

А. П. ФИЛИМОНОВ (Украинская государственная академия
железнодорожного транспорта)

ВЫВОД МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА СТАЛЕБЕТОННОЙ ПЛИТЫ

Розглядається бетонна плита з зовнішнім листовим армуванням. До даної плити застосовано передумови теорії «тонких плит». Показано порядок виводу та коефіцієнти матриці жорсткості для прямокутного скінченного елемента сталобетонної плити, що розглядається. Кожен вузол має три степені вільності. Для апроксимації переміщень точок плити в серединній поверхні прийнято поліном четвертого степеня з двома перемінними.

Рассматривается бетонная плита с внешним листовым армированием. К данной плите применимы предпосылки теории «тонких плит». Приводится порядок вывода и коэффициенты матрицы жесткости для прямоугольного конечного элемента рассматриваемой сталобетонной плиты. В каждом узле имеется по три степени свободы. Для аппроксимации перемещений точек плиты в срединной поверхности принят полином 4-й степени с двумя переменными.

The concrete plate with external sheet reinforcing is considered. To the given plate preconditions of the theory of «thin plates» are applied. The order of a conclusion and factors of a matrix of rigidity for a rectangular final element of a considered steel-concrete plate is resulted. In each unit is present on three degrees of freedom. The polynomial of 4-th degree with two variables for approximation of movings of points of a plate in a medial surface is accepted.

В настоящее время разработано множество моделей конструкций, учитывающих нелинейность деформирования материалов и особенности, связанные с образованием трещин в бетоне. Отмечая большие достоинства наиболее совершенного метода Н. И. Карпенко [1], следует все же указать, что в нем нет отражения особенностей деформирования бетона в условиях двухосного напряженного состояния. Допущением также является то, что на всех стадиях работы с трещинами принимается прямоугольная эпюра в сжатой зоне бетона и не учитывается работа растянутого бетона над трещиной. Кроме того, жесткости элементов при переходе от одной стадии в другую (от одной схемы трещин к другой) претерпевают дискретные изменения, что усложняет алгоритм решения и неблагоприятно сказывается на сходимости процесса последовательных приближений.

Целью настоящего исследования является разработка конечного элемента прямоугольной формы для сталобетонной плиты, свободного от отмеченных недостатков.

Рассматривается бетонная плита с внешним листовым армированием. Для данной плиты будем считать справедливыми предпосылки теории «тонких плит», которые формулируются следующим образом: напряжения σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} пренебрежимо малы по сравнению с основными напряжениями σ_x , σ_y , τ_{xy} ; прогибы малы в сравнении с толщиной плиты; переме-

щения в направлении оси z постоянны по толщине плиты и равны прогибам срединной поверхности, которая не испытывает деформаций в своей плоскости.

Функционал полной потенциальной энергии системы является основой для решения поставленной задачи. Имея дифференциальные операторы, связывающие перемещения с напряжениями и деформациями, построим функционал полной потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A (M_x \cdot K_x + M_y \cdot K_y + 2M_{xy} \cdot K_{xy}) dA - \int_A p \cdot w dA, \quad (1)$$

где M_x , M_y , M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты; K_x , K_y , K_{xy} – кривизны срединной поверхности; p – функция внешней нагрузки; w – функция прогибов по области срединной поверхности плиты; dA – бесконечно малый элемент срединной поверхности.

Уравнения изгиба сталобетонного малого элемента (рис. 1) в системе координат x , y имеют вид [2]

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ 2K_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$D_{11} = D_1 \cdot \sin^2 \alpha + D_2 \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$D_{22} = D_1 \cdot \cos^2 \alpha + D_2 \cdot \sin^2 \alpha;$$

$$D_{13} = (D_1 - D_2) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$D_{33} = (D_1 + D_2 - 2D_\mu) / 4;$$

$$D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32}; \quad D_{12} = D_{21} = D_\mu;$$

$$D_i = \frac{\bar{x}_i^3 E_b}{3(1-\nu_b^2)} + \frac{\bar{x}_{ii}^3 E_{bt}}{3(1-\nu_{bt}^2)} + \frac{E_s \cdot A_s (h_0 - x_i)^2 \lambda_i}{1-\nu_s^2};$$

$$D_\mu = \frac{1}{2} (D_{\mu 1} + D_{\mu 2});$$

$$D_{\mu i} = \frac{\nu_b \cdot \bar{x}_i^2 \cdot \bar{x}_j \cdot E_b}{3(1-\nu_b^2)} + \frac{\nu_{bt} \cdot \bar{x}_{ii}^2 \cdot \bar{x}_{ij} \cdot E_{bt}}{3(1-\nu_{bt}^2)} + \frac{\nu_s \cdot E_s \cdot A_s \cdot (h_0 - x_i) \cdot (h_0 - x_j) \cdot \lambda_j}{1-\nu_s^2};$$

$$i = 1, 2; \quad j = 2, 1;$$

$E_b (E_{bt}), \nu_b (\nu_{bt})$ – соответственно модуль упругости и коэффициент поперечных деформаций приведенной среды при сжатии (растяжении); E_s, A_s – соответственно модуль упругости и коэффициент поперечных деформаций стального листа; λ_i – учет влияния податливости контакта стального листа с бетоном (податливость связей сдвига); \bar{x}, \bar{x}_i – соответственно высоты сжатой и растянутой зон; h_0 – рабочая высота сечения.

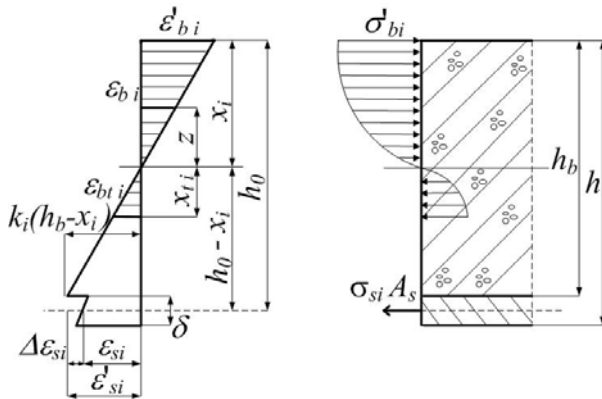


Рис. 1. Напряжения и деформации в сечении сталебетонного элемента

Уравнения изгиба (2) по внешнему виду совпадают с уравнениями изгиба тонких анизотропных железобетонных пластин, но отличаются от этих соотношений побочными коэффициентами. Работа стального листа за пределом упругости учитывается методом предельных параметров. При этом связь между интенсивностью напряжений и деформаций принимается по диаграмме одноосного растяжения стали.

Кривизны срединной поверхности в соответствии с линейной теорией упругости имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ K_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ K_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $w(x, y)$ – функция прогибов точек плиты в ортогональной системе координат x, y .

При расчете сталебетонной плиты, для описания работы бетона, использованы диаграммы деформирования материалов для различных видов напряженного состояния, учтена работа бетона с трещинами в растянутой зоне бетона, а также податливость связей сдвига на границе контакта бетона и стального листа. Для каждого конкретного вида напряженного состояния экспериментальные диаграммы деформирования бетона аппроксимируются аналитической зависимостью в виде полинома 4-й степени ($k = 4$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{bi} &= \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} \cdot \varepsilon_{bi}^k \\ \sigma_{bti} &= \sum_{k=1}^{k=n} A_{tik} \cdot \varepsilon_{bti}^k \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $i = 1, 2$; $\sigma_{bi}, (\sigma_{bti}), \varepsilon_{bi} (\varepsilon_{bti})$ – напряжения и деформации в i -м направлении при сжатии (растяжении) соответственно; A_{ik} – коэффициенты, определяемые из условия минимума квадратичных отклонений экспериментально полученных значений напряжений и вычисленные по формулам (4).

Для дальнейшего рассмотрения примем конечный элемент прямоугольной формы с двенадцатью степенями свободы (рис. 2).

Коэффициенты матрицы жесткости конечного элемента сталебетонной плиты можно получить на основании выражения (1).

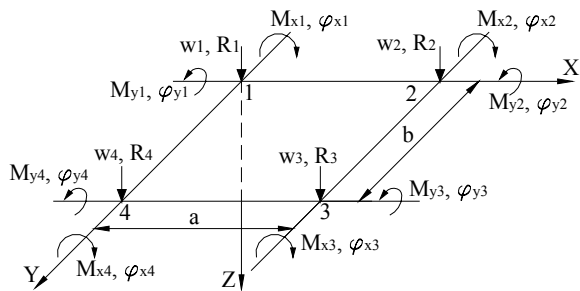


Рис. 2. Прямоугольный конечный элемент с двенадцатью степенями свободы

В построении матрицы жесткости важен выбор функции аппроксимирующей перемещения по области конечного элемента.

В каждом узле прямоугольного конечного элемента примем по три степени свободы (см. рис. 2): w_i – линейное перемещение по оси z , φ_{xi} ($\varphi_x = \partial w / \partial x$), φ_{yi} ($\varphi_y = \partial w / \partial y$) – угловые перемещения относительно координатных осей x , y . Узловым перемещениям соответствуют реакции в дополнительных связях, т. е. сосредоточенная сила R_i и сосредоточенные моменты M_{xi} и M_{yi} .

Учитывая вид функционала полной потенциальной энергии (1), куда входят две производные прогиба, приходим к выводу, что степень аппроксимирующего полинома должна быть не меньше второй. Тем не менее, для согласования полинома со всеми двенадцатью степенями свободы прямоугольного конечного элемента заключаем что, для аппроксимации перемещений в серединной поверхности плиты необходимо принять неполный полином четвертой степени от двух переменных [3]:

$$w(x, y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x^2 + c_5 \cdot y^2 + c_6 \cdot xy + c_7 \cdot x^2 y + c_8 \cdot y^2 x + c_9 \cdot x^3 + c_{10} \cdot y^3 + c_{11} \cdot x^3 y + c_{12} \cdot y^3 x, \quad (5)$$

где $c_1 \dots c_{12}$ – постоянные коэффициенты.

Принятая аппроксимация перемещений удовлетворяет наложенным условиям и дифференциальному уравнению изгибаемой пластины.

Далее, устанавливаем связь между постоянными коэффициентами полинома и перемещениями узлов конечного элемента. Для этого формируем систему алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов c_i , подставляя координаты узлов в функции перемещений. В результате получаем систему из 12-и линейных уравнений относительно постоянных коэффициентов c_i , которая в матричной форме запишется следующим образом:

$$\{q\} = [N] \cdot \{c\}, \quad (6)$$

где $\{q\}$ – вектор узловых перемещений

$$q_i (i = 1, 2 \dots 12);$$

$[N]$ – матрица коэффициентов при неизвестных c_i ; $\{c\}$ – вектор постоянных коэффициентов c_i .

В результате решения системы определяем постоянные коэффициенты функции перемещений

$$\{c\} = [N]^{-1} \cdot \{q\}. \quad (7)$$

Решение в виде (7) получить довольно сложно ввиду высокого порядка системы (6). Поэтому поступим следующим образом. Аппроксимирующий полином представим в виде суммы произведений координатных функций на степени свободы конечного элемента:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{i=12} f_i \cdot q_i, \quad (8)$$

где f_i – координатные функции, распределение перемещений, соответствующие q_i -й степени свободы.

Представим полином (5) в следующем виде:

$$w(x, y) = \{1xyx^2y^2xyx^2yxy^2x^3y^3x^3yxy^3\} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{12} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

или $w(x, y) = \{A\} \cdot \{c\}$, с учетом (7)

$$w(x, y) = \{A\} \cdot [C]^{-1} \cdot \{q\}. \quad (10)$$

Из сопоставления выражений (8) и (10) приходим к выводу, что перемножение матрицы-строки $\{A\}$ на обратную матрицу $[C]^{-1}$ дает в результате матрицу-строку из двенадцати координатных функций f_i .

Далее, определяем коэффициенты матрицы жесткости конечного элемента сталебетонной плиты

$$n_{ij} = \int_0^a \int_0^b \{\varepsilon\}_i^T \{\sigma\}_j dx dy, \quad (11)$$

где $\{\varepsilon\}_i^T$ – транспонированная матрица деформаций по области конечного элемента от перемещения $q_i = 1$; $\{\sigma\}_j$ – матрица напряжений по области конечного элемента от перемещения $q_j = 1$.

Далее в результате вычислений по формуле (11) получим матрицу жесткости конечного элемента сталебетонной плиты:

$$\{n\} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} & n_{16} & n_{17} & n_{18} & n_{19} & n_{1-10} & n_{1-11} & n_{1-12} \\ & n_{22} & n_{23} & n_{24} & n_{25} & n_{26} & n_{27} & n_{28} & n_{29} & n_{2-10} & n_{2-11} & n_{2-12} \\ & & n_{33} & n_{34} & n_{35} & n_{36} & n_{37} & n_{38} & n_{39} & n_{3-10} & n_{3-11} & n_{3-12} \\ & & & n_{44} & n_{45} & n_{46} & n_{47} & n_{48} & n_{49} & n_{4-10} & n_{4-11} & n_{4-12} \\ & & & & n_{55} & n_{56} & n_{57} & n_{58} & n_{59} & n_{5-10} & n_{5-11} & n_{5-12} \\ & & & & & n_{66} & n_{67} & n_{68} & n_{69} & n_{6-10} & n_{6-11} & n_{6-12} \\ & & & & & & n_{77} & n_{78} & n_{79} & n_{7-10} & n_{7-11} & n_{7-12} \\ & & & & & & & n_{88} & n_{89} & n_{8-10} & n_{8-11} & n_{8-12} \\ & & & & & & & & n_{99} & n_{9-10} & n_{9-11} & n_{9-12} \\ & & & & & & & & & n_{10-10} & n_{10-11} & n_{10-12} \\ & & & & & & & & & & n_{11-11} & n_{11-12} \\ & & & & & & & & & & & n_{12-12} \end{array} \right\}$$

Симметрично

где

$$n_{11} = \frac{1}{ab} \left[4 \left(m^2 \cdot D_{11} + \frac{D_{22}}{m^2} \right) + \frac{7}{5} D_{33} + D_{12} + D_{21} \right];$$

$$n_{11} = n_{44} = n_{77} = n_{10-10};$$

$$n_{12} = \frac{1}{a} \left[2mD_{11} + \frac{1}{m} \left(D_{21} + \frac{D_{33}}{10} \right) + \frac{1}{2} (D_{13} - D_{31}) \right];$$

$$n_{12} = -n_{78};$$

$$n_{13} = \frac{1}{a} \left[\frac{2}{m^2} D_{22} + \frac{1}{10} D_{33} + D_{12} + \frac{1}{2m} (D_{23} - D_{32}) \right];$$

$$n_{13} = -n_{79};$$

$$n_{14} = -\frac{1}{ab} \left[2 \left(2m^2 D_{11} - \frac{D_{22}}{m^2} \right) + \frac{7}{5} D_{33} + D_{12} + D_{21} \right];$$

$$n_{14} = n_{7-10};$$

$$n_{15} = \frac{1}{a} \left[2m \cdot D_{11} + \frac{1}{10m} D_{33} + \frac{1}{2} (D_{31} - D_{13}) \right];$$

$$n_{15} = -n_{24} = -n_{7-11} = n_{8-10};$$

$$n_{16} = -\frac{1}{a} \left[-\frac{1}{m^2} D_{22} + \frac{1}{10} D_{33} + D_{12} + \frac{1}{2m} (D_{23} + D_{32}) \right];$$

$$n_{16} = -n_{7-12};$$

$$n_{17} = \frac{1}{ab} \left[-2 \left(m^2 D_{11} + \frac{1}{m^2} D_{22} \right) + \frac{7}{5} D_{33} + D_{12} + D_{21} \right];$$

$$n_{17} = n_{4-10};$$

$$n_{18} = \frac{1}{a} \left[m \cdot D_{11} - \frac{1}{10m} D_{33} + \frac{1}{2} (D_{13} + D_{31}) \right];$$

$$n_{18} = -n_{27};$$

$$n_{19} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{m^2} D_{22} - \frac{1}{10} D_{33} + \frac{1}{2m} (D_{23} + D_{32}) \right];$$

$$n_{19} = -n_{37};$$

$$n_{1-10} = -\frac{1}{ab} \left[-2 \left(m^2 D_{11} - \frac{2}{m^2} D_{22} \right) + \frac{7}{5} D_{33} + D_{12} + D_{21} \right];$$

$$n_{1-10} = n_{47};$$

$$n_{1-11} = -\frac{1}{a} \left[-mD_{11} + \frac{1}{m} \left(D_{21} + \frac{1}{10} D_{33} \right) + \frac{1}{2} (D_{13} + D_{31}) \right];$$

$$n_{1-12} = \frac{1}{a} \left[\frac{2}{m^2} D_{22} + \frac{1}{10} D_{33} + \frac{1}{2m} (D_{32} - D_{23}) \right];$$

$$n_{1-12} = -n_{3-10};$$

$$n_{22} = \frac{4}{3} m \cdot D_{11} + \frac{2}{15m} D_{33} + \frac{1}{4} (D_{13} + D_{31}); \quad n_{22} = n_{88};$$

$$n_{23} = \frac{1}{12} \left(m \cdot D_{13} + \frac{1}{m} D_{32} \right) + D_{12}; \quad n_{23} = n_{89};$$

$$n_{25} = \frac{2}{3} m \cdot D_{11} - \frac{1}{30m} D_{33} + \frac{1}{4} (D_{31} - D_{13}); \quad n_{25} = n_{8-11};$$

$$n_{26} = -\frac{1}{12} \left(m \cdot D_{13} + \frac{1}{m} D_{32} \right);$$

$$n_{26} = -n_{29} = n_{2-12} = n_{59} = n_{8-12};$$

$$n_{28} = \frac{1}{3} m \cdot D_{11} + \frac{1}{30m} D_{33} + \frac{1}{4} (D_{13} + D_{31});$$

$$n_{2-10} = \frac{1}{a} \left[m \cdot D_{11} - \frac{1}{m} \left(D_{12} + \frac{D_{33}}{10} \right) + \frac{1}{2} (D_{13} + D_{31}) \right];$$

$$n_{2-11} = \frac{2}{3} m \cdot D_{11} - \frac{2}{15m} D_{33} + \frac{1}{4} (D_{31} - D_{13});$$

$$n_{33} = \frac{4}{3m} D_{22} + \frac{2}{15} m \cdot D_{33} + \frac{1}{4} (D_{23} + D_{32}); \quad n_{33} = n_{99};$$

$$n_{34} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{m^2} D_{22} - \frac{1}{10} D_{33} - D_{21} + \frac{1}{2m} (D_{23} + D_{32}) \right];$$

$$n_{34} = -n_{9-10};$$

$$n_{35} = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{m} D_{23} + m \cdot D_{31} \right);$$

$$n_{35} = -n_{38} = n_{3-11} = n_{68} = n_{9-11};$$

$$n_{36} = \frac{2}{3m} D_{22} - \frac{2}{15} m \cdot D_{33} + \frac{1}{4} (D_{32} - D_{23}); \quad n_{36} = n_{9-12};$$

$$n_{39} = \frac{1}{3m} D_{22} + \frac{1}{30} m \cdot D_{33} + \frac{1}{4} (D_{23} + D_{32});$$

$$n_{3-12} = \frac{2}{3m} D_{22} - \frac{1}{30} m \cdot D_{33} + \frac{1}{4} (D_{32} - D_{23});$$

$$n_{45} = \frac{1}{a} \left[-2mD_{11} - \frac{1}{m} \left(D_{21} + \frac{D_{33}}{10} \right) + \frac{1}{2} (D_{13} - D_{31}) \right];$$

$$n_{45} = -n_{10-11};$$

$$n_{46} = \frac{1}{a} \left[\frac{2}{m^2} D_{22} + \frac{1}{10} D_{33} + D_{12} + \frac{1}{2m} (D_{32} - D_{23}) \right];$$

$$n_{46} = -n_{10-12};$$

$$n_{48} = \frac{1}{a} \left[-m \cdot D_{11} + \frac{1}{m} \left(D_{21} + \frac{D_{33}}{10} \right) - \frac{1}{2} (D_{13} + D_{31}) \right];$$

$$n_{49} = \frac{1}{a} \left[\frac{2}{m^2} D_{22} + \frac{1}{10} D_{33} + \frac{1}{2m} (D_{23} - D_{32}) \right];$$

$$n_{49} = -n_{67};$$

$$n_{4-11} = \frac{1}{a} \left[-m \cdot D_{11} + \frac{1}{10m} D_{33} + \frac{1}{2} (D_{13} + D_{31}) \right];$$

$$n_{4-11} = -n_{5-10};$$

$$n_{4-12} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{m^2} D_{22} - \frac{1}{10} D_{33} - \frac{1}{2m} (D_{23} + D_{32}) \right];$$

$$n_{4-12} = -n_{6-10};$$

$$n_{55} = \frac{4}{3} m \cdot D_{11} + \frac{2}{15m} D_{33} - \frac{1}{4} (D_{13} + D_{31});$$

$$n_{55} = n_{11-11};$$

$$n_{56} = \frac{1}{12} \left(m \cdot D_{13} + \frac{1}{m} D_{32} \right) - D_{12}; \quad n_{56} = n_{11-12};$$

$$n_{57} = \frac{1}{a} \left[-m \cdot D_{11} + \frac{1}{m} \left(D_{12} + \frac{D_{33}}{10} \right) + \frac{1}{2} (D_{13} + D_{31}) \right];$$

$$n_{58} = \frac{2}{3} m \cdot D_{11} - \frac{2}{15m} D_{33} + \frac{1}{4} (D_{13} - D_{31});$$

$$n_{5-11} = \frac{1}{3} m \cdot D_{11} + \frac{1}{30m} D_{33} - \frac{1}{4} (D_{13} + D_{31});$$

$$n_{66} = \frac{4}{3m} D_{22} + \frac{2}{15m} D_{33} - \frac{1}{4} (D_{23} + D_{32}); \quad n_{66} = n_{12-12};$$

$$n_{69} = \frac{2}{3m} D_{22} - \frac{1}{30} m \cdot D_{33} + \frac{1}{4} (D_{23} - D_{32});$$

$$n_{6-12} = \frac{1}{3m} D_{22} + \frac{1}{30} m \cdot D_{33} - \frac{1}{4} (D_{23} + D_{32}).$$

Параметры напряженного состояния конечного элемента (погонные изгибающий и крутящие моменты) определяются через перемещения его узлов. Подставляя в (2) соответствующие вторые производные от функции прогиба (8), получим функции погонных изгибающих и крутящего моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, $M_{xy}(x, y)$ по области конечного элемента. Значения параметров в любой точке области конечного элемента находят подстановкой координат x и y .

В соответствии с полученной матрицей жесткости выполнен численный расчет сталебетонной плиты размером 1x1 м, толщиной бетона 0,05 м и толщиной стального листа 1 мм. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976.
2. Чихладзе Э. Д., Арсланханов А. Д. Теория деформирования сталебетонных плит// Межвуз. сб. науч. тр./ХарГАЖТ, 1996. – Вып.27.
3. Варвак П. М., Городецкий А. С., Пискунов В. Г. и др. Метод конечных элементов//К.: Вища школа, 1981.
4. Чихладзе Э. Д., Арсланханов А. Д. Экспериментальные исследования сталебетонных плит// Строительство и архитектура. Сер. Изв. вузов, 1991. – Вып. 5.

Поступила в редколлегию 12.11.2006.