**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

Кафедра фізики

ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ ДО КУРСУ ФІЗИКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів

Харків – 2019

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри фізики 24 грудня 2018 р., протокол № 5.

Описано основи математичного апарату до курсу загальної фізики відповідно до чинної програми. У цих методичних вказівках стисло і конспективно викладено відомості з векторної алгебри, математичного аналізу, диференціального й інтегрального числення, основні формули з тригонометрії й алгебри, довідковий матеріал. Метою методичних вказівок до курсу фізики є допомога студентові самостійно вивчити будь-який розділ фізики та інших технічних дисциплін. Ці методичні вказівки призначено для студентів усіх освітніх програм, що вивчають курс фізики, денної та заочної форм навчання.

Укладач

проф. М. І. Гришанов

Рецензент

доц. О. В. Самойлов

ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ ДО КУРСУ ФІЗИКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи студентів

Відповідальний за випуск Гришанов М. І.

Редактор Еткало О. О.

Підписано до друку 18.03.19 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк .арк. 4,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Метою навчальної дисципліни «Фізика» або «Загальна Фізика» є вивчення студентами основних фізичних законів механіки, молекулярної фізики, електрики, магнетизму, оптики, атомної та ядерної фізики. Основні завдання курсу фізики – ознайомити студента з основними фізичними явищами, методами їх спостереження; дати уявлення про межі застосування фізичних моделей, законів та теорій; сформувати у студента певні навички експериментальної роботи; ознайомити з основними методами обробки результатів експерименту та основними фізичними приладами. Математика і фізика зазвичай вважаються найбільш важкими дисциплінами. У всі періоди людської свідомості ці напрямки наукової діяльності розвивалися взаємопов'язано. Слід вважати, що дуже багато елементів інтеграції з математикою можуть зробити виклад фізики більш ясним і доступним на всіх рівнях її вивчення в університеті.

Спілкування зі студентами показує, що непорозуміння ними будь-якої теми з курсу фізики часто зумовлені браком навичок аналізу функціональних залежностей, складання і розв'язання математичних рівнянь, невмінням проводити алгебраїчні перетворення з векторами, інтегралами та похідними. Тому виникла необхідність у методичних вказівках з основ математики, які потрібні для курсу загальної фізики. У цих вказівках стисло і конспективно викладено відомості з векторного числення, математичного аналізу, диференціального й інтегрального числення. Математичні вказівки до курсу загальної фізики мають метою допомогти студенту самостійно вивчати будь-який розділ фізики та інших технічних дисциплін.

Розглянуто далеко не всі питання математики, потрібні в курсі фізики, а тільки мінімальні відомості, що дають змогу почати виклад курсу фізики із застосуванням необхідного математичного апарату. Питання елементарної математики (арифметика, алгебра, геометрія, тригонометрія) не викладаються, оскільки вважається, що вони загальновідомі.

ВСТУП

Фізика – це фундаментальна наука про природу, про властивості матерії та закони її руху.

Під матерією у фізиці розуміється речовина, з якої складаються ті чи інші «фізичні» тіла, а також силові поля (гравітаційні, електромагнітні, ядерні). Матерія існує тільки в русі, який визначається в просторі і часі.

До фізичних форм руху матерії належать механічна, молекулярно-теплова, електромагнітна і ядерна. Тому курс загальної фізики умовно ділиться на розділи: механіка, термодинаміка, молекулярна фізика, електрика, магнетизм, коливання і хвилі, оптика (хвильова, геометрична, квантова), атомна і ядерна фізика.

Фізика – наука експериментальна. Практично всі фізичні закони встановлені дослідним шляхом. Результати нових експериментів дають змогу робити нові відкриття, формулювати нові фізичні закони, уточнювати відомі закономірності або визначати межі їх застосовності.

Фізика – наука точна, яка широко використовує математичний апарат.

Історія фізики і математики дає багато прикладів взаємного збагачення цих наук. Союз цих наук взаємовигідний. Не випадково видатний фізик Ісаак Ньютон став одним з творців диференціального й інтегрального числення. Фізики-теоретики у своїй науковій роботі широко використовують майже весь арсенал математики. При цьому часто вони самі розробляють нові методи.

На закінчення наведемо висловлювання вчених про математику. Ці висловлювання даються для того, щоб студенти розуміли, що без освоєння основ математики неможливо стати справжніми фахівцями.

«*Математика – це мова, якою з людьми розмовляють боги*» (Платон, давньогрецький філософ, III – IV ст. до н. е.).

«*Істинну філософію віщає нам природа; але зрозуміти її може лише той, хто навчився розуміти її мову, за допомогою якої вона говорить з нами. Ця мова є математика* » (Галілео Галілей.)

«*У кожній природничій науці укладено стільки істини, скільки в ній є математики*». (філософ Іммануїл Кант).

«*Наука тільки тоді досягає досконалості, коли їй вдається користуватися математикою*». (Карл Маркс).

«*Необхідно з ранніх років розвивати вміння мислити, застосовуючи математичну символіку*». (Сірілл Хиншелвуд, англійський фізико-хімік, лауреат Нобелівської премії з хімії 1956 року, голова Лондонського Королівського Товариства).

«*Наближення до глибшого розуміння основних принципів фізики пов'язане з усе більш складними математичними методами*». (Альберт Ейнштейн).

Один із засновників авіації М. Є. Жуковський зазначив такі переваги векторного аналізу в механіці: «*Векторні зображення адекватно передають суть багатьох явищ механіки, при цьому досягається наочність й геометрична ясність процесу, досягається розумний синтез геометрії й аналітичної механіки, скорочуються малозмістовні алгебраїчні перетворення, спрощуються викладки при розгляді складного руху тіл, багато формул набувають інваріантного характеру щодо різних систем відліку*».

1 ОСНОВИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Усі фізичні величини поділяються на дві великі групи: скалярні (скаляри) і векторні (вектори).

Скаляри характеризуються лише числовим значенням: час t, маса m, температура T, електричний заряд q та ін. Скалярні величини можуть бути і додатними, і від’ємними і складаються алгебраїчно.

Векторами називаються такі величини, які характеризуються і числовим значенням, і напрямком: швидкість $\vec{\upsilon}$, прискорення $\vec{a}$, сила $\vec{F} = m\vec{a}$, імпульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$, напруженість електричного поля $\vec{E}$, індукція магнітного поля $\vec{B}$ та ін. Векторні величини складаються геометрично.

1.1 Проекція вектора на вісь

Віссю називається напрямлена пряма. Напрямок прямої і векторів позначають стрілкою. Заданий на осі напрямок вважають додатним, а протилежний йому – від'ємним.

Проекцією точки M на вісь x називається основа M_x перпендикуляра MM_x, опущеного з точки M на цю вісь, (рисунок 1). Таким чином проекція M_x є точкою перетину осі x з площиною, яка проходить через точку M перпендикулярно до осі x.

Проекцією a_x вектора $\vec{a}$ на вісь x називають відстань між проекцією кінця N_x і початку M_x вектора на задану вісь, (рисунок 1):

$$a_x = N_x - M_x = a\cos\beta, \quad (1)$$

де $a = |\vec{a}|$ – довжина (модуль, величина) вектора $\vec{a}$; β – кут між вектором $\vec{a}$ і віссю x. Оскільки $\vec{a} = \vec{b}$, то очевидно, що проекції цих векторів на вісь x однакові, $a_x = b_x$.

Проекція вважається додатною, якщо вектор $\vec{a}$ і вісь напрямлені в одну сторону, тобто якщо кут β гострий. Проекція вважається від'ємною, якщо вектор і вісь напрямлені в протилежні сторони (коли кут β – тупий). Якщо вектор перпендикулярний до осі ($\beta = \pi/2 = 90°$), то його проекція на цю вісь дорівнює нулю. Якщо вектор паралельний до осі або повністю лежить на осі, то довжина проекції вектора дорівнює довжині самого вектора.

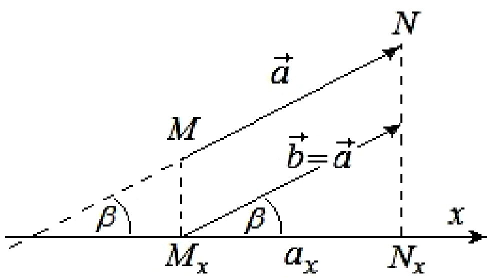

Рисунок 1 – Проекція вектора на вісь

Якщо є дві взаємно перпендикулярні осі x і y, (рисунок 2), то проекції вектора $\vec{A}$ на ці осі можна визначити за формулами:

$$A_x = N_x - M_x = A\cos\beta\,,$$
$$A_y = N_y - M_y = A\sin\beta\,. \qquad (2)$$

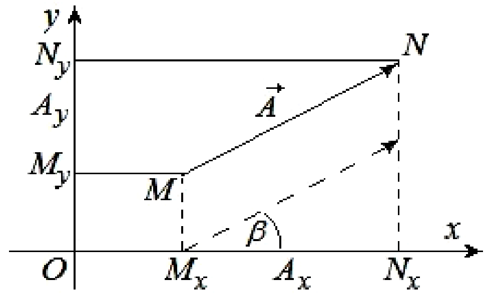

Рисунок 2 – Проекції вектора на дві ортогональні осі

На рисунку 3, *а,* показано вектор $\vec{A}$ і його координати-проекції A_x, A_y, A_z на осі x, y, z у тривимірному геометричному просторі:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\,, \qquad (3)$$

тобто $\vec{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ в (3) є одиничні вектори (орти) вздовж напрямків x, y та z відповідно. Наприклад, радіус-вектор $\vec{r}$ матеріальної точки M на рисунку 3, *б* має координати x, y, z: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \{x, y, z\}$.

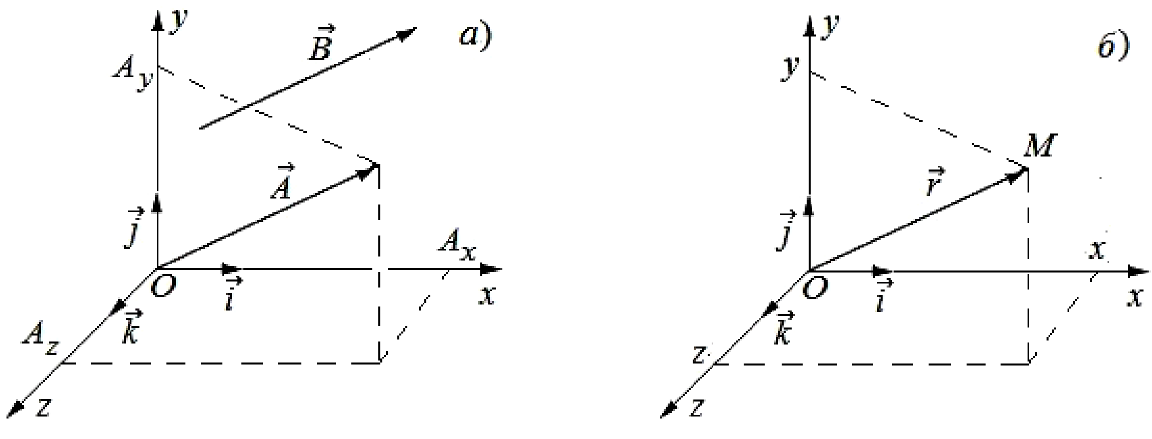

Рисунок 3 – Вектор $\vec{A}$ і радіус-вектор $\vec{r}$ у прямокутній системі координат

Модуль (величина, довжина) будь-якого вектора $\vec{A}$ позначається як $|\vec{A}|$ або A (без стрілки) і дорівнює

$$|\vec{A}| \equiv A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ . \qquad (4)$$

Якщо одна з проекцій дорівнює нулю, то вектор $\vec{A}$ є двовимірним. Наприклад, якщо A_z=0, то вектор $\vec{A}$ лежить у площині (y, x), (рисунок 2).

Вектор $\vec{A}$=0, при A_x=A_y=A_z=0, тобто при $|\vec{A}|$ = 0.

Вектор не змінюється при плоскопаралельному перенесенні. Наприклад, якщо вектор $\vec{B} \parallel \vec{A}$ і $|\vec{B}| = |\vec{A}|$, (дивись рисунок 3, *а*), то $\vec{B} = \vec{A}$. На рисунку 1 $\vec{a} = \vec{b}$.

1.2 Сума (додаток) векторів

Сумою двох векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ називається вектор

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad (5)$$

(рисунок 4), проекції якого на осі координат дорівнюють сумі відповідних проекцій доданків:

$$C_x = A_x + B_x; \qquad C_y = A_y + B_y; \qquad C_z = A_z + B_z \qquad (6)$$

а модуль дорівнює

$$|\vec{C}| \equiv C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}\ , \qquad (7)$$

де α − кут між векторами $\vec{A}$ і $\vec{B}$.

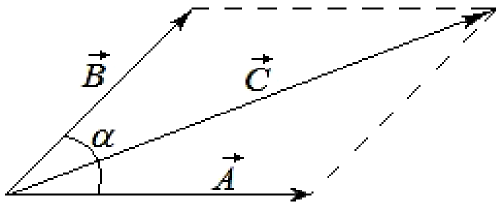

Рисунок 4 – Правило паралелограма при складанні двох векторів

Геометрично знайти суму двох векторів можна двома способами: за правилом паралелограма (рисунок 4) або трикутника (рисунок 5), якщо паралельно перенести початок одного (наприклад $\vec{A}$) на кінець другого $\vec{B}$ і побудувати вектор $\vec{C}$, поєднуючи початок вектора $\vec{B}$ з кінцем перенесеного вектора $\vec{A}$.

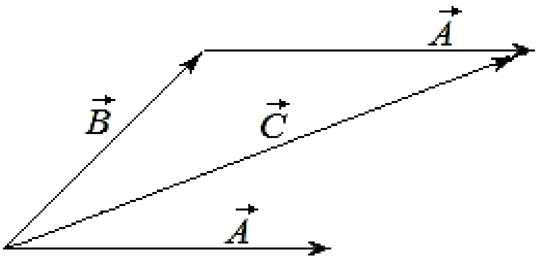

Рисунок 5 – Правило трикутника при складанні двох векторів

Другий спосіб зручний при додаванні більш ніж двох векторів і трансформується в так зване правило багатокутника. На рисунку 6 показана сума чотирьох векторів:

$$\vec{C} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 . \tag{8}$$

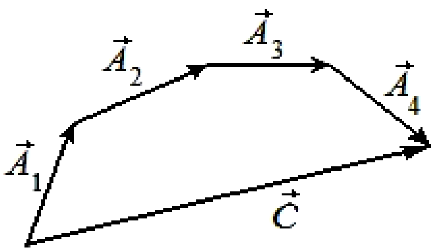

Рисунок 6 – Правило багатокутника при складанні векторів

Приклад 1. На автомобіль масою 1 т під час руху діє сила опору $F_{оп}$ яка дорівнює 0,1 від діючої на нього сили ваги mg. Знайти силу тяги $F_т$, яку створює двигун автомобіля, якщо автомобіль рухається із прискоренням $a = 1 м/с^2$ вгору з нахилом 1 м на кожні 25 м шляху.

Дано:

$m = 1 т = 1000 кг$,

$a = 1 м/с^2$

$h = 1 м$, $L = 25 м$

$F_{оп} = 0{,}1mg$

$F_т = ?$

Розв'язання:

На автомобіль діють чотири сили: сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$, сила тяги $\vec{F}_т$, сила опору $\vec{F}_{оп}$ і сила реакції опору $\vec{N}$. Відповідні сили зображені на рисунку 7.

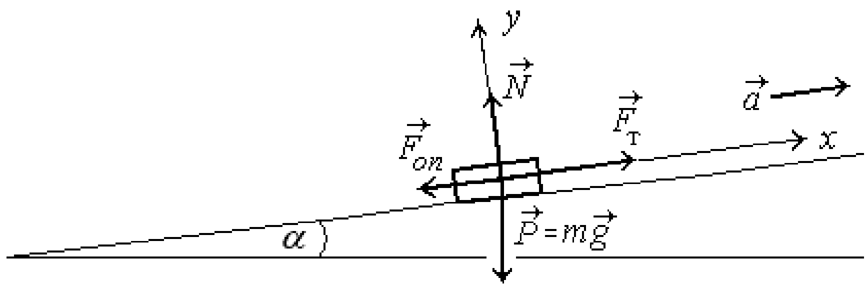

Рисунок 7 – Сили, що діють на автомобіль при русі вгору по похилій площині

Запишемо 2-й закон Ньютона для автомобіля:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_т + \vec{F}_{оп} + \vec{N}. \qquad (9)$$

Проекція векторного рівняння (9) на вісь x (з напрямком уздовж похилої площини) дає нам скалярне рівняння щодо величини $F_т$:

$$ma = -mg\sin\alpha + F_т - F_{оп} + 0, \qquad (10)$$

де $\sin\alpha = h/L$. Звідки знаходимо

$$F_т = ma + mg\frac{h}{L} + F_{оп} = m(a + g\frac{h}{L} + 0{,}1g) =$$

$$=10^3 \cdot \left(1+9{,}8\cdot\frac{1}{25}+0{,}1\cdot 9{,}8\right)=2372\,(\text{Н}). \qquad (11)$$

Перевіримо розмірність формули (11) для $F_\text{т}$:

$$[F_\text{т}]=\text{кг}\cdot\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}+\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{м}}+\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)=\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=\text{Н}. \qquad (12)$$

Відповідь: $F_\text{т}=2372\,\text{Н}$.

1.3 Множення вектора на скаляр

При множенні вектора $\vec{A}$ на додатний скаляр k отримуємо новий вектор, напрямок якого збігається з $\vec{A}$, а числове значення в k разів більше, якщо $k > 1$ (або в k разів менше, якщо $k < 1$). При множенні вектора на від'ємний скаляр k отримуємо вектор, напрямок якого протилежний вектору $\vec{A}$, а числове значення (модуль) відрізняється в $|k|$ разів.

1.4 Скалярний добуток векторів

У результаті скалярного добутку двох векторів виходить скалярна величина, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}= A_B\, B=A\, B_A= A\, B\, \cos\alpha = A_x\cdot B_x+A_y\cdot B_y+ A_z\cdot B_z. \qquad (13)$$

При цьому $A_B = A\cos\alpha$ – проекція $\vec{A}$ на вектор $\vec{B}$; а $B_A = B\cos\alpha$ – проекция $\vec{B}$ на $\vec{A}$, α – кут між векторами $\vec{A}$ і $\vec{B}$. Якщо вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$ паралельні один одному (α=0), то результат їх скалярного добутку буде максимальним; якщо обидва вектори ортогональні ($\alpha=\pi/2$), то $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$.

Фізичний зміст скалярного добутку векторів

Якщо вектор $\vec{\ell}$ (дивись рисунок 8) зображує переміщення матеріальної точки, а вектор $\vec{F}$ силу, що діє на цю точку, то скалярний добуток $\vec{F}\cdot\vec{\ell}$ чисельно дорівнює роботі *A* сили $\vec{F}$:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{\ell}=\vec{F}_{\ell}\cdot\vec{\ell}=F_{\ell}\ell=F\ell\cos\alpha. \qquad (14)$$

Дійсно, роботу *A* виконує тільки компонента сила $\vec{F}_{\ell}$ уздовж переміщення. Виходить, що робота сили $\vec{F}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{\ell}$ і $\vec{F}_{\ell}$: $A=F_{\ell}\ell$, де проекція сили $\vec{F}$ на $\vec{\ell}$ дорівнює $F_{\ell}=F\cos\alpha$.

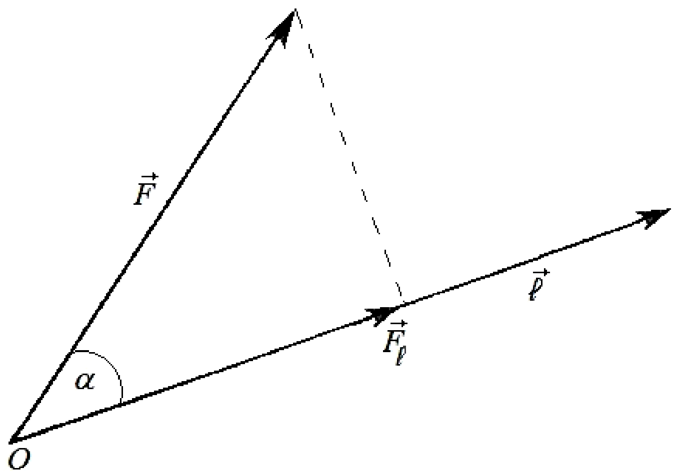

Рисунок 8 – Робота сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки

При цьому робота вважається додатною, якщо вектори $\vec{F}_{\ell}$ і $\vec{\ell}$ є рівнонапрямленими (коли кут α – гострий), і від'ємною в протилежному випадку (кут α – тупий). Отже, робота дорівнює модулю вектора $\vec{\ell}$, помноженому на проекцію вектора $\vec{F}$ за напрямком вектора $\vec{\ell}$, тобто робота дорівнює скалярному добутку $\vec{F}\cdot\vec{\ell}=\vec{\ell}\cdot\vec{F}$.

1.5 Векторний добуток векторів

Результатом векторного множення двох векторів є вектор $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, модуль якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих двох векторах:

$$C = |\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\alpha \,. \tag{15}$$

Лінія дії вектора $\vec{C}$ перпендикулярна до площини, у якій лежать вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$, а його напрямок є таким (правило правого гвинта), що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший поворот навколо нього від першого вектора до другого повинен відбуватися проти годинникової стрілки, (дивись рисунок 9). Це означає, що,

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}, \tag{16}$$

але

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \tag{17}$$

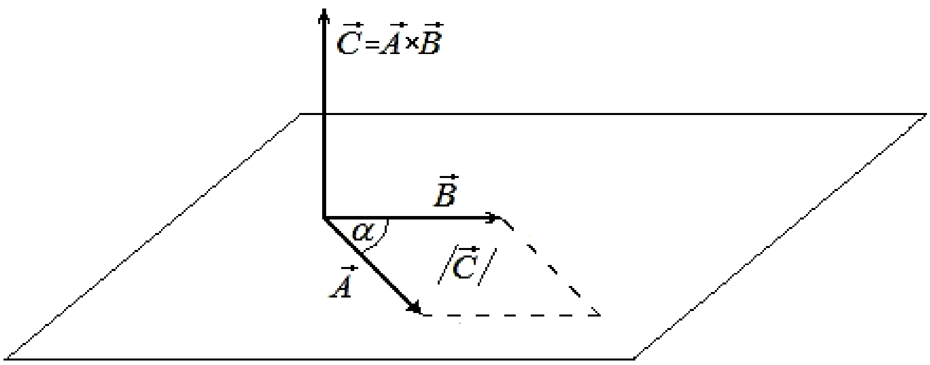

Рисунок 9 – Векторне перемноження векторів

Модуль векторного добутку максимальний, коли вектори ортогональні (α = 90°). Векторний добуток паралельних (антипаралельних) векторів дорівнює нулю (α = 0° або α = 180°).

Фізичний зміст векторного добутку векторів

Як фізичну величину, яка визначається векторним добутком, розглянемо момент сили $\vec{M}$. Нехай A є точка прикладання сили $\vec{F}$ на рисунку 10. Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки *O* (початок координат) називається векторний добуток

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{18}$$

де $\vec{r}$ є радіус-вектор точки *A*. Оскільки модуль цього векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма *OABC*, то модуль моменту дорівнює добутку основи *AB* на висоту $OK \perp AB$, тобто силі, що помножена на відстань від точки *O* до прямої, ОК уздовж якої діє сила:

$$M = \left|\vec{M}\right| = AB \cdot OK = F \cdot r \sin\alpha. \tag{19}$$

Слід нагадати, що величину *OK*= r sinα в динаміці обертального руху матеріальної точки (або твердого тіла) називають плечем сили $\vec{F}$.

У механіці доведено, що для рівноваги твердого тіла необхідно, щоб дорівнювали нулю не тільки сума векторів $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ...$, які представляють сили, прикладені до тіла, але й сума моментів цих сил. У тому випадку, коли всі сили паралельні одній площині, додавання векторів, що представляють моменти, можна замінити додаванням і відніманням їхніх модулів. Але при довільних напрямках сил така заміна неможлива. Відповідно до цього векторний добуток визначається саме як вектор, а не як число-скаляр.

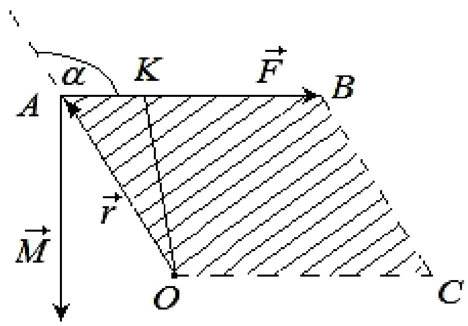

Рисунок 10 – Момент сили відносно точки

Приклад 2. Брусок постійного поперечного перерізу S складається з двох рівних частин – залізної (Fe) та алюмінієвої (Al). Знайти центр мас бруска, якщо його повна довжина $0{,}6\,\text{м}$, густина заліза $\rho_з = 7{,}9 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$, густина алюмінію $\rho_а = 2{,}6 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$.

Дано:

$L = 0{,}6\,\text{м}$

$\rho_а = 2{,}6 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$

$\rho_з = 7{,}9 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$

$l = ?$

Розв'язання:

Перший спосіб. Очевидно, що центр ваги буде зміщеним від середини бруска (точка O) в бік залізної частини (точка C на рисунку 11). Позначимо це зміщення OC за $l=OC$. Це і буде центр ваги.

Щоб визначити l, використаємо рівняння моментів трьох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ відносно центра мас (ваги, тяжіння) C в рівноважному горизонтальному положенні бруска:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0. \tag{20}$$

На залізну частину (зліва від точки C на рисунку 11) діє сила $\vec{F}_1 = m_1 \vec{g}$ з плечем $\vec{r}_1$, де маса залізної частини AC дорівнює

$$m_1 = \rho_з \cdot S \cdot AC = \rho_з \cdot S\left(\frac{L}{2} - l\right). \tag{21}$$

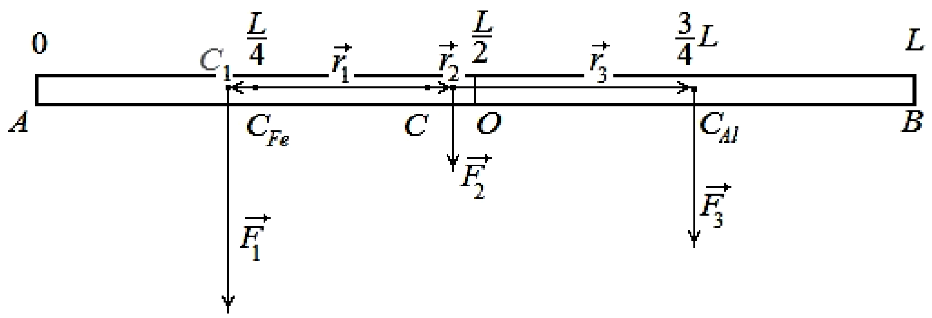

Рисунок 11 – Брусок із залізної та алюмінієвої половинок

Відповідний момент сили $\vec{F}_1$ згідно з (18) дорівнює

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1, \tag{22}$$

проекція якого на горизонтальну вісь, що проходить через точку *C* перпендикулярно рисунку, є додатною величиною:

$$M_1 = r_1 F_1 = m_1 g\left(\frac{L}{2} - l\right)\frac{1}{2} = \rho_з S\left(\frac{L}{2} - l\right) g\left(\frac{L}{2} - l\right)\frac{1}{2}. \qquad (23)$$

Тут ураховано, що плече сили $\vec{F}_1$, (згідно з рисунком 11), дорівнює

$$r_1 = C_1 C = \left(\frac{L}{2} - l\right)\frac{1}{2}. \qquad (24)$$

За аналогією моменти сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$ визначаються як

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \text{і} \quad \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3, \qquad (25)$$

напрямки яких протилежні до напрямку $\vec{M}_1$. Відповідно проекції $\vec{M}_2$ і $\vec{M}_3$ на вісь, перпендикулярну рисунку, є від'ємними:

$$M_2 = -r_2 F_2 = -m_2 g\,\frac{OC}{2} = -\rho_з S l g\,\frac{l}{2}, \qquad (26)$$

$$M_3 = -r_3 F_3 = -m_а g \cdot C_{Al} C = -\rho_а S\,\frac{L}{2}\, g\left(\frac{L}{4} + l\right). \qquad (27)$$

Таким чином, маємо таке рівняння відносно *l*:

$$\rho_з S\left(\frac{L}{2} - l\right) g\left(\frac{L}{2} - l\right)\frac{1}{2} = \rho_з S g\,\frac{l^2}{2} + \rho_а S\,\frac{L}{2}\, g\left(\frac{L}{4} + l\right). \qquad (28)$$

Звідси отримуємо робочу формулу для *l*:

$$l = \frac{L(\rho_з - \rho_а)}{4(\rho_з + \rho_а)} = \frac{0{,}6(7{,}9 - 2{,}6)10^3}{4(7{,}9 + 2{,}6)10^3} \approx 0{,}076 \ (\text{м}). \qquad (29)$$

Перевіримо одиницю виміру *l* в СІ:

$$[l] = \frac{\text{м} \cdot (\text{кг}/\text{м}^3 + \text{кг}/\text{м}^3)}{\text{кг}/\text{м}^3 + \text{кг}/\text{м}^3} = \text{м}. \qquad (30)$$

Відповідь: $l = 0{,}076$ м=7,6 см.

Другий спосіб. Центри мас залізної та алюмінієвої частин бруска розміщені у їхніх відповідних геометричних центрах C_{Fe} і C_{Al}. на рисунку 11. Центр мас C всього бруска ділить відстань між ними на частини, обернено пропорційні їхнім масам. Нехай $l_1 = C_{Fe}C$ – це відстань від центра мас залізної частини до загального центра мас, а $l_2 = C_{Al}C$ – це відстань від центра мас алюмінієвої частини до загального центра мас, тоді

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_{\text{а}}}{m_{\text{з}}} = \frac{\rho_{\text{а}} V_{\text{а}}}{\rho_{\text{з}} V_{\text{з}}} = \frac{\rho_{\text{а}} SL/2}{\rho_{\text{з}} SL/2} = \frac{\rho_{\text{а}}}{\rho_{\text{з}}}. \tag{31}$$

Оскільки

$$l_1 + l_2 = C_{Fe}C_{Al} = L/2, \tag{32}$$

то звідси можна знайти l_1 і l_2. Для l_1 отримаємо:

$$l_1 = \frac{\rho_{\text{а}} L}{2(\rho_{\text{а}} + \rho_{\text{з}})}. \tag{33}$$

Позначимо через $l=OC$ відстань до загального центра мас від центра бруска O, тоді остаточно знаходимо:

$$l = OC_{Fe} - l_1 = \frac{L}{4} - l_1 = \frac{L}{4} - \frac{\rho_{\text{а}} L}{2(\rho_{\text{а}} + \rho_{\text{з}})} = \frac{L(\rho_{\text{з}} - \rho_{\text{а}})}{4(\rho_{\text{а}} + \rho_{\text{з}})} =$$
$$= \frac{0{,}6 \cdot (7{,}9 \cdot 10^3 - 2{,}6 \cdot 10^3)}{4 \cdot (7{,}9 \cdot 10^3 + 2{,}6 \cdot 10^3)} \approx 0{,}076 \ \text{(м)}, \tag{34}$$

що збігається з (29).

Перевіримо розмірність формули для l:

$$[l] = \frac{\text{м} \cdot (\text{кг}/\text{м}^3 + \text{кг}/\text{м}^3)}{\text{кг}/\text{м}^3 + \text{кг}/\text{м}^3} = \text{м}. \tag{35}$$

Відповідь: $l = 0{,}076$ м=7,6 см.

1.6 Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{C}$ на векторний добуток векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$:

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\,. \tag{36}$$

Мішаний добуток за абсолютною величиною дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ (рисунок 12). Коли вектори $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ортогональні, мішаний добуток максимальний і дорівнює $A\cdot B\cdot C$ (як об'єм прямокутного паралелепіпеда – *геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів*).

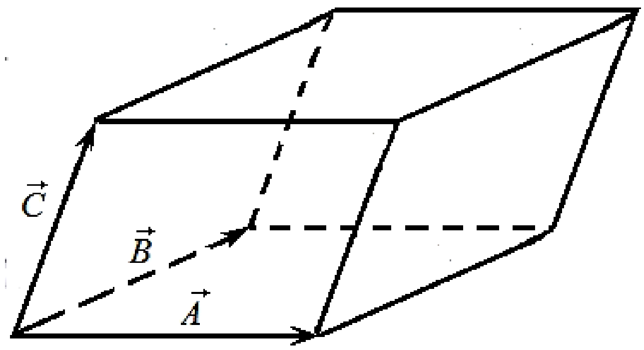

Рисунок 12 – Мішаний добуток трьох векторів

Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо два з векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ паралельні або всі вектори лежать в одній площині, або один з векторів дорівнює нулю.

1.7 Подвійний векторний добуток

Трьом векторам $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{C}$ можна поставити у відповідність вектор, що дорівнює $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$. Цей вектор називають подвійним векторним добутком векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{C}$, який виражається через лінійну комбінацію двох векторів за формулою

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}). \qquad (37)$$

Фізичний зміст подвійного векторного добутку

Подвійний векторний добуток зустрічається і в механіці, і в електромагнетизмі. Наприклад, момент імпульсу $\vec{L}_{||}$ матеріальної точки (*A* на рисунку 13 з масою *m* і лінійною швидкістю $\vec{\upsilon}$) відносно осі обертання визначається як векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$ цієї точки та її імпульсу $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$:

$$\vec{L}_{||}=\vec{r}\times\vec{p}=m(\vec{r}\times\vec{\upsilon}). \qquad (38)$$

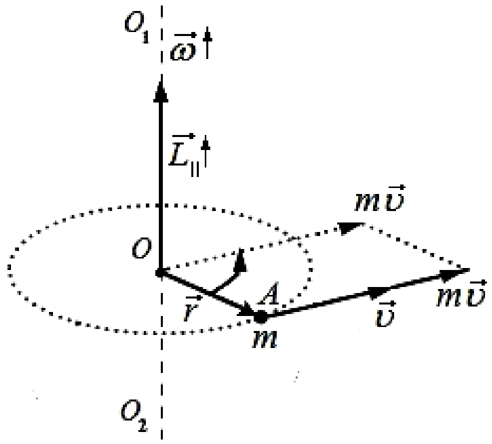

Рисунок 13 – Момент імпульсу матеріальної точки відносно осі

Ураховуючи, що лінійна швидкість $\vec{\upsilon}$ точки *A*, її кутова швидкість $\vec{\omega}$ і радіус-вектор $\vec{r}$ пов'язані співвідношенням $\vec{\upsilon}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, то отримуємо розрахунок $\vec{L}_{||}$ через подвійний векторний добуток

$$\vec{L}_{||}=m[\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]=m\left(\vec{\omega}r^2-\vec{r}\left(\vec{r}\cdot\vec{\omega}\right)\right)=m\left(\vec{\omega}r^2-0\right)=mr^2\vec{\omega}=J\vec{\omega}, \qquad (39)$$

де величина $J=mr^2$ називається моментом інерції точки відносно осі обертання. Тут ураховано, що вектори $\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\omega}$ взаємно перпендикулярні, тому скалярний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{\omega}$ дорівнює нулю. Таким чином бачимо, що вектори $\vec{L}_{||}$ і $\vec{\omega}$ паралельні один одному і напрямлені вздовж осі обертання. У фізиці та математиці такі вектори називаються аксіальними або псевдовекторами.

Слід нагадати, що введену величину $J = mr^2$ можна використати як визначення моменту інерції матеріальної точки як міри її інерції при обертальному русі.

2 ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

2.1 Похідна функції

Нехай у деякій області значень x існує функція $f(x)$, (дивись рисунок 14). Позначимо $\Delta x = x_1 - x$ як зміну аргументу x у деякій точці A, а $\Delta f(x) = f(x_1) - f(x)$ – відповідне прирощення (зміна) функції. Тоді вираз

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \left(\text{або } = f' = f'(x) = f'_x\right) \tag{40}$$

називається першою похідною функції $f(x)$ по змінній x. Таким чином, похідна функції – це границя відношення прирощення функції до прирощення її аргументу, коли прирощення аргументу прагне до нуля.

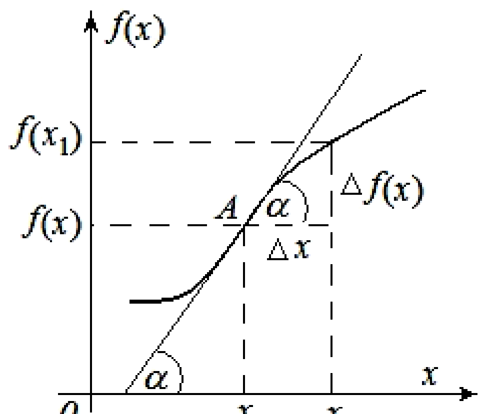

Рисунок 14 – Графічні пояснення до визначення першої похідної функції

Графічно $\frac{df}{dx} = \mathrm{tg}\alpha$, де α – кут нахилу дотичної до кривої в точці A до осі абсцис. Цим твердженням визначається геометричний зміст похідної функції.

Якщо $\frac{df}{dx} > 0$, то при зростанні x функція зростає. Якщо $\frac{df}{dx} < 0$, то при зростанні x функція $f(x)$ спадає. Якщо $\frac{df}{dx} = 0$, то функція $f(x)$ має екстремальне (мінімальне або максимальне) значення.

При малих прирощеннях похідну можна приблизно обчислювати так:

$$f' \equiv \frac{df}{dx} \cong \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{41}$$

Співвідношення (41) тим точніше, чим менше прирощення Δx, Δf. Зі співвідношень (40) і (41) стає зрозумілим зміст похідної: вона визначає швидкість зміни функції.

Якщо по осях ординат і абсцис відкладаються розмірні величини, то для графічного одержання похідної потрібно кутовий коефіцієнт помножити на відношення масштабів за цими осями. Наприклад, якщо по осі абсцис відкладена напруга U, а по осі ординат струм I, то

$$\frac{dI}{dU} = \frac{M_I}{M_U}\mathrm{tg}\alpha, \tag{42}$$

де M_I – масштаб струму по осі I, а M_U – масштаб напруги по осі U.

З формули (41) випливає наближена формула для зміни функції:

$$\Delta f \cong f' \cdot \Delta x. \tag{43}$$

Права частина цього рівняння називається диференціалом df функції $f=f(x)$, якщо $\Delta x \to 0$:

$$df = f' dx. \tag{44}$$

Таким чином, диференціал функції однієї змінної – це частина прирощення функції, пропорційна прирощенню її аргументу *dx*. Для незалежної змінної диференціал збігається з нескінченно малим прирощенням: $dx=\Delta x$.

Співвідношення $\Delta f \cong df = f'dx$ виконується тим точніше, чим менше прирощення $\Delta x=dx$. У фізиці та математиці часто малі величини називають елементарними. Елементарне прирощення функції практично збігається з її диференціалом: $\Delta f \cong df$. Звичайно, елементарними, тобто досить малими, можуть бути й величини, які не є прирощенням. Наприклад, елементарна робота в загальному випадку не є елементарним прирощенням, тобто диференціалом якої-небудь величини. У курсі загальної фізики доведено, що механічна робота *A*, як і кількість теплоти *Q*, є функціями процесу. Відповідно елементарну роботу і кількість теплоти називають функціоналами і позначають як δA і δQ.

Похідна від першої похідної називається другою похідною функції і позначається як

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = f''(x). \qquad (45)$$

Похідна від другої похідної називається похідною третього порядку (або третьою похідною) і т.д.

Механічний зміст похідної

Похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин.

Якщо функцією $\vec{r} = \vec{r}(t)$ задано закон зміни радіуса-вектора траєкторії матеріальної точки, тобто залежність від часу *t* кожної координати вектора $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, то перша похідна $d\vec{r}/dt$ задає залежність вектора миттєвої швидкості $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ від часу *t*:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x(t)\vec{i} + \upsilon_y(t)\vec{j} + \upsilon_z(t)\vec{k}. \qquad (46)$$

У свою чергу перша похідна швидкості за часом (або друга похідна радіуса-вектора) відповідно є миттєвим прискоренням матеріальної точки у будь-який момент часу t:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j}+\frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k}=a_x(t)\vec{i}+a_y(t)\vec{j}+a_z(t)\vec{k}, \quad (47)$$

де проекції прискорення на осі координат дорівнюють:

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z=\frac{d\upsilon_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}. \quad (48)$$

2.2 Властивості похідної

1 Якщо $f(x)=C\varphi(x)$, де C=const, то $\frac{df}{dx}=C\frac{d\varphi}{dx}$.

2 Якщо $f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$, то $\frac{df}{dx}=\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\varphi_2}{dx}$.

3 Якщо $f(x)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)$, то $\frac{df}{dx}=\frac{d\varphi_1}{dx}\varphi_2+\frac{d\varphi_2}{dx}\varphi_1$.

4 Якщо $f(x)=\varphi_1(x)/\varphi_2(x)$, то $\frac{df}{dx}=\frac{1}{\varphi_2}\frac{d\varphi_1}{dx}-\frac{\varphi_1}{\varphi_2^2}\frac{d\varphi_2}{dx}$.

5 Якщо $f(x)=f[\varphi(x)]$, то $\frac{df}{dx}=\frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$.

Далі надамо таблицю 1 перших похідних основних елементарних функцій, які найбільш часто використовуються в курсі загальної фізики.

Таблиця 1 – Значення найпростіших похідних

Функція	Похідна	Функція	Похідна
С (константа)	0	sin x	cos x
x	1	cos x	- sin x
x^n	nx^{n-1}	tg x	$1/\cos^2 x = \sec^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	ctg x	$-1/\sin^2 x = -\csc^2 x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$	ln x	$1/x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$	lg x	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$

Приклад 3. Колесо радіусом $R = 0{,}1$ м обертається так, що залежність кута повороту колеса від часу визначається рівнянням $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, де $B = 2$ рад/с та $C = 1$ рад/с^3. Для точок, які лежать на ободі колеса, знайти через час $t_a = 2$ с після початку руху: кутову швидкість $\omega(t_a)$; лінійну швидкість $\upsilon(t_a)$; кутове прискорення ε; тангенціальне прискорення a_τ; нормальне прискорення a_n.

Дано:

$\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$

$B = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\quad C = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}^3}$

$R = 0{,}1$ м, $\qquad t_a = 2$ с

$\omega(t_a) = ?\qquad \upsilon(t_a) = ?$

$\varepsilon = ?\quad a_\tau = ?\quad a_n = ?$

Розв’язання:

При обертальному русі кутова швидкість будь-якої точки колеса визначається формулою

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2. \qquad (49)$$

Таким чином:

$$\omega(t_a) = B + 3Ct_a^2 = 2 + 3\cdot 1\cdot 2^2 = 14\,(\text{рад/с}). \qquad (50)$$

Лінійна швидкість обода колеса:

$$\upsilon(t) = \omega(t)R\,. \qquad (51)$$

Звідки знаходимо

$$\upsilon(t_a) = (B + 3Ct_a^2)R = (2 + 3\cdot 1\cdot 2^2)\cdot 0{,}1 = 1{,}4\,(\text{м/с}). \qquad (52)$$

Кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Ct; \qquad (53)$$

тангенціальне прискорення обода колеса:

$$a_\tau = \varepsilon R = 6CRt; \qquad (54)$$

нормальне прискорення обода колеса:

$$a_n = \omega^2 R = (B + 3Ct^2)^2 R. \qquad (55)$$

Для моменту часу $t_a = 2$ с отримуємо:

$$\varepsilon = 6Ct_a = 6\cdot 1\cdot 2 = 12\,(\text{рад/с}^2); \qquad (56)$$

$$a_\tau = 6CRt_a = 6\cdot 1\cdot 0{,}1\cdot 2 = 1{,}2\,(\text{м/с}^2); \qquad (57)$$

$$a_n = (B + 3Ct_a^2)^2 R = (2 + 3\cdot 1\cdot 2^2)^2\cdot 0{,}1 = 16{,}9\,(\text{м/с}^2). \qquad (58)$$

Перевіримо розмірність формул для $\omega(t_a)$, $\upsilon(t_a)$, ε, a_τ та a_n:

$$[\omega(t_a)] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} + \frac{\text{рад}}{\text{с}^3}\cdot\text{с}^2 = \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \qquad [\upsilon(t_a)] = \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} + \frac{\text{рад}}{\text{с}^3}\cdot\text{с}^2\right)\cdot\text{м} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^3}\cdot\text{с} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}; \qquad [a_\tau] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^3}\cdot\text{м}\cdot\text{с} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$[a_n] = \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} + \frac{\text{рад}}{\text{с}^3}\cdot\text{с}^2\right)^2\cdot\text{м} = \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $\omega = 14\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\upsilon = 1{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\varepsilon = 12\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $a_\tau = 1{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_n = 16{,}9\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2.3 Наближене обчислення функцій

Для наближеного обчислення функції можна скористатися формулою (43). Якщо врахувати, що $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$, то виходить

$$f(x_1) \cong f(x_0)\, f'(x_0)\Delta x. \tag{59}$$

Формула (59) може бути уточнена за допомогою другої похідної:

$$f(x_1) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2 + \ldots \tag{60}$$

Подальші доданки у формулі (60) містять члени, пропорційні $(\Delta x)^3$, $(\Delta x)^4$ тощо. Якщо Δx мале, то члени з $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ тощо будуть ще в багато разів меншими. Наприклад, якщо Δx=0,1, то $(\Delta x)^2$=0,01, $(\Delta x)^3$=0,001 і т.д. Тому коли Δx – мала величина, можна в першому наближенні скористатися найпростішою формулою (59). Результат буде тим точнішим, чим менший Δx.

Розглянемо $f(x)=(1+x)^n$ – біном Ньютона. Тут x_0=1, $x_1=1+x$, $\Delta x=x$; $f(x_0)$=1; $f'(x_0)=n$. З формули (59) знаходимо

$$(1+x)^n \cong 1+nx. \tag{61}$$

Формула (61) годиться для будь-яких, а не тільки для цілих значень n. Наприклад, при $n=\frac{1}{2}$ маємо $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$; при n= -1 маємо $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.

Бувають випадки, коли застосування наближеної формули дає змогу отримати більш точний результат, ніж на калькуляторі з більшим числом розрядів. Наприклад, при обчисленні виразу

$10^{17}\left(\sqrt{1+5\cdot 10^{-17}}-1\right)$ на комп'ютерній програмі Mathcad отримаємо нуль, а за допомогою наближеної формули (61) одержимо більш точну відповідь – 2,5.

2.4 Знаходження точок екстремуму та екстремумів функції

Якщо функція $y = f(x)$ має максимуми або мінімуми, то точки максимуму $x_{мак}$ і точки мінімуму $x_{мін}$ називають точками екстремуму, а значення функції в цих точках екстремумами функції.

Достатня умова існування екстремуму. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f'(x) > 0$ на інтервалі $[a, x_0]$ та $f'(x) < 0$ на інтервалі $[x_0, b]$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$. Якщо ж $f'(x) < 0$ на інтервалі $[a, x_0]$ та $f'(x) > 0$ на інтервалі $[x_0,b]$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Зручно користуватися таким формулюванням цієї теореми: якщо в точці x_0 похідна змінює знак з «+» на «-» (рухаючись у напрямку зростання x), то x_0 – точка максимуму (рисунок 15, *а*), а якщо з «-» на «+», то x_0 – точка мінімуму (рисунок 15, *б*).

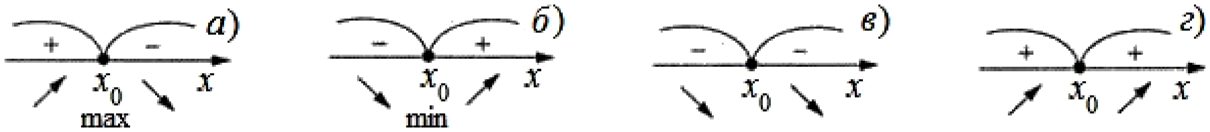

Рисунок 15 – Екстремальні точки функції

Для дослідження функції $y = f(x)$ на точки екстремуму доцільно виконувати таку схему:

1) знаходимо область визначення функції $y = f(x)$;

2) знаходимо похідну $f'(x)$;

3) знаходимо критичні точки (внутрішні точки області визначення, у яких f'(x) не існує, та розв’язки рівняння $f'(x) = 0$;

4) позначаємо знайдені точки на області визначення функції $y = f(x)$ та знаходимо знак похідної $f'(x)$ у кожному з цих проміжків (для цього достатньо визначити знак похідної $f'(x)$ у якійсь одній «пробній» точці проміжку;

5) якщо у критичній точці x_0 похідна змінює знак з «+» на «-», то $x_0 = x_{\max}$ (рисунок 15, *а*). Якщо ж змінює знак з «-» на «+», то $x_0 = x_{\min}$ (рисунок 15, *б*). Якщо ж зміни знаків немає (рисунок 15, *в*, *г*), то x_0 не є точкою екстремуму;

6) робимо висновок (отримуємо відповідь).

Приклад 4. Визначити умови максимуму корисної потужності постійного струму в замкненому колі (замкнутому контурі, ланцюгу).

Потужністю електричного струму називається скалярна фізична величина P, яка характеризує швидкість перетворення енергії електричного струму в інші форми за одиницю часу:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(U \cdot q) = U\frac{dq}{dt} = I \cdot U, \tag{62}$$

де W – енергія електричного струму; U – різниця потенціалів (напруга); q – заряд, I – електричний струм.

Використовуючи закон Ома для однорідної ділянки ланцюга

$$I = \frac{U}{R}, \tag{63}$$

де R – електричний опір ділянки, а U – електрична напруга на цій ділянці, одержуємо декілька формул для потужності:

$$P = I \cdot U = \frac{U}{R}U = \frac{U^2}{R} = I \cdot I \cdot R = I^2 R. \tag{64}$$

Корисна (активна) потужність P_a у замкненому колі – це потужність, яка виділяється на зовнішньому опорі R (дивись рисунок 16). Саме вона розраховується за формулою

$$P_a = I^2 R, \tag{65}$$

де I – струм, який іде через опір R.

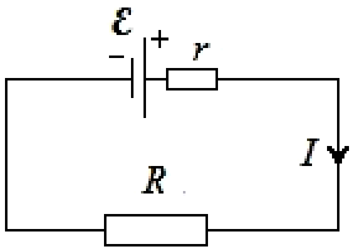

Рисунок 16 – Замкнутий контур (ланцюг) із постійним струмом

Струм же знайдемо за законом Ома для замкненого кола

$$I(R)=\frac{\varepsilon}{R+r}, \tag{66}$$

де ε – ЕРС (електрорушійна сила) джерела струму, r – внутрішній опір цього джерела.

Обидва параметри є сталими величинами, а струм $I(R)$ суттєво залежить вид опору R. Зробивши підстановку (66) в (65), отримуємо

$$P_a(R)=\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R=\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}. \tag{67}$$

Для того щоб дослідити цю функцію $P_a=P_a(R)$ на екстремум, візьмемо похідну по зовнішньому опору R, тоді маємо

$$\frac{dP_a}{dR}=\frac{d}{dR}\left(\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}\right)=\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^4}\left[(R+r)^2-2(R+r)R\right]=\frac{\varepsilon^2(R+r)}{(R+r)^4}\left[(R+r)-2R\right]=$$
$$=\frac{\varepsilon^2(R+r)}{(R+r)^4}[r-R]=\frac{\varepsilon^2\left(r^2-R^2\right)}{(R+r)^4}. \tag{68}$$

Точка екстремуму знаходиться розв’язуванням рівняння $\frac{dP_a}{dR}=0$, тобто

$$\frac{\varepsilon^2\left(r^2-R^2\right)}{(R+r)^4}=0. \tag{69}$$

Очевидно, що розв’язком є $R^2 = r^2$, або

$$R = r. \tag{70}$$

Цей екстремум є максимумом. Це можна з’ясувати, якщо обчислити другу похідну, але можна зробити таким чином. З виразу (67) ми бачимо, що

$$P_a(0) = \frac{\mathcal{E}^2 \cdot 0}{(0+r)^2} = 0; \tag{71}$$

$$P_a(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} = \lim_{R\to\infty} \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} = \mathcal{E}^2 \lim_{R\to\infty} \frac{R}{(R+r)^2} = \mathcal{E}^2 \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2} = \mathcal{E}^2 \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0. \tag{72}$$

З фізичних умов $P_a(R) > 0$, це означає, що ця функція починається з нуля і знову йде до нуля на нескінченності, а оскільки вона всюди додатна і має екстремум, то цей екстремум є максимумом.

Таким чином, ми з’ясували, що корисна потужність максимальна, якщо зовнішній опір дорівнює внутрішньому. Відповідний графік залежності $P_a = P_a(R)$ згідно із (67) наведено на рисунку 17.

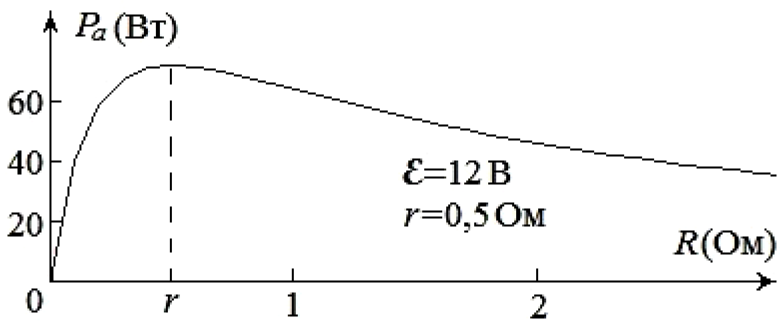

Рисунок 17 – Залежність корисної потужності від зовнішнього опору

2.5 Похідні й диференціал функції багатьох змінних

Функція багатьох змінних може змінюватися внаслідок зміни кожної змінної. Наприклад, функція трьох змінних $\varphi = \varphi(x,y,z)$ буде змінюватися при зміні кожної змінної *x, y, z*. Якщо *x, y, z* – координати точки в просторі, то функцію часто записують коротше: $\varphi = \varphi(\vec{r})$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор.

Якщо зафіксувати всі змінні, окрім однієї, то функція багатьох змінних перетвориться у функцію однієї змінної й до неї можна застосувати все наведене вище. Наприклад, якщо зафіксувати змінні *y, z*, тобто припустити, що *y=const, z=const*, то функція $\varphi = \varphi(x,y,z)$ перетвориться у функцію тільки змінної *x*.

Похідна функції, у якій зафіксовані всі змінні окрім, однієї, називається частковою похідною. Наприклад, окрема похідна функції $\varphi = \varphi(x,y,z)$ по змінній *x* (позначається $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$) обчислюється за умови: *y=const, z=const*. Геометрично часткова похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ визначає швидкість зміни функції в напрямку осі *x*. Аналогічно $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ визначають швидкість зміни функції уздовж осей *y* та *z*.

Відповідно до формул (43) і (44) величини $\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$ визначають елементарні збільшення (часткові диференціали) функції $\varphi = \varphi(x,y,z)$ унаслідок зміни кожної змінної (координати) *x, y, z*. У загальному випадку, коли змінюються всі змінні, повний диференціал (сумарне збільшення функції) дорівнюватиме сумі окремих диференціалів:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz. \qquad (73)$$

2.6 Градієнт скалярної функції

Із зіставлення формул (73) і (13) видно, що повний диференціал $d\varphi$ є скалярний добуток вектора $d\vec{r} = \{dx,\ dy,\ dz\}$ і вектора з координатами $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}$. Цей вектор називається градієнтом функції $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і позначається як $grad(\varphi)$. Таким чином, координати градієнта в декартовій системі

$$grad(\varphi) \equiv \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}, \tag{74}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ – одиничні орти вздовж осей x, y, z декартової системи координат.

Можливе й більш компактне позначення градієнта: $grad(\varphi) \equiv \vec{\nabla}\varphi$. Символ $\vec{\nabla}$ читається як «набла» і визначає так званий векторний диференціальний оператор Гамільтона:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \tag{75}$$

Таким чином, повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ можна записати як скалярний добуток векторів градієнта $\vec{\nabla}\varphi$ і диференціала радіуса-вектора $d\vec{r}$

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}\ . \tag{76}$$

Повний диференціал $d\varphi$ буде максимальний, коли елементарне переміщення $d\vec{r}$ паралельно градієнту $\vec{\nabla}\varphi$ (дивись підрозділ 1.4). У цьому випадку з формули (76) випливає $d\varphi = \left|\vec{\nabla}\varphi\right|\left|d\vec{r}\right|$. Якщо позначити модуль елементарного переміщення в напрямку, паралельному градієнту, через dr, наприклад у задачах зі сферичною симетрією, то зі співвідношення $d\varphi = \left|\vec{\nabla}\varphi\right| dr$ маємо:

$$\left|\vec{\nabla}\varphi\right| = \frac{d\varphi}{dr}, \qquad \text{а} \qquad \vec{\nabla}\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{77}$$

де $\vec{r}/r$ – одиничний вектор уздовж радіальної координати r.

Фізичний зміст градієнта функції

Із формул (76) і (77) випливає фізичний зміст градієнта. Градієнт – це вектор, напрямок якого вказує напрямок найшвидшого зростання функції, а модуль дорівнює похідній функції в цьому напрямку. Відзначимо також, що під час руху в напрямку, перпендикулярному до градієнта функції, тобто при $d\vec{r} \perp \vec{\nabla}\varphi$, прирощення (диференціал) функції дорівнює нулю, тобто функція залишається сталою.

Геометричне місце точок, у яких функція набуває даного фіксованого значення, утворить у тривимірному випадку поверхню, а на площині – лінію однакового рівня: $\varphi = C = const$.

Сукупності значень константи C відповідає сімейство поверхонь або ліній однакового рівня. Наприклад, якщо функція $\varphi(r)$ – електричний потенціал, то отримаємо сімейство еквіпотенціальних (рівнопотенціальних) поверхонь.

Проведемо лінії градієнта так, щоб у кожній точці напрямок лінії збігався з напрямком градієнта, ураховуючи, що вектор градієнта повинен бути перпендикулярним до еквіпотенціальної поверхні (лінії), (дивись рисунок 18).

Зі сказаного вище зрозуміло, що сімейство ліній градієнта ортогональне сімейству еквіпотенціальних поверхонь. Зокрема, якщо скалярна функція $\varphi(r)$ відповідає електричному потенціалу, то лінії його градієнта (точніше «мінус градієнта») – лінії напруженості електричного поля $\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\varphi$, які можна вважати й силовими лініями. На рисунку 18 для прикладу показана картина ліній напруженості (суцільні лінії) та еквіпотенціальних поверхонь (пунктирні лінії, проекції сфер на рисунок) електричного поля точкового позитивного заряду q_0. У вакуумі електричний потенціал у будь-якій точці на відстані r від q_0 визначається формулою

$$\varphi(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{78}$$

де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала. Напрямок ліній напруженості електричного поля збігається з напрямком зменшення потенціалу $\varphi(r)$, а сам вектор $\vec{E}$ згідно із (77) визначається формулою

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (79)$$

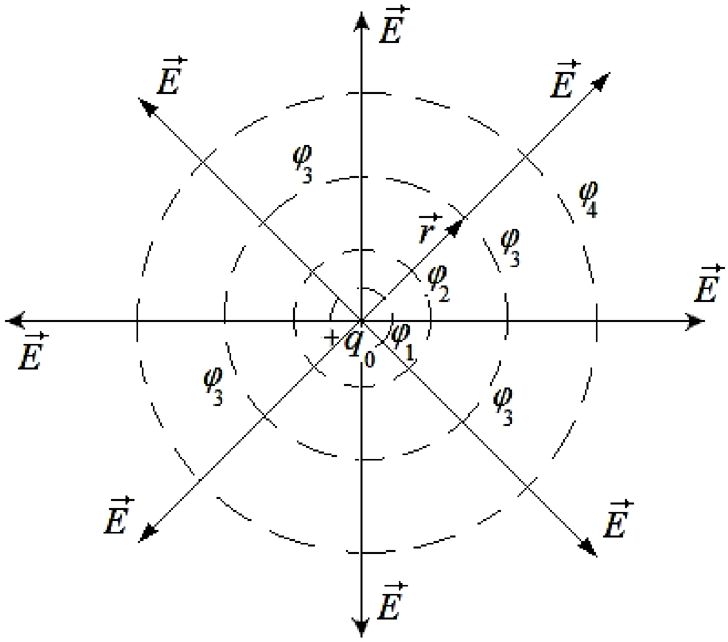

Рисунок 18 – Еквіпотенціальні поверхні і лінії напруженості електричного поля поблизу точкового заряду

Як відомо, радіальні напрямки $\vec{r}$ у сферах завжди перпендикулярні сферичним поверхням. Тому для точкових зарядів $\vec{E}(r) \parallel \vec{r}$ еквіпотенціальні поверхні $\varphi(r) = const = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ взаємно ортогональні. Звернемо увагу на те, що в розглянутому прикладі градієнт потенціалу напрямлений до позитивного заряду (тобто в бік його зростання $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4$), а силові лінії електричного поля – у протилежному напрямку. Це відповідає основній властивості силових ліній електричного поля (силові лінії починаються на позитивних зарядах, а закінчуються на негативних).

2.7 Дивергенція і ротор векторних величин

Під час вивчення полів, які збуджуються безперервно розподіленими в просторі джерелами, необхідно мати локальну фізичну характеристику, що описує інтенсивність джерел поля, розташованих в окремій певній точці простору. Такими характеристиками є дивергенція і ротор векторного поля.

У декартовій прямокутній системі координат дивергенція й ротор обчислюються за такими правилами:

$$div(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}; \tag{80}$$

$$rot(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{81}$$

Як бачимо, дивергенція вектора $\vec{F}$ є скалярною величиною, яка відповідає дії векторного диференціального оператора Гамільтона (набла) на цей вектор через операцію скалярного добутку векторів $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$. Що стосується ротора вектора $\vec{F}$, то $rot(\vec{F})$ є вектором, який є результатом векторного добутку векторів $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

Як застосування операцій дивергенції і ротора можна записати систему рівнянь Максвелла, якими пов'язані у часі і просторі електромагнітні поля в речовині:

1) $rot(\vec{H}) = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ – закон Фарадея,

2) $rot(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ – закон Ампера,

3) $div(\vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ – рівняння Пуассона,

4) $div(\vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ – рівняння відсутності магнітних зарядів.

У рівняння Максвелла входить п’ять векторних величин: $\vec{E}$ – напруженість електричного поля, $\vec{D}$ – електрична індукція, $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля, $\vec{B}$ – індукція магнітного поля, $\vec{j}$ – густина електричного струму, і скалярна величина ρ – об'ємна густина електричного заряду. З урахуванням трьох складових кожного вектора, всього 16 невідомих величин, для яких маємо 8 незалежних скалярних рівнянь (3 проекції закону Фарадея на *x*,*y*,*z*-осі системи координат + 3 проекції векторного закону Ампера + 1 рівняння Пуассона + 1 рівняння $\operatorname{div}\vec{B}=0$). Однак між незалежними величинами існує зв’язок, який в однорідній ізотропній речовині задається так званими матеріальними рівняннями:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}; \qquad \vec{B}=\mu_0\mu\vec{H}; \qquad \vec{j}=\sigma\vec{E}. \tag{82}$$

Діелектрична проникність ε, магнітна проникність μ і електропровідність σ можуть залежати від координат, але не від часу і не від напруженості електричного та магнітного полів. Максвелл вважав, що ці величини можна одержати в результаті експерименту. Пізніше Лоренц, Ланжевен та ін., спираючись на рівняння Максвелла, зуміли теоретично знайти ці параметри. Випадок сегнетоелектрики і феромагнетизму в цій системі рівнянь не враховується.

3 ОСНОВИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

3.1 Визначений і невизначений інтеграли

Нехай у деякій області значень x існує функція $f(x)$, (дивись рисунок 19). Розіб'ємо інтервал [*a*, *b*] зміни x на елементарні відрізки:

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ ...,\Delta x_i,\ ....,\Delta x_n. \tag{83}$$

Складемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \tag{84}$$

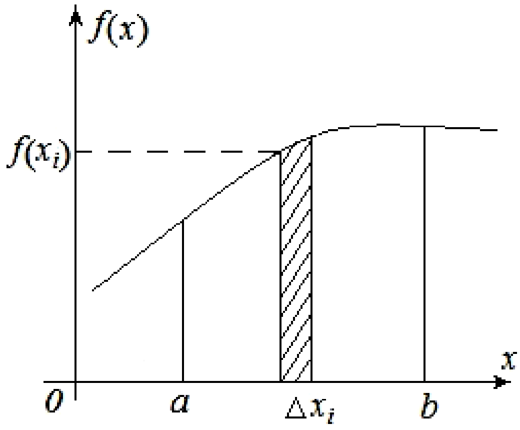

Рисунок 19 – Графічні пояснення до визначеного інтеграла

Вираз

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (85)$$

називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$, де $f(x)$ називають підінтегральною функцією; вираз dx – елементом інтегрування; а числа a і b називають відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування.

Якщо межу зміни аргументу не визначено, то вираз

$$\int f(x)dx \qquad (86)$$

називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$.

У математиці операції диференціювання (тобто знаходження похідних) та інтегрування є зворотними одна щодо одної. Пояснимо це, використовуючи поняття первісної функції.

3.2 Первісна функція

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $dF/dx = f(x)$.

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною для функції $f(x) = 3x^2$, оскільки

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2 = f(x). \qquad (87)$$

Основна властивість первісної

Первісні однієї й тієї ж функції $f(x)$ можуть відрізнятися на постійну величину, тому що похідна від константи дорівнює нулю. Тому невизначений інтеграл може бути обчислений за формулою $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – первісна функція, а C – довільна константа.

З $F'(x) = f(x)$ випливає, що обчислення невизначеного інтеграла є дією зворотною до диференціювання, тобто для його виконання досить знайти якусь функцію $F(x)$, щоб її похідна дорівнювала підінтегральній функції $f(x)$. Із $dF = f(x)dx$ випливає диференціальне рівняння, яке розв'язується через взяття невизначеного інтеграла.

Деякі первісні до відповідних функцій наведено у таблиці 2.

Таблиця 2 – Первісні функції

Функція $f(x)$	Первісні $F(x)$	Функція $f(x)$	Первісні $F(x)$
0	C	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x+C$
1	$x+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x+C$
$x^n\ (n \neq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x+C$ або $-\mathrm{arcctg}\, x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$ або $-\arccos x+C$

Правила обчислення первісних

1 Первісна суми функцій дорівнює сумі первісних функцій: тобто якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ – первісна для функції $f(x)+g(x)$.

2 Сталий множник можна виносити за знак первісної, тобто якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ і C – стала, то $CF(x)$ – первісна для $Cf(x)$.

3 Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ і $k \neq 0$, b – стала, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для функції $f(kx+b)$.

3.3 Невизначений інтеграл

За допомогою первісної можна розраховувати визначені та невизначені інтеграли. Наприклад, невизначений інтеграл від функції $f(x)$ можна визначити виразом $F(x)+C$, тобто сукупністю усіх первісних цієї функції $f(x)$. Позначається так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{88}$$

де функцію $f(x)$ називають підінтегральною функцією; вираз dx – елементом інтегрування; $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$; C – довільна стала.

Основні правила інтегрування

1 Якщо $f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, то $\int f(x)dx = \int \varphi_1(x)dx + \int \varphi_2(x)dx$.

2 Якщо $f(x) = C\varphi(x)$, то $\int f(x)dx = C\int \varphi(x)dx$.

3 Якщо k і b – сталі, $k \neq 0$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Деякі табличні незвичайні інтеграли від елементарних функцій, що найбільш часто використовуються в курсі фізики, наведено у таблиці 3.

Таблиця 3 – Невизначені інтеграли

$\int 0dx = C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$
$\int dx = x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, x + C \\ -\mathrm{arcctg}\, x + C \end{cases}$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C. \end{cases}$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$	

3.4 Визначений інтеграл

Нехай задано неперервну функцію $f(x)$, визначену на проміжку $[a, b]$, (рисунок 20), тоді визначений інтеграл від a до b функції $f(x)$ можна обчислити за так званою формулою Ньютона – Лейбніца, як приріст первісної $F(x)$ цієї функції:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (89)$$

Числа a і b називають відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування. Іноді формулу Ньютона–Лейбніца називають основною формулою інтегрального числення. Формула Ньютона–Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла є основою методу обчислення площ плоских і криволінійних поверхонь, об'ємів тіл, довжин кривих та інших задач.

Але в багатьох випадках первісна функція не може бути знайдена за допомогою елементарних засобів або є занадто складною, що робить неможливим обчислення визначеного інтеграла за цією формулою. У таких випадках користуються числовими методами обчислення визначених інтегралів за допомогою таких комп'ютерних математичних програм, як Mathematica, Mathcad, Matlab, Maple та інші.

Основні правила обчислення визначеного інтеграла

1 $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$, де C – стала. (90)

2 $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. (91)

3 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. (92)

4 $\int_a^b f(kx+\ell)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+\ell}^{kb+\ell} f(y)dy$. (93)

5 $\int_a^a f(x)dx = 0$. (94)

6 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (95)

Геометричний зміст визначеного інтеграла – це площа криволінійної фігури (криволінійної трапеції), обмеженої віссю абсцис, двома вертикалями на краях відрізка і кривою графіка функції. Іншими словами, площа S криволінійної трапеції на рисунку 20, *а* (фігура, обмежена графіком неперервної додатної на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$, віссю $0x$ та прямими $x=a$ і $x=b$) обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (96)$$

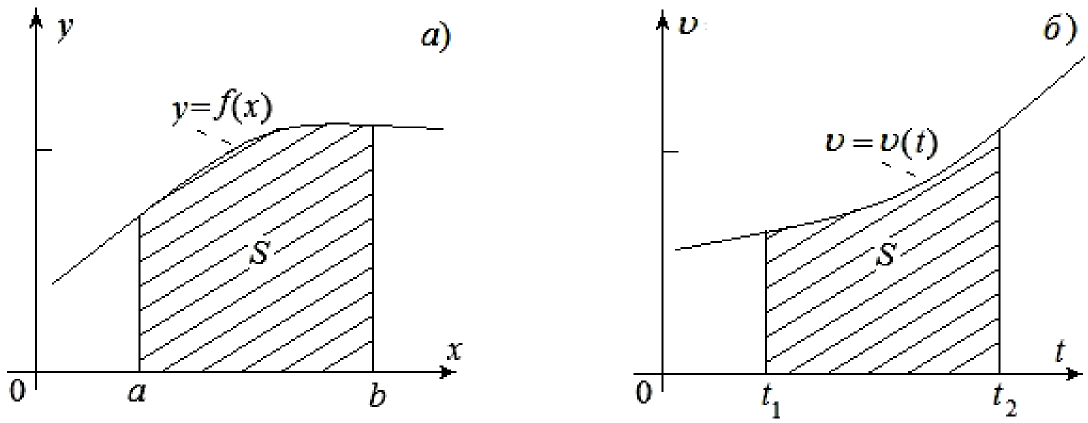

Рисунок 20 – Геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла

Фізичний зміст визначеного інтеграла. Під час прямолінійного руху шлях *S*, пройдений тілом (матеріальною точкою) за інтервал часу від t_1 до t_2, чисельно дорівнює

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt, \tag{97}$$

де $\upsilon(t)$ на рисунку 20, *б* описує зміну в часі величини (модуля) швидкості. Наприклад, під час рівномірного руху, тобто коли $\upsilon(t) = \upsilon_0 = const$, константа υ_0 виноситься з-під інтеграла і ми отримуємо добре відому формулу для шляху при рівномірному русі $S = \upsilon_0(t_2 - t_1)$, що відповідає площі прямокутника зі сторонами υ_0 і $\Delta t = t_2 - t_1$.

3.5 Момент інерції твердого тіла

Важливою характеристикою обертального руху твердого тіла є його момент інерції відносно осі обертання, як міра інертності тіла, що обертається відносно осі, (дивись рисунок 21). У підрозділі 1.7 ми визначили момент інерції матеріальної точки масою *m*, яка рухається по колу радіусом *r*, $J=mr^2$. Як і звичайна інертна маса *m*, момент інерції фізичного тіла є скалярною адитивною величиною. Подамо тіло як набір великої кількості матеріальних точок: m_1, m_2, m_3, ..., m_i, ..., m_n, відстань яких від осі обертання позначимо відповідними радіусами r_1, r_2, r_3, ..., r_i, ..., r_n . Щоб знайти загальний момент інерції тіла, треба підсумувати моменти інерції $J_i = m_i r_i^2$ всіх матеріальних точок (елементарних мас), що складають це тіло:

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \tag{98}$$

де m_i і r_i – маса *i*-ї матеріальної точки і її відстань від осі обертання на рисунку 21.

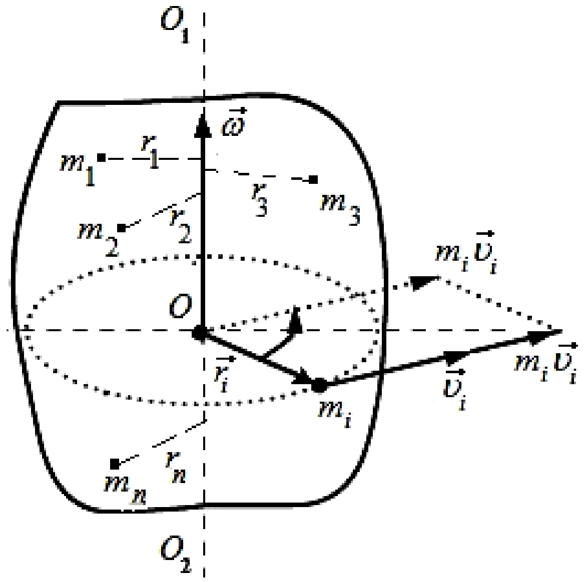

Рисунок 21 – Обертальний рух твердого тіла відносно осі

У загальному випадку, якщо тіло суцільне, воно являє собою сукупність безлічі точок з нескінченно малими масами dm, і момент інерції тіла можна обчислити за допомогою визначеного інтеграла

$$J = \int_0^m r^2 dm, \tag{99}$$

де r – відстань від елемента dm до осі обертання. Розподіл маси в межах тіла можна охарактеризувати за допомогою густини речовини ρ. Для однорідного тіла $\rho = m/V$, де m – маса тіла, V – його об'єм. Для тіла з нерівномірно розподіленою масою середня густина

$$\rho_{cp} = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{100}$$

У цьому випадку густина в даній точці неоднорідного тіла визначається як границя середньої густини при $\Delta V \to 0$:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \rho_{cp} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \equiv \frac{dm}{dV} \tag{101}$$

і тоді

$$J = \int_0^V \rho r^2 dV. \qquad (102)$$

Межі інтегрування залежать від форми і розмірів тіла.

Як приклад розрахуємо моменти інерції деяких твердих тіл правильної форми.

1 *Момент інерції порожнього циліндра (кільця, обруча) з тонкими стінками*, радіусом R і масою m, відносно осі, що проходить через середини його торців (дивись рисунок 22):

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = mR^2. \qquad (103)$$

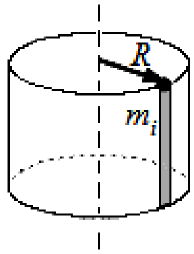

Рисунок 22 – Обруч (кільце, циліндр) з тонкими стінками

Тут порожній циліндр розбили на n частин масою m_i при $r_i = R$, ураховуючи, що $\sum_{i=1}^{n} m_i \equiv m$, тобто інертна маса m є скалярною адитивною величиною.

2 *Суцільний однорідний диск (циліндр).* Вісь обертання, як і до порожнього циліндра, є головною віссю диска радіусом R і масою m із густиною ρ. Висота диска дорівнює h. Усередині диска на відстані r виріжемо порожній циліндр з товщиною стінки dr і масою

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi hr dr \qquad (104)$$

(дивись рисунок 23) Для нього елементарний момент інерції дорівнює

$$dJ = r^2 dm = \rho 2\pi h r^3 dr. \qquad (105)$$

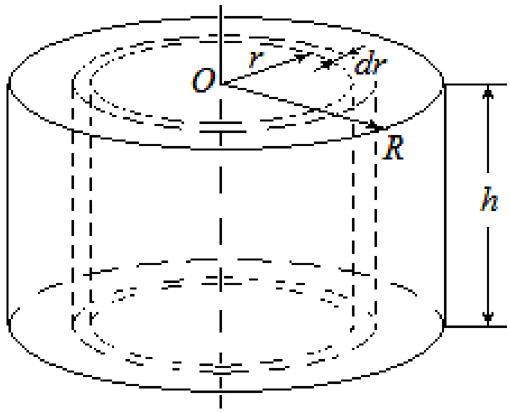

Рисунок 23 – Суцільний однорідний диск (циліндр)

Весь диск можна розбити на безліч порожніх циліндрів, а потім підсумувати моменти інерції окремих порожніх циліндрів або проінтегрувати:

$$J=\int_0^m r^2 dm=\int_0^R r^2\rho 2\pi hrdr=2\pi h\rho\int_0^R r^3 dr=\left.\frac{\rho\pi hr^4}{2}\right|_0^R=\frac{\rho\pi hR^4}{2}=\frac{mR^2}{2}. \quad (106)$$

Далі наведемо результати інтегрування для тіл правильної геометричної форми, маса яких рівномірно розподілена за об'ємом, а вісь обертання проходить через центр ваги тіла.

3 *Момент інерції кулі* відносно осі, що проходить через центр ваги:

$$J=\frac{2}{5}mR^2. \quad (107)$$

4 *Момент інерції сфери* щодо осі, що проходить через центр ваги:

$$J=\frac{2}{3}mR^2. \quad (108)$$

5 *Момент інерції стержня (тонкої прямокутної пластини)* довжиною (шириною) L і масою m відносно осі, що проходить перпендикулярно стержню (пластині):

а) через центр мас – $$J=\frac{1}{12}mL^2; \quad (109)$$

б) через край стержня (пластини) – $$J=\frac{1}{3}mL^2. \quad (110)$$

4 ОСНОВНІ ФОРМУЛИ З ТРИГОНОМЕТРІЇ Й АЛГЕБРИ

4.1 Синуси, косинуси, тангенси і котангенси кутів

При проектуванні векторних рівнянь на осі обраної системи координат доводиться мати справу з такими тригонометричними функціями, як синус (sin x), косинус (cos x), тангенс (tg x), котангенс (ctg x), секонс (sec x=1/cos x) і косеконс (csc x=1/sin x). Ці функції часто взаємопов'язані. Тому слід нагадати визначення цих функцій і навести корисні рівняння зв'язку між ними.

Розглянемо прямокутний трикутник на рисунку 24, для якого справедлива теорема Піфагора: «Квадрат гіпотенузи (позначеної як c) дорівнює сумі квадратів катетів (a і b)»:

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (111)$$

При цьому основні тригонометричні функції можна визначити як відповідні співвідношення:

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c}, \qquad (112)$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{a}{b}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a}. \qquad (113)$$

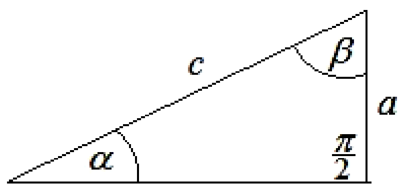

Рисунок 24 – Тригонометричні функції в прямокутному трикутнику

Аналогічно можна визначити тригонометричні функції на колі з одиничним радіусом, $|\vec{r}|=1$ на рисунку 25, де кут α може бути будь-яким в інтервалі від 0 до 2π радіан (рад). На рисунку 25, a, $\cos\alpha$ відповідає проекції одиничного вектора $\vec{r}$ на вісь x ортогональної системи координат (xOy), а $\sin\alpha$ – проекція $\vec{r}$ на вісь y в умовах, коли кут α – гострий. Бачимо, що коли кут між вектором $\vec{r}$ і віссю x тупий, $\beta = \pi/2 + \alpha$ на рисунку 25, *б*, то $\sin\beta = \sin\alpha$, а $\cos\beta = -\cos\alpha$.

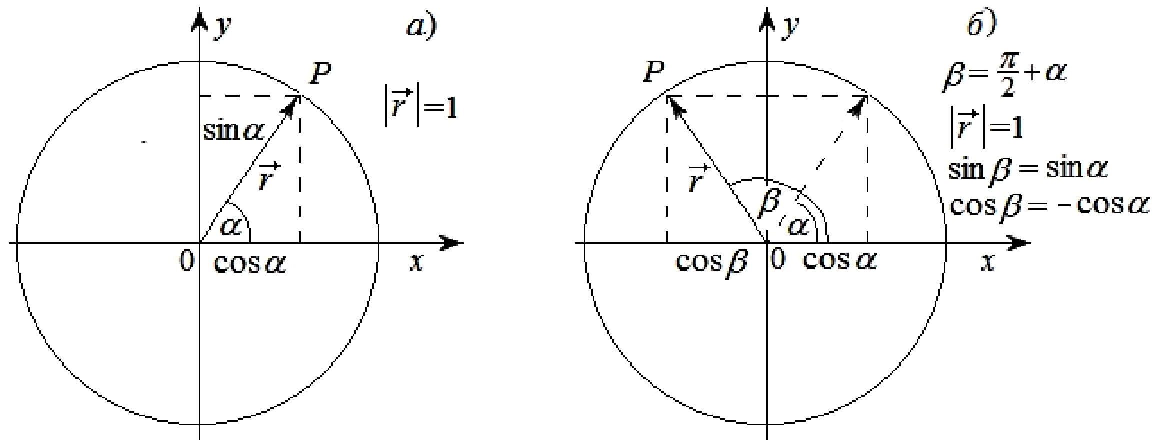

Рисунок 25 – Тригонометричні функції гострих і тупих кутів

Основні значення тригонометричних функцій і формули зв'язку між ними наведено у таблицях 4, 5 відповідно.

Таблиця 4 – Значення тригонометричних функцій в інтервалі від 0 до π

x(рад)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x(°)	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin x	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	1/2	0
cos x	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1
tg x	0	1/√3	1	√3		-√3	-1	-1/√3	0
ctg x		√3	1	1/√3	0	-1/√3	-1	-√3	

Нагадаємо, що число $\pi \cong 3{,}14$, а кут π рад відповідає розгорнутому куту 180°.

Таблиця 5 – Основні формули зв'язку між тригонометричними функціями

1 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 2 $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$	18 $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
3 $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	19 $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$
4 $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	20 $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$
5 $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$	21 $\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$
6 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ 7 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	22 $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
8 $\cos 2x = 2\cos^2 - 1$ 9 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$	23 $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
10 $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$	24 $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$
11 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$	25 $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$
12 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$	26 $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$
13 $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$	27 $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
14 $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$	28 $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$
15 $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	29 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
16 $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	30 $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
17 $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$	31 $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

4.2 Розв'язок найпростіших тригонометричних рівнянь

1 $\sin x = 0$, $x = \pi n$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. (114)

2 $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. (115)

3 $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. (116)

4 $\sin x = a$, $x = (-1)^n \arcsin a + 2\pi n$. (117)

5 $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. (118)

6 $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$. (119)

7 $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$. (120)

8 $\cos x = a$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$. (121)

9 $\mathrm{tg} x = 0$, $x = \pi n$. (122)

10 $\mathrm{tg} x = \pm 1$, $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$. (123)

11 $\mathrm{tg} x = a$, $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$. (124)

Тут arcsin a, arcos a і arctg a є так звані зворотні тригонометричні функції – арксинус, арккосинус і арктангенс.

4.3 Розв'язок найпростіших квадратних рівнянь

Квадратне рівняння

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad (125)$$

завжди можна переписати у вигляді

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad (126)$$

де x_1 і x_2 є розв'язками (коренями) квадратного рівняння

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (127)$$

Якщо коефіцієнт a=1, то таке квадратне рівняння називають зведеним:

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (128)$$

Дискримінантом зведеного квадратного рівняння називається величина

$$D = b^2 - 4ac = p^2 - 4q. \qquad (129)$$

Якщо дискримінант більший від нуля, то корені квадратного рівняння знаходимо за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}. \qquad (130)$$

Якщо дискримінант дорівнює нулю, то корені квадратного рівняння будуть однакові і знаходимо їх за формулою

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2}. \qquad (131)$$

Якщо дискримінант менший від нуля, то квадратне рівняння не має дійсних коренів. У цьому випадку корені квадратного рівняння є так званими комплексними величинами:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2}, \qquad (132)$$

де величиною $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ визначається, так звана, уявна одиниця.

Ці властивості коренів зведеного квадратного рівняння повністю відповідають відомій теоремі Вієта: «*Сума коренів наведеного квадратного рівняння дорівнює коефіцієнту при x, узятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену*:

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \,.\, x_2 = q». \qquad (133)$$

Ці формули зручно використовувати для перевірки правильності знаходження коренів та для задання багаточлена з визначеними властивостями.

5 ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

5.1 Літери латинської та грецької абеток

Латинська

A a – а
B b – бе
C c – це
D d – де
E e – е
F f – еф
G g – ге
H h – аш
I i – і
J j – жи
K k – ка
L l – ель
M m – ем
N n – ен
O o – о
P p – пе
Q q – ку
R r – ер
S s – ес
T t – те
U u – у
V v – ве
W w – дубль-ве
X x – ікс
Y y – ігрек
Z z – зет

Грецька

A α – альфа
B β – бета
Γ γ – гамма
Δ δ – дельта
E ε – епсилон
Z ζ – дзета
H η – ета
Θ θ – тета
I ι – йота
K κ $\varkappa$ – каппа
Λ λ – лямбда
M μ – мю
N ν – ню
Ξ ξ – ксі
O o – омикрон
Π π – пі
P ρ – ро
Σ σ – сигма
T τ – тау
Υ υ – іпсилон
Φ φ – фі
X χ – хі
Ψ ψ – псі
Ω ω – омега

5.2 Кратні одиниці

Кратні одиниці – одиниці, які в ціле число разів перевищують основну одиницю виміру деякої фізичної величини. Міжнародна система одиниць (СІ) рекомендує нижченаведені десяткові префікси для позначення кратних одиниць (таблиця 6).

Таблиця 6

Десят-ковий множник	**Приставка**		**Позначення**		**Приклад**
	український	**міжнародний**	**українське**	**міжнародне**	
10^1	дека	deca	да	da	дал – декалітр
10^2	гекто	hecto	г	h	гПа — гектопаскаль
10^3	кіло	kilo	к	k	кН — кілоньютон
10^6	мега	Mega	М	M	МПа — мегапаскаль
10^9	гіга	Giga	Г	G	ГГц – гігагерц
10^{12}	тера	Tera	Т	T	ТВ — теравольт

5.3 Часткові одиниці

Часткові одиниці становлять певну частину від установленої одиниці виміру деякої величини. Міжнародна система одиниць (СІ) рекомендує нижченаведені префікси для позначення часткових одиниць (таблиця 7).

Таблиця 7

Десятковий множник	Префікс		Позначення		Приклад
	український	міжнародний	українське	міжнародне	
$\mathbf{10^{-1}}$	деци	deci	д	d	дм — дециметр
$\mathbf{10^{-2}}$	санти	centi	с	c	см — сантиметр
$\mathbf{10^{-3}}$	мілі	milli	м	m	мН — мілiньютон
$\mathbf{10^{-6}}$	мікро	micro	мк	µ	мкм — мікрометр, мікрон
$\mathbf{10^{-9}}$	нано	nano	н	n	нм — нанометр
$\mathbf{10^{-12}}$	піко	pico	п	p	пФ — пікофарад

5.4 Фізичні сталі величини

Елементарний електричний заряд $e = 1{,}60219\cdot10^{-19}$ Кл
Заряд електрона $q_e = -\,1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Заряд протона $q_p = +\,1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Маса спокою електрона $m_e = 9{,}1095\cdot10^{-31}$ кг = $5{,}486\cdot10^{-4}$ а.о.м.
Маса спокою протона $m_p = 1{,}6726\cdot10^{-27}$ кг = 1,00728 а.о.м.
Маса спокою нейтрона $m_n = 1{,}6749\cdot10^{-27}$ кг = 1,00866 а.о.м.
Питомий заряд електрона $e/m_e = 1{,}7588\cdot10^{11}$ Кл/кг
Швидкість світла у вакуумі $c = 2{,}9979\cdot10^{8}$ м/с
Гравітаційна стала $G = 6{,}672\cdot10^{-11}$ Н м²/кг²
Електрична стала $\varepsilon_0 = 8{,}8542\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала $\mu_0 = 12{,}5664\cdot10^{-7}$ Гн/м
Стала Авогадро $N_A = 6{,}022\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$

Стала Больцмана $k = 1{,}3807\cdot10^{-23}$ Дж/К
Стала Планка $h = 6{,}626\cdot10^{-34}$ Дж с = $4{,}136\cdot10^{-15}$ еВ с
Стала Фарадея $F = e\,N_A = 9{,}648\cdot10^{4}$ Кл/моль
Об'єм 1 моля ідеального газу за нормальних умов
$V_\mu = 0{,}0224$ м^3/моль
Універсальна газова стала $R = k\,N_A = 8{,}314$ Дж/(моль К)
Стала Рідберга $R_\infty = 1{,}097\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Прискорення вільного падіння на рівні моря на широті
45^0 $g = 9{,}80665$ м/с^2
Абсолютний нуль температури $T = 0$ К ; $t = -273{,}15\,^0$С
Нормальний атмосферний тиск
$p_{атм} = 760$ мм рт ст = 101292,8 Па $\approx 10^5$ Па
Нормальні умови (для ідеального газу)
$T_0 = 273$ К ; $p_0 = p_{атм} = 10^5$ Па
Коефіцієнт взаємозв'язку маси й енергії
$c^2 = E/m = 8{,}9874\cdot10^{16}$ Дж/кг = 931,5 МеВ/а.о.м.
Одна атомна одиниця маси 1 а.о.м. = $1{,}66057\cdot10^{-27}$ кг
Один електрон-вольт
1 еВ = $1{,}60219\cdot10^{-19}$ Дж; 1 МеВ = $1{,}60219\cdot10^{-13}$ Дж
Енергія спокою електрона
$E_{0e} = m_e\cdot c^2 = 8{,}187\cdot10^{-14}$ Дж = 0,511 МеВ
Енергія спокою протона
$E_{0p} = m_p\,c^2 = 1{,}503\cdot10^{-10}$ Дж = 938,26 МеВ
Енергія спокою нейтрона
$E_{0n} = m_n\,c^2 = 1{,}505\cdot10^{-10}$ Дж = 939,55 МеВ
Число π $\pi \cong 3{,}141593 \approx 3{,}14$
Число e (основа натурального логарифма) $e \cong 2{,}718282 \approx 2{,}7$
Натуральний логарифм від 2 $\ln(2) \approx 0{,}693$
Натуральний логарифм від 10 $\ln(10) \approx 2{,}303$
Десятковий логарифм від e $\lg(e) \approx 0{,}434$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Зачек І. Р., Кравчук І. М., Романишин Б. М., Габа В. М., Гончар Ф. М. Курс фізики : підручник. Львів : Бескид-Біт, 2002. 375 с.

2 Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т.1. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка : підручник. Київ : «Техніка», 1999. 536 с.

3 Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальна фізика. Електрика і магнетизм : підручник. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.

4 Гірка В. О., Гірка І. О. Механіка : підручник для студ. інженер.-фізичн. факультетів. Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2017. 384 с.

5 Богацька І. Г., Головко Д. Б., Маляренко Д. А., Ментковський Ю. Л. Загальні основи фізики. Київ : Либідь, 1998. 192 с.

6 Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Київ : Вища шк., 1992. 358 с.

7 Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика. Київ : Либідь, 1994. Кн. 1. 279 с.

8 Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. Київ : Техніка, 2000. 592 с.