

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра механіки і проектування машин

Розрахунок плоских ферм

Методичні вказівки

до самостійної роботи студентів з дисципліни

“ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”

(розділ «СТАТИКА»).

Харків 2015

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 25 грудня 2013 р., протокол № 5.

Методичні вказівки призначені для студентів будівельного та механічного факультетів денної форми навчання усіх спеціальностей.

Укладачі:

доценти Н.А. Аксьонова,
О.В. Оробинський

Рецензент

проф. Братченко О. В.

З М І С Т

Вступ.....	3
1 Розрахунок плоскої ферми.....	4
2 Рекомендації та приклади розрахунків плоских ферм.....	8
2.1 Визначення реакцій опор та зусиль у стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів.....	8
2.2 Визначення зусиль у стержнях ферми методом Ріхтера.....	14
Список літератури.....	18

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного та будівельного факультетів на 1, 2 та 3 курсах дисципліни “Теоретична механіка”. У ході вивчення курсу важливим аспектом є проведення практичних занять та виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР). Основою РГР є розв’язання задач, пов’язаних з тематикою розділу. Багато важливих питань стосовно рівноваги твердих тіл під дією сил розглядається при вивченні розділу «Статика». Наближаючись до тематики спеціальностей будівельного та механічного факультетів, виникає необхідність розгляду питань з розрахунків ферм, визначення реакцій опор та зусиль у стержнях. Зважаючи на складність і різноманітність підходів до цієї теми, доцільним є використання методичних вказівок. Методичні вказівки містять як теоретичні, так і практичні рекомендації, які стануть необхідними при розв’язанні індивідуальних задач, варіанти яких надаються.

Методичні вказівки призначені для студентів будівельного та механічного факультетів денної форми навчання усіх спеціальностей.

1 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ

Знайти методом вирізання вузлів та методом Ріттера зусилля в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 ферми. Провести порівняльний аналіз результатів. Схеми ферм наведені на рисунку 1, а навантаження вказані в таблиці 1.

Таблиця 1

Варіант	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	a, м	h, м	α, град
	кН							
1	5	5	5	20	30	-	-	-
2	5	10	20	30	-	-	-	30
3	10	5	20	20	-	2	6,0	-
4	10	30	50	-	-	-	-	-
5	5	5	20	20	-	-	-	30
6	10	20	10	10	20	-	-	30
7	5	10	20	-	-	-	-	30
8	10	20	30	-	-	2	5,0	-
9	10	20	30	-	-	-	-	-
10	20	10	10	20	-	-	-	45
11	10	20	40	-	-	-	-	45
12	10	20	30	30	-	2	6,0	-
13	10	10	10	20	20	-	-	45
14	10	10	10	10	20	-	-	-
15	10	20	10	-	-	2	1,5	-
16	10	20	20	30	-	-	-	-
17	10	20	20	-	-	3	5,0	-
18	10	40	20	20	-	3	3,5	-
19	10	10	40	20	-	3	3,5	-
20	10	40	20	-	-	-	-	-
21	10	20	10	40	-	3	4,0	-
22	10	10	20	30	-	-	-	-
23	5	10	10	40	20	-	-	-
24	10	20	20	20	-	2	2,4	-
25	10	20	20	-	-	2	2,4	-
26	10	20	20	-	-	2	2,3	-
27	10	20	10	-	-	2	3,0	-
28	20	20	10	-	-	-	-	-
29	10	20	20	40	-	2	2,2	-
30	10	10	20	30	30	-	-	-

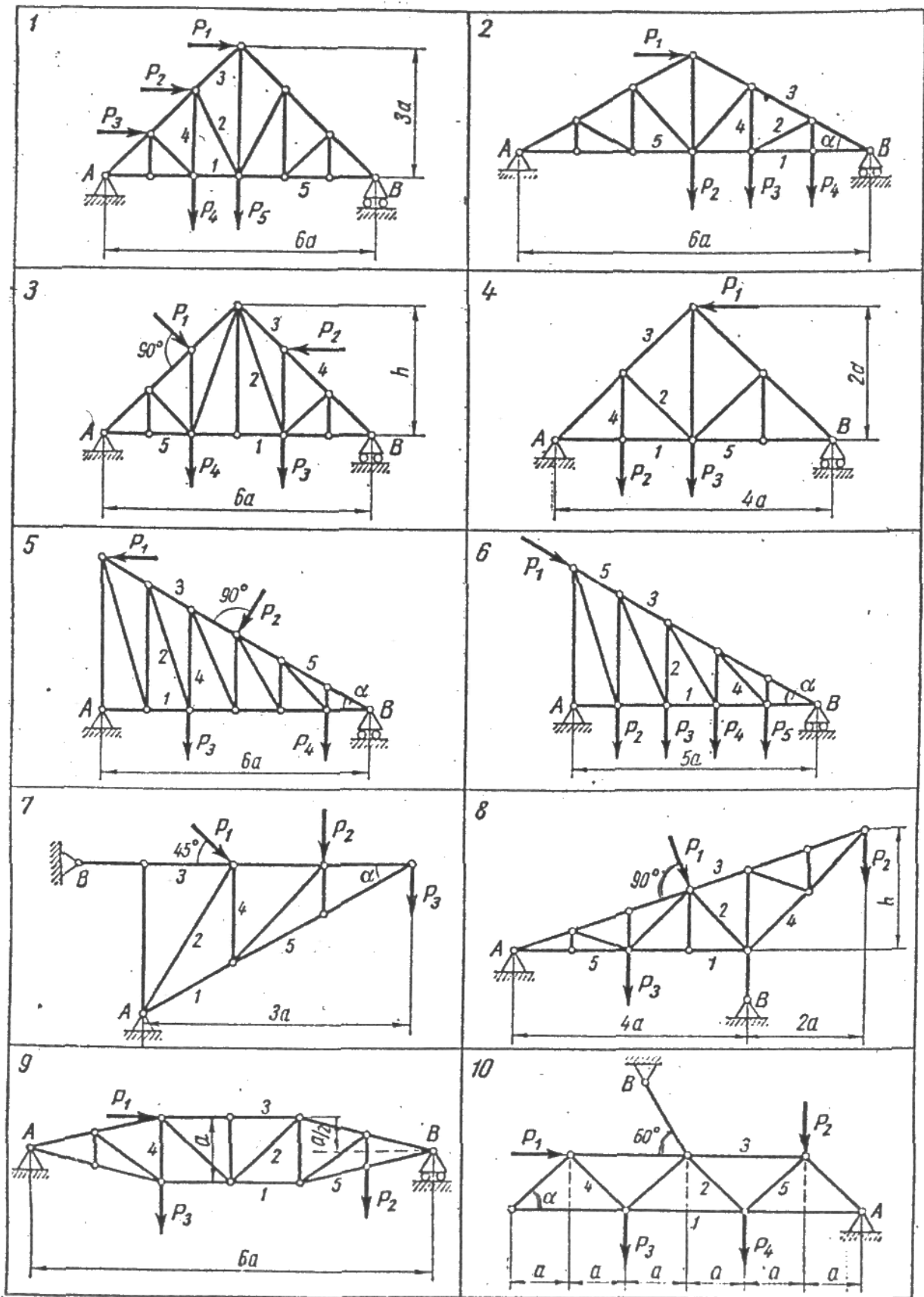


Рисунок 1, аркуш 1

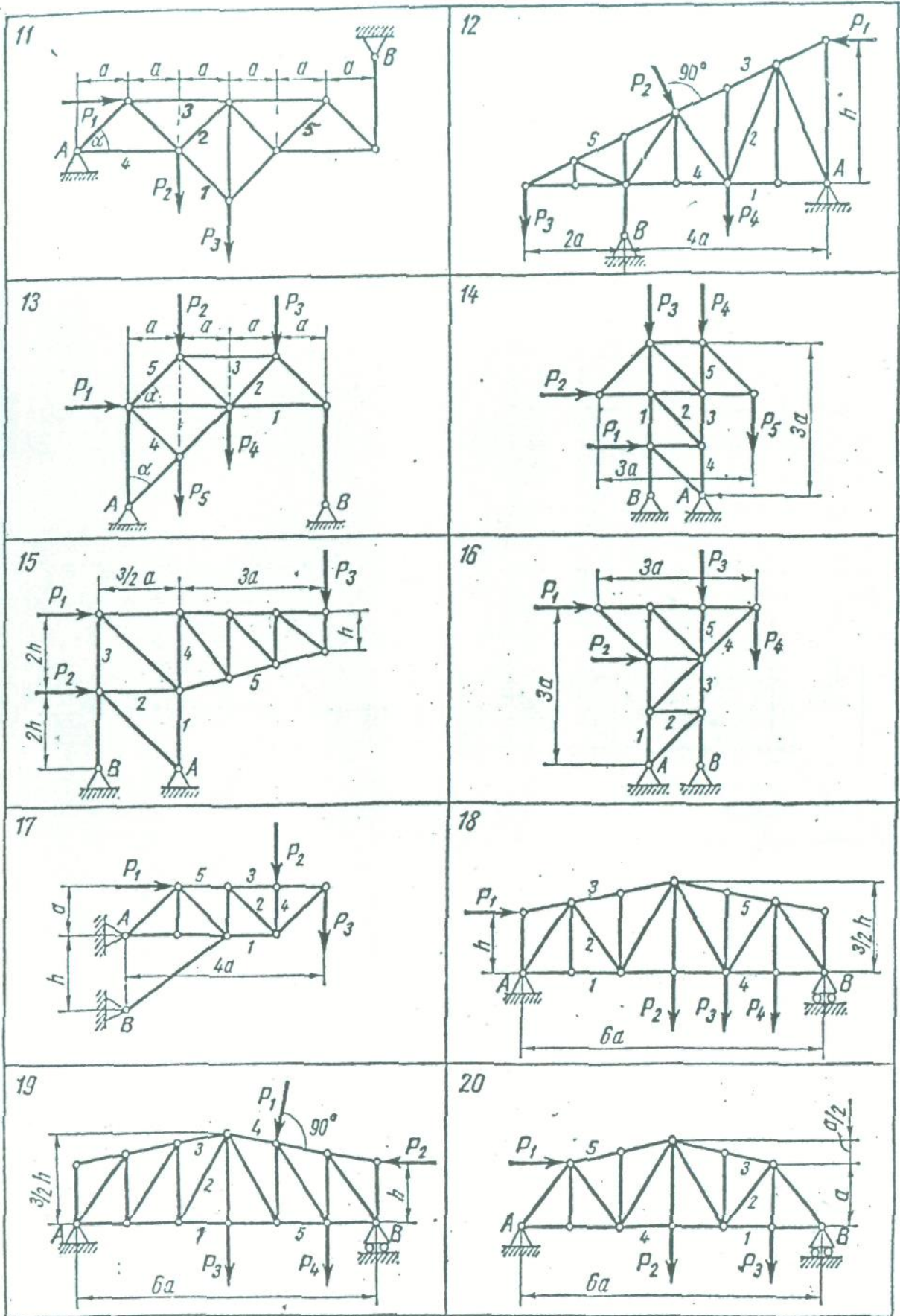


Рисунок 1, аркуш 2

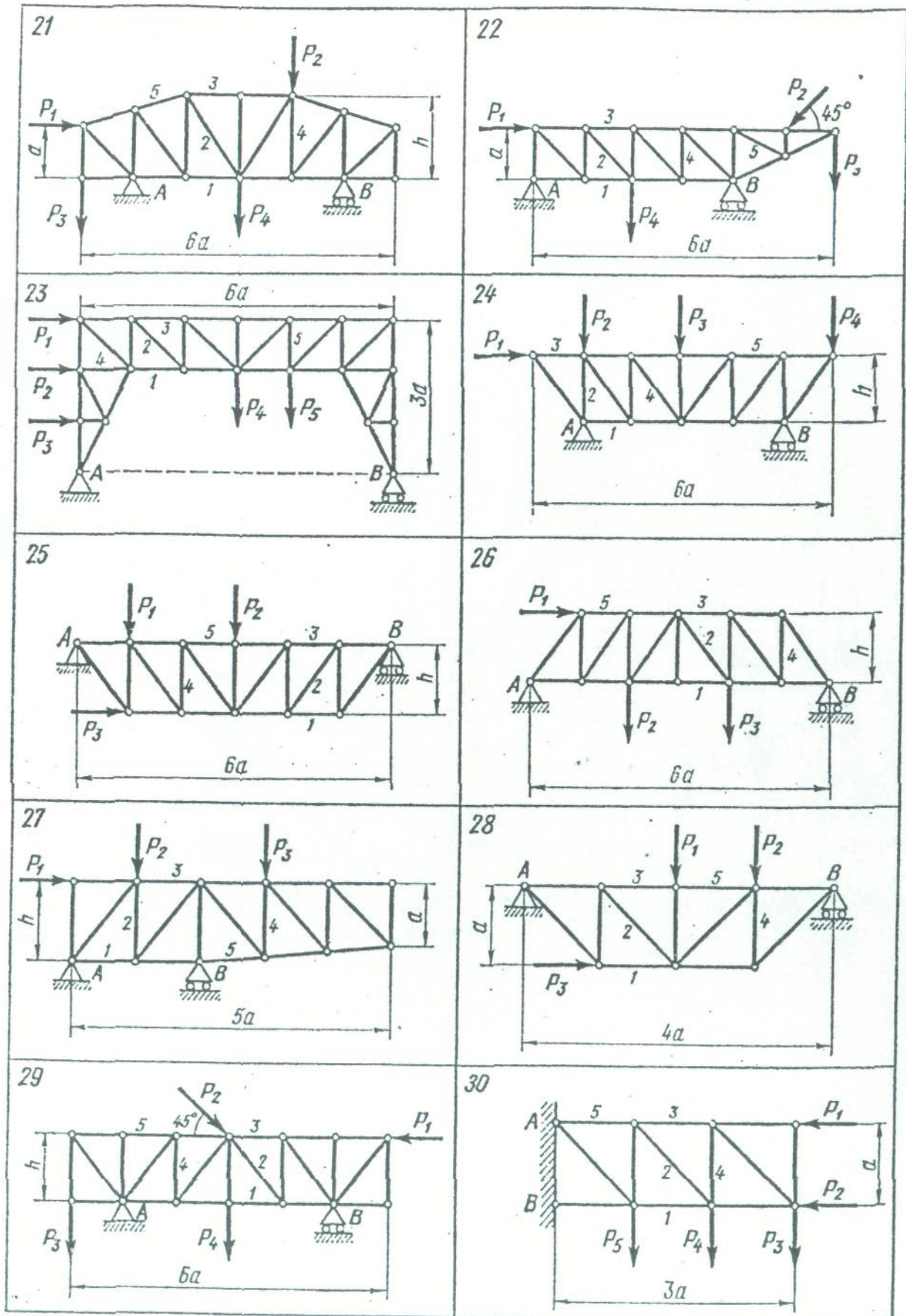


Рисунок 1, аркуш 3

2 РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ ПЛОСКИХ ФЕРМ

2.1 Визначення реакцій опор та зусиль у стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів

Метод вирізання вузлів полягає в тому, що уявно вирізають вузли ферми, прикладаючи до них відповідні зовнішні сили, реакції опор та реакції стержнів, і складають рівняння рівноваги сил, прикладених до кожного вузла. Вирізається вузол з **двома невідомими зусиллями**, тому що в кожному вузлі складається збіжна система сил, відповідно складають два рівняння рівноваги: $\sum_{n=1}^k F_{nx} = 0$, $\sum_{n=1}^k F_{ny} = 0$.

Умовно припускають, що всі стержні розтягнуті (реакції стержнів спрямовані від вузлів).

Лема про нульові стержні

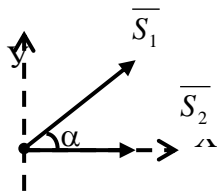


Рисунок 2

Лема 1. Якщо у ненавантаженому вузлі плоскої ферми збігаються два стержні, то зусилля у цих стержнях дорівнюють нулю (рисунок 2) $\bar{S}_1 = 0$, $\bar{S}_2 = 0$.

Лема 2. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми збігаються три стержні, два з яких спрямовані вздовж однієї прямої, то зусилля у третьому стержні дорівнюють нулю, а зусилля двох перших рівні між собою (рисунок 3) $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$, $\bar{S}_3 = 0$.

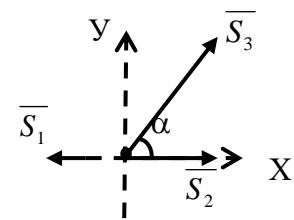


Рисунок 3

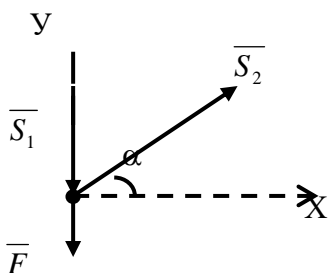


Рисунок 4

Лема 3. Якщо у вузлі плоскої ферми збігаються два стержні і до вузла прикладена зовнішня сила, лінія дії якої збігається з віссю одного зі стержнів, то зусилля у цьому стержні дорівнює за модулем прикладеній силі, а зусилля у другому стержні дорівнює нулю (рисунок 4) $\bar{S}_1 = \bar{F}$, $\bar{S}_2 = 0$.

Приклад

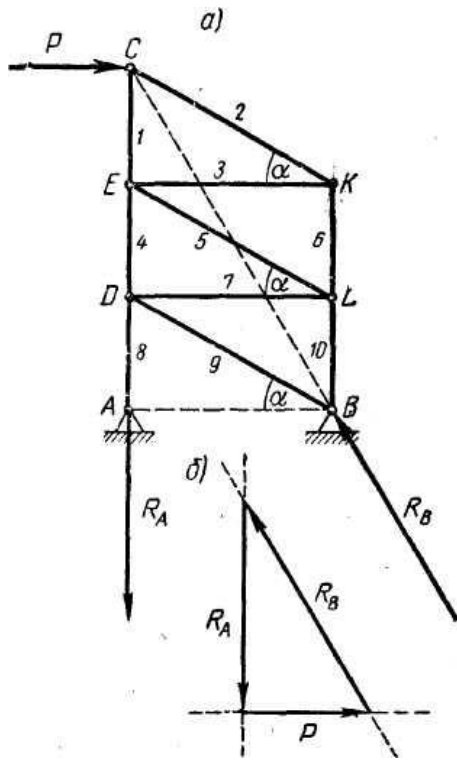


Рисунок 5

Дано:

схема ферми (рисунок 5),
 $P = 11 \text{ кН}$, $\alpha = 30^\circ$.

Визначити:

реакції R_A , R_B та зусилля в стержнях.

Розв'язання

Визначення реакцій опор

Розглянемо зовнішні сили, прикладені до ферми: задану силу \overline{P} та реакції опор $\overline{R_A}$, $\overline{R_B}$ (рисунок 5, а). Тому що опора А є стержневою, лінія дії реакції $\overline{R_A}$ відома: вона спрямована вздовж осі стержня AD.

Лінію дії реакції $\overline{R_B}$ визначають з використанням теореми про рівновагу трьох непаралельних сил.

Три сили \overline{P} , $\overline{R_A}$ і $\overline{R_B}$ взаємно зрівноважуються, отже, лінії їх дії перетинаються в одній точці. Знаходимо точку перетину сил \overline{P} і $\overline{R_A}$. Лінія дії реакції $\overline{R_B}$ проходить через цю точку (точку С) і центр шарніра В. Побудуємо замкнений силовий багатокутник (рисунок 5, б). Його побудову починають із сили \overline{P} . Через початок вектора \overline{P} проводимо пряму, паралельну лінії дії однієї реакції, наприклад $\overline{R_A}$, а через кінець – пряму, паралельну лінії дії $\overline{R_B}$, до їх взаємного перетину.

Сторони отриманого замкненого силового багатокутника визначають модулі і напрямки опорних реакцій $\overline{R_A}$ і $\overline{R_B}$. Із подібності силового трикутника і трикутника ABC знаходимо $\overline{R_A}$ і $\overline{R_B}$

$$R_A/AC = P/AB = R_B/BC.$$

Припустивши, що $AB = a$, отримаємо

$$AC = 3 CE = 3 a \operatorname{tg} \alpha = 3 a \sqrt{3}/3 = a \sqrt{3};$$

$$BC = \sqrt{(AC)^2 + (AB)^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a.$$

Тоді

$$\overline{R_A} / a \sqrt{3} = P/a = \overline{R_B} / 2a,$$

звідси $\overline{R_A} = P\sqrt{3} = 11\sqrt{3} = 19,05 \text{ кН}$; $\overline{R_B} = 2P = 2 * 11 = 22 \text{ кН}$.

Визначення зусиль в стержнях ферми

Окрім зовнішніх сил, які можуть бути прикладені до вузлів ферми, на кожний її вузол діють реакції стержнів, що збігаються в ньому.

Розглянемо рівновагу сил, прикладених до кожного вузла ферми, обираючи вузли в такій послідовності, щоб кількість невідомих сил у вузлі не перебільшувала двох.

Умовно вважаємо, що всі стержні розтягнуті, тобто реакції стержнів спрямовані від вузлів (рисунок 6). Від'ємні знаки знайдених реакцій вказують, що відповідні стержні не розтягнуті, а стиснуті, тобто реакції цих стержнів спрямовані до вузлів.

Реакції кожного стержня визначаємо \overline{S} та \overline{S}' , при цьому $\overline{S} = -\overline{S}'$.

Розрахунок починають з вузла С.

Складемо два рівняння рівноваги сил, прикладених до цього вузла:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad P + S_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad -S_1 - S_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Тоді

$$S_2 = -P / \cos 30^\circ = -12,7 \text{ кН};$$

$$S_1 = -S_2 \cos 60^\circ = -(-12,7) 0,5 = 6,35 \text{ кН}.$$

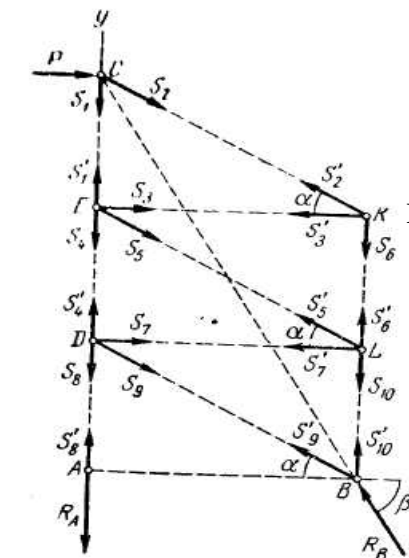


Рисунок 6

Значення S_2 отримано із знаком мінус, S_1 – плюс, тобто стержень 1 розтягнутий, а 2 – стиснутий.

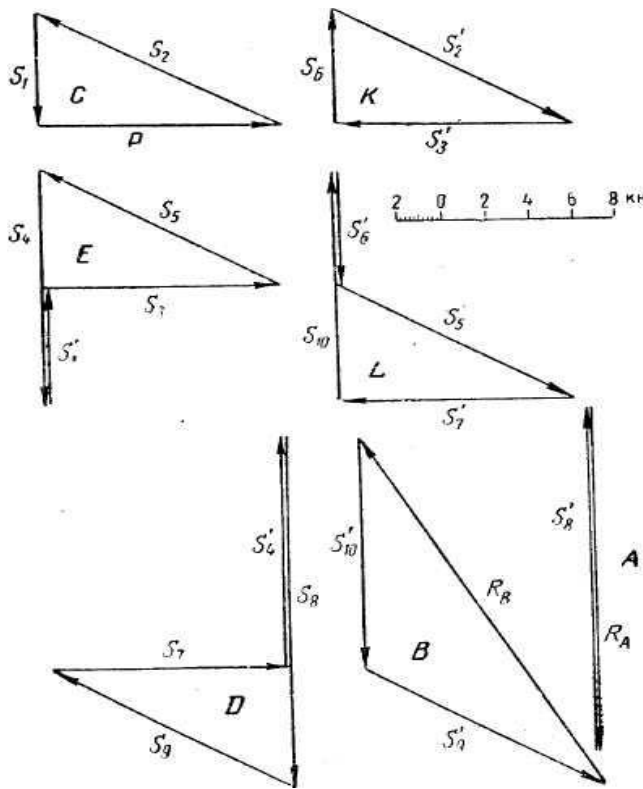


Рисунок 7

Вузол К:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad -S'_2 \cos 30^\circ - S'_3 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad -S_6 - S'_2 \cos 60^\circ = 0,$$

Враховуючи, що $S'_2 = S_2 = -12,7 \text{ кН}$, отримаємо $S'_3 = 11 \text{ кН}$,
 $S_6 = -6,35 \text{ кН}$.

Вузол Е:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad S_3 + S_5 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_1 - S_4 - S_5 \cos 60^\circ = 0,$$

тоді $S_5 = -12,7 \text{ кН}$, $S_4 = 12,7 \text{ кН}$.

Вузол L:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad -S'_7 + S'_5 \cos 30^\circ = 0;$$

Для перевірки розрахунків складають у масштабі трикутник сил \overline{P} , \overline{S}_1 і \overline{S}_2 , враховуючи при цьому, що напрямок \overline{S}_2 у трикутнику повинен бути протилежним напрямку \overline{S}_2 , який вказано на рисунку 6, тобто стержень 2 стиснуто (рисунок 7).

Трикутник сил отримано замкненим, тобто реакції \overline{S}_1 і \overline{S}_2 визначені правильно. Реакції інших стержнів ферми визначаються аналогічно.

Замкнені багатокутники сил, прикладені до кожного з вузлів ферми, вказані на рисунку 7.

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_6 + S'_5 \cos 60^\circ - S_{10} = 0,$$

знаходимо $S'_7 = 11 \text{ кН}$, $S_{10} = -12,7 \text{ кН}$.

Вузол D:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad S_7 + S_9 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_4 - S_8 - S_9 \cos 60^\circ = 0,$$

тоді $S_9 = -12,7 \text{ кН}$, $S_8 = 19,05 \text{ кН}$.

Таким чином, реакції всіх стержнів ферми визначено.

Зауважимо, що реакції опор ферми можна визначити, складаючи рівняння рівноваги сил, прикладених до вузлів А та В (рисунок 8).

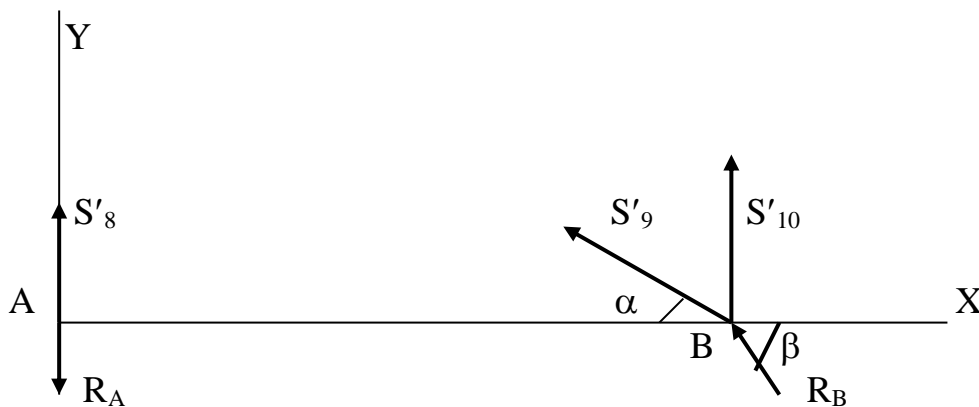


Рисунок 8

Вузол А:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_8 - R_A = 0, \quad R_A = 19,05 \text{ кН}$$

Вузол В:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad -S'_9 \cos 30^\circ - R_B \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_10 + S'_9 \cos 60^\circ + R_B \sin \beta = 0.$$

Розв'язуючи одночасно ці рівняння, отримаємо

$$R_B = 22 \text{ кН}, \beta = \arctg 1,73 = 60^\circ.$$

Значення реакцій \overline{R}_A і \overline{R}_B , отримані різними способами, збігаються.

Замкнені багатокутники сил, прикладених до опорних вузлів ферми, показано на рисунку 7.

Складання таблиці зусиль у стержнях ферми та побудова схеми ферми з дійсними напрямками цих зусиль

Таблиця 2 складається за результатами розрахунків.

Таблиця 2

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Знак зусилля	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-
Зусилля, кН	6.3 5	12. 7	11. 0	12. 7	12. 7	6.3 5	11. 0	19.0 5	12. 7	12. 7

Схема ферми з дійсними значеннями зусиль у стержнях показана на рисунку 9.

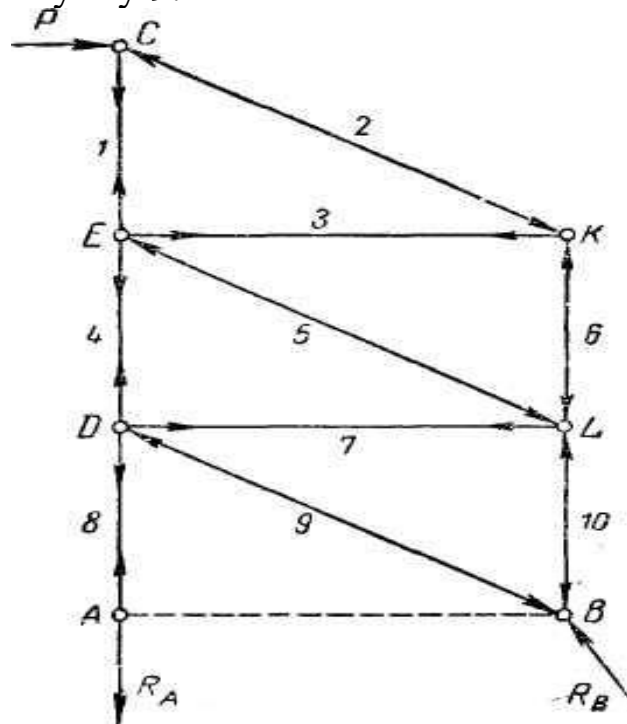


Рисунок 9

2.2 Визначення зусиль в стержнях ферми методом Ріттера

Метод Ріттера полягає в тому, що ферму поділяють на дві частини перерізом, який проходить через три стержні, у яких потрібно визначити зусилля, і розглядають рівновагу однієї з частин. Дію відкинутої частини замінюють відповідними силами, які спрямовують вздовж розрізаних стержнів від вузлів (до лінії перерізу в напрямку від обраної частини ферми).

Потім складають рівняння рівноваги у вигляді рівнянь моментів, обираючи центри моментів (або вісь проєкцій) так, щоб у кожному рівнянні було тільки одне невідоме зусилля. Центром моментів (точкою Ріттера) обирають точку для кожного з трьох перерізаних стержнів, окремо таку, щоб вона була точкою перетину двох інших стержнів цього перерізу (відносно неї складають рівняння суми моментів обраної частини ферми). У випадку, коли стержні не мають точки перетину (є паралельними), складається рівняння рівноваги у вигляді суми проєкцій усіх сил обраної частини ферми на вісь, перпендикулярну цим стержням.

Приклад

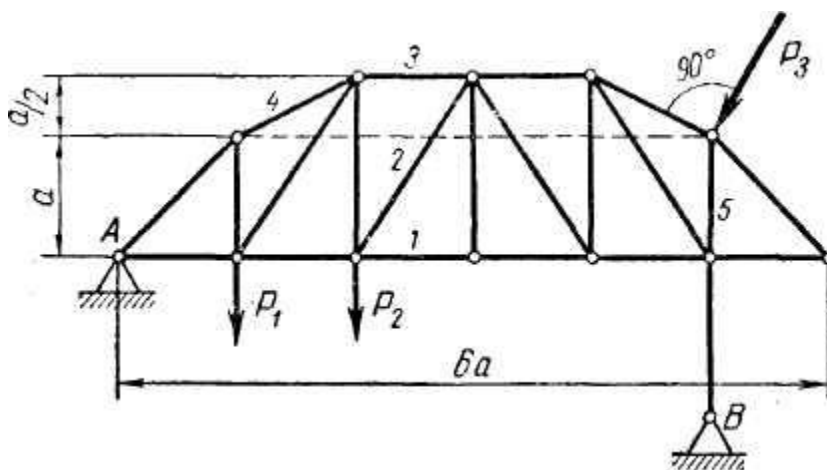


Рисунок 10

Дано:
схема ферми
(рисунок 10),

$$P = 58 \text{ кН},$$
$$P_2 = 50 \text{ кН},$$
$$P_3 = 85 \text{ кН}.$$

Визначити:
зусилля стержнів S_1 ,
 S_2 , S_3 , S_4 , S_5 .

Розв'язання

Аналітичне визначення реакцій опор

Розглянемо систему зрівноважених сил, прикладених до ферми. Відкинемо зв'язки (опори А, В), замінюючи їх дію на

ферму реакціями. Реакцію опори А розкладемо на складові \overline{X}_A і \overline{Y}_A , спрямовані вздовж осей координат. Реакцію шарніра В спрямовуємо вниз вздовж осі опорного стержня ВN.

Силу \overline{P}_3 розкладаємо на дві складові \overline{P}'_3 і \overline{P}''_3 , які за модулями дорівнюють $P'_3 = P_3 \cos \alpha$, $P''_3 = P_3 \sin \alpha$ (рисунок 11).

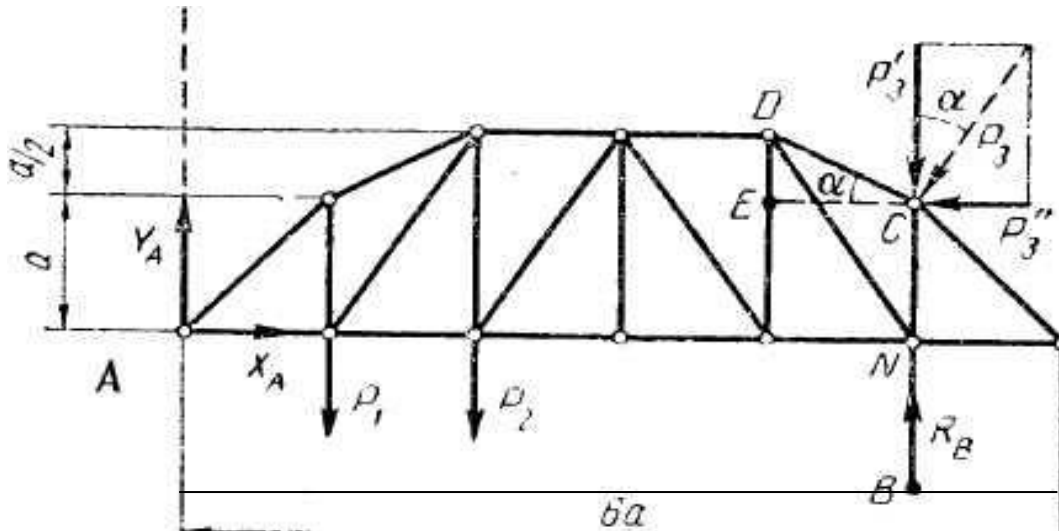


Рисунок 11

Знаходимо $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = DE/CD = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + (a/2)^2}} = 0,447;$$

$$\cos \alpha = CE/CD = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (a/2)^2}} = 0,894.$$

Визначаємо модулі сил $\overline{P}'_3 = 76,0 \text{ кН}$ і $\overline{P}''_3 = 38,0 \text{ кН}$.

Для плоскої системи сил, прикладених до ферми, складаємо три рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad -P_1 a - P_2 2a - P'_3 5a + P''_3 a + R_B 5a = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad -P'_3 + X_A = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 - P'_3 + R_B = 0. \quad (3)$$

Із рівняння (1) $R_B = (P_1 + P_2 + P'_3 \cdot 5 - P''_3) / 5 = 100 \text{ кН}$.

Із рівняння (2) $X_A = P'_3 = 38 \text{ кН}$.

Із рівняння (3) $Y_A = P_1 + P_2 + P'_3 - R_B = 84 \text{ кН}$.

Визначення зусиль у стержнях ферм

Знайдемо зусилля в п'яти стержнях ферми методом Ріттера. Для визначення зусиль у стержнях 1, 2, 3 (рисунок 12, а) робимо переріз I-I та розглядаємо рівновагу сил, прикладених до однієї частини ферми (рисунок 12, б).

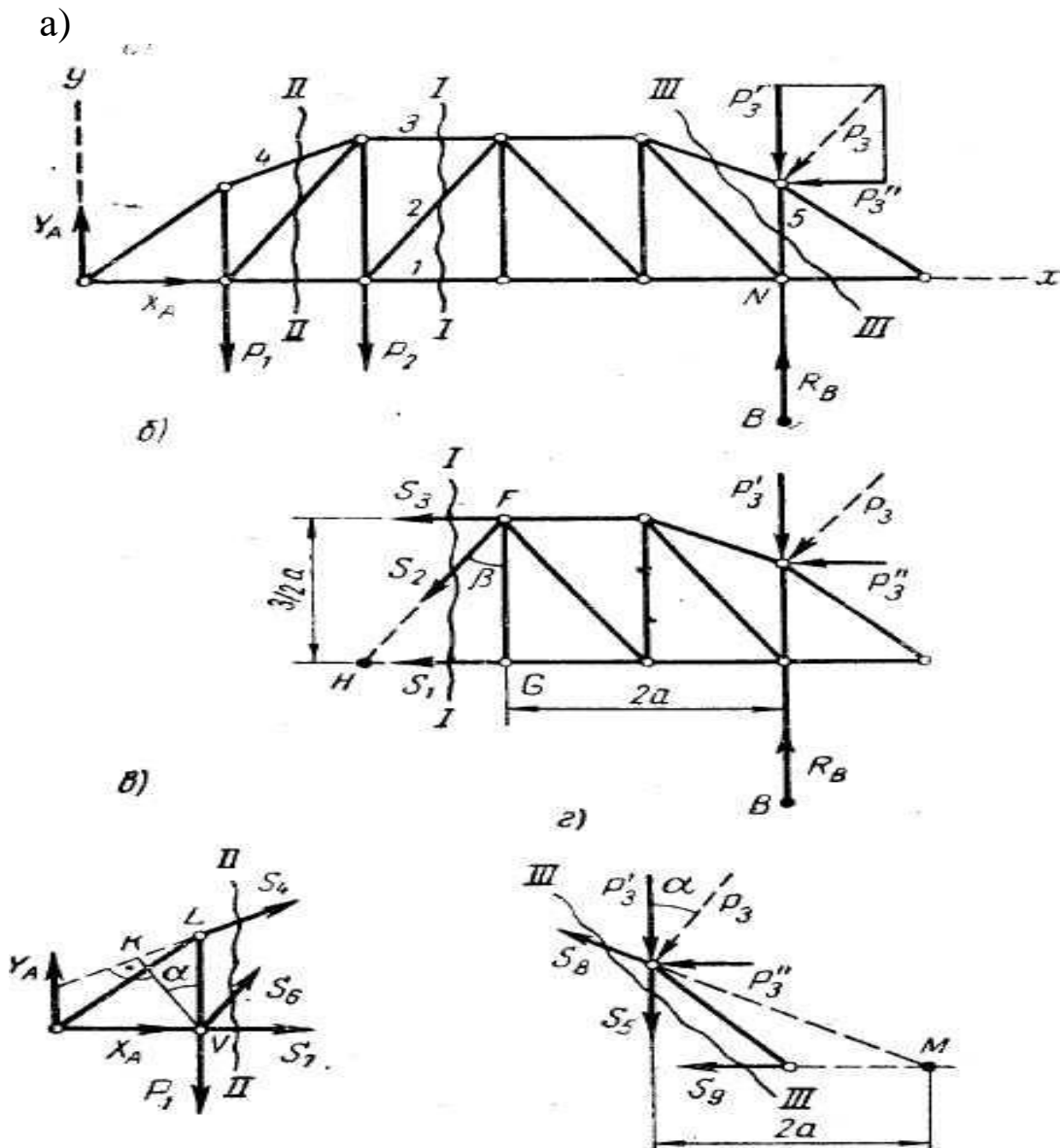


Рисунок 12

Доцільно розглядати рівновагу тієї частини ферми, для якої обсяг обчислювальної роботи менший. Слід складати такі рівняння рівноваги, кожне з яких вміщувало б тільки одне невідоме – шукане зусилля. Це дає змогу визначити кожне зусилля незалежно від зусиль в інших стержнях.

Як і раніш, умовно вважаємо, що всі стержні розтягнуті. Знак мінус у відповіді свідчить про те, що стержень стиснутий.

Для визначення S_1 складаємо рівняння моментів відносно точки перетину ліній дії $\overline{S_2}$ і $\overline{S_3}$ (точка має назву точка Ріттера):

$$\sum_{i=1}^n M_{iF} = 0; \quad -S_1 1,5a - P'_3 2a - P''_3 0,5a + R_B 2a = 0,$$

звідки $S_1 = (R_B 2 - P'_3 2 - P''_3 0,5) / 1,5 = 19,3 \text{ кН}$.

Для визначення S_2 складемо рівняння проекцій сил на вісь Ау:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad -S_2 \cos \beta - P'_3 + R_B = 0,$$

$$\text{де } \cos \beta = \frac{FG}{FH} = \frac{1,5a}{\sqrt{a^2 + (1,5a)^2}} = 0,832,$$

тоді

$$S_2 = (R_B - P'_3) / \cos \beta = 28,8 \text{ кН}.$$

Для визначення S_3 складаємо рівняння моментів відносно точки перетину ліній дії $\overline{S_1}$ і $\overline{S_2}$ (відносно точки Ріттера):

$$\sum_{i=1}^n M_{iH} = 0; \quad S_3 1,5a - P'_3 3a + P''_3 a + R_B 3a = 0,$$

тоді

$$S_3 = (P'_3 3 - P''_3 - R_B 3) / 1,5 = -73,3 \text{ кН}.$$

Для визначення зусилля в стержні 4 робимо переріз II-II та розглядаємо рівновагу сил, прикладених до лівої частини ферми (рисунок 12, в).

Складаємо рівняння:

$$\sum_{i=1}^n M_{iV} = 0; \quad - Y_A a - S_4 VK = 0, \text{ де } VK = VL \cos \alpha = 0,894 a.$$

Тоді $S_4 = - Y_A a / 0,894 a = - 94 \text{ кН}$.

Для визначення зусилля S_5 зробимо переріз III – III та розглянемо рівновагу сил, прикладених до правої частини ферми (рисунок 12, г).

Складаємо рівняння

$$\sum_{i=1}^n M_{iM} = 0; \quad P'_3 2a + S_5 2a + P''_3 a = 0.$$

Тоді

$$S_5 = - (P'_3 2 + P''_3) / 2 = - 95 \text{ кН}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986. – 480 с.
- 2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1984. – Ч. 1. – 385 с.
- 3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А.Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. – 431 с.
- 4 Аксьонова Н.А. Робочий конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». – Харків: УкрДАЗТ, 2005.
- 5 Аксьонова Н.А., Іванова З.О. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка», змістовий модуль «Статика». – Харків: УкрДАЗТ, 2009.