулю. Між тим сили, діючи на точки (або тіла) механічної системи, розподіляються на внутрішні \overline{F}_n^i , з якими точки даної системи взаємодіють між собою, та зовнішні \overline{F}_n^e – сили взаємодії точок даної системи з іншими.

Принцип Даламбера для системи матеріальних точок: якщо в будь-який момент часу до кожної з точок системи, окрім зовнішніх та внутрішніх сил, що фактично діють на неї, прикласти відповідні сили інерції, то отримана система сил буде знаходитись у рівновазі і для неї можна буде застосувати всі рівняння статки:

$$\overline{F}_1^e + \overline{F}_1^i + \overline{\Phi}_1 = 0, \quad \overline{F}_2^e + \overline{F}_2^i + \overline{\Phi}_2 = 0, \quad \overline{F}_n^i + \overline{F}_n^e + \overline{\Phi}_n = 0. \quad (3)$$

Принцип Даламбера для невідільної механічної системи: якщо у будь – який момент часу до кожної з точок системи, крім фактично діючих на неї сил та реакцій зв'язків, додати відповідні

сили інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою і для неї можна буде застосувати всі рівняння статички:

$$\sum_{n=1}^k \overline{F_n^A} + \sum_{n=1}^k \overline{F_n^R} + \sum_{n=1}^k \overline{\Phi_n} = 0, \quad (4)$$

де $\sum_{n=1}^k \overline{F_n^A}$ – головний вектор активних (фактично діючих на точки системи) сил;

$\sum_{n=1}^k \overline{F_n^R}$ – головний вектор реакцій зв'язків;

$\sum_{n=1}^k \overline{\Phi_n}$ – головний вектор сил інерції.

Отже, у будь-який момент часу для будь-якої невільної механічної системи геометрична сума головних векторів заданих сил, реакцій зв'язків і сил інерції матеріальних точок системи дорівнює нулю.

Проведемо із довільного нерухомого центра O у кожна точку системи M_n радіуси-вектори r_n . Помножимо векторно радіус-вектор r_n кожноі точки M_n на суму векторів лівої частини рівності (2) і отримаємо рівняння моментів

$$\overline{M_o^A} + \overline{M_o^R} + \overline{M_o^\Phi} = 0,$$

яке свідчить, що у кожному момент часу для будь-якої невільної механічної системи геометрична сума головних моментів заданих сил, реакцій зв'язків і сил інерції матеріальних точок системи відносно довільного нерухомого центра дорівнює нулю.

Якщо розглянути векторні рівняння як умови рівноваги довільної просторової системи сил, що прикладені до твердого тіла, то вони еквівалентні шістьом алгебраїчним рівнянням статички, а плоскої системи сил – трьом [4]. Векторні рівняння рівноваги завжди можна надати в узагальненій формі.

Узагальнена форма рівнянь рівноваги за принципом Даламбера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^k \overline{F_n^A} + \sum_{n=1}^k \overline{F_n^R} + \sum_{n=1}^k \overline{\Phi_n} = 0 \\ \sum_{n=1}^k \overline{M_O(F_n^A)} + \sum_{n=1}^k \overline{M_O(F_n^R)} + \sum_{n=1}^k \overline{M_O(\Phi_n)} = 0 \end{array} \right. , \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} \overline{R_n^A} + \overline{R_n^R} + \overline{R_n^\Phi} = 0 \\ \overline{M_O^A} + \overline{M_O^R} + \overline{M_O^\Phi} = 0 \end{array} \right. , \quad (5)$$

де $\overline{R_n^A} = \sum_{n=1}^k \overline{F_n^A}$, $\overline{R_n^R} = \sum_{n=1}^k \overline{F_n^R}$, $\overline{R_n^\Phi} = \sum_{n=1}^k \overline{\Phi_n}$ – головні вектори активних, реактивних та сил інерції точок системи;

$\overline{M_O^A} = \sum_{n=1}^k \overline{M_O(F_n^A)}$, $\overline{M_O^R} = \sum_{n=1}^k \overline{M_O(F_n^R)}$, $\overline{M_O^\Phi} = \sum_{n=1}^k \overline{M_O(\Phi_n)}$ – головні моменти активних, реактивних та сил інерції точок системи відносно центра O.

Як відомо [1, 2, 11], систему сил можна привести до сили, яка дорівнює головному вектору, та до пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту сил системи. Приведення системи сил інерції точок твердого тіла дає такі результати.

Приведення сил інерції точок твердого тіла до простішого вигляду

Головний вектор сил інерції точок тіла

$$\overline{\Phi} = \sum_{n=1}^k \overline{\Phi_n} = -\sum_{n=1}^k m_n \cdot \overline{a_n} = -M \cdot \overline{a_c}, \quad (6)$$

де M – маса тіла;

$\overline{a_c}$ – прискорення центра мас.

Головний момент сил інерції відносно центра мас тіла

$$\overline{M_C^\Phi} = \sum_{n=1}^k \overline{M_C(\Phi_n)} = \sum_{n=1}^k \overline{M_{nC}^\Phi}. \quad (7)$$

Приведення системи сил інерції до простішого вигляду залежить від виду руху тіла.

Випадки приведення системи сил інерції твердого тіла до простішого вигляду

1 Поступальний рух

При поступальному русі сили інерції твердого тіла приводяться до однієї рівнодійної $\overline{\Phi}$, яка проходить через центр мас тіла, дорівнює за модулем добутку маси тіла на модуль прискорення його центра мас і спрямована протилежно цьому прискоренню (рисунок 2):

$$\overline{\Phi} = -M \cdot \overline{a_c}$$

Обертання навколо центра мас нема, тому $\overline{M_c^\Phi} = 0$.

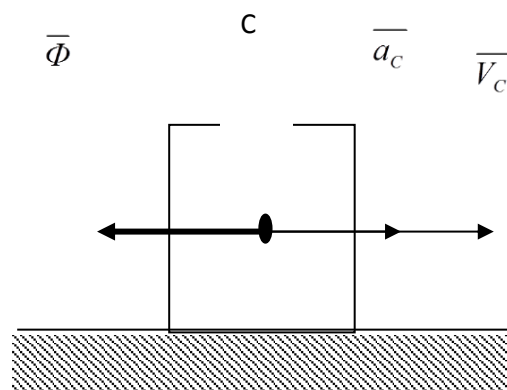


Рисунок 2

2 Обертальний рух тіла навколо осі, яка проходить через центр мас тіла

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі (рисунки 3, 4), яка проходить через центр мас тіла, то сили інерції приводяться до однієї пари сил, що лежить у площині, перпендикулярній осі обертання, момент якої дорівнює

$$M_C^\Phi = -J_{CZ} \cdot \varepsilon ,$$

де J_{CZ} – момент інерції тіла відносно осі обертання; ε – кутове прискорення тіла.

Оскільки центр мас C не рухається, головний вектор сил інерції $\bar{\Phi} = 0$.

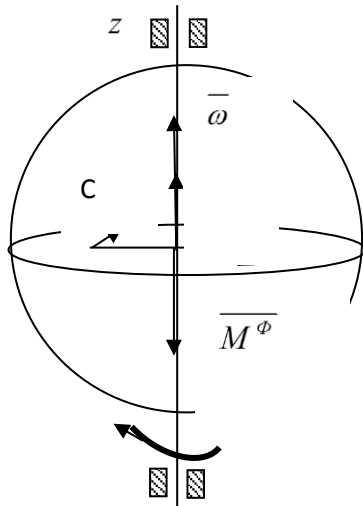


Рисунок 3

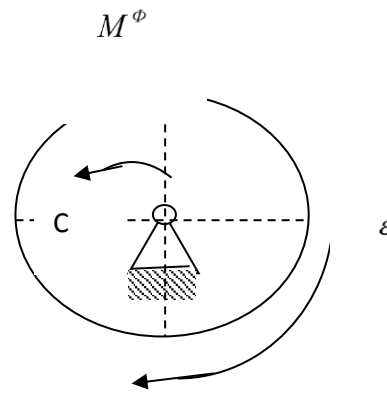


Рисунок 4

3 Плоскопаралельний рух

При плоскому русі тіла система сил інерції приводиться до головного вектора сил інерції $\bar{\Phi}$, прикладеної в центрі мас тіла, та пари сил, момент якої дорівнює M_C^Φ (рисунок 5):

$$M_C^\Phi = -J_C \cdot \varepsilon ;$$

$$\bar{\Phi} = -M \cdot \bar{a}_C .$$

Напрямок моменту M_C^Φ протилежний кутовому прискоренню тіла ε .

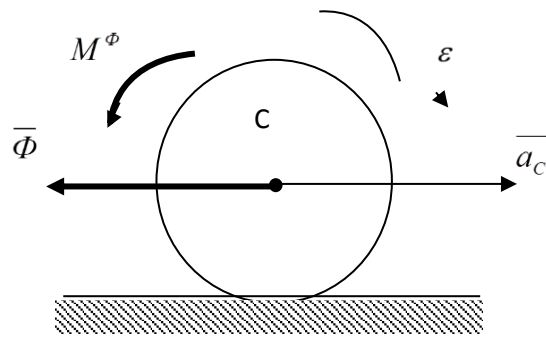


Рисунок 5

Приклад 1. Два вантажі вагою P_1 та P_2 кожний, які пов'язані між собою за допомогою нитки, рухаються вздовж горизонтальної площини під дією сили Q , що прикладена до першого вантажу (рисунок 6). Коефіцієнт тертя вантажів об поверхню – f . Визначити прискорення вантажів і натяг нитки.

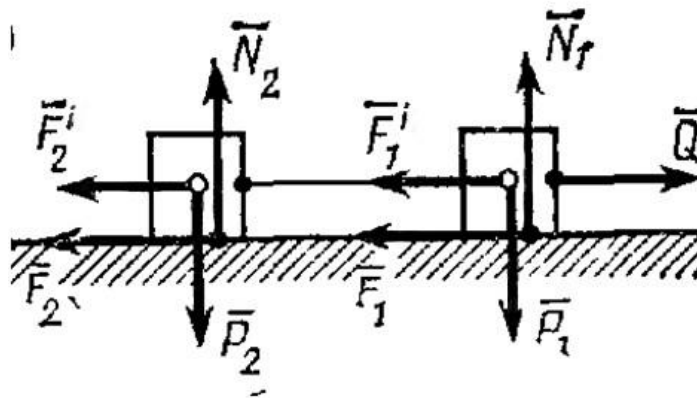


Рисунок 6

Розв'язання. Зобразимо усі зовнішні сили, що діють на систему. Додамо до них сили інерції вантажів. Оскільки обидва вантажі рухаються поступально з одним і тим самим прискоренням, то за модулем

$$F_1^i = \frac{P_1}{g} a;$$

$$F_2^i = \frac{P_2}{g} a.$$

Напрямки сил вказані на рисунку 6.

Сили тертя дорівнюють

$$F_1 = fP_1;$$

$$F_2 = fP_2.$$

Відповідно до принципу Даламбера отримана система сил повинна знаходитися у рівновазі. Складаючи рівняння рівноваги в проекції на горизонтальну вісь, знайдемо

$$Q - f(P_1 + P_2) - (P_1 + P_2)\frac{a}{g} = 0,$$

звідки

$$a = \left[\frac{Q}{(P_1 + P_2)} - f \right] g.$$

Зрозуміло, що вантажі будуть рухатися, якщо $f < \frac{Q}{(P_1 + P_2)}$.

Шуканий натяг нитки у системі, що розглядається, є внутрішньою силою. Для її визначення розріжемо систему та застосуємо принцип Даламбера до одного із вантажів, наприклад, до другого. На цей вантаж діють сила \bar{P}_2 , нормальна реакція \bar{N}_2 , сила тертя \bar{F}_2 і натяг нитки \bar{T} . Додаючи до них силу інерції F_2^i і складаючи рівняння рівноваги в проекції на горизонтальну вісь, знаходимо

$$T - fP_2 - \frac{P_2}{g} a = 0.$$

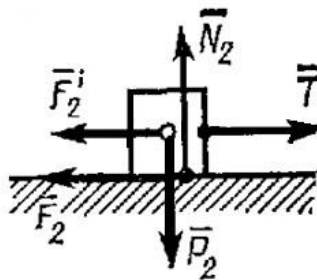


Рисунок 7

Підставляючи значення, яке було отримано раніше, остаточно одержимо

$$T = \frac{QP_2}{(P_1 + P_2)}.$$

Натяг нитки в цьому випадку не залежить від сили тертя і при одній і тій самій сумарній вазі системи буде тим менший, чим менша вага другого вантажу. Саме тому, наприклад, в залізничних складах доцільно розташовувати в голові більш важкі вагони, а в хвості – більш легкі.

Приклад 2. На барабан вагою P і радіусом r (рисунок 8) намотана нитка з вантажем A вагою Q . Нехтуючи вагою нитки, визначити кутове прискорення барабана при вертикальному русі вантажу, якщо радіус інерції барабана відносно його осі дорівнює ρ і на барабан діє постійний момент сил тертя $M_{тр}$.

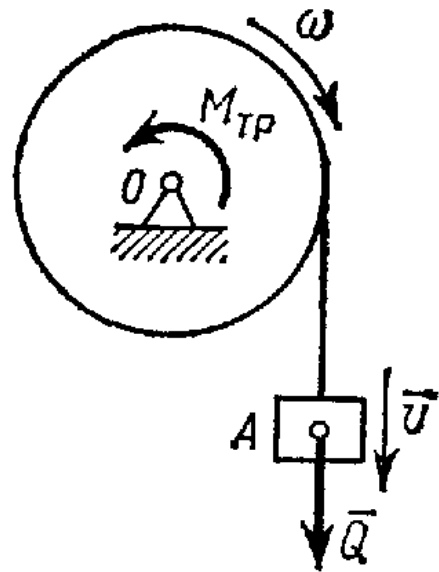


Рисунок 8

Розв'язання. Розглянемо барабан і вантаж як одну систему (рисунок 9); додамо сили інерції. Вантаж A рухається поступально, для нього

$$F^i = \frac{Q}{g} a = \frac{Qr\varepsilon}{g}.$$

Сили інерції барабана приводяться до пари з моментом M_o^i , який за модулем дорівнює

$$M_o^i = J_o \cdot \varepsilon = \frac{P}{g} \rho^2 \varepsilon$$

і спрямований протилежно обертанню барабана.

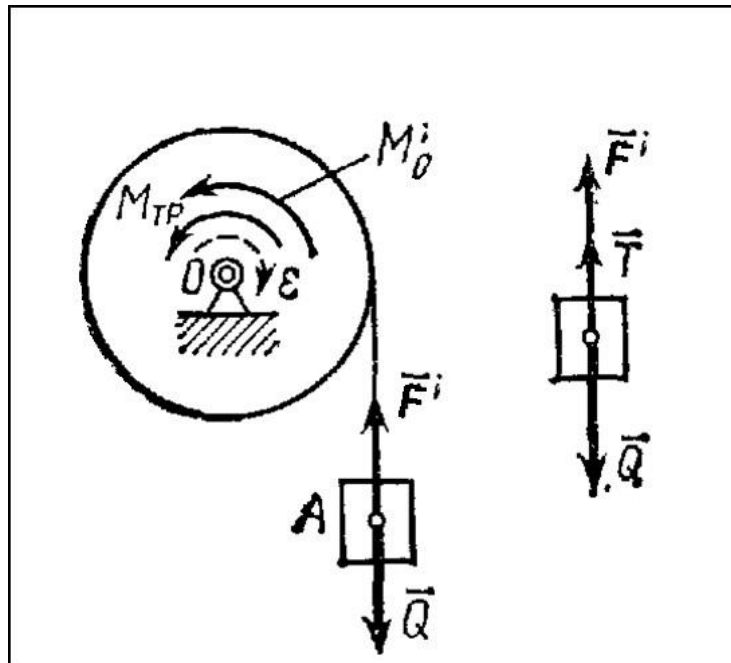


Рисунок 9

Складемо для усіх сил рівняння рівноваги, отримаємо

$$M_o^i + F^i r - Qr + M_{mp} = 0,$$

або

$$\frac{P}{g} \rho^2 \varepsilon + \frac{Qr^2 \varepsilon}{g} - Qr + M_{mp} = 0.$$

Звідки знаходимо

$$\varepsilon = \frac{(Qr - M_{mp})}{P\rho^2 + Qr^2} g.$$

Розглянемо тепер вантаж А окремо, додавши до сил, що діють на нього, силу інерції F^i , отримаємо з рівнянь рівноваги, що натяг нитки

$$T = Q - F^i = Q \left(1 - \frac{r\varepsilon}{g} \right) = \frac{Q(P\rho^2 + M_{mp}r)}{P\rho^2 + Qr^2}.$$

2.2 Принцип можливих переміщень

Принцип можливих переміщень у найзагальнішому вигляді **встановлює умови рівноваги будь-якої механічної системи**, тобто дозволяє розв'язувати задачу статyki як задачу динаміки.

Зв'язки – це тверді тіла, які обмежують рух точок механічної системи. При відсутності зв'язків всі три координати, які визначають положення точки у просторі, незалежні одна від одної і можуть мати будь-які значення. При наявності зв'язків координати точки, яка рухається, не можуть приймати будь-які значення, вони пов'язані певними співвідношеннями – так званими рівняннями зв'язків – і їхні координати залежать одна від одної. Якщо на задану механічну систему накладені зв'язки, то для точок системи дозволяються не будь-які, а тільки деякі переміщення, що обумовлені рівняннями зв'язків (тобто ті, які дозволяються зв'язками). Для невідільної механічної системи вводиться поняття можливого (або віртуального) переміщення, яке суттєво відрізняється від дійсного [4].

Можливі (або віртуальні) переміщення системи – це сукупність уявних нескінченно малих переміщень точок системи, припущених у даний момент усіма накладеними на систему зв'язками (рисунок 10).

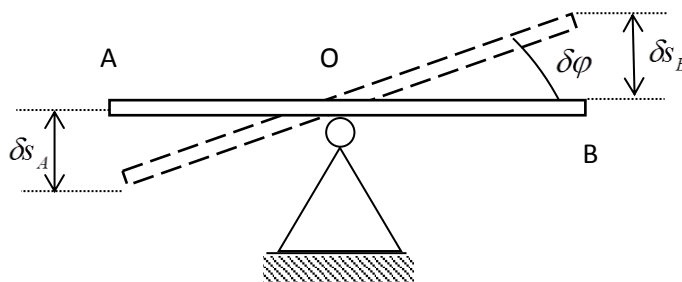


Рисунок 10

На рисунку 10:

- δs_A і δs_B – можливі лінійні переміщення точок A і B балки;
- $\delta\varphi$ – можливе кутове переміщення – поворот балки на нескінченно малий кут.

Можливі лінійні та кутові переміщення можна відобразити формулою

$$\delta s_A = |OA| \cdot \delta \varphi, \quad \delta s_B = |OB| \cdot \delta \varphi. \quad (8)$$

Можливі переміщення мають задовольняти такі умови:

- повинні бути нескінченно малими, щоб механічна система не перейшла в положення, коли рівняння рівноваги системи будуть відрізнятися від первісних;

- повинні бути такими, щоб зберігалися всі накладені на систему зв'язки, бо інакше зміниться вид і функціональне призначення механічної системи (система стане іншою).

Можливі переміщення точок механічної системи розглядають як величини першого порядку малості, нехтуючи при цьому величинами більш високих порядків малості. Тому криволінійні переміщення точок замінюють прямолінійним відрізком, який відкладений по дотичній до траєкторії, та визначають δs . Для кутових можливих переміщень на малих кутах синус кута дорівнює самому куту, як в рівності (8).

Можливі переміщення точки або системи не залежать від діючих сил, а тільки від характеру накладених на точку або систему зв'язків.

Кількість незалежних між собою можливих переміщень системи називається **числом ступенів свободи** цієї системи.

Відповідно, точка, що знаходиться на площині, має два ступені свободи; одночасно її положення на площині визначається двома незалежними координатами x та y . Вільна матеріальна точка має три ступені свободи (незалежними будуть три можливих переміщення вздовж трьох взаємоперпендикулярних осей); одночасно положення точки визначається трьома незалежними координатами x , y , z і так далі [7].

Такий результат виявляється загальним, тобто у механічній системі з геометричними зв'язками кількість незалежних координат, що характеризує положення системи, співпадає з числом ступенів свободи. Тому у такої системи число ступенів свободи можна визначити як за кількістю незалежних можливих переміщень, так і за кількістю незалежних координат [8]. Так, у кривошипно-повзунковому механізмі ступінь свободи – це одне незалежне можливе переміщення, наприклад оберт кривошипа, та незалежна координата, наприклад кут. У вільного твердого тіла шість ступенів свободи (незалежних переміщень — три

поступальних вздовж координатних осей і три оберти навколо цих осей, а незалежних координат — три координати полюса і три кути Ейлера).

Важлива особливість принципу можливих переміщень полягає в тому, що при його застосуванні ефект дії зв'язків ураховується не шляхом введення невідомих наперед реакцій, а шляхом розглядання можливих переміщень, які можна здійснити точками системи, якщо вивести їх із зайнятого нею положення [9, 10].

Якщо до точки прикладена сила \overline{F} , то враховуючи можливі переміщення точки з даного її положення, можна обчислити і величину елементарної роботи на тому чи іншому можливому переміщенні. Ця робота і є можливою елементарною роботою сили.

Можлива (або віртуальна) робота – елементарна робота, яку сила, що діє на матеріальну точку, могла б створити на переміщенні, що співпадає з можливим переміщенням цієї точки.

Можлива елементарна робота сили δA виражається скалярним добутком вектора сили \overline{F} на вектор можливого переміщення $\overline{\delta s}$:

$$\delta A = \overline{F} \cdot \overline{\delta s} = F \cdot \delta s \cdot \cos(\overline{F}, \overline{\delta s}) .$$

Можлива робота активної (заданої) сили $\overline{F^A}$

$$\delta A^A = F^A \cdot \delta s \cdot \cos \alpha , \quad (9)$$

де α – кут між напрямком сили та переміщенням.

Можлива робота реактивної (реакції зв'язку) сили $\overline{F^R}$

$$\delta A^R = F^R \cdot \delta s \cdot \cos \alpha . \quad (10)$$

Принцип можливих переміщень дає можливість визначити умови рівноваги точки або матеріальної системи, які знаходяться під дією заданої системи активних сил $\overline{F^A}$ і при заданих зв'язках $\overline{F^R}$.

Ідеальним називається такий зв'язок, можлива робота реакції якого на кожному можливому переміщенні дорівнює нулю.

Принцип можливих переміщень: для рівноваги механічної системи з ідеальними зв'язками необхідно і достатньо, щоб сума робіт всіх активних сил при будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю

$$\sum_{n=1}^k \delta A_n^A = 0, \quad (11)$$

або

$$\sum_{n=1}^k (F_n^A \delta s_n \cos \alpha_n) = 0. \quad (12)$$

Рівняння (12) називають **рівнянням можливих робіт**, воно є математичним виразом необхідних і достатніх умов рівноваги будь-якої механічної системи.

Це рівняння також називається **загальним рівнянням статички**, тому що воно може бути застосовано до усіх матеріальних систем незалежно від їхньої структури [6].

Принцип можливих переміщень для будь-якої механічної системи

$$\sum_{n=1}^k \delta A_n^A + \sum_{n=1}^k \delta A_n^R = 0. \quad (13)$$

Принцип можливих переміщень в аналітичній формі

$$\sum_{n=1}^k (F_{nX}^A \cdot \delta x_n + F_{nY}^A \cdot \delta y_n + F_{nZ}^A \cdot \delta z_n) = 0, \quad (14)$$

де F_{nX}^A , F_{nY}^A , F_{nZ}^A – проекції активних сил на осі координат;

δx_n , δy_n , δz_n – проекції можливих переміщень $\overline{\delta s_n}$ на відповідні осі координат.

Приклад 3. Вага вантажу – Q , вага кожного з двох циліндричних котків, на яких він встановлений, – P (рисунок 11). Визначити, яку силу \overline{F} необхідно прикласти до вантажу, щоб

утримати його в рівновазі на площині, яка знаходиться під кутом α до горизонту. Тертя котків об площину та вантаж забезпечують відсутність ковзання.

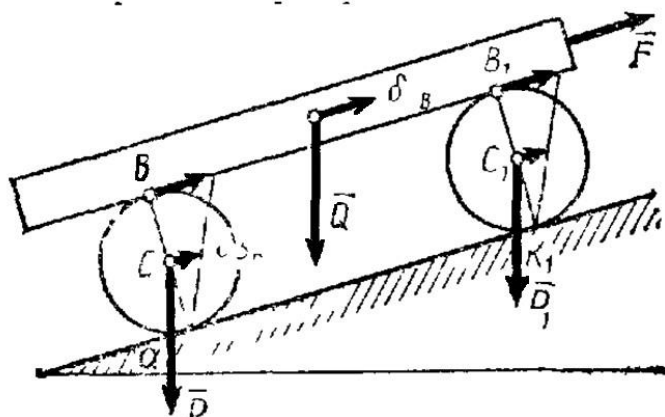


Рисунок 11

Розв'язання. Якщо знехтувати опором коченню, то площина для котків буде ідеальним зв'язком. При коченні без ковзання у системи один ступінь свободи. Надаючи системі можливе переміщення, отримаємо

$$F \delta s_B - Q \cdot \sin \alpha \cdot \delta s_B - 2P \sin \alpha \cdot \delta s_C,$$

де δs_B – можливе переміщення вантажу, яке співпадає з переміщенням точки В.

Точка дотику К є миттєвим центром швидкостей котка. Відповідно, $V_B = 2V_C$ та $\delta s_B = 2\delta s_C$, якщо вважати $\delta s_B = V_B dt$, $\delta s_C = V_C dt$.

Підставляючи це значення в попереднє рівняння, остаточно знайдемо

$$F = (Q + P) \sin \alpha.$$

Приклад 4. В планетарному механізмі з диференціальною передачею на вісь А незалежно одна від одної насажені шестірня 1 радіусом r_1 і кривошип АВ, що несе на собі вісь В шестірні 2 радіусом r_2 (рисунок 12). На кривошип діє обертальний момент M ,

а на шестірні 1 та 2 – моменти опору M_1 і M_2 . Знайти значення M_1 і M_2 при рівновазі механізму.

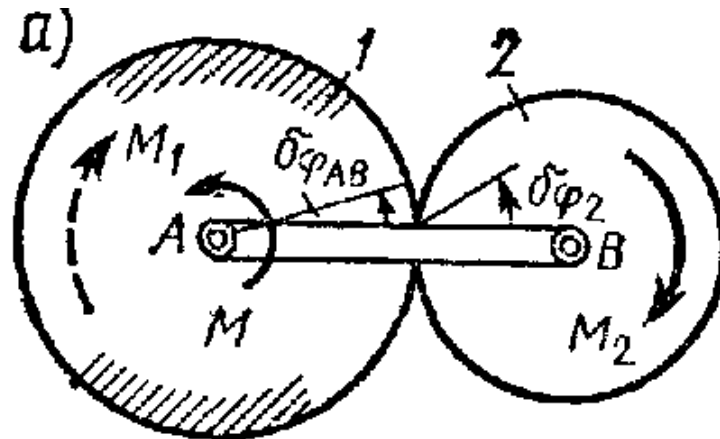


Рисунок 12

Розв'язання. Механізм має два ступені свободи, оскільки в ньому можливі два незалежних переміщення: а) поворот кривошипа АВ при нерухомій шестірні 1 та б) поворот шестірні 1 при нерухомому кривошипі АВ. Спочатку надамо системі можливе переміщення, при якому шестірня 1 залишається нерухомою. Для цього переміщення

$$M \delta\varphi_{AB} - M_2 \delta\varphi_2 = 0.$$

Але коли шестірня 1 нерухома (рисунок 13), точка дотику шестерень буде миттєвим центром швидкостей для шестірні 2. Відповідно, $V_B = \omega_2 r_2$.

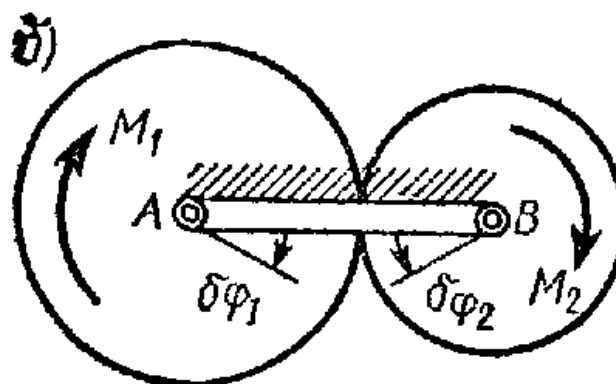


Рисунок 13

В той самий час $V_B = \omega_{AB}(r_1 + r_2)$, звідки $\omega_2 r_2 = \omega_{AB}(r_1 + r_2)$ або $\delta\varphi_2 r_2 = \delta\varphi_{AB}(r_1 + r_2)$, тоді отримаємо $M_2 = \frac{r_2 M}{(r_1 + r_2)}$.

Тепер надамо системі інше, незалежне від першого можливе переміщення, при якому кривошип АВ залишається нерухомим. Для цього переміщення буде $M_1 \delta\varphi_1 - M_2 \delta\varphi_2 = 0$. Але при нерухомому кривошипі $\frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$ та $M_1 = \frac{r_1}{r_2} M_2$.

Остаточно знаходимо

$$M_1 = \frac{r_1 M}{r_1 + r_2};$$

$$M_2 = \frac{r_2 M}{r_1 + r_2}.$$

2.3 Загальне рівняння динаміки

Принцип можливих переміщень надає загальний метод розв'язання задач статки. З іншого боку, принцип Даламбера дозволяє застосовувати методи статки для розв'язання задач динаміки. Таким чином, використовуючи обидва принципи одночасно, можна отримати загальний метод для розв'язання задач динаміки [2, 7, 11].

Розглянемо систему матеріальних точок M_n , на яку накладені ідеальні зв'язки. Якщо до всіх точок системи, окрім діючих на них активних сил $\overline{F_n^A}$ та реакцій зв'язків $\overline{F_n^R}$, додати відповідні сили інерції $\overline{\Phi}$, то згідно з принципом Даламбера (4) отримана система сил буде знаходитись в рівновазі. Тоді, використовуючи принцип можливих переміщень (13), можна одержати суму можливих робіт активних, реактивних та сил інерції на можливих переміщеннях, яка буде також дорівнювати нулю.

$$\sum_{n=1}^k \delta A_n^A + \sum_{n=1}^k \delta A_n^R + \sum_{n=1}^k \delta A_n^I = 0, \quad (15)$$

де $\sum_{n=1}^k \delta A_n^A$ – сума елементарних робіт всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи;

$\sum_{n=1}^k \delta A_n^R$ – сума елементарних робіт всіх реактивних сил (реакцій зв'язків) на будь-якому можливому переміщенні системи;

$\sum_{n=1}^k \delta A_n^\phi$ – сума елементарних робіт всіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи.

Отриманий результат надає **принцип Даламбера-Лагранжа**: при русі механічної системи з ідеальними зв'язками в кожний даний момент часу сума елементарних робіт всіх активних (заданих) сил та усіх сил інерції на будь – якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.

$$\sum_{n=1}^k \delta A_n^A + \sum_{n=1}^k \delta A_n^\phi = 0. \quad (16)$$

Рівняння (16), що відображує цей принцип, називають загальним рівнянням динаміки.

Аналітична форма загального рівняння динаміки

$$\sum_{n=1}^k [(F_{nX}^A + \Phi_{nX}) \cdot \delta x_n + (F_{nY}^A + \Phi_{nY}) \cdot \delta y_n + (F_{nZ}^A + \Phi_{nZ}) \cdot \delta z_n] = 0, \quad (17)$$

де $F_{nX}^A, F_{nY}^A, F_{nZ}^A$ – проекції активних сил $\overline{F_n^A}$ на осі координат;

$\Phi_{nX}, \Phi_{nY}, \Phi_{nZ}$ – проекції сил інерції $\overline{\phi_n}$ на осі координат;

$\delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ – проекції можливих переміщень $\overline{\delta s_n}$ на відповідні осі координат.

Приклад 5. На трикутній призмі, бокові грані якої утворюють з горизонтом кути α і β , розміщені два вантажі А та В вагою G_1 і G_2 , що пов'язані між собою невагомою та нерозтяжною ниткою, яку перекинуто через блок С (рисунок 14). Відомо, що

коефіцієнт тертя дорівнює f . Необхідно визначити прискорення руху вантажів a і натягу нитки; масою блока знехтувати.

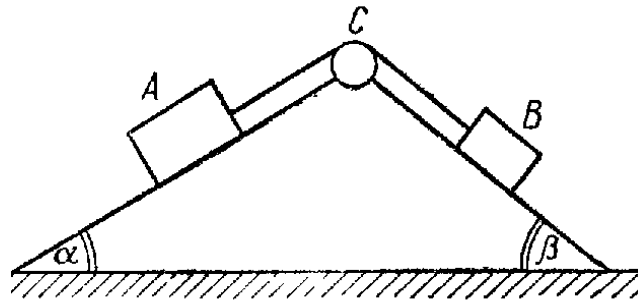


Рисунок 14

Розв'язання. Задана механічна система складається з двох вантажів, що рухаються поступально. Нитка та блок, маси яких не враховуються, є зв'язками. Система має один ступінь свободи (рисунок 15).

Припустимо, що вантаж А рухається вниз, а вантаж В – вгору.

Покажемо задані сили: вага вантажів G_1 і G_2 , нормальні реакції бокових граней призми N_1 і N_2 , сили тертя F_1 і F_2 .

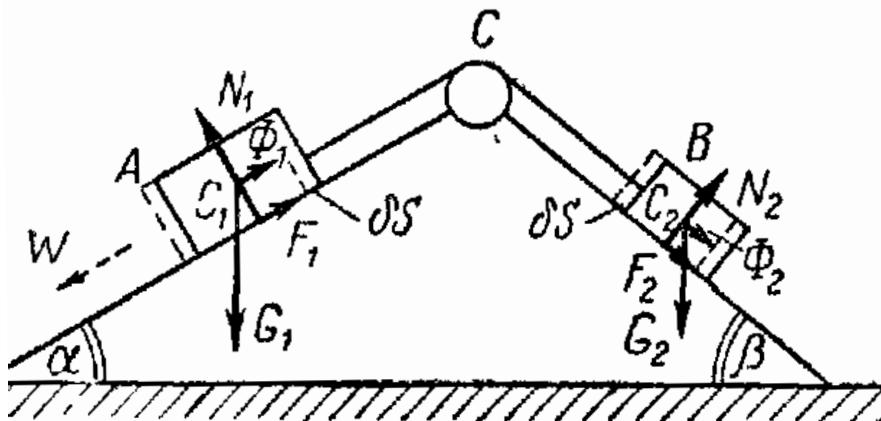


Рисунок 15

Модулі сил тертя відповідно дорівнюють

$$F_1 = fN_1;$$

$$F_2 = fN_2,$$

де

$$N_1 = G_1 \cos \alpha;$$

$$N_2 = G_2 \cos \beta.$$

Тому

$$F_1 = fG_1 \cos \alpha;$$

$$F_2 = fG_2 \cos \beta.$$

Сили тертя спрямовано протилежно напрямкам рухів вантажів.

Оскільки вантажі рухаються, то рівнодійні сил інерції прикладені в центрах ваги тіл, а їхні модулі

$$\Phi_1 = m_1 a = \frac{G_1}{g} a;$$

$$\Phi_2 = m_2 a = \frac{G_2}{g} a.$$

Прикладемо до вантажів умовно сили інерції Φ_1 і Φ_2 , спрямуємо їх протилежно прискоренню a .

Надамо системі можливе поступальне переміщення δs , наприклад, в бік руху вантажів (рисунок 16).

Складемо загальне рівняння динаміки, в яке не входять нормальні реакції бокових граней призми N_1 і N_2 , напрямки яких є перпендикулярними до можливих переміщень вантажів.

$$G_1 \delta s \sin \alpha - fG_1 \delta s \cos \alpha - \Phi_1 \delta s - G_2 \delta s \sin \beta - \\ - fG_2 \delta s \cos \beta - \Phi_2 \delta s = 0 \quad .$$

Підставимо в це рівняння значення сил інерції, поділимо його на δs , тоді отримаємо

$$G_1 \sin \alpha - fG_1 \cos \alpha - \frac{G_1}{g} a - G_2 \sin \beta - fG_2 \cos \beta - \frac{G_2}{g} a = 0.$$

З цього рівняння визначимо прискорення вантажів:

$$a = g \frac{G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2(\sin \beta + f \cos \beta)}{G_1 + G_2}.$$

Якщо

$$G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2(\sin \beta + f \cos \beta) > 0,$$

то вантажі рухаються у вказаному вище напрямку.

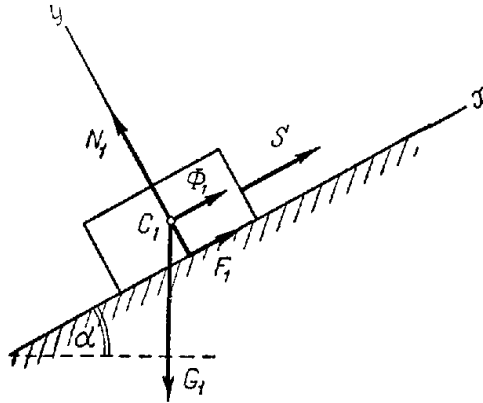


Рисунок 16

Для визначення натягу нитки S на основі принципу Германа-Ейлера-Даламбера складемо для сил, прикладених до тіла, та його сили інерції рівняння проекції на вісь x :

$$S - G_1 \sin \alpha + F_1 + \Phi_1 = 0;$$

$$S = G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{G_1}{g} a.$$

Підставимо значення a , після відповідних перетворень, отримаємо

$$S = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} [\sin \alpha + \sin \beta + f(\cos \beta - \cos \alpha)].$$

Приклад 6. В підйомачі до шестірні 1, що має вагу P_1 і радіус інерції відносно її осі ρ_1 , прикладено обертальний момент M . Визначити прискорення вантажу 3 вагою Q , що підіймається,

нехтуючи вагою мотузки і тертям в осях. Барабан, на який намотується мотузка, жорстко скріплений з другою шестірнею, їхня загальна вага дорівнює P_2 , а радіус інерції відносно осі обертання – ρ_2 . Радіуси шестерень дорівнюють відповідно r_1 та r_2 , а радіус барабана – r .

Розв'язання. Зобразимо активну силу \bar{Q} та обертальний момент M , які діють на систему (сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 роботи не створюють); додамо до них силу інерції вантажу \bar{F}_3^i і пари з моментами M_1^i та M_2^i , до яких приводяться сили інерції тіл, що обертаються (рисунок 17).

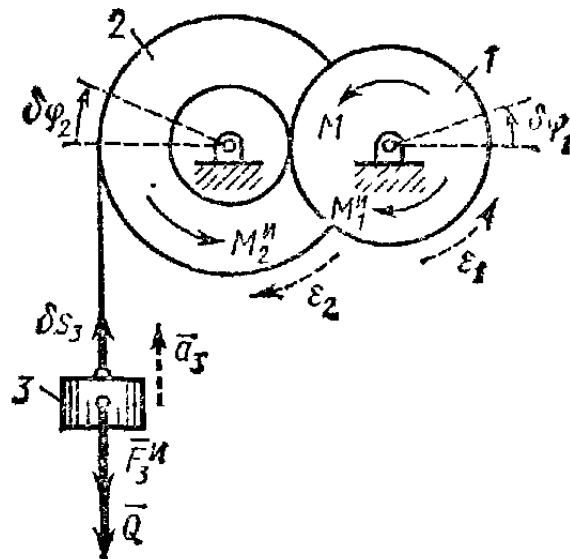


Рисунок 17

Ці величини за модулем дорівнюють

$$F_3^i = \frac{Q}{g} a,$$

$$M_1^i = \frac{P_1}{g} \rho_1^2 \varepsilon_1,$$

$$M_2^i = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 .$$

Напрямки усіх величин вказані на рисунку 17. Надаючи системі можливе переміщення і складаючи загальне рівняння динаміки, отримаємо

$$-(Q + F_3^i)\delta s_3 + (M - M_1^i)\delta\varphi_1 - M_2^i\delta\varphi_2 = 0.$$

Виразимо всі переміщення через $\delta\varphi_2$, знайдемо, що

$$\begin{aligned}\delta s_3 &= r\delta\varphi_2; \\ \frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}; \\ \delta\varphi_1 &= \frac{r_2}{r_1}\delta\varphi_2.\end{aligned}$$

Остаточно рівняння руху набуде вигляду

$$Q\left(1 + \frac{a_3}{g}\right)r + \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 + \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1\frac{r_2}{r_1} - M\frac{r_2}{r_1} = 0.$$

Величини ε_1 та ε_2 , що входять до нього, виразимо через шукане прискорення a_3 . Враховуючи, що ε_1 та ε_2 пов'язані між собою так само, як і ω_1 та ω_2 , отримаємо

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{r}, \quad \varepsilon_1 = \frac{r_2\varepsilon_2}{r_1} = \frac{r_2a_3}{r_1r}.$$

Остаточно знайдемо

$$a_3 = \frac{\left(\begin{matrix} r & r_2 \\ & r_1 \end{matrix}\right)M - r^2Q}{r^2Q + \rho_2^2P_2 + \left(\frac{\rho_1^2r_2^2}{r_1^2}\right)P_1} g.$$

3 ЗАДАЧІ І ТИПОВІ ЗВІТИ

Використання загального рівняння динаміки до дослідження механічної системи з одним ступенем свободи

Для заданої механічної системи (рисунок 18) визначити прискорення вантажів і натяг в гілках ниток, до яких прикріплені вантажі. Масами ниток знехтувати. Тертя кочення та сили опору в підшипниках не враховувати.

Блоки і котки, для яких радіуси інерції в таблиці 1 не вказані, вважати суцільними однорідними циліндрами [5].

Таблиця 1

Вариант	Вага				R/r	Радіуси інерції		P	Коефіцієнт тертя, f	Додаткові дані
	G_1	G_2	G_3	G_4		i_{2x}	i_{3x}			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	G	G	$3G$	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	
2	G	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	
3	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
4	G	G	$2G$	-	-	-	-	-	0,2	$r_2=r_3$
5	$2G$	G	G	G	3	$2r$	-	-	-	
6	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
7	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
8	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
9	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	$0,2G$	0,2	
10	$2G$	$2G$	G	-	4	-	$2r$	$G/3$	0,4	
11	$2G$	G	$2G$	$0,2G$	3	$2r$	-	-	0,2	
12	$2G$	G	$2G$	$0,2G$	3	$2r$	-	-	0,2	
13	$4G$	$2G$	G	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	$r_2=2r_3$ $R_2=R_3$
14	-	$2G$	G	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$8G$	-	$r_2=2r_3$ $R_3=1,5R_2$
15	$4G$	G	$2G$	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	$r_2=2r_3$ $R_3=1,5R_2$

Продовження таблиці 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
16	-	G	$2G$	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$4G$	-	$r_2=2r_3$ $R_3=1,5R_2$
17	$2G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
18	$3G$	$0,2G$	$0,1G$	$0,5G$	2	-	-	-	0,4	
19	$4G$	$0,3G$	$0,2G$	$3G$	3	$2r$	$1,2r$	-	0,1	$r_3=1,2r$ $R_3=1,2r_3$
20	$4G$	$0,2G$	$0,1G$	$3G$	2	$1,6r$	$r\sqrt{2}$	-	0,2	$r_2=1,5r$ $R_2=1,2r_2$
21	$5G$	$0,1G$	$0,2G$	-	3	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
22	G	$0,2G$	$0,3G$	-	2	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
23	G	$0,2G$	$0,1G$	-	1,5	$1,2r$	-	$2G$	-	$R_3=1,2r$
24	$2G$	G	G	$8G$	-	-	-	-	-	Маси чотирьох коліс однакові
25	$6G$	$2G$	$2G$	G	-	-	-	-	-	$r_3=r_4$
26	$6G$	G	$2G$	-	-	-	-	-	-	$r_3=r_2$
27	G	G	G	$4G$	2	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$	-	-	
28	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
29	$6G$	$3G$	G	G	2	-	$r\sqrt{2}$	-	-	$i_{4x}=i_{3x}$
30	$8G$	G	G	$2G$	-	-	-	-	0,1	

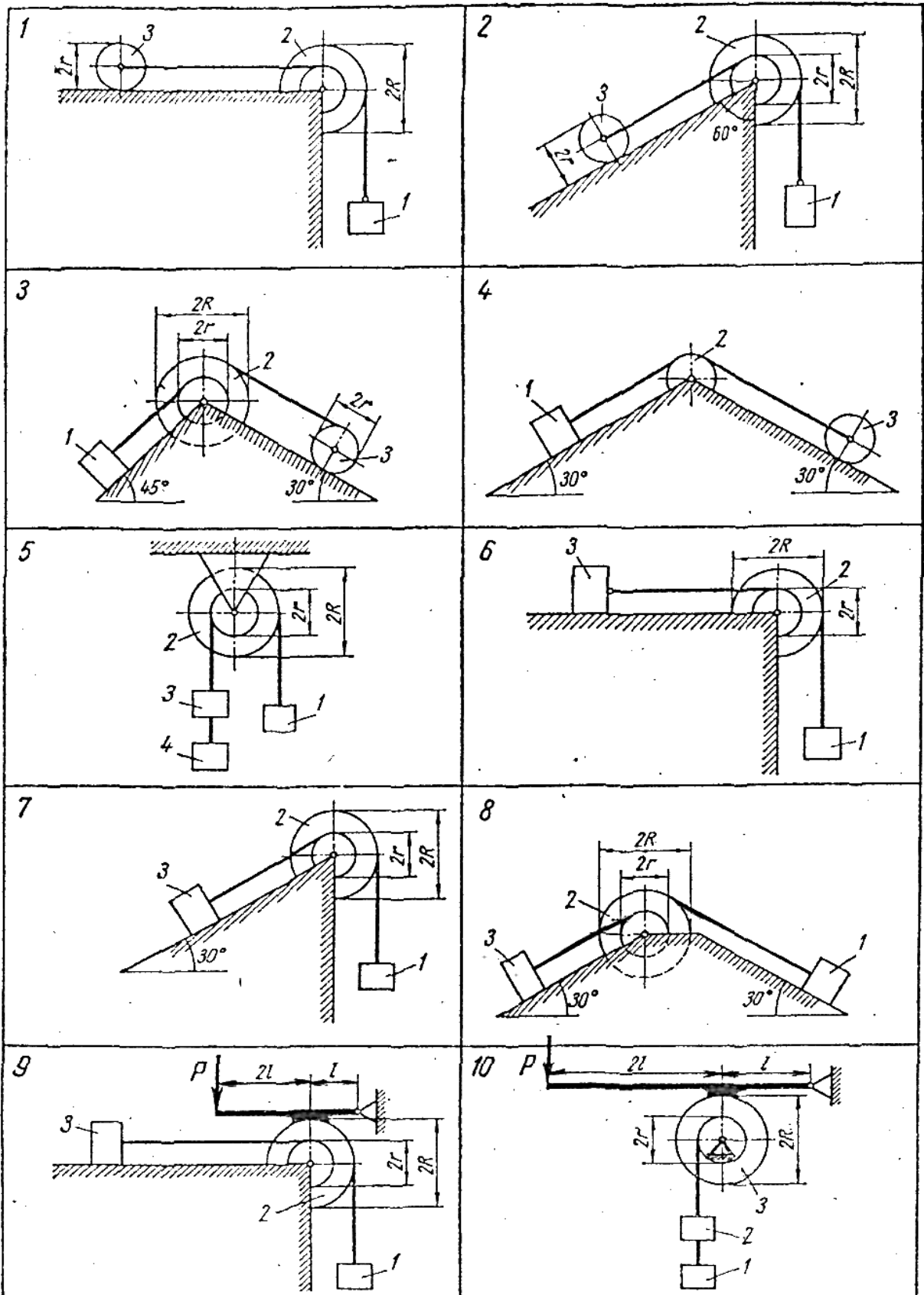


Рисунок 18

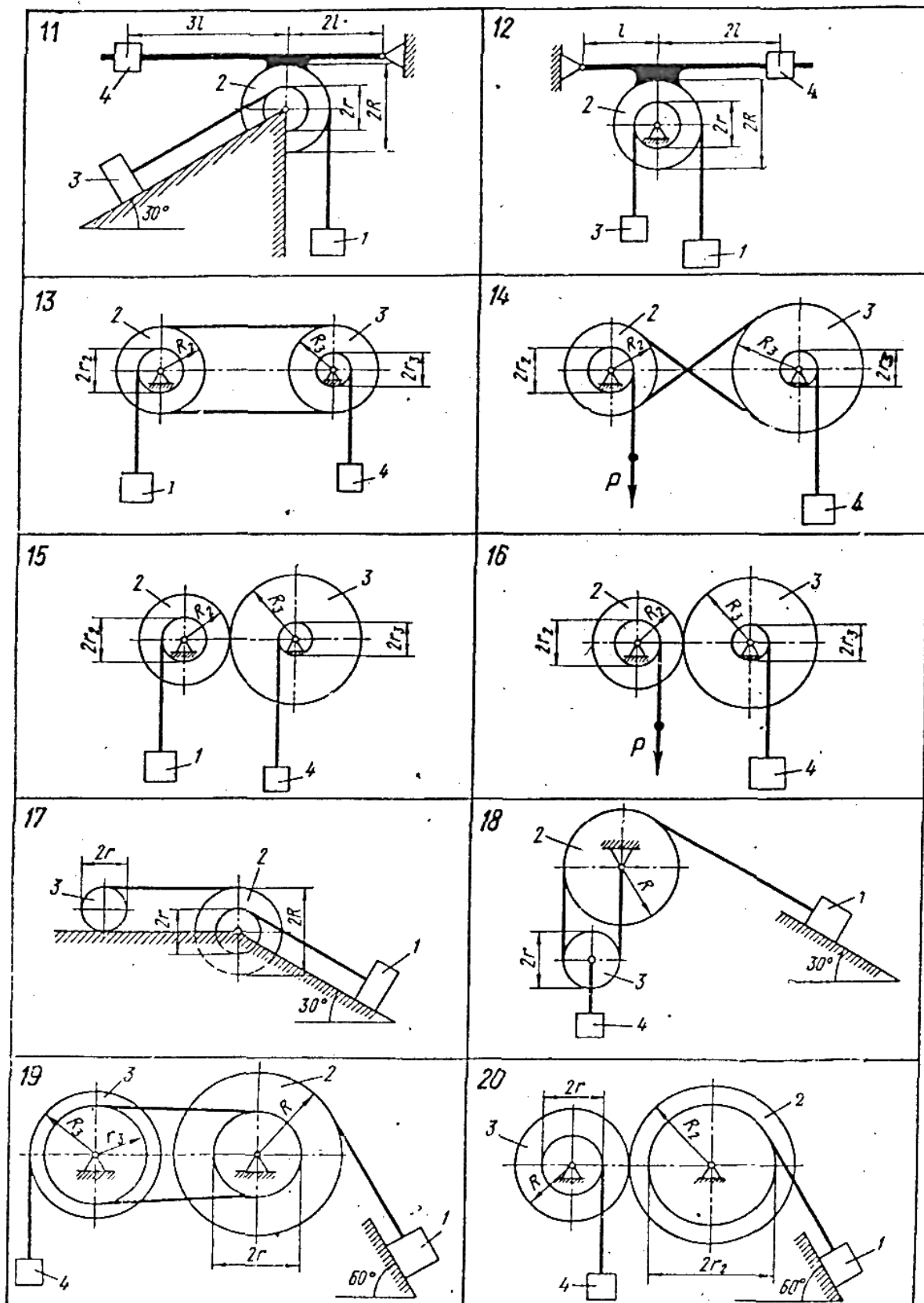


Рисунок 18, аркуш 2

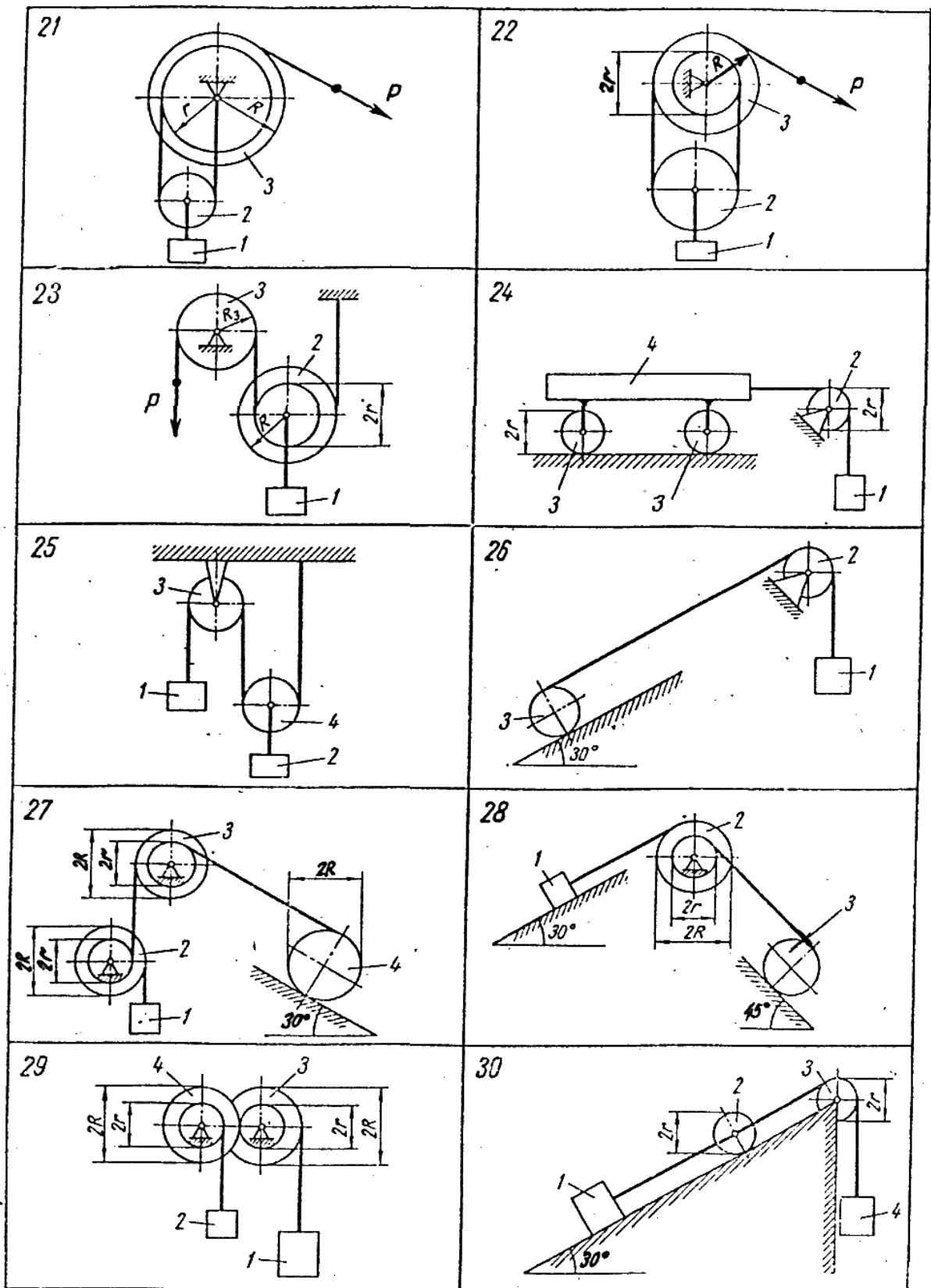


Рисунок 18, аркуш 3

Типовий звіт задачі

Рекомендації та приклад виконання задачі (РГР)

Приклад 1

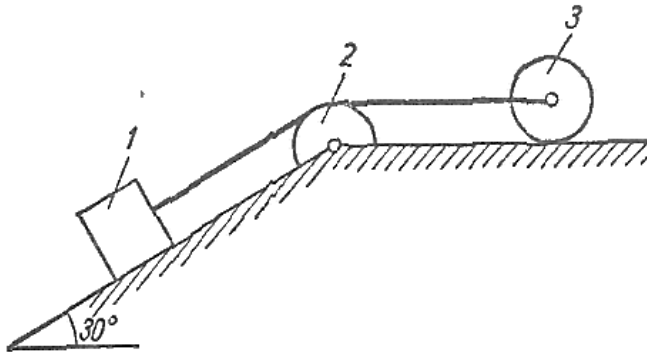


Рисунок 19

Дано:

$$G_1 = G_2 = G_3 = G,$$

$$r_2 = r_3 = r, \quad f = 0,2.$$

Блок 2 та коток 3 – суцільні однорідні циліндри (рисунок 19).

Визначити прискорення a вантажу 1 та натягання T_{1-2} і T_{2-3} гілок 1-2 та 2-3 ниток.

Розв'язання. Використаємо для розв'язання задачі загальне рівняння динаміки [5, 7].

Вкажемо задані сили (рисунок 20):

- сили ваги \overline{G}_1 – вантажу 1, \overline{G}_2 – блока 2, \overline{G}_3 – котка 3;
- сила тертя ковзання \overline{F} вантажу по похилій площині.

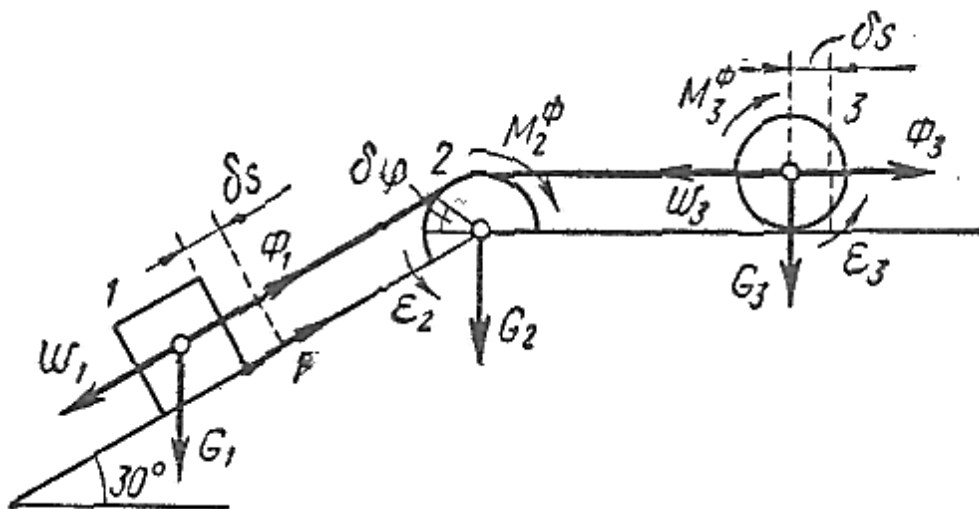


Рисунок 20

Прикладемо відповідні сили інерції.

Сила інерції вантажу 1, який рухається поступально з прискоренням $\overline{a_1}$, виражається вектором

$$\overline{\Phi_1} = -m_1 \cdot \overline{a_1}.$$

Сила інерції блока 2, який обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням ε_2 , приводиться до пари з моментом

$$M_2^\Phi = -J_{2X} \cdot \varepsilon_2.$$

Сили інерції котка 3, який здійснює плоский рух, приводяться до вектора

$$\overline{\Phi_3} = -m_3 \cdot \overline{a_{C3}},$$

де $\overline{a_{C3}}$ – прискорення центра мас котка та пари сил, момент якої

$$M_3^\Phi = -J_{C3} \cdot \varepsilon_3,$$

де ε_3 – кутове прискорення котка;

J_{C3} – момент інерції котка відносно центра його інерції С.

Надамо системі можливе переміщення (рисунок 20) і складемо загальне рівняння динаміки:

$$-G_1 \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \delta s + \Phi_1 \cdot \delta s + M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2 + \Phi_3 \delta s + M_3^\Phi \delta \varphi_3 = 0,$$

де $\delta \varphi_2$ та $\delta \varphi_3$ – кути обертання блока 2 та катка 3.

Враховуючи, що в даній задачі $G_1 = G_2 = G_3 = G = mg$ нитка нерозтяжна, тоді $a_3 = a_1 = a$, отримаємо таке рівняння:

$$\Phi_1 = ma;$$

$$M_2^\phi = J_{2X} \cdot \varepsilon_2 = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{m \cdot r \cdot a}{2};$$

$$\Phi_3 = ma;$$

$$M_3^\phi = J_{C3} \cdot \varepsilon_3 = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{m \cdot r \cdot a}{2}.$$

Сила тертя

$$F = fG_1 \cdot \cos 30^0 = f \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^0.$$

Після підстановки в загальне рівняння динаміки всіх попередніх виразів, воно набуває вигляду

$$-mg \cdot \delta s \cdot \sin 30^0 + fmg \cos 30^0 \cdot \delta s + ma \cdot \delta s + \frac{mra}{2} \cdot \delta \varphi_2 + ma \delta s + \frac{mra}{2} \delta \varphi_3 = 0.$$

Установимо залежність між можливими переміщеннями, які входять до загального рівняння

$$\delta \varphi_2 = \delta \varphi_3 = \frac{\delta s}{r},$$

та підставимо ці формули для кутів обертання в рівняння.

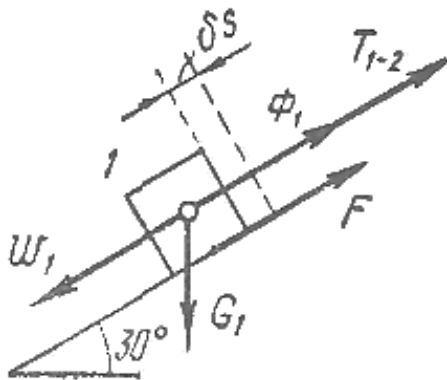
Розділимо всі члени рівняння на m і δs та отримаємо

$$-g \cdot \sin 30^0 + fg \cos 30^0 + a + \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 0,$$

звідки

$$a = \frac{g}{3} (\sin 30^0 - f \cos 30^0) = \frac{9,81}{3} (0,5 - 0,2 \cdot 0,87) = 1,09 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення натягу в гілках 1-2 нитки уявно розріжемо цю нитку та замінимо її дію на вантаж 1 реакцією $\overline{T_{1-2}}$ (рисунок 21).



Показавши силу інерції $\overline{\Phi_1}$ вантажу та надавши вантажу 1 можливе переміщення, складемо загальне рівняння динаміки:

Рисунок 21

$$-G_1 \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + \Phi_1 \cdot \delta s + F \delta s + T_{1-2} \delta s = 0,$$

звідки потрібне зусилля

$$\begin{aligned} T_{1-2} &= G_1 \cdot \sin 30^\circ - \Phi_1 - F = \\ &= mg \sin 30^\circ - ma - fmg \cos 30^\circ = \\ &= mg(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ - \frac{1}{3}(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)) = \\ &= G \frac{2}{3}(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = 0,22G. \end{aligned}$$

Для визначення натягу в гілках 2-3 нитки уявно розріжемо цю нитку та замінимо її дію на коток 3 реакцією $\overline{T_{2-3}}$ (рисунок 22).

Показавши $\overline{\Phi_3}$ та M_3^Φ і надавши котку 3 можливе переміщення, отримаємо:

$$\Phi_3 \cdot \delta s + M_3^\Phi \delta \varphi - T_{2-3} \delta s = 0,$$

де $\Phi_3 = ma$, $M_3^\Phi = \frac{mra}{2}$, $\delta \varphi = \frac{\delta s}{r}$.

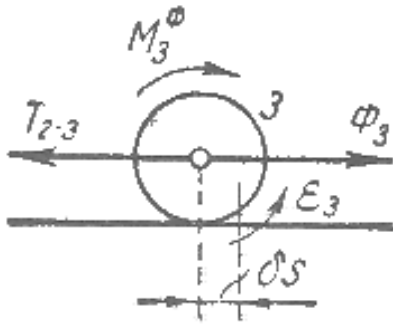


Рисунок 22

Таким чином,

$$m \cdot a + \frac{m \cdot a}{2} - T_{2-3} = 0,$$

тобто

$$T_{2-3} = \frac{3}{2} m \cdot a = \frac{3}{2} \frac{m \cdot g}{3} (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = 0,17 \cdot G.$$

Приклад 2

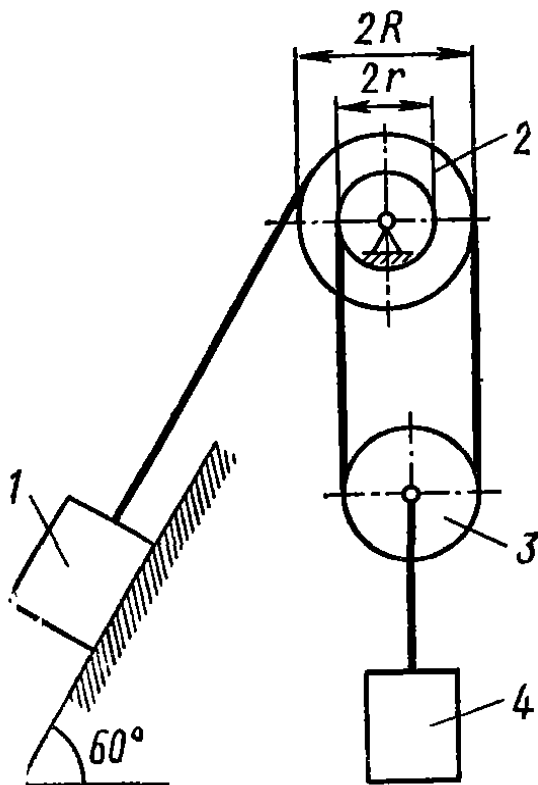


Рисунок 23

Дано:

$$G_1 = G_2 = G_3 = G,$$

$$r_2 = r_3 = r, \quad f = 0,2.$$

Блок 2 та блок 3 – суцільні однорідні циліндри (рисунок 23).

Визначити: прискорення a вантажу 1 та натягання T_{1-2} і T_{2-3} гілок 1-2 та 2-3 ниток.

Розв'язання. Використаємо для розв'язання задачі загальне рівняння динаміки. Оскільки система починає рух зі стану спокою, напрямком прискорень тіл відповідає напрямкам їхнього руху [5].

Враховуючи те, що серед сил, які діють на тіла системи, є сила тертя, доцільно встановити за вихідними даними істинний напрямок руху системи, щоб правильно вказати напрямок сили тертя.

Якщо напрямок руху системи обрано неправильно, тоді шукане прискорення матиме знак «-». В цьому випадку необхідно змінити напрямок сил тертя і сил інерції та внести відповідні виправлення в загальне рівняння динаміки.

В даному випадку рух системи такий, що вантаж 1 опускається.

Зобразимо сили (рисунок 24), що задані:

- сили ваги $\overline{G_1}$ – вантажу 1, $\overline{G_2}$ – блока 2, $\overline{G_3}$ – блока 3, $\overline{G_4}$ – вантажу 4;
- сила тертя ковзання \overline{F} вантажу по похилій площині.

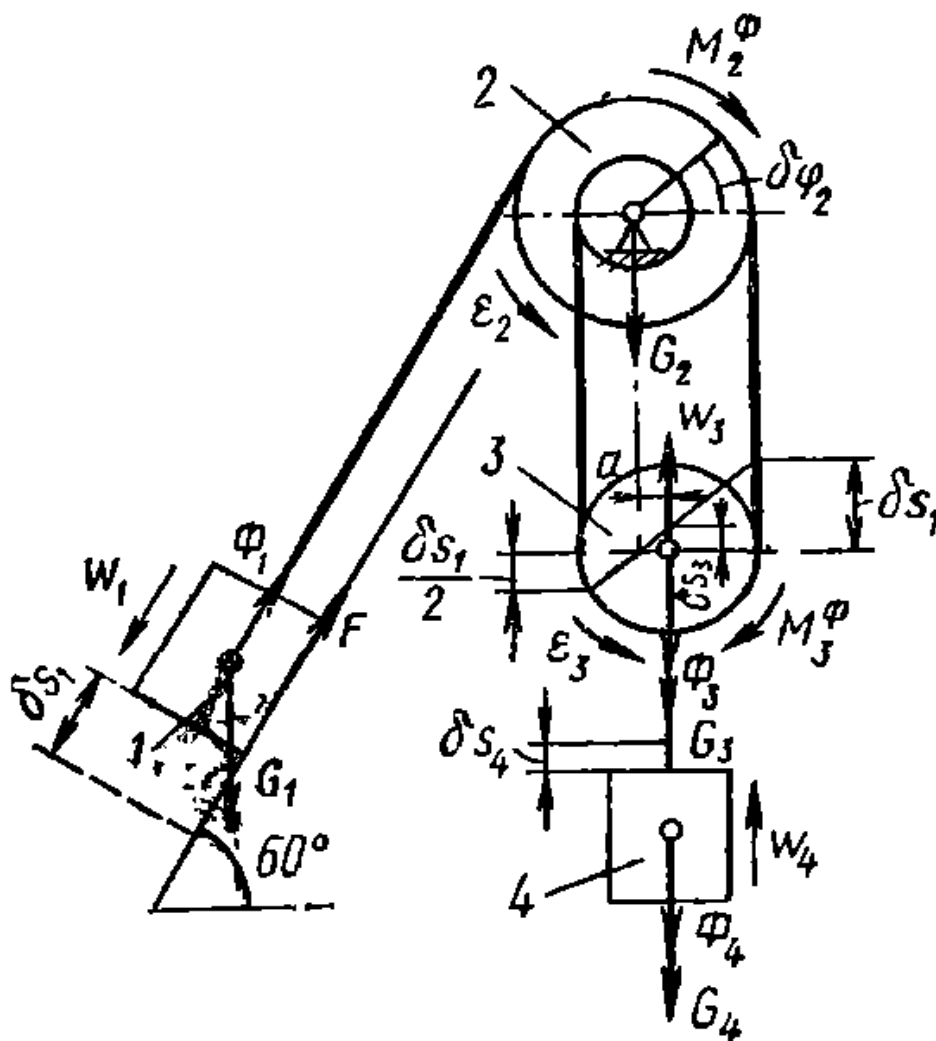


Рисунок 24

Прикладемо відповідні сили інерції.

Сила інерції вантажу 1, який рухається поступально з прискоренням $\overline{a_1}$, виражається вектором

$$\overline{\Phi_1} = -m_1 \cdot \overline{a_1}.$$

Сила інерції блока 2, який обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням ε_2 , приводиться до пари з моментом

$$M_2^\Phi = -J_{2X} \cdot \varepsilon_2.$$

Сили інерції блока 3, який здійснює плоский рух, приводяться до вектора

$$\overline{\Phi_3} = -m_3 \cdot \overline{a_{C3}},$$

де $\overline{a_{C3}}$ – прискорення центра мас блока та пари сил, момент якої

$$M_3^\Phi = -J_{C3} \cdot \varepsilon_3,$$

де ε_3 – кутове прискорення блока;

J_{C3} – момент інерції блока відносно центра його інерції С.

Сила інерції вантажу 4, який рухається поступально з прискоренням $\overline{a_4}$, виражається вектором

$$\overline{\Phi_4} = -m_4 \cdot \overline{a_4}.$$

Надамо системі можливе переміщення (рисунок 24) і складемо загальне рівняння динаміки:

$$G_1 \cdot \delta s_1 \cdot \sin 60^\circ - F \cdot \delta s_1 - \Phi_1 \cdot \delta s_1 - M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2 - G_3 \cdot \delta s_3 - \\ - \Phi_3 \delta s_3 - M_3^\Phi \cdot \delta \varphi_3 - G_4 \cdot \delta s_4 - \Phi_4 \cdot \delta s_4 = 0 \quad ,$$

де $\delta\varphi_2$ та $\delta\varphi_3$ – кути обертання блоків 2 та 3.

Враховуючи, що в даному завданні

$$G_1 = G_2 = 2G = 2mg, \quad G_3 = G = mg,$$

отримаємо такі рівняння:

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = 2m a_1;$$

$$M_2^\Phi = J_{2x} \cdot \varepsilon_2 = m_2 i_{2,x}^2 \varepsilon_2 = 4mr^2 \varepsilon_2;$$

$$\Phi_3 = m_3 a_3 = m a_3;$$

$$M_3^\Phi = J_{3x} \cdot \varepsilon_3 = \frac{m_3 \cdot r^2}{2} \cdot \varepsilon_3 = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \varepsilon_3;$$

$$\Phi_4 = m_4 a_4 = m a_4.$$

Сила тертя

$$F = fG_1 \cdot \cos 30^\circ = f \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ.$$

Встановлюємо залежності між можливими переміщеннями, що входять до загального рівняння динаміки, та прискореннями, користуючись тим, що ці залежності такі самі, як і між відповідними швидкостями.

Як показано на рисунку 24, миттєвий центр швидкостей блока 3 знаходиться на одній вертикалі з центром блока 2. Відстань між миттєвим центром швидкостей та центром блока 3

$$l = \frac{3r}{2} - r = \frac{r}{2}.$$

Тоді знаходимо

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{R} = \frac{\delta s_1}{2r};$$

$$\delta s_3 = \delta s_4 = \delta\varphi_3 l = \frac{\delta s_1}{4};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r}; a_3 = a_4 = \frac{a_1}{4}.$$

З урахуванням всього вищенаведеного, якщо поділити всі члени рівняння на m і δs_1 , загальне рівняння динаміки набуде такого вигляду:

$$2g \cdot \sin 60^\circ - 2fg \cos 60^\circ - 2a_1 - a_1 - \frac{g}{4} - \frac{a_1}{16} - \frac{a_1}{8} - \frac{g}{4} - \frac{a_1}{16} = 0,$$

звідки

$$a_1 = \frac{g(2 \sin 60^\circ - 2f \cos 60^\circ - 0,5)}{3,25} = \frac{9,81(1,73 - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 - 0,5)}{3,25} =$$

$$= 3,11 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_4 = \frac{a_1}{4} = \frac{3,11}{4} = 0,78 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення натягу в гілках 1-2 нитки уявно розріжемо цю нитку та замінімо її дію на вантаж 1 реакцією $\overline{T_{1-2}}$ (рисунок 25).

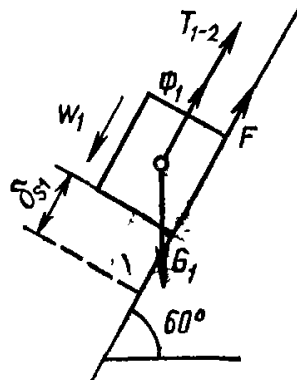


Рисунок 25

Показавши силу інерції $\overline{\Phi_1}$ вантажу та надавши вантажу 1 можливе переміщення, складемо загальне рівняння динаміки:

$$G_1 \cdot \delta s_1 \cdot \sin 60^\circ - \Phi_1 \cdot \delta s_1 - F \delta s_1 - T_{1-2} \delta s_1 = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} T_{1-2} &= G_1 \cdot \sin 60^\circ - \Phi_1 - F = \\ &= 2G \frac{\sqrt{3}}{2} - 2Gf \cos 60^\circ - 2 \frac{G}{g} a_1 = \\ &= G \left(1,73 - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 - 2 \cdot \frac{3,11}{9,81} \right) = 0,90G . \end{aligned}$$

Для визначення натягу в гілках 3-4 нитки уявно розріжемо цю нитку та замінимо її дію на вантаж 4 реакцією $\overline{T_{3-4}}$ (рисунок 26).

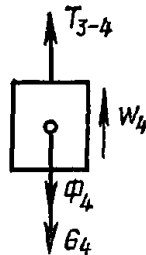


Рисунок 26

Не складаючи загального рівняння динаміки, на основі принципу Даламбера маємо

$$T_{3-4} = G_4 + \Phi_4 = G + \frac{G}{g} a_4 = G \left(1 + \frac{0,78}{9,87} \right) = 1,08G .$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ І ПІДГОТОВКИ ДО ЗАХИСТУ РГР, МОДУЛЬНОГО ТЕСТУВАННЯ, ЗАЛІКІВ ТА ІСПИТІВ З ТЕМАТИКИ ЗАДАЧІ

1 В чому полягає принцип Даламбера для невільної механічної системи?

2 Що таке сила інерції $\bar{\Phi}$ (даламберова сила) і як вона визначається?

3 Якою формулою можна описати принцип Даламбера для невільної механічної системи?

4 До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при поступальному русі?

5 До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при обертальному русі?

6 До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при плоско-паралельному русі?

7 Яким рівнянням відображується принцип можливих переміщень для механічної системи?

8 Яким рівнянням відображується принцип можливих переміщень для механічної системи з ідеальними зв'язками?

9 Що таке можливі або віртуальні переміщення системи?

10 В чому полягає принцип можливих переміщень?

11 Якою формулою можна описати загальне рівняння динаміки для системи з ідеальними зв'язками?

12 Якою формулою визначається можлива робота активної сили \bar{F}^A ?

13 Якою формулою визначається можлива робота реактивної сили \bar{F}^R ?

14 Що таке можлива робота сили і як її знайти?

15 В чому полягає загальне рівняння динаміки системи?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Аксьонова Н. А. Робочий конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». Харків : УкрДАЗТ, 2005. 122 с.

2 Аксьонова Н. А., Оробінський О. В. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». Харків : УкрДАЗТ, 2015. 152 с.

3 Шпачук В. П., Золотов М. С., Склярів В. О. Технічна механіка : навч. посіб. Харків : ХНУМГ, 2015. 277 с.

4 Булгаков В. М., Яременко В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г. Теоретична механіка : підручник. Київ : Центр учбової літератури, 2017. 640 с.

5 Аксьонова Н. А., Оробінський О. В., Дунай Л. М. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з дисц. «Теоретична механіка». Розділи «Кінематика» і «Динаміка». Харків : УкрДАЗТ, 2013. 65 с.

6 Бондаренко А. А. Теоретична механіка. Ч. 2. Динаміка. Київ : Знання, 2004. 590 с.

7 Черниш О., Яременко В. Теоретична механіка. Київ : Центр навчальної літератури, 2018. 760 с.

8 Булгаков В. та ін. Теоретична механіка : підручник. Київ : Центр навчальної літератури, 2017. 640 с.

9 Векерик В., Лисканич М., Капелюх Я., Петрук О., Цідило І. Теоретична механіка. Ч. 2. Динаміка: навч. посіб. Івано-Франківськ : Факел, 2002. 342 с.

10 Лобас Л. Г., Лобас Людм. Г. Теоретична механіка : підруч. для студ. вищ. техн. навч. закладів. К. : ДЕТУТ, 2008. 406 с.

11 Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. Москва : Высш. шк., 1986. 416 с.