ABSCHNITT X.
PHYSIK UND MATHEMATIK

DOI 10.36074/05.06.2020.v3.49

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ПОПЕРЕЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ПО ПОДОВЖНЬОМУ ХВИЛЬОВОМУ ЧИСЛУ В ДИФРАКЦІЙНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ПЕРІОДИЧНОГО ШАРУВАТОГО СЕРЕДОВИЩА З МЕТАМАТЕРІАЛОМ

Казанко Олександр Віталійович
Український державний університет залізничного транспорту

Пєнкіна Ольга Євгеніївна
Український державний університет залізничного транспорту

УКРАЇНА

Хвильова теорія світла базується на уявленнях про світло як про хвильовий процес, що відбувається в електромагнітному полі. Теорія дифракції, як розділ хвильової оптики не враховує причини виникнення коливань, а дає уявлення про хвилю як про фізичну сутність, що має характеристики відокремлені від середовища. Тобто одна й та ж сама хвиля, з точки зору теорії дифракції, може мати різний характер розповсюдження дифракції у різних середовищах. Відповідно, під самою дифракцією розуміють характерне фізичне явище, яке супроводжує будь-яке коливання у просторі та виявляється у зміні форми електромагнітної хвилі при розповсюдженні, тобто у зміні характеристик хвилі – амплітуди, частоти, фази, напрямку й швидкості розповсюдження, поляризації, тощо. Іншими словами, будь-яка дифракційна задача зводиться до розв’язання рівнянь Максвелла. Однак підхід, пов'язаний з безпосереднім застосуванням рівнянь Максвелла виявляється пов'язаним з цілою низкою принципових складнощів: по-перше, рівняння Максвелла є векторними диференціальними рівняннями, а по-друге, складність у пошуку розв’язків накладає й геометрична різноманітність предметів відкритого фізичного простору. Отже, з розвитком обчислювальної техніки та впровадженням ЕОМ у різні галузі людської діяльності, спостерігається закономірне розширення та зріст практичного інтересу до галузі комп’ютерного моделювання. Зокрема, у прикладній сфері набуває популярність чисельне розв’язання рівнянь Максвелла. Чимало дифракційних оптичних електромагнітних явищ можуть симулюватися на базі інтегрованих платформ спеціального моделювання.

У роботі розглядається дифракційна задача для необмеженого періодичного двовимірного шаруватого середовища з метаматеріалом. Для таких середовищ можуть бути виписані точні розв’язки відповідного хвильового рівняння. Увага приділяється знаходженню похідної за спектральним параметром від власної функції задачі Штурма-Ліувілля (задача Штурма-Ліувілля виникає як підзадача при розв’язанні хвильового рівняння методом розділення змінних) [1]. У роботі зазначається, що у дифракційній задачі для шаруватого (кусково-однорідного) середовища відповідне хвильове рівняння слід розуміти як диференційне рівняння в узагальнених похідних за Соболєвим [2].

Розглянемо електромагнітне поле з наступними характеристиками: B – вектор магнітної індукції, D – вектор електричної індукції, E – напруженість електричного поля, H – напруженість магнітного поля. Матеріальні рівняння [5]:

$$B = \varepsilon E \tag{1}$$

$$D = \mu H \tag{2}$$

де $\varepsilon = \varepsilon(r)$ – діелектрична проникність даного середовища,

$\mu = \mu(r)$ –магнітна проникність даного середовища,

r – незалежна просторова зміна.

Запишемо рівняння Максвелла:

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B \tag{3}$$

$$\nabla \times H = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}D \tag{4}$$

t – незалежна часова зміна,

c – швидкість світла у порожнечі.

Покажемо, що шукане хвильове рівняння є наслідком рівнянь (3) та (4). Враховуючи матеріальне відношення $B = \mu H$, розділимо обидві частини рівняння на множник та застосуємо операцію ротор до обох частин рівняння (3), отримаємо:

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\mu}B$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \nabla \times \frac{1}{\mu}\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times H \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} \nabla \times \frac{1}{\mu}\nabla \times E = -\frac{1}{\mu}\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}D \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \nabla \times \frac{1}{\mu}\nabla \times E = -\varepsilon\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E\,. \tag{5}$$

Для перетворення лівої частини рівняння (5) скористаємося формулою подвійного векторного добутку:

$$A \times B \times C = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \tag{6}$$

де A, B, C – будь-які вектори.

У результаті, отримуємо:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu}\nabla \times E = \frac{1}{\mu}\nabla(\nabla \cdot E) - (\nabla \cdot \frac{1}{\mu}\nabla)E \tag{7}$$

Оскільки середовище незаряджене – $\nabla \cdot D = 0$, то

$$\nabla \cdot (\varepsilon E) = \varepsilon \nabla \cdot E + \nabla\varepsilon \cdot E \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \nabla \cdot E = -\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \cdot E$$

$$-\frac{1}{\mu}\nabla(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \cdot E) - \Delta_\mu E = -\varepsilon\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}E \quad \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\nabla(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \cdot E) + \Delta_\mu E = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{n}^2\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}E\,, \tag{8}$$

де $\Delta_\mu = \nabla \cdot \frac{1}{\mu}\nabla$ – модифікований оператор Лапласа,

$\boldsymbol{n} = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – коефіцієнт заломлення,

t – незалежна часова зміна.

Рівняння (8) є хвильовим рівнянням для неоднорідного незарядженого середовища.

Для монохроматичних коливань залежність від часу задається наступним співвідношенням [3]:

$$E(r, t) = E_0(r)e^{-i\omega t}\,,$$

де ω – циклічна частота,

отже рівняння (8) набуває вигляду:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\nabla(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot E_0)+\Delta_\mu E_0=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{n}^2(-i)^2\frac{\omega^2}{c^2}E_0 \qquad \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\nabla(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot E_0)+\Delta_\mu E_0=-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{n}^2k^2E_0\,, \tag{9}$$

де $k=\dfrac{\omega}{c}$ – хвильове число.

$\boldsymbol{n}=\sqrt{\varepsilon\mu}$ – коефіцієнт заломлення.

Щоб перейти від векторної форми рівняння (9) до відповідної скалярної форми, виберемо декартову систему координат таким чином, щоб початок відліку знаходився симетрично щодо границь одного з шарів середовища, а вісь була спрямована уздовж періодичності середовища (рис. 1). При даному виборі системи координат діелектрична проникність $\varepsilon=\varepsilon(r)$ залишається сталою вздовж вісі OY, а отже її градієнт $\nabla\varepsilon$ дорівнюватиме нулю вздовж цієї вісі: $\nabla\varepsilon(r)=\nabla\varepsilon(z,y)=(\dfrac{\partial}{\partial z}\varepsilon,0)$.

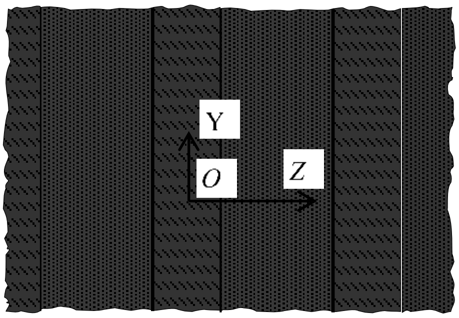

Рис. 1. **Модель двовимірного необмеженого шаруватого середовища**

Виберемо поляризацію електромагнітного поля, нехай $E_0=(0,E_{0,z})$. Такий вибір поляризації приведе до рівності нулю першого члена рівняння (9) – це по-перше, а по-друге, дасть можливість перейти від векторного до скалярного хвильового рівняння:

$$\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot E_0=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon\cdot 0+0\cdot E_{0,z}=0$$

$$\Rightarrow \Delta_\mu E_0=-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{n}^2k^2E_0 \qquad \Leftrightarrow \mu\,\Delta_\mu E_0+\boldsymbol{n}^2k^2E_0=0\,. \tag{10}$$

Останнє рівняння тотожне скалярному рівнянню (оскільки одна з компонент вектору напруженості поля дорівнює нулю). Отже рівняння (10) тотожне лінійному диференціальному рівнянню з частинними похідними другого порядку та може розв’язуватись методом розділення змінних. Із загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними відомо, що для застосування цього методу необхідно розв’язати задачу на власні числа та власні функції для лінійного диференціального оператора другого порядку – задачу Штурма-Ліувілля (вид оператора у задачі Штурма-Ліувілля залежить від рівняння з частинними похідними).

Стосовно до розглянутого питання диференціальне рівняння у задачі Штурма - Ліувілля $E_0=(0,E_{0,z})$ для поляризації має вигляд:

$$(\frac{1}{\mu}\dot{Z})^{\cdot}+\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}Z=0\,,$$

де $\varsigma_\beta^2=\sqrt{k^2\boldsymbol{n}^2+\beta^2}$, $\boldsymbol{n}=n_1,n_2$ – коефіцієнти заломлення відповідно одного та іншого шарів,

β – спектральний параметр.

Дане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням в узагальнених похідних за Соболєвим [2]. З урахуванням введеної системи координат, фундаментальні розв'язки цього рівняння мають вигляд: $u_1 = \cos\varsigma_\beta(z - z_0)$, $u_2 = \mu\varsigma^*_\beta \sin\varsigma_\beta(z - z_0)$, z_0 – точка нерегулярності (точка z_0 відповідає межі розподілу, $\varsigma^*_\beta = \sqrt{k^2(\boldsymbol{n}^*)^2 + \beta^2}$ ($\boldsymbol{n}^* = n_2, n_1$)).

Задача про знаходження похідної від розв'язку диференціального рівняння за параметром є типовою задачею [4]. Приведена задача, у загальному випадку, зводиться до розв'язання лінійної системи диференціальних рівнянь першого порядку. Аналогічні міркування можуть застосуватись й до рівняння, яке виникає у задачі Штурма-Ліувілля. У попередній роботі авторами було показано [5], що шукана похідна знаходиться серед розв'язків наступного диференціального рівняння:

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\psi})^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\psi = -2\beta\frac{1}{\mu}Z_\beta, \tag{11}$$

де ψ – шукана функція,

β – спектральний параметр.

Рівняння $(\frac{1}{\mu}\dot{\psi})^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\psi = -2\beta\frac{1}{\mu}Z_\beta$ є лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з кусково-сталим коефіцієнтом та з кусково-неперервною правою частиною. Покажемо, що частковий розв'язок рівняння може бути знайдений у вигляді:

$$\psi_0 = -\frac{1}{2}\dot{\xi}Z_\beta + \xi\dot{Z}_\beta, \tag{12}$$

причому, функція ξ обертається в нуль у точці нерегулярності: $\xi_{z=z_0} = 0$. Запишемо першу похідну:

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{1}{2}\ddot{\xi}Z_\beta - \frac{1}{2}\dot{\xi}\dot{Z}_\beta + \mu\left(\frac{1}{\mu}\dot{\xi}\dot{Z}_\beta + \xi(\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta)^{\cdot}\right).$$

Перепишемо останнє перетворення, ввівши заміну змінної – $\phi = \dot{\xi}$ та додаючи множник: $\frac{1}{\mu}$, маємо

$$\frac{1}{\mu}\dot{\psi}_0 = -\frac{1}{2}\dot{\phi}\frac{1}{\mu}Z_\beta - \frac{1}{2}\phi\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta + \phi\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta - \xi\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}Z_\beta.$$

Запишемо другу похідну та спростимо вираз:

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\psi}_0)^{\cdot} = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}\frac{1}{\mu})^{\cdot}Z_\beta - \frac{1}{2}\dot{\phi}\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta - \frac{1}{2}\dot{\phi}\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta - \frac{1}{2}\phi(\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta) + \dot{\phi}\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta + \phi(\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta)^{\cdot} - \phi\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}Z_\beta - \xi\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\dot{Z}_\beta$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{\mu}\dot{\psi}_0)^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\psi = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}\frac{1}{\mu})^{\cdot}Z_\beta \underline{-\frac{1}{2}\dot{\phi}\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta} \underline{-\frac{1}{2}\dot{\phi}\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta} - \frac{1}{2}\phi\underbrace{\left((\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta) + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}Z_\beta\right)}_{=0}$$

$$\underline{+\dot{\phi}\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta} + \phi\underbrace{(\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta)^{\cdot}}_{-\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}Z_\beta} - \phi\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}Z_\beta \underline{-\xi\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\dot{Z}_\beta} \underline{+\xi\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\dot{Z}_\beta}$$

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\psi}_0)^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\psi = \left(-\frac{1}{2}(\dot{\phi}\frac{1}{\mu})^{\cdot} - 2\phi\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\right)Z_\beta.$$

$$-\frac{1}{2}(\dot{\phi}\frac{1}{\mu})^{\cdot}-2\phi\frac{\varsigma_{\beta}^{2}}{\mu}=-2\frac{1}{\mu}\beta \quad \Leftrightarrow (\dot{\phi}\frac{1}{\mu})^{\cdot}+4\frac{\varsigma_{\beta}^{2}}{\mu}\phi=2\frac{1}{\mu}\beta .$$

В результаті отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого прядку з кусково-сталою правою частиною. Частковий розв’язок такого рівняння може знаходитись методом варіації.

У роботі було розглянуто хвильове рівняння для двовимірного необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. Використовуючи метод розділення змінних, були виписані розв’язки даного хвильового рівняння через елементарні функції. Показано, що для знаходження похідної від власної функції задачі Штурма-Ліувілля за спектральним параметром β необхідно розв’язати неоднорідне лінійне диференційне рівняння другог порядку з кусково-сталим коефіцієнтом та кусково-неперервною правою частиною. У роботі зазначається, що загальний підхід у розв’язанні такого рівняння (метод варіації) не дає бажаного результату. Важливість даної роботи, виражається в альтернативному підході на основі заміни змінної $\psi_0=-\frac{1}{2}\dot{\xi}Z_{\beta}+\xi\dot{Z}_{\beta}$.

Список використаних джерел:

[1] Тихонов, А. Н., & Самарский, А. А. (1999). *Уравнения математической физики*. Москва: МГУ. Физический факультет

[2] Павлова, М. Ф. & Тимербаев, М. Р. (2010). *Пространства Соболева. (теоремы вложения)*. Казань: Казанский государственный университет.

[3] Свешников, А. Г. & Могилевский, И. Е. (2012). *Математические задачи теории дифракции*. Москва: МГУ.

[4] Понтрягин, Л. С. (1974). *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. (4-е изд.). Москва: Наука.

[5] Казанко, О.В. & Пєнкіна, О.Є. Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного періодичного шаруватого середовища. *Wiadomości o postępie naukowym i rzeczywistych badaniach naukowych współczesności*: kolekcja prac naukowych «ΛÓΓOΣ» z materiałami międzynar. nauk.-prakt. konf. (Tom. 4, ss. 36-42). 17 czerwca 2019, Krakow: OP «Europejska platforma naukowa».

DOI 10.36074/05.06.2020.v3.50

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩА АДГЕЗІЇ МІЖ ВЗАЄМОДІЮЧИМИ ПОВЕРХНЯМИ

ORCID ID: 0000-0003-1856-3525 **Дячинська Олена Миколаївна**

асистент кафедри математики, фізики та комп’ютерних технологій

Вінницький національний аграрний університет

УКРАЇНА

Постійне зменшення розмірів пристроїв, схем ставить на сьогодні перед вченими, дослідниками вивчення такого важливого питання, як явище адгезії між взаємодіючими поверхнями. Оскільки при взаємодії поверхонь малих розмірів, поверхневі сили можуть переважати і призвести до непередбачених наслідків, тому адгезію потрібно вміти контролювати залежно від призначення (в мікроелектроніці, аерокосмічній галузі, в клітинній біології). Атомно-силовий мікроскоп – один із інструментів, який застосовують для вимірювання адгезії.