

DOI 10.36074/grail-of-science.19.11.2021.058

БАЗОВІ ПИТАННЯ У ПРОБЛЕМАХ ПОБУДОВИ ДВОВИМІРНОЇ МЕХАНІЧНОЇ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРОДВИГУНА

Казанко О. В

асистент кафедри Обчислювальної техніки та систем управління
Український державний університет залізничного транспорту, Україна

Одегов М. М.

ст. викладач кафедри електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка
Український державний університет залізничного транспорту, Україна

Пенкіна О. Є.

ст. викладач кафедри Обчислювальної техніки та систем управління
Український державний університет залізничного транспорту, Україна

Анотація. У роботі будується двовимірна електромеханічна модель двигуна (розглядаються фізичні процеси у яких відбувається неперервне перетворення електричної енергії у механічну). На прикладі такої ідеалізації розбираються питання розподілу сил на рухомій частині двигуна, яку приймається за абсолютно тверде тіло. Також піднімаються питання про можливість досягти рівномірного руху та про відсутність поступального руху. Модель може використовуватися у комп'ютерному моделюванні та у цілому сприяє розумінню принципів роботи електродвигунів

Ключові слова: електродвигун, електромагнітна індукція, абсолютно тверде тіло, рівномірний рух, обертально рівномірний рух, зрівноважена система сил

Вступ. Двигуни, що живляться від електричного струму проникли практично в усі сфери людського господарства – конвеєрні системи, підйомні, будівельно-оздоблювальні, багато-яке будівельне обладнання працює завдяки електричним машинам [1-2]. Отож, значення електромашин для сучасної промисловості стає цілком очевидним. 1824 рік – рік, коли вперше було спроектовано електродвигун для практичного застосування (Якобі, Росія) – може вважатись початком науково-технічної роботи, спрямованої на вдосконалення таких електромеханічних систем (конструкції, що стали прообразами таких електродвигунів, звісно, були відомі дещо раніше та сходять до робіт М. Фарадей, Естерда) [1-3].

Проте, виготовлення нових матеріалів (як от приміром, метало-газових сумішей титану з азотом, графену, металевого скла, оптоволокна), мініатюризація (зменшування габаритів, маси) і разом з тим збільшення

працездатності електронних пристроїв, які можуть входити до вузлів управління електродвигунів, розвиток фотоніки та нанотехнології, напівпровідникових систем знов й знов робить актуальним роботу, спрямовану на кількісне розуміння фізичних процесів, що лежать в основі функціонування електродвигунів. До того ж актуальними залишаються питання стійкості до зносу та роботи на пошук оптимального співвідношення між енергетичними характеристиками струму та механічною потужністю рухомих частин.

Виділимо ряд питань, що, на думку авторів, допоможуть сформуванню кількісно-конструктивний погляд на моделювання фізичного процесу, у якому відбувається неперервне перетворення електричної енергії в механічну. А саме, питання розподілу сил на рухомих частинах двигуна, як враховується навантаження, питання про можливість досягти рівномірного руху та розрахунок стартового етапу [4-5].

Для більш виразного розуміння механічних основ моделі електродвигуна, може бути прийнято концепцію абсолютно твердого тіла. Геометрична форма такого тіла зберігається при русі. У свою чергу прийняття концепції абсолютно твердого тіла приводить до природної необхідності говорити про міру механічної взаємодії, як про систему сил (розподіл сил або поле сил). За класичним визначенням, сила – міра механічної взаємодії – є вектор, що прикладений у деякій точці простору, тобто механічна сила, характеризується напрямком (лінією дії), абсолютною величиною та точкою прикладення. Інакше кажучи, при русі твердого тіла G сили F діють у сукупності, комплексно: $F = F(r)$, $r \in G$ – радіус-вектор точки прикладення сили. Нижче рух твердого тіла будемо розглядати як ізометричне перетворення геометричного простору (перетворення при якому зберігається відстань між будь-якими двома точками). Добре відома теорема Шаля (XIX ст.) дає можливість представляти будь-який механічний рух твердого тіла як композицію повороту та паралельного переносу у кожний момент часу. Відповідно до результату цієї теореми, говорять також про обертальний або поступальний рух як базові види механічного руху абсолютно твердого тіла.

Задані питання про здійснення такого руху твердим тілом при якому буде відсутня поступальна складова. Розумно вважати, що важливу роль у характері механічного руху такого тіла відіграватиме геометрична форма, тобто питання, по суті, полягає у пошуку такої геометричної форми тіла та розподілу сил при якому дане тіло здійснюватиме лише обертальний рух.

Кількісно осмислити питання про розподіл сил, що не визиває поступального руху та указати шляхи до подальшого розкриття цього питання, нижче наводяться деякі спрощення. Нехай плоске тверде тіло G має форму еліпса (рис. 1). Та нехай деяка миттєва F сила [6] подіяла на це тіло у момент часу $t = t_1$. Розглянемо силу F , у точці $r \in G$ (r – радіус-вектор точки прикладення). На рисунку 1 схематично представлено довільний механічний рух тіла G , видно, що дане тіло виявляється переміщеним на деяку відстань та повернутим на деякий кут – як й передікає теорема Шаля. Далі, утворимо поворот механічної системи G , F навколо геометричного центру тіла G . У результаті матимемо систему F' , G' – рисунок 2. Формально, маємо дві різні механічні системи – різні напрямки сил F та F' , різні точки прикладення r та r' .

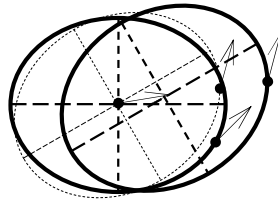


Рис. 1. Схема механічного руху плоского твердого тіла еліптичної форми

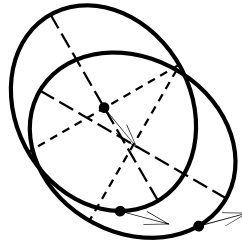
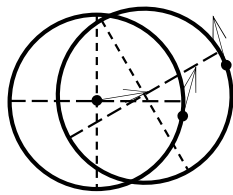
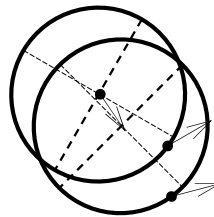


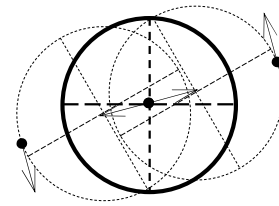
Рис. 2. Схема повернутої у площині системи



а). Схема механічного руху плоского твердого тіла кругової форми



б). Схема механічного руху повернутої у площині системи



в). Схема механічного руху кругового тіла, яке не здійснює поступального руху

Рис. 3.

Нехай тепер еліпс G є кругом. Провідна думка у розумінні питання про відсутність поступального руху, враховуючи контекст роботи, полягає у тому, що при повороті круга (у площині) на будь-який кут навколо його центру, тіло залишається геометрично інваріантним, чого не відбувається при повороті еліпса (рис. 3, а-б). Отже, механічні системи F, G та F', G' можуть розглядатися як рух одного й того ж кругового тіла G (оскільки $G = G'$) під дією миттєвої сили $F(r)$ та повернутої сили $F'(r')$. Тож, нехай на тіло $G = G'$ подіють миттєві сили F та F' у моменти часу $t = t_1$ та $t = t_1 + \Delta t$ відповідно (рис. 3 а). Неважко зрозуміти, що при зазначеному виборі сил, вектори переміщення поступальних складових руху, зумовлених відповідно силою F та F' , будуть додаватися. Виходячи з таких міркувань стає зрозумілим, що для відсутності поступального руху, поворот, яким було утворено систему G', F' , необхідно підібрати таким

чином, щоб вектори переміщення поступальних складових рухів утворених силами F та F' взаємознищувалися. При переході до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ отримуємо такий розподіл сил на круговому тілі, що не спричиняє поступального руху (рис. 3 а). Кругове тіло залишається геометричними інваріантним при повороті на будь який кут. У випадку з еліпсом такий кут не є довільним, проте еліпс залишається геометрично інваріантами, наприклад, при повороті на 180° . (Ця обставина наводить на думку, що на еліпсі також можуть реалізовуватися сили які не спричиняють поступального руху.) Наведені виклади дозволяють заключити, що вектори сил F , F' не обов'язково мають бути спрямовані по дотичній у точці прикладення (рис. 4).

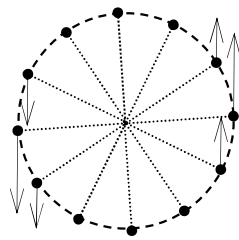


Рис. 4. Переріз рухомої частини двигуна

Наступне питання яке, потребує розгляду є питання про те, як може досягатися рівномірний рух обертових частин двигуна. Інтуїтивно зрозуміло, що окрім відсутності поступального руху, сили на обертових частинах, у тому чи іншому сенсі, мають викликати рівномірний рух. Нижче отримується умова для такої системи сил, і як стає зрозумілим, реалізація рівномірного руху спряжується із реалізацією зрівноваженої системи сил [7].

Для кількісного відображення кінематики плоских тіл, у випадку суто обертального руху може бути здійснено перехід від векторних до скалярних характеристик. А саме, до кутової швидкості та до кутового прискорення. Кутова швидкість та кутове прискорення є кінематичними характеристиками тіла, а не окремих точок, що належать тілу (у протиставлення кутової швидкості тіла, швидкість окремих матеріальних точок називають лінійною швидкістю). За визначенням, кутова швидкість є похідна від кута повороту за часом: $\omega = \dot{\varphi}(t)$, відповідно, кутове прискорення є другою похідною від кута повороту за часом $\varepsilon = \dot{\omega}(t)$ ($\varphi(t)$ – кут повороту, t – незалежна часова зміна). При обертальному русі різні точки тіла, рухаються з різними лінійними швидкостями. Говорять, що тіло рухається обертально рівномірно, якщо кутова швидкість цього тіла є сталою $\omega = \text{const}$, або, якщо кутове прискорення є тотожним нулем $\varepsilon \equiv 0$.

Існує нерозривний зв'язок між дією сили та прискоренням точки у якій прикладена ця сила (2-й закон Ньютона). Звідки, зокрема, впливає, що рівномірний рух можливий лише тоді, коли сили не спричиняють прискорення – тобто мають утворювати зрівноважену систему. Інакше кажучи, прагнення отримати рівномірний рух обертових частин двигуна спряжується реалізацією зрівноваженої системи сил на цих обертових частинах.

Зафіксуємо на круговому тілі G деяку точку з радіус-вектором r . Для вибраної точки запишимо 2-й закон Ньютона

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}$$

де $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – імпульс, m , v – маса та швидкість точки з радіус-вектором \mathbf{r} відповідно. Перейдемо до рівняння динаміки обертального руху абсолютно твердого тіла. Векторно помножимо обидві частини останньої рівності на радіус-вектор \mathbf{r} :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{r} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$$

Зважаючи на те, що $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{r}_0$, оскільки $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$, тобто $\mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ матимемо

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} \times \mathbf{r}_0$$

Нормальна складова сили \mathbf{F} не змінює обертального руху (лінія дії нормальної складової проходить через центр – компенсується доцентровою силою), то від сили \mathbf{F} «залишається» лише тангенціальна складова для якої радіус-вектор \mathbf{r} є плечем. Тож у лівій частині рівності маємо похідну від моменту імпульсу $\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{r}$, а у правій частині маємо момент сили \mathbf{F} (відносно центру тіла G). Таким чином, при суто обертальному русі абсолютно твердого тіла зміна моменту імпульсу \mathbf{L} дорівнює моменту сили, що спричиняє даний рух:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M}$$

або, роблячи підстановку $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} = J\dot{\varphi}$, записуємо доточкове рівняння динаміки тіла G :

$$\mathbf{M}(t) = J\ddot{\varphi}(t)$$

де $J = m|r|^2$ – момент інерції. Таким чином розподіл сил має бути для рівномірного руху. кожна сила прикладена у границі кругового тіла G . Кожна така система дає кутове прискорення, але сумарне прискорення дорівнюватиме нулю. При такому розподілі сил на обертючих частинах двигуна зберігається рівномірний рух.

Рівномірний рух (з рівним нулю прискоренням) може здійснюватися під дією зрівноваженою системою сил. У відповідності до динаміки поступального руху абсолютно твердого тіла центр мас (або зберігає прямолінійний рівномірний рух). У декартовій прямокутній системі координат (початок координат суміщено з геометричним центром кругового тіла G)

$$s'(\tau) = \frac{l + s_0}{|l + s_0|} \mathbf{R}, \quad \tau \in (-\infty, \infty)$$

тут \mathbf{R} – радіус кругового тіла, l , s_0 – вибрані вектори

Висновки. Модель, що будується у роботі сприяє кількісному розумінню фізичних процесів, у яких відбувається неперервне перетворення електричної енергії у механічну. Докладно розбираються питання про розподіл сил на рухомих частинах двигуна. З математичною строгістю показується, що розподіл сил на рухомих частинах не передає поступального руху. Сили, що входять до

такого розподілу необов'язково можуть бути сталими та необов'язково спрямовані по дотичній у точці прикладення. Рівномірне обертання рухомих частин двигуна може досягається, коли розподіл сил у зазначеному сенсі являє собою зрівноважену систему. Навантаження у моделі враховується шляхом введення до рівняння динаміки додаткового показника – моменту валу, який опирається обертанню рухомої частини.

Для кругового тіла в ході роботи отримано може б «доводиться» аксіома статички про зрівноважену систему двох сил (дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла є зрівноваженими тоді й тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем, спрямовані в протилежних напрямках та мають спільну лінію дії), тобто у статиці ця аксіома прийнята для будь-якого твердого тіла, а для кругового тіла аксіому можна довести.

Список використаних джерел:

- [1] Гетьман Г. К. (2011) Теория электрической тяги: Монография [Текст]: в 2 т. / Г.К. Гетьман – Дн-вск: Изд-во Маковецкий, Т.1. – 456 с.
- [2] Герман-Галкин, С.Г., & Кардонов Г.А. (2003) Электрические машины. Лабораторные работы на ПК. СПб.: Корона-принт,— 256 с.
- [3] Yatsko S., & Sytnik B., & Vashchenko Y., & Sidorenko A., & Liubarskyi B. Veretennikov I. et al. (Feb. 2019) Comprehensive approach to modeling dynamic processes in the system of underground rail electric traction: Eastern-European Journal of Enterprise Technologies vol. 1 no. 9 (97) pp. 48-57
- [4] Казанко, О., & Одегов, М. (2021). Побудова двовимірної механічної моделі електродвигуна послідовного підключення. *Грааль науки*, (7), 172-175. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.27.08.2021.031>
- [5] Buriakovskiy S., & Liubarskyi B., & Pomazan D., & Panchenko V., & Maslii An. (2019). Mathematical Modelling of Prospective Transport Systems Electromechanical Energy Transducers on Basis of the Generalized Model: 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT), Ceske Budejovice, Czech Republic, pp. 76-79.
- [6] Кудрявцев Л. Д. (1981) Курс математического анализа: учебник для студентов, том 2, Москва "Высшая школа" – 584 с.
- [7] Krishnan R., (2006) Switched reluctance motor drives. Modeling. Simulation Analysis Design and Applications, CRC Press, pp. 324.