

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра будівельної механіки та гідравліки

**ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗРАХУНКОВО-
ПРОЕКТУВАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ**

з дисципліни

«ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

Харків – 2015

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки і гідравліки 9 грудня 2014 р., протокол № 4.

У методичних вказівках подано приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з опору матеріалів для студентів спеціальності «Локомотиви та локомотивне господарство» напряму «Рухомий склад залізниць».

Укладачі:

доц. М.А. Вєрєвічева,
асист. Д.Г. Петренко

Рецензент

доц. Г.Л. Ватуля

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗРАХУНКОВО-
ПРОЕКТУВАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ
з дисципліни
«ОПР МАТЕРІАЛІВ»

Відповідальний за випуск Вєрєвічева. М.А.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 16.12.14 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 5,5. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ У БРУСАХ РІЗНОГО ОБРИСУ	5
1.1 Загальні положення.....	5
1.2 Правила перевірки та побудови епюр у прямих стержнях.....	6
1.3 Порядок побудови епюр	7
1.4 Приклади побудови епюр внутрішніх зусиль	8
2 РОЗРАХУНКИ НА РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСК.....	25
2.1 Загальні положення.....	25
2.2 Приклади розрахунків на розтягання та стиск.....	27
3 ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКОГО СКЛАДЕНОГО ПЕРЕРІЗУ	44
3.1 Основні формули для розрахунків	44
3.2 Приклад розв'язання задачі на визначення	47
геометричних характеристик складеного перерізу	47
4 РОЗРАХУНОК БАЛОК ПРИ ЗГІНІ	46
4.1 Підбір перерізу та перевірка міцності.....	46
4.2 Визначення переміщень методом початкових параметрів	54
5 ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ НА СКЛАДНИЙ ОПІР.....	58
5.1 Розрахунок балки при косому згині	58
5.2 Розрахунок короткого стержня при позацентровому стиску.....	64
5.3 Розрахунок стержня при згині з крученням	72
6 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНЯ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ЗГІНІ.....	75
7 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ ПЛОСКИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ	87
7.1 Правила перемножування епюр	87
7.2 Приклад розрахунку статично невизначної рами методом сил	89
8 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ ПЛОСКИХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ.....	104
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	116
ДОДАТОК А Геометричні характеристики деяких перерізів.....	117
ДОДАТОК Б Сортамент прокатної сталі.....	120

ВСТУП

Пропоновані методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів і містять приклади розв'язання завдань, які виконують студенти денної і заочної форм навчання спеціальності «Локомотиви та локомотивне господарство» напряму «Рухомий склад залізниць» при вивченні опору матеріалів та будівельної механіки. Ці вказівки є продовженням та доповненням методичних рекомендацій кафедри будівельної механіки та гідравліки [1-8].

Для кінцевого контролю отриманого розв'язку чи контролю розв'язання по кроках, а також для допомоги при розв'язанні завдання призначені програмні комплекси кафедри [9, 10].

Вказівки містять довідковий матеріал, необхідний для розв'язання завдань: геометричні характеристики простих перерізів (додаток А), сортамент прокатної сталі (додаток Б).

У даних вказівках розв'язання задач супроводжується основними теоретичними даними курсу, які покладено в основу рішення. Однак ці вказівки не можуть замінити підручник, тому щоб розв'язувати задачі з розумінням, треба попередньо ознайомитись з відповідним матеріалом у підручнику чи у курсі лекцій [11-20].

Зміст та наповнення розрахунково-графічних робіт прийняті згідно з планом підготовки студентів відповідного напряму.

1 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ У БРУСАХ РІЗНОГО ОБРИСУ

1.1 Загальні положення

У перерізах плоских брусів різного обрису можуть виникати поперечна та поздовжня сили, згинальний та крутний моменти.

Поперечна сила Q в перерізі елемента дорівнює сумі проєкцій усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль до осі елемента.

Поперечна сила вважається додатною, якщо вона повертає елемент за годинниковою стрілкою (рисунок 1.1, а).

Поздовжня сила N в перерізі елемента дорівнює сумі проєкцій усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на вісь елемента.

Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона викликає розтягання, тобто спрямована від перерізу (рисунок 1.1, б).

Згинальний момент M у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі всіх згинальних моментів, розташованих по один бік перерізу.

Згинальний момент вважається додатним, якщо він згинає балку опуклістю вниз, викликаючи розтягання нижніх волокон (рисунок 1.1, в).

Крутний момент M_K у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, розташованих по один бік від перерізу.

Крутний момент вважається додатним, якщо при погляді на переріз уздовж осі з боку відкинутої частини елемента видно, що він повертає залишену частину за годинниковою стрілкою (рисунок 1.1, г).

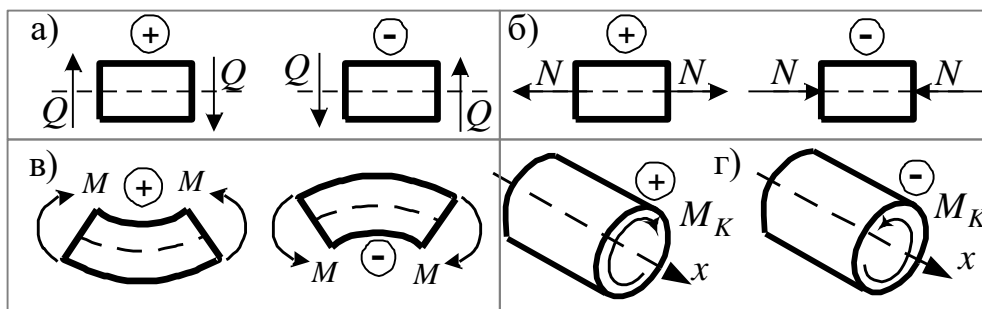


Рисунок 1.1 – Правила знаків для внутрішніх зусиль

1.2 Правила перевірки та побудови епюр у прямих стержнях

1 На ділянці, де немає розподіленого навантаження, поперечна сила є сталою (епюра Q – пряма, паралельна до осі), згинальний момент змінюється за лінійною залежністю (епюра M – похила пряма), причому тангенс кута нахилу епюри M дорівнює силі Q . В окремому випадку можуть бути відсутні і зосереджені сили, тоді $Q = 0$, $M = \text{const}$.

2 На ділянці, де є рівномірно розподілене навантаження, поперечна сила змінюється за лінійною залежністю (епюра Q – похила пряма), причому тангенс кута нахилу епюри Q дорівнює q ; згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю і епюра M – парабола, у якої опуклість звернена у бік дії розподіленого навантаження q .

Якщо на цій ділянці Q в одному з перерізів дорівнює нулю, то M у цьому перерізі набуває екстремального значення – максимум або мінімум.

3 У перерізі, де прикладена зосереджена сила, на епюрі Q є стрибок, що дорівнює значенню цієї сили і спрямований у бік дії сили (при побудові епюри зліва направо). Епюра M в цьому перерізі має злам, спрямований у бік дії сили F .

4 У перерізі, де прикладений зосереджений момент, на епюрі M є стрибок, що дорівнює значенню моменту M . При цьому напрямок стрибка буде вниз (при побудові епюри зліва направо), якщо зосереджений момент спрямований за годинниковою стрілкою, і нагору, якщо момент спрямований проти годинникової стрілки. На епюрі Q наявність зосередженого моменту не відбивається.

5 У перерізі, де прикладена поздовжня сила, на епюрі N є стрибок, що дорівнює значенню цієї сили і спрямований у бік дії сили (стискальна сила дає стрибок униз).

6 Якщо у площині перерізу прикладений момент, на епюрі M_K є стрибок, що дорівнює значенню цього моменту і спрямований у бік його дії (під додатним моментом стрибок нагору).

1.3 Порядок побудови епюр

- 1 Визначаються опорні реакції.
- 2 Елемент розбивається на ділянки. Границями ділянок є: початок та кінець елемента; опорні точки; точки, які обмежують дію розподіленого навантаження; точки прикладання зосередженої сили або моменту.
- 3 Далі епюра може бути побудована двома способами.

Перший спосіб

– У довільному перерізі x кожної ділянки проводиться переріз і відкидається частина елемента по один бік від перерізу.

– У перерізі x визначаються потрібні внутрішні зусилля за правилами п. 1.1.

– На підставі отриманих виразів для внутрішніх зусиль будуються їх епюри. Правила, сформульовані у п. 1.2, використовуються для перевірки побудованих епюр.

Другий спосіб. У цьому способі правила п. 1.2 використовуються для побудови епюр.

– На підставі правил п. 1.2 на кожній ділянці визначається вид епюри залежно від прикладеного навантаження. Якщо епюра має вигляд прямої, яка паралельна до осі, то значення зусилля достатньо визначити в одній точці перерізу. Якщо епюра є похилою прямою або параболою, зусилля треба визначити у початку та кінці ділянки.

– Отримані ординати сполучаються потрібною лінією.

– Знання про наявність або відсутність стрибків на границях між ділянками дозволяє зменшити кількість розрахунків.

При побудові епюр додатні значення поперечних сил Q , поздовжніх сил N і крутних моментів M_K відкладаємо нагору, а додатні значення згинальних моментів M – униз від осі (тобто з боку розтягнутих волокон).

1.4 Приклади побудови епюр внутрішніх зусиль

Задача 1

Побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M у балці на двох шарнірних опорах, яка показана на рисунку 1.2, а.

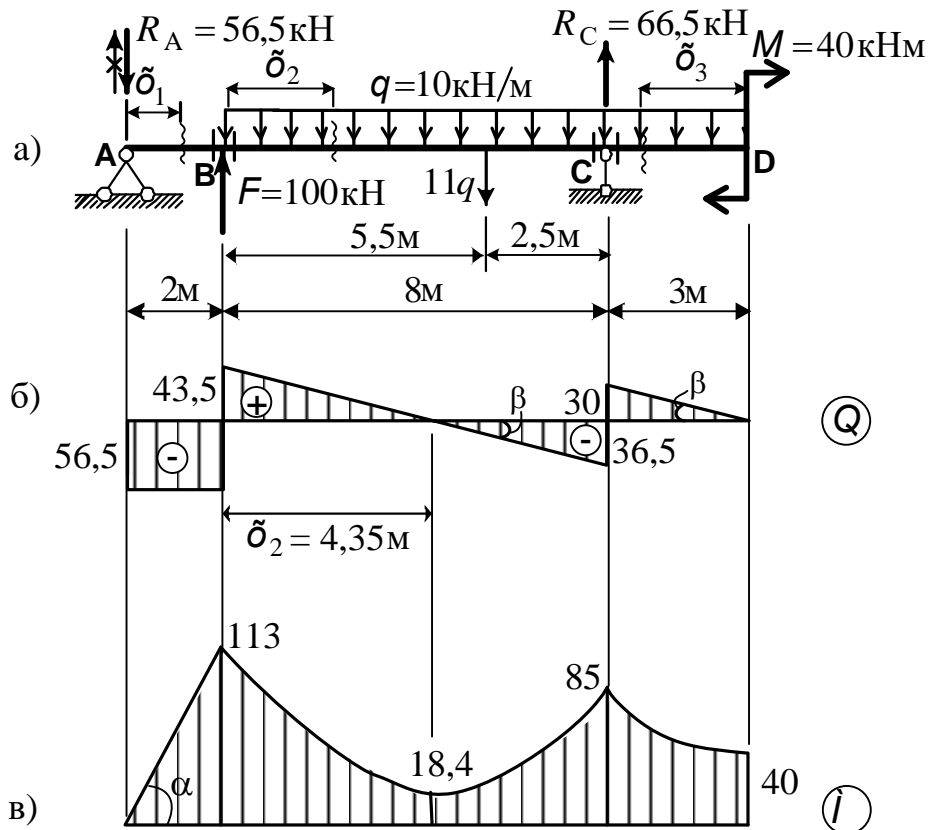


Рисунок 1.2 – Побудова епюр Q і M в однопрогоновій балці: розрахункова схема балки (а); епюра Q (б); епюра M (в)

1 Визначаємо опорні реакції.

Припустимо, що вертикальні опорні реакції R_A та R_C спрямовані нагору. Горизонтальна реакція в шарнірно-нерухомій опорі А дорівнює нулю, оскільки зовнішнє горизонтальне навантаження відсутнє. Тому на рисунку 1.2, а горизонтальна реакція не показана.

Для визначення опорних реакцій у балці з двома шарнірними опорами раціонально використати такі рівняння

рівноваги: сума моментів відносно опорних точок А і С дорівнює нулю. Додатний напрямок зовнішнього моменту при укладанні рівнянь рівноваги обирається довільним чином. Рівнодіюча розподіленого навантаження $11q$ (довжина ділянки 11 м помножена на q) прикладена посередині ділянки з розподіленим навантаженням (рисунок 1.2, а). Враховуючи це, отримуємо рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0: R_C \cdot 10 + F \cdot 2 - 11q \cdot 7,5 - M = 0; R_C = 66,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0: R_A \cdot 10 + F \cdot 8 - 11q \cdot 2,5 + M = 0; R_A = -56,5 \text{ кН}.$$

Додатне значення отриманої реакції R_C указує на те, що її дійсний напрямок збігся з передбачуваним, тобто R_C спрямована нагору. Від'ємне значення отриманої реакції R_A означає, що насправді вона спрямована донизу. Це треба відбити на схемі, перекресливши неправильний напрямок (рисунок 1.2, а).

Далі слід перевірити правильність визначення опорних реакцій, перевіривши виконання третього рівняння рівноваги:

$$\sum Y = F + R_C - R_A - q \cdot 11 = 100 + 66,5 - 56,5 - 110 = 0.$$

Отже, реакції знайдено правильно.

2 Розбиваємо балку на ділянки за правилами п. 1.3. На рисунку 1.2,а границями ділянок є точки А, В, С, D.

3 Якщо на балці є ділянка, завантажена розподіленим навантаженням, епюри зручніше будувати за *першим способом* п. 1.3. На кожній ділянці складаємо вирази для внутрішніх зусиль згідно з методом перерізів.

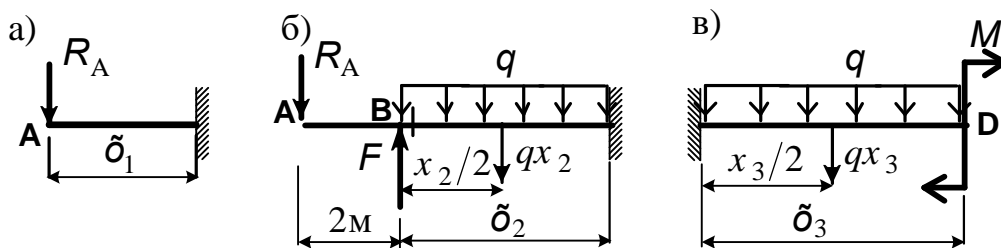


Рисунок 1.3 – Розрахункові схеми ділянок балки:

ділянка АВ (а); ділянка ВС (б); ділянка CD (в)

Ділянка АВ. Розсічемо балку в довільному перерізі x_1 , $0 \leq x_1 \leq 2$ м. Відкинемо праву частину балки (рисунок 1.3, а). Згідно з правилами п. 1.1, в цьому перерізі поперечна сила та згинальний момент дорівнюють

$$Q = -R_A = -56,5 \text{ кН}; \quad M = -R_A \cdot x_1.$$

Поперечна сила є сталою, тому епюра Q – пряма лінія, проведена паралельно до осі донизу від неї на відстані 56,5 (рисунок 1.2, б).

Згинальний момент змінюється за лінійною залежністю. Тому для побудови епюри M на цій ділянці достатньо обчислити значення M на початку і кінці ділянки:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 2 \text{ м ліворуч т. В } M_B = -113 \text{ кНм}.$$

Відкладаємо від'ємне значення моменту нагору від осі (правило п. 1.3) та з'єднуємо його з нулем прямою лінією (рисунок 1.2, в).

Ділянка ВС. Розсічемо балку в довільному перерізі x_2 , $0 \leq x_2 \leq 8$ м. Відкинемо праву частину балки (рисунок 1.3, б). Одержуємо

$$Q = -R_A + F - qx_2;$$

$$M = -R_A(x_2 + 2) + Fx_2 - qx_2 \frac{x_2}{2} = -R_A(x_2 + 2) + Fx_2 - q \frac{x_2^2}{2}.$$

Поперечна сила змінюється за лінійною залежністю. Тому для побудови епюри Q на цій ділянці достатньо обчислити значення Q на початку та кінці ділянки:

$$\text{при } x_2 = 0 \quad \text{праворуч т. В} \quad Q_B = 43,5 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_2 = 8 \text{ м ліворуч т. С} \quad Q_C = -36,5 \text{ кН}.$$

Отримані значення відкладаємо від осі і з'єднуємо прямою лінією.

Згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю. Для побудови епюри M слід визначити значення згинального моменту у трьох перерізах: на початку та на кінці

ділянки, а також у перерізі, де $Q=0$, оскільки там момент досягає екстремального значення (правило 2 п. 1.2).

Обчислимо значення M на початку та в кінці ділянки:

при $x_2=0$ праворуч т. В $M_B = -113$ кНм;

при $x_2=8$ м ліворуч т. С $M_C = -85$ кНм.

Визначимо переріз, у якому $Q=0$. Для цього вираз поперечної сили Q дорівнюємо до нуля:

$$Q = -R_A + F - qx_2 = 43,5 - 10x_2 = 0, \text{ звідки } x_2 = 4,35 \text{ м.}$$

Підставимо це значення у вираз для M і визначимо екстремальний згинальний момент:

$$\text{при } x_2 = 4,35 \text{ м } M = -R_A(4,35 + 2) + F \cdot 4,35 - q \frac{4,35^2}{2} = -18,4 \text{ кНм.}$$

Відклавши одержані значення згинальних моментів, проведемо через них квадратну параболу з вершиною у перерізі $x_2 = 4,35$ м.

Якщо на ділянці немає точки з $Q=0$, визначають значення M посередині ділянки.

Ділянка CD. Розсічемо балку у довільному перерізі x_3 , $0 \leq x_3 \leq 3$ м. Відкинемо ліву частину балки (рисунок 1.3, в). Одержуємо

$$Q = qx_3; \quad M = -40 - q \frac{x_3^2}{2}.$$

Поперечна сила змінюється за лінійною залежністю. Значення Q на початку та кінці ділянки:

при $x_3=0$ $Q_D = 0$;

при $x_3=3$ м праворуч т. С $Q_C = 30$ кН.

Згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю:

при $x_3=0$ $M_D = -40$ кНм;

при $x_3=3$ м праворуч т. С $M_C = -85$ кНм.

Відклавши отримані ординати, проведемо через них квадратну параболу без екстремуму. Посередині ділянки

при $x_3 = 1,5\text{ м}$ $M = -40 - 10 \cdot 2,25/2 = -51,25\text{ кНм}$.

Перевіримо виконання правил 1 – 4, сформульованих у п. 1.2.

На ділянці АВ немає розподіленого навантаження. Сила Q , як повинно бути, є сталою, а епюра M – похилою, причому тангенс кута нахилу дорівнює $-133/2 = -56,5 = Q$ (правило 1).

Ділянки ВС і CD завантажені розподіленим навантаженням. Епюри Q на цих ділянках мають вигляд похилих прямих, причому тангенс кута нахилу обох за модулем дорівнює $43,5/4,35 = 10 = q$ та $30/3 = 10 = q$, (правило 2). Епюра згинальних моментів на цих ділянках – квадратна парабола, причому на ділянці ВС вона має екстремум (правило 2).

В точках А, В і С прикладені зосереджені сили (у т. А і С прикладені реакції, у т. В – сила F). На епюрі Q у цих точках, як і повинно бути, є стрибки по напрямку цих сил і рівні цим силам: у т. А стрибок донизу на $56,5 = R_A$; у т. В стрибок угору на $56,5 + 43,5 = 100 = F$; у т. С стрибок угору на $36,5 + 30 = 66,5 = R_C$. Отже, правило 3 виконується.

Зовнішній момент M прикладений тільки у т. D, тому відповідно до правила 4 стрибок на епюрі M є тільки у цій точці.

Задача 2

Побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M у консольній балці, яка показана на рисунку 1.4, а.

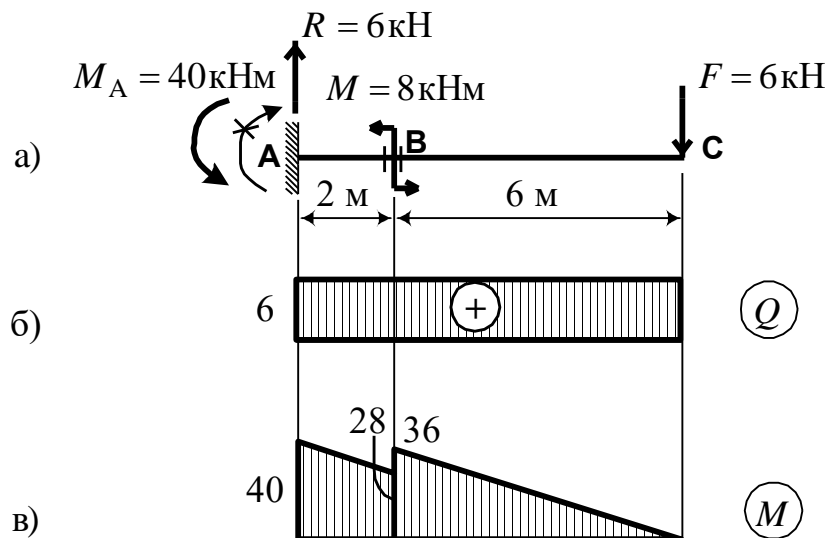


Рисунок 1.4 – Побудова епюр Q і M у консольній балці:
розрахункова схема балки (а); епюра Q (б); епюра M (в)

1 Визначаємо опорні реакції.

Припустимо, що опорні реакції R та M_A у защемленні спрямовані відповідно угору та за годинниковою стрілкою (рисунок 1.4, а). Горизонтальна реакція в защемленні дорівнює нулю, оскільки зовнішнє горизонтальне навантаження відсутнє. Тому на рисунку 1.4, а горизонтальна реакція не показана.

Для визначення опорних реакцій у балці з защемленням раціонально використати такі рівняння рівноваги: сума моментів відносно опорної точки А дорівнює нулю та сума вертикальних сил дорівнює нулю. Додатний напрямок зовнішнього моменту при укладанні рівнянь рівноваги обирається довільним чином. Враховуючи це, отримуємо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0: \quad R - F = 0; \quad R = 6 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A - M + F \cdot 8 = 0; \quad M_A = -40 \text{ кН}.$$

Додатне значення отриманої реакції R указує на те, що її дійсний напрямок збігся з передбачуваним (угору). Від'ємне значення отриманої реакції M_A означає, що насправді вона спрямована проти годинникової стрілки. Це треба відбити на схемі, перекресливши неправильний напрямок (рисунок 1.4, а).

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій, перевіривши виконання третього рівняння рівноваги $\sum M = 0$ відносно будь-якої точки балки, наприклад, відносно т. С:

$$\sum M_C = M_A - R \cdot 8 + M = 40 - 6 \cdot 8 + 8 = 0.$$

Отже, реакції знайдені правильно.

2 Розбиваємо балку на ділянки за правилами п. 1.3. На рисунку 1.4,а границями ділянок є точки А, В, С.

3 Балка не завантажена розподіленим навантаженням, тому епюри зручніше будувати за *другим способом* п. 1.3. Правила 1–4 будуть використані саме для побудови епюр, а не для їх перевірки.

Ділянка АВ. Ця ділянка не завантажена розподіленим навантаженням, тому поперечна сила є сталою. Достатньо знати

Q в одній точці, наприклад, Q_A . Проведемо переріз праворуч точки А та відкинемо праву частину балки. Відповідно до правил п. 1.1

$$Q_A = R = 6 \text{ кН}.$$

На епюрі Q проводимо пряму, паралельну до осі, на відстані 6 (рисунок 1.4, б).

Епюра M на цій ділянці – похила пряма. Проведемо її через дві точки – А та В (ліворуч від перерізу). Проводимо послідовно перерізи у цих точках та відкидаємо праву частину балки. Відповідно до правил п. 1.1

$$M_A = -40 \text{ кНм}; \quad M_B = -M_A + R \cdot 2 = -40 + 12 = -28 \text{ кНм}.$$

Відкладаємо M_A від т. А та M_B ліворуч від т. В і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 1.4, в).

Ділянка ВС. Ця ділянка не завантажена розподіленим навантаженням, тому поперечна сила є сталою. Згідно з правилом 4 з п. 1.2 зовнішній момент M не відбивається на епюрі Q , тому продовжуємо пряму на епюрі Q до кінця ділянки ВС (рисунок 1.4, б).

Епюра M на цій ділянці – похила пряма. Проведемо її через дві точки – В (праворуч від перерізу) та С. Згідно з правилом 4 з п. 1.2 у т. В на епюрі M повинен бути стрибок на величину зовнішнього моменту і за його напрямком (у даному випадку – угору). Тому у перерізі В показуємо стрибок угору на 8 кНм, тобто

$$M_B = -28 - 8 = -36 \text{ кНм}.$$

У т. С проводимо переріз і відкидаємо ліву частину балки. Отримуємо

$$M_C = 0.$$

Відкладаємо M_B праворуч точки В і з'єднуємо з 0 у т. С (рисунок 1.4, в).

Задача 3

Побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M у рамі, яка показана на рисунку 1.5.

Примітка. Поняття «низ» і «верх» при визначенні знака згинального моменту у вертикальних елементах залежать від положення спостерігача (ліворуч або праворуч від вертикальної осі). Однак можна помітити, що при будь-якому положенні спостерігача епюра буде відкладена з боку розтягнутих волокон.

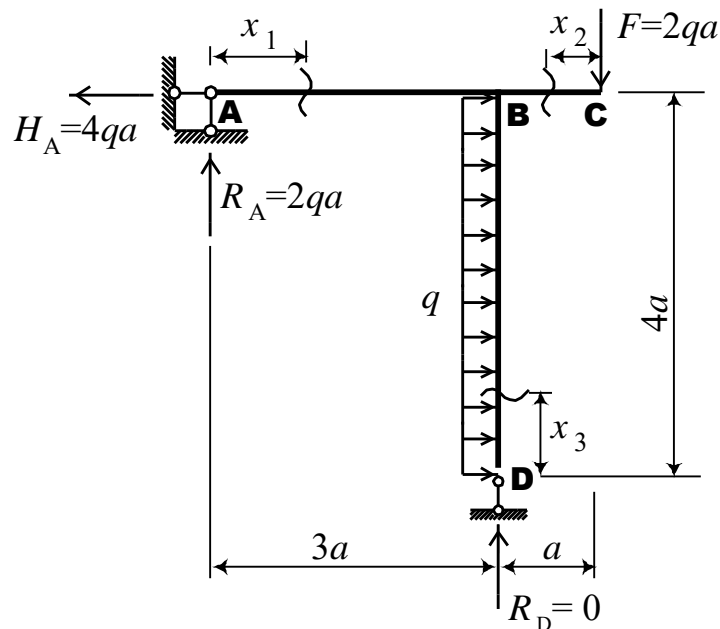


Рисунок 1.5 – Розрахункова схема рами

1 Визначимо опорні реакції з рівнянь рівноваги:

$$\sum X = 0: H_A - 4qa = 0;$$

$$H_A = 4qa;$$

$$\sum M_A = 0: R_D \cdot 3a - F \cdot 4a + 4qa \cdot 2a = 0;$$

$$R_D = (F \cdot 4a - 4qa \cdot 2a) / 3a = (8qa^2 - 8qa^2) / 3a = 0;$$

$$\sum M_D = 0: -R_A \cdot 3a + H_A \cdot 4a - F \cdot a - 4qa \cdot 2a = 0;$$

$$R_A = (H_A \cdot 4a - F \cdot a - 4qa \cdot 2a) / 3a = (16qa^2 - 2qa^2 - 8qa^2) / 3a = 2qa.$$

Усі реакції знайдено незалежно одна від одної. Правильність їх визначення підтверджується виконанням таких рівнянь рівноваги (вони не використовувалися при визначенні реакцій):

$$\sum Y = R_A - F = 0;$$

$$\sum M_C = R_A \cdot 4a - 4qa \cdot 2a = 0.$$

Таким чином, опорні реакції визначено правильно.

2 Розділимо раму на три ділянки: АВ, ВС, ВD. На кожній ділянці в довільному місці проведемо переріз (рисунок 1.5) і складемо рівняння рівноваги для відсічених частин рами.

3 Зусилля у перерізах та їх знаки визначаються відповідно до правил п. 1.1. Для побудови епюр використаємо правила п. 1.2.

На ділянці АВ розглянемо довільний переріз x_1 ($0 \leq x_1 \leq 3a$), відкинувши праву частину рами. Ця ділянка не завантажена розподіленим навантаженням, тому поздовжня і поперечна сили є сталими, згинальний момент – лінійна функція. Отже, N і Q досить визначити в одній точці, M – на початку і кінці ділянки:

$$\begin{aligned} N_A = H_A = 4qa, \quad Q_A = R_A = 2qa; \\ M_A = 0, \quad M_B = R_A \cdot 3a = 6qa^2. \end{aligned}$$

Додатні значення M відкладаємо знизу від осі ділянки і з'єднуємо їх похилою прямою (рисунок 1.6, а, б, в).

На ділянці ВС розглянемо довільний переріз x_2 , ($0 \leq x_2 \leq a$), відкинувши ліву частину рами. Ця ділянка також не завантажена розподіленим навантаженням, отже, характер епюр на ній такий самий, як на ділянці АВ; значення N і Q визначаємо в одній точці, M – на початку і кінці ділянки (рисунок 1.6, а, б, в):

$$\begin{aligned} N_C = 0, \quad Q_C = F = 2qa; \\ M_C = 0, \quad M_B = -F \cdot a = -2qa^2. \end{aligned}$$

На ділянці ВD розглянемо довільний переріз x_3 , ($0 \leq x_3 \leq 4a$), відкинувши верхню частину рами. Ця ділянка завантажена розподіленим навантаженням, тому поздовжня сила є сталою, поперечна сила є лінійною функцією, згинальний момент – квадратичною. Отже; N визначаємо в одній точці, M і Q – на початку і кінці ділянки.

При визначенні знака згинального моменту припустимо, що спостерігач знаходиться ліворуч від осі, тоді відповідно до правила знаків одержуємо

$$N_D = 0, \quad Q_D = 0, \quad Q_B = 4qa;$$

$$M_D = 0, \quad M_B = 8qa^2.$$

Знак «плюс» перед M_B означає, що його значення на епюрі потрібно відкласти у бік спостерігача, тобто вліво.

Ординати Q в точках В та D з'єднуємо похилою прямою, ординати M – квадратичною параболою (рисунок 1.6, а, б, в).

На розглянутій ділянці епюра Q не перетинає вісь, тому на епюрі M відсутній екстремум. Якщо ж екстремум має місце, то його положення і значення визначаються так само, як і при побудові епюр внутрішніх зусиль у балці.

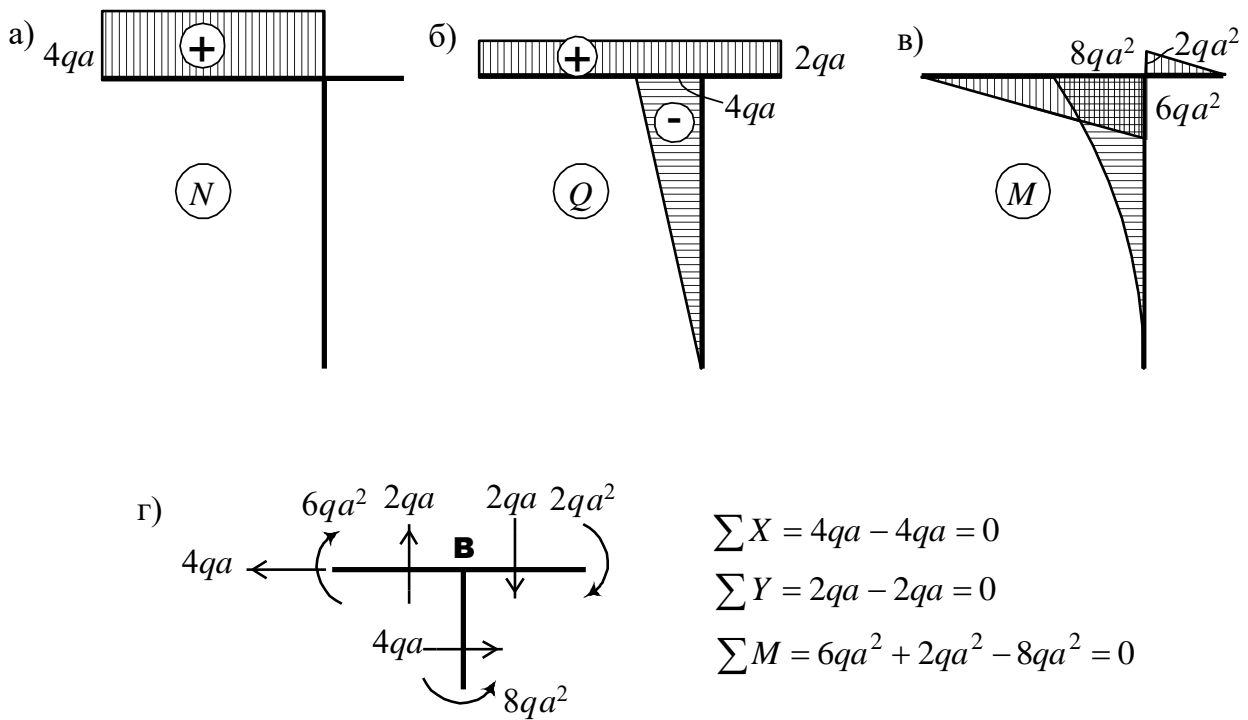


Рисунок 1.6 – Внутрішні зусилля у рамі: епюри N , Q , M (а, б, в);
перевірка епюр (г)

Після побудови епюр необхідно перевірити рівновагу вузлів рами, у яких з'єднуються два або більш елементів. У даному випадку – це вузол В. Виріжемо цей вузол трьома перерізами (ліворуч, праворуч і знизу) і покажемо зусилля N , Q , M у цих перерізах відповідно до побудованих епюр (рисунок 1.6, г).

Перевірка, наведена на рисунку, показує, що вузол В знаходиться в рівновазі.

Задача 4

Побудувати епюру поздовжніх сил N у брусі, який показаний на рисунку 1.7, а.

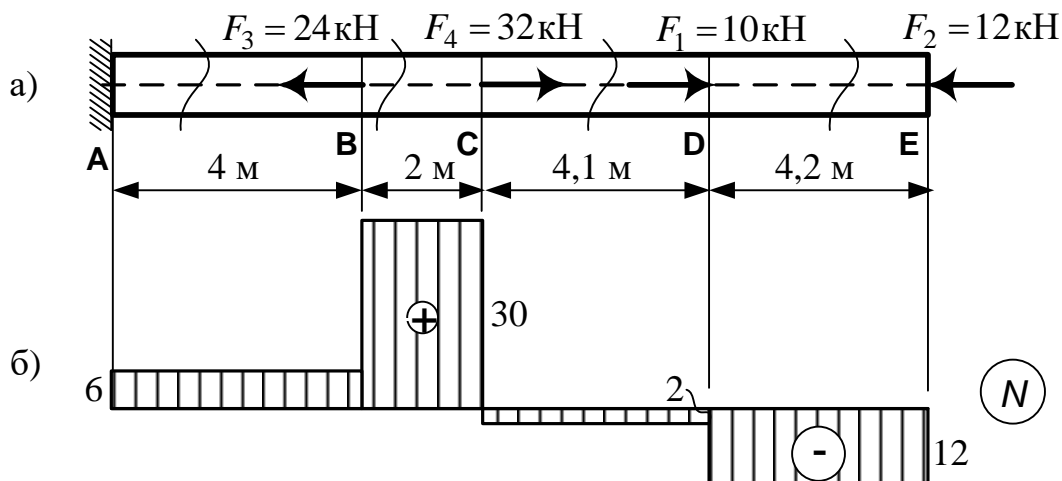


Рисунок 1.7 – Брус: розрахункова схема (а); епюра поздовжніх сил N (б)

У випадку жорсткого закріплення брусу з одного боку зручно будувати епюру без попереднього визначення реакції опори.

Розіб'ємо брус на ділянки, як показано на рисунку 1.7, а. Граничними точками ділянок є точки прикладення зосереджених сил та опорна точка.

При розрахунку поздовжньої сили N на кожній ділянці проведемо довільний переріз та відкинемо ліву частину брусу. При визначенні значення та знаку N користуємось правилами п. 1.1 (додаємо всі сили ліворуч перерізу зі своїми знаками; сила, спрямована від перерізу, має знак «плюс»).

Ділянка DE:

$$N_{DE} = -F_2 = -12 \text{ кН}.$$

Ділянка CD:

$$N_{CD} = -F_2 + F_1 = N_{DE} + F_1 = -12 + 10 = -2 \text{ кН}.$$

Ділянка BC:

$$N_{BC} = -F_2 + F_1 + F_4 = N_{CD} + F_4 = -2 + 32 = 30 \text{ кН}.$$

Ділянка AB:

$$N_{AB} = -F_2 + F_1 - F_4 - F_3 = N_{BC} - F_3 = 6 \text{ кН}.$$

Отримані вирази показують, що

– поздовжні сили є сталими на всіх ділянках, тому їх епюри є прямими, паралельними до осі бруса;

– на кожній наступній ділянці значення N можна отримати, додавши до попереднього значення зовнішню силу, прикладену на границі між ділянками. З цього видно, що границях між ділянками повинен бути стрибок, якій дорівнює силі, прикладеній на цій границі. Тобто виконується правило 5, викладене у п. 1.2.

Епюру поздовжніх N сил показано на рисунку 1.7, б.

Задача 5

Побудувати епюру крутних моментів M_K у валі, який показаний на рисунку 1.8, а.

Вал вільно обертається на шарнірних опорах А та F, тому у них не виникають реакції.

Розіб'ємо вал на ділянки, як показано на рисунку 1.8, а. Граничними точками ділянок є точки прикладення зовнішніх моментів та опорні точки.

При розрахунку крутних моментів M_K можливо відкидати будь-яку частину вала, оскільки опорні реакції відсутні. Проведемо на кожній ділянці довільний переріз та відкинемо, наприклад, ліву частину бруса. При визначенні величини та знаку M_K користуємось правилами п. 1.1.

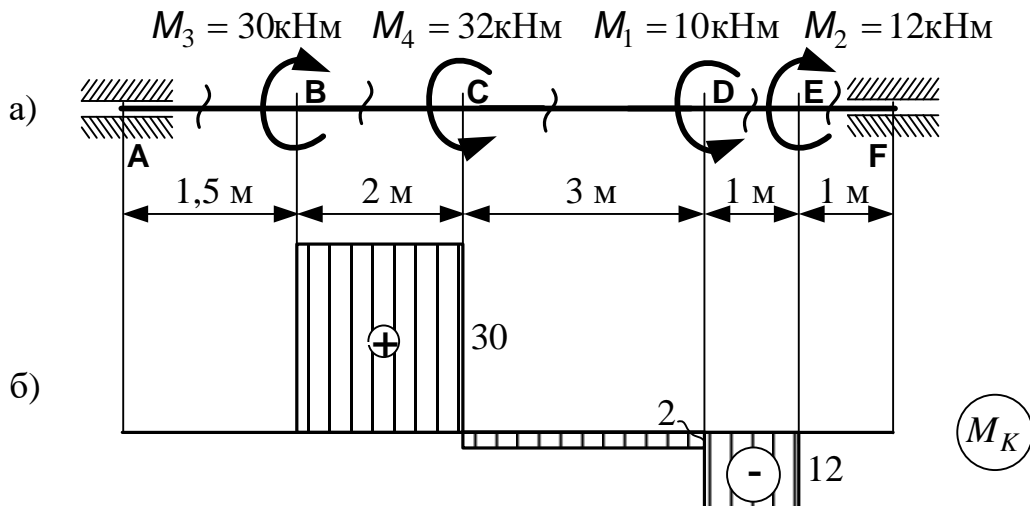


Рисунок 1.8 – Вал: розрахункова схема (а); епюра M_K (б)

Перед побудовою епюри зауважимо, що крутні моменти на ділянках АВ та EF відсутні (ліворуч від перерізу на ділянці АВ і праворуч від перерізу на ділянці EF відсутні моменти).

Визначаємо моменти на інших ділянках:

Ділянка DE:

$$M_{DE} = -M_2 = -12 \text{ кНм}.$$

Ділянка CD:

$$M_{CD} = -M_2 + M_1 = M_{DE} + M_1 = -12 + 10 = -2 \text{ кНм}.$$

Ділянка BC:

$$M_{BC} = -M_2 + M_1 + M_4 = M_{CD} + M_4 = -2 + 32 = 30 \text{ кНм}.$$

Ділянка АВ (визначимо на цій ділянці момент для перевірки того, що його розрахунок дає нуль; якщо нуль не буде отриманий, попередні розрахунки треба перевірити):

$$M_{AB} = -M_2 + M_1 - M_4 - M_3 = M_{BC} - M_3 = 0.$$

Отримані вирази показують, що

– крутні моменти є сталими на всіх ділянках, тому їх епюри є прямими, паралельними до осі бруса;

– на кожній наступній ділянці значення M_K можна отримати, додавши до попереднього значення зовнішній момент, прикладений на границі між ділянками. З цього видно, що границях між ділянками повинен бути стрибок, якій дорівнює

моменту, прикладеному на цій границі. Тобто виконується правило б, викладене у п. 1.2.

Епюру крутних моментів M_K показано на рисунку 1.8, б.

Задача 6

Побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q і згинальних моментів M у криволінійному брусі, який окреслений по дузі кола радіусу R (рисунок 1.9, а).

При визначенні внутрішніх зусиль у криволінійному стержні використовуються ті самі правила, що й для прямого стержня (п. 1.1).

У криволінійних стержнях, обкреслених по дузі кола, положення довільного перерізу доцільно визначати за допомогою полярної системи координат. Тоді вирази внутрішніх зусиль будуть подані як функції кута α (рисунок 1.9, а).

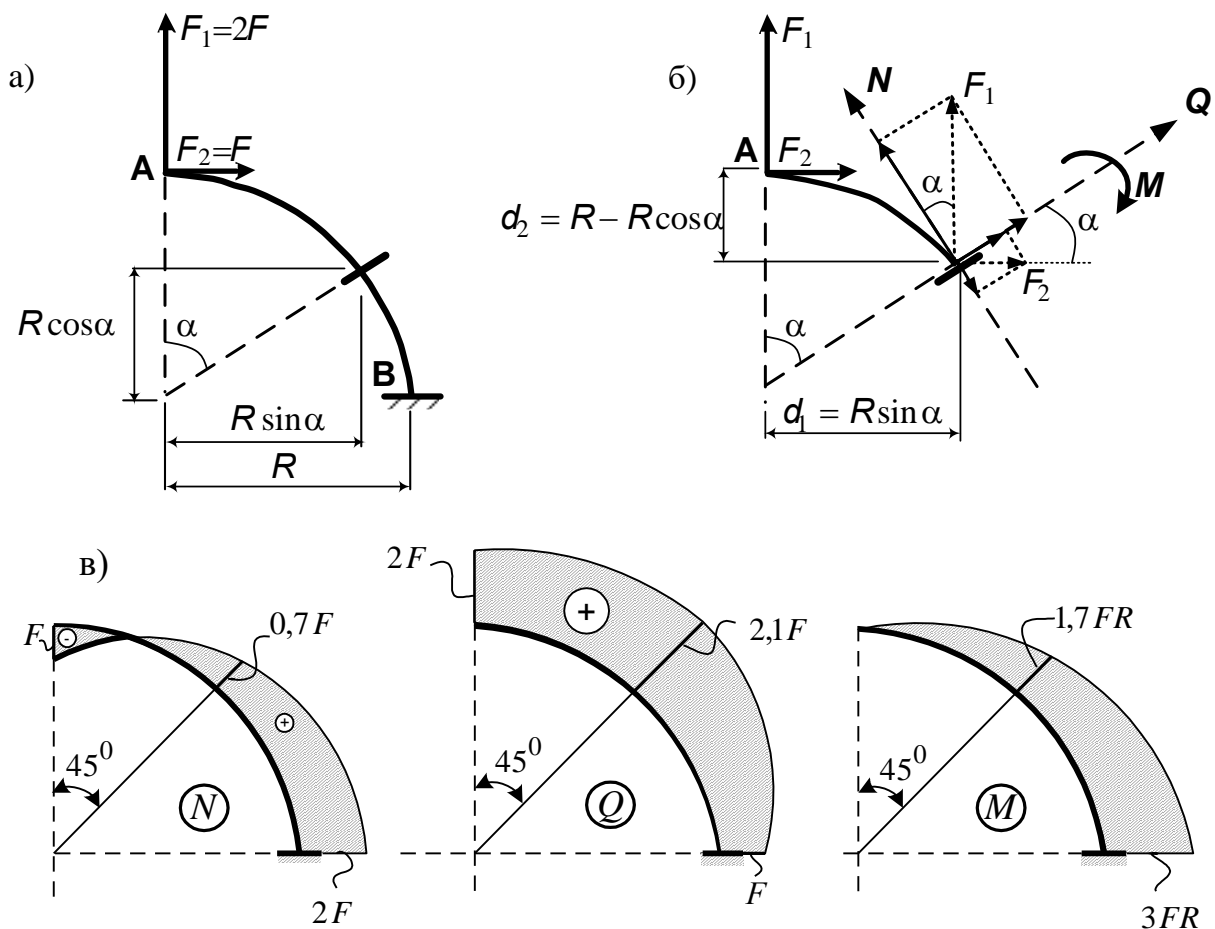


Рисунок 1.9 – До визначення зусиль у кривому стержні, окресленому по дузі окружності: розрахункова схема стержня (а); додатні напрямки зусиль у перерізі (б); епюри N , Q , M (в)

Цей стержень має одну ділянку, тому його можливо розрахувати без визначення реакцій.

Розсічемо стержень у перерізі під довільним кутом α і відкинемо його праву частину (рисунок 1.9, а). Врівноважимо залишену внутрішніми зусиллями N , Q , M . На рисунку 1.9, б показано додатні напрямки N , Q , M та проекції сил F_1 та F_2 на ці напрямки.

Запишемо вирази цих внутрішніх зусиль згідно з правилом п. 1.1:

$$N = F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha ;$$

$$Q = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha ;$$

$$M = d_1 F_1 + d_2 F_2 = F_1 R \sin \alpha + F_2 (R - R \cos \alpha).$$

Обчислимо значення N , Q , M при різних кутах α :

$$\text{при } \alpha = 0^\circ \text{ (т. А) } N = -F; \quad Q = 2F; \quad M = 0;$$

$$\text{при } \alpha = 45^\circ \quad N = 0,7F, \quad Q = 2,1F, \quad M = 1,7FR;$$

$$\text{при } \alpha = 90^\circ \text{ (т. В) } N = 2F, \quad Q = F, \quad M = 3FR .$$

Відкладемо отримані значення внутрішніх зусиль по нормалі до осі (тобто вздовж радіусу у кожному перерізі). З'єднавши отримані точки кривими лініями, побудуємо епюри N , Q і M (рисунок 1.9, в).

Для перевірки епюр використовуються такі властивості епюр N , Q , M для кругових стержнів:

1) у перерізах, де $Q=0$, на епюрах N і M є екстремуми, тобто дотичні до епюр паралельні дотичним до осі стержня в цих перерізах;

2) у перерізах, де $N=0$, на епюрі Q є екстремуми (при відсутності розподіленого навантаження q).

Для перевірки правильності складання виразів для N , Q і M при згині кругового криволінійного стержня використовуються залежності:

$$\frac{dN}{d\alpha} = Q : \quad \frac{dN}{d\alpha} = F_1 \cos\alpha + F_2 \sin\alpha = Q ;$$

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -N - qR : \quad \frac{dQ}{d\alpha} = -F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha = -N \quad (q=0);$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = QR : \quad \frac{dM}{d\alpha} = F_1 R \cos\alpha + F_2 R \sin\alpha = QR .$$

2 РОЗРАХУНКИ НА РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСК

2.1 Загальні положення

При розтяганні та стиску (рисунок 2.1, а) у довільному перерізі бруса виникає *поздовжня сила* N . Додатною вважається розтягувальна сила (див. п. 1.1).

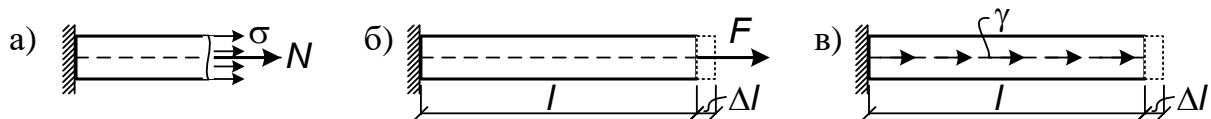


Рисунок 2.1 – Розтягання-стиск: поздовжня сила N та нормальне напруження σ (а); абсолютне подовження Δl (б, в)

При розтяганні та стиску у поперечному перерізі бруса виникає *нормальне напруження* σ (рисунок 2.1, а), яке дорівнює

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де A – площа перерізу.

Умова міцності при розтяганні та стиску:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (2.2)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження.

Абсолютне подовження Δl (зміна довжини) бруса під дією зосередженої сили F (рисунок 2.1, б) дорівнює

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad (2.3)$$

Якщо сила прикладена не на кінці бруса, то як l береться відстань від точки прикладення сили до защемлення.

Абсолютне подовження Δl бруса під дією розподіленого навантаження γ (наприклад, власної ваги) (рисунок 2.1, в) дорівнює

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (2.4)$$

Якщо брус має ділянки з різними жорсткостями AE (тобто з різними площами A або модулями пружності E), то визначається подовження кожної ділянки окремо і результати додаються

(принцип незалежності дії сил).

2.2 Приклади розрахунків на розтягання та стиск

Задача 1

Для заданої розрахункової схеми стержневої системи (рисунок 2.2) потрібно з умови міцності визначити діаметри круглих перерізів сталевих стержнів d , на яких висить абсолютно жорстка балка. Допустиме напруження сталі $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

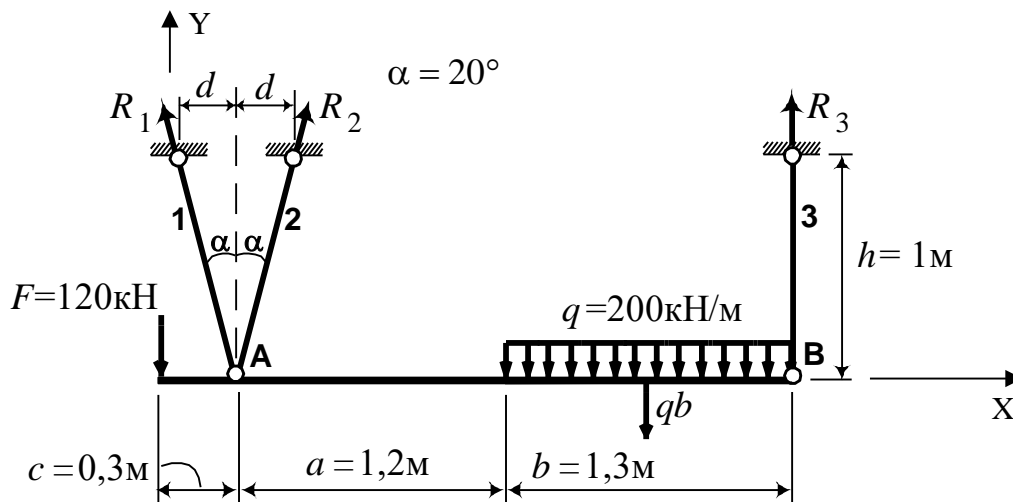


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема стержневої системи та реакції у закріпленнях

Розмір перерізу кожного стержня визначаємо з умови міцності (2.2)

$$\frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma], \quad i = 1, 2, 3,$$

звідки

$$A_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Підставивши в цей вираз площу круглого перерізу $A_i = \pi D_i^2 / 4$, одержимо

$$D_1 \geq \sqrt{\frac{4N_1}{\pi[\sigma]}}, \quad D_2 \geq \sqrt{\frac{4N_2}{\pi[\sigma]}}, \quad D_3 \geq \sqrt{\frac{4N_3}{\pi[\sigma]}}. \quad (2.5)$$

Поздовжня сила в кожному стержні дорівнює опорній реакції: $N_i = R_i$, $i = 1, 2, 3$. Для визначення реакцій використовуємо

такі рівняння рівноваги:

1) $\sum X = 0: R_1 \sin \alpha - R_2 \sin \alpha = 0$ (проекція R_1 на вісь X рівна $R_1 \sin \alpha$),
звідки

$$R_1 = R_2;$$

2) $\sum M_A = 0: Fc - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) + R_3(a + b) = 0;$ $0,3F - 1,3 \cdot 1,85q + 2,5R_3 = 0,$

звідки

$$R_3 = \frac{1,3 \cdot 1,85q - 0,3F}{2,5} = \frac{1,3 \cdot 1,85 \cdot 200 - 0,3 \cdot 120}{2,5} = 178 \text{ кН};$$

3) $\sum Y = 0: R_3 + R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \alpha - F - qb = R_3 + 2R_1 \cos \alpha - F - qb = 0$

(проекція R_1 на вісь Y дорівнює $R_1 \cos \alpha$),

звідки

$$R_1 = R_2 = \frac{-R_3 + F + qb}{2 \cos \alpha} = \frac{-178 + 120 + 1,3 \cdot 200}{2 \cdot 0,94} = 107,45 \text{ кН}.$$

Перевірка правильності визначення реакцій з урахуванням рівності $R_1 = R_2$:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= F \cdot 2,8 - R_1 \cos \alpha \cdot (2,5 + d) - R_2 \cos \alpha \cdot (2,5 - d) + qb \frac{b}{2} = \\ &= F \cdot 2,8 - 5 \cdot 0,94 \cdot R_1 + q \frac{b^2}{2} = 120 \cdot 2,8 - 5 \cdot 0,94 \cdot 107,45 + 200 \cdot \frac{1,69}{2} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, визначено поздовжні сили:

$$N_1 = N_2 = R_1 = R_2 = 107,45 \text{ кН}; \quad N_3 = R_3 = 178 \text{ кН}.$$

За формулою (2.5) знаходимо діаметри стержнів:

$$D_1 = D_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 107,45 \text{ кН}}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,0293 \text{ м} = 2,93 \text{ см};$$

$$D_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 178 \text{ кН}}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,0376 \text{ м} = 3,76 \text{ см}.$$

Зауваження. Якщо стержнева система являє собою три стержні, шарнірно з'єднані в одній точці, то розв'язок збігається з

наведеним. Реакції визначаються з умов $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$.

Задача 2

Дано розрахункову схему сталевого східчастого бруса (рисунок 2.3, а). З урахуванням власної ваги бруса і діючих навантажень побудувати епюри поздовжніх зусиль і нормальних напружень, а також визначити переміщення його вільного кінця. Зробити висновок про міцність бруса. Прийняти: питома вага сталі $\gamma = 80 \text{ кН/м}^3$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

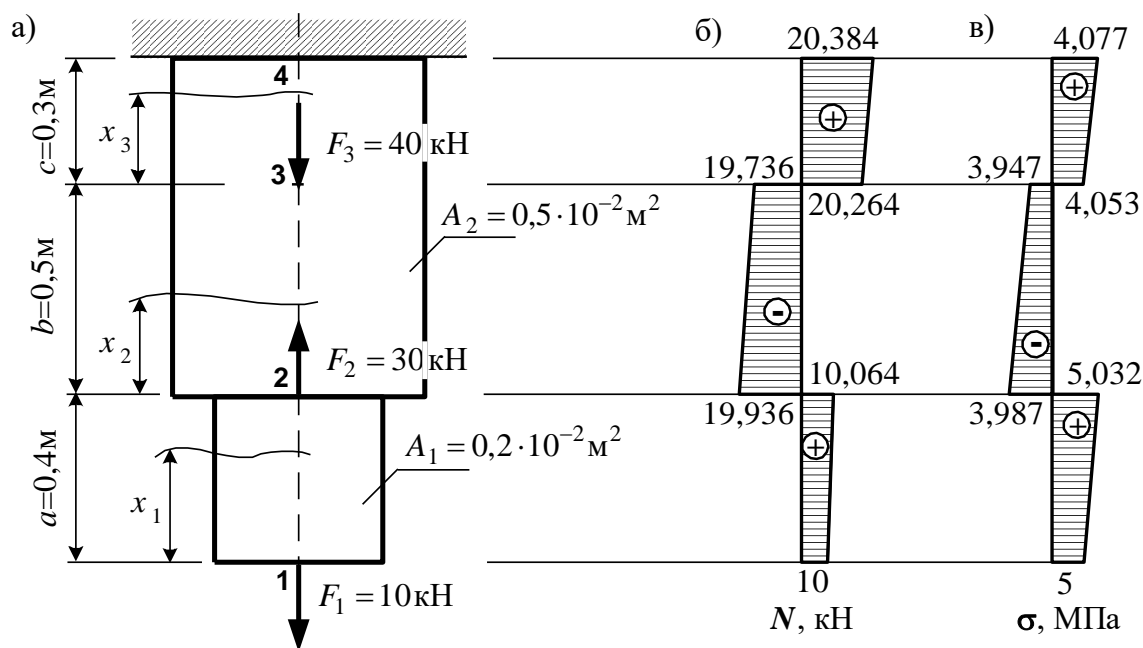


Рисунок 2.3 – Східчастий брус: розрахункова схема бруса; (а) епюра поздовжніх сил (б); епюра нормальних напружень (в)

Для визначення поздовжніх сил і їх знаків користуємося правилами, сформульованими в пп. 1.1 – 1.3.

Розбиваємо вісь бруса на ділянки, границями яких є точки прикладення зосереджених сил і граничні точки бруса. При визначенні поздовжніх сил на кожній ділянці проводимо довільний перетин і відкидаємо верхню частину бруса, оскільки не обчислені заздалегідь реакції в защемленні (рисунок 2.3, а).

Ділянка 1-2. $0 \leq x_1 \leq 0,4 \text{ м}$:

$$N(x_1) = F_1 + x_1 A_1 \gamma, \quad (2.6)$$

де $x_1 A_1$ – об'єм залишеної частини бруса (знизу від перерізу), $x_1 A_1 \gamma$ – вага цієї частини бруса.

Рівняння (2.6) є лінійним, тому епюра поздовжньої сили є похилою прямою. Тангенс кута нахилу цієї прямої дорівнює множнику при x_1 , тобто $A_1\gamma$.

За формулою (2.6) одержуємо значення N в граничних точках ділянки 1-2:

$$\text{т. 1 } x_1 = 0: \quad N_1 = F_1 = 10 \text{ кН};$$

$$\text{т. 2 } x_1 = 0,4 \text{ м}: \quad N_1 = 10 + 0,4 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2} \cdot 80 = 10,064 \text{ кН}.$$

Отримані значення відкладаємо перпендикулярно до осі елемента (додатні значення – вправо від осі) і з'єднуємо прямою лінією (рисунок 2.3, б).

Нормальне напруження на ділянці, згідно з (2.1), дорівнює

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A_1} = \frac{F_1}{A_1} + x_1\gamma. \quad (2.7)$$

Це рівняння прямої, нахиленої до осі під кутом, тангенс якого дорівнює γ . Обчислюємо напруження в крайніх точках ділянки:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10 \text{ кН}}{0,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} 10^{-3} = 5 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{10,064 \text{ кН}}{0,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} 10^{-3} = 5,032 \text{ МПа}.$$

Отримані значення відкладаємо перпендикулярно до осі елемента і з'єднуємо прямою лінією (рисунок 2.3, в).

Ділянка 2-3. $0 \leq x_2 \leq 0,5 \text{ м}$:

$$N(x_2) = F_1 + 0,4A_1\gamma - F_2 + x_2A_2\gamma. \quad (2.8)$$

Рівняння (2.8) – це рівняння прямої, нахиленої до осі під кутом, тангенс якого дорівнює $A_2\gamma$. Порівняння (2.6) і (2.8) показує, що кути нахилу епюр N на ділянках з різними площами перерізів є різними. Співвідношення кутів приблизно дорівнює співвідношенню площ поперечних перерізів. Це повинно бути відображено на епюрі.

З формули (2.8) одержуємо значення N в граничних точках ділянки 2-3:

$$\text{т. 2 } x_2 = 0: \quad N_2 = 10,064 - 30 = -19,936 \text{ кН};$$

$$\text{т. 3 } x_2 = 0,5 \text{ м}: \quad N_3 = 10,064 - 30 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 80 = -19,736 \text{ кН}.$$

Отримані значення відкладаємо перпендикулярно осі елемента і з'єднуємо прямою лінією (рисунок 2.3, б).

Нормальне напруження на ділянці, згідно з (2.1), дорівнює

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A_2} = \frac{F_1 + 0,4A_1\gamma - F_2}{A_2} + x_2\gamma. \quad (2.9)$$

Це рівняння прямої, нахиленої до осі під кутом, тангенс якого дорівнює γ , як і на ділянці 1-2. Таким чином, кут нахилу епюри σ не залежить від площі поперечного перерізу.

Обчислюємо напруження в крайніх точках ділянки:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-19,936 \text{ кН}}{0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} 10^{-3} = -3,99 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-19,736 \text{ кН}}{0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} 10^{-3} = -3,95 \text{ МПа}.$$

Отримані значення відкладаємо перпендикулярно осі елемента та з'єднуємо прямою лінією (рисунок 2.3, в).

Ділянка 3-4. $0 \leq x_3 \leq 0,3 \text{ м}$:

$$N(x_3) = F_1 - F_2 + 0,4A_1\gamma + 0,5A_2\gamma + F_3 + x_3A_2\gamma. \quad (2.10)$$

Обчислюємо значення N в крайніх точках ділянки, відкладаємо їх перпендикулярно від осі та з'єднуємо отримані ординати прямою під тим самим кутом, як на ділянці 2-3 (рисунок 2.3, б):

$$\text{т. 3 } x_3 = 0: \quad N_3 = 19,736 + 40 = 20,264 \text{ кН};$$

$$\text{т. 4 } x_3 = 0,3 \text{ м}: \quad N_4 = 20,264 + 0,3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 80 = 20,384 \text{ кН}.$$

Нормальні напруження на ділянці:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{20,264 \text{ кН}}{0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} 10^{-3} = 4,052 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{20,384 \text{ кН}}{0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} 10^{-3} = 4,076 \text{ МПа}.$$

З'єднуємо отримані ординати прямою під кутом γ .

Перевірка. На епюрі N в точках прикладення зосереджених сил отримані стрибки на величину та за напрямком цих сил, як і

має бути згідно з правилами п. 1.2.

Перевіряємо *міцність бруса* за умовою (2.2), де σ_{\max} береться з епюри σ : $\sigma_{\max} = 5,032 \text{ МПа} < [\sigma]$.

Визначимо *переміщення вільного кінця* бруса, тобто абсолютне подовження бруса Δl . Воно складається з подовження під дією зосереджених сил Δ_F та подовження під дією власної ваги Δ_G :

$$\Delta l = \Delta_F + \Delta_G. \quad (2.11)$$

Подовження під дією зосереджених сил Δ_F визначаємо за формулою (2.3) для кожної сили окремо і результати додаємо. При цьому подовження ділянок з різними площами визначаються окремо (подовження від стискальної сили є від'ємним):

$$\Delta_F = \frac{F_1 a}{EA_1} + \frac{F_1(b+c)}{EA_2} - \frac{F_2(b+c)}{EA_2} + \frac{F_3 c}{EA_2}.$$

Подовження під дією власної ваги Δ_G визначаємо за формулою. Воно складається з трьох складових: подовження нижньої частини під дією власної ваги (2.4); подовження верхньої частини під дією власної ваги (2.4); подовження верхньої частини від зосередженої сили, яка дорівнює вазі нижньої частини бруса $aA_1\gamma$ (формула (2.3)):

$$\Delta_G = \frac{\gamma a^2}{2E} + \frac{\gamma(b+c)^2}{2E} + \frac{(aA_1\gamma)(b+c)}{EA_2}.$$

Підставляємо дані у (2.11) (множники E та 10^{-2} виносимо за дужки):

$$\Delta l = \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 10^{-2}} \left(\frac{10 \text{кН} \cdot 0,4 \text{м}}{0,2 \text{м}^2} + \frac{10 \text{кН} \cdot 0,8 \text{м}}{0,5 \text{м}^2} - \frac{30 \text{кН} \cdot 0,8 \text{м}}{0,5 \text{м}^2} + \frac{40 \text{кН} \cdot 0,3 \text{м}}{0,5 \text{м}^2} \right)}_{\Delta F} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}} \left[\frac{80 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3} 0,4^2 \text{м}^2}{2} + \frac{80 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3} 0,8^2 \text{м}^2}{2} + \frac{\left(0,4 \text{м} \cdot 0,2 \cdot 10^{-2} \text{м}^2 80 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3} \right) \cdot 0,8 \text{м}}{0,5 \text{м}^2} \right]}_{\Delta G} =$$

$$= 6 \cdot 10^{-6} \text{м} + 0,21 \cdot 10^{-6} \text{м} = 6,21 \cdot 10^{-6} \text{м} = 6,21 \cdot 10^{-3} \text{мм}.$$

Задача 3

Дано розрахункову схему східчастого чавунного бруса, який зазнає дію зосереджених сил та перепаду температур $\Delta t = 25^\circ$ (рисунок 2.4, а). Для даної статично невизначної системи побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень; перевірити міцність усіх ступенів бруса. Допустимі напруження для чавуна при розтяганні $[\sigma]_p = 60 \text{МПа}$, при стиску $[\sigma]_c = 120 \text{МПа}$; модуль пружності $E = 1,2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$; температурний коефіцієнт лінійного розширення чавуна $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.

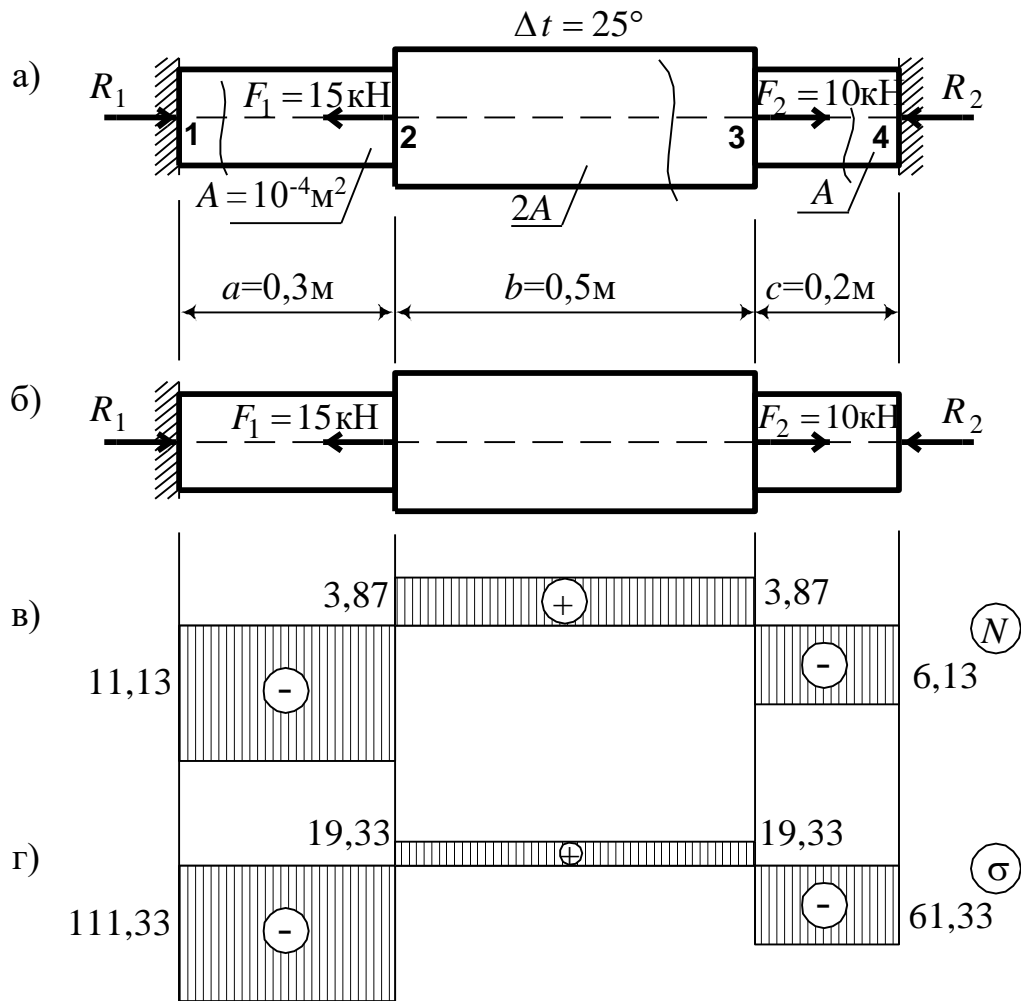


Рисунок 2.4 – Східчастий чавунний брус під дією перепаду температур: розрахункова схема (а); схема з відкинутим правим защемленням (б); епюра поздовжніх сил N , кН (в); епюра нормальних напружень σ , МПа (в)

При визначенні поздовжніх сил ліворуч чи праворуч будь-якого перерізу залишиться одна з опорних реакцій (рисунок 2.4, а). Тому їх необхідно визначити. Для цього спроектуємо всі сили на вісь стержня:

$$\sum_X = 0: R_1 - F_1 + F_2 - R_2 = 0. \quad (2.12)$$

Всі інші рівняння рівноваги у даному випадку завантаження виконуються тотожно. Отже, для визначення двох реакцій маємо одне рівняння, тому ця система є *статично невизначною*.

При розв'язанні таких задач, окрім умов рівноваги, використовують умови деформації елемента. Відкинемо подумки одне з закріплень (праворуч), залишивши реакцію цього закріплення як невідому силу (рисунок 2.4, б). Під дією

додатного перепаду температур та зовнішніх сил брус без закріплення буде подовжуватися. Але вихідний брус (рисунок 2.4, а) закріплений з двох боків, тому його довжина не повинна мінятися:

$$\Delta l = 0. \quad (2.13)$$

Отже, для визначення двох реакцій отримано два рівняння (2.12), (2.13).

Запишемо (2.13) більш докладно. Подовження Δl складається з подовження від дії зосереджених сил Δ_F (2.3) та від перепаду температур Δ_T . Їх можна задати окремо згідно з принципом незалежності дії сил:

$$\Delta l = \underbrace{\left[-\frac{R_2 c}{EA} - \frac{R_2 b}{2EA} - \frac{R_2 a}{EA} + \frac{F_2 b}{2EA} + \frac{F_2 a}{EA} - \frac{F_1 a}{EA} \right]}_{\Delta_F} + \underbrace{\alpha l \Delta t}_{\Delta_T} = 0,$$

тобто

$$-0,75R_2 + 0,55F_2 - 0,3F_1 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 25 \cdot EA = 0,$$

$$-0,75R_2 + 5,5 - 4,5 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 25 \cdot 1,2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4} = -0,75R_2 + 1 + 3,6 = 0,$$

$$R_2 = 4,6/0,75 = 6,133 \text{ кН}.$$

Реакцію R_1 визначаємо з (2.12):

$$R_1 = F_1 - F_2 + R_2 = 11,133 \text{ кН}.$$

Для визначення *поздовжніх сил* N на кожній ділянці проводимо довільний переріз і відкидаємо одну з частин бруса.

Ділянка 1-2. Відкидаємо праву частину бруса:

$$N_{1-2} = -R_1 = -11,13 \text{ кН}.$$

Нормальні напруження за (2.1) дорівнюють

$$\sigma_{1-2} = \frac{N_{1-2}}{A} = -\frac{11,13 \text{ кН}}{10^{-4} \text{ м}^2} 10^{-3} = -111,33 \text{ МПа}.$$

Ділянка 2-3. Відкидаємо праву частину бруса:

$$N_{2-3} = -R_1 + F_1 = 3,87 \text{ кН}.$$

Нормальні напруження за (2.1) дорівнюють

$$\sigma_{2-3} = \frac{N_{2-3}}{2A} = \frac{3,87 \text{ кН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} 10^{-3} = 19,33 \text{ МПа} .$$

Ділянка 3-4. Відкидаємо ліву частину бруса:

$$N_{3-4} = -R_2 = -6,13 \text{ кН} .$$

Нормальні напруження за (2.1) дорівнюють

$$\sigma_{3-4} = \frac{N_{3-4}}{A} = -\frac{6,13 \text{ кН}}{10^{-4} \text{ м}^2} 10^{-3} = -61,333 \text{ МПа} .$$

За отриманими значеннями N та σ будуюмо їх епюри. На кожній ділянці N та σ є сталими, тому їх епюри є прямими, які паралельні до осі бруса (рисунки 2.4, в, г).

Перевірка. На епюрі N в точках прикладення зосереджених сил отримані стрибки на величину та за напрямком цих сил, як і має бути згідно з правилами п. 1.2.

Міцність бруса перевіряємо за умовою міцності (2.2):

$$|\sigma_{1-2}| = 111,33 \text{ МПа} < [\sigma]_c ;$$

$$\sigma_{2-3} = 19,33 \text{ МПа} < [\sigma]_p ;$$

$$|\sigma_{3-4}| = 61,33 \text{ МПа} < [\sigma]_c .$$

Отже, умова міцності виконується для усіх частин бруса.

Задача 4

Дано розрахункову схему східчастого чавунного бруса, який виконано неточно (між правою гранню та опорою є зазор $\Delta = 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, рисунок 2.5, а). Для даної статично невизначної системи побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень; перевірити міцність усіх ступенів бруса. Допустимі напруження для чавуна при розтяганні $[\sigma]_p = 60 \text{ МПа}$, при стиску $[\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$; модуль пружності $E = 1,2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$.

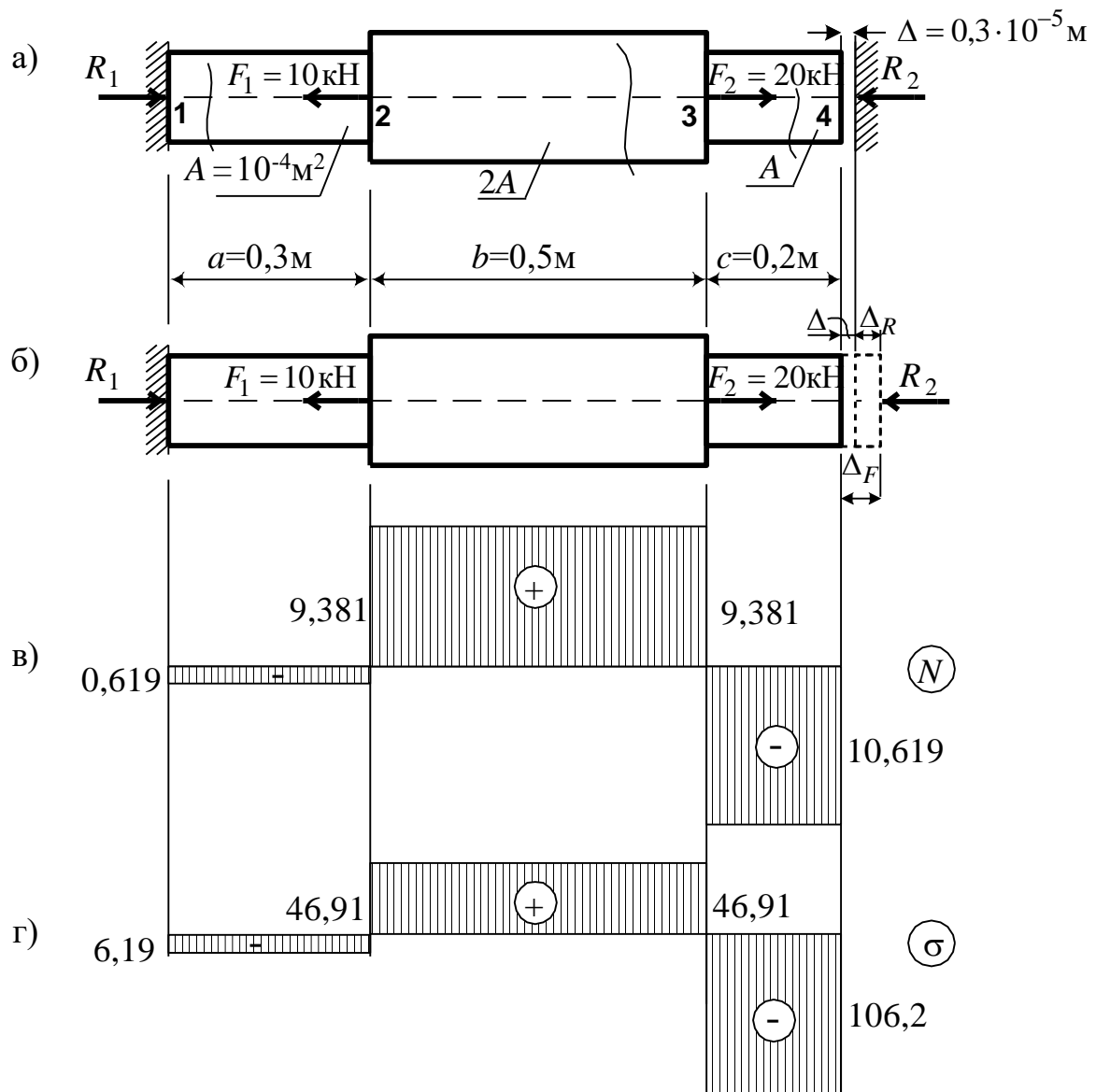


Рисунок 2.5 – Східчастий чавунний брус, виконаний з похибкою: розрахункова схема (а); схема деформування бруса зі звільненням правим кінцем (б); епюра N , кН (в); епюра σ , МПа (г)

При визначенні поздовжніх сил ліворуч чи праворуч будь-якого перерізу залишиться одна з опорних реакцій (рисунок 2.5, а). Тому їх необхідно визначити. Для цього спроекуємо всі сили на вісь стержня:

$$\sum_X = 0: R_1 - F_1 + F_2 - R_2 = 0. \quad (2.14)$$

Всі інші рівняння рівноваги у даному випадку завантаження виконуються тотожно. Отже, для визначення двох реакцій маємо одне рівняння, тому ця система є *статично невизначною*.

Як у попередній задачі, окрім умов рівноваги, використовують умови деформації елемента. Відкинемо подумки закріплення з того боку, де є зазор з елементом. Реакцію цього закріплення залишимо як невідому силу (рисунок 2.5, б). Під дією зовнішніх сил брус без закріплення подовжиться на Δ_F , а під дією реакції R_2 скоротиться на Δ_R . Сумарна зміна довжини, згідно з принципом незалежності дії сил, дорівнює $\Delta_F - \Delta_R$. Після цього, щоб виправити похибку виготовлення, права грань елемента повинна упертися у защемлення. Тому сумарне подовження Δl повинно дорівнювати Δ (рисунок 2.5, б):

$$\Delta l = \Delta_F - \Delta_R = \Delta. \quad (2.15)$$

Отже, для визначення двох реакцій отримано два рівняння (2.14), (2.15).

Запишемо (2.15) більш докладно (при використанні (2.3) довжину Δ не враховуємо):

$$\Delta_F - \Delta_R = \underbrace{\left[\frac{F_2 b}{2EA} + \frac{F_2 a}{EA} - \frac{F_1 a}{EA} \right]}_{\Delta_F} - \underbrace{\left[\frac{R_2 c}{EA} + \frac{R_2 b}{2EA} + \frac{R_2 a}{EA} \right]}_{\Delta_R} = \Delta,$$

тобто

$$0,55F_2 - 0,3F_1 - 0,75R_2 = \Delta \cdot EA ;$$

$$11 - 3 - 0,75R_2 = 0,3 \cdot 10^{-5} \cdot 1,2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4};$$

$$R_2 = (8 - 0,036)/0,75 = 10,619 \text{ кН}.$$

Реакцію R_1 визначаємо з (2.14):

$$R_1 = F_1 - F_2 + R_2 = 0,619 \text{ кН}.$$

Для визначення *подовжніх сил* N на кожній ділянці проводимо довільний переріз і відкидаємо одну з частин бруса.

Ділянка 1-2. Відкидаємо праву частину бруса:

$$N_{1-2} = -R_1 = -0,619 \text{ кН}.$$

Нормальні напруження за (2.1) дорівнюють

$$\sigma_{1-2} = \frac{N_{1-2}}{A} = -\frac{0,619 \text{ кН}}{10^{-4} \text{ м}^2} 10^{-3} = -6,19 \text{ МПа}.$$

Ділянка 2-3. Відкидаємо праву частину бруса:

$$N_{2-3} = -R_1 + F_1 = 9,381 \text{ кН}.$$

Нормальні напруження за (2.1) дорівнюють

$$\sigma_{2-3} = \frac{N_{2-3}}{2A} = \frac{9,381 \text{ кН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} 10^{-3} = 46,91 \text{ МПа}.$$

Ділянка 3-4. Відкидаємо ліву частину бруса:

$$N_{3-4} = -R_2 = -10,619 \text{ кН}.$$

Нормальні напруження за (2.1) дорівнюють

$$\sigma_{3-4} = \frac{N_{3-4}}{A} = -\frac{10,619 \text{ кН}}{10^{-4} \text{ м}^2} 10^{-3} = -106,2 \text{ МПа}.$$

За отриманими значеннями N та σ будемо їх епюри. На кожній ділянці N та σ є сталими, тому їх епюри є прямими, які паралельні до осі бруса (рисунки 2.5, в, г).

Перевірка. На епюрі N в точках прикладення зосереджених сил отримані стрибки на величину та за напрямком цих сил, як і має бути згідно з правилами п. 1.2.

Міцність бруса перевіряємо за умовою міцності (2.2):

$$|\sigma_{1-2}| = 6,19 \text{ МПа} < [\sigma]_c;$$

$$\sigma_{2-3} = 46,91 \text{ МПа} < [\sigma]_p;$$

$$|\sigma_{3-4}| = 106,2 \text{ МПа} < [\sigma]_c.$$

Отже, умова міцності виконується для усіх частин бруса.

Задача 5

Дано розрахункову схему статично невизначної стержневої системи (рисунок 2.6, а), причому закріплена балка вважається абсолютно жорсткою. Визначити з умови міцності при розтяганні площі поперечних перерізів сталевих стержнів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

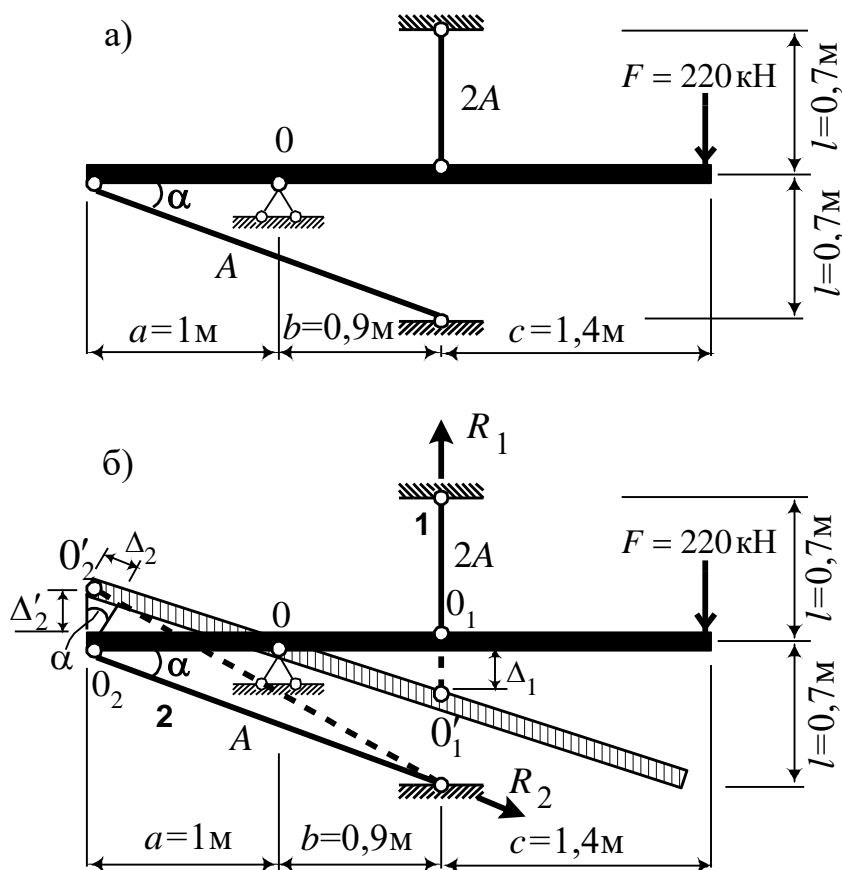


Рисунок 2.6 – Статично невизначна стержнева система: розрахункова схема (а); схема деформування бруса (б)

Розмір перерізу кожного стержня визначаємо з умови міцності (2.2):

$$\frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma], \quad i = 1, 2.$$

звідки

$$A_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}, \quad i = 1, 2. \quad (2.16)$$

Поздовжня сила в кожному стержні дорівнює опорній реакції: $N_i = R_i$, $i = 1, 2$ (рисунок 2.6, б). Для визначення реакцій використовуємо рівняння рівноваги

$$\sum M_0 = 0: R_2 b + R_1 a \sin \alpha - F(b + c) = 0, \quad (2.17)$$

де $a \sin \alpha$ – плече сили R_1 відносно точки 0.

Маємо одне рівняння для визначення двох реакцій. Якщо додати рівняння $\sum Y = 0$, то у нього увійде третя, вертикальна реакція на опорі 0. Тобто число реакцій у даній схемі перевищує число рівнянь рівноваги, і ця схема є статично невизначною. Потрібне ще одне рівняння.

Для одержання ще однієї умови розглянемо, як раніше (в задачах 3 та 4), схему деформування системи та сформулюємо умову сумісності деформацій стержнів системи.

Під дією сили F балка повернеться навколо шарнірної опори 0. Нове положення стержнів показане пунктиром на рисунку 2.6, б. При зміщенні точки O_1 стержень 1 розтягнеться на величину Δ_1 . Лівий кінець стержня 2 потягнеться за балкою, зайнявши положення O'_2 , що викличе його подовження на Δ_2 . В силу малості деформацій кути вважаємо незмінними.

Використаємо умову подібності трикутників $OO_1O'_1$ та $OO_2O'_2$:

$$\frac{\Delta_1}{b} = \frac{\Delta'_2}{a}, \quad \Delta'_2 = \Delta_2 \sin \alpha,$$

тому

$$\frac{\Delta_1}{b} = \frac{\Delta_2 \sin \alpha}{a}. \quad (2.18)$$

Згідно з (2.3) для подовжень Δ_1 та Δ_2 маємо

$$\Delta_1 = \frac{R_1 l}{2EA}; \quad \Delta_2 = \frac{R_2}{EA} \frac{l}{\sin \alpha}, \quad (2.19)$$

де $\frac{l}{\sin \alpha}$ – початкова довжина стержня 2.

Підставивши (2.19) у (2.18), отримаємо

$$\frac{R_1 l}{2EAb} = \frac{R_2 l}{EA \sin \alpha} \frac{\sin \alpha}{a},$$

$$R_2 = \frac{a}{2b} R_1. \quad (2.20)$$

Враховуючи (2.20), з умови рівноваги маємо

$$\frac{a}{2b} R_1 b + R_1 a \sin \alpha - F(b + c) = 0. \quad (2.21)$$

З геометрії системи

$$\operatorname{tg} \alpha = l / (a + b) = 0,368,$$

звідки

$$\sin \alpha = 0,345.$$

Підставляючи це значення у (2.21), маємо

$$R_1 \cdot 1 \cdot 0,5 + R_1 \cdot 1 \cdot 0,345 = 220 \cdot 2,3 = 0,$$

$$R_1 = \frac{220 \cdot 2,3}{0,845} = 598,8 \text{ кН}.$$

З співвідношення (2.20)

$$R_2 = \frac{a}{2b} R_1 = 332,7 \text{ кН}.$$

Згідно (2.16) визначаємо площі поперечних перерізів стержнів:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{R_1}{[\sigma]} = \frac{598,8 \text{ кН}}{160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}} = 0,37 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{R_2}{[\sigma]} = \frac{332,7 \text{ кН}}{160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}} = 0,21 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

3 ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКОГО СКЛАДЕНОГО ПЕРЕРІЗУ

3.1 Основні формули для розрахунків

1 Якщо складений переріз складається з n складових частин, то *положення центру ваги* усього перерізу визначається за формулою

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y_i}}{A} = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2 + \dots + z_n A_n}{A}; \quad (3.1)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{z_i}}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_n A_n}{A}, \quad (3.2)$$

де z_c, y_c – координати центру ваги складеного перерізу відносно довільних заздалегідь обраних осей z, y ;

z_i, y_i – координати центру ваги i -ї складової частини перерізу відносно довільних осей z, y ; $i=1, 2, \dots, n$;

S_{z_i}, S_{y_i} – статичний момент i -ї складової частини перерізу відносно його центральних осей z_i, y_i ;

A_i – площа i -го складового перерізу;

A – площа усього складеного перерізу; $A = \sum_{i=1}^n A_i$.

2 Якщо $J_{z_i}, J_{y_i}, J_{z_i y_i}$ – осьові моменти інерції та відцентровий момент i -ї складової частини перерізу відносно його центральних осей z_i, y_i , то *моменти інерції та відцентровий момент цієї частини перерізу відносно центральних осей усього перерізу z_c, y_c дорівнюють* (рисунок 3.1)

$$J_{z_c}^{(i)} = J_{z_i} + b_i^2 A_i = J_{z_i} + (y_i - y_c)^2 A_i; \quad (3.3)$$

$$J_{y_c}^{(i)} = J_{y_i} + a_i^2 A_i = J_{y_i} + (z_i - z_c)^2 A_i; \quad (3.4)$$

$$J_{z_c y_c}^{(i)} = J_{z_i y_i} + a_i b_i A_i = J_{z_i y_i} + (z_i - z_c)(y_i - y_c) A_i, \quad (3.5)$$

де b_i – відстань між паралельними осями z_i та z_c ;
 a_i – відстань між паралельними осями y_i та y_c .

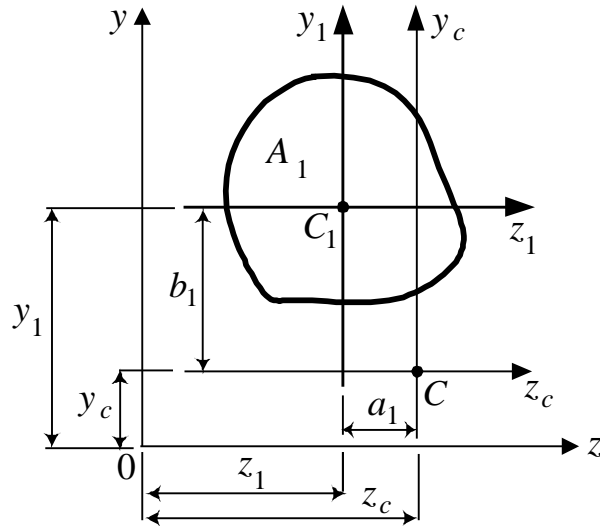


Рисунок 3.1 – До визначення моментів інерції при паралельному переносі осей

3 Якщо одна з центральних осей z_i, y_i є віссю симетрії, то відцентровий момент $J_{z_i y_i} = 0$. Отже, відцентрові моменти полоси, швелера та двотавра відносно їх центральних осей дорівнюють нулю.

4 Відцентровий момент кутника визначається за допомогою його головних моментів J_{\min}, J_{\max} , які наводяться у сортаменті (додаток Б). Якщо z_3, y_3 – центральні осі кутника, то

$$J_{z_3 y_3} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \cdot (\pm 1). \quad (3.6)$$

Знак (+1) чи (-1) у цій формулі визначається орієнтацією кутника у схемі (рисунок 3.2).

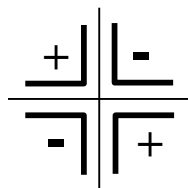


Рисунок 3.2 – До визначення знаку відцентрового моменту кутника

3.2 Приклад розв'язання задачі на визначення геометричних характеристик складеного перерізу

Для заданої розрахункової схеми плоского перерізу (рисунок 3.3) визначити положення центральних осей x_c, y_c ; моменти перерізу $J_{x_c}, J_{y_c}, J_{x_c y_c}$ відносно центральних осей; положення головних центральних осей u, v ; головні моменти інерції J_u, J_v . Складовими перерізу є лист 20×350 , рівнобічний кутник $80 \times 80 \times 6$, швелер № 16, як показано на рисунку 3.3.

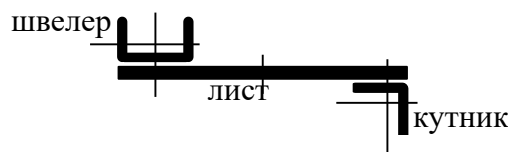


Рисунок 3.3 – Схематичне зображення складеного перерізу

Візьмемо з сортаменту (додаток Б) розміри швелера та кутника і зобразимо переріз у масштабі 1:2 (рисунок 3.4). Через z_1, y_1 позначено центральні осі швелера; z_2, y_2 – центральні осі листа; z_3, y_3 – центральні осі кутника.

Випишемо необхідні дані для складових перерізу (таблиця 3.1). Дані швелера і кутника беремо з таблиць сортаменту (додаток Б), а для листа обчислюємо за відомими формулами (лист – це прямокутник зі сторонами 35 та 2 см, додаток А).

Примітки

1 При запису даних враховуємо орієнтацію швелера. У сортаменті вертикальна вісь швелера (y) паралельна до довгої сторони, а у заданій схемі – перпендикулярна. Тобто осі у заданій схемі міняються містами по відношенню до сортаменту, і відповідно осьові моменти інерції теж треба поміняти містами, що і зроблено у таблиці вихідних даних.

2 Через z_0, y_0 позначено відстані від границі перерізу (швелера та кутника) до його центру ваги.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані для розрахунку перерізу

	Швелер № 16	Полоса 20×350	Кутник 80×80×6
Площі частин перерізу	$A_1 = 18,1 \text{ см}^2$	$A_2 = 2 \cdot 35 = 70 \text{ см}^2$	$A_3 = 9,38 \text{ см}^2$
Площа перерізу	$A = A_1 + A_2 + A_3 = 18,1 + 70 + 9,38 = 97,48 \text{ см}^2$		
Моменти інерції відносно центральних осей	$J_{z1} = 63,6 \text{ см}^4$	$J_{z2} = \frac{35 \cdot 2^3}{12} = 23,33 \text{ см}^4$	$J_{z3} = 57 \text{ см}^4$
	$J_{y1} = 747 \text{ см}^4$	$J_{y2} = \frac{2 \cdot 35^3}{12} = 7145,83 \text{ см}^4$	$J_{y3} = 57 \text{ см}^4$
Головні моменти інерції			$J_{\min} = 23,5 \text{ см}^4$ $J_{\max} = 94 \text{ см}^4$
Положення центрів ваги	$z_0^{(1)} = 1,8 \text{ см}$		$z_0^{(3)} = y_0^{(3)} = 2,19 \text{ см}$

Визначення центру ваги перерізу

Обираємо довільним чином осі координат z, y , наприклад, як показано на рисунку 3.4. Визначаємо координати центрів ваги кожної складової частини перерізу відносно цих осей, приймаючи до уваги, що вісь симетрії є центральною віссю:

$$z_1 = h_1/2 = 8 \text{ см}; \quad z_2 = b_2/2 = 17,5 \text{ см}; \quad z_3 = b_2 - z_0^{(3)} = 35 - 2,19 = 32,81 \text{ см};$$

$$y_1 = b_3 + h_2 + z_0^{(1)} = 8 + 2 + 1,8 = 11,8 \text{ см}; \quad y_2 = b_3 + h_2/2 = 9 \text{ см}; \quad y_3 = b_3 - z_0^{(3)} = 8 - 2,19 = 5,81 \text{ см}.$$

Координати центру ваги перерізу (3.1), (3.2)

$$z_c = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3}{A} = \frac{8 \cdot 18,1 + 17,5 \cdot 70 + 32,81 \cdot 9,38}{97,48} = 17,21 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A} = \frac{11,8 \cdot 18,1 + 9 \cdot 70 + 5,81 \cdot 9,38}{97,48} = 9,21 \text{ см}.$$

Відмічаємо точку з цими координатами відносно осей z, y і

проводимо через неї центральні осі перерізу x_c, y_c (рисунок 3.4).

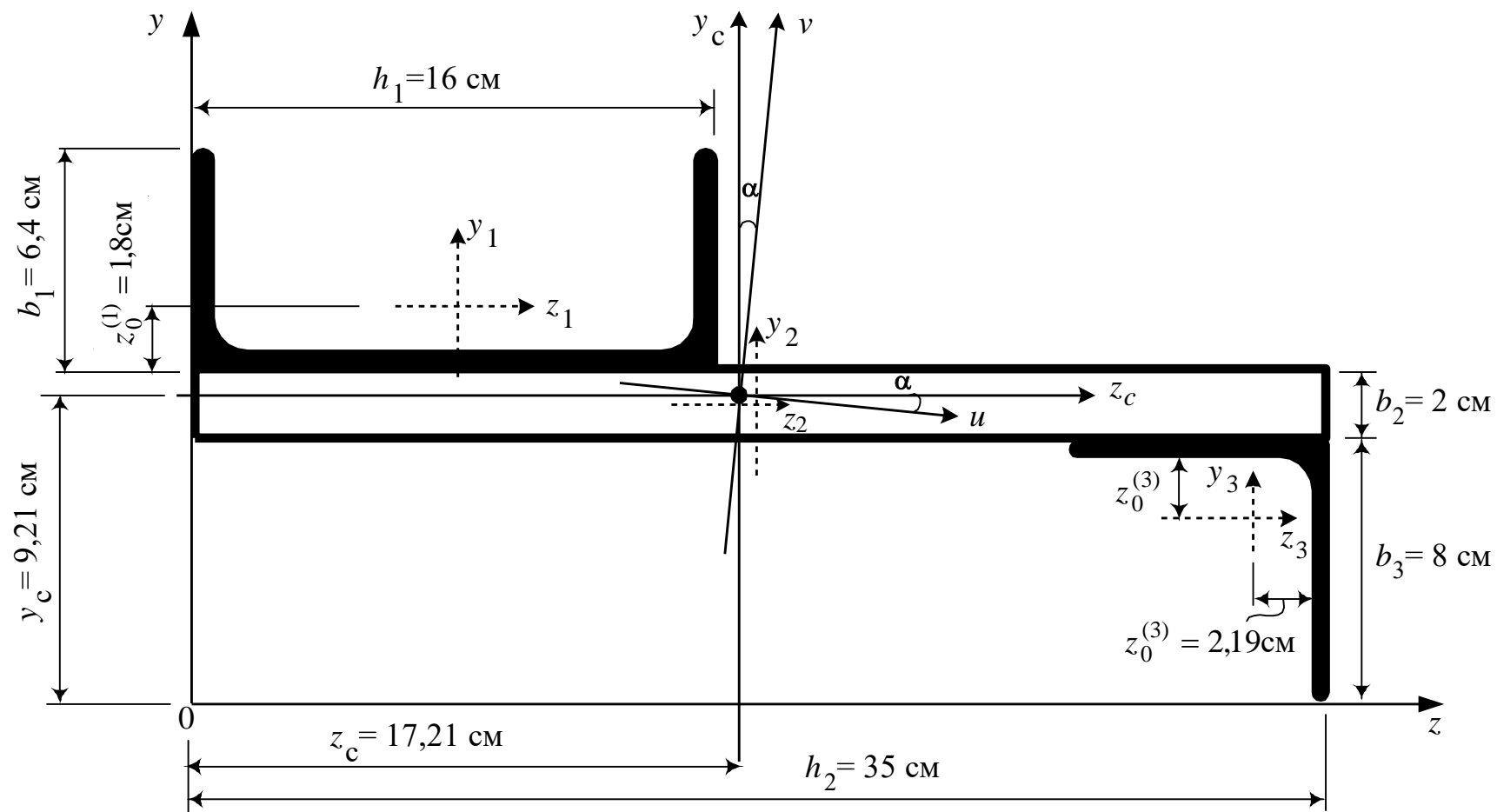


Рисунок 3.4 – Розрахункова схема складеного перерізу

Визначення осьових та відцентрового моментів інерції J_{x_c} , J_{y_c} , $J_{x_c y_c}$ відносно центральних осей перерізу

Момент інерції складеного перерізу дорівнює сумі моментів інерції його складових частин. Користуючись формулами (3.3), (3.4) і відомими значеннями координат центрів ваги і моментів інерції складових частин перерізу, маємо

$$\begin{aligned} J_{z_c} &= J_{z_c}^{(1)} + J_{z_c}^{(2)} + J_{z_c}^{(3)} = \\ &= [J_{z_1} + (y_1 - y_c)^2 A_1] + [J_{z_2} + (y_2 - y_c)^2 A_2] + [J_{z_3} + (y_3 - y_c)^2 A_3] = \\ &= [63,6 + (11,8 - 9,21)^2 18,1] + [23,33 + (9 - 9,21)^2 70] + [57 + (5,81 - 9,21)^2 9,38] = \\ &= 376,87 \text{ см}^4 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{y_c} &= J_{y_c}^{(1)} + J_{y_c}^{(2)} + J_{y_c}^{(3)} = \\ &= [J_{y_1} + (z_1 - z_c)^2 A_1] + [J_{y_2} + (z_2 - z_c)^2 A_2] + [J_{y_3} + (z_3 - z_c)^2 A_3] = \\ &= [747 + (8 - 17,21)^2 18,1] + [7145,83 + (17,5 - 17,21)^2 70] + \\ &\quad + [57 + (32,81 - 17,21)^2 9,38] = 11773,75 \text{ см}^4 . \end{aligned}$$

Відцентровий момент складеного перерізу також дорівнює сумі відцентрових моментів його складових частин. Згідно з правилами 3 п. 3.1, відцентрові моменти листа та швелера $J_{z_1 y_1} = J_{z_2 y_2} = 0$. Відцентровий момент кутника за формулою (3.6) та правилом знаків на рисунку 3.2 дорівнює

$$J_{z_3 y_3} = -\frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} = -\frac{94 - 23,5}{2} = -35,25 \text{ см}^4 .$$

З урахуванням сказаного визначаємо відцентровий момент складеного перерізу за формулою (3.5):

$$\begin{aligned} J_{z_c y_c} &= J_{z_c y_c}^{(1)} + J_{z_c y_c}^{(2)} + J_{z_c y_c}^{(3)} = \\ &= (z_1 - z_c)(y_1 - y_c) A_1 + (z_2 - z_c)(y_2 - y_c) A_2 + J_{z_3 y_3} + (z_3 - z_c)(y_3 - y_c) A_3 = \\ &= (8 - 17,21)(11,8 - 9,21) \cdot 18,1 + (17,5 - 17,21)(9 - 9,21) \cdot 70 - \\ &\quad - 35,25 + (32,82 - 17,21)(5,82 - 9,21) \cdot 9,38 = -968,78 \text{ см}^4 . \end{aligned}$$

Положення головних осей u, v

Кут нахилу головних осей відносно центральних визначається формулою

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = \frac{-2 \cdot 968,78}{11773,75 - 376,87} = -0,17;$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg}(-0,17) = -9,65^\circ;$$

$$\alpha = -9,65^\circ / 2 \approx -4,85^\circ.$$

Повертаємо на розрахунковій схемі центральні осі перерізу x_c, y_c на кут $4,85^\circ$ за годинниковою стрілкою (від'ємний напрямок) і отримуємо осі u, v (рисунок 3.3).

Назви осей визначаємо за правилом: максимальна головна вісь v «ближча» (складає менший кут) до максимальної центральної осі, тобто у нашому випадку до осі y_c (відносно цієї осі момент інерції має більше значення: $J_{y_c} > J_{z_c}$).

Головні моменти інерції J_u, J_v визначаються за формулою

$$J_{\frac{\max}{\min}} = J_{\frac{v}{u}} = \frac{J_{y_c} + J_{z_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_c} - J_{z_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2}.$$

Підставимо у цю формулу відомі значення моментів і отримаємо

$$J_v = \frac{11773,75 + 376,87}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(11773,75 - 376,87)^2 + 4968,78^2} = 11855,52 \text{ см}^4;$$

$$J_u = \frac{11773,75 + 376,87}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(11773,75 - 376,87)^2 + 4968,78^2} = 295,1 \text{ см}^4.$$

Перевірки розрахунку головних моментів

Повинні виконуватись дві умови.

1 $J_u + J_v = J_{z_c} + J_{y_c}$. Перевіримо:

$$J_u + J_v = 295,1 + 11855,52 = 12150,62 \text{ см}^4; \quad J_{z_c} + J_{y_c} = 12150,62 \text{ см}^4.$$

2 Мають виконуватись умови екстремальності головних моментів:

$$J_u < J_{z_c}, \quad J_u < J_{y_c};$$

$$J_v > J_{z_c}, \quad J_v > J_{y_c}.$$

У виконанні цих нерівностей легко переконатись.

4 РОЗРАХУНОК БАЛОК ПРИ ЗГИНІ

4.1 Підбір перерізу та перевірка міцності

Для заданої розрахункової схеми сталеві балки (рисунок 4.1, а) з умови міцності за допустимим напруженням при згині підібрати поперечний переріз двотаврового, прямокутного (при $\frac{h}{b}=2$), круглого і кільцевого (при $k = \frac{d}{D}=0,7$) профілів і дати порівняльну оцінку по їх площах; $[\sigma]=160$ МПа, $[\tau]=100$ МПа.

Для балки двотаврового поперечного перерізу виконати перевірку міцності за дотичними напруженнями; побудувати епюри нормальних, дотичних і головних напружень у небезпечному перерізі та зробити повну перевірку міцності.

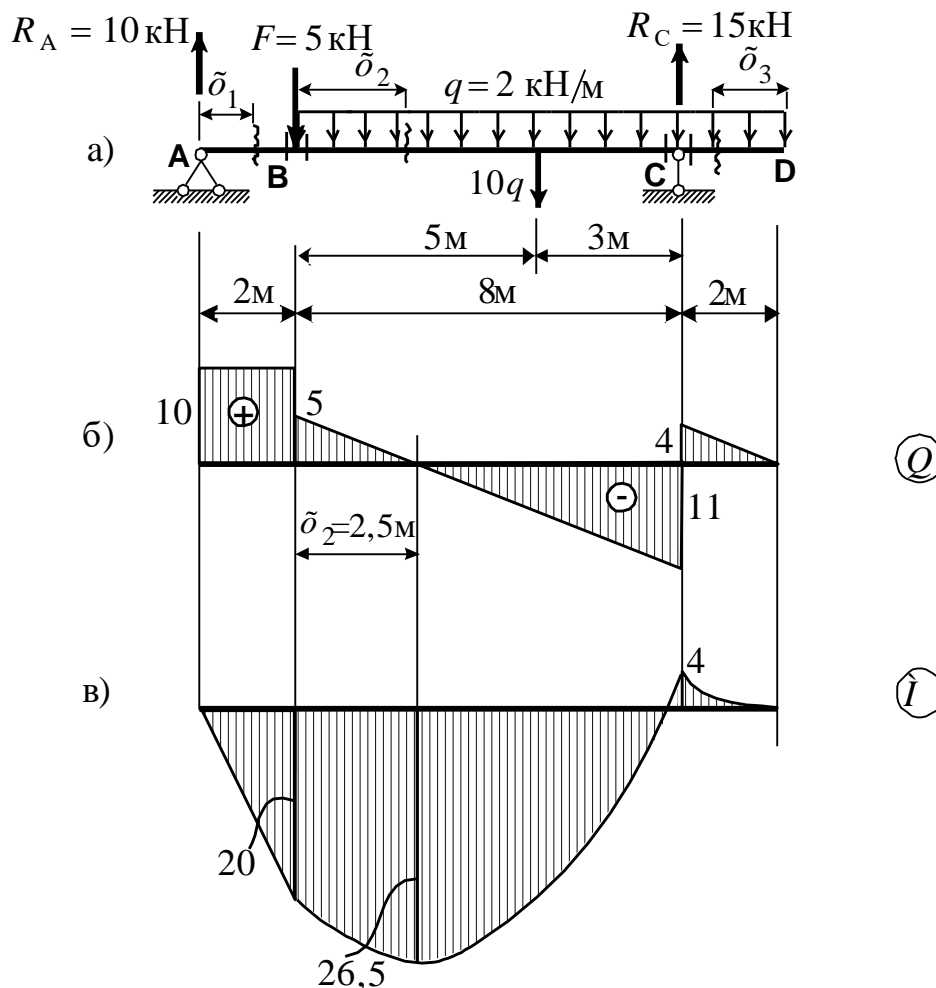


Рисунок 4.1 – Сталева балка: розрахункова схема (а);

епюра поперечних сил (б); епюра згинальних моментів (в)

4.1.1 Для забезпечення умов міцності треба знати максимальні зусилля у балці Q_{\max} , M_{\max} , а також зусилля у небезпечному перерізі. Тому перший крок у розв'язанні цієї задачі – це побудова епюр внутрішніх зусиль. Епюри будуюмо відповідно до правила пп. 1.1 – 1.3 і прикладу п. 1.4.

Визначаємо опорні реакції.

Припустимо, що вертикальні опорні реакції R_A та R_C спрямовані нагору (рисунок 4.1, а).

Для визначення опорних реакцій складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0: R_C \cdot 10 - F \cdot 2 - 10q \cdot 7 = 0; R_C = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0: R_A \cdot 10 - F \cdot 8 - 11q \cdot 3 = 0; R_A = 10 \text{ кН}.$$

Перевірка правильності визначення опорних реакцій:

$$\sum Y = R_C + R_A - F - q \cdot 10 = 10 + 15 - 5 - 20 = 0.$$

Отже, реакції знайдено правильно.

Розбиваємо балку на ділянки за правилами п. 1.3. На рисунку 4.1,а границями ділянок є точки А, В, С, D.

На кожній ділянці складаємо вирази для внутрішніх зусиль згідно з методом перерізів.

Ділянка АВ. Розсічемо балку в довільному перерізі x_1 , $0 \leq x_1 \leq 2$ м. Відкинемо праву частину балки. У цьому перерізі поперечна сила та згинальний момент дорівнюють

$$Q = R_A = 10 \text{ кН}; M = R_A \cdot x_1.$$

Поперечна сила є сталою, тому епюра Q – пряма лінія, проведена паралельно до осі догори від неї на відстані 10 (рисунок 4.1, б).

Згинальний момент змінюється за лінійною залежністю. Тому для побудови епюри M на цій ділянці достатньо обчислити значення M на початку і кінці ділянки:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 2 \text{ м ліворуч т. В } M_B = 20 \text{ кНм}.$$

Відкладаємо додатне значення моменту донизу від осі та з'єднуємо його з нулем прямою лінією (рисунок 4.1, в).

Ділянка ВС. Розсічемо балку в довільному перерізі x_2 , $0 \leq x_2 \leq 8$ м. Відкинемо праву частину балки (рисунок 4.1, б). Одержуємо

$$Q = R_A - F - qx_2;$$

$$M = R_A(x_2 + 2) - Fx_2 - qx_2 \frac{x_2}{2} = R_A(x_2 + 2) - Fx_2 - q \frac{x_2^2}{2}.$$

Поперечна сила змінюється за лінійною залежністю. Тому для побудови епюри Q на цій ділянці достатньо обчислити значення Q на початку та кінці ділянки:

при $x_2 = 0$ праворуч т. В $Q_B = 5$ кН;

при $x_2 = 8$ м ліворуч т. С $Q_C = -11$ кН.

Отримані значення відкладаємо від осі і з'єднуємо прямою лінією (рисунок 4.1, б).

Згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю. Для побудови епюри M слід визначити значення згинального моменту у трьох перерізах: на початку та на кінці ділянки, а також у перерізі, де $Q = 0$, оскільки там момент досягає екстремального значення (правило 2 п. 1.2).

Обчислимо значення M на початку в кінці ділянки:

при $x_2 = 0$ праворуч т. В $M_B = 20$ кНм;

при $x_2 = 8$ м ліворуч т. С $M_C = -4$ кНм.

Визначимо переріз, у якому $Q = 0$. Для цього вираз поперечної сили Q дорівнюємо до нуля:

$$Q = R_A - F - qx_2 = 5 - 2x_2 = 0, \text{ звідки } x_2 = 2,5 \text{ м.}$$

Підставимо це значення у вираз для M і визначимо екстремальний згинальний момент:

$$\text{при } x_2 = 2,5 \text{ м } M = R_A(2,5 + 2) - F \cdot 2,5 - q \frac{2,5^2}{2} = 26,25 \text{ кНм.}$$

Відклавши одержані значення згинальних моментів, проведемо через них квадратну параболу з вершиною у перерізі $x_2 = 2,5$ м (рисунок 4.1, в).

Ділянка CD. Розсічемо балку у довільному перерізі x_3 , $0 \leq x_3 \leq 3$ м. Відкинемо ліву частину балки (рисунок 1.3, в). Одержуємо

$$Q = qx_3; \quad M = q \frac{x_3^2}{2}.$$

Поперечна сила змінюється за лінійною залежністю. Значення Q на початку та кінці ділянки:

$$\text{при } x_3 = 0 \quad Q_D = 0;$$

$$\text{при } x_3 = 3 \text{ м праворуч т. С} \quad Q_C = 4 \text{ кН}.$$

Згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю:

$$\text{при } x_3 = 0 \quad M_D = 0;$$

$$\text{при } x_3 = 3 \text{ м праворуч т. С} \quad M_C = -4 \text{ кНм}.$$

Відклавши отримані ординати, проведемо через них квадратну параболу без екстремуму.

Перевіримо виконання правил 1 – 4, сформульованих у п. 1.2.

На ділянці АВ немає розподіленого навантаження. Сила Q , як повинно бути, є сталою, а епюра M – похилою, причому тангенс кута нахилу дорівнює $20/2 = 10 = Q$ (правило 1).

Ділянки ВС і CD завантажені розподіленим навантаженням. Епюри Q на цих ділянках мають вигляд похилих прямих, причому тангенс кута нахилу обох за модулем дорівнює $5/2,5=2=q$ та $4/2=2=q$, (правило 2). Епюра згинальних моментів на цих ділянках – квадратна параболу, причому на ділянці ВС вона має екстремум (правило 2).

В точках А, В і С прикладені зосереджені сили (у т. А і С прикладені реакції, у т. В – сила F). На епюрі Q у цих точках, як і повинно бути, є стрибки по напрямку цих сил і рівні цим силам: у т. А стрибок угору на $10 = R_A$; у т. В стрибок донизу на $5 = F$; у т. С стрибок угору на $11 + 4 = 15 = R_C$. Отже, правило 3 виконується.

Зовнішнього моменту M на схемі немає, тому відповідно до правила 4 стрибки на епюрі M відсутні

4.1.2 Підбираємо вказані у завданні перерізи з умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma],$$

де W_z – момент опору перерізу відносно нейтральної осі z .

Всі вказані перерізи мають вісь симетрії, тому нейтральна вісь z збігається з центральною віссю симетрії.

Значення M_{\max} беремо з епюри згинальних моментів:

$$M_{\max} = 26,25 \text{ кНм}.$$

З умови міцності визначаємо момент опору перерізу

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{26,25 \text{ кНм}}{160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}} = 0,164 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 164 \text{ см}^3.$$

Переходимо до підбору перерізів.

Номер *двотавра* визначаємо, користуючись сортаментом (додаток Б). Для цього у стовпці з W_z знаходимо значення, найближче більше, ніж отримане у розрахунку. Це значення $W_z = 184 \text{ см}^3$ відповідає двотавру № 20 з площею $A = 26,8 \text{ см}^2$.

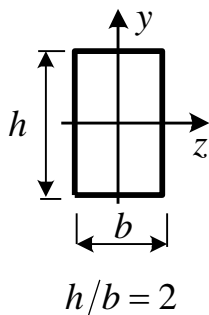
Для підбору інших перерізів виражаємо момент опору W_z через їх розміри за формулою

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}},$$

де y_{\max} – максимальна відстань від осі z до границі перерізу.

Для визначення моментів інерції простих перерізів J_z можна скористатися додатком Б.

Прямокутник



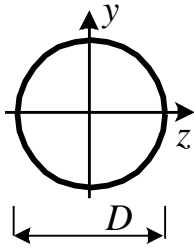
$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12 \cdot h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}.$$

Отримуємо рівняння відносно b : $\frac{2b^3}{3} = 164 \text{ см}^3,$

звідки $b = \sqrt[3]{\frac{164 \cdot 3}{2}} = 6,27 \text{ см}, h = 2b = 12,54 \text{ см};$

$$A = bh = 78,63 \text{ см}^2.$$

Круг



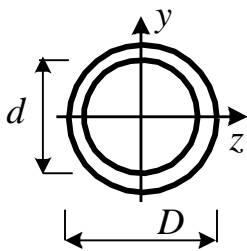
$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\pi D^4}{64D/2} = \frac{\pi D^3}{32}.$$

Отримуємо рівняння відносно D : $\frac{\pi D^3}{32} = 164 \text{ см}^3$,

$$\text{звідки } D = \sqrt[3]{\frac{164 \cdot 32}{3,14}} = 11,87 \text{ см};$$

$$A = \pi D^2 / 4 = 110,6 \text{ см}^2.$$

Кільце



$$k = d/D = 0,7$$

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\pi D^4(1-k^4)}{64D/2} = \frac{\pi D^3(1-k^4)}{32}.$$

Отримуємо рівняння відносно D :

$$\frac{\pi D^3(1-k^4)}{32} = 164 \text{ см}^3,$$

$$\text{звідки } D = \sqrt[3]{\frac{164 \cdot 32}{3,14(1-k^4)}} = 13 \text{ см}, \quad d = 0,7D = 9,1 \text{ см};$$

$$A = \pi(D^2 - d^2) / 4 = 67,66 \text{ см}^2.$$

Порівняння площ отриманих перерізів показує, що найбільш вигідним з рівномірних симетричних перерізів є двотавровий, його площа є найменшою.

4.1.3 Перевіряємо вибраний двотавровий переріз за дотичними напруженнями. Умова міцності за дотичними напруженнями для двотавра має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{dJ_z} \leq [\tau],$$

де S_z – статичний момент півперерізу відносно нейтральної осі.

Випишемо необхідні дані для двотавра № 20 з сортаменту (додаток Б): $d = 5,2 \text{ мм}$, $S_z = 104 \text{ см}^3$; $J_z = 1840 \text{ см}^4$.

Значення Q_{\max} беремо з епюри поперечних сил (за абсолютною величиною): $Q_{\max} = 11 \text{ кН}$.

Перевіряємо виконання умови міцності:

$$\tau_{\max} = \frac{11 \text{ кН} \cdot 104 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} 10^{-3} = 12 \text{ МПа} < [\tau].$$

4.1.4 Перевірка за головними напруженнями у небезпечному перерізі. У пп. 4.1.2 та 4.1.3 забезпечено міцність крайніх волокон волокон балки (у них досягаються M_{\max} і відповідно σ_{\max} , але дотичне напруження $\tau = 0$) та її нейтрального волокна (у ньому досягаються Q_{\max} і відповідно τ_{\max} , але нормальне напруження σ є малим, рисунок 4.1, б, в).

Тому треба виконати перевірку міцності у небезпечному перерізі, де обидва зусилля набувають великих значень за абсолютною величиною. Це переріз ліворуч від т. В:

$$Q = 10 \text{ кН}, \quad M = 20 \text{ кНм}.$$

У цьому перерізі будуюмо епюри нормальних та дотичних напружень. Випишемо з сортаменту (додаток Б) необхідні дані для двотавра № 20, які ще не були використані (рисунок 4.2):

$$t = 8,4 \text{ мм}, \quad h = 20 \text{ см}, \quad b = 10 \text{ см}.$$

Визначаємо напруження у крайній точці (т. А), у точці переходу стінки у полицю (т. С) та у точці на нейтральній осі (т. В). На верхню половину двотавра епюра σ відображується кососиметрично, а епюра τ – симетрично.

Нормальні напруження визначаються за формулою

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y,$$

де y – координата точки відносно нейтральної осі.

Для дотичних напружень виведено формули у нейтральному та стикувальному волокнах (знизу від т. С):

$$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{Q \left[bt(h-t) + d \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{2d J_z};$$

$$\tau_C = \frac{Qbt(h-t)}{2d J_z}.$$

Точка А:

$$y = h/2 = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}:$$

$$\sigma_A = \frac{20 \text{ кНм}}{1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} 0,1 \text{ м} = 108700 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 108700 \cdot 10^{-3} \text{ МПа} = 108,7 \text{ МПа};$$

$$\tau_A = 0.$$

Точка С:

$$y = h/2 - t = 0,1 - 8,4 \cdot 10^{-3} = 0,0916 \text{ м};$$

$$\sigma_c = \frac{20 \text{ кНм}}{1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} 0,0916 \text{ м} \cdot 10^{-3} = 99,57 \text{ МПа};$$

$$\tau_c = \frac{10 \text{ кН} \cdot 0,1 \text{ м} \cdot 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot (0,2 - 8,4 \cdot 10^{-3}) \text{ м}}{2 \cdot 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \cdot 10^{-3} = 8,41 \text{ МПа}.$$

Точка В:

$$y = 0: \quad \sigma_B = 0;$$

$$\tau_B = \frac{10 \text{ кН} \left[0,1 \cdot 8,4 \cdot 10^{-3} (0,2 - 8,4 \cdot 10^{-3}) + 5,2 \cdot 10^{-3} (0,1 - 8,4 \cdot 10^{-3})^2 \right]}{2 \cdot 5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-3} =$$
$$= 10,69 \text{ МПа}.$$

За розрахунками будемо епюри σ , τ (рисунок 4.2).

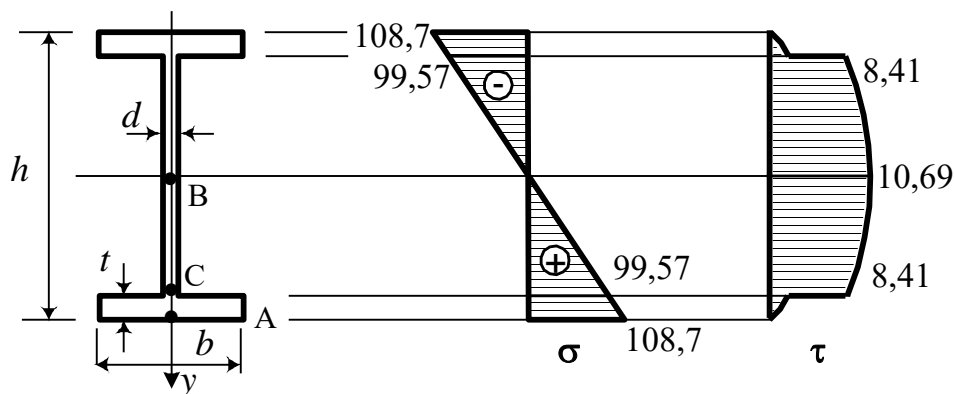


Рисунок 4.2 – Двотавровий переріз та σ , τ

Аналіз епюр показує, що небезпечною точкою перерізу є стикувальна точка т. С (точка переходу стінки у полицю). У цій точці визначаємо головні напруження (σ_1 , σ_3) та розрахункове напруження σ_{IV} за 4-ю теорією міцності і перевіряємо виконання умов міцності:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_c^2 + 4\tau_c^2} = 100,3 \text{ МПа} < [\sigma];$$

$$|\sigma_3| = \left| \frac{\sigma_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_c^2 + 4\tau_c^2} \right| = 0,7 \text{ МПа} < [\sigma];$$

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_c^2} = 100,6 \text{ МПа} < [\sigma].$$

4.2 Визначення переміщень методом початкових параметрів

4.2.1 Формули методу початкових параметрів

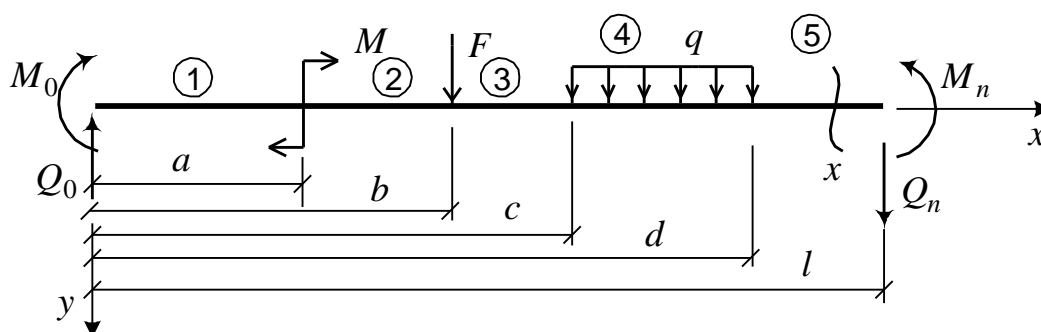


Рисунок 4.3 – До методу початкових параметрів

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{EJ} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \Big|_1 + M(x-a) \Big|_2 - F \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^3}{3!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^3}{3!} \Big|_5 \right]; \quad (4.1)$$

$$y = y_0 + \varphi_0 x - \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \Big|_1 + M \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_2 - F \frac{(x-b)^3}{3!} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^4}{4!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^4}{4!} \Big|_5 \right]. \quad (4.2)$$

При використанні цих формул треба дотримуватися таких правил:

1 Знаки у формулах відповідають напрямку силових факторів (M_0, Q_0, M, F, q) на рисунку 4.3. При зміні напрямку силового фактора змінюється знак перед відповідним доданком у формулі.

2 При визначенні переміщень у перерізі x у формули входять тільки ті доданки, у яких силові фактори розташовані строго ліворуч перерізу x .

3 Додатний напрямок прогину y (зокрема, y_0) – униз, додатний напрямок кута повороту φ (зокрема, φ_0) – за

годинниковою стрілкою від осі балки.

4.2.2 Приклади визначення переміщень методом початкових параметрів

Задача 1

Для заданої розрахункової схеми балки (рисунок 4.4) визначити переміщення (прогини і кути повороту) для перерізу k . Жорсткість балки по всій довжині постійна ($EJ = \text{const}$).

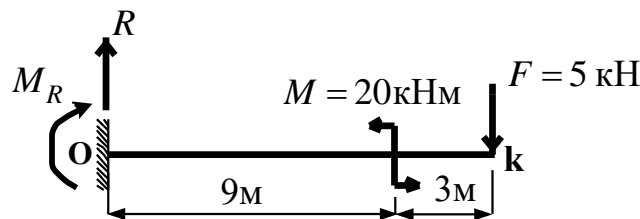


Рисунок 4.4 – Розрахункова схема консольної балки

Визначаємо початкові параметри у (4.1), (4.2).

Статичні початкові параметри Q_0, M_0 збігаються з опорними реакціями: $Q_0 = R$, $M_0 = M_R$. Обчислимо їх:

$$\sum M_0 = 0: M_R - M + F \cdot 12 = 0, \text{ звідки } M_R = M - F \cdot 12 = -40 \text{ кНм.}$$

$$\sum Y = 0: R - F = 0, \text{ звідки } R = F = 5 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum M_k = M_R + R \cdot 12 - M = -40 + 60 - 20 = 0.$$

Отже, статичні початкові параметри

$$Q_0 = R = 5 \text{ кН}; \quad M_0 = -M_R = -40 \text{ кНм.}$$

Геометричні початкові параметри φ_0, y_0 – це кут повороту і прогин у початку балки, тобто у даному випадку – у защемленні: $\varphi_0 = 0$, $y_0 = 0$ (у защемленні заборонено всі переміщення).

Підставляємо дані у формули (4.1), (4.2) для т. k ($x = 12\text{м}$):

$$\varphi_k = -\frac{1}{EJ} \left[M_R x + R \frac{x^2}{2} - M(x-9) \right] = -\frac{1}{EJ} \left[-40 \cdot 12 + 5 \frac{12^2}{2} - 20 \cdot (12-9) \right] =$$

$$= 180/EJ \quad (\text{вісь у т. } k \text{ повернулася за годинниковою стрілкою});$$

$$y_k = -\frac{1}{EJ} \left[M_R \frac{x^2}{2} + R \frac{x^3}{3!} - M \frac{(x-9)^2}{2} \right] = -\frac{1}{EJ} \left[-40 \frac{12^2}{2} + 5 \frac{12^3}{6} - 20 \frac{(12-9)^2}{2} \right] =$$

=1530/EJ (т. к змістилася униз).

Задача 2

Для заданої розрахункової схеми балки (рисунок 4.5) визначити переміщення (прогини і кути повороту) для перерізу к. Жорсткість балки по всій довжині постійна ($EJ = \text{const}$).

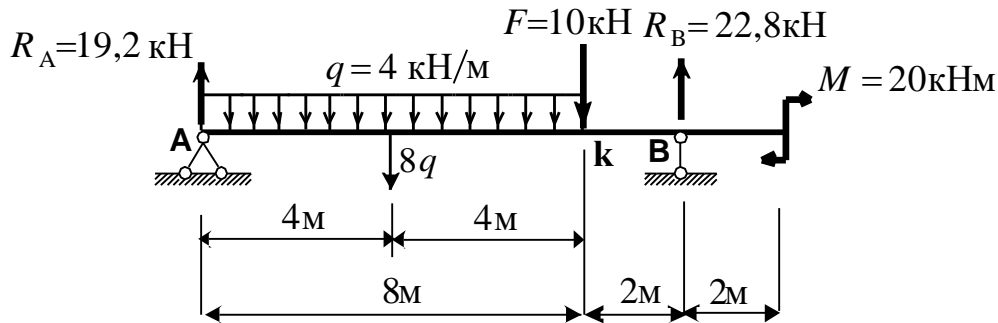


Рисунок 4.5 – Розрахункова схема балки на шарнірних опорах

Для визначення початкових параметрів спочатку визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0: 8q \cdot 4 + F \cdot 8 - R_B \cdot 10 + M = 0, \text{ звідки } R_B = 22,8 \text{ кНм};$$

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 10 - 8q \cdot 6 - F \cdot 2 + M = 0, \text{ звідки } R_A = 19,2 \text{ кНм}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - 8q = 0.$$

Статичні початкові параметри:

$$Q_0 = R_A = 19,2 \text{ кНм}; M_0 = 0 \text{ (на шарнірній опорі момент не виникає)}.$$

Геометричні початкові параметри:

$$y_0 = 0 \text{ (опора забороняє вертикальні переміщення)}; \varphi_0 \neq 0.$$

Для визначення φ_0 запишемо умову: переміщення на опорі В повинно дорівнювати нулю. Випишемо, згідно з (4.2), вираз для цього переміщення при $x = 10\text{м}$ і дорівняємо його до нуля:

$$y_B = \varphi_0 x - \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{x^3}{3!} - q \frac{(x-0)^4}{4!} + q \frac{(x-8)^4}{4!} - F \frac{(10-8)^3}{3!} \right] = 10\varphi_0 - \frac{1522,67}{EJ} = 0,$$

$$\text{звідки } \varphi_0 = 152,27/EJ.$$

Визначаємо переміщення у т. к, тобто при $x = 8\text{м}$:

$$\varphi_k = \varphi_0 - \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{x^2}{2} - q \frac{(x-0)^3}{3!} \right] = \frac{152,27}{EJ} - \frac{1}{EJ} \left[19,2 \cdot \frac{8^2}{2} - 4 \frac{8^3}{6} \right] = -\frac{120,79}{EJ}.$$

$$y_k = \varphi_0 x - \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{x^3}{3!} - q \frac{(x-0)^4}{4!} \right] = 8 \cdot \frac{152,27}{EJ} - \frac{1}{EJ} \left[19,2 \cdot \frac{8^3}{6} - 4 \frac{8^4}{24} \right] = \frac{262,43}{EJ}.$$

5 ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ НА СКЛАДНИЙ ОПІР

5.1 Розрахунок балки при косому згині

Соснова балка прямокутного поперечного перерізу $b \times h$ (загальний вигляд і розрахункову схему наведено на рисунку 5.1, а, б) завантажена у вертикальній і горизонтальній головних площинах і, отже, зазнає косоного згину.

Потрібно:

- 1 Побудувати в аксонометрії епюри M_z і M_y і визначити положення небезпечного перерізу.
- 2 Визначити положення нейтральної осі в небезпечному перерізі балки.
- 3 Підібрати розміри поперечного перерізу b та h при співвідношенні розмірів перерізу $\frac{h}{b} = 3$; допустиме напруження $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$, жорсткість $EJ = \text{const}$.
- 4 Побудувати епюру нормальних напружень у перерізі.

подаємо косий згин як комбінацію двох плоских згинів у вертикальній і горизонтальній головних площинах.

Добір перерізу виконується з умови міцності у небезпечному перерізі. Для визначення положення небезпечного перерізу побудуємо епюри згинальних моментів M_z і M_y у вертикальній і горизонтальній головних площинах за правилами пп. 1.1 – 1.3 (рисунок 5.1, в, г).

Епюри показують наявність двох перерізів з великими значеннями зусиль, тобто двох небезпечних перерізів:

- переріз I (рисунок 5.1, а, в) $x = 4,5 \text{ м}$ зі значеннями моментів по модулю $M_z = 101,25 \text{ кНм}$ і $M_y = 12 \text{ кНм}$;
- переріз II (рисунок 5.1, а, г) $x = 3 \text{ м}$ зі значеннями моментів по модулю $M_z = 90 \text{ кНм}$ і $M_y = 6 \text{ кНм}$.

За умовою задачі, допустиме напруження $[\sigma]$ однакове при розтяганні та стиску. Згідно з принципом незалежності дії сил використовуємо умову міцності у вигляді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (5.1)$$

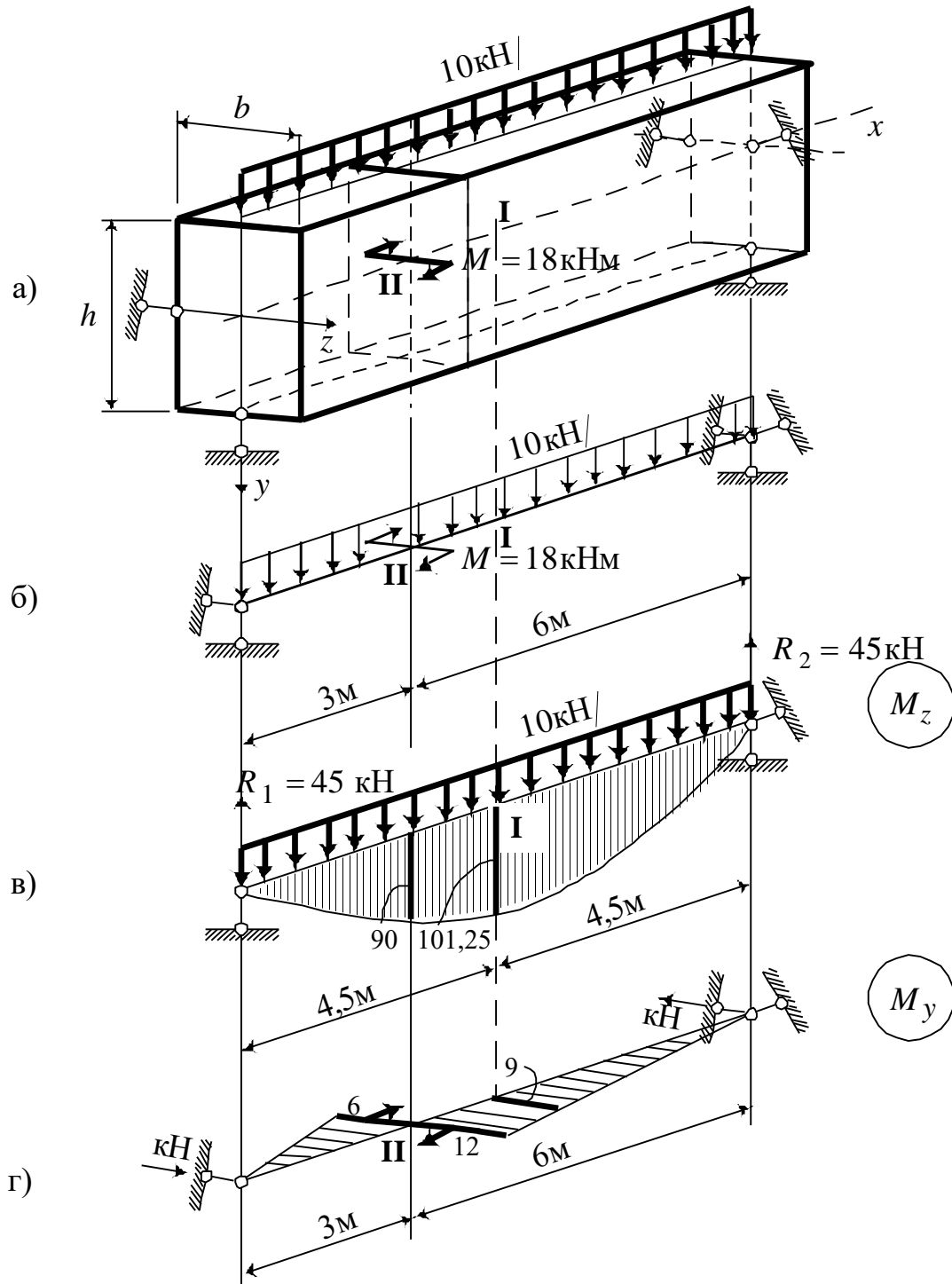


Рисунок 5.1 – Загальний вигляд і розрахункова схема балки (а, б); епюра згинальних моментів у вертикальній площині M_z (в); епюра згинальних моментів у горизонтальній площині M_y (г)

Виразимо моменти опору перерізу балки через розміри перерізу, використовуючи умову задачі $h = 3b$:

$$W_z = \frac{J_z}{\frac{1}{2}h} = \frac{bh^3}{12 \cdot \frac{1}{2}h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{3}{2}b^3 = 1,5b^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{\frac{1}{2}b} = \frac{b^3h}{12 \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{b^2h}{6} = \frac{b^2 \cdot 3b}{6} = \frac{1}{2}b^3 = 0,5b^3.$$

Досліджуємо небезпечні перерізи I і II.

У перерізі I максимальні нормальні напруження дорівнюють

$$\sigma_z = \frac{M_z}{W_z} = \frac{101,25 \text{ кНм}}{1,5b^3} = \frac{67,5 \text{ кНм}}{b^3}; \quad (5.2)$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{W_y} = \frac{9 \text{ кНм}}{0,5b^3} = \frac{18 \text{ кНм}}{b^3}. \quad (5.3)$$

Умова міцності (5.1) набуває вигляду

$$\frac{67,5 \text{ кНм}}{b^3} + \frac{18 \text{ кНм}}{b^3} \leq 10 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2},$$

звідки

$$b = \sqrt[3]{\frac{85,5}{10^4}} = 0,2045 \text{ м} \approx 20,5 \text{ см}, \quad h = 20,5 \cdot 3 = 61,5 \text{ см}. \quad (5.4)$$

У перерізі II максимальні нормальні напруження дорівнюють

$$\sigma_z = \frac{M_z}{W_z} = \frac{90 \text{ кНм}}{1,5b^3} = \frac{60 \text{ кНм}}{b^3};$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{W_y} = \frac{12 \text{ кНм}}{0,5b^3} = \frac{24 \text{ кНм}}{b^3}.$$

Умова міцності (5.1) набуває вигляду

$$\frac{60 \text{ кНм}}{b^3} + \frac{24 \text{ кНм}}{b^3} \leq 10 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2},$$

звідки

$$b = \sqrt[3]{\frac{84}{10^4}} = 0,2033 \text{ м} \approx 20,3 \text{ см}, \quad h = 20,3 \times 3 = 60,9 \text{ см}. \quad (5.5)$$

Із двох отриманих розмірів (5.4), (5.5) вибираємо найбільший, відповідний до перерізу I:

$$b = 20,5 \text{ см}, \quad h = 61,5 \text{ см}.$$

Визначимо положення *нейтральної осі* (геометричне місце точок, у яких нормальне напруження дорівнює нулю) в небезпечному перерізі. Для цього покажемо вектори моментів у головних площинах перерізу, якими є площини симетрії. На рисунку 5.2, а, б показано в кожній площині напрямки згинальних моментів M_z і M_y , при яких волокна розтягнуті згідно з епюрами на рисунку 5.1, в, г. Відповідні їм вектори \mathbf{M}_z і \mathbf{M}_y вибираються згідно з відомим з теоретичної механіки правилом «буравчика» або «правого гвинта», \mathbf{M} – сумарний вектор моменту.

Площина дії сумарного згинального моменту перпендикулярна до сумарного вектора \mathbf{M} (рисунок 5.2, в).

Зауваження. Аналіз застосування правила буравчика дозволяє сформулювати просту закономірність: якщо еюра M_z відкладена вниз, то вектор \mathbf{M}_z спрямований уліво; якщо еюра M_y відкладена вправо, то вектор \mathbf{M}_y спрямований униз.

Нейтральна вісь є прямою, яка проходить через початок координат під кутом β до головної осі z :

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_z}{J_y} = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}, \quad (5.6)$$

де α – кут між площиною дії сумарного згинального моменту \mathbf{M} в перерізі та головною віссю y .

Для прямокутного перерізу з урахуванням умови $h = 3b$

$$\frac{J_z}{J_y} = \frac{bh^3}{12} \frac{12}{b^3h} = \left(\frac{h}{b}\right)^2 = 9.$$

Таким чином, для небезпечного перерізу I

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{101,25} \cdot 9 = 0,8 ,$$

$$\beta = \operatorname{arctg} 0,8 = 38,66^\circ .$$

Оскільки значення M_z і M_y підставлені у формулу (5.6) за абсолютною величиною, знаки кутів α і β однакові, тобто кут β потрібно відкласти в той самий бік від осі z , що кут α від осі y (у нашому випадку – проти годинникової стрілки). Це показано на рисунку 5.2, в.

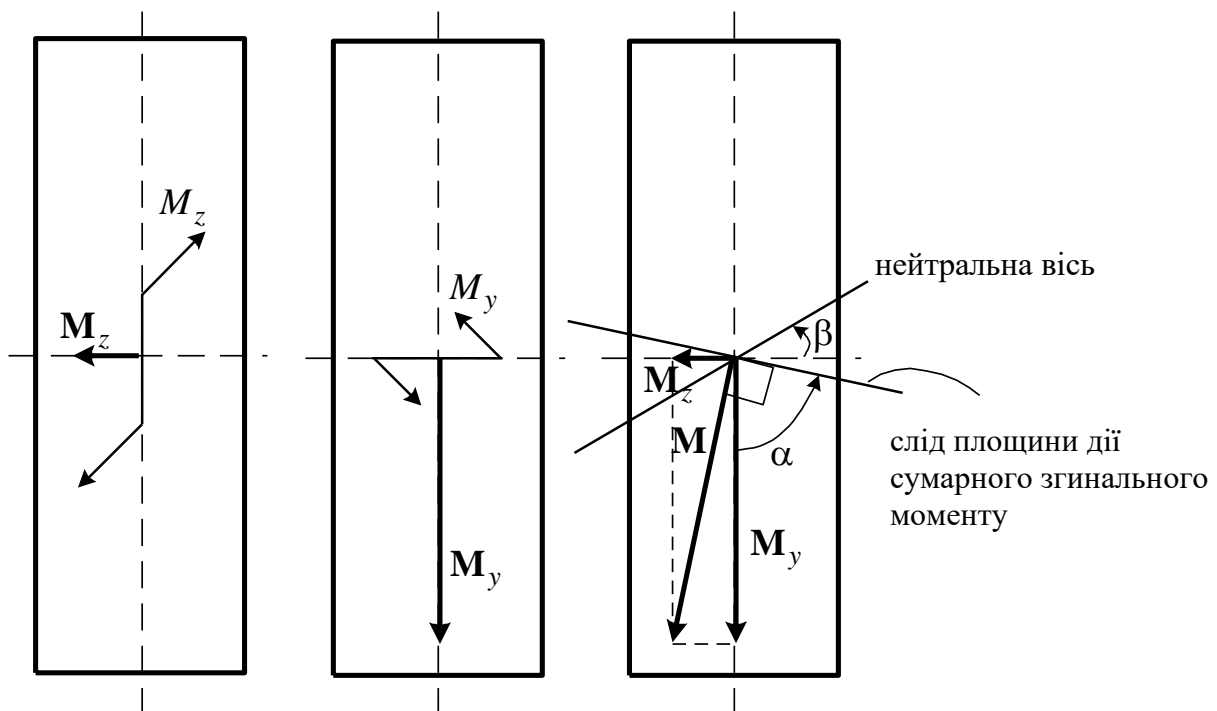


Рисунок 5.2 – Діаграма моментів: площини дії і вектори згинальних моментів M_z (а) і M_y (б); площина дії сумарного згинального моменту і нейтральна вісь (в)

Побудуємо *епюру нормальних напружень*, які визначаються на границі перерізу згідно з (5.2), (5.3) за формулою

$$\sigma = \pm \sigma_z \pm \sigma_y = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{67,5 \text{ кНм}}{b^3} \pm \frac{18 \text{ кНм}}{b^3} =$$

$$= \pm \frac{67,5 \cdot 10^{-3}}{0,205^3} \pm \frac{18 \cdot 10^{-3}}{0,205^3} = \pm 7,84 \pm 2,09, \text{ МПа.} \quad (5.7)$$

Знак перед доданком визначається тим, з якого боку від осі розтягнуті волокна, тобто епюрою згинальних моментів (рисунок 5.1, в, г). У вертикальній площині волокна в небезпечному перерізі розтягнуті знизу, тому σ_z знизу від осі є додатним; у горизонтальній площині в небезпечному перерізі волокна розтягнуті праворуч, значить σ_y праворуч осі є додатним. Знаки напружень σ_z , σ_y у кутових точках показано на рисунку 4.3. Підставимо у формулу (5.7) знайдене значення $b = 20,5 \text{ см} = 0,205 \text{ м}$. Одержимо з урахуванням знаків значення нормальних напружень у кутах перерізу і побудуємо їх епюру (рисунок 5.3). Недовантаження ($\sigma_{\max} = 9,93 < [\sigma] = 10 \text{ МПа}$) пояснюється тим, що значення b при розрахунках округлили в більший бік.

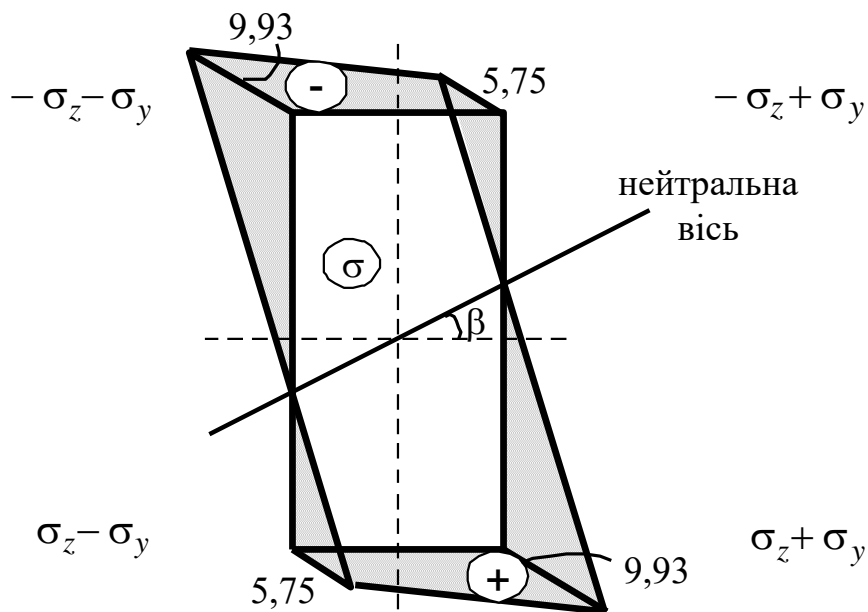


Рисунок 5.3 – Епюра нормальних напружень у небезпечному перерізі I (МПа)

Рисунок 5.3 підтверджує, що побудована раніше нейтральна вісь (рисунок 5.2, в) дійсно проходить через точки $\sigma = 0$ на епюрі

нормальних напружень та *максимальні напруження досягаються в точках, найбільш віддалених від нейтральної осі.*

5.2 Розрахунок короткого стержня при позацентровому стиску

Бетонний короткий стержень, загальний вигляд і поперечний переріз якого показано на рисунку 5.4, стискається силою F , яка паралельна осі стержня і прикладена у т. В. Отже, стержень зазнає позацентрового стиску.

Потрібно:

- 1 Визначити положення нейтральної лінії. Виразити величину найбільших розтягувальних і стискальних напружень через силу F .
- 2 Знайти допустиме навантаження F при заданих розмірах поперечного перерізу та при допустимих напруженнях на стиск $[\sigma]_c = 30 \text{ МПа}$, на розтягання $[\sigma]_p = 2 \text{ МПа}$.
- 3 Побудувати ядро перерізу.
- 4 Побудувати епюру нормальних напружень у перерізі.

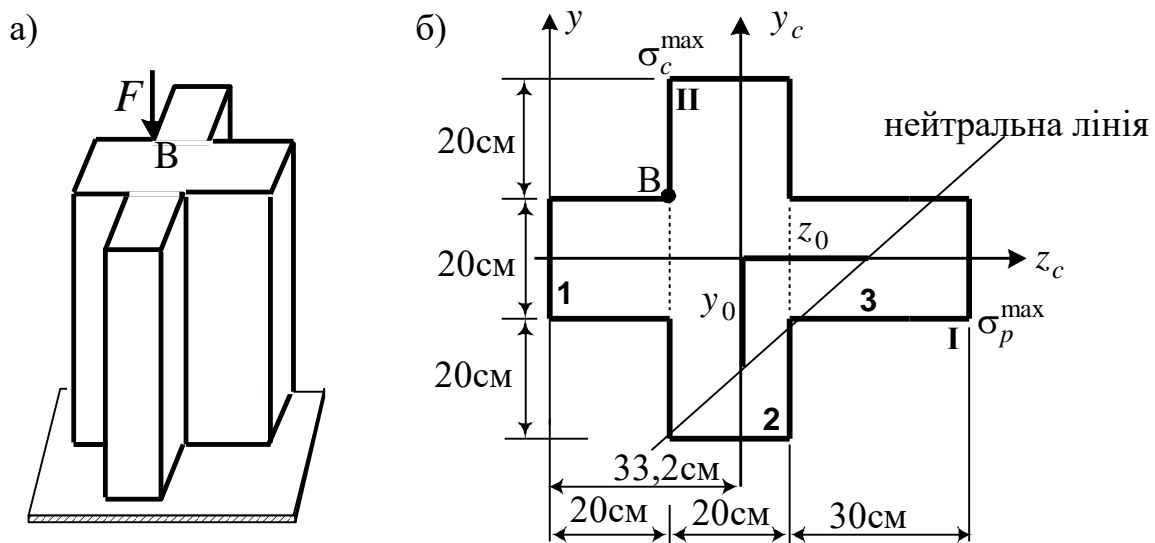


Рисунок 5.4 – Бетонний стержень:
загальний вигляд (а); поперечний переріз (б)

Допустиму силу $F_{\text{доп}}$ визначаємо з умов міцності:

$$|\sigma_{\max,c}| \leq [\sigma]_c, \quad \sigma_{\max,p} \leq [\sigma]_p. \quad (5.8)$$

Для того щоб ними скористатися, знайдемо *геометричні характеристики* перерізу, розглядаючи його як складений (п.п.

3.1 та 3.2).

Поперечний переріз стержня має горизонтальну вісь симетрії, яка є центральною головною віссю. Таким чином, положення осі z_c відомо (рисунок 5.4, б).

Знайдемо положення вертикальної центральної осі y_c (тобто визначимо координату z_c відносно допоміжної осі y). Для цього подамо переріз у вигляді трьох прямокутних перерізів 1, 2, 3 (рисунок 5.4, б). Тоді (3.1)

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3}{A} = \frac{10 \cdot 20 \cdot 20 + 30 \cdot 20 \cdot 60 + 55 \cdot 30 \cdot 20}{400 + 1200 + 600} = \\ &= \frac{10 \cdot 20 \cdot 20 + 30 \cdot 20 \cdot 60 + 55 \cdot 30 \cdot 20}{2200} = 33,2 \text{ см.} \end{aligned}$$

Відклавши координату z_c від допоміжної осі y , одержимо точку 0 (центр ваги всього перерізу). Через цю точку проводимо головну центральну вісь інерції y_c .

Координати точки прикладення сили F відносно головних центральних осей z_c , y_c дорівнюють

$$z_f = -13,2 \text{ см}, \quad y_f = 10 \text{ см.}$$

Площа перерізу $A = 2200 \text{ см}^2$.

Моменти інерції відносно головних центральних осей (3.3), (3.4):

$$\begin{aligned} J_{z_c} &= \frac{20 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 60^3}{12} + \frac{30 \cdot 20^3}{12} = 393333 \text{ см}^4, \\ J_{y_c} &= \frac{20^4}{12} + (10 - 33,2)^2 400 + \frac{20^3 \cdot 60}{12} + (30 - 33,2)^2 1200 + \\ &+ \frac{30^3 \cdot 20}{12} + (55 - 33,2)^2 600 = 611061 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Квадрати радіусів інерції

$$i_{z_c}^2 = \frac{J_{z_c}}{A} = \frac{393333}{2200} = 178,8 \text{ см}^2, \quad i_{y_c}^2 = \frac{J_{y_c}}{A} = \frac{611061}{2200} = 277,8 \text{ см}^2.$$

Проведемо *нейтральну лінію* (геометричне місце точок, у яких нормальне напруження дорівнює нулю). Нейтральна лінія є прямою, яка відтинає на головних центральних осях відрізки

$$z_0 = -\frac{i_{y_c}^2}{z_f} = -\frac{277,8}{-13,2} = 21,1 \text{ см}; \quad y_0 = -\frac{i_{z_c}^2}{y_f} = -\frac{178,8}{10} = -17,9 \text{ см}.$$

Ці відрізки та нейтральна лінія показані на рисунку 5.4, б.

Визначимо *допустиму силу*. Максимальні напруження досягаються в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії. Максимальне стискальне напруження $\sigma_{\max,c}$ досягається в тій частині перерізу, у якій прикладена стискальна сила, тобто в точці **II**, максимальне розтягувальне $\sigma_{\max,p}$ – у точці **I**.

Формули для напружень отримуються згідно з принципом незалежності дії сил (позацентровий стиск подається як комбінація осевого стиску та двох плоских чистих згинів).

Запишемо в точках **I** та **II** умови міцності (5.8):

$$\sigma_{\max,p} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_f}{i_{y_c}^2} z_I + \frac{y_f}{i_{z_c}^2} y_I \right) \leq [\sigma]_p;$$

$$|\sigma_{\max,c}| = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_f}{i_{y_c}^2} z_{II} + \frac{y_f}{i_{z_c}^2} y_{II} \right) \leq [\sigma]_c.$$

Тут z_I, y_I – координати точки **I** відносно центральних головних осей; z_{II}, y_{II} – координати точки **II**. Підставивши значення цих координат у (5.8), одержуємо

$$-\frac{F_{\text{доп}}^p}{2200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \left(1 + \frac{-13,2}{277,8} 36,2 + \frac{10}{178,8} (-10) \right) =$$

$$= \frac{1,28 F_{\text{доп}}^p}{2200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \leq 2 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2};$$

$$\frac{F_{\text{доп}}^c}{2200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \left(1 + \frac{-13,2}{277,8} (-13,2) + \frac{10}{178,8} 30 \right) =$$

$$= \frac{3,31 F_{\text{доп}}^c}{2200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \leq 30 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

У цих виразах величини в дужках – безрозмірні. Звідси одержуємо значення допустимих сил на розтягання (з першої умови) і стиск (із другої умови):

$$F_{\text{доп}}^p = 344 \text{ кН}; \quad F_{\text{доп}}^c = 1997 \text{ кН}.$$

Допустимим навантаженням є менше з них:

$$F_{\text{доп}} = 344 \text{ кН}.$$

Побудуємо *епюру нормальних напружень* у перерізі. Згідно принципу незалежності дії сил розрахуємо напруження за формулою

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_f}{i_{y_c}^2} z + \frac{y_f}{i_{z_c}^2} y \right),$$

де z, y – координати точки відносно головних центральних осей.

Результати розрахунків напружень у кутових точках зведені в таблицю 5.1, у якій точки пронумеровані відповідно до рисунка 5.5, а. Епюру σ наведено на рисунку 5.5, б.

Таблиця 5.1 – Значення напружень у точках

Точки	z	y	σ
1	-13,2	30	-5,18
2	6,8	30	-3,69
3	6,8	10	-1,94
4	36,8	10	0,29
5	36,8	-10	2,05
6	6,8	-10	-0,18
7	6,8	-30	1,57
8	-13,2	-30	0,08
9	-13,2	-10	-1,67
10	-33,2	-10	-3,16

11	-33,2	10	-4,91
12	-13,2	10	-3,42

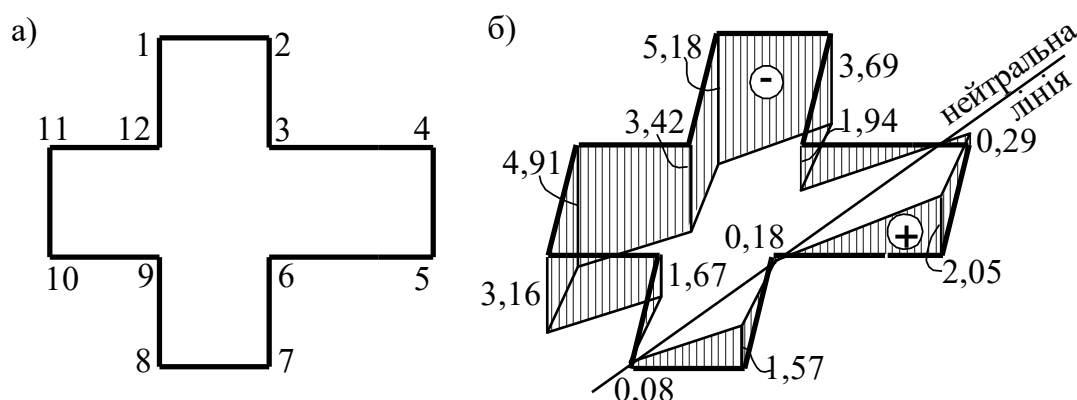


Рисунок 5.5 – Нормальні напруження в перерізі:
нумерація точок (а); епюра σ (МПа) (б)

Рисунок 5.5 підтверджує, що побудована раніше нейтральна лінія (рисунок 5.4, б) дійсно проходить через точки $\sigma = 0$ на епюрі нормальних напружень та *максимальні напруження досягаються в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії.*

Очевидно, через наявність розтягнутої області, стиснута область є недовантаженою (наприклад, у точці 12 допускається $\sigma_{\max,c} = [\sigma]_c = 30 \text{ МПа}$, а при розрахованій допустимій силі $F_{\text{доп}} = F_{\text{доп}}^p = 344 \text{ кН}$ напруження дорівнює всього $\sigma = 5,18 \text{ МПа}$).

Уникнути недовантаження можна, приклавши стискальну силу в *ядрі перерізу* (це область навколо центру ваги, яка має властивість: якщо сила прикладена у ядрі перерізу, то напруження у всьому перерізі має однаковий знак). Тоді напруження у всіх точках перерізу є стискальним, розтягнута область відсутня.

Щоб побудувати *ядро перерізу*, необхідно задатися положенням усіх нейтральних ліній, що торкаються перерізу або проходять через його кутові точки (рисунок 5.6), і для кожної нейтральної лінії визначити координати відповідної точки границі ядра.

Нейтральна лінія I-I:

$$z_0 = \infty, \quad y_0 = 30 \text{ см};$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{i^2 y_c}{z_0} = 0, \quad y_{\text{я}} = -\frac{i^2 z_c}{y_0} = -\frac{178,8}{30} = 5,96 \text{ см}.$$

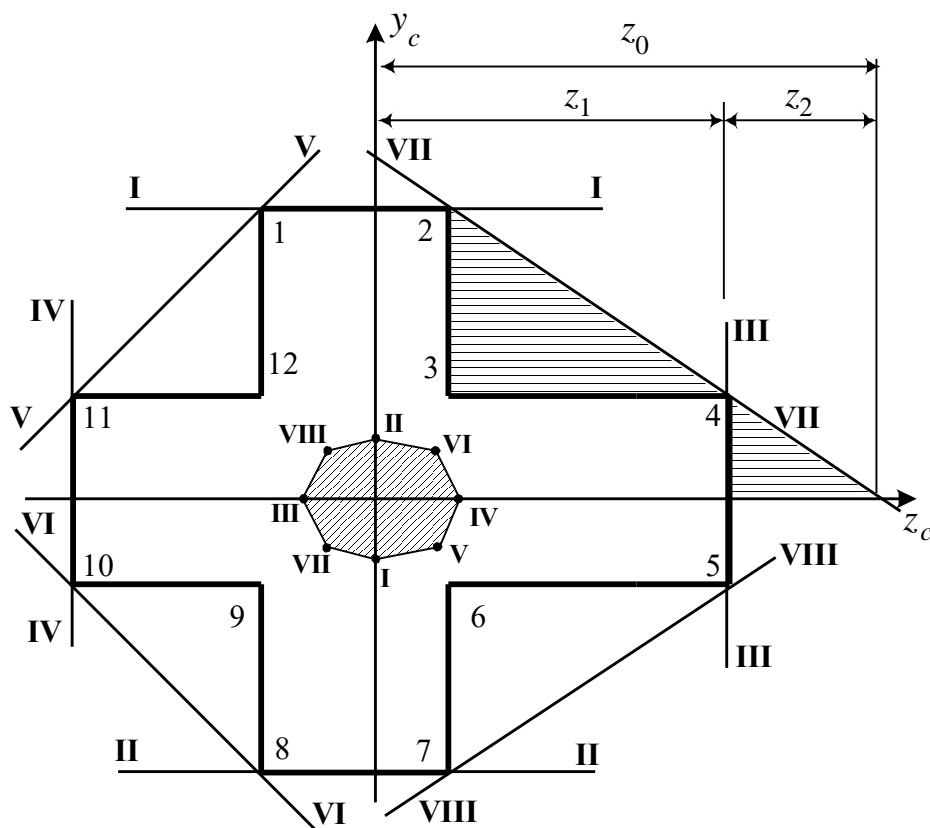


Рисунок 5.6 – Схема побудови ядра перерізу та ядро навколо центру ваги

Нейтральна лінія **II-II** симетрична лінії **I-I** відносно осі z_c :

$$z_{\text{я}} = 0, \quad y_{\text{я}} = -5,96 \text{ см}.$$

Нейтральна лінія **III-III**:

$$z_0 = 36,8 \text{ см}, \quad y_0 = \infty;$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{i^2 y_c}{z_0} = -\frac{277,8}{36,8} = -7,5 \text{ см}, \quad y_{\text{я}} = 0.$$

Нейтральна лінія **IV-IV**:

$$z_0 = -33,2 \text{ см}, \quad y_0 = \infty;$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{i^2 y_c}{z_0} = -\frac{277,8}{-33,2} = 8,4 \text{ см}, \quad y_{\text{я}} = 0.$$

Залишилося розрахувати похилі нейтральні лінії. Розрахуємо спочатку, наприклад, лінію VII – VII.

Нейтральна лінія VII – VII:

$$z_0 = z_1 + z_2, \quad z_1 = 6,8 + 30 = 36,8 \text{ см}.$$

Значення z_2 визначається з умови подібності двох прямокутних трикутників, які заштриховані на рисунку 5.6:

$$\frac{z_2}{10} = \frac{30}{20}, \text{ звідки } z_2 = 15 \text{ см}; \quad z_0 = 36,8 + 15 = 51,8 \text{ см};$$

аналогічно з умови подібності цих же трикутників одержуємо

$$y_0 = 34,53 \text{ см};$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{i^2 y_c}{z_0} = -\frac{277,8}{51,8} = -5,4 \text{ см}, \quad y_{\text{я}} = -\frac{i^2 z_c}{y_0} = -\frac{178,8}{34,53} = -5,2 \text{ см}.$$

Нейтральна лінія VIII – VIII симетрична лінії VII – VII відносно осі z_c :

$$z_{\text{я}} = -5,4 \text{ см}, \quad y_{\text{я}} = 5,2 \text{ см}.$$

Нейтральна лінія V – V:

Розрахунок значень z_0 , y_0 виконується аналогічно розрахунку для лінії VII – VII. Одержуємо

$$z_0 = -43,2 \text{ см}, \quad y_0 = 43,2 \text{ см};$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{i^2 y_c}{z_0} = -\frac{277,8}{-43,2} = 6,4 \text{ см}, \quad y_{\text{я}} = -\frac{i^2 z_c}{y_0} = -\frac{178,8}{43,2} = -4,1 \text{ см}.$$

Нейтральна лінія VI – VI симетрична лінії V – V відносно осі z_c :

$$z_{\text{я}} = 6,4 \text{ см}, \quad y_{\text{я}} = 4,1 \text{ см}.$$

З'єднавши отримані точки I – VIII відрізками прямих, одержимо ядро (заштрихована область навколо центру ваги на рисунку 5.6).

5.3 Розрахунок стержня при згині з крученням

На рисунку 5.7 зображена в аксонометрії вісь ламаного стержня кільцевого поперечного перерізу, яка розташована в горизонтальній площині і має прямі кути в т. 2 і 3. На стержень діє вертикальне навантаження.

Потрібно:

- 1 Побудувати в аксонометрії епюри згинальних і крутних моментів і по них знайти небезпечний переріз.
- 2 Визначити зовнішній D і внутрішній d діаметри стержня за IV теорією міцності при $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$; жорсткість $EJ = \text{const}$.

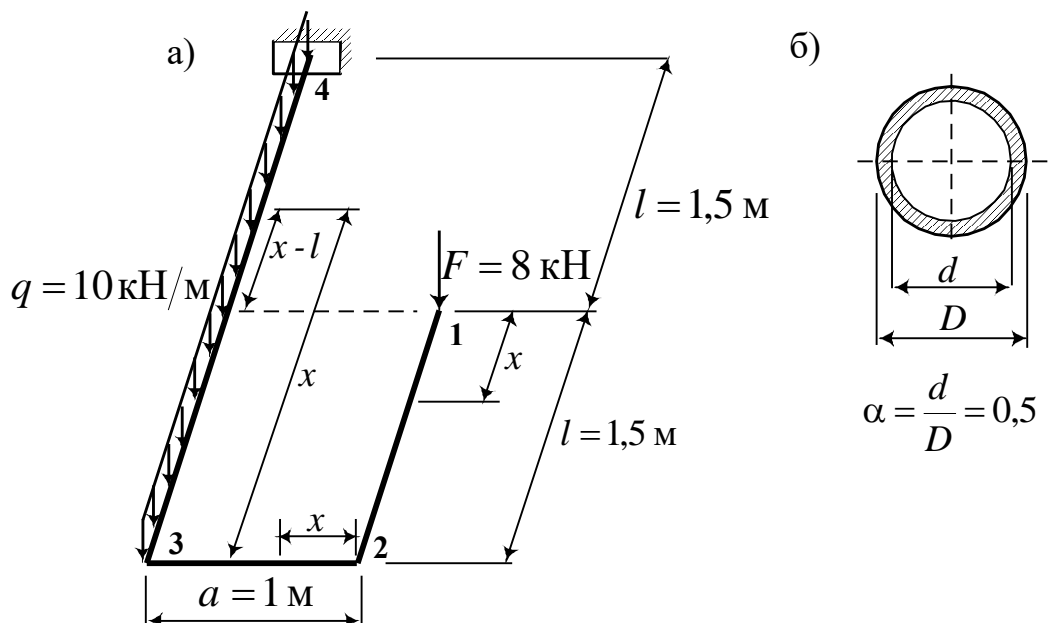


Рисунок 5.7 – Розрахункова схема стержня: загальний вигляд (а); поперечний переріз (б)

Розглядаємо дану деформацію як комбінацію плоского згину та кручення.

Для визначення розмірів перерізу потрібно в небезпечному перерізі скористатися формулою для D на підставі IV теорії міцності, для чого будуються епюри згинальних і крутних моментів.

При побудові епюр користуємося тими самими правилами знаків, що і для плоскої системи. Згинальний момент M є додатним, якщо він згинає елемент опуклістю вниз; на епюрі додатне значення відкладається знизу від осі. Крутний момент $M_{кр}$ є додатним, якщо він спрямований за годинниковою стрілкою при погляді уздовж осі бруса на відсічену частину.

Ділянка 1-2. Початок координат у точці 1; $0 \leq x \leq 1,5\text{ м}$
(рисунк 5.8, а).

$M = -Fx$. При $x = 0$ $M_1 = 0$; при $x = 1,5\text{ м}$ $M_2 = -12\text{ кНм}$.
 $M_{кр} = 0$.

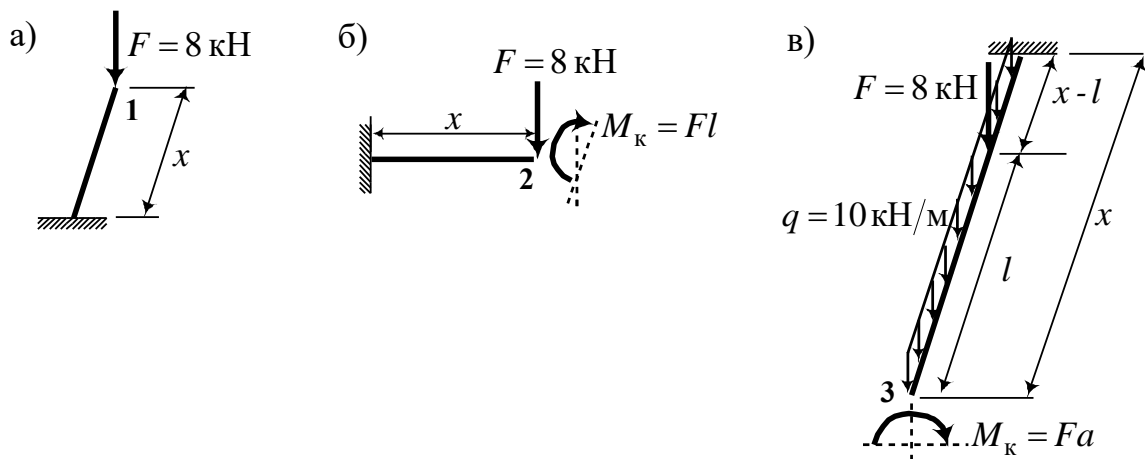


Рисунок 5.8 – Розрахункові схеми ділянок рами

Ділянка 2-3. Початок координат у точці 2; $0 \leq x \leq 1\text{ м}$
(рисунк 5.8, б).

$M = -Fx$. При $x = 0$ $M_2 = 0$; при $x = 1\text{ м}$ $M_3 = -8\text{ кНм}$.
 $M_{кр} = Fl = 12\text{ кНм}$.

Ділянка 3-4. Початок координат у точці 3; $0 \leq x \leq 3\text{ м}$
(рисунк 5.8, в).

$$M = -q \cdot \frac{x^2}{2} - F(x - l)$$

При $x = 0$ $M_3 = 12\text{ кНм}$; при $x = 3\text{ м}$ $M_4 = -57\text{ кНм}$.

$$M_{кр} = Fa = 8 \text{ кНм}.$$

Епюри згинальних і крутних моментів показано на рисунку 5.9.

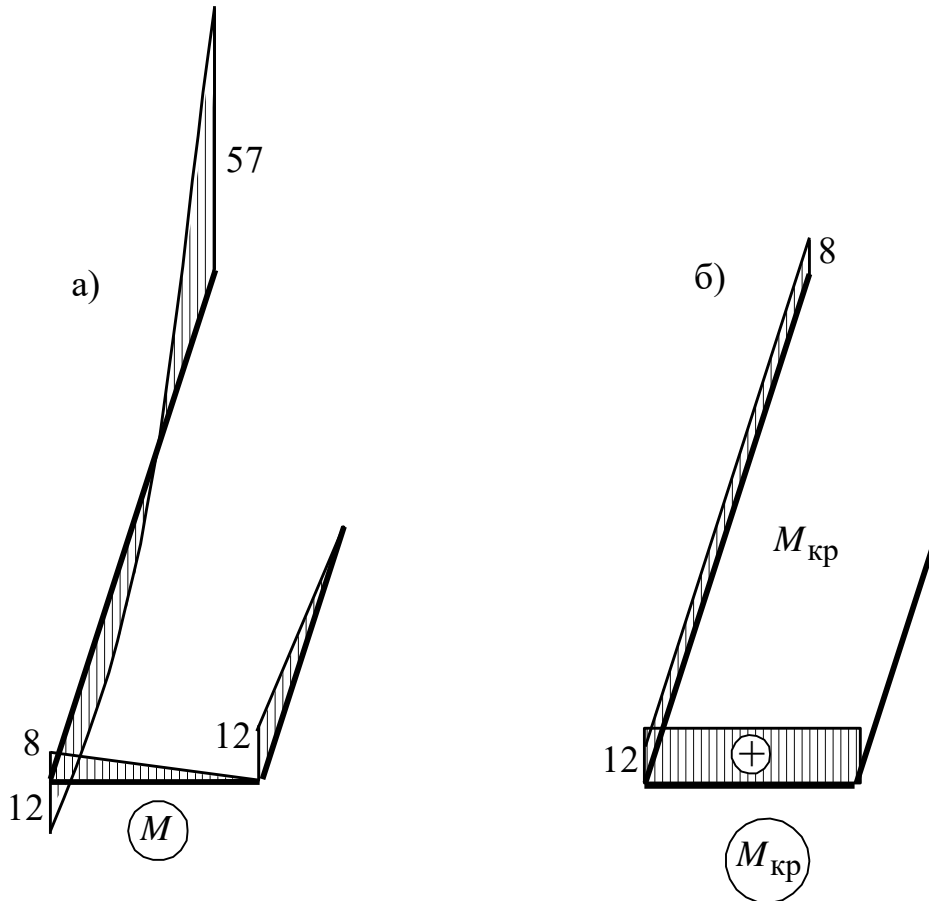


Рисунок 5.9 – Епюри згинальних M і крутних $M_{кр}$ моментів

По епюрах визначимо небезпечний переріз (переріз, у якому згинальний і крутний моменти одночасно сягають великих значень). Це переріз **4**. У цьому перерізі

$$M = -57 \text{ кНм}, M_{кр} = 8 \text{ кНм}.$$

Визначимо діаметр стержня за IV (енергетичною) теорією міцності:

$$D \geq 3 \sqrt{\frac{16}{\pi[\sigma](1-\alpha^4)}} \sqrt{4M^2 + 3M_{кр}^2} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{16}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot (1 - 0,5^4)} \sqrt{4 \cdot (57 \text{кНм})^2 + 3 \cdot (8 \text{кНм})^2}} = 0,1983 \text{ м};$$

$$D = 19,83 \text{ см}; \quad d = \alpha D = 0,5D = 9,915 \text{ см}.$$

6 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНЯ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ЗГИНІ

Сталевий стержень (Ст3) довжиною l стискується осьовою силою F .

Потрібно:

- 1 Знайти розміри поперечного перерізу при допустимому напруженні на осьовий стиск $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.
- 2 Обчислити значення критичної сили $F_{\text{кр}}$.
- 3 Визначити коефіцієнт запасу на стійкість.

Розглянемо приклади розрахунку стержнів різної гнучкості.

Приклад 1. Розв'язати задачу для стержня, наведеного на рисунку 6.1 (як буде показано, це стержень великої гнучкості).

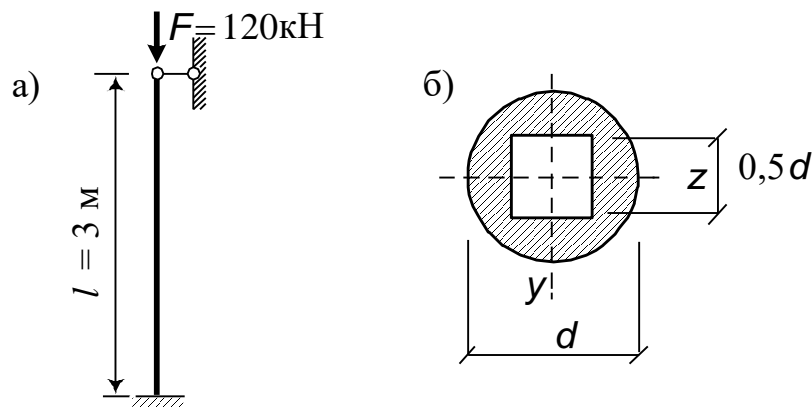


Рисунок 6.1 – Стиснутий стержень:
розрахункова схема стержня (а); схема поперечного перерізу (б)

Коефіцієнт приведеної довжини цього стержня дорівнює $\mu = 0,7$; приведена довжина

$$l_{\text{пр}} = \mu l = 0,7 \cdot 3 = 2,1 \text{ м}.$$

Розміри перерізу одержуємо з умови стійкості

$$\frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma], \quad (6.1)$$

де φ – коефіцієнт поздовжнього згину.

Для того, щоб скористатися умовою (6.1), виразимо геометричні характеристики перерізу стержня через невідомий розмір d . Подаємо переріз як складений: з круга вирізаний квадрат (п.п. 3.1 та 3.2, додаток А).

Площа поперечного перерізу

$$A = \frac{\pi d^2}{4} - (0,5)d^2 = 0,535 d^2; \quad (6.2)$$

мінімальний момент інерції

$$J_{\min} = J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{(0,5d)^4}{12} = 0,044 d^4; \quad (6.3)$$

мінімальний радіус інерції

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = 0,286 d; \quad (6.4)$$

гнучкість

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\min}} = \frac{2,1 \text{ м}}{0,286 d [\text{м}]} = \frac{7,34}{d}. \quad (6.5)$$

З (6.1) отримуємо

$$A = 0,535 d^2 = \frac{F}{\varphi[\sigma]}; \quad d = \sqrt{\frac{F}{\varphi \cdot 0,535 \cdot [\sigma]}}. \quad (6.6)$$

У вирази (6.6) входять дві невідомі величини: d і φ , які аналітично не виражаються одна через іншу. Тому шуканий розмір d визначаємо методом послідовних наближень. На першому наближенні значення φ задається довільним чином у межах від 0,19 до 0,5 (такі φ має стержень, що працює в межах пружності). *Задамо точність визначення φ до 2%.*

1 наближення. Задамо $\varphi_I = 0,19$.

Обчислюємо d за (6.6):

$$d = \sqrt{\frac{120 \text{кН}}{0,19 \cdot 0,535 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,086 \text{ м};$$

гнучкість згідно з (6.5) дорівнює

$$\lambda = \frac{7,34}{d} = \frac{7,34}{0,086} = 85.$$

Для визначення відповідного значення φ використовуємо табличну залежність $\lambda - \varphi$ для сталі Ст3, таблиця 6.1. Отримане значення $\lambda = 85$ попадає в середину інтервалу від $\lambda_1 = 80$ ($\varphi_1 = 0,75$) до $\lambda_2 = 90$ ($\varphi_2 = 0,69$), тому відповідне φ знаходимо як середнє значення між φ_1 і φ_2 :

$$\varphi = \frac{0,75 + 0,69}{2} = 0,72.$$

Різниця між отриманим значенням φ і прийнятим у першому наближенні φ_I очевидно становить більш 2%, тому переходимо до наступного наближення.

2 наближення.

$$\text{Приймаємо } \varphi_{II} = \frac{\varphi_I + \varphi}{2} = \frac{0,19 + 0,72}{2} = 0,455.$$

Повторюємо розрахунок:

$$d = \sqrt{\frac{120 \text{кН}}{0,455 \cdot 0,535 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,0555 \text{ м}; \quad \lambda = \frac{7,34}{0,0555} = 132.$$

Отримане значення λ попадає в інтервал між $\lambda_1 = 130$ ($\varphi_1 = 0,4$) і $\lambda_2 = 140$ ($\varphi_2 = 0,36$) у таблиці 6.1. Відповідне значення φ знаходимо за допомогою лінійної інтерполяції функції $\varphi(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = \\ &= 0,4 + \frac{0,36 - 0,4}{10} (132 - 130) = 0,392. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Похибка визначення φ дорівнює

$$\frac{|\varphi - \varphi_{II}|}{\varphi} \cdot 100 = \frac{|0,392 - 0,455|}{0,455} 100 \approx 14\% > 2\% .$$

Переходимо до наступного наближення.

3 наближення.

$$\text{Приймаємо } \varphi_{III} = \frac{\varphi_{II} + \varphi}{2} = \frac{0,392 + 0,455}{2} = 0,424 .$$

Повторюємо розрахунок:

$$d = \sqrt{\frac{120 \text{кН}}{0,424 \cdot 0,535 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,0575 \text{ м};$$
$$\lambda = \frac{7,34}{0,0572} = 128 .$$

За допомогою лінійної інтерполяції (6.7) знаходимо φ в інтервалі між $\lambda_1 = 120$ ($\varphi_1 = 0,45$) і $\lambda_2 = 130$ ($\varphi_2 = 0,4$), таблиця 6.1:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = 0,45 + \frac{0,4 - 0,45}{10} (128 - 120) = 0,41 .$$

Похибка визначення φ дорівнює

$$\frac{|\varphi - \varphi_{III}|}{\varphi} \cdot 100 = \frac{|0,41 - 0,424|}{0,424} 100 \approx 3\% > 2\% .$$

Переходимо до наступного наближення.

4 наближення.

$$\text{Приймаємо } \varphi_{IV} = \frac{\varphi_{III} + \varphi}{2} = \frac{0,41 + 0,424}{2} = 0,417 .$$

Повторюємо розрахунок:

$$d = \sqrt{\frac{120 \text{кН}}{0,417 \cdot 0,535 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,058 \text{ м};$$

$$\lambda = \frac{7,34}{0,058} = 127.$$

Гнучкість попадає у той самий інтервал, що в попередньому наближенні. Знаходимо φ згідно з (6.7):

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = 0,45 + \frac{0,4 - 0,45}{10} (127 - 120) = 0,415.$$

Похибка визначення φ дорівнює

$$\frac{|\varphi - \varphi_{IV}|}{\varphi} \cdot 100 = \frac{|0,415 - 0,41|}{0,41} 100 \approx 1,2\% < 2\%.$$

Необхідна точність досягнута. Приймаємо

$$d = 0,0558 \text{ м}, \quad \lambda = 127 > \lambda_{\text{гран}}.$$

Отримана гнучкість більша за граничну гнучкість $\lambda_{\text{гран}}$ (для сталі $\lambda_{\text{гран}} = 100$), тому критичну силу обчислюємо за формулою *Ейлера*

$$\begin{aligned} F_{\text{кр}} &= \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{l_{\text{пр}}^2} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,044 d^4}{l_{\text{пр}}^2} \\ &= \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 0,044 \cdot 0,0558^4 \text{ м}^4}{2,1^2 \text{ м}^2} = 234 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт запасу на стійкість

$$k = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{234}{120} = 1,95.$$

Приклад 2. Розв'язати задачу для стержня, наведеного на рисунку 6.2 (як буде показано, це стержень *середньої гнучкості*).

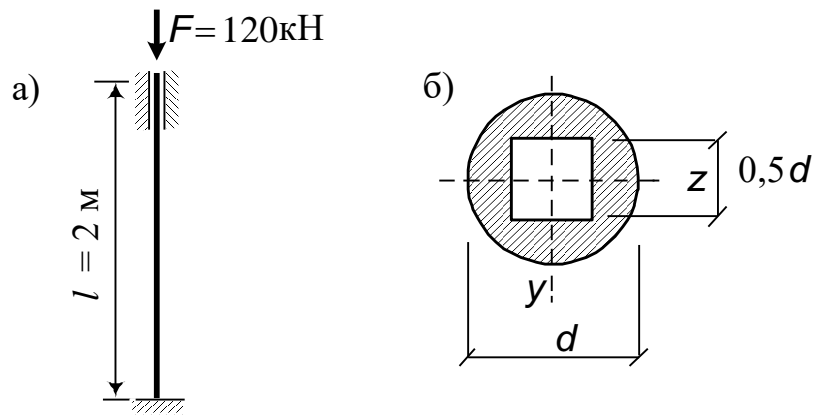


Рисунок 6.2 – Стиснутий стержень: розрахункова схема (а);
схема поперечного перерізу (б)

Коефіцієнт приведеної довжини цього стержня дорівнює $\mu = 0,5$; приведена довжина

$$l_{\text{пр}} = \mu l = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ м.}$$

Розміри перерізу, як і в прикладі 1, одержуємо з умови стійкості (6.1). Переріз має той самий вигляд, що у прикладі 1, тому його геометричні характеристики виражаються за формулами (6.2) – (6.4), діаметр – за формулою (6.6).

Гнучкість дорівнює

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\text{min}}} = \frac{1 \text{ м}}{0,286 d [\text{м}]} = \frac{3,5}{d}. \quad (6.8)$$

Виконуємо послідовні наближення, враховуючи (6.8).

1 наближення. Задамо $\varphi_I = 0,19$.

Обчислюємо

$$d = \sqrt{\frac{120 \text{ кН}}{0,19 \cdot 0,535 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,086 \text{ м}; \quad \lambda = \frac{3,5}{d} = \frac{3,5}{0,086} = 41.$$

За допомогою лінійної інтерполяції (6.7) знаходимо φ в інтервалі між $\lambda_1 = 40$ ($\varphi_1 = 0,92$) і $\lambda_2 = 50$ ($\varphi_2 = 0,89$), таблиця 6.1:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = 0,92 + \frac{0,89 - 0,92}{10} (41 - 40) = 0,917.$$

Відмінність між значенням φ і φ_I очевидно більше 1%, тому переходимо до наступного наближення.

2 наближення

$$\text{Приймаємо } \varphi_{II} = \frac{\varphi_I + \varphi}{2} = \frac{0,19 + 0,917}{2} = 0,554.$$

Повторюємо розрахунок:

$$d = \sqrt{\frac{120 \text{кН}}{0,554 \cdot 0,535 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,05 \text{ м}; \quad \lambda = \frac{3,5}{0,05} = 70.$$

Цьому значенню λ в таблиці 6.1 відповідає $\varphi = 0,81$.

Похибка визначення φ дорівнює

$$\frac{|\varphi - \varphi_{II}|}{\varphi} \cdot 100 = \frac{|0,81 - 0,554|}{0,554} 100 \approx 46\% > 2\%.$$

Переходимо до наступного наближення

3 наближення

$$\text{Приймаємо } \varphi_{III} = \frac{\varphi_{II} + \varphi}{2} = \frac{0,554 + 0,81}{2} = 0,682.$$

Повторюємо розрахунок:

$$d = \sqrt{\frac{120 \text{кН}}{0,682 \cdot 0,535 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,045 \text{ м}; \quad \lambda = \frac{3,5}{0,045} = 78.$$

За допомогою лінійної інтерполяції (6.7) знаходимо φ в інтервалі між $\lambda_1 = 70$ ($\varphi_1 = 0,81$) і $\lambda_2 = 80$ ($\varphi_2 = 0,75$), таблиця 6.1:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = 0,81 + \frac{0,75 - 0,81}{10} (78 - 70) = 0,762.$$

Похибка визначення φ дорівнює

$$\frac{|\varphi - \varphi_{III}|}{\varphi} \cdot 100 = \frac{|0,762 - 0,682|}{0,682} 100 \approx 12\% > 2\%.$$

Переходимо до наступного наближення

4 наближення

$$\text{Приймаємо } \varphi_{IV} = \frac{\varphi_{III} + \varphi}{2} = \frac{0,682 + 0,762}{2} = 0,722.$$

Повторюємо розрахунок:

$$d = \sqrt{\frac{120 \text{кН}}{0,722 \cdot 0,535 \cdot 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}}} = 0,044 \text{ м}; \quad \lambda = \frac{3,5}{0,044} = 80.$$

Згідно з таблицею 6.1 відповідне значення $\varphi = 0,75$.

Похибка визначення φ дорівнює

$$\frac{|\varphi - \varphi_{IV}|}{\varphi} \cdot 100 = \frac{|0,75 - 0,762|}{0,762} \cdot 100 \approx 1,6\% < 2\%.$$

Необхідна точність досягнута. Приймаємо

$$d = 0,044 \text{ м}.$$

Отримана гнучкість менша за граничну:

$$\lambda = 80 < \lambda_{\text{гран}} = 100,$$

тому критичну силу обчислюємо за формулою *Ясинського*

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda; \quad F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = \sigma_{\text{кр}} \cdot 0,535 d^2.$$

Коефіцієнти a, b для Ст3 дорівнюють

$$a = 310 \text{ МПа}; \quad b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Одержуємо

$$\sigma_{\text{кр}} = 310 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} - 1,14 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 80 = 218,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2};$$

$$F_{\text{кр}} = 218,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 0,535 \cdot 0,044^2 \text{ м}^2 = 227 \text{ кН}.$$

Коефіцієнт запасу на стійкість

$$k = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{227}{120} = 1,89.$$

Приклад 3. Розв'язати завдання 4 для стержня, наведеного на рисунку 6.3 (як буде показано, гнучкість цього стержня *більша за конструктивну гнучкість*).

Коефіцієнт приведеної довжини цього стержня дорівнює $\mu = 2$; приведена довжина

$$l_{\text{пр}} = \mu l = 2 \cdot 2,7 = 5,4 \text{ м.}$$

Розміри перерізу, як і в прикладі 1, одержуємо з умови стійкості (6.1). Переріз має той самий вигляд, що у прикладі 1, тому його геометричні характеристики виражаються за формулами (6.2) – (6.4), діаметр – за формулою (6.6).

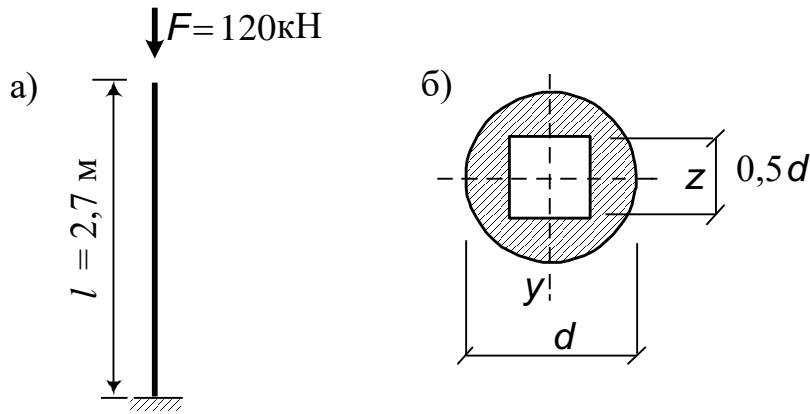


Рисунок 6.3 – Стиснутий стержень: розрахункова схема (а);
схема поперечного перерізу (б)

Гнучкість дорівнює

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\text{min}}} = \frac{5,4 \text{ м}}{0,286 d [\text{м}]} = \frac{18,9}{d}.$$

Виконавши, як у прикладах 1 і 2, послідовні наближення, одержимо

$$\lambda = 215 > \lambda_{\text{к}},$$

де $\lambda_{\text{к}}$ – конструктивна гнучкість, її значення для сталі $\lambda_{\text{к}} = 200$.

Для стержнів такої гнучкості розмір перерізу визначається з умови

$$\lambda = \lambda_{\text{к}}, \quad \text{тобто} \quad \frac{18,9}{d} = 200,$$

звідки

$$d = \frac{18,9}{200} = 0,095 \text{ м.}$$

Критичну силу знаходимо за формулою Ейлера, оскільки $\lambda > \lambda_{\text{гран}}$:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_{пр}^2} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,044d^4}{l_{пр}^2} =$$

$$= \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 0,044 \cdot 0,095^4 \text{ м}^4}{5,4^2 \text{ м}^2} = 254 \text{ кН}.$$

Коефіцієнт запасу на стійкість

$$k = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{254}{120} = 1,12.$$

Таблиця 6.1 – Значення коефіцієнтів поздовжнього згину φ

Гнучкість λ	Сталь марок			Чавун марок		Дюра- люміній Д16Т	Деревин а (сосна, ялина)
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48		
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16

150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14
160	0,29	0,23	0,21				0,12
170	0,26	0,21	0,19				0,11
180	0,23	0,19	0,17				0,10
190	0,21	0,17	0,15				0,09

7 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ ПЛОСКИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

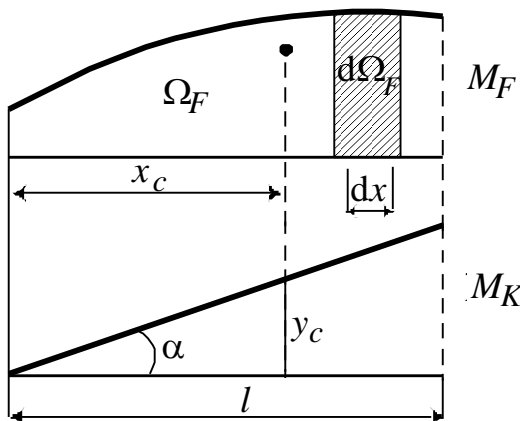
7.1 Правила перемножування епюр

При розрахунках методом сил доводиться багаторазово визначати інтеграли вигляду $I = \int_0^l M_K M_F dx$, де M_K і M_F – епюри згинальних моментів. Такий інтеграл називають добутком епюр M_K і M_F на ділянці довжиною l .

Якщо система складається з декількох ділянок, перемножувати епюри треба на кожній ділянці окремо, а результати додавати. При цьому на кожній ділянці можна використовувати різні методи перемножування, виходячи з міркувань зручності.

7.1.1 Правило Верещагіна перемножування епюр

Цим правилом можна користуватися у випадку, якщо одна з епюр (M_K) прямолінійна, а друга (M_F) може бути криволінійною, як показано на рисунку. При цьому криволінійна епюра на ділянці не повинна міняти знак (рисунк 7.1).



За правилом Верещагіна добуток двох епюр дорівнює добутку площі криволінійної епюри на ординату прямолінійної епюри під центром ваги криволінійної:

$$I = y_c \Omega_F.$$

Якщо обидві епюри \bar{M}_K та M_F прямолінійні, то байдуже, для якої з них брати площу, а для якої ординату під центром ваги. Це диктується тільки міркуваннями зручності.

Правило знаків. Якщо епюра M_F і ордината y_c відкладені по один бік від осі, то добуток $I = y_c \Omega_F$ додатний.

У таблиці 7.1 наведено приклади перемножування у деяких

випадках, коли правило Верещагіна зручно та раціонально використовувати.

Таблиця 7.1

7.1.2 Метод Сімпсона – Корноухова перемноження епюр

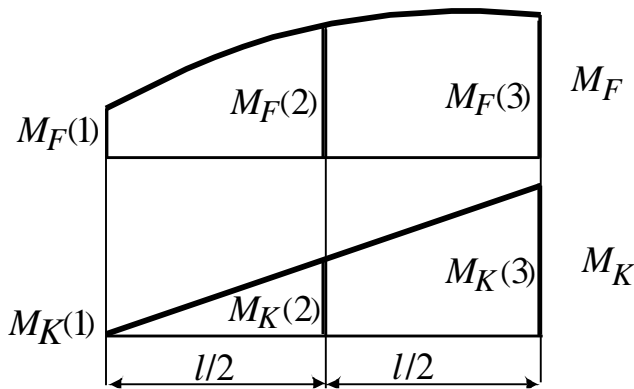


Рисунок 7.2

Метод Сімпсона – Корноухова – це один з методів наближеного інтегрування. Він дає точне значення інтеграла, якщо підінтегральний вираз – поліном не вище 3-го порядку, наприклад, одна епюра – пряма, а друга – парабола або обидві – прямі (рисунок 7.2).

Формула Сімпсона-Корноухова має вигляд

$$I = \int_0^l M_K M_F dx = \frac{l}{6} [M_K(1)M_F(1) + 4M_K(2)M_F(2) + M_K(3)M_F(3)].$$

Правило знаків. Якщо епюри M_K і M_F у точці відкладено по один бік від осі, добуток $M_K M_F$ додатний.

7.2 Приклад розрахунку статично невизначної рами методом сил

Для рами, яка наведена на рисунку 7.3, потрібно побудувати епюри внутрішніх зусиль M, Q, N . Співвідношення моментів інерції задано: $J_1/J_2 = 2$. Отже, жорсткості на різних елементах можна позначити так: $EJ_2 = EJ$, $EJ_1 = 2EJ$.

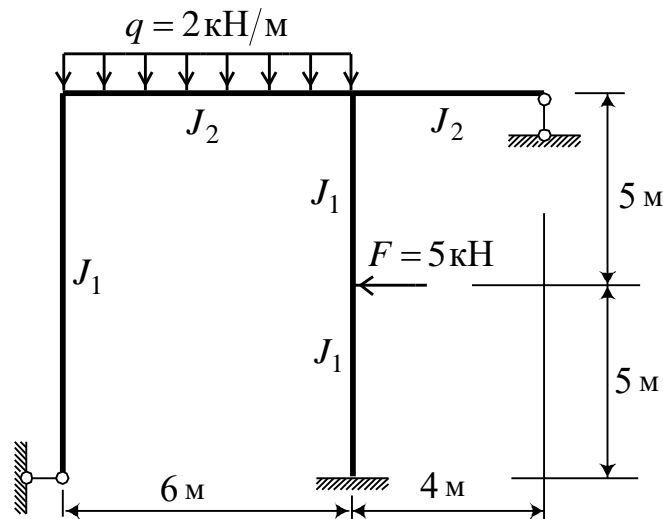
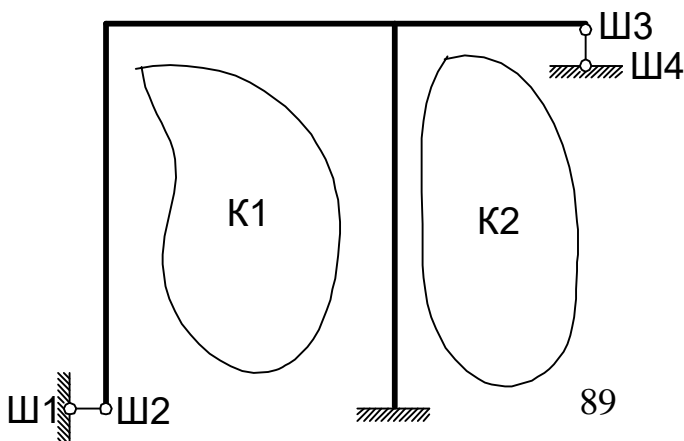


Рисунок 7.3 – Розрахункова схема статично невизначної рами

Розрахунок будемо виконувати поетапно.

• *Ступінь статичної невизначності* рами (рисунок 7.4) дорівнює



$$n = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 2 - 4 = 2,$$

де K – кількість замкнутих контурів;

Ш – кількість простих шарнірів.

Рисунок 7.4

Таким чином, система має два зайвих зв'язки.

• *Основна система.* Для отримання основної системи необхідно відкинути два зайвих зв'язки, щоб система стала статично визначною та залишилась геометрично незмінною. Реакції у цих зв'язках будуть замінені невідомими силами. Подивимось, як схематично без розрахунків будуть виглядати епюри згинальних моментів від зовнішнього навантаження у різних основних системах (рисунок 7.5).

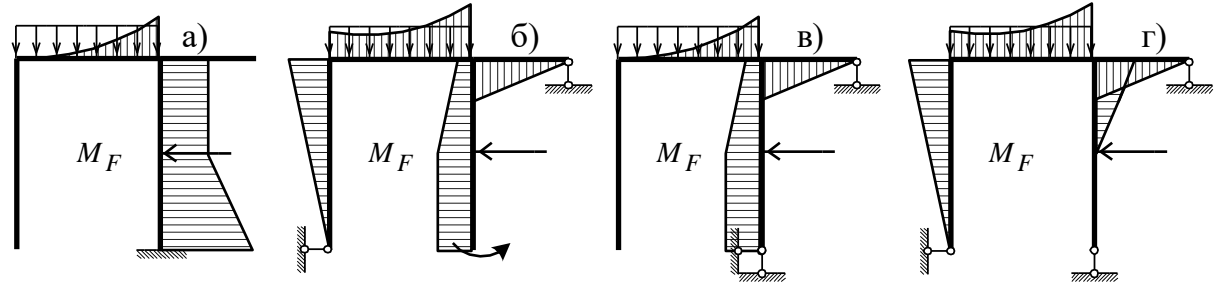


Рисунок 7.5 – До вибору основної системи методу сил

Раціональною є така основна система, у якій епюра згинальних моментів має якнайбільше нульових ділянок. Отже, вибираємо основну систему а). У цій системі відкинуто шарнірно-рухомі опори (кожна – одному зв'язку). Заміняємо реакції у цих опорах невідомими силами X_1 та X_2 , як показано на рисунку 7.6.

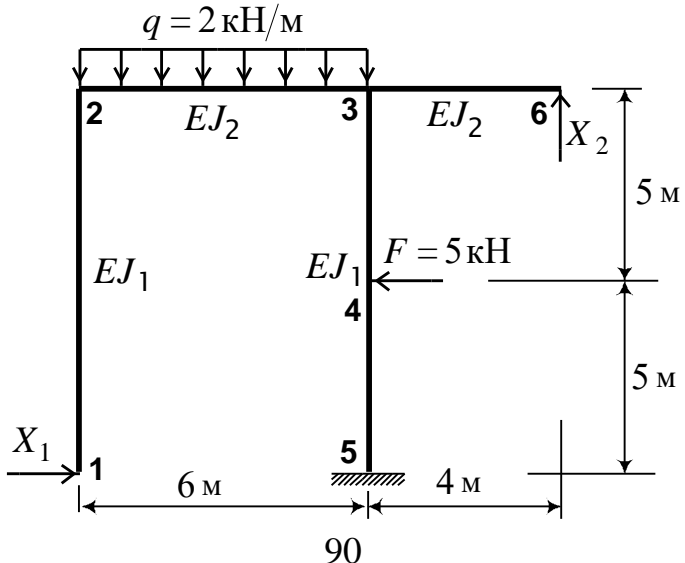


Рисунок 7.6 – Основна система методу сил

Система канонічних рівнянь для визначення X_1 , X_2 складається з двох рівнянь і має такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

• Будуємо епюру згинальних моментів в основній системі від заданого зовнішнього навантаження, тобто *вантажну епюру* M_F (рисунок 7.7). Епюри тут і далі будуємо відповідно до правил побудови епюр (правила п.п. 1.1 – 1.3, приклад розв’язання п.1.4).

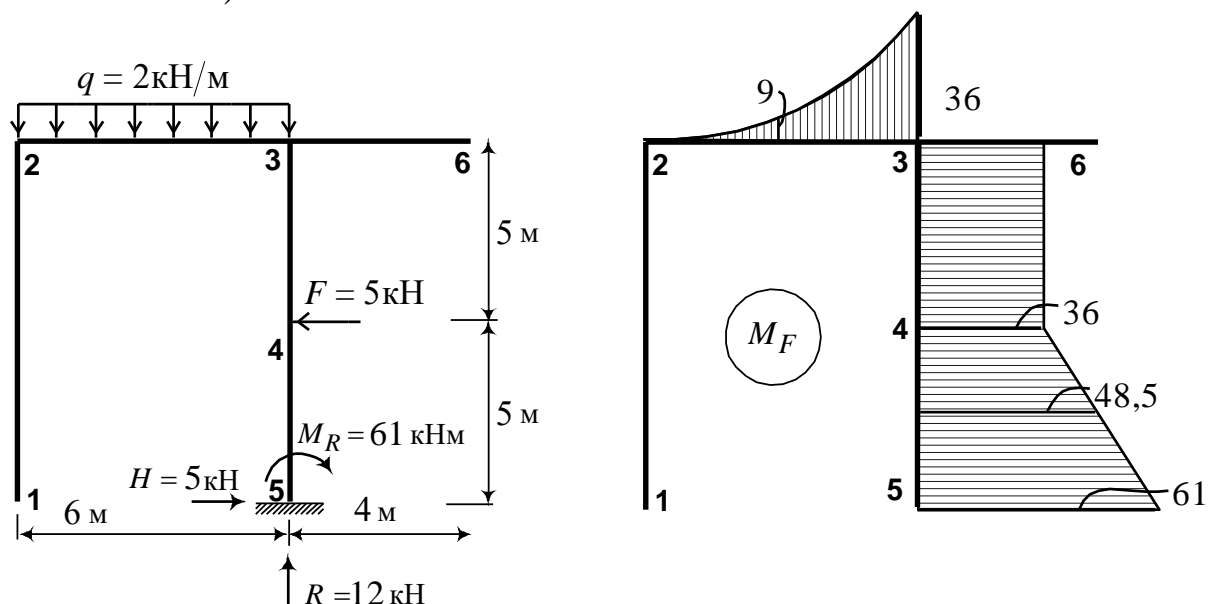


Рисунок 7.7 – Вантажна епюра методу сил

• Будуємо епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних сил, які прикладені за напрямком відкинутих зв’язків, тобто *одиничні епюри* M_1 та M_2 (рисунок 7.8).

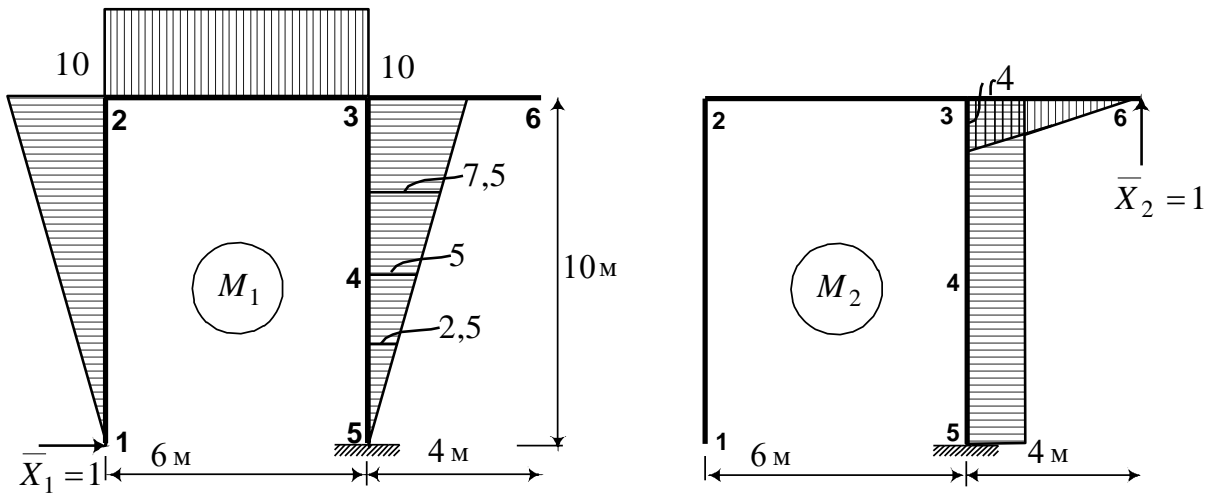


Рисунок 7.8 – Одиничні епюри

• *Визначаємо коефіцієнти при невідомих системи канонічних рівнянь.* При перемножуванні епюр у даному випадку використовуємо правило Верещагіна (п. 7.1) та враховуємо задане співвідношення жорсткостей на різних ділянках:

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_1^2 ds =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \cdot \underbrace{\frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{3}}_{\substack{\text{ділянка 1-2} \\ \text{трикутник} \times \\ \text{трикутник}}} + \frac{1}{EJ} \cdot \underbrace{(6 \cdot 10 \cdot 10)}_{\substack{\text{ділянка 2-3} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{прямокутник}}} + \frac{1}{2EJ} \cdot \underbrace{\frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{3}}_{\substack{\text{ділянка 3-5} \\ \text{трикутник} \times \\ \text{трикутник}}} = \frac{2800}{3EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_2^2 ds = \frac{1}{2EJ} \cdot \underbrace{(10 \cdot 4 \cdot 4)}_{\substack{\text{ділянка 3-5} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{прямокутник}}} + \frac{1}{EJ} \cdot \underbrace{\frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3}}_{\substack{\text{ділянка 3-6} \\ \text{трикутник} \times \\ \text{трикутник}}} = \frac{304}{3EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_1 M_2 ds = \frac{1}{2EJ} \cdot \underbrace{(10 \cdot 4 \cdot 5)}_{\substack{\text{ділянка 3-5} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{трикутник}}} = \frac{100}{EJ}.$$

• *Визначаємо вільні члени системи канонічних рівнянь.* При перемножуванні епюр у даному випадку використовуємо правило Верещагіна (п. 7.1) та враховуємо задане співвідношення жорсткостей на різних ділянках:

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \frac{1}{EJ} \int M_1 M_F ds = \\ &= \frac{1}{EJ} \frac{6}{6} (10 \cdot 0 + 4 \cdot 10 \cdot 9 + 10 \cdot 36) + \frac{1}{2EJ} \underbrace{(5 \cdot 36 \cdot 7,5)}_{\substack{\text{ділянка 3-4} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{трапеція}}} + \\ &+ \frac{1}{2EJ} \frac{5}{6} (5 \cdot 36 + 4 \cdot 2,5 \cdot 48,5 + 0 \cdot 61) = \frac{1672,083}{EJ}. \end{aligned}$$

ділянка 2-3, метод Сімпсона

$$\Delta_{2F} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_2 M_F ds = \frac{1}{2EJ} \underbrace{(5 \cdot 4 \cdot 36)}_{\substack{\text{ділянка 3-4} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{прямокутник}}} + \frac{1}{2EJ} \underbrace{(5 \cdot 4 \cdot 48,5)}_{\substack{\text{ділянка 4-5} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{трапеція}}} = \frac{845}{EJ}.$$

• Для перевірки правильності розрахунків будемо сумарну одиничну епюру $M_s = M_1 + M_2$, як показано на рисунку 7.9.

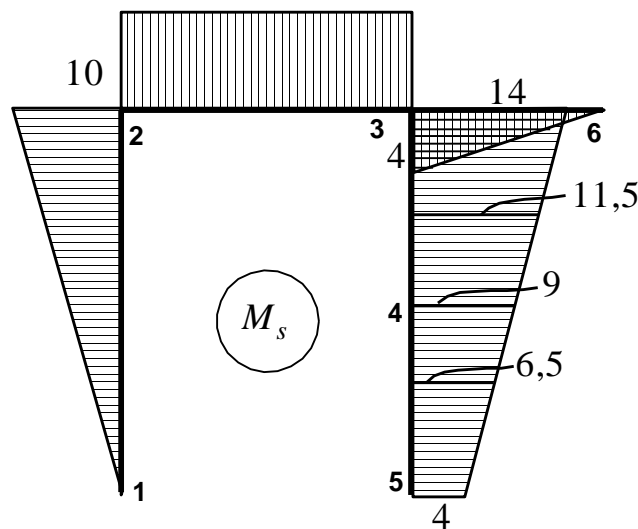


Рисунок 7.9 – Сумарна одинична епюра M_s

• *Порядкова перевірка розрахунку коефіцієнтів δ_{ij} системи канонічних рівнянь. Повинні виконуватись умови*

$$1) \sum \frac{1}{EJ} \int M_1 M_s ds = \delta_{11} + \delta_{12} \quad , \quad 2) \sum \frac{1}{EJ} \int M_2 M_s ds = \delta_{21} + \delta_{22} .$$

Перевіряємо:

$$1) \sum \frac{1}{EJ} \int M_1 M_s ds =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{3} + \frac{1}{EJ} \underbrace{(6 \cdot 10 \cdot 10)}_{\substack{\text{ділянка 2-3} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{прямокутник}}} + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{5}{6} \underbrace{(10 \cdot 14 + 4 \cdot 5 \cdot 9)}_{\substack{\text{ділянка 3-5} \\ \text{метод Сімпсона}}} = \frac{3100}{3EJ};$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{2800}{3EJ} + \frac{100}{EJ} = \frac{3100}{EJ};$$

$$2) \sum \frac{1}{EJ} \int M_2 M_s ds =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{10 \cdot 4 \cdot 9}{\substack{\text{ділянка 3-5} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{трапеція}}} + \frac{1}{EJ} \underbrace{\left(\frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3} \right)}_{\substack{\text{ділянка 3-6} \\ \text{трикутник} \times \\ \text{трикутник}}} = \frac{604}{3EJ};$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} = \frac{100}{EJ} + \frac{304}{3EJ} = \frac{604}{3EJ}.$$

Обидві умови перевірки виконуються.

• *Перевірка розрахунку вільних членів системи канонічних рівнянь.* Повинна виконуватись умова

$$\sum \frac{1}{EJ} \int M_F M_s ds = \Delta_{1F} + \Delta_{2F}.$$

Перевіряємо:

$$\sum \frac{1}{EJ} \int M_F M_s ds =$$

$$= \frac{1}{EJ} \frac{6}{6} \underbrace{(4 \cdot 10 \cdot 9 + 10 \cdot 36)}_{\substack{\text{ділянка 2-3, метод Сімпсона}}} + \frac{1}{2EJ} \underbrace{(5 \cdot 36 \cdot 11,5)}_{\substack{\text{ділянка 3-4} \\ \text{прямокутник} \times \\ \text{трапеція}}} +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \frac{5}{6} \underbrace{(9 \cdot 36 + 4 \cdot 6,5 \cdot 48,5 + 4 \cdot 61)}_{\substack{\text{ділянка 4-5, метод Сімпсона}}} = \frac{2517,083}{EJ}$$

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{1672,083}{EJ} + \frac{845}{EJ} = \frac{2571,083}{EJ}.$$

Умова перевірки виконується.

• *Записуємо систему канонічних рівнянь, підставивши отримані коефіцієнти та вільні члени у систему (7.1). Якщо помножити обидві частини рівнянь на EJ, отримаємо*

$$\begin{cases} \frac{2800}{3} X_1 + 100 X_2 + 1672,083 = 0 \\ 100 X_1 + \frac{304}{3} X_2 + 845 = 0 \end{cases}, \text{ чи } \begin{cases} 2800 X_1 + 300 X_2 = -5016,249 \\ 300 X_1 + 304 X_2 = -2535. \end{cases} \quad (7.2)$$

• *Розв'язання системи канонічних рівнянь*

З першого рівняння виражаємо

$$X_1 = \frac{-300 X_2 - 5016,249}{2800} = -0,107 X_2 - 1,792. \quad (7.3)$$

Підставляємо цей вираз у друге рівняння замість X_1 :

$$300 \cdot (-0,107 X_2 - 1,792) + 304 X_2 = -2535.$$

Після розкриття дужок та приведення подібних отримуємо

$$271,9 X_2 = -1997,4,$$

звідки

$$X_2 = -7,346 \text{ кН}.$$

Підставимо X_2 до формули (7.3), отримаємо

$$X_1 = -0,107 \cdot (-7,346) - 1,792 = -1,006 \text{ кН}.$$

Для перевірки підставляємо ці значення в обидва рівняння системи (7.2):

$$\begin{cases} 2800 \cdot (-1,006) + 300 \cdot (-7,346) = -5020,6 \\ 300 \cdot (-1,006) + 304 \cdot (-7,346) = -2534,984 \end{cases}$$

Похибка порівняно з правими частинами рівнянь (7.2) не перевищує 0,09 % у першому рівнянні та 0,001% у другому рівнянні.

• Будемо епюру згинальних моментів в заданій статично невизначній системі, користуючись формулою

$$M = X_1 M_1 + X_2 M_2 + M_F = (-1,006) M_1 + (-7,346) M_2 + M_F.$$

Для цього будемо епюри $X_1 M_1$, $X_2 M_2$ (рисунок 7.10). Епюра M_F вже побудована раніше (рисунок 7.7).

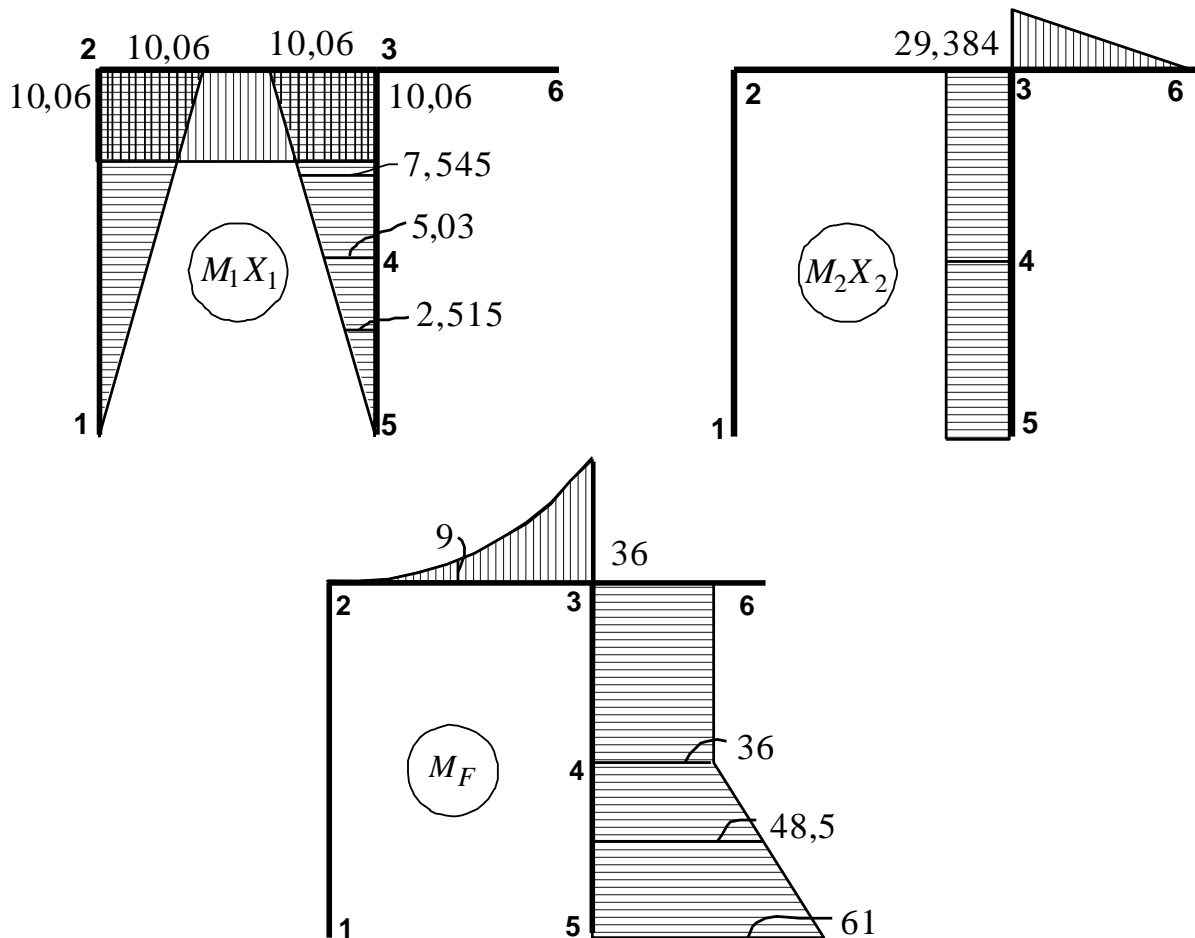


Рисунок 7.10 – Епюри $X_1 M_1$, $X_2 M_2$, M_F

Додаємо по точках $X_1 M_1$, $X_2 M_2$ и M_F .

Ділянка **1-2**:

точка 1: $M = 0 + 0 + 0 = 0$;

точка 2: $M = 10,06 + 0 + 0 = 10,06 \text{ кНм}$.

Ділянка **2-3**:

точка 2: $M = 10,06 + 0 + 0 = 10,06 \text{ кНм}$;

точка 3: $M = 10,06 + 0 - 36 = -25,94 \text{ кНм}$;

точка посередині ділянки: $M = 10,06 + 0 - 9 = 1,06 \text{ кНм}$

Ділянка 3-4:

точка 3: $M = 10,06 + 29,384 - 36 = 3,444 \text{ кНм}$;

точка 4: $M = 5,03 + 29,386 - 36 = -1,584 \text{ кНм}$.

Ділянка 4-5:

точка 5: $M = 0 + 29,386 - 61 = -31,614 \text{ кНм}$;

значення моменту в точці 4 вже отримане.

Ділянка 3-6:

точка 3: $M = 0 - 29,384 + 0 = -29,384 \text{ кНм}$;

точка 6: $M = 0 + 0 + 0 = 0$.

По цих значеннях остаточно отримуємо епюру M , яка показана на рисунку 7.11.

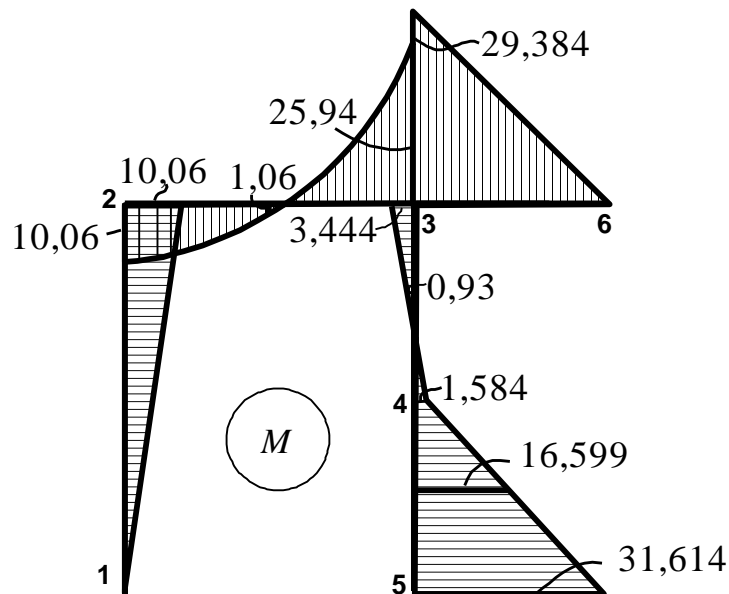
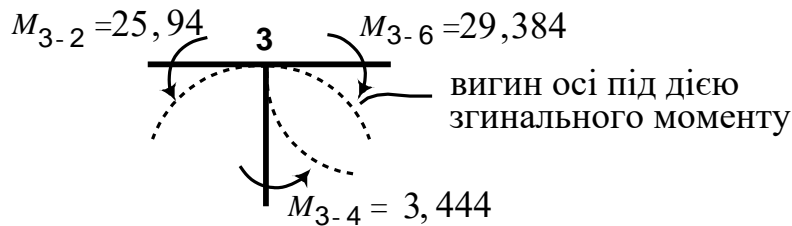


Рисунок 7.11 – Епюра згинальних моментів у заданій статично невизначній системі

• *Статична перевірка* епюри M . Перевіряємо виконання умови рівноваги $\sum M = 0$ у вузлах, де сходяться три чи більше

елементів. У даному випадку це вузол **3**. З епюри моментів видно, у який бік вигнута вісь кожного елемента (рисунок 7.12).



$$\Sigma M = 29,384 - 25,94 - 3,444 = 0$$

Рисунок 7.12

- *Деформаційна перевірка.* Повинна виконуватися умова

$$\sum \frac{1}{EJ} \int M M_s ds = 0.$$

Перевіряємо:

$$\begin{aligned} & \sum \frac{1}{EJ} \int M M_s ds = \\ & = - \frac{1}{2EJ} \underbrace{\frac{10 \cdot 10 \cdot 10,06}{3}}_{\substack{\text{ділянка 1-2} \\ \text{трикутник} \times \\ \text{трикутник}}} + \frac{6}{6EJ} \underbrace{(-10 \cdot 10,06 - 4 \cdot 10 \cdot 1,06 + 10 \cdot 25,94)}_{\text{ділянка 2-3, метод Сімпсона}} - \\ & - \frac{1}{EJ} \underbrace{\frac{4 \cdot 4 \cdot 29,384}{3}}_{\substack{\text{ділянка 3-6} \\ \text{трикутник} \times \\ \text{трикутник}}} + \frac{5}{6 \cdot 2EJ} \underbrace{(-14 \cdot 3,444 fl - 4 \cdot 11,5 \cdot 0,93 + 9 \cdot 1,584)}_{\text{ділянка 3-4, метод Сімпсона}} + \\ & + \frac{5}{6 \cdot 2EJ} \underbrace{(9 \cdot 1,584 + 4 \cdot 6,5 \cdot 16,599 + 4 \cdot 31,614)}_{\text{ділянка 4-5, метод Сімпсона}} = \frac{354,853 - 356,363}{EJ} = \frac{-1,51}{EJ} \end{aligned}$$

Похибка складає $(1,51/354,853) \cdot 100 \approx 0,4\%$ при допустимих 5%. Таким чином, епюру згинальних моментів у статично невизначній рамі побудовано правильно.

- *Побудова епюри Q*

Використовуємо побудовану епюру M (рисунок 7.11). Кожну її ділянку подаємо у вигляді шарнірно опертої балки, жорсткість на шарнірах задається відомими з епюри M моментами.

Якщо ділянка не завантажена розподіленим навантаженням, поперечна сила Q є сталою і визначається за формулою (рисунок 7.13, а); якщо на ділянці діє розподілене навантаження, еюра Q – похила пряма, і її ординати визначаються за формулами (рисунок 7.13, б). Якщо M є сталою, поперечна сила дорівнює нулю. Значення моментів підставляються до формул зі знаком «плюс», якщо їх напрям такий, як на рисунку 7.13. Напрям визначається тим, в який бік відкладений момент на епюрі M (рисунок 7.11). Побудову епюри Q на ділянках показано у таблиці 7.1.

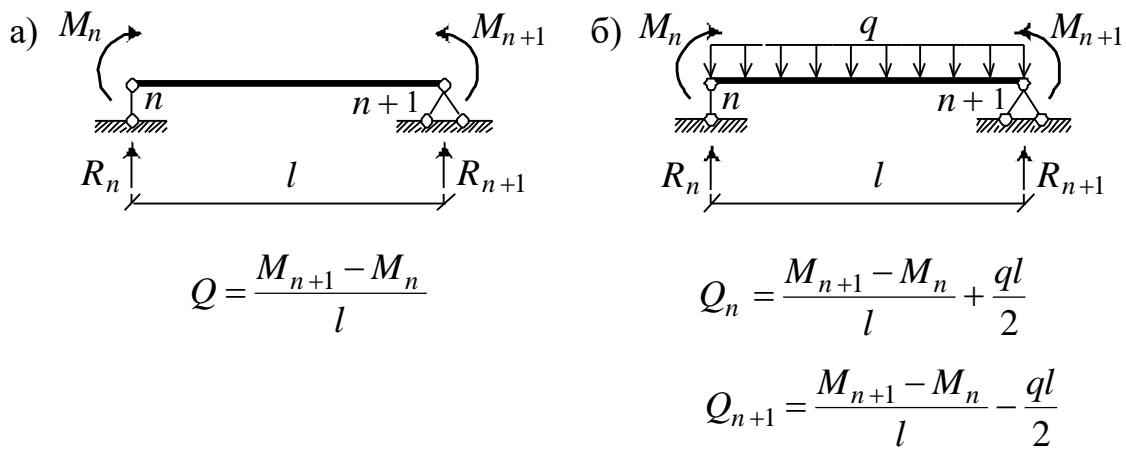
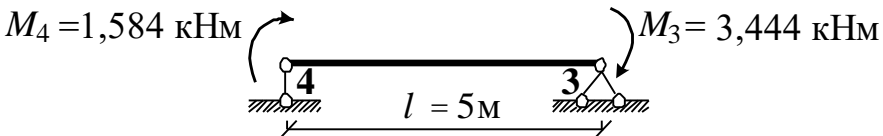


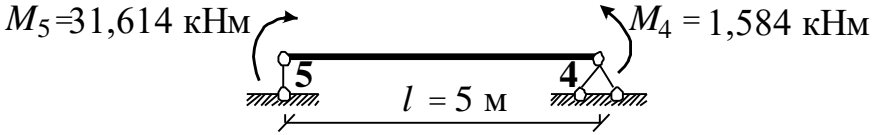
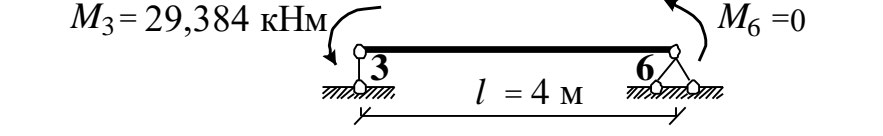
Рисунок 7.13 – До визначення поперечних сил

Таблиця 7.1

Ділянка рами	Розрахункова схема та поперечна сила
1	2
Ділянка 1-2 , розвернена за годинниковою стрілкою	$Q = \text{const} = \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{10,06 - 0}{10} = 1,006 \text{ кН}$
Ділянка 2-3	

	$Q_2 = \frac{M_3 - M_2}{l} + \frac{ql}{2} = \frac{(-25,94) - 10,06}{6} + \frac{2 \cdot 6}{2} = 0,$ $Q_3 = \frac{M_3 - M_2}{l} - \frac{ql}{2} = \frac{(-25,94) - 10,06}{6} - \frac{2 \cdot 6}{2} = -12 \text{ кН}$
Ділянка 3-4 , розвернена за годинниковою стрілкою	 $Q = \text{const} = \frac{M_3 - M_4}{l} = \frac{(-3,444) - 1,584}{5} = -1,006 \text{ кН}$

Продовження таблиці 7.1

1	2
Ділянка 4-5 , розвернена за годинниковою стрілкою	 $Q = \text{const} = \frac{M_4 - M_5}{l} = \frac{1,584 - 31,614}{5} = -6,006 \text{ кН}$
Ділянка 3-6	 $Q = \text{const} = \frac{M_6 - M_3}{l} = \frac{0 - (-29,384)}{4} = -7,346 \text{ кН}$

За отриманими значеннями будемо епюру Q (рисунок 7.14). На горизонтальних елементах додатні значення прийняте відкладати угору. На вертикальних елементах плюс можна відкладати у будь-який бік та вказувати знак на епюрі.

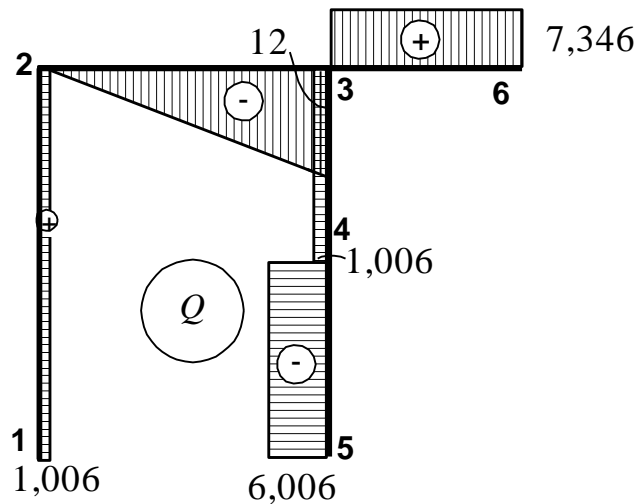


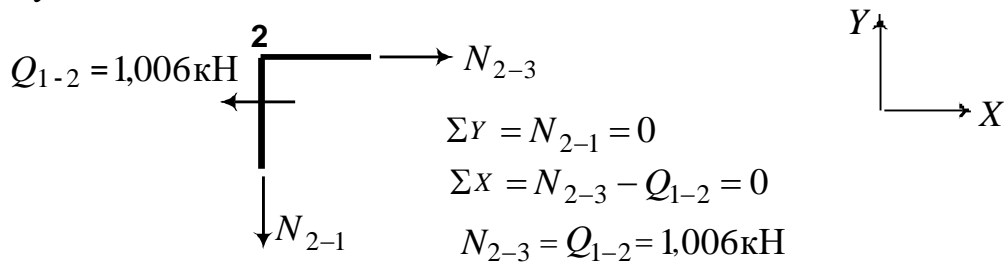
Рисунок 7.14 – Епюра Q

• *Побудова епюри N*

Використаємо побудовану епюру Q (рисунок 7.14). Будемо по черзі вирізати вузли, у яких з'єднуються елементи, і записувати в них рівняння рівноваги (рисунок 7.15).

Згідно з правилом знаків, додатна поперечна сила Q задає поворот відносно зафіксованого вузла за годинниковою стрілкою, додатна поздовжня сила N спрямована від вузла.

Вузол 2



Вузол 3

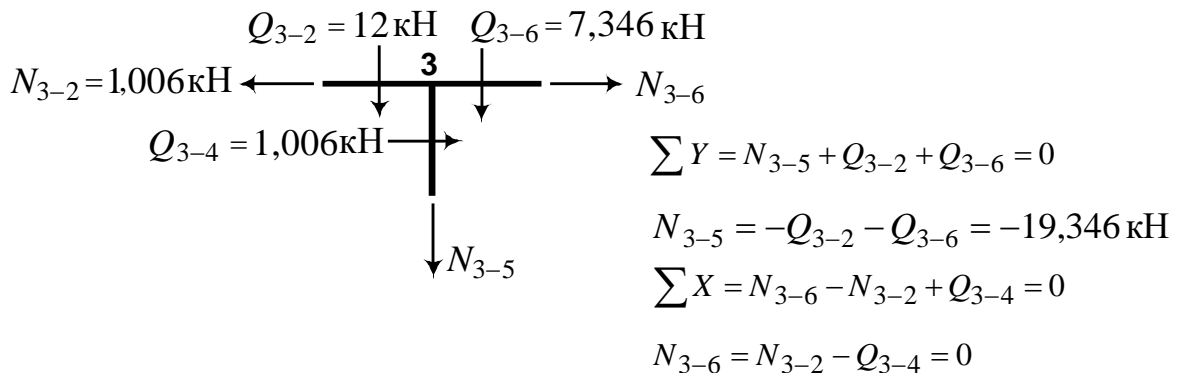


Рисунок 7.15 – До визначення поздовжніх сил у вузлах

Таким чином, отримано значення поздовжньої сили на всіх ділянках. За отриманими значеннями будемо епюру поздовжніх сил N (рисунок 7.16). Правила побудови – такі самі, як для епюри Q .

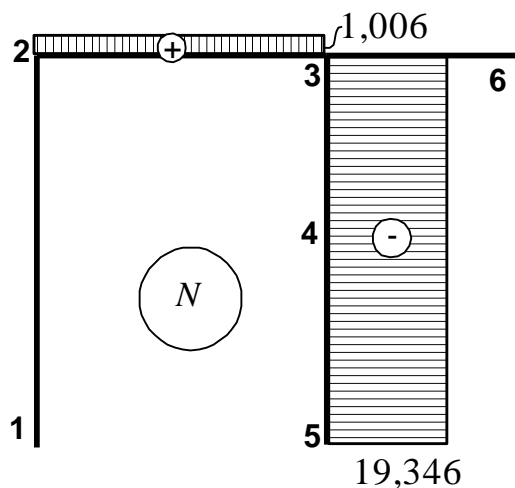


Рисунок 7.16 – Епюра поздовжніх сил N

- *Спільна статична перевірка епюр M , Q та N*

Покажемо на схемі зовнішнє навантаження на раму та зусилля, які виникають в її опорних перерізах (рисунок 7.17). Для цього використаємо побудовані епюри M , Q і N (рисунки 7.11, 7.14, 7.16).

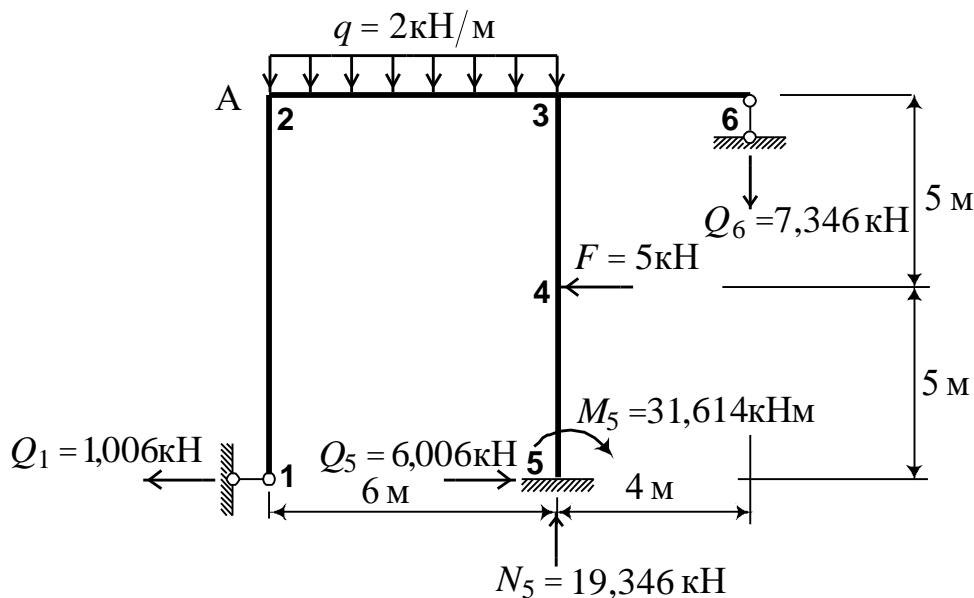


Рисунок 7.17 – До спільної статичної перевірки епюр M , Q , N

Потрібно переконатися, що зовнішнє навантаження врівноважується реакціями опор, тобто

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_A = 0 \text{ (A – довільна точка):}$$

$$\sum X = -Q_1 + Q_5 - F = -1,006 + 6,006 - 5 = 0;$$

$$\sum Y = N_5 - q \cdot 6 - Q_6 = 19,346 - 2 \cdot 6 - 7,346 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= Q_1 \cdot 10 + q \cdot 6^2 / 2 + F \cdot 5 + M_5 - Q_5 \cdot 10 - N_5 \cdot 6 + Q_6 \cdot 10 = \\ &= 1,006 \cdot 10 + 2 \cdot 6^2 / 2 + 5 \cdot 5 + 31,614 - 6,006 \cdot 10 - 19,346 \cdot 6 + 7,346 \cdot 10 = \\ &= 176,134 - 176,136 = -0,002. \end{aligned}$$

Похибка складає $0,002/176,134 \approx 0,001\%$.

Завдання розв'язане правильно.

8 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ ПЛОСКИХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Для рами, яка наведена на рисунку 8.1, потрібно побудувати епюри внутрішніх зусиль M, Q, N .

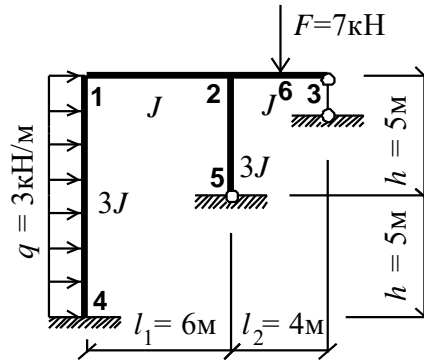


Рисунок 8.1 – Розрахункова схема статично невизначної рами

Розрахунок будемо виконувати поетапно.

• Число невідомих методу переміщень дорівнює ступеню кінематичної невизначності

$$n = n_y + n_{\text{л}},$$

де n_y – число невідомих кутів повороту системи,

$n_{\text{л}}$ – число незалежних лінійних переміщень вузлів.

Число n_y дорівнює числу жорстких вузлів (це вузли, у яких кінці принаймні двох стержнів, що сходяться в ньому, жорстко з'єднані).

Для схеми 8.1 це вузли **1** та **2**:

$$n_y = 2.$$

Для визначення $n_{\text{л}}$ раму перетворюють у шарнірно-стержневу систему. Для цього у кожен жорсткий вузол вставляється повний шарнір, а жорсткі зв'язки перетворюються у шарнірно-нерухомі, як показано на рисунку 8.2. Тоді $n_{\text{л}}$ дорівнює числу ступенів свободи заданої системи

$$n_{\text{л}} = Ш - 3K = 10 - 3 \cdot 3 = 1,$$

де K – кількість замкнутих контурів,
 Ш – кількість простих шарнірів.

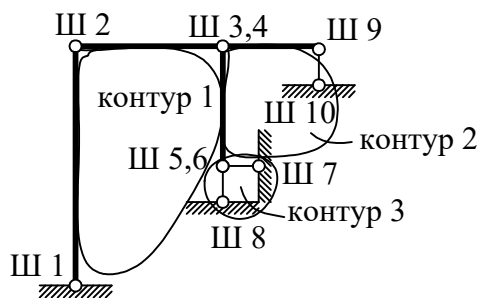


Рисунок 8.2

Таким чином, загальне число невідомих дорівнює 3:

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 2 + 1 = 3.$$

• *Основна система*

Для отримання основної системи необхідно закріпити всі рухливі вузли.

Для уникнення лінійних зміщень ставимо додаткові опорні стержні по напрямку можливого лінійного зміщення. У даній схемі можливе горизонтальне лінійне зміщення, тому ставимо додатковий горизонтальний зв'язок у вузол **3** (рисунок 8.3, а).

Для уникнення поворотів поставимо додаткові плаваючі защемлення в усі жорсткі вузли (вузли 1 та 2, рисунок 8.3, б). Такі защемлення перешкоджають тільки повороту, не перешкоджаючи лінійним зміщенням.

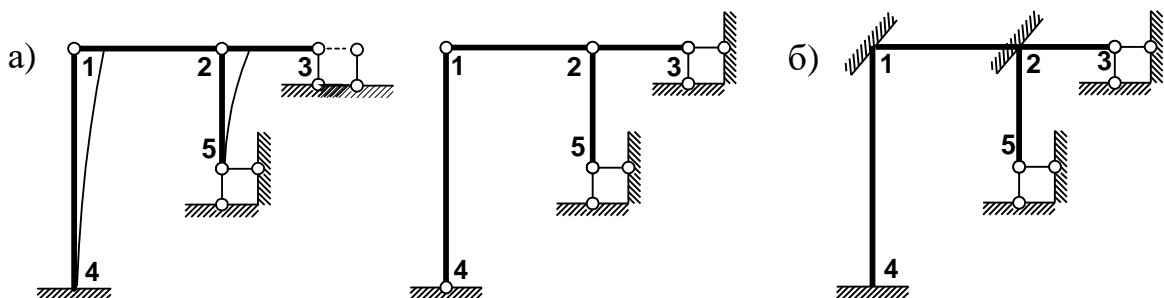


Рисунок 8.3 – До вибору основної системи: можливе лінійне зміщення та додатковий лінійний зв'язок (а); плаваючі защемлення (б)

Якщо показати у вузлах невідомі переміщення, отримаємо основну систему (рисунок 8.4).

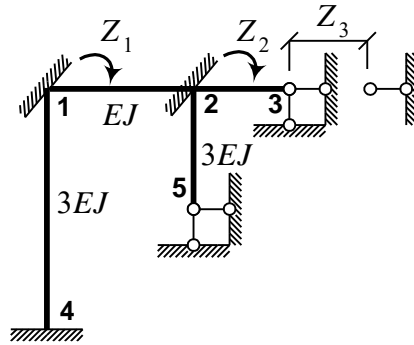


Рисунок 8.4 – Основна система методу переміщень

Система канонічних рівнянь для визначення Z_1, Z_2, Z_3 .

Через введення додаткових зв'язків в основній системі виникають їх реакції R_1, R_2, R_3 , які порушують рівновагу системи і, отже, мають дорівнювати нулю. Ця умова формулюється у вигляді *системи канонічних рівнянь методу переміщень* у даному випадку з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1F} = 0 \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2F} = 0 \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3F} = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

- Будуємо *вантажну епюру* та *одиничні епюри*.

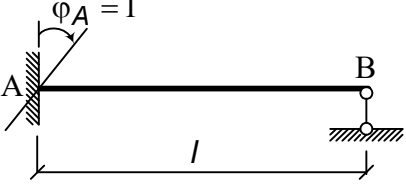
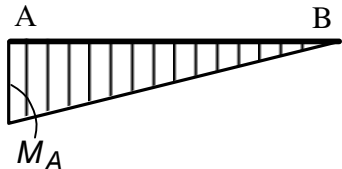
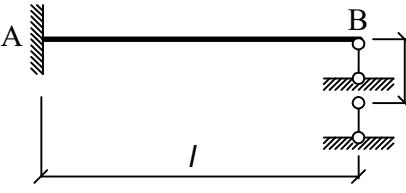
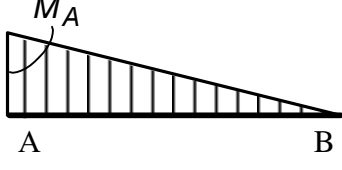
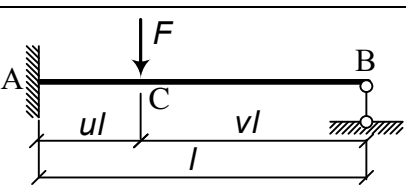
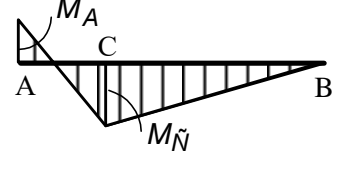
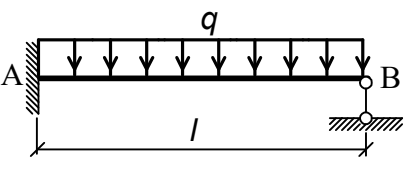
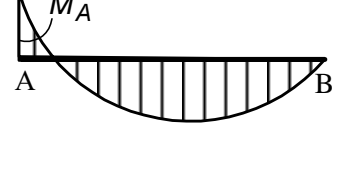
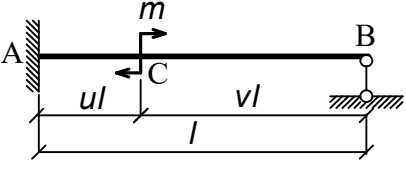
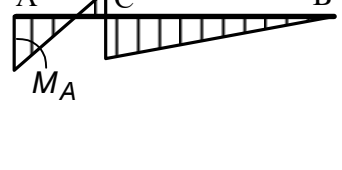
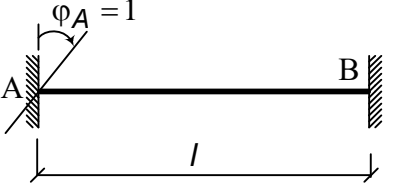
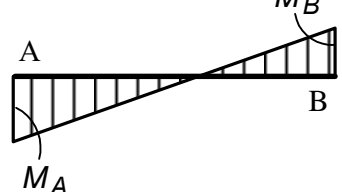
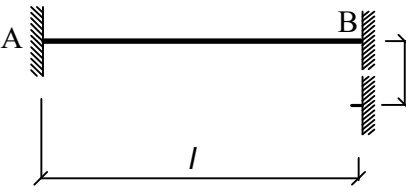
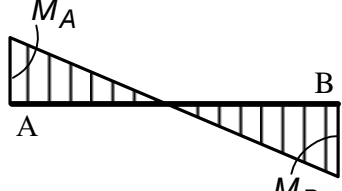
Вантажна епюра M_F – це епюра згинальних моментів в основній системі від заданого зовнішнього навантаження.

Одинична епюра M_i ($i=1, 2, 3$) – це епюра згинальних моментів в основній системі від одиничних переміщень, прикладених за напрямком невідомого Z_1, Z_2 чи Z_3 .

Кожен елемент основної системи являє собою балку постійної жорсткості, причому ці балки є статично невизначними (рисунок 8.4 – балки **1-4, 2-5, 1-2, 2-3**).

Для того, щоб побудувати епюру M_i чи M_F в основній системі, достатньо побудувати цю епюру для кожної з складових статично невизначних балок, наприклад, методом сил (п. 7.2). Для спрощення розрахунків користуються набором вже побудованих епюр, які зведені у таблицю 8.1 – таблицю стандартних розв'язків.

Таблиця 8.1 – Таблиця стандартних розв’язків

	Схеми стержнів та навантажень	Епюри згинальних моментів	Формули
	1	2	3
1			$M_A = \frac{3EJ}{l}$
2			$M_A = \frac{3EJ}{l^2}$
3			$M_A = \frac{Fl}{2}v(1-v^2)$ $M_C = \frac{Fl}{2}u^2v(3-u)$
4			$M_A = \frac{ql^2}{8}$
5			$M_A = \frac{m}{2}(3v^2 - 1)$
8			$M_A = \frac{4EJ}{l}$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$
9			$M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2}$

Продовження таблиці 8.1

	1	2	3
10			$M_A = u v^2 F l$ $M_B = u^2 v F l$ $M_C = 2 u^2 v^2 F l$
11			$M_A = M_B = \frac{q l^2}{12}$
12			$M_A = m v (3 u - 1)$ $M_B = m u (3 v - 1)$

Епюра згинальних моментів M_F в основній системі від зовнішнього навантаження наведена на рисунку 8.5 (при побудові використаємо схему 11 для стояка **1-4**, схему 3 для елемента **2-3**).

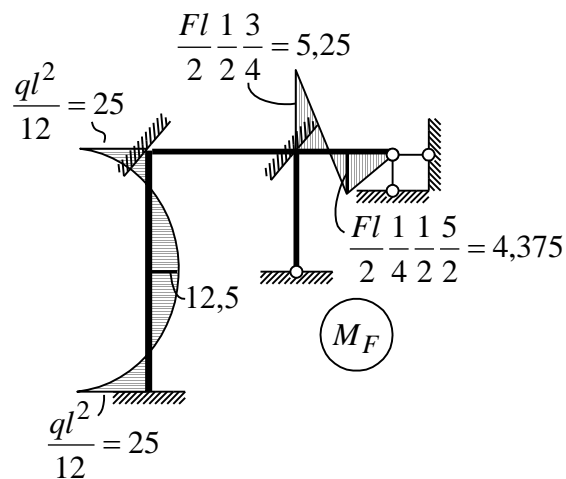


Рисунок 8.5 – Епюра M_F

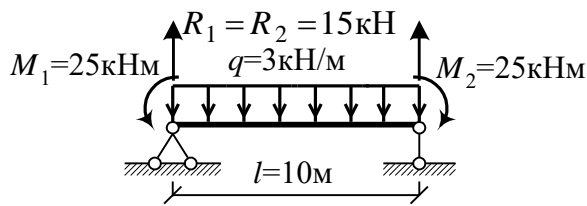


Рисунок 8.6

Значення згинального моменту посередині стояка отримане як для балки на двох шарнірних опорах з відомими моментами на опорах (рисунок 8.6):

$$\text{при } x = 5\text{м } M = -M_1 + R_1x - q \frac{x^2}{2} = 12,5\text{кНм.}$$

Покажемо деформовану вісь рами та епюру моментів від кожного з одиничних переміщень $\bar{Z}_i = 1$ (рисунок 8.7).

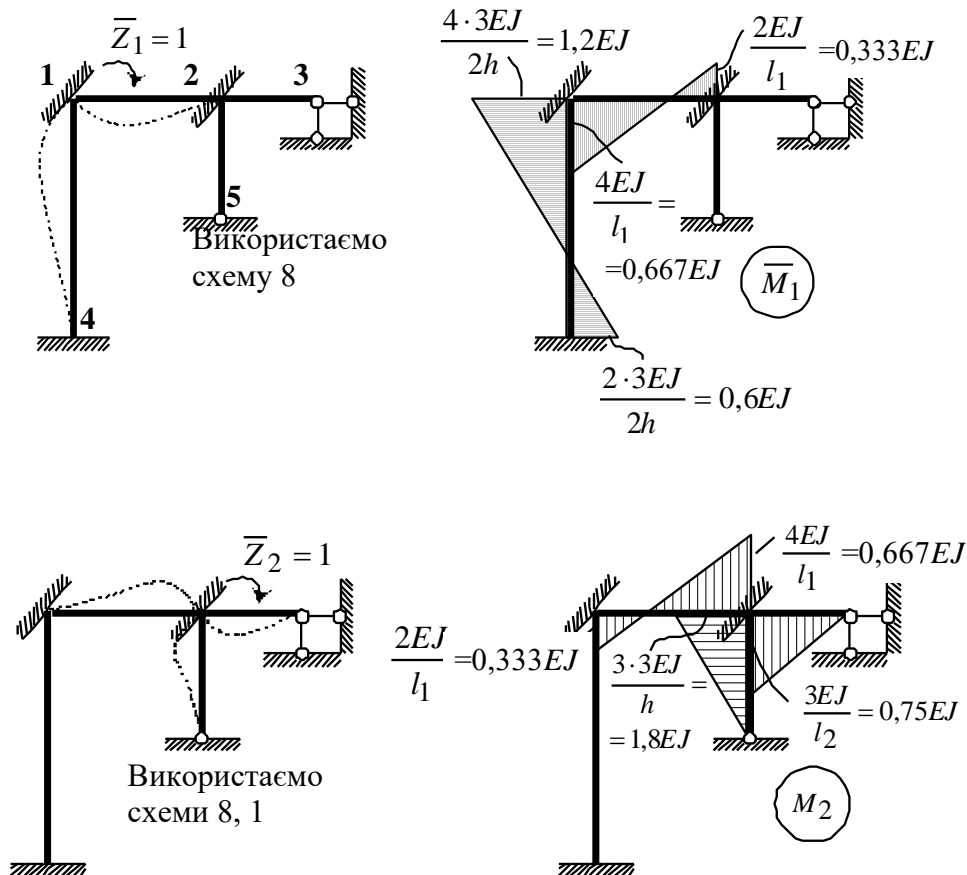


Рисунок 8.7 – Побудова одиничних епюр, аркуш 1

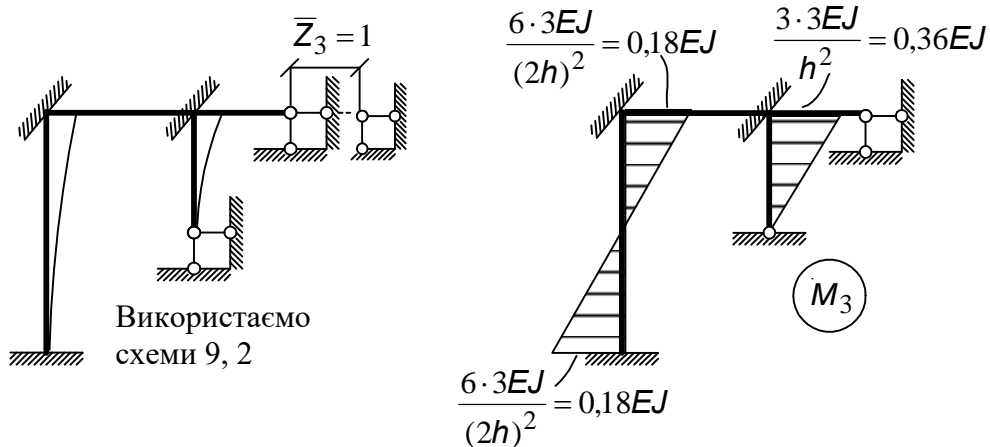


Рисунок 8.7, аркуш 2

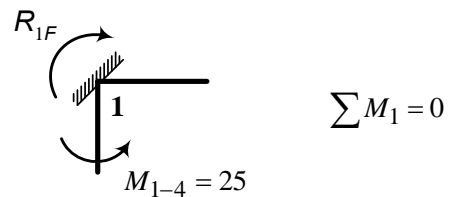
- *Визначаємо вільні члени системи канонічних рівнянь.*

Дотримуємося нумерації на рисунку 8.4.

Вільні члени визначаємо вирізанням вузлів по епюрі M_F .

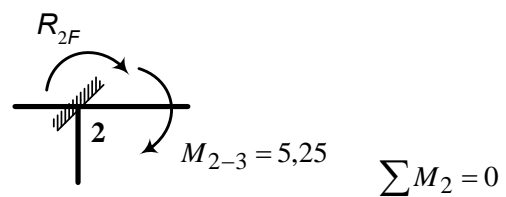
R_{1F} – це реакція зв’язку **1** на зовнішнє навантаження, знаходимо її вирізанням вузла **1**:

$$R_{1F} = 25.$$

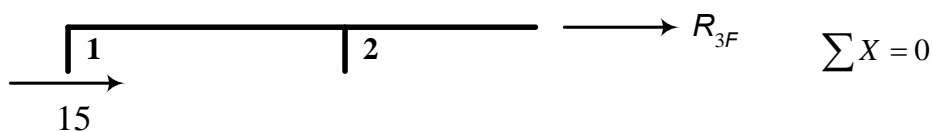


R_{2F} – це реакція зв’язку **2** на зовнішнє навантаження, знаходимо її вирізанням вузла **2**:

$$R_{2F} = -5,25.$$



R_{3F} – це реакція зв’язку **3** на зовнішнє навантаження, знаходимо її відтинанням верхньої частини рами:

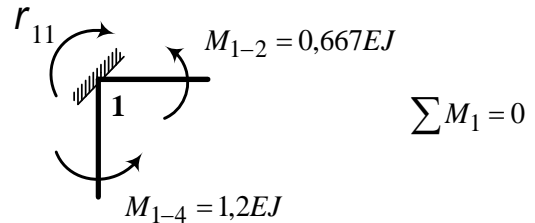


$$R_{3F} = -15.$$

• *Визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь.*

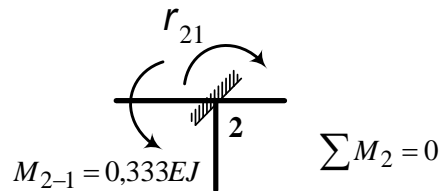
Реактивні моменти r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} визначаємо вирізанням вузлів. Для перевірки коефіцієнтів використаємо умову $r_{ij} = r_{ji}$.

Коефіцієнт r_{11} – це реактивний момент зв'язку **1** від одиничного повороту зв'язку **1**. Тому визначаємо його по епюрі M_1 вирізанням вузла **1**. З умови рівноваги витікає



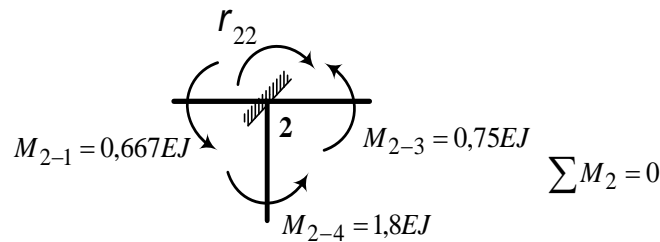
$$r_{11} = M_{1-2} + M_{1-4} = 1,867EJ .$$

Коефіцієнт r_{21} – це реактивний момент зв'язку **2** від одиничного повороту зв'язку **1**. Тому визначаємо його по епюрі M_1 вирізанням вузла **2**:



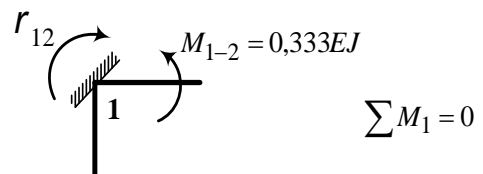
$$r_{21} = M_{2-1} = 0,333EJ .$$

Коефіцієнт r_{22} визначаємо по епюрі M_2 вирізанням вузла **2**:



$$r_{22} = 3,217EJ .$$

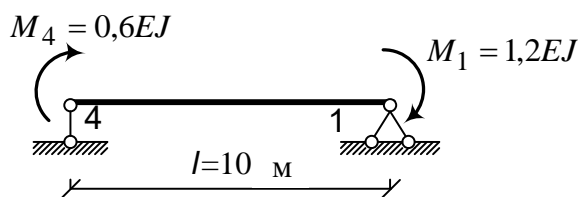
Перевірка. Для перевірки розрахунку r_{21} визначимо коефіцієнт r_{12} – реактивний момент зв'язку **1** від одиничного повороту зв'язку **2**. Для цього вирізаємо вузол **1** на епюрі M_2 :



$$r_{12} = M_{1-2} = 0,333EJ = r_{21} , \text{ значить } r_{12} \text{ розрахований правильно.}$$

Коефіцієнти r_{31} , r_{32} , r_{33} є лінійними реакціями зв'язку **3**. Для їх визначення відсічемо верхню частину рами і скористаємося по черзі одиничними епюрами.

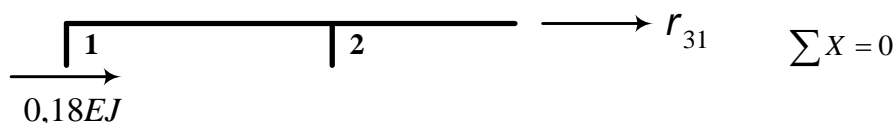
Коефіцієнт r_{31} – це реакція зв'язку **3** на одиничний поворот $\bar{Z}_1 = 1$. Визначаємо по епюрі M_1 . Спочатку визначимо поперечні сили, які діють у вузлах **1** і **2** (правила на рисунку 7.13). Для цього розглянемо елементи **1-4** та **2-5** як окремі балки з прикладеними на кінцях відомими моментами:



$$Q = \text{const} = -0,18EJ.$$

Очевидно, у вузлі **2** (елемент **2-5**) поперечна сила відсутня.

Покажемо сили, які діють на верхню відсічену частину рами, і складемо умову рівноваги:



$$r_{31} = -0,18EJ.$$

Аналогічно визначимо коефіцієнт r_{32} по епюрі M_2 , r_{33} – по епюрі M_3 :



$$r_{32} = -0,36EJ.$$

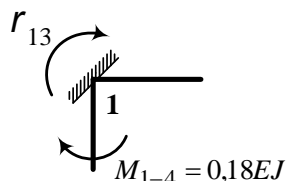


$$r_{33} = 0,108EJ.$$

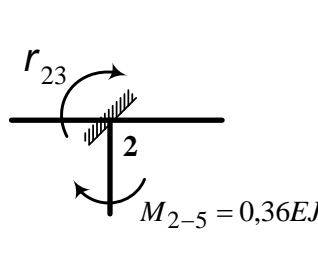
Перевірка

Для перевірки умов $r_{32} = r_{23}$, $r_{31} = r_{13}$ визначимо коефіцієнти r_{13} і r_{23} .

Коефіцієнт r_{13} – це реактивний момент у зв'язку **1** на одиничне зміщення зв'язку **3**, тому визначаємо r_{13} по епюрі M_3 вирізанням вузла **1**:



$$\sum M_1 = 0 \quad r_{13} = -0,18EJ = r_{31}.$$



$$\sum M_2 = 0$$

Коефіцієнт r_{23} – це реактивний момент у зв'язку **2** на одиничне зміщення зв'язку **3**, тому визначаємо r_{23} по епюрі \bar{M}_3 вирізанням вузла **2**:

$$r_{23} = -0,36EJ = r_{32}$$

Коефіцієнти r_{13} , r_{23} розраховані правильно.

• *Записуємо систему канонічних рівнянь*, підставивши отримані коефіцієнти та вільні члени у систему (8.1). Якщо поділити обидві частини рівнянь на EJ , отримаємо

$$\begin{cases} 1,867Z_1 + 0,333Z_2 - 0,18Z_3 + 25/EJ = 0 \\ 0,333Z_1 + 3,217Z_2 - 0,36Z_3 - 5,25/EJ = 0 \\ -0,18Z_1 - 0,36Z_2 + 0,108Z_3 - 15/EJ = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи будь-яким відомим методом дає такі значення невідомих:

$$Z_1 = 4,775/EJ, \quad Z_2 = 28,024/EJ, \quad Z_3 = 240,26/EJ.$$

• *Будуємо епюру згинальних моментів в заданій статично невизначній системі*, користуючись формулою

$$M = Z_1M_1 + Z_2M_2 + Z_3M_3 + M_F = \quad (8.2)$$

$$= \frac{4,775}{EJ} M_1 + \frac{28,024}{EJ} M_2 + \frac{240,26}{EJ} M_3 + M_F.$$

Для цього будуюмо епюри $Z_1 M_1, Z_2 M_2, Z_3 M_3$, рисунок 8.8 (епюру M_F побудовано раніше).

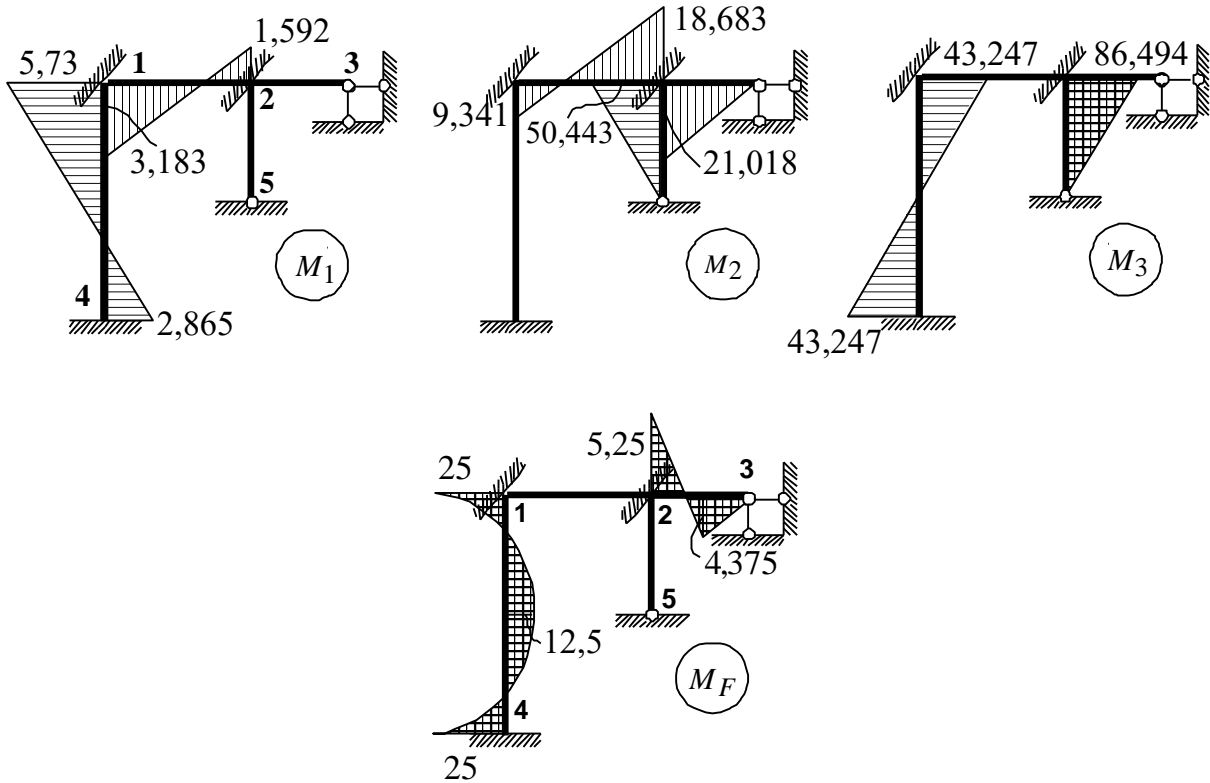


Рисунок 8.8 – Епюри $Z_1 M_1, Z_2 M_2, Z_3 M_3, M_F$

Склавши ці епюри по точках за формулою (8.2), одержимо епюру згинальних моментів у заданій статично невизначній системі (рисунок 8.9).

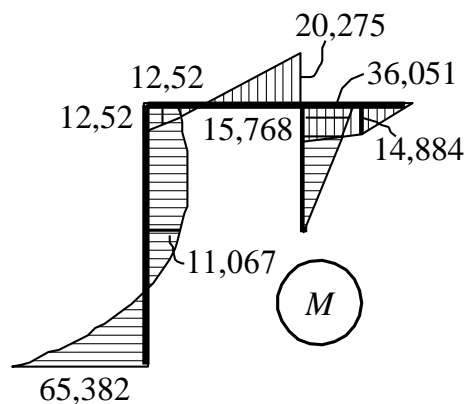
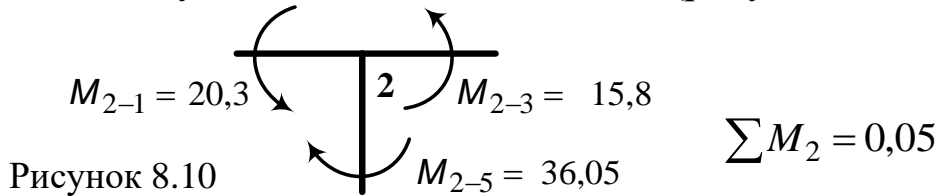


Рисунок 8.9 – Епюра згинальних моментів у заданій

статично невизначній системі

• *Статична перевірка* епюри M . Перевіряємо виконання умови рівноваги $\sum M = 0$ у вузлах, де сходяться три чи більше елементів. У даному випадку це вузол **2**. З епюри моментів видно, у який бік вигнута вісь кожного елемента (рисунок 8.10).



• *Деформаційна перевірка*. Повинна виконуватися умова

$$\sum \frac{1}{EJ} \int M M_s ds = 0,$$

де M_s – сумарна одинична епюра у будь-якій основній системі методу сил.

Щоб здійснити цю перевірку, обираємо основну систему методу сил для заданої рами (рисунок 8.11, а) і будуємо одиничні епюри методу сил (рисунок 8.11, б). Сумарна одинична епюра $M_s = M_1 + M_3 + M_3$ та епюра M (яку треба перевірити) показані на рисунку 8.11, в.

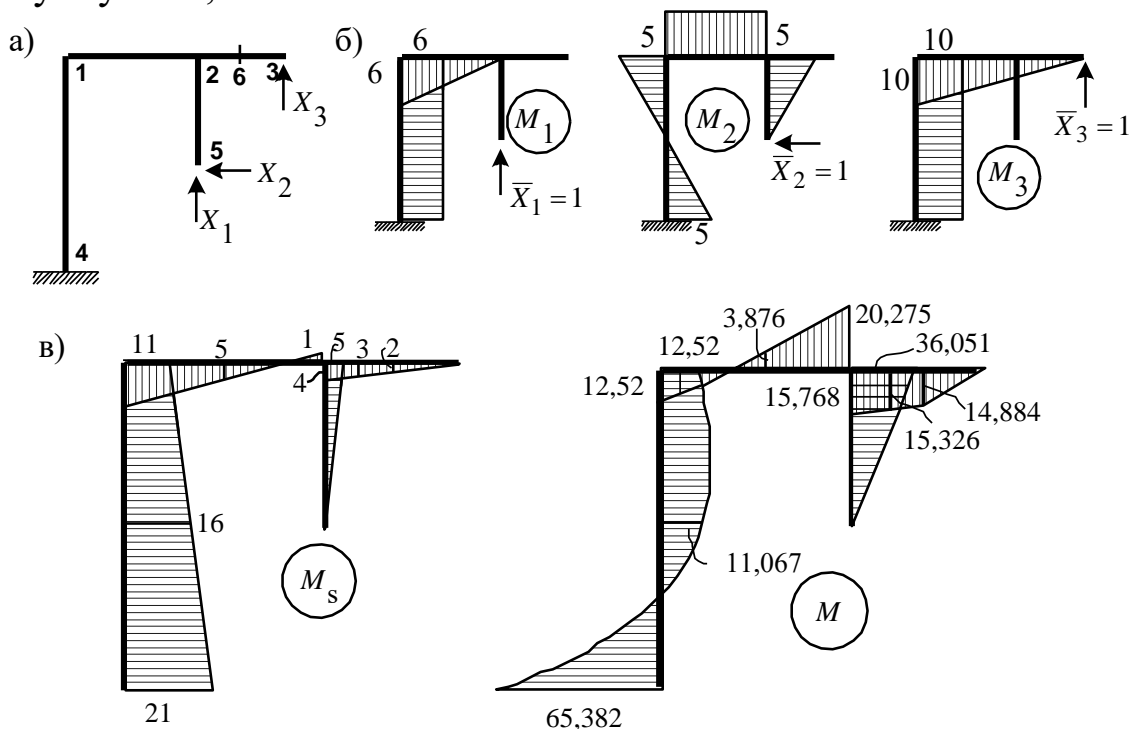


Рисунок 8.11 – До виконання деформаційної перевірки:

основна система методу сил (а); одиничні епюри методу сил (б);
сумарна одинична епюра методу сил та епюра M (в)

Здійснюємо перевірку, користуючись правилами перемноження епюр (п. 7.1):

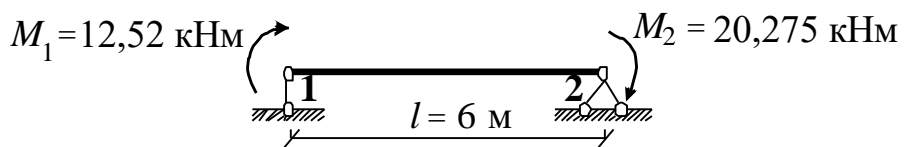
$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{EJ} \int M M_s ds &= \frac{10}{6 \cdot 3EJ} (-65,382 \cdot 21 + 4 \cdot 11,067 \cdot 16 + 12,517 \cdot 11) + \\ &\quad \text{ділянка 1-4, метод Сімпсона} \\ &+ \frac{6}{6EJ} (12,52 \cdot 11 - 4 \cdot 3,876 \cdot 5 + 20,275 \cdot 1) + \\ &\quad \text{ділянка 1-2, метод Сімпсона} \\ &+ \frac{1}{3EJ} \frac{5 \cdot 36,051 \cdot 5}{3} + \frac{2}{6EJ} (15,768 \cdot 4 + 4 \cdot 15,326 \cdot 3 + 14,884 \cdot 2) + \\ &\quad \text{ділянка 2-5} \quad \text{ділянка 2-6, метод Сімпсона} \\ &\quad \text{трикутник} \times \\ &\quad \text{трикутник} \\ &+ \frac{1}{3EJ} \frac{2 \cdot 14,884 \cdot 2}{3} = \frac{840,237 - 840,310}{EJ} = \frac{-0,047}{EJ} \\ &\quad \text{ділянка 3-6} \\ &\quad \text{трикутник} \times \\ &\quad \text{трикутник} \end{aligned}$$

Похибка складає $(0,073/840,237) \cdot 100 \approx 0,01\%$ при допустимих 5%. Таким чином, епюру згинальних моментів у статично невизначній рамі побудовано правильно.

• Побудова епюри Q

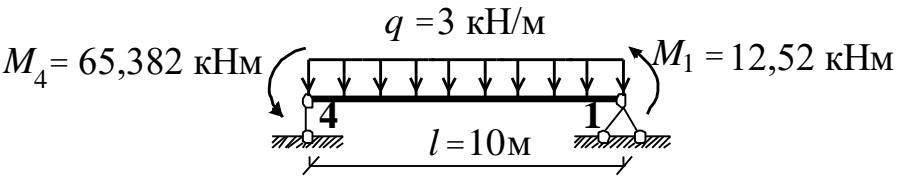
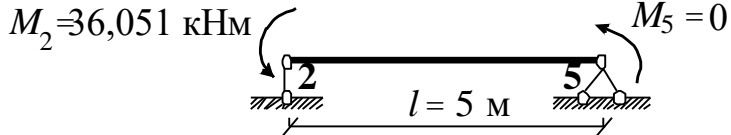
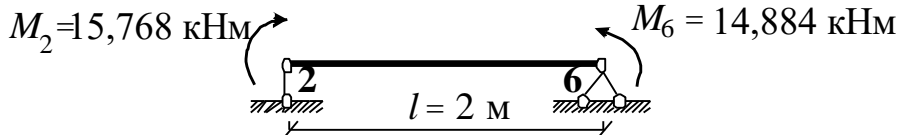
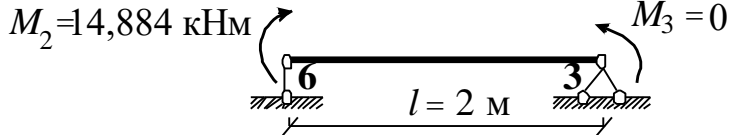
Використовуємо побудовану епюру M (рисунок 8.9). Кожну її ділянку подаємо в вигляді шарнірно-опертої балки, жорсткість на шарнірах задається відомими з епюри M моментами за правилами на рисунку 7.13, як показано у таблиці 8.2.

Таблиця 8.2

Ділянка рами	Розрахункова схема та поперечна сила
1	2
Ділянка 1-2	

$$Q = \text{const} = \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{(-20,275) - 12,52}{6} = -5,466$$

Продовження таблиці 8.2

1	2
<p>Ділянка 1-4, розвернена за годинниковою стрілкою</p>	 $Q = \text{const} = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{ql}{2} = \frac{12,52 - (-65,382)}{10} + \frac{3 \cdot 10}{2} = 22,79 \text{ кН},$ $Q = \text{const} = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{ql}{2} = \frac{12,52 - (-65,382)}{10} + \frac{3 \cdot 10}{2} = 22,79 \text{ кН}$
<p>Ділянка 2-5, розвернена за годинниковою стрілкою</p>	 $Q = \text{const} = \frac{M_5 - M_2}{l} = \frac{-(-36,051)}{5} = 7,21 \text{ кН}$
<p>Ділянка 2-6</p>	 $Q = \text{const} = \frac{M_6 - M_2}{l} = \frac{14,884 - 15,768}{2} = -0,442 \text{ кН}$
<p>Ділянка 3-6</p>	 $Q = \text{const} = \frac{M_3 - M_6}{l} = \frac{-14,884}{2} = -7,442 \text{ кН}$

За отриманими значеннями будемо епюру Q (рисунок 8.12). На горизонтальних елементах додатні значення

прийняте відкладати угору. На вертикальних елементах плюс можна відкладати у будь-який бік та вказувати знак на епюрі.

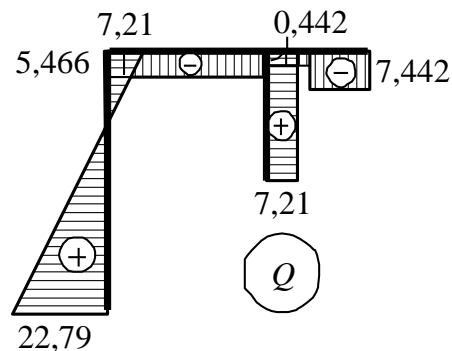


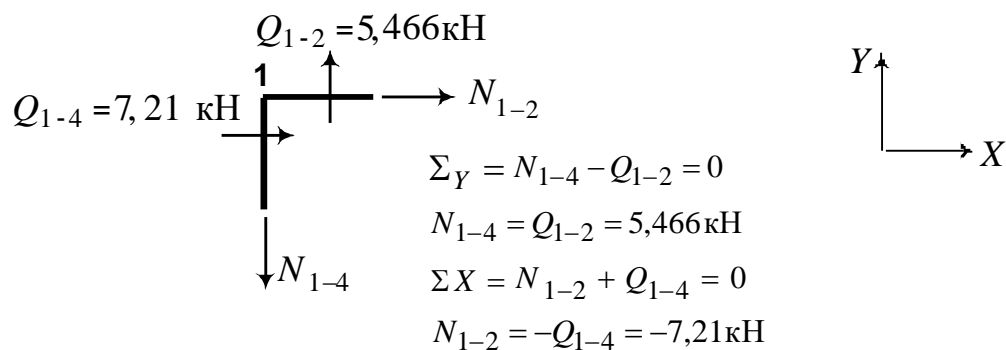
Рисунок 8.12 – Епюра Q

• Побудова епюри N

Використаємо побудовану епюру Q (рисунок 8.12). Будемо по черзі вирізати вузли, у яких з'єднуються елементи, і записувати в них рівняння рівноваги (рисунок 8.13).

Згідно з правилом знаків, додатна поперечна сила Q задає поворот відносно зафіксованого вузла за годинниковою стрілкою, додатна поздовжня сила N спрямована від вузла.

Вузол 1



Вузол 2

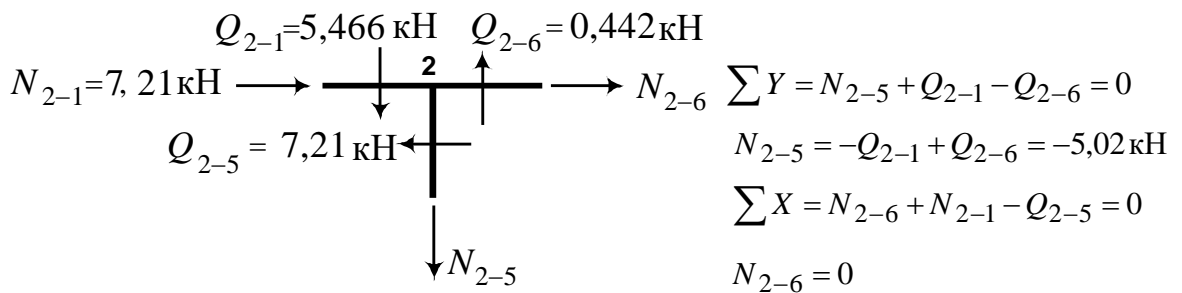


Рисунок 8.13 – Визначення поздовжніх сил у вузлах

Таким чином, отримано значення поздовжньої сили на всіх ділянках. За отриманими значеннями будемо епюру поздовжніх сил N (рисунок 8.14). Правила побудови – такі самі, як для епюри Q .

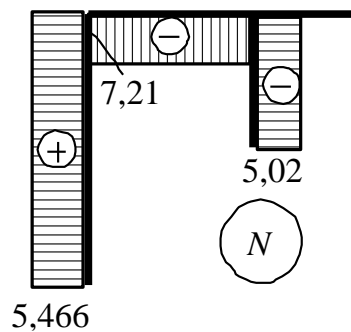


Рисунок 8.14 – Епюра поздовжніх сил N

- *Спільна статична перевірка епюр M , Q та N*

Покажемо на схемі (рисунок 8.15) зовнішнє навантаження на раму та зусилля, які виникають в її опорних перерізах. Для цього використаємо побудовані епюри M , Q і N (рисунки 8.9, 8.12, 8.14).

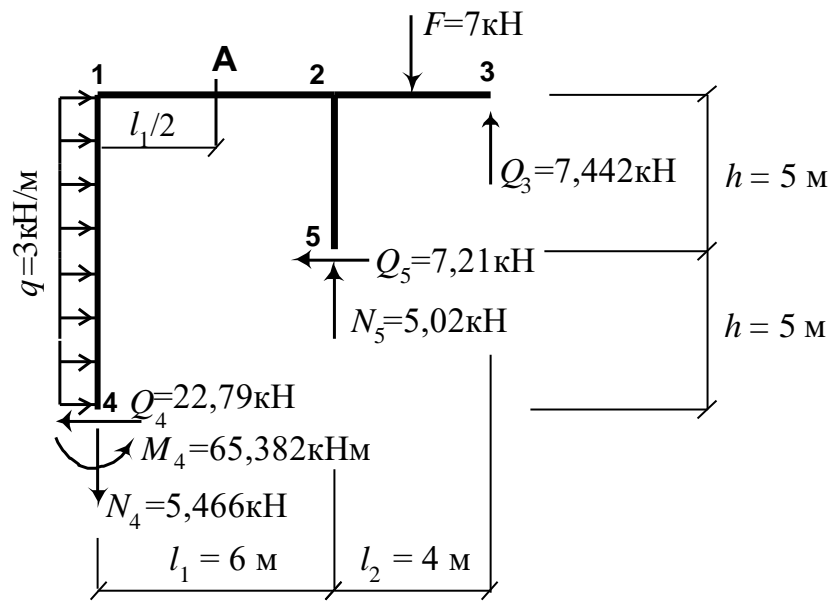


Рисунок 8.15 – До спільної статичної перевірки епюр M , Q , N

Перевіряємо умови рівноваги:

$$\sum X = q \cdot 2h - Q_4 - Q_5 = 3 \cdot 10 - 22,79 - 7,21 = 0;$$

$$\sum Y = -F - N_4 + N_5 + Q_3 = -7 - 5,466 + 5,02 + 7,442 = -0,004 \sim 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = & -M_4 - N_4 \frac{l_1}{2} + Q_4 \cdot 2h - q \cdot 2h \cdot h - N_5 \frac{l_1}{2} + Q_5 \cdot h + \\ & + F \left(\frac{l_2}{2} + \frac{l_1}{2} \right) - Q_3 \left(l_2 + \frac{l_1}{2} \right) \approx 0,016 \sim 0. \end{aligned}$$

Завдання розв'язане правильно.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Методичні вказівки

- 1 Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П. Побудова епюр внутрішніх сил в рамах з використанням ПЕОМ. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – 48 с.
- 2 Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П., Веревічева М.А. та ін. Визначення геометричних характеристик складних плоских перерізів з контролем рішення на комп'ютері. – Харків: УкрДАЗТ, 2008. – 48 с.
- 3 Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П., Гайдук О.М. Розрахунок на міцність і визначення переміщень в балках при згині з контролем рішення на ПЕОМ. – Харків: ХарДАЗТ, 2001. – 76 с.
- 4 Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П., Веревічева М.А. та ін. Розрахунки на складний опір та стійкість із застосуванням ПЕОМ. – Харків: ХарДАЗТ, 2001. – 52 с.
- 5 Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П. Вибрані задачі з опору матеріалів з відповідями і розв'язаннями. – Харків: ХарДАЗТ, 2003. – 194 с.
- 6 Черненко М.Г., Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П. та ін. Розрахунок плоских статично невизначних рам методом сил з використанням ПЕОМ. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – 38 с.
- 7 Чихладзе Е.Д., Петров А.М. Розрахунок плоских статично невизначних рам методом переміщень із застосуванням комп'ютера. – Харків: УкрДАЗТ, 2013. – 66 с.
- 8 Веревічева М.А. Строительная механика: Конспект лекцій. – Харьков: УкрГАЖТ, 2003. – 147 с.
- 9 Кітов Ю.П., Веревічева М.А., Чуменко С.М. Навчальний програмний комплекс з опору матеріалів. – Харків: ХарДАЗТ, 2002. – 62 с.
- 10 Кітов Ю.П., Черненко М.Г., Веревічева М.А. Програмний комплекс для контролю і розв'язання задач на ПЕОМ за курсом "Будівельна механіка". – Харків: УкрДАЗТ, 2007. – 100 с.

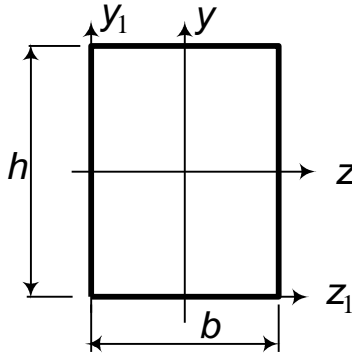
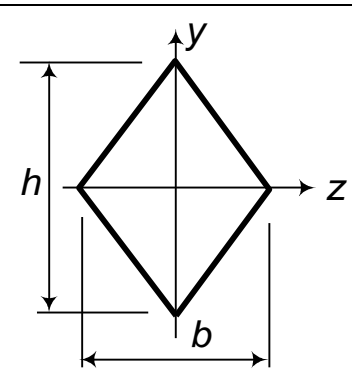
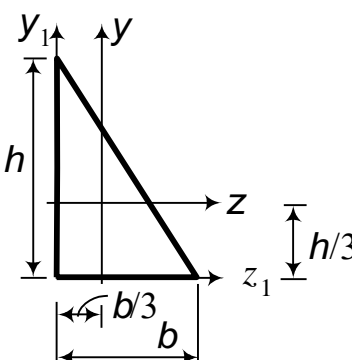
Підручники

- 11 Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л. и др. Сопротивление материалов / Под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1974. – 672 с.
- 12 Писаренко Г.С., Квитка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів / За ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 13 Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 856 с.
- 14 Сопротивление материалов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин / Под ред. А.В. Александрова. – М.: Высшая школа, 1975. – 479 с.
- 15 Чихладзе Е.Д. Опір матеріалів: Підручник. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 366 с.
- 16 Чихладзе Э.Д. Сопротивление материалов: Учебник. – Харьков: УкрГАЖТ, 2011. – 366 с.
- 17 Дарков А.В., Кузнецов В.И. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1962. – 743 с.
- 18 Чихладзе Э.Д. Строительная механика. – Харьков: УкрГАЖТ, 2011. – 320 с.
- 19 Чихладзе Е.Д. Будівельна механіка. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 320 с.
- 20 Строительная механика стержневых систем и оболочек / Под ред. Ю.И. Бутенко. – К.: Вища школа, 1980. – 488 с.
- 21 Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1969. Ч. I. – 468 с.

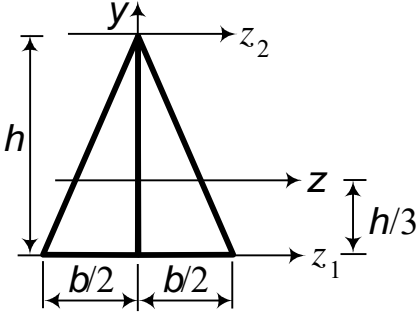
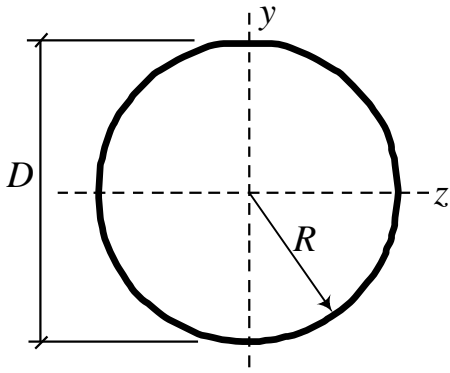
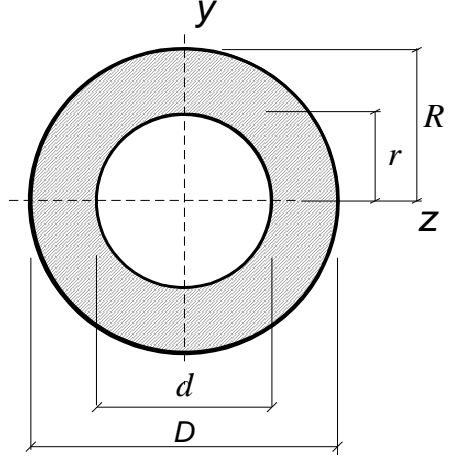
ДОДАТОК А

ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЯКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Таблиця А.1

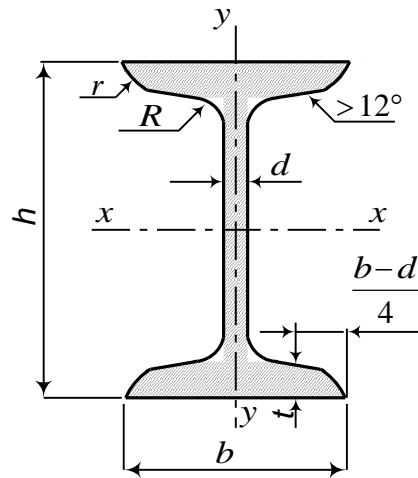
Переріз	Геометричні характеристики (z, y – центральні осі)
	$A = bh$ $J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3h}{12}$ $W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{y_1} = \frac{b^3h}{3}$
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{48}; \quad J_y = \frac{b^3h}{48}$ $W_z = \frac{bh^2}{24}; \quad W_y = \frac{b^2h}{24}$
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{b^3h}{36}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y_1} = \frac{b^3h}{12}$

Продовження таблиці А.1

Переріз	Геометричні характеристики (z, y – центральні осі)
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{b^3h}{48}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{z_2} = \frac{bh^3}{4}$
	$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$ $J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$ $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi R^3}{4}$ $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi R^3}{2}$
	$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{\pi R^2}{2} (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D} = \frac{r}{R}$ $J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^4}{4} (1 - \alpha^4)$ $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \alpha^4)$ $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4)$

ДОДАТОК Б

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ Балки двотаврові (за ГОСТ 8239-89)



Позначення:

h - висота балки;

b - ширина полиці;

d - товщина стінки;

t - середня товщина полиці;

J - момент інерції;

W - момент опору;

i - радіус інерції;

S - статичний момент
півперерізу

Таблица Б.1

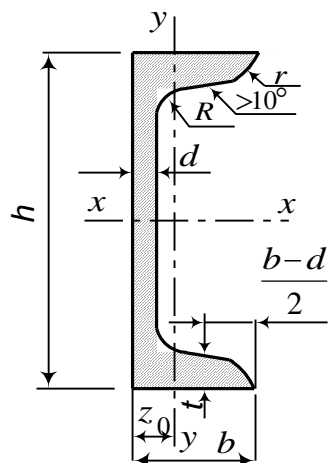
120

Номер профі- ля	Розміри, мм				Пло- ща пере- різу, см ²	J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	J _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4.5	7.2	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5.0	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0

Продовження таблиці Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

Швелери (за ГОСТ 8240-89)



Позначення:

h - висота швелера; J - момент інерції;
 b - ширина полиці; W - момент опору;
 d - товщина стінки; i - радіус інерції;
 t - середня товщина полиці; S - статичний момент півперерізу;

z_0 - відстань від центру ваги до зовнішньої грані стінки

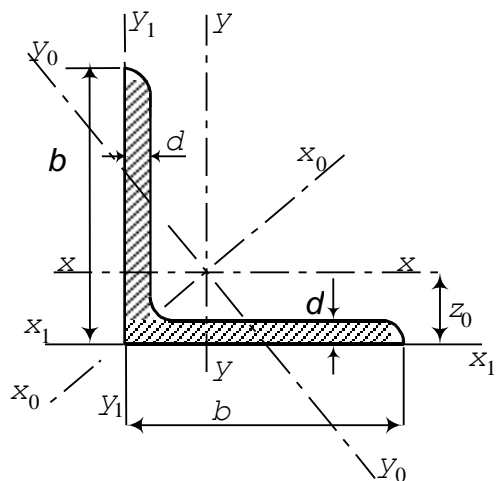
Таблиця Б.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см^2	J_x , см^4	W_x , см^3	i_x , см	S_x , см^3	J_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	z_0 , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2

Продовження таблиці Б.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16a	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3
18a	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

Кутники рівнобічні (за ГОСТ 8509-93)



Позначення:

- b - ширина полиці;
- d - товщина стінки;
- J - момент інерції;
- i - радіус інерції;
- z₀ - відстань від центру ваги до зовнішніх граней полиць

Таблиця Б.3

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, см ²	Довідкові величини для осей								Маса 1м, кг
				x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁	z ₀ , см	
				J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x0 max} , см ⁴	i _{x0 max} , см	J _{y0 min} , см ⁴	i _{y0 min} , см	J _{x1} , см ⁴		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59		0,85	1,36
		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58		0,89	1,78

Продовження таблиці Б.3

125

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69		0,97	1,60
		4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68		1,01	2,10
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68		1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98		1,46	4,47
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72

Продовження таблиці Б.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60

Продовження таблиці Б.3

127

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
14	140	16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
14	140	10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
		10	31,3	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
16	160	11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1

Продовження таблиці Б.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

