

УДК 621.165:534.1

АПРОБАЦИЯ ПРОГРАММ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НА МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

**А.В. Погребняк, доц., к.т.н., Харьковский национальный
автомобильно-дорожный университет, А.В. Евтушенко, доц., к.т.н., Украинский
государственный университет железнодорожного транспорта, г. Харьков**

Аннотация. Кратко описаны программы «СК» и «БК» для определения собственных частот и вынужденных колебаний. В качестве контрольных примеров произведены расчеты тестовых задач плоской рамы, сваренной из швеллеров, представлена форма вынужденных колебаний этой рамы при соответствующей рабочей частоте.

Ключевые слова: метод конечных элементов, собственные и вынужденные колебания, плоская рамная конструкция, направляющая лопатка компрессора.

АПРОБАЦІЯ ПРОГРАМ РОЗРАХУНКУ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ І ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ НА МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧАХ

**А.В. Погребняк, доц., к.т.н., Харківський національний
автомобільно-дорожній університет, А.В. Євтушенко, доц., к.т.н., Український
державний університет залізничного транспорту, м. Харків**

Анотація. Стисло дан опис програми «СК» і «БК» для визначення власних частот і вимушених коливань. Як контрольні приклади виконано розрахунки тестових завдань плоскої рами, звареної зі швелерів, наведено форму вимушених коливань цієї рами за відповідної робочої частоти.

Ключові слова: метод кінцевих елементів, власні та вимушені коливання, плоска рамна конструкція, напрямна лопатка компресора.

TESTING OF PROGRAMS FOR MEASURING NATURAL FREQUENCIES AND FORCED VIBRATIONS BY MEANS OF MODEL PROBLEMS

**A. Pogrebnyak, Assoc. Prof., Cand. Sc. (Eng.), Kharkiv National Automobile
and Highway University, A. Evtushenko, Assoc. Prof., Cand. Sc. (Eng.),
Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv**

Abstract. In this paper the programs «СК» and «БК» for calculating the natural frequencies and the forced vibrations are briefly presented. Some calculations of the test tasks and the flat channel frame have been performed as a test case. The diagram of the forced vibrations of this frame at an appropriate operating frequency is presented.

Key words: finite element method, natural and forced vibrations, flat frame structure, compressor guide vane.

Введение

Для определения собственных частот (СЧ) и вынужденных колебаний (БК) пространственной стержневой конструкции были составлены программы «СК» и «БК», позво-

ляющие реализовать метод конечных элементов (МКЭ), используя который можно рассматривать рамные конструкции произвольной структуры [3, 4]. Предлагаемая методика и программы могут быть использованы для расчета собственных частот,

собственных форм, а также вынужденных колебаний пространственных стержневых конструкций произвольной структуры, приводимых к совокупности стержней.

Анализ публикаций

Анализ публикаций, связанных с данной темой, показывает, что при расчетах собственных и вынужденных колебаний рамных конструкций не учитывались многие факторы, а именно: жесткость амортизаторов, моменты инерции масс, условия заделки и т.д. [1, 2].

Цель и постановка задачи

Целью работы является апробация программ расчета собственных частот и вынужденных колебаний рамных конструкций на примерах тестовых задач плоской рамы, сваренной из швеллеров, и расчет лопаток компрессора.

Также необходимо получить формы колебаний собственных частот этих конструкций, близких к резонансным.

Задачи заключаются: 1 – в разработке программ для расчета на ЭВМ собственных частот и форм, а также получения деформированной картины рамной конструкции при вынужденных колебаниях в заданном диапазоне частот; 2 – в расчете ряда тестовых примеров на собственные и вынужденные колебания плоской рамной конструкции; 3 – в непосредственной реализации предложенной методики [3, 4] на ЭВМ применительно к компрессорным лопаткам.

Реализация метода конечных элементов (МКЭ) при расчете собственных частот и вынужденных колебаний пространственной стержневой конструкции

Согласно программам решение задачи начинается с формирования первых шести строк матриц $[K]_e$ и $[m]_e$ для первого узла (табл.1 [4]). Затем с помощью подпрограмм сформированные строки матриц $[K]_e$ и $[m]_e$ преобразуются в строки матриц $[K']_e$ и $[m']_e$, которые имеют ориентацию в глобальной системе координат. Полученные элементы матриц $[K']_e$ и $[m']_e$ рассылаются затем по принципу накопления на соответствующие места матрицы $[K']_e - \omega^2[m']_e$ [3, С. 163]. Все эти операции повторяются для всех узлов пространственной конструкции в порядке их нумерации.

Общая матрица системы уравнений имеет ленточную структуру. Вне ленты все элементы матрицы нулевые. Кроме того, матрица симметрична главной диагонали. В процессе решения такой системы элементы, расположенные вне ленты, постоянно остаются нулевыми и в процессе счета не участвуют. В силу симметрии относительно главной диагонали достаточным является формирование ленты только для определенного узла, преобразование к треугольному виду и нахождение произведения диагональных элементов, после чего эта часть массива матрицы уже не нужна и на ее месте можно формировать полуленту для следующего узла. Такой подход позволяет решать задачи нахождения собственных частот для любой конструкции, допускающей практически очень большое количество узлов, не прибегая к использованию дополнительной внешней памяти. Такой принцип формирования системы можно сохранить и при решении вынужденных колебаний. Сформированная система уравнений решается методом квадратного корня.

При решении задачи о собственных частотах используется только первый этап решения системы – обратный ход. Произведение диагональных элементов матрицы, полученных при прямом ходе, является значением определителя [3]. Пошаговое вычисление определителя в заданном диапазоне частот позволяет определять значения собственных частот, которые находятся в месте перемены знака определителя.

Как только перемена знака зарегистрирована, собственная частота ω_c с заданной точностью ϵ находится методом половинного деления и уточняется по формуле

$$\omega_c = \omega_1 - Det_1 \cdot (\omega_2 - \omega_1) / (Det_2 - Det_1), \quad (1)$$

где ω_1 и ω_2 – значения частот до и после перемены знака определителя; Det_1 и Det_2 – соответствующие частотам ω_1 и ω_2 значения определителя.

В ходе решения задачи машина выводит на печать по столбцам три значения: частоту ω , значение определителя Det и с точностью до 10^{MB} – значение масштаба MB. Под масштабом понимают такое число MB, которое позволяет получить значение определителя Det по формуле

$$Det = \overline{Det} \cdot 10^{MB}. \quad (2)$$

Программа вынужденных колебаний (ВК) выдает на печать перемещение узлов (3 линейных и 3 угловых) в порядке их нумерации.

Составление исходной информации – ответственный, сложный и громоздкий этап решения пространственной стержневой конструкции методом конечных элементов. Он, в свою очередь, состоит из нескольких подэтапов, каждый из которых требует повышенного внимания и четкости: 1) составление расчетной схемы реальной конструкции; 2) разбивка конструкции на конечные элементы; 3) заполнение необходимых массивов числовыми данными.

В общем случае машиностроительные конструкции представляют собой пространственные стержневые системы с произвольным ориентированием составляющих ее элементов и действующих на нее внешних факторов, в качестве которых могут выступать возбуждающие силы (в случае вынужденных колебаний), сосредоточенные массы и пружины. В виде сосредоточенных масс можно представить прикрепленное к раме оборудование. Если же центр тяжести этого оборудования слишком удален от нейтральной оси стержневого элемента, то обязательно следует учитывать и массовый момент инерции присоединенных масс. Условия закрепления воспроизводятся через наличие пружин, жесткость которых отражает возможность перемещения узла, в котором закреплена пружина. Через жесткости условных пружин можно отразить и условия симметрии или асимметрии конструкции.

К моменту формирования пакета исходных данных следует также определить жесткостные параметры стержневых элементов конструкции (площадь поперечного сечения, главные центральные моменты инерции, момент инерции при чистом кручении), их длины, а также ориентацию стержневых элементов в глобальной системе координат. Прежде чем разбить конструкцию на конечные элементы, ее следует связать с глобальной системой координат $X'Y'Z'$, начало которой может быть выбрано произвольно, т.к. место положения ее в дальнейшем не влияет на параметры, которые служат исходными данными. Четко определенным является только

ориентирование осей глобальной системы координат. Они должны обладать свойствами правой системы координат, т.е. с конца из любой из осей положительным является поворот против часовой стрелки. Количество элементов зависит от вида конструкции, требуемой точности результатов, вида внешней нагрузки и ограничений, связанных с объемом оперативной памяти ЭВМ.

Нагрузка предполагается приложенной в узлах, и поэтому, например, в случае распределенной нагрузки для ее более точного моделирования в необходимых случаях следует вводить дополнительные узлы. Обязательно в узлах должны быть также пружины и места стыков конструктивных элементов. При разбивке конструкции на конечные элементы нумеруют узлы конечных элементов и элементы конструкции. При решении задач по МКЭ структура системы разрешающих уравнений существенным образом зависит от порядка нумерации и обхода узлов конструкции. При правильной нумерации узлов система имеет ленточную структуру.

Рекомендуется придерживаться следующих положений: 1 – для конструкций с регулярной сеткой обход узлов следует производить вдоль меньшего их количества; 2 – для конструкций, имеющих замкнутый контур, обход узлов и их нумерацию следует производить симметрично относительно некоторого начального узла; 3 – в любом другом случае надо стремиться, чтобы разность между соседними номерами узлов была наименьшей.

Нумерация неизвестных в элементе для данной задачи всегда остается постоянной и соответствует приведенной [4, рис. 1, С. 411].

Числовые данные к программам «СК» и «ВК» являются общими. Они содержат информацию о конструкции системы, ее основных характеристиках, о структуре разбиения на конечные элементы. Основными составляющими информации данных являются два массива чисел: массив D – содержит информацию о геометрических и силовых характеристиках каждого элемента или узла, и массив C – отражает структуру разбиения на конечные элементы.

Расчет тестовых задач

В качестве тестовых объектов были взяты балки с одинаковыми геометрическими ха-

рактическими, но различными условиями закрепления и видами колебаний (табл. 1, тесты 5А...5К [2]).

Таблица 1 Расчет собственных частот тестовых задач [2]

Тест [2]	Задача	Точное решение, рад/с	Расчетное решение, рад/с	Погрешность, %
5А	продольные колебания	$\omega_1 = 1,57$ $\omega_2 = 4,71$ $\omega_3 = 7,85$	$\omega_1 = 1,57$ $\omega_2 = 4,67$ $\omega_3 = 7,65$	0 0,85 2,5
5В	продольные колебания	$\omega_1 = 0,86$	$\omega_1 = 0,86$	0
5С	поперечные колебания	$\omega_1 = 9,87$ $\omega_2 = 39,48$ $\omega_3 = 88,83$	$\omega_1 = 9,87$ $\omega_2 = 39,48$ $\omega_3 = 88,76$	0 0 0,08
5D	поперечные колебания	$\omega_1 = 3,52$ $\omega_2 = 22,04$ $\omega_3 = 61,70$	$\omega_1 = 3,52$ $\omega_2 = 22,04$ $\omega_3 = 61,67$	0 0 0,05
5Е	поперечные колебания	$\omega_1 = 22,37$ $\omega_2 = 61,62$	$\omega_1 = 22,37$ $\omega_2 = 61,65$	0 0,05
5F	поперечные колебания	$\omega_1 = 22,37$	$\omega_1 = 22,37$	0
5G	поперечные колебания	$\omega_1 = 15,44$ $\omega_2 = 49,98$ $\omega_3 = 104,24$	$\omega_1 = 15,42$ $\omega_2 = 49,95$ $\omega_3 = 104,13$	0,13 0,06 0,11
5H	поперечные колебания	$\omega_1 = 9,00$	$\omega_1 = 8,81$	2,11
5К	поперечные колебания	$\omega_1 = 1,99$	$\omega_1 = 1,88$	5,53

Во всех этих задачах стержень делился на 10 одинаковой длины элементов, нумерация узлов и элементов производилась слева направо. Одинаковая структура деления на элементы, а также общность геометрических характеристик ($F = I_y = I_z = I_k = \rho = E = G = L = I$) позволили составить пакет исходных данных, который в основном являлся общим для всех задач. Исключением является только первая группа данных массива D, которая для каждой из задач имеет свой вид.

В задаче 5А рассматриваются продольные колебания консольного стержня. Заделка слева (1-й узел) имитируется амортизатором очень высокой жесткости по всем шести степеням свободы. Промежуточные узлы (2...10) и последний 11 узел находятся в одинаковых условиях. Для них существует свобода продольного перемещения. На другие перемещения наложена связь также через

жесткий амортизатор. В задаче 5В рассматриваются продольные колебания консольного стержня с массой на конце.

Условия заделки для этой задачи во всех узлах такие же, как и в задаче 5А. В информацию 11 узла следует добавить величину сосредоточенной массы ($M=1$). В задачах 5С...5К рассматриваются поперечные колебания стержня с различными условиями закрепления по концам. В узле 11 задачи 5К следует принять $M=6,28$. Результаты расчета собственных частот сведены в таблицу 1, где также приведены результаты сравнения полученных частот с точным решением, которые являются вполне удовлетворительными.

Собственные и вынужденные колебания рамной конструкции

В качестве контрольного примера произведен расчет плоской рамы, сваренной из швеллеров (рис. 1).

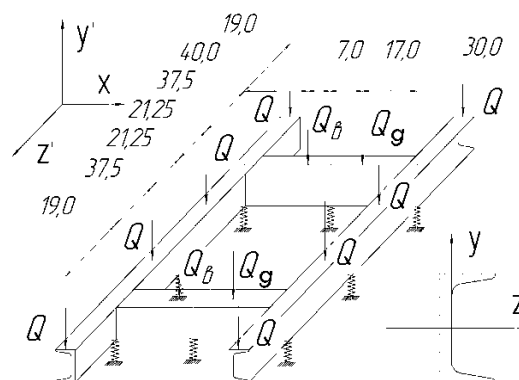


Рис. 1. Колеблющаяся рама

К раме прикреплена рабочая плоскость весом $G = 240$ кг, которая на раму передается в восьми местах крепления, обозначенных действием силы Q ($Q = G/8 = 30$ кг). Кроме того, на раму опирается электродвигатель весом $G_d = 60$ кг, действие которого заменяется силами Q_d ($Q_d = G_d/2 = 30$ кг), и вибратор весом $G_v = 120$ кг ($Q_v = G_v/2 = 30$ кг). Возбуждение на раму передается через вибратор в местах контакта его с рамой. Оно осуществляется дебалансом весом $P = 2$ кг, расположенным от оси вращения на расстоянии $RAD = 1$ см.

Вектор возбуждающей силы с плоскостью рамы образует угол $\beta = 30^\circ$. Рама с основанием связана пружинами (8 шт.), имеющими следующие характеристики

знаки. Форма колебаний отражает колебания рамы на пружинах в направлении оси Y' как единого целого (рис. 3, а), т.е. резонируют пружины вдоль своей оси.

Форма колебаний, соответствующая второй собственной частоте $\omega_2 = 16,79$ рад/с (рис. 3, б), также демонстрирует колебания рамы как единого целого в направлении оси OY' , только в этом случае пружины, расположенные слева, резонируют в противофазе пружинам справа (галопирование).

Третья форма колебаний, $\omega_3 = 22,74$ рад/с (рис. 3, в), соответствует колебаниям рамы как единого целого в направлении оси OX' , т.е. наблюдается резонанс пружин в поперечном направлении. Четвертая собственная частота, $\omega_4 = 158,5$ рад/с, вызывает резонанс по первой изгибной форме в направлении наименьшей жесткости продольных стержней AA и BB.

Колебания узлов обоих стержней происходят в одной фазе (рис. 3, г). При пятой собственной частоте, $\omega_5 = 256,7$ рад/с, стержни AA и BB колеблются в противофазе (рис. 3, д). Шестая собственная форма, $\omega_6 = 373,6$ рад/с, характеризуется резонированием стержней CC и DD (рис. 3, е). Седьмая собственная частота, $\omega_7 = 404,7$ рад/с, вызывает резонанс по первой изгибной форме в направлении наибольшей жесткости стержней AA и BB в одной фазе (рис. 3, ж). В противофазе эти стержни колеблются при частоте $\omega_8 = 412,5$ рад/с (рис. 3, к).

Программа «ВК» позволила построить и форму вынужденных колебаний при частоте $\omega = 200$ рад/с для расчетной рамы (рис. 4).

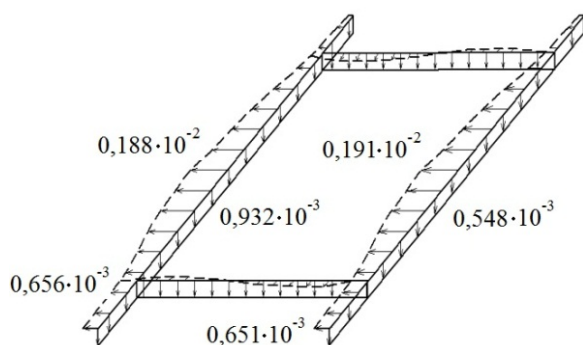


Рис. 4. Деформированное состояние плоской рамной конструкции, см, при частоте $\omega = 200$ рад/с

Представленная форма вынужденных колебаний хорошо согласуется с собственной формой колебаний плоской рамы (рис. 3, д).

Расчет собственных частот и форм направляющей лопатки компрессора

В качестве примера была рассчитана направляющая лопатка II ступени компрессора ГПА «Эвон». Расчетная схема представляет собой консольный стержень переменного сечения, разбитый на 10 конечных элементов. Естественная закрутка профилей лопаток учитывается в рамках теории стержней Кирхгофа-Клебша.

Первая собственная частота, $\omega_1 = 2519$ рад/с (рис. 5, а), вызывает колебания по первой форме в плоскости наименьшей жесткости. Вторая собственная частота, $\omega_2 = 13935$ рад/с (рис. 5, б), вызывает изгиб по второй форме в той же плоскости. Третья собственная частота, $\omega_3 = 15149$ рад/с (рис. 5, в), является первой крутильной частотой. Четвертая собственная частота, $\omega_4 = 25325$ рад/с (рис. 5, г), изгибает лопатку по первой изгибной форме в плоскости наибольшей жесткости.

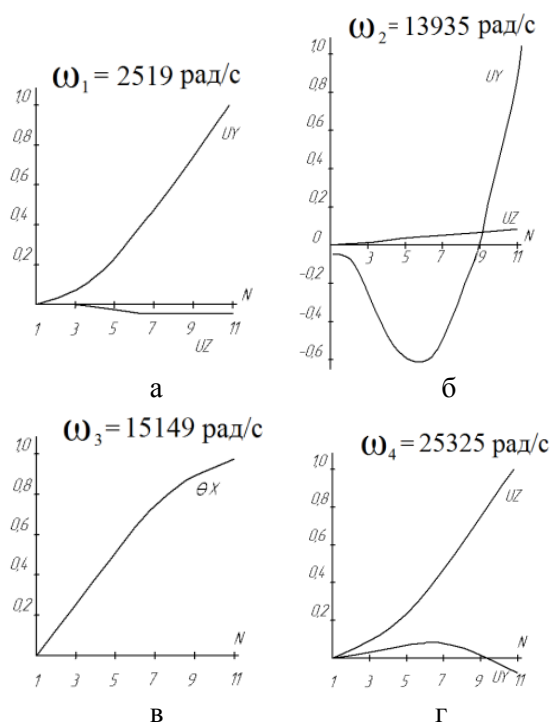


Рис. 5. Формы собственных колебаний направляющей лопатки II ступени компрессора «Эвон»

В табл. 2 приведено сравнение полученных частот с экспериментальными.

Таблица 2 Сравнение расчетных и экспериментальных результатов направляющей лопатки II ступени компрессора «Эвон»

№ частоты	Вид колебаний	Значения частот, рад/с		Погрешность, %
		экспер.	расчет.	
1	изгиб по первой форме в плоскости наименьшей жесткости	2909	2519	13,4
2	изгиб по второй форме в плоскости наименьшей жесткости	12805	13935	8,8
3	кручение	15080	15149	0,46
4	изгиб по первой форме в плоскости наибольшей жесткости	–	25325	–

Совпадение расчетных частот с экспериментальными можно улучшить, если более точно проинтерполировать геометрические характеристики лопатки у корня.

Выводы

Программы являются самостоятельными элементами, не требующими приложения никаких других вспомогательных программ. Они начинаются с необходимых описаний переменных и массивов. При этом следует иметь в виду, что часть операторов, касающихся определения длин массивов и оглавления данных задачи, меняются и зависят от конкретной задачи. Затем следуют операторы, обеспечивающие ввод и печать исходной информации.

По полученным результатам можно построить формы вынужденных колебаний при необходимой частоте, а также, сравнивая формы колебаний этих частот по перемене знака

какого-либо из перемещений, можно судить о виде резонанса.

Предложенная методика может быть использована для расчета собственных частот, собственных форм, а также вынужденных колебаний пространственных стержневых конструкций произвольной структуры, приводящихся к совокупности стержней (как один из вариантов – лопатки компрессоров и турбокомпрессоров строительных и дорожных машин).

Литература

1. Постнов В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И.Я. Хархурим. – Л.: Судостроение, 1974. – 188 с.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1988. – 198 с.
3. Погребняк А.В. Теоретичні основи динамічного розрахунку просторової стержневої конструкції. Система дозволяючих рівнянь / А.В. Погребняк, А.В. Євтушенко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – 2015. – Вип. 2(70). – С. 159–164.
4. Погребняк А.В. Теоретичні основи динамічного розрахунку просторової стержневої конструкції. Матриця жорсткості для кінцевого елемента в локальній системі координат / А.В. Погребняк, А.В. Євтушенко // Вісник НУВГП: зб. наук. пр. – 2015. – Вип. 2(70). – С. 409–414.

Рецензент: Е.С. Венцель, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 30 марта 2016 г.