УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ

ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів

Харків 2011

УДК 517
ББК 22.11
Д50

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів (№ 1/11-7268 від 04.08.11 р.).

Авторський колектив:

Є.З. Могульський, Г.П. Бородай, А.О. Дрогаченко, О.В. Рибачук

Рецензенти:

професори Л.В. Курпа (НТУ “ХПІ“),
В.Д. Гордевський (ХНУ ім. В.Н. Каразіна),
В.С. Проценко (ХНАУ ім. М.Є. Жуковського)

Д50 Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник / Є.З. Могульський, Г.П. Бородай, А.О. Дрогаченко та ін. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. — 311 с., табл. 6, рис. 145.

ISBN 978-966-2033-64-9

Посібник базується на лекціях, що протягом багатьох років читалися в ХУПС та УкрДАЗТ майбутнім інженерам різних спеціальностей, і призначений переважно для студентів вищих навчальних закладів, де програма з математики не перевершує 280 год. На вивчення питань, які розглядаються у посібнику, відводиться у першому та другому семестрах близько 120 год.

Посібник не ставить за мету викладання матеріала на високому “$\varepsilon - \delta$” рівні. Хоча матеріал подається з більшими або меншими втратами математичної точності, в ньому є доступні доведення богатьох важливих теорем та фактів курсу.

Основні поняття та теореми ілюструються великою кількістю докладно розв’язаних прикладів. Наприкінці кожного розділу наведено багато вправ, необхідних для кращого засвоєння матеріалу. До всіх задач надані відповіді, що дозволить студенту здійснювати самоконтроль. Таким чином, навчальний посібник поєднує функції підручника та задачника.

Призначений для студентів загальнотехнічних та економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Даний навчальний посібник є результатом суттєвої переробки та вдосконалення книги [6].

УДК 517
ББК 22.11

ISBN 978-966-2033-64-9

ЗМІСТ

Розділ 1
ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Апарат теорії комплексних чисел є основним в описанні коливальних процесів, що протікають у колі змінного струму. До комплексних чисел зводиться більшість задач теорії електромагнітного поля й аеродинаміки. Наприклад, відома теорема про піднімальну силу крила літака була одержана М.Є. Жуковським з використанням комплексних чисел.

1.1. Комплексні числа

Найбільш простою задачею, для розв'язання якої потрібні комплексні числа, є розв'язання квадратного рівняння. Не кожне квадратне рівняння має дійсні корені (сукупність дійсних чисел недостатньо широка для розв'язання квадратного рівняння).

Так, рівняння $x^2+1=0$ не має дійсних розв'язків, тому що квадрат будь-якого дійсного числа невід'ємний. Ось тому в задачі про розв'язок квадратного рівняння доводиться розширювати множину дійсних чисел R.

Введемо до розгляду елемент i, такий, що $i^2=-1$. Будемо називати i уявною одиницею. Очевидно, що i є коренем рівняння $x^2+1=0$.

Означення. Символ $a+ib$, де a і b – дійсні числа $(a, b \in R)$, називається **комплексним числом** з дійсною частиною a і уявною частиною b (у певному розумінні множина комплексних чисел є єдиним розширенням множини дійсних чисел).

Зручно позначати комплексне число $a+ib$ однією буквою z, а для дійсної і уявної частин прийняти відповідно позначення $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$

$$\boxed{z=a+ib} \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}(a+ib)=a,\ \operatorname{Im} z=\operatorname{Im}(a+ib)=b.}$$

Корені квадратного рівняння $Az^2+Bz+C=0$, дискримінант якого $D=B^2-4A\cdot C<0$, можуть бути визначені за формулою

$$z_{1,2}=\frac{-B\pm i\sqrt{|D|}}{2A}.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння: а) $z^2+1=0$; б) $z^2+2z+6=0$.

Розв'язання. а) $z_{1,2}=\pm i\sqrt{|-1|}=\pm i$; б) $z_{1,2}=\dfrac{-2\pm i\sqrt{20}}{2}=-1\pm i\sqrt{5}$.

1.2. Дії над комплексними числами

Дії над комплексними числами ґрунтуються на таких правилах:

1) $a_1+ib_1=a_2+ib_2 \Leftrightarrow a_1=a_2,\ b_1=b_2$;
2) $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=a_1+a_2+i(b_1+b_2)$;
3) $(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)=a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1)$.

Іншими словами, додавання і множення комплексних чисел відбувається так, наче i є звичайним числом, а величина i^2 дорівнює -1.

Нехай $z=a+ib$. Комплексне число $a-ib$ називається **спряженим** з числом z і позначається $\overline{z}$

$$\boxed{\overline{z}=\overline{a+ib}=a-ib.}$$

Властивості операції спряження такі:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2;\qquad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$$

(якщо $c\in R$, то $\overline{c\cdot z}=c\cdot\overline{z}$).

Добуток **комплексно-спряжених** чисел є дійсним (і навіть невід'ємним) числом

$$\boxed{z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2.}$$

Операція ділення комплексних чисел уводиться таким чином:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2}=\frac{(a_1+ib_1)\cdot(a_2-ib_2)}{a_2^2+b_2^2}.}$$

Відзначимо, що раціональні дії (рівність, додавання, множення та ділення) над комплексними числами цілком погоджуються при $b_1=b_2=0$ з діями над дійсними числами.

Приклад 2. Виконати дії: а) i^3; б) i^4; в) i^{17};

г) $(2+3i)(4+i)$; д) $\dfrac{1+3i}{2-5i}$; е) $\dfrac{1}{(-2+i)(1+2i)}$.

Розв'язання. а) $i^3 = i^2 \cdot i = -i$; б) $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$;

в) $i^{17} = \left(i^4\right)^4 i = i$; г) $(2+3i)(4+i) = 8-3+(2+12)i = 5+14i$;

д) $\dfrac{1+3i}{2-5i} = \dfrac{(1+3i)\cdot(2+5i)}{(2-5i)\cdot(2+5i)} = \dfrac{-13+11i}{4+25} = -\dfrac{13}{29} + i\dfrac{11}{29}$;

е) $\dfrac{1}{(-2+i)(1+2i)} = \dfrac{1}{-4-3i} = \dfrac{-4+3i}{16+9} = -\dfrac{4}{25} + i\dfrac{3}{25}$.

Приклад 3. Знайти дійсну й уявну частини таких чисел:

а) $z = (1-i)\cdot(1+2i)^2 - \dfrac{2-i}{3+2i}$; б) $z = (2+3i)\cdot(1-i) + \dfrac{(2+i)^2}{4-3i}$.

Розв'язання.

а) $z = (1-i)\cdot(1+2i)^2 - \dfrac{2-i}{3+2i} = (1-i)(1+4i-4) - \dfrac{(2-i)(3-2i)}{9+4} =$

$= 1+7i - \dfrac{4-7i}{13} = \dfrac{9}{13} + 7\dfrac{7}{13}i \Rightarrow \operatorname{Re} z = \dfrac{9}{13}$, $\operatorname{Im} z = 7\dfrac{7}{13}$;

б) $z = (2+3i)\cdot(1-i) + \dfrac{(2+i)^2}{4-3i} = 5+i+\dfrac{(3+4i)(4+3i)}{25} =$

$= 5+i+\dfrac{i25}{25} = 5+2i \Rightarrow \operatorname{Re} z = 5$, $\operatorname{Im} z = 2$.

Поняття "більше" та "менше" для комплексних чисел означити розумно не можна.

1.3. Геометричне зображення комплексних чисел

Комплексне число припускає просте геометричне тлумачення. Воно полягає у тому, що комплексному числу $z = a + ib$ можна взаємно однозначно поставити у відповідність точку $M(a;b)$ площини. Цю точку іноді позначають літерою z (рис.1.1). Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається **комплексною**.

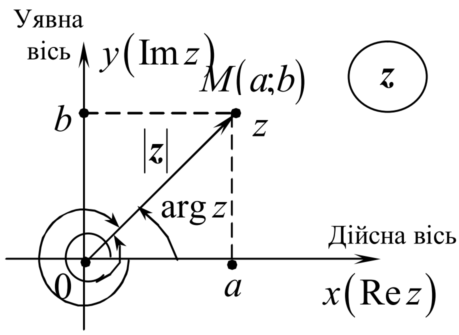


Рис. 1.1

Умови $\mathrm{Re}\,z \substack{\ge \\ <} c$, $\mathrm{Im}\,z \substack{\ge \\ <} d$ $(c, d \in R)$ виділяють на комплексній площині ті чи інші півплощини (замкнені або відкриті).

Приклад 4. Знайти множину точок комплексної площини, які задовольняють умови:

а) $\mathrm{Re}(z+2+3i) \ge -1$; б) $\mathrm{Im}(2z+6-4i) < 3$.

Розв'язання

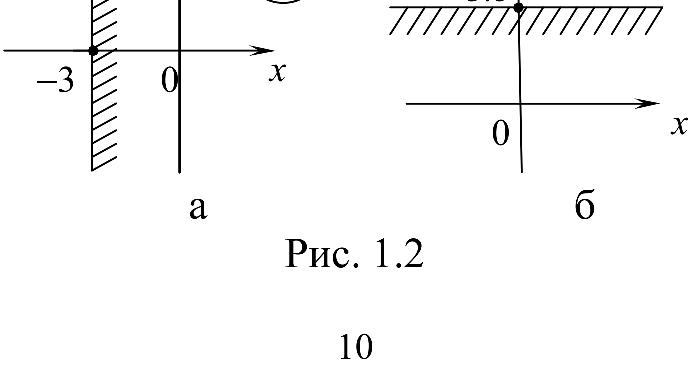
а) $\mathrm{Re}(z+2+3i) \ge -1 \Rightarrow \mathrm{Re}\,z + 2 \ge -1 \Rightarrow \mathrm{Re}\,z \ge -3$ – замкнена півплощина (півплощина з межовою прямою (рис. 1.2, а));

б) $\mathrm{Im}(2z+6-4i) < 3 \Rightarrow 2\,\mathrm{Im}\,z - 4 < 3 \Rightarrow \mathrm{Im}\,z < 3.5$ – відкрита півплощина (півплощина без межової прямої (рис. 1.2, б)).

Означення 1. **Модулем** $|z|$ комплексного числа $z = a + ib$ називається довжина вектора $\overrightarrow{OM}$ (відстань від точки M до початку координат O)

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .}$$

Позначення $|z|$ узгоджено з позначенням $|a|$, яке прийнято для позначення відстані від точки, яка зображує дійсне число a, до початку координат. Насправді, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ при $b = 0$ зводиться до $\sqrt{a^2} = |a|$.



а б

Рис. 1.2

Приклад 5. Знайти модулі комплексних чисел:

а) $z=-1+i\sqrt{3}$;   б) $z=3-4i$;   в) $z=3\sqrt{2}+4i$.

Розв'язання. а) $|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$;

б) $|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$;   в) $|z|=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+4^2}=\sqrt{34}$.

Означення 2. **Аргументом** комплексного числа $z\neq 0$ будемо називати кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з додатнім напрямом осі Ox.

Величина цього кута вважається додатною, якщо відлік здійснюється проти годинникової стрілки, і від'ємною – у протилежному випадку.

На відміну від модуля аргумент комплексного числа визначається неоднозначно; будь-які два аргументи комплексного числа відрізняються на кут, що є кратним 2π (рис.1.1). Щоб уникнути многозначності аргументу, можна вважати, що він набуває значення у межах від $-\pi$ до $+\pi$. У цьому випадку аргумент комплексного числа позначають символом $\arg z$.

Отже, $-\pi < \arg z \leq +\pi$.

Дійсна та уявна частини комплексного числа $z=a+ib$ виражаються через $|z|$ і $\arg z$ таким чином (рис.1.1):

$$a=|z|\cdot\cos(\arg z),\quad b=|z|\cdot\sin(\arg z).$$

Звідси випливає, що $\arg z$ можна знайти як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}\cos(\arg z)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin(\arg z)=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

Якщо урахувати координатну чверть, у якій розташовано комплексне число, $\arg z$ можна знайти з рівняння

$$\operatorname{tg}(\arg z)=\frac{b}{a},$$

яке є наслідком попередньої системи. При цьому приходимо до такого твердження:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \text{ якщо } z \in I \text{ або } IV \text{ координатним чвертям,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, \text{ якщо } z \in II \text{ координатній чверті,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi, \text{ якщо } z \in III \text{ координатній чверті.} \end{cases}$$

З геометричних міркувань зрозуміло, що при $a > 0$ $\arg a = 0$, $\arg(-a) = \pi$, $\arg(ia) = \dfrac{\pi}{2}$, $\arg(-ia) = -\dfrac{\pi}{2}$; крім того, цілком зрозуміло, що $\arg \overline{z} = -\arg z$, $|\overline{z}| = |z|$ (рис.1.3).

Приклад 6. Знайти аргументи комплексних чисел:

а) $z = -4 + 4\sqrt{3}i$; б) $z = -2\sqrt{3} - 2i$.

Розв'язання

а) $z \in II$ координатному куту: $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{3}}{-4} + \pi = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + +\pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$;

б) $z \in III$ координатному куту:

$\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} - \pi = \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Відстань між двома точками z_1 і z_2 комплексної площини дорівнює $|z_1 - z_2|$ (дійсно, $z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2)$, отже, $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$).

Тому фігура, що визначається рівнянням $|z - z_0| = R \, (R > 0)$, є колом з центром у точці z_0 і радіусом R. Нерівність $|z - z_0| < R$ визначає круг (внутрішність кола) з центром у точці z_0 і радіусом R. Фігура, яка вилучається нерівністю $\alpha < \arg z < \beta$ $(-\pi < \alpha < \beta \leq \pi)$, являє собою внутрішність кута, утвореного променями $\arg z = \alpha$, $\arg z = \beta$ (рис. 1.4).

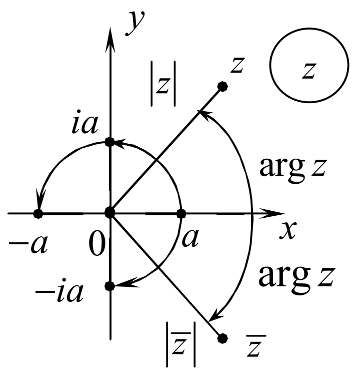


Рис. 1.3

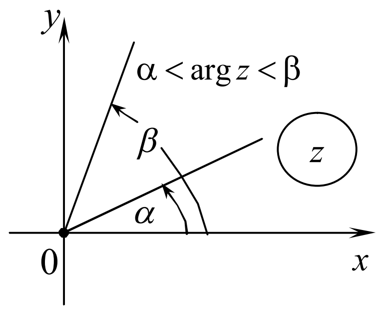


Рис. 1.4

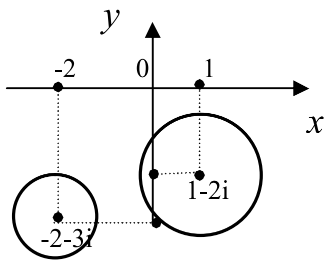


Рис. 1.5

Приклад 7. Знайти фігури, що визначаються умовами: а) $|z-1+2i|=\sqrt{2}$; б) $|z+2+3i|\le 1$.

Розв'язання. а) коло з центром у точці $z_0=1-2i$ і радіусом $\sqrt{2}$; б) замкнений круг (коло включається) з центром у точці $z_0=-2-3i$ і радіусом 1 (рис.1.5).

1.4. Тригонометрична форма запису комплексного числа

Оскільки $a=|z|\cdot\cos(\arg z)$, $b=|z|\cdot\sin(\arg z)$ (див. рис.1.1), то комплексне число $z=a+bi$ можна виразити через модуль і аргумент (комплексні координати точки z) таким чином:

$$\boxed{z=|z|\cdot\left(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z)\right).}$$

Ця форма запису комплексного числа називається тригонометричною формою комплексного числа.

Приклад 8. Подати у тригонометричній формі комплексні числа:

а) $z=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$; б) $z=-2-2\sqrt{3}i$; в) $z=-5$; г) $z=-2i$; д) $z=2+3i$.

Розв'язання: а) $|z|=\sqrt{6}$; $z\in IV$ координатному куту:

$\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\operatorname{arctg}1 = -\dfrac{\pi}{4}$. Таким чином,

$|z| = \sqrt{6}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

б) $|z| = 4$; $z \in III$ координатному куту:

$\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} - \pi = \dfrac{\pi}{3} - \pi = -\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \quad z = 4\left(\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\right)$;

в) $|z| = 5$, $\arg z = \pi \Rightarrow z = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$;

г) $|z| = 2$, $\arg z = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$;

д) $|z| = \sqrt{13}$; $z \in I$ координатному куту: $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$z = \sqrt{13}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right)\right)$.

1.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Тригонометричну форму запису комплексних чисел зручно використовувати при їх множенні, діленні і піднесенні до цілого степеня.

Мають місце рівності:

$$\boxed{\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\left(\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i\sin(\arg z_1 + \arg z_2)\right), \\ &\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\arg z_1 - \arg z_2) + i\sin(\arg z_1 - \arg z_2)\right), \\ &z^n = |z|^n\left(\cos(n\arg z) + i\sin(n\arg z)\right), \text{ де } n - \text{ціле число.} \end{aligned}}$$

Отже: 1) при множенні чисел модулі перемножуються, а аргументи додаються; 2) при діленні чисел модулі діляться, а аргументи віднімаються.

Таким чином,

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \arg(z_1 \cdot z_2) \doteq \arg z_1 + \arg z_2,$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} \doteq \arg z_1 - \arg z_2,$$

$$\left|z^n\right| = |z|^n, \qquad \arg z^n \doteq n\arg z$$

(запис $\doteq$ означає, що ліва та права частини можуть відрізнятися на величину, яка кратна 2π).

Як легко бачити, при множенні числа z на i відбувається обертання z на кут $\frac{\pi}{2}$, а при множенні на $-i$ – на кут $-\frac{\pi}{2}$ (рис.1.6).

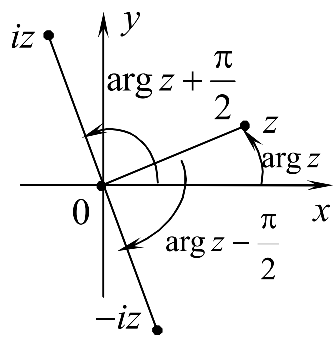


Рис. 1.6

Приклад 9. Виконати дії у тригонометричній формі $z = \frac{(2-2i)^3 \cdot \left(-\sqrt{3}-i\right)^2}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^5}$.

Розв'язання. Позначимо $z_1 = 2-2i$, $z_2 = -\sqrt{3}-i$, $z_3 = -1+i\sqrt{3}$.

Тоді $|z| = \frac{|z_1|^3 \cdot |z_2|^2}{|z_3|^5}$, $\arg z \doteq 3\arg z_1 + 2\arg z_2 - 5\arg z_3$. Оскільки $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $\arg z_1 = \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $|z_2| = 2$, $\arg z_2 = -\pi + \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{5\pi}{6}$, $|z_3| = 2$, $\arg z_3 = \pi + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, то

$$|z| = 2\sqrt{2}, \arg z \doteq -\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{3} - \frac{10\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} - 5\pi \Rightarrow \ \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, $z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2(1+i)$.

Приклад 10. Обчислити

$$z=\frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^4\cdot(1-i)^5}{2^8\cdot\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}+\frac{(3+i)^2}{2-i}.$$

Розв'язання

У першому доданку z_1 дії виконуємо у тригонометричній, а у другому z_2 – у алгебраїчній формах: $\left|2\sqrt{3}+2i\right|=2^2$,

$\arg\left(2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)=\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$; $\quad |1-i|=\sqrt{2}$, $\quad \arg(1-i)=\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$;

$\left|1+i\sqrt{3}\right|=2$, $\quad \arg\left(1+i\sqrt{3}\right)=\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \quad |z_1|=\frac{\left|2\sqrt{3}+2i\right|^4\cdot|1-i|^5}{2^8\cdot\left|1+i\sqrt{3}\right|^2}=2^{\frac{1}{2}}$;

$\arg z_1\doteq 4\arg\left(2\sqrt{3}+2i\right)+5\arg(1-i)-2\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)=-\frac{5\pi}{4}\Rightarrow \arg z_1=\frac{3\pi}{4}$;

$z_2=\frac{8+6i}{2-i}=\frac{10+20i}{5}=2+4i$. Отже, $z=2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)+2+4i=$
$=-1+i+2+4i=1+5i$.

1.6. Піднесення числа e до комплексного степеня

У підрозділах 3.7 та 3.8 буде введено для розгляду число Ейлера e та встановлено формулу піднесення цього числа до комплексного степеня $z=a+ib$

$$\boxed{e^z=e^{a+ib}=e^a\cdot(\cos b+i\sin b).}$$

З цієї формули випливають такі властивості e^z:

1) $\left\|e^{a+ib}\right\|=e^a$; 2) $\arg e^{a+ib}\doteq b$;
3) $\mathrm{Re}\left(e^{a+ib}\right)=e^a\cos b$, $\mathrm{Im}\left(e^{a+ib}\right)=e^a\sin b$;
4) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$; 5) $e^{z+2\pi i}=e^z$.

Приклад 11. Знайти: а) e^{2+3i}; б) $\mathrm{Re}\left(e^{-3+2i}\right)$;

в) $\mathrm{Im}\left(e^{-5-i}\right)$; г) $\left|e^{-3+2i}\right|$; д) $\arg e^{-3+2i}$.

Розв'язання: а) $e^{2+3i}=e^2\cdot(cos3+i\,sin3)$; б) $\mathrm{Re}\left(e^{-3+2i}\right)=e^{-3}\cdot\cos 2$; в) $\mathrm{Im}\left(e^{-5-i}\right)=-e^{-5}\cdot\sin 1$; г) $\left|e^{-3+2i}\right|=e^{-3}$; д) $\arg e^{-3+2i}=2$.

Приклад 12. Знайти:

а) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{2+3i}}{1-i}\right)$; б) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{-3+2i}}{2+i}\right)$; в) $\left|\dfrac{e^{5-i}}{e^{2+3i}(1+2i)}\right|$.

Розв'язання. а) $\dfrac{e^{2+3i}}{1-i}=\dfrac{e^2(\cos 3+i\sin 3)(1+i)}{2}=$

$$=\frac{e^2}{2}\left(\cos 3-\sin 3+i(\sin 3+\cos 3)\right)\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2+3i}}{1-i}\right)=\frac{e^2}{2}(\cos 3-\sin 3);$$

б) $\dfrac{e^{-3+2i}}{2+i}=\dfrac{e^{-3}(\cos 2+i\sin 2)(2-i)}{5}=\dfrac{e^{-3}}{5}\left(2\cos 2+\sin 2+i(2\sin 2-\cos 2)\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-3+2i}}{2+i}\right)=\frac{e^{-3}}{5}(2\sin 2-\cos 2);$$

в) $\left|\dfrac{e^{5-i}}{e^{2+3i}(1+2i)}\right|=\dfrac{\left|e^{5-i}\right|}{\left|e^{2+3i}\right|\cdot|1+2i|}=\dfrac{e^5}{e^2\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{e^3}{\sqrt{5}}$.

1.7. Показникова форма запису комплексного числа

Якщо підставити у формулу для e^{a+ib} (підрозділ 1.6) $a=0$, $b=\varphi$, то одержимо формулу Ейлера

$$\boxed{e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\,sin\,\varphi\,.}$$

Зокрема

$$e^{2\pi i}=1,\; e^{\pi i}=-1,\; e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\; e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i\,.$$

Формула Ейлера дозволяє записати комплексне число в більш стислій показниковій формі

$$\boxed{z=|z|\cdot e^{i\arg z}\,.}$$

Приклад 13. Подати в показниковій формі комплексні числа:

$$\text{а) } z=-\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3};\ \text{б) } z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};\ \text{в) } z=-3-2i.$$

Розв'язання. а) $z\in II$ координатному куту $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \arg z=\operatorname{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{-1}{3}}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3},\ |z|=\frac{2}{3}.\ \text{Отже, } z=\frac{2}{3}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}};$$

б) $z\in IV$ координатному куту $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \arg z=\operatorname{arctg}\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\pi}{4},\ |z|=1.\ \text{Таким чином, } z=e^{-i\frac{\pi}{4}};$$

в) $z\in III$ координатному куту $\Rightarrow$ $\arg z=\operatorname{arctg}\frac{-2}{-3}-\pi=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi$, $|z|=\sqrt{13}$. Маємо $z=\sqrt{13}\cdot e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi\right)}$.

З формули Ейлера випливають співвідношення

$$\boxed{\cos\varphi=\operatorname{Re}\left(e^{i\varphi}\right),\ \sin\varphi=\operatorname{Im}\left(e^{i\varphi}\right).}$$

Якщо замінити в формулі Ейлера φ на $-\varphi$, то одержимо рівність $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$. Додаючи і віднімаючи почленно формулу Ейлера і отриману рівність, приходимо до співвідношень

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i},}$$

які також мають назву формул Ейлера.

1.8. Дії над комплексними числами в показниковій формі

Якщо $z_1=|z_1|\cdot e^{i\arg z_1}$, $\qquad z_2=|z_2|\cdot e^{i\arg z_2}$, то

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}. \end{aligned}}$$

Якщо $z = |z| \cdot e^{i\arg z}$, то

$$\boxed{z^n = |z|^n \cdot e^{in \cdot \arg z},}$$

де n – довільне ціле число.

Приклад 14. Виконати дії у показниковій формі:

а) $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 \cdot (-1 + i)^3$; б) $z = \dfrac{\left(\sqrt{3} - i\right)^8 \cdot (-2 + 2i)^3}{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^5}$.

Розв'язання: а) Позначимо $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + i$. Тоді $|z| = |z_1|^2 \cdot |z_2|^3$, $\arg z \doteq 2\arg z_1 + 3\arg z_2$; $z_1 \in IV$ координатному куту $\Rightarrow$ $\arg z_1 = \ = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\dfrac{\pi}{3}, |z_1| = \sqrt{1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$;

$z_2 \in II$ координатному куту $\Rightarrow$ $\arg z_2 = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{1}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$; $|z_2| = \sqrt{2}$. Отже, $|z| = 2^2 \cdot \sqrt{2}^3 = 2^3\sqrt{2}$, $\arg z = -\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{19}{12}\pi$ $\Rightarrow \arg z = -\dfrac{5\pi}{12}$ і $z = 2^3\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

б) Позначимо $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$. Тоді $|z| = \dfrac{|z_1|^8 \cdot |z_2|^3}{|z_3|^5}$, $\arg z \doteq 8\arg z_1 + 3\arg z_2 - 5\arg z_3$; $z_1 \in IV$ координатному куту $\Rightarrow$ $\Rightarrow \arg z_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\pi}{6}$, $|z_1| = 2$; $z_2 \in II$ координатному куту $\Rightarrow$ $\Rightarrow \arg z_2 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{-2}\right) + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$, $|z_2| = 2\sqrt{2}$; $z_3 \in I$ координатному куту $\Rightarrow$ $\Rightarrow \arg z_3 = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$, $|z_3| = 2$. Отже, $|z| = \dfrac{2^8 \cdot 2^4\sqrt{2}}{2^5} = 2^7\sqrt{2}$, $\arg z \doteq -\dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{9\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{3} \Rightarrow \arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$. Таким чином, $z = 2^7\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

1.9. Добування кореня із комплексного числа

Означення. Коренем n-го степеня $(n \in N)$ з комплексного числа z називається комплексне число W, таке, що $W^n = z$.

Позначається цей корінь $\sqrt[n]{z}$.

Запишемо z та W у тригонометричній формі:

$$z = |z| \cdot \left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right),\; W = |W| \cdot \left(\cos(\arg W) + i\sin(\arg W)\right).$$

Після піднесення W до степеня n отримаємо

$$|W|^n \cdot \left(\cos(n \arg W) + i\sin(n \arg W)\right) = |z| \cdot \left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right).$$

Тепер скористаємось умовами рівності двох комплексних чисел у тригонометричній формі:

1) $|W|^n = |z|$,

2) $n \arg W = \arg z + 2k\pi$, де k – ціле число.

Звідки $|W| = +\sqrt[n]{|z|}$ (тобто $|W|$ дорівнює арифметичному значенню кореня $\sqrt[n]{|z|}$), $\arg W = \dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}$.

Отже, існують n різних значень $W_k \left(k = 0, 1, 2, ..., n-1\right)$ кореня $\sqrt[n]{z}$, які можуть бути знайдені за формулою

$$\boxed{W_k = +\sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{(\arg z + 2\pi k)}{n}} \quad \left(k = 0, 1, 2, ..., n-1\right).}$$

З цієї формули випливає, що корені W_k розташовані на колі радіуса $+\sqrt[n]{|z|}$ з центром у початку координат і ділять його на n рівних частин.

Приклад 15. Знайти $\sqrt[n]{z}$: а) $n = 4$, $z = 1 + i$; б) $n = 3$, $z = -2$.

Розв'язання. а) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow W_k = \sqrt[8]{2} \cdot e^{i\frac{\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)}{4}}$ $\left(k = 0, 1, 2, 3\right)$ (рис.1.7, а); б) $|z| = 2$, $\arg z = \pi \Rightarrow W_k = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{(\pi + 2\pi k)}{3}}$ $\left(k = 0, 1, 2\right)$ (рис.1.7, б).

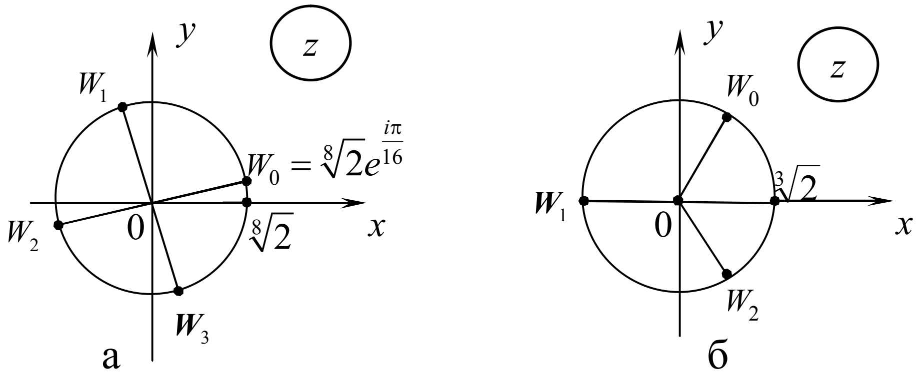


Рис. 1.7

Приклад 16. Розв’язати рівняння

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Розв’язання

Розглянемо рівняння $(z-1)\cdot\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0$, яке після розкриття дужок зводиться до вигляду $z^5 - 1 = 0$. Його коренями є числа $W_k = \sqrt[5]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{5}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$. Тому коренями початкового рівняння будуть числа $W_k = e^{i\frac{2\pi k}{5}}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Слід відзначити, що $W_1 = \overline{W_4}$, $W_2 = \overline{W_3}$.

1.10. Логарифм комплексного числа

Оскільки $z = |z|\cdot e^{i(\arg z + 2k\pi)}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, то, враховуючи основну логарифмічну тотожність $N = e^{\ln N}, N > 0$ (див. додаток, алгебра, 9), дістанемо $z = e^{\ln|z|}\cdot e^{i(\arg z + 2k\pi)}$. З властивості 4 підрозд. 1.6 з останнього співвідношення випливає, що $z = e^{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Звідси на підставі основної логарифмічної тотожності робимо висновок, що **логарифмом** Lnz **комплексного числа** z є комплексне число

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Отже, всяке число, відмінне від нуля, має нескінченну кількість логарифмів.

Таким чином,

$$\mathrm{Ln}1 = \ln 1 + i\left(\arg 1 + 2k\pi\right) = i\left(0 + 2k\pi\right) = i2k\pi;$$
$$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\left(\arg(-1) + 2k\pi\right) = i\left(\pi + 2k\pi\right) = i\left(2k+1\right)\pi;$$
$$\mathrm{Ln}i = \ln 1 + i\left(\arg i + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi;$$
$$\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3} + i\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right).$$

1.11. Розкладання многочлена на множники

Многочленом степеня n ($n \ge 0$, ціле число) відносно змінної x називається вираз вигляду

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Числа $a_0 \ne 0$, $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ називаються коефіцієнтами многочлена $P_n(x)$. Важлива властивість многочленів полягає у тому, що їх значення знаходяться лише за допомогою операцій додавання та множення.

Число α називається **коренем многочлена** $P_n(x)$, якщо $P_n(\alpha) = 0$.

ТЕОРЕМА. Кожний многочлен степеня $n \ge 1$ має n коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ і може бути записаний у вигляді добутку n лінійних множників

$$\boxed{P_n(x) = a_0\left(x - \alpha_1\right)\cdot\left(x - \alpha_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - \alpha_n\right).}$$

Приклад 17. Розкласти на лінійні множники (знайти корені) многочлен $P_3(x) = x^3 - ix^2 - x + i$.

Розв’язання.

$$P_3(x) = x^2(x - i) - (x - i) = (x - i)\left(x^2 - 1\right) = (x - i)\cdot(x - 1)\cdot(x + 1).$$

Отже, коренями многочлена будуть числа i, 1 та -1.

Виявляється, що для многочленів з дійсними коефіцієнтами має місце такий результат: якщо число α – корінь многочлена, то і число $\overline{\alpha}$ також є коренем цього многочлена.

Тобто $\boxed{P_n(a + bi) = 0,\ b \ne 0} \Rightarrow \boxed{P_n(a - bi) = 0.}$

У таких многочленів комплексні корені можна згрупувати в спряжені пари. Кожній з таких пар відповідають два лінійні множники $(x-\alpha)$ та $(x-\overline{\alpha})$, добуток яких є квадратним тричленом з від'ємним дискримінантом

$$(x-a-bi)\cdot(x-a+bi)=(x-a)^2+b^2=x^2+px+q,$$

де $p=-2a$, $q=a^2+b^2$, $p^2-4q<0$.

У подальшому будуть розглядатися тільки многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Приклад 18. Розкласти на множники многочлени:

а) $P_5(x)=x^5-x$; б) $P_4(x)=x^4+2x^3-x-2$.

Розв'язання

а) $P_5(x)=x(x^4-1)=x(x^2-1)(x^2+1)=x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$.

Множнику x^2+1 відповідає пара комплексно-спряжених коренів $\pm i$;

б)

$$P_4(x)=x^3(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^3-1)=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1).$$

Коренями многочлена будуть числа: -2, 1 та $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Серед коренів многочлена можуть бути такі, що збігаються. Об'єднуючи відповідні цим кореням лінійні множники, отримаємо таке розкладання многочлена:

$$\boxed{P_n(x)=a_0\cdot(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_\ell)^{k_\ell},}$$

де $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\ell$ вже попарно різні. Сума цілих додатних чисел $k_1+k_2+\ldots+k_\ell=n$. Якщо $k_S=1$, то кажуть, що корінь α_S є **простим**. Якщо $k_S>1$, то кажуть, що корінь α_S має **кратність** k_S. Для того щоб уникнути ускладнення, будемо надалі вивчати многочлени, в яких комплексні корені є простими.

Приклад 19. Розкласти на множники многочлен $P_7(x)=x^7-x^5-x^3+x$.

Розв'язання

$$P_7(x)=x\left(x^6-x^4-x^2+1\right)=x\left(x^4\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\right)=$$
$$=x\left(x^2-1\right)\left(x^4-1\right)=x(x-1)(x+1)\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=$$
$$=x\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot\left(x^2+1\right).$$

Коренями многочлена є числа: $0,\ \pm1,\ \pm i$. Корені ±1 мають кратність 2, а інші – прості.

1.12. Розкладання правильного раціонального дробу

Раціональним дробом називається вираз вигляду $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – многочлени, степені яких відповідно дорівнюють n і m. При $n<m$ дріб називається **правильним,** а при $n\geq m$ – **неправильним.** Неправильний дріб може бути поданий у вигляді суми многочлена (цілої частини) і правильного дробу.

Приклад 20. Дріб $\dfrac{2x^4-x^3+x-2}{x^2-x+1}$ подати у вигляді суми многочлена і правильного дробу.

Розв'язання. Поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-x^3+x-2 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{2x^4-2x^3+2x^2} & 2x^2+x-1 \leftarrow \text{частка} \\
x^3-2x^2+x & \\
-\ \underline{x^3-x^2+x} & \\
-x^2-2 & \\
-\ \underline{-x^2+x-1} & \\
-x-1 & \qquad \leftarrow \text{остача}
\end{array}$$

Отже, $\dfrac{2x^4-x^3+x-2}{x^2-x+1}=2x^2+x-1+\dfrac{-x-1}{x^2-x+1}$.

Дроби вигляду $\dfrac{A}{x-\alpha},\ \dfrac{A}{(x-\alpha)^k},\ \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $k>1$ називаються **елементарними**.

Правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми елементарних дробів. Число доданків у цій сумі та їх вигляд визначаються коренями знаменника $Q_m(x)$. А саме:

1) кожному дійсному k_S - кратному кореню α_S знаменника в розкладанні правильного дробу на елементарні дроби відповідають k_S доданків вигляду

$$\alpha_S \sim \frac{A_1}{x-\alpha_S} + \frac{A_2}{(x-\alpha_S)^2} + \ldots + \frac{A_{k_S}}{(x-\alpha_S)^{k_S}};$$

2) кожній парі простих комплексно-спряжених коренів $a \pm bi$ знаменника відповідає в розкладанні правильного дробу на елементарні дроби доданок вигляду

$$\begin{matrix} a+bi \\ a-bi \end{matrix} \sim \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad \left(p=-2a,\, q=a^2+b^2\right).$$

У даному розкладанні всі коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_{k_s}, M, N$ є дійсними числами і знаходяться однозначно.

Приклад 21. Розкласти правильний дріб на елементарні дроби:

$$\text{а)}\ \frac{2x-3}{x\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)}; \qquad \text{б)}\ \frac{2x-1}{x^2\cdot(x^2+1)}.$$

Розв'язання: а) корені знаменника 0 і -2 є простими, а корінь 1 має кратність 2. Тому згідно зі сформульованим твердженням маємо

$$\frac{2x-3}{x\cdot(x-1)^2(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Після зведення дробів до спільного знаменника та зрівнювання чисельників приходимо до тотожності

$$2x-3 \equiv A\left(x-1\right)^2\left(x+2\right) + B_1x\left(x-1\right)\left(x+2\right) + B_2x\left(x+2\right) + Cx\left(x-1\right)^2.$$

Коефіцієнти A, B_1, B_2, C можемо знайти або шляхом порівняння коефіцієнтів при однакових степенях x у лівій і правій частинах тотожності, або підстановкою у цю тотожність коренів знаменника. Найчастіше найбільш вдалою є комбінація цих способів.

1 метод

$$\begin{cases} x^3: \quad 0 = A + B_1 + C, \\ x^2: \quad 0 = B_1 + B_2 - 2C, \\ x \ : \quad 2 = -3A - 2B_1 + 2B_2 + C, \\ x^0: -3 = 2A. \end{cases}$$

Розв’язання цієї системи таке: $A = -\frac{3}{2}, B_1 = \frac{10}{9}, B_2 = -\frac{1}{3},\ C = \frac{7}{18}$.

2 метод

$$x = 0: \quad -3 = 2A \Rightarrow A = -\frac{3}{2},$$

$$x = 1: \quad -1 = 3B_2 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{3},$$

$$x = -2: -7 = -18C \Rightarrow C = \frac{7}{18}.$$

Для знаходження коефіцієнта B_1 використаємо перше рівняння попередньої системи

$$0 = -\frac{3}{2} + B_1 + \frac{7}{18} \Rightarrow B_1 = \frac{10}{9}.$$

Отже,

$$\frac{2x-3}{x\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)} \equiv \frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{10}{9}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{7}{18}}{x+2};$$

б) знаменник має два комплексно-спряжених корені $\pm i$ і нульовий корінь кратності 2

$$\frac{2x-1}{x^2\cdot(x^2+1)} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-1 \equiv A_1x(x^2+1) + A_2(x^2+1) + x^2(Mx+N).$$

$$x = 0: -1 = A_2 \Rightarrow A_2 = -1;$$

$$x = i: 2i - 1 = -Mi - N \Rightarrow M = -2,\ N = 1;$$

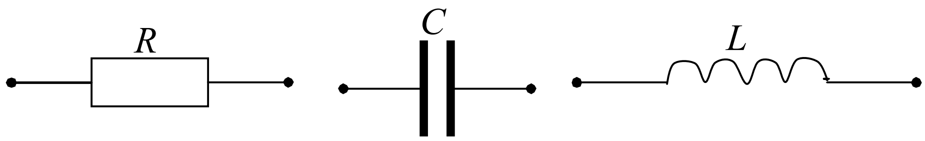
$$x^3 \quad : 0 = A_1 + M \Rightarrow A_1 = 2.$$

Отже,

$$\frac{2x-1}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}\equiv\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{-2x+1}{x^2+1}.$$

1.13. Деякі факти теорії кіл

1. Розглянемо основні елементи кола:



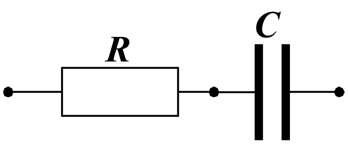
Комплексні опори $Z(i\omega)$ цих елементів змінному струму з частотою ω відповідно дорівнюють R, $\frac{1}{i\omega C}$, $i\omega L$. Якщо окремі ділянки кола з’єднані послідовно, то повний комплексний опір кола дорівнює сумі комплексних опорів цих ділянок

$$Z(i\omega)=Z_1(i\omega)+Z_2(i\omega)+\ldots+Z_n(i\omega).$$

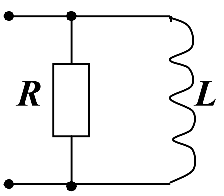
У випадку паралельного з’єднання ділянок маємо

$$\frac{1}{Z(i\omega)}=\frac{1}{Z_1(i\omega)}+\frac{1}{Z_2(i\omega)}+\ldots+\frac{1}{Z_n(i\omega)}.$$

Наприклад,



$$Z(i\omega)=R+\frac{1}{i\omega C};$$



$$\frac{1}{Z(i\omega)}=\frac{1}{R}+\frac{1}{i\omega L}\Rightarrow Z(i\omega)=\frac{i\omega RL}{R+i\omega L}.$$

2. У багатьох задачах аналізу кіл, приладах електроживлення і т.д. зовнішні джерела мають змінну в часі напругу або струм, що змінюються за законом

$$a(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_a).$$

При цьому $A_m > 0$ – амплітуда коливань, ω – кутова (циклічна) частота, яка пов'язана з періодом коливань T співвідношенням $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, φ_a – початкова фаза.

Використаємо формулу Ейлера і перетворимо вираз для коливань $a(t)$:

$$a(t) = A_m \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{i(\omega t + \varphi_a)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{A_m \cdot e^{i\varphi_a} \cdot e^{i\omega t}\right\}.$$

Введемо до розглядання комплексну амплітуду коливань $a(t)$ $\underline{A} = A_m \cdot e^{i\varphi_a}$.

Тоді коливання $a(t)$ подається у вигляді

$$a(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{A} \cdot e^{i\omega t}\right\}.$$

Оскільки $\left|e^{i\omega t}\right| = 1$, то добуток комплексного числа $\underline{A}$ на комплексне число $e^{i\omega t}$, зводиться до повороту вектора $\underline{A}$ на кут ωt проти стрілки годинника. Іншими словами, вектор, який зображує коливання, буде рівномірно обертатися проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω (рис. 1.8).

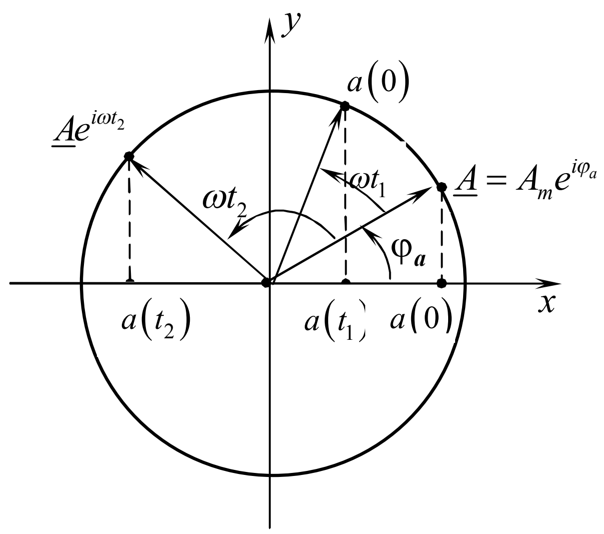


Рис. 1.8.

ВПРАВИ

Виконати в алгебраїчній формі такі дії:

1.1. $(2+5i)(-3+4i)$. **1.2.** $\dfrac{7+3i}{2-5i}$. **1.3.** $(3-2i)^2\cdot(4+5i)$.

1.4. $(2-i)^3\cdot(1+2i)$. **1.5.** $\dfrac{2-i}{(3-4i)^2}+\dfrac{4-3i}{7+i}$. **1.6.** $\dfrac{(4+5i)\cdot(3+7i)^2}{(2-i)^3}$.

Знайти:

2.1. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{(2+i)^2+3i(2+5i)}{3-4i}\right)$. **2.2.** $\operatorname{Im}\left(\left(\dfrac{3-i}{2+i}\right)^2-i(1-i)^3\right)$.

2.3. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{3+i}{(4-i)^2}-\dfrac{2-5i}{3+2i}\right)$.

Знайти модулі та аргументи комплексних чисел:

3.1. -4. **3.2.** $2-2i$. **3.3.** $2i$. **3.4.** $4+3i$. **3.5.** $3-4i$. **3.6.** $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$. **3.7.** $-2-3i$. **3.8.** $\pm3\mp\sqrt{3}i$. **3.9.** $\pm1\pm i\sqrt{3}$.

Знайти множину точок комплексної площини, які задовольняють умову:

4.1. $|z-1|=1$. **4.2.** $|z-1+i|=2$. **4.3.** $|z+2i|<1$. **4.4.** $|z+1+i|\geq 2$. **4.5.** $\operatorname{Re}z=\operatorname{Im}z$. **4.6.** $\operatorname{Re}z>0$. **4.7.** $\operatorname{Re}(z-1+2i)\leq 0$. **4.8.** $|z-2i|<|z+3|$. **4.9.** $\arg z=-\dfrac{3\pi}{4}$. **4.10.** $\dfrac{\pi}{6}<\arg(z+1)<\dfrac{\pi}{4}$. **4.11.** $\arg z=\dfrac{\pi}{6},\ 0<|z-1|<1$. **4.12.** $1<|z-i|<4$.

Зробити рисунок і подати в тригонометричній та показниковій формах такі числа:

5.1. $\mp3\mp3i$. **5.2.** $\mp2\mp2\sqrt{3}i$. **5.3.** $\mp3\pm2i$. **5.4.** $-\cos30^\circ+i\sin30^\circ$. **5.5.** $\cos60^\circ-i\sin60^\circ$. **5.6.** $1-\cos\alpha+i\sin\alpha\ \ (\alpha\in[0\,;\,2\pi))$.

Виконати дії. Результати записати в тригонометричній і показниковій формах:

6.1. $\left(\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{1-i}\right)^4$. **6.2.** $\dfrac{\left(3-i\sqrt{3}\right)^4}{(1-i)^3}$. **6.3.** $\dfrac{\left(3-i3\sqrt{3}\right)^4}{(2+2i)^7}$.

6.4. $(1-i)^4\cdot\left(2+2\sqrt{3}i\right)^3$. **6.5.** $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^7\cdot(1-i)^5$. **6.6.** $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^8\cdot(-1+i)^3}{(-2-2i)^7}$.

6.7. $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(2+2\sqrt{3}i\right)^4}{(1-i)^5}$. **6.8.** $\left(\dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^n$. **6.9.** $\dfrac{1}{(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n}$.

Розкласти правильний дріб на елементарні**:**

7.1. $\dfrac{2x-5}{x\left(x^2-1\right)}$. **7.2.** $\dfrac{5x-1}{x^4-1}$. **7.3.** $\dfrac{5x+3}{(x+1)^2\cdot(x-3)}$. **7.4.** $\dfrac{2x^2-3}{x^2\cdot(x-1)^2}$.

7.5. $\dfrac{3x-7}{x^2\cdot\left(x^2+5\right)}$. **7.6.** $\dfrac{3x^2-4}{(x-1)\cdot\left(x^3-1\right)}$.

Записати в алгебраїчній формі комплексні числа:

8.1. e^{-7+3i}. **8.2.** e^{3-4i}. **8.3.** $\dfrac{e^{-8+3i}}{e^{2-5i}}$. **8.4.** $e^{-1+5i}\cdot e^{-3-4i}$.

Знайти:

9.1. $\mathrm{Re}\left(e^{-2+5i}\right)$. **9.2.** $\mathrm{Im}\left(e^{7-4i}\right)$. **9.3.** $\left|e^{6+i}\right|$. **9.4.** $\left|e^{-2+3i}\right|$.

9.5. $\left|e^{ia}\right|\ (a\in R)$. **9.6.** $\left|\dfrac{e^{5-3i}}{e^{-2+6i}}\right|$. **9.7.** $\arg e^{-2+3i}$. **9.8.** $\arg e^{-2-5i}$.

Знайти модуль комплексного числа:

10.1. $\dfrac{(2-i)^5}{(3+2i)^5}$. **10.2.** $\dfrac{e^{-(1+2i)}-1}{3+2i}$. **10.3.** $(1-5i)^3\cdot(3-i)^4$.

10.4. $\dfrac{e^{-3i}}{5i}-\dfrac{e^{3i}+1}{25}$. **10.5.** $\dfrac{(1+i)^3}{\sqrt{3}-i}+e^{-i\frac{7}{12}\pi}$.

Знайти:

11.1. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+2i}{e^{1-i}}\right)$. **11.2.** $\mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{3-i}}{4+i}\right)$. **11.3.** $\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{(-1+2i)}\cdot(1-i)^3}{7+2i}\right)$.

Знайти та зобразити на рисунку:

12.1. $\sqrt[3]{-8}$. **12.2.** $\sqrt[4]{16}$. **12.3.** $\sqrt[3]{1+i}$. **12.4.** $\sqrt[5]{\mp1\mp i}$. **12.5.** $\sqrt[3]{\pm3\pm4i}$.

Довести нерівності:

13.1. $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$. **13.2.** $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$.

Знайти:

14.1. $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3} - i\right)$. **14.2.** $\mathrm{Ln}(-2 - 2i)$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $-26 - 7i$. **1.2.** $\frac{-1+41i}{29}$. **1.3.** $-80 - 23i$. **1.4.** $-24 - 7i$. **1.5.** $\frac{129-103i}{250}$.
1.6. $-3.104 - 33.07i$.

2.1. -3.04. **2.2.** 0. **2.3.** $\frac{1637}{3757}$.

3.1. $|z| = 4, \varphi = \pi$. **3.2.** $|z| = 2\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$. **3.3.** $|z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$.
3.4. $|z| = 5, \varphi = \mathrm{arctg}\frac{3}{4}$. **3.5.** $|z| = 5, \varphi = -\mathrm{arctg}\frac{4}{3}$. **3.6.** $|z| = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
3.7. $|z| = 13, \varphi = arctg\frac{3}{2} - \pi$. **3.8.** $|z| = 2\sqrt{3}, \varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6}, \varphi_{3,4} = \pm\frac{5\pi}{6}$.
3.9. $|z| = 2, \varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3}, \varphi_{3,4} = \pm\frac{2\pi}{3}$.

4.1. $(x-1)^2 + y^2 = 1$. **4.2.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. **4.3.** $x^2 + (y+2)^2 < 1$.
4.4. $(x+1)^2 + (y+1)^2 \ge 4$. **4.5.** $x = y$. **4.6.** $x > 0$. **4.7.** $x - 1 \le 0$.
4.8. $6x + 4y + 5 > 0$. **4.9.** $y = x,\ x > 0$. **4.10.** $\frac{x+1}{\sqrt{3}} < y < x + 1,\ x > -1$.

4.11. $(x-1)^2 + y^2 < 1, y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. **4.12.** $1 \le x^2 + (y-1)^2 < 16$.

5.1. $z_{1,4} = 3\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$,

$z_{2,3} = 3\left(\cos\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$ (рис.1.9,а).

5.2. $z_{1,4}=4\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right)==3e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$,

$z_{2,3}=4\left(\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right)=3e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$.

5.3. $z_{1,4}=\sqrt{13}\left(\cos\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)+i\sin\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)\right)=\sqrt{13}e^{\pm i\operatorname{arctg}\frac{2}{3}}$,

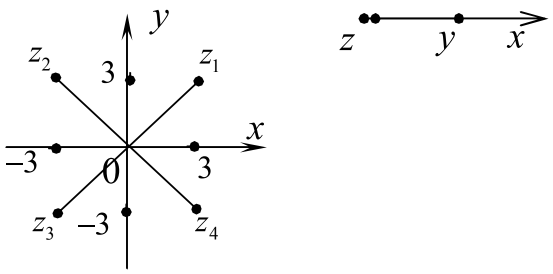
$z_{2,3}=\sqrt{13}\left(\cos\left(\pm\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)\right)+i\sin\left(\pm\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)\right)\right)=\sqrt{13}e^{\pm i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)}$.

5.4. $z=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ (рис.1.9,б).

5.5. $\mathrm{z}=\cos(-60^\circ)+\mathrm{i}\sin(-60^\circ)=e^{-i60^\circ}$.

5.6. $z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{iarctg\left(ctg\frac{\alpha}{2}\right)}$.

6.1. $z=4^3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)==4^3e^{i\frac{\pi}{3}}$.



а б

Рис.1.9

6.2. $z=6^2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=$

$=6^2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. **6.3.** $z=\frac{81\sqrt{2}}{128}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\right.$

$\left.+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)=\frac{81\sqrt{2}}{128}e^{\frac{11\pi}{12}i}$.

6.4. $z=4^4$.

6.5 $z=2^{11}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=$

$=2^{11}\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$.

6.6. $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

6.7. $z=2^8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=2^8\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$.

6.8. $Z=\cos 2n\alpha+i\sin 2n\alpha=e^{2n\alpha i}$.

6.9. $z=\frac{1}{2^n\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^n}\left(\cos\left(\frac{-n\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-n\alpha}{2}\right)\right)==\frac{1}{2^n\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^n}e^{-i\frac{n\alpha}{2}}$.

7. 1. $\frac{5}{x}-\frac{3}{2(x-1)}-\frac{7}{2(x+1)}$. **7.2.** $\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2(x+1)}+\frac{-5x+1}{2(x^2+1)}$. **7.3.** $\frac{-9}{8(x+1)}+$ $+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{9}{8(x-3)}$. **7.4.** $-\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$. **7.5.** $\frac{3}{5x}-\frac{7}{5x^2}+\frac{-3x+7}{5(x^2+5)}$.
7.6. $\frac{7}{3(x-1)}- \ -\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{7x+4}{3(x^2+x+1)}$.

8. 1. $e^{-7}(\cos 3+i\sin 3)$. **8.2.** $e^{3}(\cos 4-i\sin 4)$. **8.3.** $e^{-10}(\cos 8+ \ +i\sin 8)$.
8.4. $e^{-4}(\cos 1+i\sin 1)$.

9.1. $e^{-2}\cos 5$. **9.2.** $-e^{7}\sin 4$. **9.3.** e^{6}. **9.4.** e^{-2}. **9.5.** 1. **9.6.** e^{7}.
9.7. $\varphi=3$. **9.8.** $\varphi=-5$.

10.1. $\frac{25\sqrt{5}}{13^2\sqrt{13}}$. **10.2.** $\frac{1}{\sqrt{13}}\sqrt{\left(e^{-1}\cos 2-1\right)^2+\sin^2 2}$. **10.3.** $2600\sqrt{26}$.
10.4. $\sqrt{\left(\frac{\sin 3}{5}+\frac{\cos 3}{25}+\frac{1}{25}\right)^2+\left(\frac{\cos 3}{5}+\frac{\sin 3}{25}\right)^2}$.
10.5. $\sqrt{\left(\cos\frac{7\pi}{12}-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1-\sin\frac{7\pi}{12}\right)^2}$.

11.1. $e^{-1}(\cos 1-2\sin 1)$. **11.2.** $\frac{-e^{3}\cdot(\cos 1+4\sin 1)}{17}$.
11.3. $\frac{-2e^{-1}}{53}(9\cos 2-5\sin 2)$.

12.1. $W_k=e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)}, k=0,1,2$. **12.2.** $W_k=2e^{i\frac{\pi k}{2}}, k=0,1,2,3$ (рис. 1.10,а).
12.3. $W_k=\sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)}, k=0,1,2$. **12.4.** $W_k=\sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5}\right)}, k=0,1,2,3,4$.
12.5. $W_k=\sqrt[3]{5}e^{i\left(\frac{-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k}{3}\right)}, k=0,1,2$ (рис.1.10, б),
$\arg W_0=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}=-\frac{0.927}{3}\leftrightarrow -17.7^\circ$.

14.1. $\operatorname{Ln} z = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)(k \in Z)$.

14.2. $\operatorname{Ln} z = \frac{3}{2}\ln 2 + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)(k \in Z)$.

а б

Рис. 1.10

Розділ 2

ГРАФІКИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Різні величини, які характеризують деяке явище, звичайно пов'язані між собою. Наприклад, зв'язок між тиском та об'ємом сталої кількості газу при фіксованій температурі встановлюється рівнянням стану ідеального газу. Подібні закономірності і є основою для поняття функції.

2.1. Функція та її графік

Нехай D – довільна множина дійсних чисел.

Означення 1. Будемо казати, що на множині D задана **числова функція** f, якщо кожному значенню $x_0 \in D$ ставиться у відповідність однозначно визначене число $f(x_0): x_0 \to f(x_0)$.

Множина D називається **областю визначення**, а множина E чисел вигляду $f(x)$ $(x \in D)$ – **областю значення** числової функції $f: D \xrightarrow{f} E$.

Будемо казати, що функція задана явним аналітичним виразом (формулою), якщо дається правило, що вказує, які дії потрібно виконати над аргументом x, щоб отримати значення функції. Залежно від області визначення одна й та ж формула задає різні функції.

Приклад 1. Функції $f_1(x) = x^2$, $D_{f_1} = [0; 1]$ і $f_2(x) = x^2$, $D_{f_2} = [-1; 1]$ є різними, тому що їх області визначення відрізняються між собою.

Якщо при завданні функції формулою область визначення не вказується, то вважається, що ця функція визначена для всіх тих значень аргументу x, при яких є допустимим використання формули (**природна область визначення**).

Приклад 2. Природною областю визначення функції $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ буде вся числова вісь $(D_f = R)$, а природною областю визначення функції $f_1(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ – вся числова вісь, з якої виключена точка -1, $\left(D_{f_1}=R\setminus\{-1\}\right)$.

Слід відзначити, що зустрічаються функції, які на різних ділянках області визначення задаються різними аналітичними виразами. Такими функціями часто описуються характеристики речовини за різних умов. Наприклад, електричний опір чистого металу при достатньо низьких температурах T змінюється за законом $\rho=A_1\cdot T^5$, а при високих температурах – $\rho=A_2\cdot T$ (A_1 і A_2 – коефіцієнти).

Приклад 3. Одиничною функцією називають функцію

$$\boldsymbol{1}(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\ge 0,\\ 0, \text{ якщо } x>0.\end{cases}$$

Приклад 4. У теорії кіл **прямокутним симетричним імпульсом** тривалістю, що дорівнює двом одиницям, називають функцію

$$\Pi(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\in[-1;1),\\ 0, \text{ якщо } x\notin[-1;1).\end{cases}$$

Означення 2. **Графіком функції** $f(x)\left(x\in D_f\right)$ є сукупність точок площини (геометрична фігура) з координатами $(x;f(x))$ $\left(x\in D_f\right)$ (множина точок $(x;y)$ площини, координати яких задовольняють рівнянню $y=f(x)$ $\left(x\in D_f\right)$).

З цього означення випливає, що графік функції $f(x)$ перетинається вертикальною прямою $x=x_0\left(x_0\in D_f\right)$ в одній точці.

Графік, через свою наочність, є незамінним у практиці інженера, оскільки він дає повне уявлення про характер перебігу явища, що вивчається, і дозволяє миттєво оцінити його суттєві риси.

Геометрична фігура (лінія), що зображена на рис. 2.1, а, є графіком деякої функції; лінія, що вказана на рис. 2.1, б, не є графіком функції. На рис.2.1, в, г зображені відповідно графіки функцій $\boldsymbol{1}(x)$ і $\Pi(x)$.

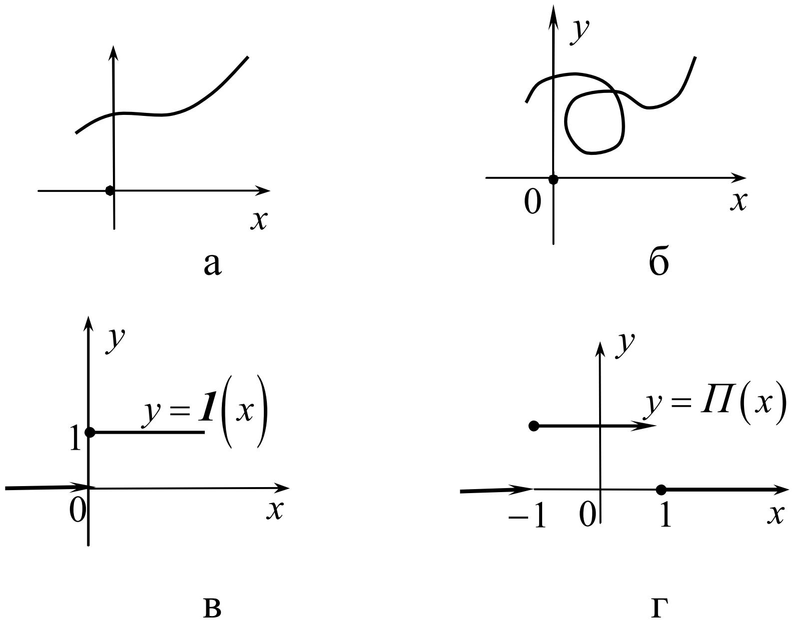


Рис. 2.1

Зауваження. **Комплексною функцією дійсної змінної** є функція вигляду

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x),$$

де $f_k(x)$ $(k=1,2)$ – дійсні функції $\left(D_f=D_{f_1}\cap D_{f_2}\right)$. Наприклад,

$$f(x)=\cos x+i\sin x \quad \left(D_f=R\right).$$

2.2. Парні і непарні функції

Функція $f(x)$ називається **парною**, якщо область D_f симетрична відносно початку координат і для кожного $x\in D_f$ виконана рівність

$$f(-x)=f(x).$$

Графік парної функції є симетричним відносно осі Oy.

Функція називається **непарною**, якщо область D_f симетрична відносно початку координат і для кожного $x\in D_f$ виконується співвідношення

$$f(-x)=-f(x).$$

Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат.

Приклад 5. Визначити парність чи непарність функцій:

$$f_1(x)=x\cdot\cos x\,;\; f_2(x)=x\cdot\sin x\,;\; f_3(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-1};\; f_4(x)=\frac{x+3}{x-1}.$$

Розв'язання

Області визначення D_{f_k} $(k=1,2,3)$ симетричні відносно початку координат:

$$D_{f_1}=D_{f_2}=(-\infty;+\infty),\; D_{f_3}=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

Змінюючи x на $-x$, знайдемо

$$f_1(-x)=-x\cdot\cos(-x)=-x\cdot\cos x=-f_1(x),$$

отже, функція $f_1(x)$ є непарною;

$f_2(-x)=-x\cdot\sin(-x)=x\cdot\sin x=f_2(x)$ і, значить, функція $f_2(x)$ є парною;

$$f_3(-x)=\frac{(-x)^2-2(-x)+3}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}.$$

Бачимо, що $f_3(-x)\neq f_3(x)$ і $f_3(-x)\neq -f_3(x)$. Тому досліджувана функція не є ні парною, ні непарною.

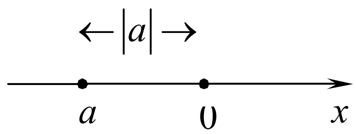
Область визначення $D_{f_4}=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ не є симетричною відносно початку координат і тому функція $f_4(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад 6. Побудувати графіки функцій: а) x^2; б) $\cos x$; в) $|x|$; г) $(x^2-1)\cdot\Pi(x)$.

Усі вказані функції є парними (рис. 2.2).

Нагадаємо, що абсолютною величиною дійсного числа a називається невід'ємне число $|a|$, що визначається таким чином:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ якщо } a\geq 0,\\ -a, \text{ якщо } a<0.\end{cases}$$



Приклад 7. Побудувати графіки функцій: а) $\sin x$: б) x^3; в) $\mathrm{tg}\,x$; г) $\mathrm{ctg}\,x$. Усі ці функції є непарними (рис. 2.3).

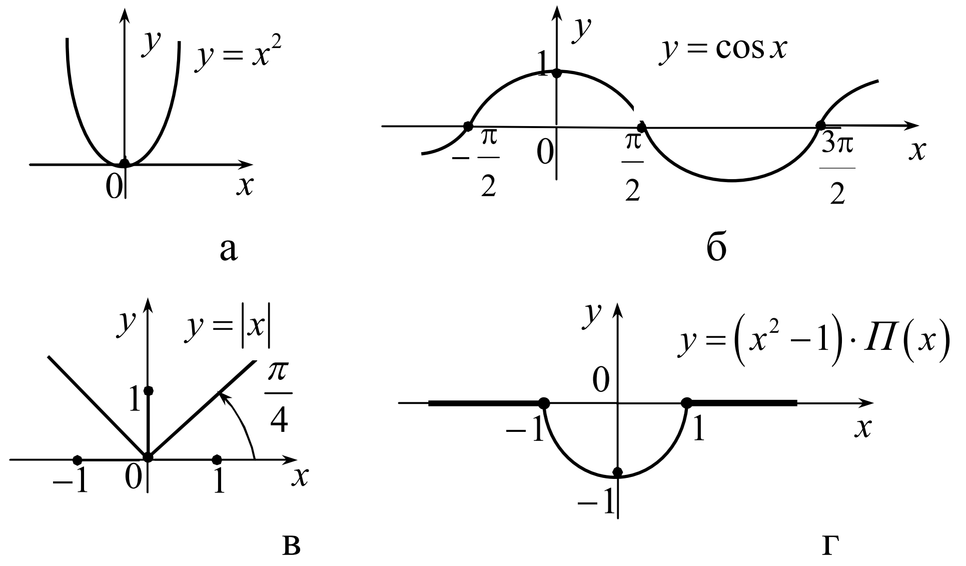


Рис. 2.2

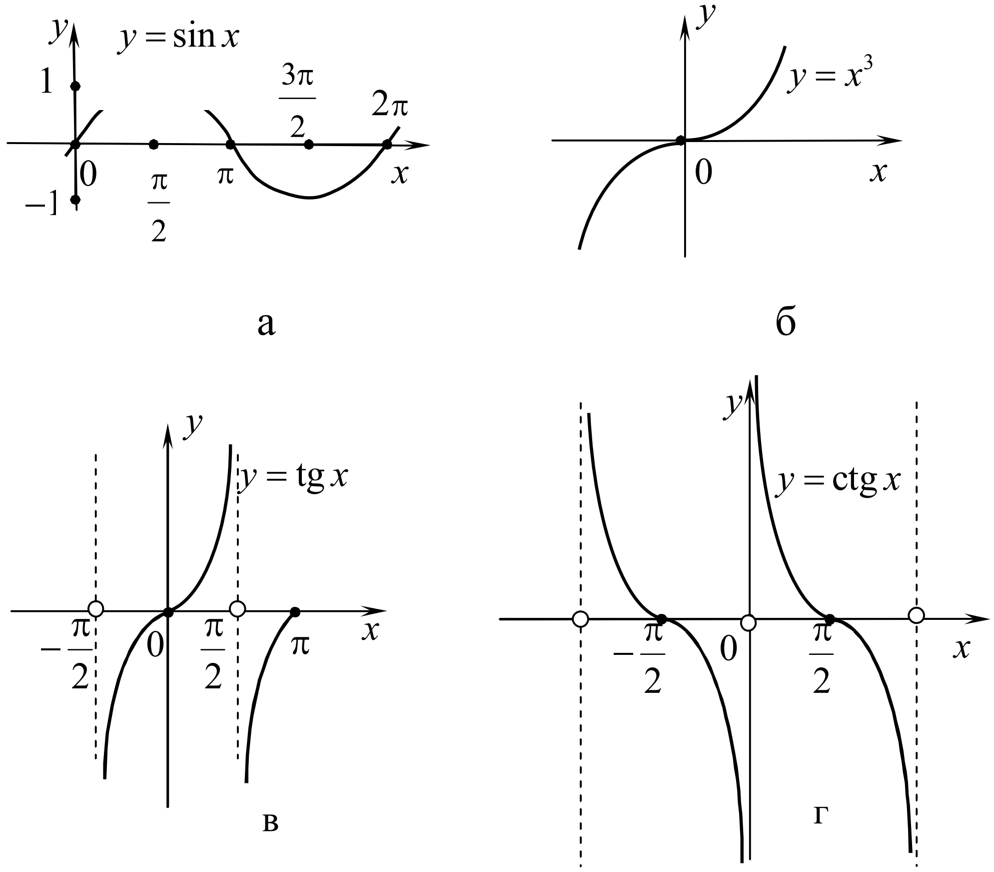


Рис. 2.3

2.3. Періодичні функції

Функція називається **періодичною з періодом** T ($T-$ періодичною), якщо разом з точкою x до області її визначення входять точки $x \pm T$ і виконується співвідношення $f(x+T) = f(x)$. Найменше число $T > 0$, що має вказані властивості, називається основним періодом функції $f(x)$.

При побудові графіка $T-$періодичної функції можна побудувати цей графік на проміжку $[0; T)$, а потім зсунути його на ціле кратне T вздовж осі абсцис. Функції $\sin x$, $\cos x$ мають основний період 2π, а функції $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x-$ основний період π.

Функція, графік якої зображено на рис. 2.4, є періодичною з основним періодом 3.

Нехай задані на всій осі функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ є періодичними з періодом T_1 та T_2 відповідно. Тоді функції $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ також будуть періодичними, якщо $\frac{T_1}{T_2}-$ раціональне число.

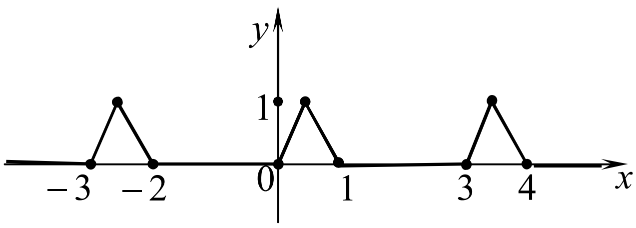


Рис. 2.4

Не слід вважати, що кожна функція є або парною, або непарною, або періодичною. Наявність у графіка функції деякої симетрії є не правилом, а тільки винятком.

Далі наведено приклади графіків функцій (рис. 2.5), які не мають симетрії.

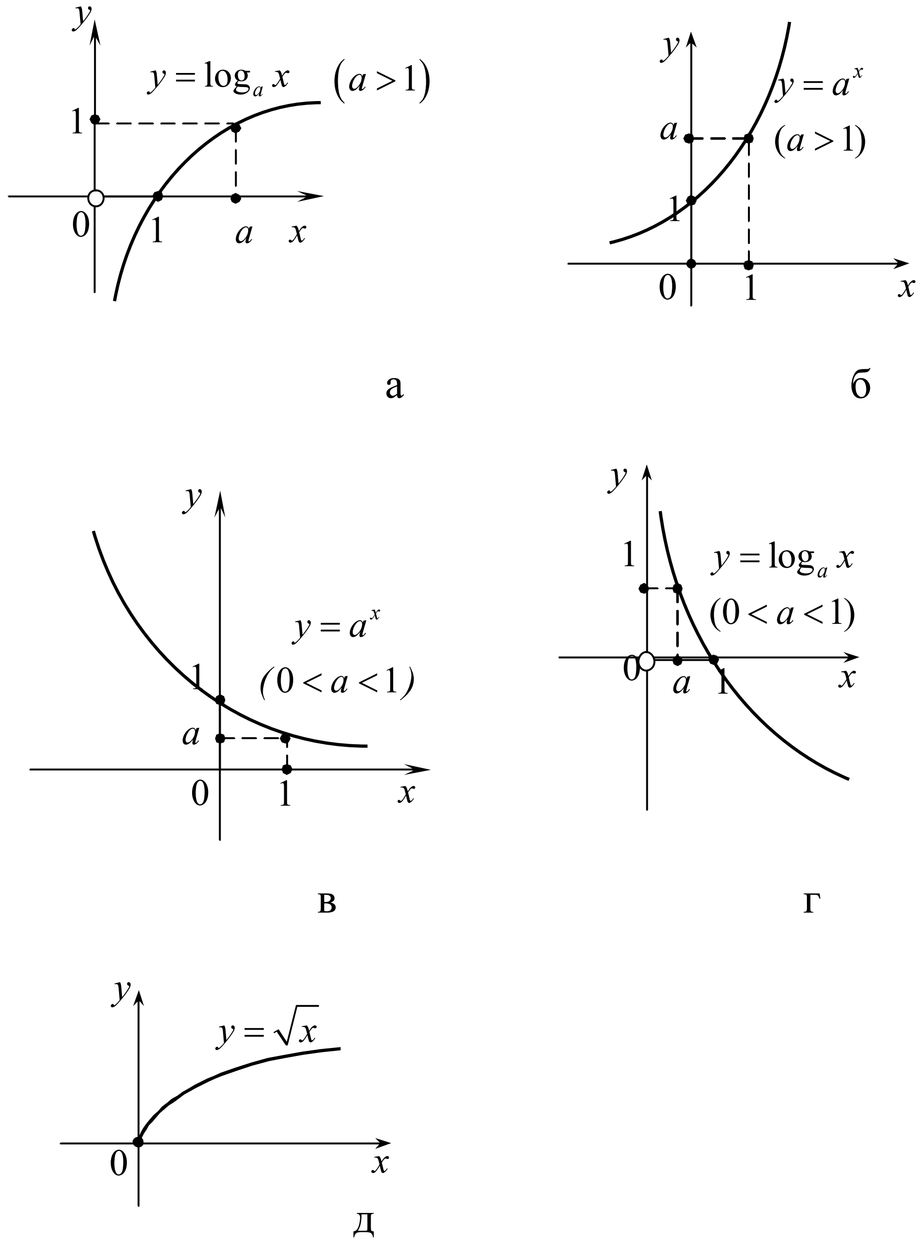


Рис. 2.5

2.4. Монотонні функції. Обмежені функції

Функція $f(x)$ називається **зростаючою** (**спадаючою**) на деякому проміжку $D_1 \subset D_f$, якщо для будь-яких $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D_1)$ виконується нерівність

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \bigl(f(x_1) > f(x_2)\bigr).$$

Функції x^3, $\log_a x$, a^x $(a > 1)$ є зростаючими в області визначення; функції $\log_a x$, a^x $(0 < a < 1)$ є спадаючими. Функція x^2

не є ні зростаючою, ні спадаючою на всій області визначення. Вона зростає при $x \in [0; +\infty)$ і спадає при $x \in (-\infty; 0]$. Зростаючі і спадаючі функції називаються **монотонними**.

Функція $f(x)$ називається **обмеженою** (обмеженою на множині $D_1 \subset D_f$), якщо можна підібрати таке число $M > 0$, при якому для всіх $x \in D_f$ $(x \in D_1)$ значення функції не перевищують за абсолютною величиною числа M

$$|f(x)| \le M .$$

Графік обмеженої функції розташовується всередині горизонтальної смуги шириною $2M$.

Функція, яка не є обмеженою, називається **необмеженою**.

Приклад 8. Функція $f(x) = 2\cos\frac{2\pi}{T}x + 3\sin\frac{2\pi}{T}x$ є обмеженою.

Розв'язання. Дійсно,

$$f(x) = \sqrt{2^2+3^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}\cos\frac{2\pi}{T}x + \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}\sin\frac{2\pi}{T}x\right) =$$

$$= \sqrt{13}\cos\left(\frac{2\pi}{T}x - \varphi_0\right), \text{ де } \varphi_0 = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} .$$

Отже, $|f(x)| \le \sqrt{13}$.

Приклад 9. Функція $f(x) = x \cdot \sin x$ не є обмеженою.

Розв'язання. Нехай M – довільне додатне число. Позначимо через k_0 найменше з натуральних чисел, таке, при якому $\frac{\pi}{2} + 2\pi k_0 > M$.

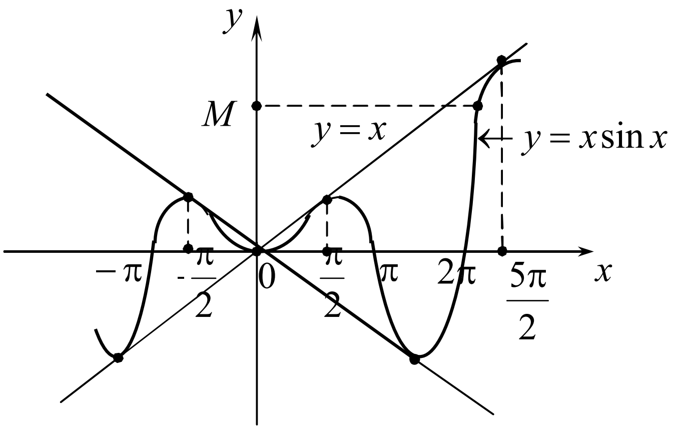
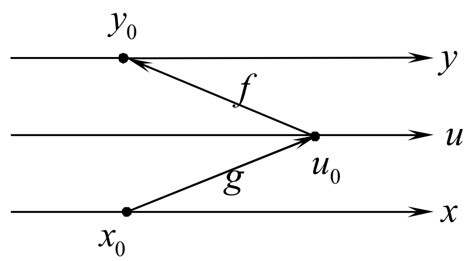


Рис. 2.6

Тоді $f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ge \frac{\pi}{2} + 2\pi k_0 > M$ при $k \in N$, $k \ge k_0$ (на рис.2.6 обраному M відповідає $k_0 = 1$).

2.5. Складена функція

Нехай дано дві функції $y = f(u)$ та $u = g(x)$. Якщо область визначення D_f функції f перетинається з областю значень E_g функції g, то можна говорити про **складену** функцію $y = f\left(g(x)\right)$



змінної x, яка визначена при $x \in E_g \bigcap D_f$. Наприклад, функція $y = \lg \sin x$ визначена при $x \in$ **(**$2k\pi$; $(2k+1)\pi$**)**, де k – ціле число.

Основними елементарними функціями є такі: многочлен, частка двох многочленів, степенева, логарифмічна, тригонометричні і обернені тригонометричні функції. Вважають елементарними і ті функції, які одержуються з основних за допомогою скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення й утворення складеної функції.

Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\log_2 \sin\left(x^5 + 8\right)}}{\left(x^2 - 1\right)^2}$ є елементарною.

Приклад 10

1. Записати складену функцію $y = \log_5^3 \sin\sqrt{2x+1}$ у вигляді ланцюжка основних елементарних функцій:

$y = u^3$, $u = \log_5 v$, $v = \sin t$, $t = \sqrt{s}$, $s = 2x + 1$.

2. Складену функцію, що визначена ланцюжком основних елементарних функцій $y = \log_{\frac{1}{2}} u$, $u = 3^v + 1$, $v = t^2$, $t = x - 1$, записати однією формулою.

Послідовно виключаючи проміжні змінні, отримаємо

$$y = \log_{\frac{1}{2}}\left(3^{(x-1)^2} + 1\right).$$

2.6. Обернена функція

Нехай функція $f(x)$ з областями визначення D_f і значень E_f набуває різних значень для будь-яких двох різних значень аргументу $\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right)$. Тоді кожному $y \in E_f$ відповідає єдиний елемент $x \in D_f$ $(y \to x)$. Отже, визначена **обернена** по відношенню до функції f функція $x = g(y)$ з областю визначення $D_g = E_f$ і областю значень $E_g = D_f$. Очевидно, що оберненою функцією по відношенню до функції g є функція $y = f(x)$. Якщо f і g - пара взаємно обернених функцій, то при кожних $x \in D_f$ і $y \in E_f$ справедливі тотожності $g(f(x)) \equiv x$, $f(g(y)) \equiv y$ (рис. 2.7).

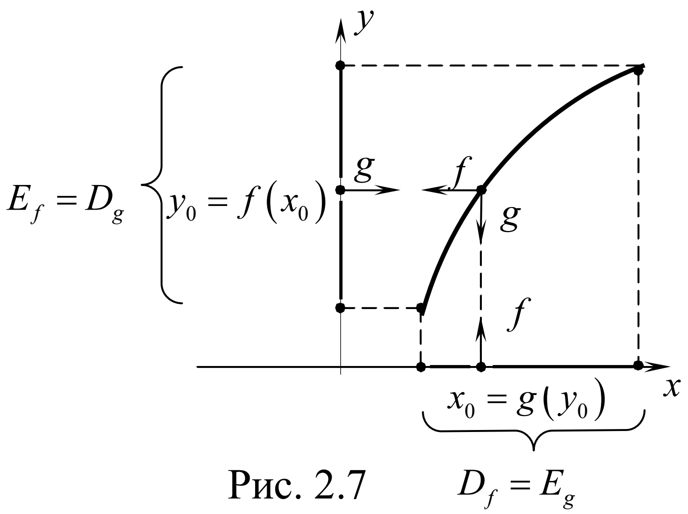


Рис. 2.7

Функція g, обернена по відношенню до зростаючої (спадаючої) функції f, також є зростаючою (спадаючою).

Знаходиться функція, обернена по відношенню до функції f, шляхом розв'язання рівняння $y = f(x)$ відносно x.

Графіки взаємно обернених функцій $f(x)$ і $g(y)$ як геометричні фігури площини xOy збігаються. Але при переході до традиційного позначення за графік оберненої функції приймають лінію $y = g(x)$. Це приводить до того, що графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є симетричними відносно прямої $y = x$.

Приклад 11. Знайти функції, обернені таким:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; 2) $f(x) = 2^{x-1}$; 3) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$; 4) $f(x) = \mathrm{tg}3x$.

Розв'язання. 1. Розв'язуючи рівняння $y = \dfrac{1}{x+2}$ відносно x, знайдемо $x = \dfrac{1-2y}{y}$. Перейдемо до звичайних позначень, після чого отримаємо обернену функцію $y = \dfrac{1-2x}{x}$.

2. $y = 2^{x-1} \Rightarrow \log_2 y = x - 1 \Rightarrow y = \log_2 x + 1$.

3. $y = \sin\dfrac{x}{2}$, $x \in [-\pi; \pi] \Rightarrow x = 2\arcsin y \Rightarrow$ $y = 2\arcsin x$, $x \in [-1\,; 1]$.

4. $y = \mathrm{tg}\,3x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$ $3x = \mathrm{arctg}\,y \Rightarrow$ $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}\,x$, $x \in (-\infty\,; +\infty)$.

2.7. Перетворення графіків

Наведемо декілька простих правил, при користуванні якими можна полегшити побудову графіків деяких функцій.

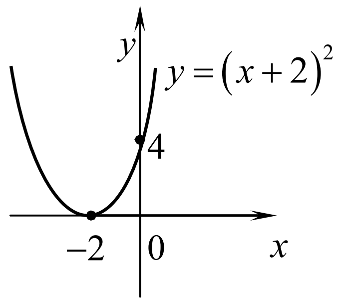
1. Якщо маємо графік функції $f(x)$, то графік функції $f(x+a)$ одержується шляхом зсування графіка початкової функції вздовж осі Ox на $|a|$ одиниць праворуч при $a < 0$ і на a одиниць ліворуч при $a > 0$.

Приклад 12. Побудувати графіки таких функцій (рис. 2.8):

а) $f(x) = (x+2)^2$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; в) $f(x) = \Pi(x-2)$.

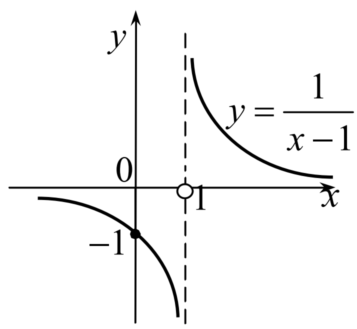
Розв’язання

Функція $\Pi(x)$ може бути виражена через одиничну функцію $\mathbf{1}(x)$ таким чином**:** $\Pi(x) = \mathbf{1}(x+1) - \mathbf{1}(x-1)$.



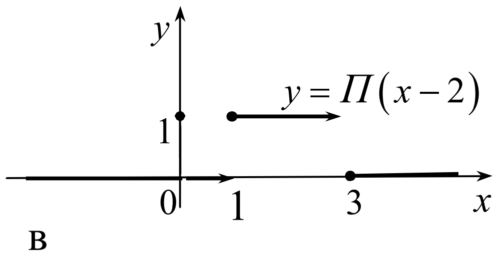
а

а) перенесення графіка функції x^2 на 2 одиниці вліво



б

б) перенесення графіка функції $\dfrac{1}{x}$ на одиницю вправо



в) зсування вправо на 2 одиниці графіка функції $П(x)$

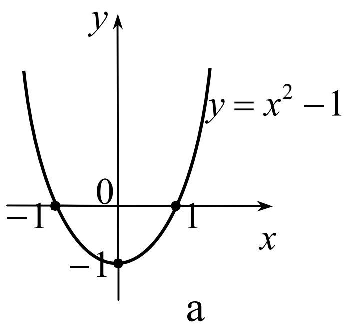
Рис. 2.8

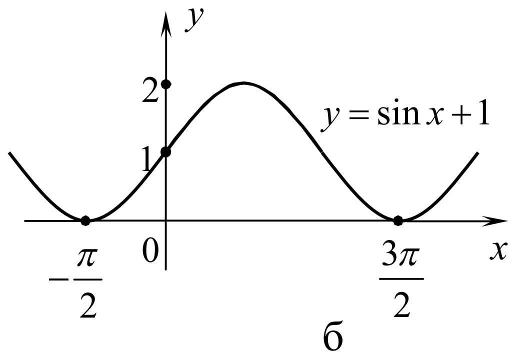
2. Графік функції $f(x)+b$ одержується шляхом зсування графіка функції $f(x)$ вздовж осі Oy на b одиниць вгору, якщо $b>0$, і на $|b|$ одиниць вниз, якщо $b<0$.

Приклад 13. Побудувати графіки таких функцій (рис. 2.9):

а) $f(x)=x^2-1$; б) $f(x)=1+\sin x$.

Розв'язання





а) перенесення графіка функції x^2 на одиницю вниз

б) зсування на одиницю вгору графіка функції $\sin x$

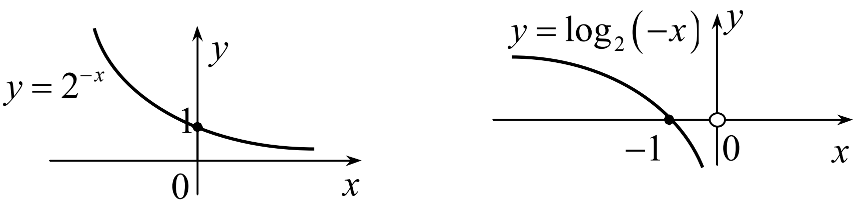
Рис. 2.9

3. Графік функції $f(-x)$ утворюється шляхом відбиття відносно осі Oy графіка функції $f(x)$.

Приклад 14. Побудувати графіки функцій (рис. 2.10):

$$\text{а) } f(x)=2^{-x}, \text{ б) } f(x)=\log_2(-x).$$

Розв'язання



а

а) відбиття відносно осі Oy графіка функції 2^x

б

б) відбиття відносно осі Oy графіка функції $\log_2 x$

Рис. 2.10

4. Графік функції $f(cx)$ при $c>0$ утворюється з графіка функції $f(x)$ шляхом зміни масштабу вздовж осі Ox у $\frac{1}{c}$ разів; при $c<0$ відбувається зміна масштабу вздовж осі Oy у $\frac{1}{|c|}$ разів, що супроводжується відбиттям відносно осі Oy.

Приклад 15. Побудувати графіки функцій (рис. 2.11):

а) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $f(x)=\sin 2x$; б) $f(x)=\arcsin 2x$; в) $f(x)=\Pi\left(\frac{x}{2}\right)$.

Розв’язання

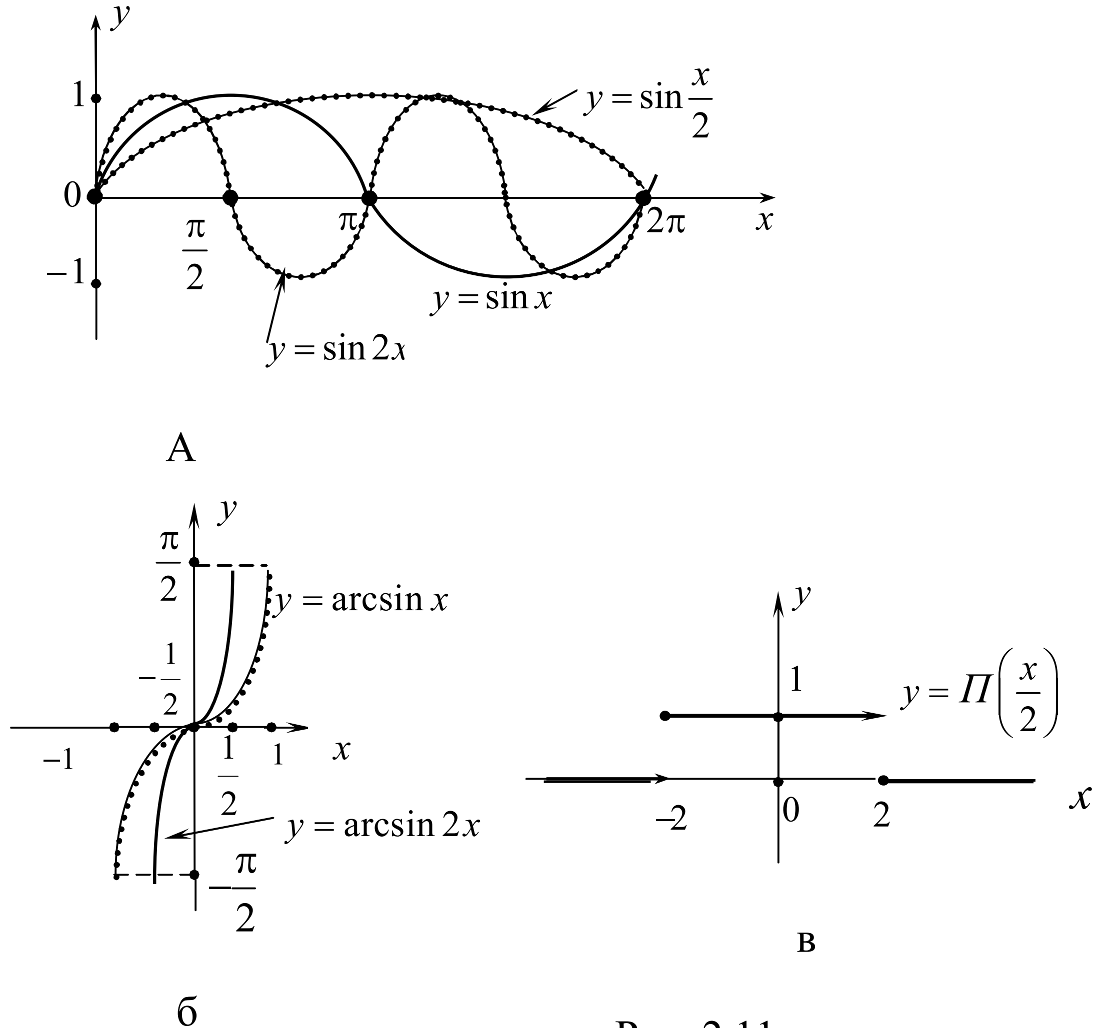


Рис. 2.11

Графік функції $\sin 2x$ одержується з графіка $\sin x$ стисканням до осі Oy у два рази, а графік $\sin\dfrac{x}{2}$ – розтягненням у два рази.

Графік функції $\arcsin 2x$ одержується із графіка функції $\arcsin x$ стисканням до осі Oy у два рази.

5. Графік функції $Af\left(x\right)$ утворюється із графіка функції $f\left(x\right)$ за умови $A>0$ шляхом зміни масштабу вздовж осі Oy в A разів, а за умови $A<0$ одночасно із зміненням масштабу вздовж осі Oy в $\left|A\right|$ разів відбувається відбиття відносно осі Ox.

Приклад 16. Побудувати графіки функцій (рис. 2.12):

а) $f\left(x\right)=-2x^2$; б) $f\left(x\right)=3\cos x$; в) $f\left(x\right)=2\mathrm{arctg}\,x$.

Розв’язання

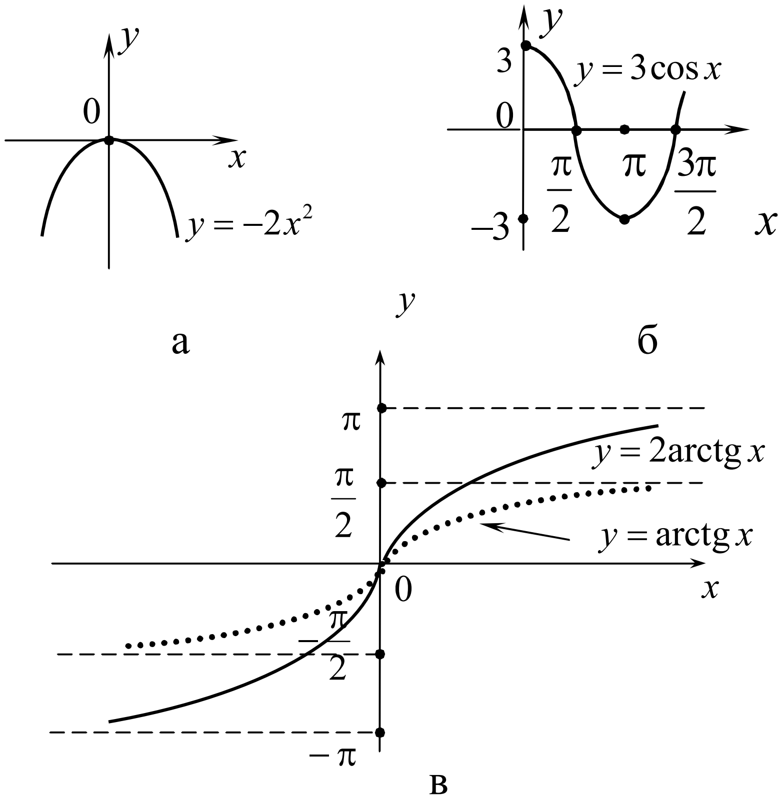


Рис. 2.12

6. Графік функції $|f(x)|$ утворюється з графіка функції $f(x)$ таким чином: частина графіка, яка відповідає $f(x)\geq 0$, залишається без зміни, а частина графіка, яка відповідає $f(x)<0$, відбивається відносно осі Ox.

Приклад 17. Побудувати графіки таких функцій (рис. 2.13):

а) $f(x)=|\log_2 x|$; б) $f(x)=|\mathrm{arctg}\,x|$.

Розв’язання

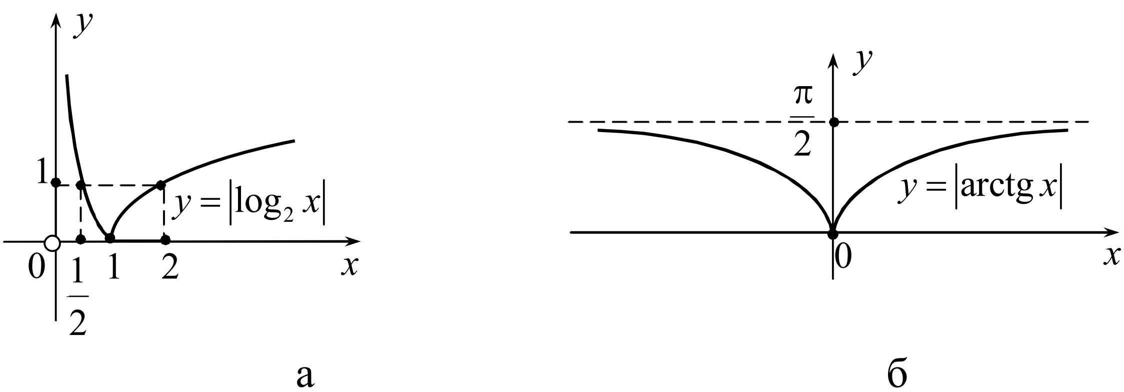


Рис. 2.13

7. Графік функції $f(|x|)$ є симетричним відносно осі Oy, а за умови $x \geq 0$ збігається з графіком функції $f(x)$.

Приклад 18. Побудувати графіки таких функцій (рис. 2.14):
а) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$; б) $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$.

Розв’язання

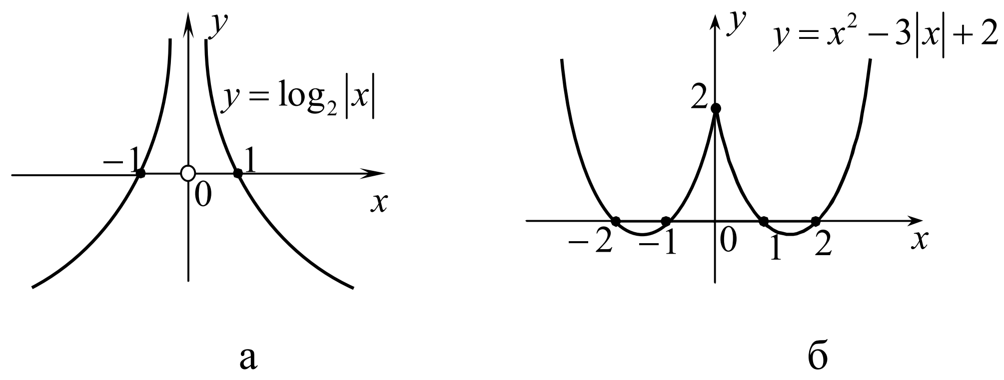


Рис. 7.14

Приклад 19. Побудувати графік функції $f(x) = \dfrac{2x+1}{-3x+4}$.

Розв’язання

Під час побудови цього графіка скористаємося деякими з наведених вище правил. З цією метою подамо функцію, поділивши чисельник на знаменник, у вигляді

$$\frac{2x+1}{-3x+4} = -\frac{2}{3} + \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{-3x+4} = -\frac{2}{3} - \frac{11}{9} \cdot \frac{1}{x - \frac{4}{3}}.$$

З цього випливає, що для побудови графіка початкової функції треба зуміти зобразити графік функції $\dfrac{1}{x}$. Вона є невизначеною, якщо $x = 0$, і тому важливо уявити, як поводить себе графік поблизу цієї точки. Коли x наближається до 0 праворуч $(x > 0)$, то $\dfrac{1}{x}$ стає скільки завгодно великою додатною величиною і тому при наближенні до нуля справа графік підіймається вгору. При наближенні до нуля зліва $(x < 0)$ графік опускається вниз (це узгоджується з тим, що функція $\dfrac{1}{x}$ є непарною).

При збільшенні $x(x>0)$ значення $\frac{1}{x}$, залишаючись додатними, зменшуються. При цьому графік наближається до осі Ox на будь-яку малу відстань. Для $x<0$ графік наближається до осі Ox знизу.

Отже, графік функції $\frac{1}{x}$ складається з двох гілок (рис. 2.15).

Крива, що є графіком функції $\frac{1}{x}$, є **гіперболою**, а прямі, до яких наближаються гілки гіперболи, називаються **асимптотами** гіперболи.

Повернемось до графіка функції $f(x)=\frac{2x+1}{-3x+4}$. Він утворюється з графіка функції $\frac{1}{x}$ такими перетвореннями: зсуванням на $\frac{4}{3}$ одиниці вправо, розтягом вздовж осі Oy в $\frac{11}{9}$ разів, відбиттям відносно осі Ox і зсувом на $\frac{2}{3}$ одиниці вниз (рис. 2.16).

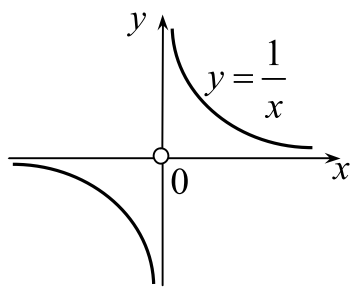


Рис. 2.15

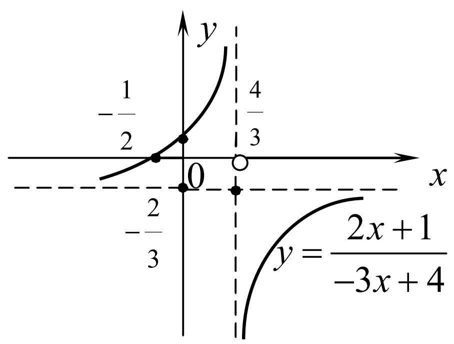


Рис. 2.16

Приклад 20. Побудувати ескіз графіка функції
$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)^2}.$$

Розв'язання

При $x=1$ функція є невизначеною. Якщо x близький до 1, то чисельник дробу приблизно дорівнює 2, а знаменник є маленьким додатним числом. Отже, при таких x значення функції буде великим додатним числом. Чим ближче x до 1, тим більшим буде значення функції. Звідси бачимо, що графік розділяється на дві гілки, кожна з яких необмежено підіймається вгору, коли x наближується до одиниці (рис. 2.17).

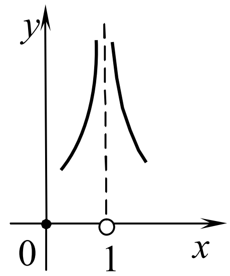


Рис. 2.17

При великих за абсолютною величиною значеннях x чисельник поводиться як x, а знаменник – як x^2.

Тому $\frac{x+1}{(x-1)^2} \approx \frac{1}{x}$ при великих $|x|$ і графік функції $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ при великих $|x|$ мало відрізняється від гіперболи $y = \frac{1}{x}$.

Оскільки чисельник при $x = -1$ дорівнює нулю, то в точці $(-1; 0)$ графік перетинає вісь Ox; оскільки при $x = 0$ дріб $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ дорівнює 1, то в точці $(0; 1)$ графік перетинає вісь Oy. Знайдені нами характерні риси графіка функції дозволяють побудувати його ескіз (рис.2.18).

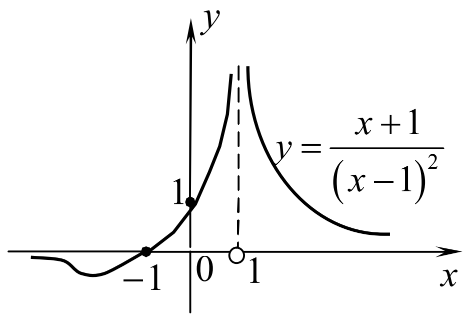


Рис. 2.18

2.8. Деякі факти математичної логіки

У подальшому іноді будуть використовуватися логічні символи (значки, що дозволяють коротко записати різні твердження).

1. Запис $P \Rightarrow S$ означає, що з P випливає S. При цьому P називається **достатньою умовою** для S, а S – **необхідною умовою** для P.

Запис $P \Leftrightarrow S$ означає, що P рівнозначне S. Інакше, умова P є необхідною і достатньою для S:

а) нехай P означає, що чотирикутник є ромбом, а S – що діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні. Тоді $P \Rightarrow S$, але $S \not\Rightarrow P$.

Якщо ж твердження S полягає у тому, що діагоналі взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл, то $P \Leftrightarrow S$;

б) $x-1=0 \Rightarrow x^2-1=0$, однак $x^2-1=0 \nRightarrow x-1=0$;

в) $x-1=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$.

Нехай P – деяка властивість, яку можуть мати чи не мати елементи a, що входять у множину A.

2. Запис $\exists a \in A : P(a)$ означає, що в множині A існує (знайдеться) елемент, що має властивість P. Наприклад, $\exists x \in R : x^2-1=0$.

3. Запис $\exists! a \in A : P(a)$ означає, що в множині A існує точно один елемент з властивістю P. Наприклад, $\exists! x \in R : x^3-1=0$.

4. Запис $\forall a \in A \quad P(a)$ означає, що всі елементи (кожний елемент) множини A мають властивість P. Наприклад:

$$\text{а) } \forall x \in R \ |\sin x| \le 1; \quad \text{б) } \forall \Delta ABC \quad |AB|+|BC|>|AC|.$$

Символи $\exists$, $\forall$ називаються, відповідно, **кванторами існування** та **всебічності.**

При переході до протилежного твердження потрібно символ $\exists$ замінити символом $\forall$ і навпаки, а властивість P, яка фігурує у твердженні, змінити на $\overline{P}$, тобто на протилежну:

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x : \overline{P}(x), \quad \overline{\exists x : P(x)} = \forall x \overline{P}(x).$$

Наприклад:

$\boxed{f(x) \text{ обмежена}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\exists M>0 : \forall x \in D_f \ |f(x)| \le M;}$

$\boxed{f(x) \text{ необмежена}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\forall M>0 \ \ \exists x \in D_f : \ |f(x)| > M.}$

ВПРАВИ

Знайти область визначення функцій:

1.1. $\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}$. **1.2.** $\dfrac{x-2}{x^2-9}$. **1.3.** $\sqrt{x^2-5x+6}+\dfrac{2x-3}{x-4}$.

1.4. $\lg\left(6x-x^2\right)$. **1.5.** $\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$. **1.6.** $\lg(x-1)+\arccos\dfrac{x}{2}$. **1.7.** $\sqrt{\lg \operatorname{tg} x}$.

Встановити парність чи непарність функції:

2.1. $x^3\cos x$. **2.2.** $x^2\cdot\sin x$. **2.3.** 2^x+2^{-x}. **2.4.** 2^x-2^{-x}. **2.5.** $\dfrac{x+3}{x-4}$.

2.6. $\dfrac{x^2-4x+1}{|x|}$. **2.7.** $\lg\dfrac{3-x}{3+x}$.

Визначити, які з наступних функцій періодичні, і знайти їх основні періоди:

3.1. $\cos 5x$. **3.2.** $\sin^2 3x$. **3.3.** $\mathrm{tg}2\pi x$. **3.4.** $\sin\pi x$. **3.5.** $\lg|\cos x|$.

Чи будуть обмеженими функції у даних проміжках:

4.1. x^2-1 на $[-2\,;3]$. **4.2.** $\dfrac{1}{x^2-1}$ на $[2\,;4]$. **4.3.** $\dfrac{1}{x^2-1}$ на $[0\,;2]$.

4.4. $\dfrac{1}{x^2+1}$ на $[2\,;5]$, на $[2\,;+\infty)$, на $(-\infty\,;+\infty)$. **4.5.** $\mathrm{tg}x$ на $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, на $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, на $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. **4.6.** $\log_{\frac{1}{2}}x$ на $[1\,;2]$, на $[1\,;+\infty)$, на $(0\,;1]$?

Записати складену функцію у вигляді ланцюжка основних елементарних функцій:

5.1. $\cos\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$. **5.2.** $\arcsin\left(\cos 2^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}\right)$. **5.3.** $\sqrt{\lg\mathrm{tg}\dfrac{3x-1}{x+5}}$.

5.4. $\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\lg\sin x}$.

Знайти обернені функції до таких функцій:

6.1. $\dfrac{3x+2}{2x-3}$. **6.2.** $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$. **6.3.** $x^2,\ x\ge 0$. **6.4.** $\cos 2x$, $x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6.5. $\mathrm{arctg}(2x-1)$. **6.6.** $2^{\sqrt{x+1}}$. **6.7.** $\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1\,;0]$.

Побудувати графіки функцій:

7.1. x^2-2x. **7.2.** $x^2-2|x|$. **7.3.** $|x^2-2x|$. **7.4.** $2x-x^2-5$. **7.5.** $|2x-x^2-5|$.

7.6. $2|x|-x^2-5$. **7.7.** $-\log_2(x+1)$. **7.8.** $\log_2(2x-3)+1$. **7.9.** $\log_{\frac{1}{2}}\left|\dfrac{x}{2}-3\right|$.

7.10. $\sin 3x$. **7.11.** $-\frac{1}{2}\sin(3x+\pi)$. **7.12.** $\sin|x|$. **7.13.** $|\sin 2x|$.

7.14. $\arcsin(2x-1)$. **7.15.** $\operatorname{arctg}(x-\pi)$. **7.16.** $x^2(x+1)$. **7.17**. $\frac{x^2+1}{x}$.

7.18. $\frac{1}{(x+1)^2}$. **7.19.** $\frac{1}{(x-1)^3}$. **7.20.** $\frac{1}{x^2-2x}$. **7.21.** $\frac{x}{x^2+1}$. **7.22.** $\cos x\cdot \mathit{1}(x)$.

7.23. $\sin x\cdot \mathit{1}(x+\pi)$. **7.24.** $(x^2-x)\cdot \mathit{1}(x)$. **7.25.** $(x^2-x)\cdot \mathit{1}(x-1)$.

7.26. $\sin\pi x\cdot \Pi(x)$. **7.27**. $x^2(x+1)\cdot \Pi(x)$. **7.28.** $\frac{x^2+1}{x}\cdot \Pi(x-1)$.

7.29. $\cos x\cdot \Pi\left(\frac{2x}{\pi}\right)$. **7.30.** $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x\in[0;+\infty), \\ -\frac{x}{2}, \text{ якщо } x\notin[0;+\infty). \end{cases}$

7.31. $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x\in[0\,;+\infty), \\ x+1, \text{ якщо } x\notin[0\,;+\infty). \end{cases}$

Графік функції $f(x)$ наведено на рис. 2.19. Побудувати схематично графіки функцій:

8.1. $f(x+2)$. **8.2.** $f(x)-2$. **8.3.** $f(-x)$. **8.4.** $f(-x+2)$. **8.5**. $f(|x|)$.

8.6. $|f(x)|$. **8.7.** $f(2x)$. **8.8.** $\frac{1}{f(x)}$. **8.9.** $\frac{1}{2}f(x-2)+3$.

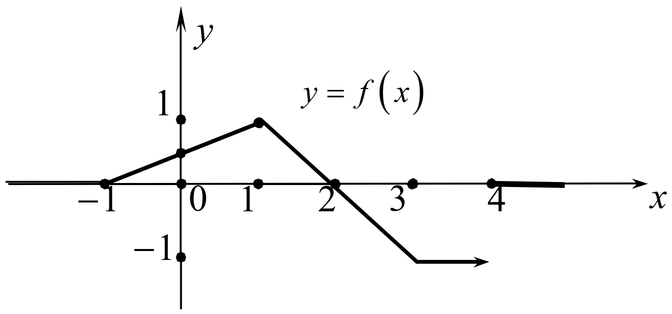


Рис. 2.19

ВІДПОВІДІ

1.1. $[-2;6]$. **1.2.** $x \neq \pm 3$. **1.3.** $(-\infty;2]\cup[3;4)\cup(4;+\infty)$. **1.4.** $(0;6)$. **1.5.** $[-1;4]$. **1.6.** $(1;2]$. **1.7.** $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k \in Z$.

2.1. непарна. **2.2.** непарна. **2.3.** парна. **2.4.** непарна. **2.5.** ні парна, ні непарна. **2.6.** ні парна, ні непарна. **2.7.** непарна.

3.1. $\frac{2\pi}{5}$. **3.2.** $\frac{\pi}{3}$. **3.3.** $\frac{1}{2}$. **3.4.** $\frac{1}{2}$. **3.5.** π.

4.1. так. **4.2.** так. **4.3.** ні. **4.4.** так, так, так. **4.5.** так, ні, ні. **4.6.** так, ні, ні.

5.1. $y=\cos u,\ u=\sqrt[3]{v},\ v=\log_{\frac{1}{3}} t,\ t=x-1$. **5.2**. $y=\arcsin u$, $u=\cos v,\ v=2^t,\ t=\mathrm{arctg} s,\ s=\sqrt{x}$. **5.3.** $y=\sqrt{u},\ u=\lg v,\ v=\mathrm{tg} t,\ t=\frac{3x-1}{x+5}$. **5.4.** $y=\sqrt[3]{u},\ u=\mathrm{arctg} v,\ v=\lg t,\ t=\sin x$.

6. 1. $y=\frac{3x+2}{2x-3}$. **6.2.** $y=1+2^{-x}$. **6.3.** $y=\sqrt{x}$. **6.4.** $y=\frac{\arccos x}{2}$. **6.5.** $y=\frac{1+\mathrm{arctg} x}{2}$. **6.6.** $y=\log_2^2 x-1$. **6.7.** $y=-\sqrt{1-x^2},\ x\in[0\,;1]$.

Розділ 3
ГРАНИЦЯ

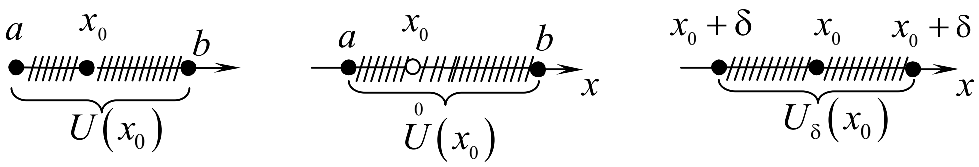
Інтуїтивне уявлення про границю полягає у тому, що границя – це стала, до якої необмежено наближується змінна величина. Це поняття виникає у результаті розв’язання багатьох прикладних задач (площа фігури, швидкість точки і т. д.) і є фундаментом, на який спирається більшість розділів природознавства.

3.1. Скінченна границя функції у точці

Припустимо, що значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A (як завгодно близькі до A), як тільки значення x достатньо близькі до x_0 $(x \neq x_0)$. В цьому випадку природно вважати, що значення функції $f(x)$ прямують до границі A, коли x прямує до x_0.

Перейдемо до точних означень.

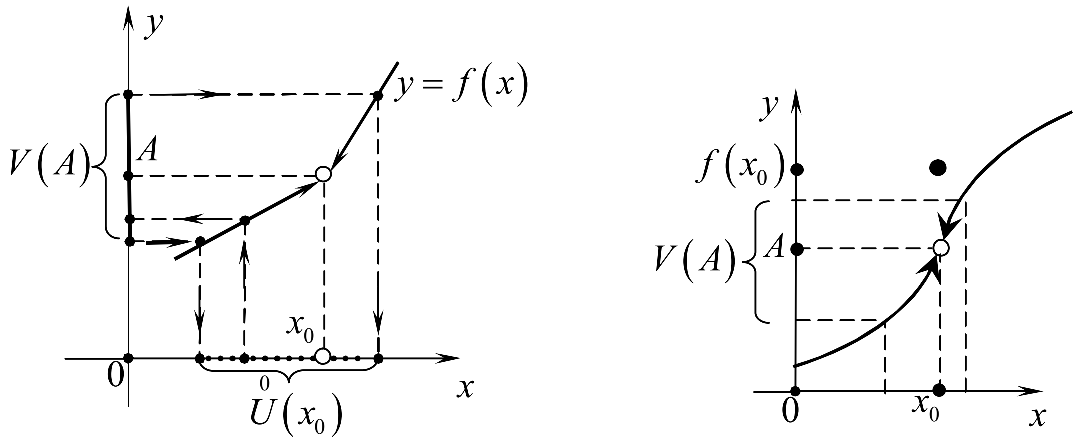
Означення 1. **Околом** $U(x_0)$ точки x_0 називається довільний інтервал, який містить цю точку. **Проколеним околом** $\overset{0}{U}(x_0)$ точки $\boldsymbol{x_0}$ називають окіл $U(x_0)$ точки, з якого виключена сама точка x_0. У будь-якому околі точки x_0 міститься симетричний δ - окіл $U_\delta(x_0)$ цієї точки, тобто сукупність точок вигляду $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$.



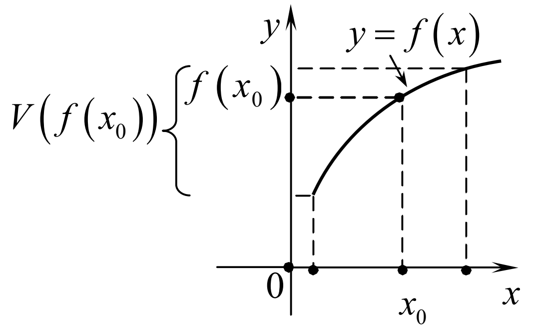
Нехай функція $f(x)$ визначена у проколеному околі $\overset{0}{U}(x_0)$ точки x_0.

Означення 2. Число A називається **границею** функції $f(x)$ у точці x_0 (при x, що прямує до x_0), якщо для будь-якого околу $V(A)$ числа A знайдеться такий проколений окіл $\overset{0}{U}(x_0)$ точки x_0, що для всіх $x \in \overset{0}{U}(x_0)$ значення функції $f(x) \in V(A)$ (рис. 3.1).

(Значення x_0 виключається для того, щоб подане вище означення можна було використовувати як у тому випадку, коли функція $f(x)$ в точці x_0 невизначена (рис. 3.1,а), так і у тому, коли $f(x_0) \neq A$ (рис. 3.1,б)).



А Б



в

Рис. 3.1

Якщо A – границя функції $f(x)$, коли x прямує до x_0, то використовують такі позначення:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A} \quad \text{або} \quad \boxed{\begin{gathered} f(x) \to A, \\ x \to x_0. \end{gathered}}$$

За допомогою логічних символів означення скінченної границі функції у точці записується таким чином:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A} \Leftrightarrow \boxed{\forall V(A) \exists \overset{0}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{0}{U}(x) \Rightarrow f(x) \in V(A).}$$

Можна довести, що в тому випадку, коли елементарна функція $f(x)$ визначена в точці x_0, знаходження границі не викликає труднощів:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

Приклад 1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 2\sin x = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x + \frac{1}{x+2}\right) = \frac{3}{2}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$.

Оскільки в кожному околі точки x_0 міститься її деякий симетричний окіл, то в поданому вище означенні скінченної границі можна замінити околи $V(A)$ і $\overset{0}{U}(x_0)$ відповідно на $V_\varepsilon(A)$ і $\overset{0}{U}_\delta(x_0)$. З геометричної точки зору це відповідає тому, що графік функції $f(x)$ для $x \in \overset{0}{U}(x_0)$ лежить у горизонтальній смузі, ширина якої 2ε з центром в A.

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

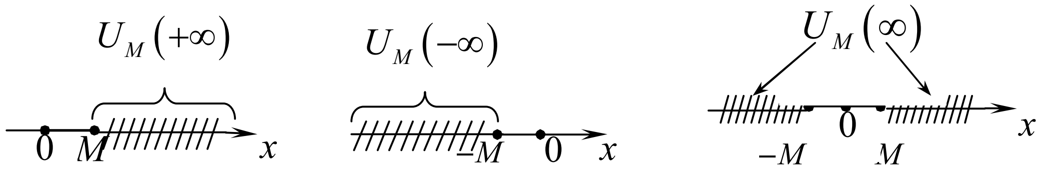
Розв'язання. Функція $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ не визначена при $x = 0$. Покажемо, що границя цієї функції при $x \to 0$ існує і дорівнює 0. Нехай $\varepsilon > 0$, тоді для $\forall x \in \overset{0}{U}_\varepsilon(0)$ $(0 < |x| < \varepsilon)$ значення $f(x) \in V_\varepsilon(0)$ $\left(|f(x) - 0| = = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \varepsilon\right)$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Відзначимо, що неперіодична функція $\sin\frac{1}{x}$ не має границі при $x \to 0$. Значення цієї функції коливаються між -1 та 1. При наближенні x до 0 коливання функції стають все частішими (див. приклад 9, розділ 2).

3.2. Скінченна границя при $x \to +\infty, -\infty, \infty$. Нескінченні границі

В означенні 2 попереднього підрозділу відігравали роль не самі числа A і x_0, а лише їх околи. Тому, якщо внести до розгляду околи $+\infty, -\infty, \infty$ то з'явиться можливість розширити поняття границі на випадок $x \to +\infty, -\infty, \infty$ та внести до розгляду нескінченні границі.

Нехай $M > 0$. Інтервал $(M\,; +\infty)$ називається $M-$ **околом** $+\infty$ та позначається $U_M(+\infty)$ (або $U(+\infty)$, якщо величина M не має значення). Інтервал $(-\infty\,;-M)$ називається $M-$ **околом** $-\infty$ та позначається $U_M(-\infty)$ $\left(U(-\infty)\right)$. Околом ∞ називається об'єднання інтервалів $(-\infty\,;-M)\cup(M\,;+\infty)$, яке позначається $U_M(\infty)$ $\left(U(\infty)\right)$.



Після цього, заміняючи околи, що фігурують в означенні 2, на відповідні околи $+\infty, -\infty, \infty$, приходимо до нескінченних та скінченних границь при $x \to \pm\infty, \infty$ (рис. 3.2, 3.3).

Наприклад:

1)	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall V(+\infty)\exists \overset{0}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{0}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(+\infty)$;
2)	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$	$\Leftrightarrow$	$\forall V(A)\exists U(+\infty) : \forall x \in U(+\infty) \Rightarrow f(x) \in V(A)$.

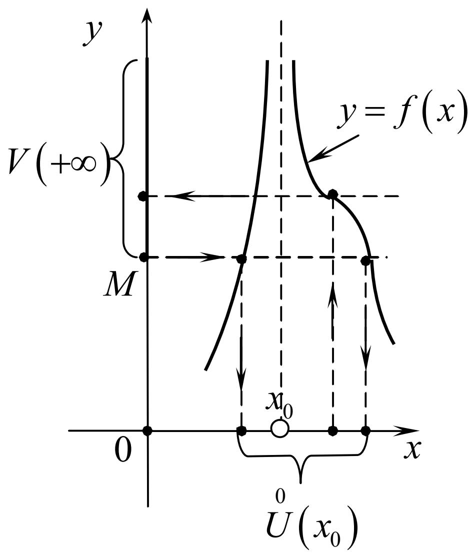


Рис. 3.2

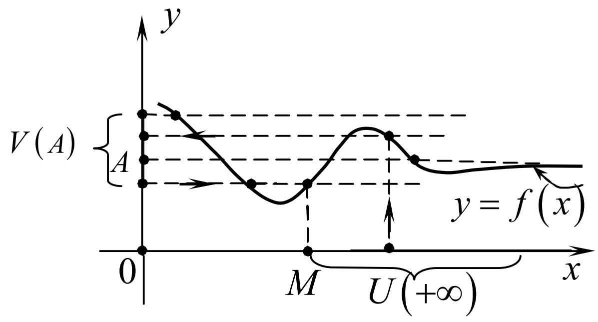


Рис. 3.3

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$.

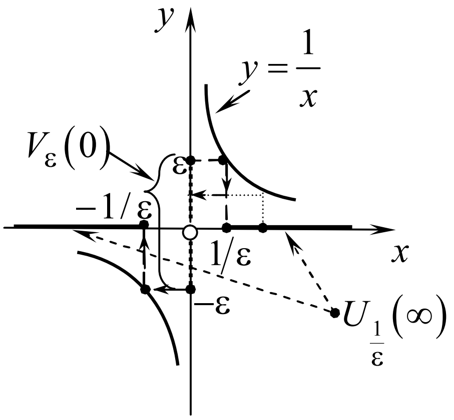


Рис. 3.4

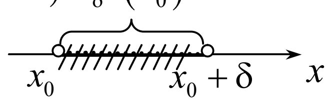
Розв'язання

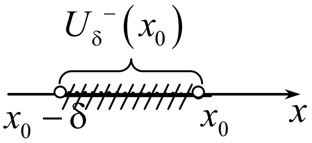
Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді для $\forall x \in U_M(\infty)$ $\left(|x| > M\right)$ значення $f(x) = \frac{1}{x} \in V_\varepsilon(0)$ $\left(\left|f(x) - 0\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon\right)$ (рис. 3.4).

Отже, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Аналогічним чином можна довести, що $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{|x|^p} = 0 \ \ (p > 0)$.

3.3. Однобічні границі

Правим (лівим) півоколом $U_\delta^+(x_0)\left(U_\delta^-(x_0)\right)$ точки x_0 називається довільний інтервал вигляду $(x_0\,;\,x_0 + \delta)$ $\left((x_0 - \delta\,;\,x_0)\right)$ $(\delta > 0)$





Якщо в означенні границі функції $f(x)$ у точці x_0 замінити проколений окіл $\overset{0}{U}(x_0)$ на правий $U_\delta^+(x_0)$ (лівий $U_\delta^-(x_0)$) півокіл точки x_0, то прийдемо до поняття правої (лівої) границі функції у точці x_0.

Застосуємо для правої (лівої) границі такі позначення:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x),\ f(x_0 + 0)\ \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x),\ f(x_0 - 0)\right).$$

Існування скінченної границі $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$ рівнозначно тому, що $\lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=A$.

Аналогічно

$$\exists \lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=+\infty\left(-\infty\right) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=\exists \lim_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=+\infty\left(-\infty\right)).$$

Приклад 4. Функція $f\left(x\right)=\dfrac{x}{|x|}$, якщо $x\neq 0$, має у точці x_0 праву границю, що дорівнює 1, і ліву границю, що дорівнює –1. Вона не має границі у точці $x=0$. Її графік в околі цієї точки не може бути розташований у смузі, ширина якої менше 2 (рис. 3.5).

Приклад 5. Знайти границі $\lim\limits_{x\to 0\pm} 2^{\frac{1}{x}}$.

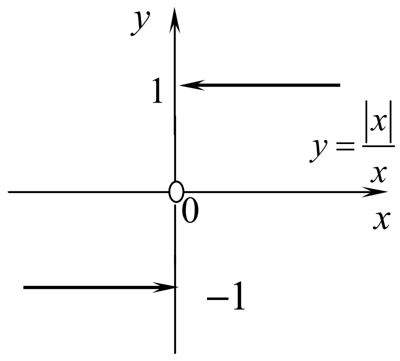


Рис. 3.5

Розв'язання. При малих від'ємних x значення функції $2^{\frac{1}{x}}$ будуть малими додатними числами. Тому природно виглядає припущення про те, що $\lim\limits_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}}=0$. Доведемо це твердження. Виберемо довільно мале $\varepsilon>0$. Тоді нерівність $\left|2^{\frac{1}{x}}-0\right|<\varepsilon$ $\left(f\left(x\right)\in V_\varepsilon\left(0\right)\right)$, яка рівнозначна нерівності $2^{\frac{1}{x}}<\varepsilon$, буде виконана при $\dfrac{1}{\log_2\varepsilon}<x<0$ $\left(x\in U^{-}_{|\log_\varepsilon 2|}\left(0\right)\right)$.

Оскільки при малих $x>0$ значення функції $2^{\frac{1}{x}}$ будуть великими додатними числами, то виникає припущення про те, що $\lim\limits_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty$. Дійсно, при будь-якому скільки завгодно великому M нерівність $2^{\frac{1}{x}}>M$ $\left(f\left(x\right)\in V_M\left(+\infty\right)\right)$ виконується при $0<x<\dfrac{1}{\log_2 M}$ $\left(x\in U^{+}_{\log_M 2}\left(0\right)\right)$ (рис. 3.6).

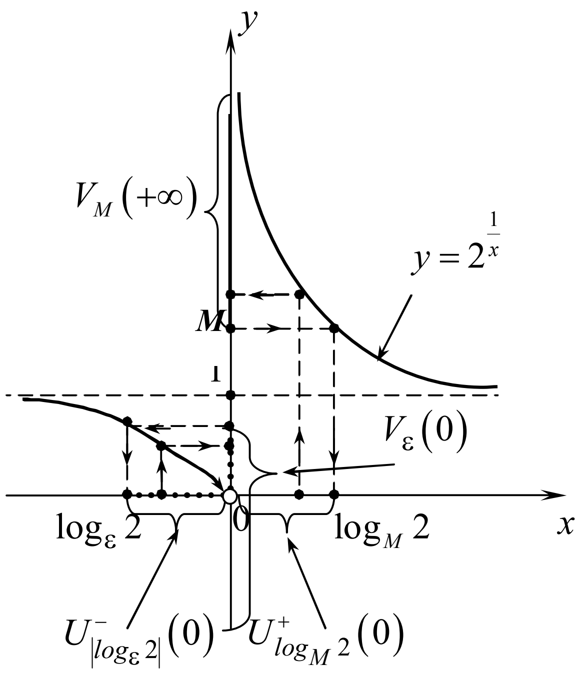


Рис. 3.6

3.4. Послідовність та її границя

Означення 1. Послідовністю називається функція, яка визначена на множині натуральних чисел: $n \to f(n)$ $(n \in N)$. Число $f(n)$ називається n–м членом послідовності й позначається a_n, або $a_n = f(n)$.

Для послідовності використовуються позначення

$$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}; \quad \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}.$$

Про границю послідовності можна говорити лише при $n \to +\infty$.

Поняття границі послідовності одержується з поняття границі функції при $x \to +\infty$.

Означення 2. Число A називається **границею послідовності** $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, якщо для будь-якого околу $V(A)$ числа A існує окіл $U(+\infty)$, такий, що $a_n \in V(A)$, якщо $n \in U(+\infty)$.

Для границі послідовності використовуються такі позначення:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A; \quad a_n \to A, \quad n \to +\infty.$$

Інакше кажучи, число A є границею послідовності, якщо в будь-який окіл цього числа потрапляють всі члени послідовності, за винятком скінченного їх числа.

Приклад 6. Довести, що: а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$.

Розв'язання: а) нехай $\varepsilon-$ довільне додатне число. Доведемо існування такого числа $n(\varepsilon)$, що для членів послідовності, номери яких більше $n(\varepsilon)$, виконується нерівність $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ $\left(a_n \in V_\varepsilon(1)\right)$.

Остання нерівність рівнозначна нерівності $\frac{1}{n} < \varepsilon$, яка справедлива при $n > \frac{1}{\varepsilon} \equiv n(\varepsilon)$. (При $\varepsilon = \frac{1}{3}$ отримаємо $n(\varepsilon) = 3$). Це означає, що в проміжок $V_{\frac{1}{3}}(1)\left(\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}\right)$ потрапляють всі члени послідовності $\frac{n+1}{n}$, починаючи з четвертого (рис. 3.7, а).

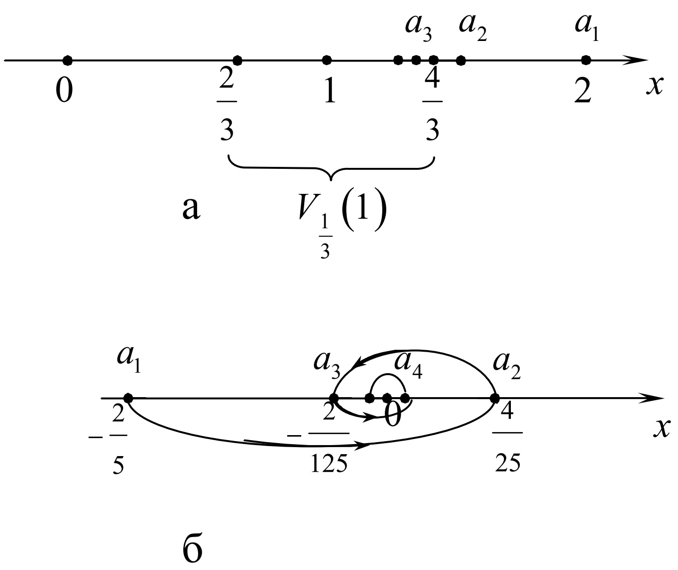


Рис. 3.7

б) $\left|\left(-\frac{2}{5}\right)^n\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{\frac{2}{5}} \varepsilon \equiv n(\varepsilon)$. Виберемо $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Тоді $n\left(\frac{1}{100}\right) = \; = 5.026$. Отже, в окіл $V_{\frac{1}{100}}(0)\left(-\frac{1}{100} < x < \frac{1}{100}\right)$ потрапляють всі члени послідовності $\left(-\frac{2}{5}\right)^n$, починаючи з шостого (рис. 3.7, б).

Теорема. Співвідношення $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$ для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, такої, що $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ (твердження справедливе і для $x_0 = \pm\infty, \infty$ та $A = \pm\infty, \infty$).

Цю теорему зручно використовувати для доведення того, що деяка функція не має границі при $x \to x_0$.

Приклад 7. Довести, що функція $\cos\frac{1}{x}$ не має границі при $x \to 0$.

Розв'язання

Виберемо дві прямуючі до нуля послідовності $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ та $x_n^1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$ $(n \in N)$. Тоді $f(x_n) = \cos\frac{1}{x_n} = \cos 2\pi n = 1$ і $f(x_n^1) = \cos\frac{1}{x_n^1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0$.

Отже, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 1 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n') = 0$, і, значить, функція $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ не має границі при $x \to 0$.

3.5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення 1. Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ (можливо, що x_0 один із символів $\pm\infty, \infty$).

Якщо функція $f(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$, будемо використовувати позначення $f(x) = o(1)$ $(x \to x_0)$, яке читається "$f(x)$ дорівнює o мале від 1 при $x \to x_0$".

Наприклад:

1) $\sin x = o(1)$ $(x \to 0)$; 2) $x^p = o(1)$ $(x \to +0)$ $p > 0$;

3) $x^p = o(1)$ $(x \to +\infty)$, $p < 0$; 4) $q^n = o(1)$ $(n \to +\infty)$, $|q| < 1$;

5) $a^x = o(1)$ $(x \to +\infty)$, $0 < a < 1$.

Приклад 8. Величини $\operatorname{tg} x$, $\log_a(x+1)$, $2^x - 1$ є нескінченно малими при $x \to 0$.

При $x \to 1$ нескінченно малими будуть функції $(x-1)^2(x+2)$, $\sin(x-1)$.

Функції $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{(x-1)^2}$, $\frac{x+5}{x^2-1}$, $\sin\frac{1}{x}$ є нескінченно малими при $x \to \infty$.

Справедливі такі твердження:

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} f(x)=A+o(1) \\ (x\to x_0) \end{matrix}}$

($A\in R$, $x_0\in R$ чи будь-який з символів $\pm\infty,\infty$);

2) лінійна комбінація і добуток скінченного числа функцій, які є нескінченно малими при $x\to x_0$, є функцією, яка нескінченно мала при $x\to x_0$.

Означення 2. Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

Сума нескінченно великих функцій не завжди є нескінченно великою функцією $\left(f_1(x)=\dfrac{1}{x},\ f_2(x)=\dfrac{x-1}{x},\ x\to 0\right)$.

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами такий:

1) якщо $f(x)$ є нескінченно малою при $x\to x_0$ $\left(f(x)\neq 0,\ \text{якщо}\ x\in \overset{0}{U}(x_0)\right)$, то

є нескінченно великою при $x\to x_0$;

2) якщо $f(x)$ є нескінченно великою при $x\to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ буде нескінченно малою величиною при $x\to x_0$.

Приклад 9. Величини x, x^2, x^3 є нескінченно малими при $x\to 0$. Зворотні величини $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^3}$ будуть нескінченно великими при $x\to 0$. При цьому тільки $\dfrac{1}{x^2}\to +\infty$ ($x\to 0$), а величини $\dfrac{1}{x}$ та $\dfrac{1}{x^3}$ не прямують ні до $+\infty$, ні до $-\infty$ (обміркуйте це, побудувавши графіки функцій).

Приклад 10. Функція $\dfrac{1}{\log_2 x}$ є нескінченно великою при $x\to 1$; функція x^3+2x є нескінченно великою при $x\to\infty$; функція $\log_2 x$ є нескінченно великою при $x\to +0$ та при $x\to +\infty$; функція 2^{-x} є нескінченно великою при $x\to -\infty$. Відзначимо, що розглянута в прикладі 9 підрозд. 2.4 необмежена функція $f(x)=x\sin x$ не є нескінченно великою при $x\to +\infty$, $-\infty$, ∞.

Деякі нескінченно малі (нескінченно великі) можуть бути класифіковані залежно від поведінки їх відношення.

Означення 3. Нехай функції $f(x)$та $\mathrm{g}(x)$ є нескінченно малими при $x \to x_0$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то будемо казати, що $f(x)$ є нескінченно малою більш високого порядку мализни, ніж $g(x)$ (f прямує до нуля швидше, ніж g), та записувати $f(x)=o\big(g(x)\big)\,(x\to x_0)$.

$$\boxed{f(x)=o\big(g(x)\big)\,(x\to x_0)} \Leftrightarrow \boxed{f(x)=g(x)\cdot o(1)\,(x\to x_0).}$$

Означення 4. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є нескінченно великими при $x \to x_0$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то будемо казати, що $f(x)$ є нескінченно великою більш низького порядку, ніж $g(x)$ (f зростає повільніше, ніж g), і записувати $f(x)=o\big(g(x)\big)\,(x\to x_0)$.

Приклад 11. Довести, що: а) $x^2=o(x)\,(x\to 0)$;

б) $x=o\left(x^2\right)(x\to\infty)$; в) $\frac{1}{x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)(x\to 0)$;

г) $2x^2+x+5=o\left(x^3\right)\ (x\to\infty)$; д) $(x-2)^3=o\left((x-2)^2\right)\ (x\to 2)$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$, отже, x^2 є нескінченно малою більш великого порядку мализни, ніж x при $x\to 0$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, тобто, x є нескінченно великою величиною, більш низького порядку, ніж нескінченно велика x^2 при $x\to\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Величина $\frac{1}{x^2}$ є нескінченно великою більш високого порядку, ніж нескінченно велика $\frac{1}{x}$ при $x\to 0$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+5}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{x}=0$. Нескінченно велика x^3 більш високого порядку, ніж нескінченно велика $2x^2+x+5$ при $x\to\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0 \Rightarrow$ величина $(x-2)^3$ більш високого порядку мализни, ніж $(x-2)^2$ $(x\to 2)$ (швидше прямує до 0).

Означення 5. Нескінченно малі (нескінченно великі) функції f та g називаються **еквівалентними** (**асимптотично рівними**) при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Звичайно для еквівалентних функцій застосовують позначення

$$\boxed{f(x)\sim g(x), \qquad x\to x_0}$$

і говорять, що функції $f(x)$ та $g(x)$ асимптотично рівні в точці x_0. Прийнято в асимптотичній рівності зліва писати громіздку функцію, яка вивчається, а справа – більш просту, яка вже вивчена до цього. Тоді функція $g(x)$ називається **головним членом** асимптотичної рівності (асимптотичної формули), а різниця $f(x)-g(x)$ – її залишком.

Відносна похибка асимптотичної формули дорівнює $\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}$. Оскільки $\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\to 0$ при $x\to x_0$, то відносна похибка асимптотичної формули прямує до нуля при $x\to x_0$. Тому функція $g(x)$ тим точніше описує функцію $f(x)$, чим ближче до x_0 знаходиться x. Отже,

$$\boxed{f(x)\sim g(x),\ x\to x_0} \Leftrightarrow \boxed{f(x)=g(x)+o(g(x)),\ x\to x_0.}$$

Таким чином, сума нескінченно малих різних порядків еквівалентна нескінченно малій більш низького порядку, а сума нескінченно великих різних порядків еквівалентна нескінченно великій більш високого порядку.

Приклад 12

а) $x^2 = o(x),\ x \to 0 \Leftrightarrow x + x^2 \sim x,\ x \to 0$;

б) $x = o(x^2),\ x \to \infty \Leftrightarrow x^2 + x \sim x^2,\ x \to \infty$;

в) $x^{m-1} = o(x^m), x^{m-2} = o(x^m), \ldots, x = o(x^m),\ x \to \infty$

$\Leftrightarrow P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m \sim a_0 x^m, \quad x \to \infty, m \in N$;

г) для суми $S_p(n)$ p-х ступенів перших n натуральних чисел справедлива асимптотична рівність

$$S_p(n) \equiv 1 + 2^p + 3^p + \ldots + n^p \sim \frac{1}{p+1} n^{p+1} \left(p \in N, n \to +\infty\right),$$

яку можна уточнити таким чином:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + o(n^p) \ \left(p \in N, n \to +\infty\right).$$

Асимптотичні формули можна почленно перемножати і ділити, а саме

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \sim g(x) \\ f_1(x) \sim g_1(x) \\ (x \to x_0) \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1)\, f(x) \cdot f_1(x) \sim g(x) \cdot g_1(x), \\ 2)\, \dfrac{f(x)}{f_1(x)} \sim \dfrac{g(x)}{g_1(x)} \qquad (x \to x_0) \\ \quad (g_1(x) \neq 0 \text{ при } x \neq x_0). \end{array}}$$

Означення 6. Нехай функції $f(x)$ та $g(x) > 0$ нескінченно малі (нескінченно великі) при $x \to x_0$. Будемо казати, що функція $f(x)$ має порядок p відносно $g(x)$ при $x \to x_0$, якщо

$$\boxed{f(x) \sim C\left(g(x)\right)^p,\ C \neq 0 \ \left(x \to x_0\right).}$$

Приклад 13. Визначити порядок функції $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ відносно функції $g(x) = x$ при $x \to +\infty$.

Розв'язання:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Отже, порядок $p=-1$, а $C=\frac{1}{2}$.

3.6. Теореми про границі

Теорема 1. (Арифметичні властивості скінченних границь). Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають у точці x_0 скінченні границі A та B відповідно, то в цій точці мають скінченні границі функції $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(B\neq 0)$, а саме:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}1)\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B,\\ 2)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B,\\ 3)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\ \ (B\neq 0).\end{array}}$$

Твердження теореми зберігається і при $x\to\pm\infty$, ∞.

У тому випадку, коли хоча б одна з границь нескінченна або границя знаменника дорівнює нулю, теорему про арифметичні властивості границь не завжди можна застосовувати. Наведемо найпростішу таблицю, в якій знаком “?” позначені ті випадки, коли існування границі або її величина залежать від конкретного вигляду функцій $f(x)$ та $g(x)$ (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$
∞	0	∞	?	∞
∞	∞	?	∞	?
0	0	0	0	?

Приклад 14. Знайти: а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$; г) $\mathit{lim}_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x-1}{5x^3-2x^2+x+2}$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+{}^{2}\!/_{x}}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+{}^{2}\!/_{x}}+1}=1$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=-\dfrac{1}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+5}{x+1}=3$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{5x^3-2x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\dfrac{2}{5}$.

Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq0$, то в деякому проколеному околі $\overset{0}{U}(x_0)$ точки x_0 функція $\dfrac{1}{f(x)}$ є обмеженою, а функція $f(x)$ має той же знак, що і число A.

Теорема 3. Якщо в деякому проколеному околі $\overset{0}{U}(x_0)$ точки x_0 виконується нерівність $f(x)\le h(x)\le g(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, то існує $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

Теорема 4. Якщо в деякому околі $U(+\infty)$ функція $f(x)$ зростає і виконується нерівність $f(x)\le M$, то існує $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\le M$.

Теорема 5. Нехай в околі точки x_0 задана складена функція $f(g(x))$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$ ($g(x)\neq b$ при $x\neq x_0$), а $\lim\limits_{u\to b}f(u)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.

3.7. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

Дві границі, про які будемо говорити нижче, відіграють у математиці надзвичайну роль. За їх допомогою можна знайти інші границі, в яких зустрічаються тригонометрична, обернена тригонометрична, показникова та логарифмічна функції.

Перша важлива границя. Спробуємо з'ясувати, чи існує границя функції $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. З цією метою обчислимо значення цієї парної функції при декількох достатньо малих значеннях x (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

x (рад)	0,5	0,125	0,01	0,005
$\frac{\sin x}{x}$	0,958851	0,997398	0,999983	0,999996

Складається враження, що границя функції $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ існує і дорівнює 1.

Строге доведення цього глибокого факту ґрунтується на теоремі 3 підрозд. 3.6 і випливає з нерівності $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ $\left(x \in \overset{0}{U}(0)\right)$. Отже,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{sin\, x}{x} = 1.}$$

Оскільки $\frac{1}{x} = o(1)$ $(x \to \infty)$, а $|\sin x| \le 1$, то $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ і, отже, графік функції $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ має такий вигляд (рис. 3.8):

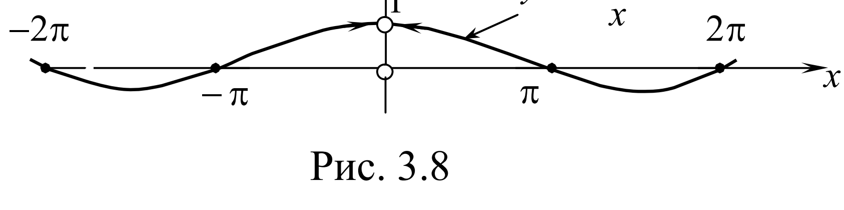


Рис. 3.8

Смисл першої важливої границі полягає у тому, що синус малого кута практично дорівнює величині цього кута (у радіанах)

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\sin\alpha(x)=\alpha(x)+o\left(\alpha(x)\right),\\ \alpha(x)\to 0.\end{array}}$$

Друга важлива границя. Функція $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ зростає при $x\to+\infty$ (у це можна повірити, знаходячи на калькуляторі значення $f(2)=2.25$, $f(3)=2.37037$, $f(100)=2.704814$, $f(1000)=2.716924$).

Крім того, неважко показати, що ця функція обмежена при $x\to+\infty: f(x)<3$. Тоді на підставі твердження теореми 4 підрозд. 3.6 робимо висновок, що функція $f(x)$ має границю при $x\to+\infty$, яку прийнято позначати буквою e (рис. 3.9). Число $e=2.718281828459045...$ є ірраціональним і навіть трансцендентним.

Отже,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.}$$

Більш того

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e.}$$

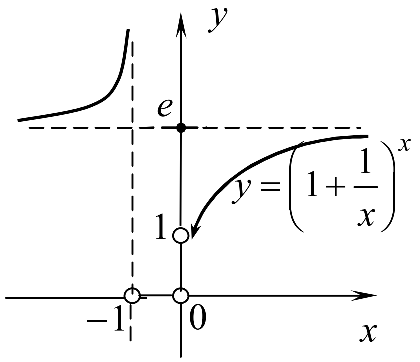


Рис. 3.9

Зокрема $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a\ \left(a\in R\right).$$

Логарифми за основою e називаються **натуральними** і позначаються $\ln$.

Слід відзначити, що функція $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ прямує при $x \to +\infty$ до числа e дуже повільно. Набагато швидше прямує до e функція $\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$:

$$\varphi(100)=2.718\,304;\ \varphi(1000)=2.718\,282.$$

Перша та друга важливі границі дозволяють суттєво розширити запас еквівалентних нескінченно малих величин.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

При $\alpha(x)\to 0$ справедливі асимптотичні рівності, подані у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	2. $\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$
3. $1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2}$	4. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
5. $\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6. $\left(1+\alpha(x)\right)^p-1\sim p\alpha(x)$
7. $\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x)$	7′. $\log_a\left(1+\alpha(x)\right)\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a}$
8. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$	8′. $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$

Користуючись цією таблицею, можна отримати таблицю нескінченно малих в околі будь-якої точки.

Наприклад, при $x\to 0$ $\sin x\sim\ln\left(1+x\right)\sim e^x-1\sim x$,

а при $x\to\infty$ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^p-1\sim\frac{p}{x}$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$, $2^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{\ln 2}{x}$.

Використання еквівалентних нескінченно малих (нескінченно великих) корисно при обміркуванні фізичного змісту багатьох формул і значно полегшує техніку обчислення границь відношення і добутку функцій (заміна еквівалентними в сумі потребує деякої обережності).

Сформулюємо такий результат.

Теорема

$f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$ $h(x)$ – довільна функція	$\Rightarrow$	1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot h(x)$; 2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}$.

Приклад 15. Енергія, що випромінюється абсолютно чорним тілом у діапазоні частот $[\nu;\,\nu+\Delta\nu)$ при абсолютній температурі T, пропорційна величині $\dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{T}}-1}\Delta\nu$, де h – постійна Больцмана, а T виражається в енергетичних одиницях. При малих частотах (у довгохвильовій області спектра) знаменник є еквівалентним $\dfrac{h\nu}{T}$ і для енергії, що випромінюється, одержуємо більш зручний вираз $\dfrac{T}{h\nu}\Delta\nu$.

Приклад 16. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+7}{3x^4+2x^2+5x+19}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$ $(n,\,m\in N)$.

Розв'язання:

а) $2x^3+3x+7\sim 2x^3$, $3x^4+2x^2+5x+19\sim 3x^4$ $(x\to\infty)$.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+7}{3x^4+2x^2+5x+19}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{3x^4}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$;

б) $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\sim a_0x^n$,

$P_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m\sim b_0x^m$ $(x\to\infty)$.Тому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{P_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, \text{ якщо } m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ якщо } m=n,\\ \infty, \text{ якщо } m<n.\end{cases}$$

Приклад 17. Користуючись правилом заміни еквівалентними нескінченно малими, знайти такі границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$ (використовували формули 8 та 7 табл. 3.3);

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{3(x-1)}-1}{\sin 2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)}{2(x-1)}=\dfrac{3}{2}$ (використовували формули 1 та 8 табл. 3.3);

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x^2)}{x^2\operatorname{arctg}^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^4}{x^2\cdot 4x^2}=\dfrac{9}{4}$ (використовували формули 1 та 5 табл. 3.3);

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left|y=x-1\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+y}-1}{\sqrt{1+y}-1}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{y}{3}}{\frac{y}{2}}=\dfrac{2}{3}$ (використовували формулу 6 табл. 3.3);

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x^2-1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\left|y=x-1\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y(y+2)}{\left(\sqrt{1+y}-1\right)^2}=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{y^2(y+2)^2}{2}}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}=8$ (використовували формули 3 та 6 табл. 3.3);

6) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{4}{x^2}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}=4$ (використовували формулу 8 табл. 3.3);

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\log_2\left(1+\dfrac{5}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\dfrac{5}{x}\cdot\log_2 e\right)=5\log_2 e$ (використовували формулу 7′ табл. 3.3);

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)\left(\ln(x+4)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)\ln\dfrac{x+4}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)\cdot\dfrac{4}{x}=8$ (використовували формулу 7 табл. 3.3);

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x+3)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x+3)\cdot x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x+3)x\cdot\dfrac{1}{2x^2}=-2$ (використовували формулу 6 табл. 3.3);

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\left(\sqrt{1+{x^2}/{16}}-1\right)}{{x^2}/{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cdot\dfrac{x^2}{2\cdot 16}}{{x^2}/{2}}=\dfrac{1}{4}$

(використовували формулу 6 табл. 3.3);

11) при знаходженні **границь степенево-показникових функцій** корисно використовувати основну логарифмічну тотожність

$$\boxed{a^b=e^{\ln a^b}=e^{b\ln a};}$$

$$\lim_{x\to+0}\left(1+\sqrt{\operatorname{tg}x}\right)^{\left(\sin 2\sqrt{x}\right)^{-1}}=\lim_{x\to+0}e^{\frac{\ln\left(1+\sqrt{\operatorname{tg}x}\right)}{\sin 2\sqrt{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}=e^{\frac{1}{2}},$$

тут була застосована властивість показникової функції

$\lim\limits_{x\to x_0}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$ та формули 1, 2, 7 табл. 3.3);

12) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{5}{x}\ln\cos\sqrt{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{5}{x}\ln\left(1+\left(\cos\sqrt{x}-1\right)\right)}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{5}{x}\left(\cos\sqrt{x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{5}{x}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)}=e^{-\frac{5}{2}}$ (використовували формули 3 та 7 табл. 3.3);

13) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}\ln\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\ln x}}=e$

(використовували формули 1 та 8 табл. 3.3);

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+4}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}2x\cdot\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\cdot(-3)}{x}}=e^{-6}$ (використовували формулу 7 табл. 3.3);

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}}-\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}\right).$

У виразі, що знаходиться у дужках, треба зберігати нескінченно малі до другого порядку мализни відносно $\frac{1}{x}$ $(x \to +\infty)$. Маємо

$$\sqrt{1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x} \sim \frac{1}{2x^2}; \quad \sqrt{\cos\frac{1}{x}}-1=$$

$$=\sqrt{1+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}-1 \sim \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{x}-1\right) \sim \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=-\frac{1}{4x^2}\ (x \to +\infty).$$

Отже,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}}-\sqrt{\cos\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}}-1-\left(\sqrt{\cos\frac{1}{x}}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}\right)=\frac{3}{4};$$

16 а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[6]{1-3x}}{\ln(1+2x)-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-\left(\sqrt[6]{1-3x}-1\right)}{\ln(1+2x)-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\left(1-\frac{1}{2}x\right)}{2x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x}{x}=\frac{3}{2}.$$

Тут заміна в алгебраїчній сумі еквівалентними нескінченно малими привела до правильного результату (після зведення подібних членів чисельник і знаменник мають такий порядок мализни, як і кожен доданок).

16 б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)(1+x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}=-1.$$

Заміна еквівалентними нескінченно малими тут некоректна: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+(-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$, що суперечить здобутому вище результату.

Не допомагає розв’язанню прикладу і використання асимптотичних рівностей $\ln(1+x)=x+o(x)$, $\ln(1-x)=-x+o(x)$ $(x\to 0)$.

Дійсно, $\ln(1+x)+\ln(1-x)=o(x)$ і жодної інформації про порівняння функції $\ln(1+x)+\ln(1-x)$ з функцією x^2 немає.

Зауваження

1. Слід відзначити, що з формули 7 табл. 3.3 еквівалентних нескінченно малих випливає асимптотична рівність:

$$\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\sim\ln n,\ n\to+\infty.}$$

2. Часто питання про те, чи є послідовність a_n нескінченно малою, можна розв’язати за допомогою такої ознаки:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{gathered}a_n\to 0,\\ n\to+\infty.\end{gathered}}$$

Розглянемо, наприклад, послідовність $a_n=\dfrac{n^{\alpha}}{d^n}$ $(d>1,\ \alpha>0)$.

Маємо $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}\cdot d^n}{n^{\alpha}\cdot d^{n+1}}=\frac{1}{d}\cdot\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}=\frac{1}{d}$

і, отже, на основі сформульованої вище ознаки отримуємо

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\alpha}}{d^n}=0,\quad \begin{gathered}d>1,\\ \alpha>0.\end{gathered}}$$

Цей результат означає, що послідовність $\{d^n\}$ $(d>1)$ зростає при $n\to+\infty$ швидше, ніж послідовність $\{n^{\alpha}\}$ $(\alpha>0)$. Наприклад, $(1.001)^n>n^{1000}$ при достатньо великих значеннях n.

3.8. Виведення формули для e^{a+ib}

Нехай $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ є комплексною функцією дійсної змінної. Тоді:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A_2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_1+iA_2$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f_1(x)+if_2(x)\right|=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\arg\left(f_1(x)+if_2(x)\right)=\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

Приклад 18. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+i\frac{x-1}{x^2+2}\right)$.

Розв'язання

Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+i\frac{x-1}{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+i\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2+2}=1-\frac{i}{2}$.

Приклад 19. Знайти границю $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n$.

Розв'язання: $1+\frac{a+ib}{n}=1+\frac{a}{n}+i\frac{b}{n}$, отже,

$$\left|1+\frac{a+ib}{n}\right|=\sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}}=\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\arg\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)=\operatorname{arctg}\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}=\operatorname{arctg}\frac{b}{a+n}$$

(при великих n число $1+\frac{a+ib}{n}$ знаходиться або в першому, або в четвертому координатному куті).

Тому $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|1+\frac{a+ib}{n}\right|^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=e^a$,

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\arg\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\arg\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\operatorname{arctg}\frac{b}{a+n}=b.$$

Таким чином, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n=e^a\cdot(\cos b+i\sin b)$.

Якщо $a\in R$, то число e^a було визначено в підрозд. 3.7 співвідношенням

$$e^a=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n.$$

Аналогічним чином вводиться число e^{a+ib}:

$$e^{a+ib} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n.$$

Тоді, використовуючи результат прикладу 19, приходимо до співвідношення Ейлера

$$\boxed{e^{a+ib} = e^a\left(\cos b + i\sin b\right).}$$

3.9. Асимптоти графіка функції

При побудові графіка функції $f(x)$ велику роль відіграють прямі, до яких графік необмежено наближається за умови, що відстань від точки графіка $(x;\, f(x))$ до початку координат прямує до $+\infty$. Ці прямі називаються **асимптотами графіка функції.**

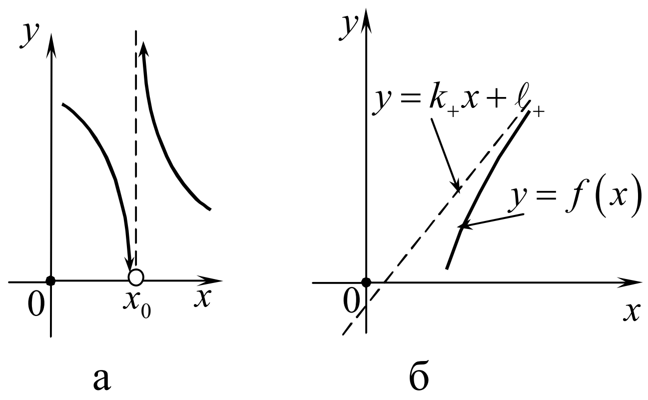


Рис. 3.10

Якщо $f(x)\to+\infty(-\infty)$ при x, що прямує до x_0 зліва чи справа, то пряма $x = x_0$ є **вертикальною асимптотою** графіка функції $f(x)$ (рис. 3.10,а). Якщо $f(x) = k_+x+\ell_+ + o(1) \quad (x\to+\infty)$, то пряма $y = k_+x+\ell_+$ є **правою похилою асимптотою** графіка функції $f(x)$ (рис. 3.10, б).

Якою б вузькою не була смужка, що оточує праву похилу асимптоту, є такий окіл $U(+\infty)$, що для $x\in U(+\infty)$ графік функції цілком міститься у цій смужці.

Теорема. Пряма $y = k_+x+\ell_+$ є правою похилою асимптотою графіка функції $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли існують скінченні границі

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \ \ell_+ = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_+ \cdot x\right).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_+, \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_+ x\right) = \ell_+ \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) = k_+ x + \ell_+ + o(1), \\ x \to +\infty, \\ y = k_+ x + \ell_+ - \text{ права} \\ \text{похила асимптота} \end{array}}$$

Доведення 1. Якщо пряма $y = k_+ x + \ell_+$ є правою похилою асимптотою графіка функції $f(x)$, то $\dfrac{f(x)}{x} = k_+ + \dfrac{\ell_+}{x} + \dfrac{o(1)}{x}$. Отже, існує границя $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Оскільки $f(x) - k_+ \cdot x = \ell_+ + o(1)$, то $\ell_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_+ \cdot x\right)$.

2. З існування скінченних границь $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\ell_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_+ \cdot x\right)$ випливає існування у графіка функції $f(x)$ похилої асимптоти при $x \to +\infty$. Дійсно, з існування другої границі випливає, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_+ \cdot x - \ell_+\right) = 0$. Це означає, що $f(x) = k_+ \cdot x + \ell_+ + o(1)$, $x \to +\infty$ і, отже, пряма з рівнянням $y = k_+ \cdot x + \ell_+$ є правою похилою асимптотою графіка функції $f(x)$.

Якщо $f(x) \to \ell_+ (x \to +\infty)$, то пряма $y = \ell_+$ є **правою горизонтальною асимптотою** графіка функції $f(x)$ (рис. 3.10,в).

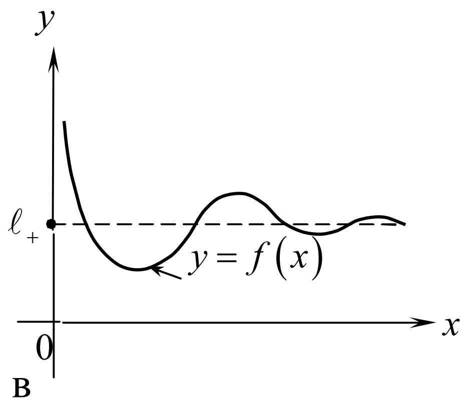


Рис. 3.10

Аналогічним чином визначається **ліва похила асимптота.**

Приклад 20. Якщо врахувати обмежену стислість газу і зменшення тиску за рахунок притягання молекул, то з рівняння ідеального газу отримаємо таку залежність між об'ємом V визначеної маси газу та тиском p:

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

де a – стала, що характеризує сили молекулярного притягання, а b – стала, що описує розміри молекул.

Графік цієї функції має три асимптоти: $V=0$, $V=b$, $p=0$. Фізичний зміст має та ділянка графіка, яка відповідає значенням $V>b$ (рис. 3.11).

Приклад 21. Знайти асимптоти кривих: 1) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{1+x^2}+2x$.

Розв'язання. 1) Оскільки $|f(x)|\to+\infty$ при $x\to1$, то рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x=1$.

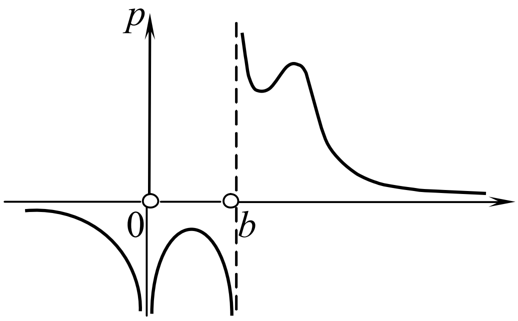


Рис. 3.11

При цьому

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty.$$

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=1,$$

$$\ell=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

Отже, пряма $y=x+1$ є похилою асимптотою (рис. 3.12).

Інакше

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=$$

$$=x+1+\frac{1}{x-1}=x+1+o(1)$$

при $x\to\infty$ і, отже, пряма $y=x+1$ є похилою асимптотою графіка.

2) Оскільки функція $\sqrt{1+x^2}+2x$ визначена на всій числовій осі, то вертикальних асимптот крива не має. Перейдемо до визначення похилих асимптот

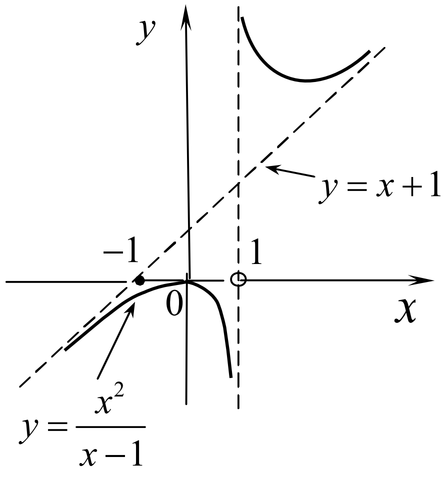


Рис. 3.12

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+2\right)}{x}=3,$$

$$\ell_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0\,.$$

Отже, права похила асимптота має рівняння $y = 3x$;

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-2\right)}{x} = 1,$$

$$\ell_- = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0\,.$$

Таким чином, рівняння лівої похилої асимптоти буде мати вигляд $y = x$ (рис. 3.13).

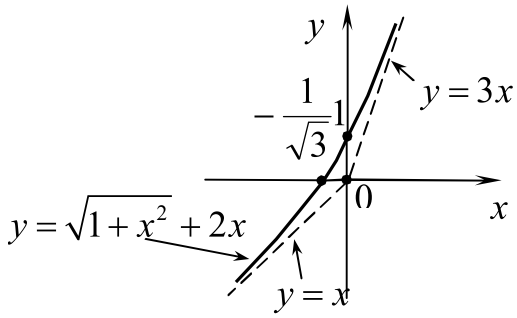


Рис. 3.13

ВПРАВИ

Знайти границі послідовностей:

1.1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-3}{1+5n}$. **1.2.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^3-n^3}{n+(n-1)^2}$. **1.3.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n+b^n}{3a^n+4b^n}$ $\left(a, b>0\right)$.

1.4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt{n+10}}$. **1.5.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\left(n^2+1\right)}{\ln n}$. **1.6.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}$.

1.7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{(n+1)\left(1-n/3\right)}$.

Знайти границі:

2.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3}{x+2^x}$. **2.2.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2^{\frac{1}{x}}+\cos x\right)$. **2.4.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}$. **2.5.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^3+8}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$. **2.7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x+3}}{x+3x^2}$. **2.8.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$. **2.10.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+6}$.

Знайти однобічні границі:

3.1. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$. **3.2.** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. **3.3.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{2x+3}{x-2}$. **3.4.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}\operatorname{tg}x$.

3.5. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(2^{\frac{1}{x}}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)$. **3.6.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{2x+7}{x(x-1)^2}$.

Знайти границі:

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^3+2x^2+x}+x\cos x\right)$. **4.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^3+2x^2+x}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3\cdot 5^x+4}{7\cdot 5^x-9}+\dfrac{x+1}{x+2}\right)$. **4.4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x-2}+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$.

4.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cos x}{2^x}+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x+3}\right)$. **4.6.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot e^{nx}+g(x)}{e^{nx}+1}$.

4.7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^x\cdot x^{2n}+x^2+1}{x^{2n}+1}$. **4.8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+a\sin x}{x+b\cos x}$.

Показати, що при $x\to 0$:

5.1. $\sin x+\operatorname{tg}x\sim 2x$. **5.2.** $\operatorname{tg}x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$. **5.3.** $\sqrt[3]{x+8}-2\sim\dfrac{x}{12}$.

5.4. $x\sqrt[3]{x}+\sin 2x\sim 2x$. **5.5.** $1-\cos(1-\cos x)\sim\dfrac{x^4}{8}$. **5.6.** $\ln\cos x\sim-\dfrac{x^2}{2}$.

Знайти границі:

6.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin x^2}+\dfrac{1-\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}x}}\right)$.

6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}\left(\sin\left(\operatorname{tg}x\right)\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sin x\right)\right)$. **6.3.** $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

6.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)+\ln(1-2x)}{x^2}$. **6.5.** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1-\cos x}}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2\cos x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **6.7.** $\lim\limits_{n\to +\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)\ (a>0)$.

6.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{x\operatorname{tg}bx}$. **6.9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin ax)+\ln(1+\sin bx)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

6.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4}$. **6.11.** $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\dfrac{x^2+3x}{x^2+1}}\right)$.

6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\sin 5x)}{x^2}$.

Знайти границі:

7.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+3\operatorname{tg}x)}{\arcsin^2 6x}$. **7.2.** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{e^{\sin x}-1}\cdot\sqrt[6]{\operatorname{tg}x}}$. **7.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+2x^2}{\operatorname{tg}^2\left(x/3\right)}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2\sin x}{x\sin 3x}$. **7.5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\arcsin(x-1)}$. **7.6.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(2-x)}{x^2-4}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}3x)}{3^{\sin x}-1}$. **7.8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1+\sin 2x)}{5^{\operatorname{tg}x}-1}$. **7.9.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{3/x}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{5x+1}$. **7.11.** $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}}$. **7.12.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\cos\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^{2x}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(2-\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}$. **7.14.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(\sin x)\right)^{\frac{1}{x^2}}$. **7.15.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+2x}-\right.$ $\left.-\sqrt[5]{x^5-x^2+1}\right)$. **7.16.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+\sin 2x)}{\left(e^{tgx}-1\right)^2}$. **7.17.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\frac{3}{1-4\ln x}}$. **7.19.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(2+\sqrt{x}\right)}{\ln\left(5+\sqrt[5]{x}\right)}$. **7.20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4\cos x+\sin^3 x}{x-\sqrt{1+x^3}}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 4x}$. **7.22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x\sin x}{\arcsin 3x}$. **7.23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1-\sin x}{\ln(1+x)}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\cos\dfrac{\pi}{x}$. **7.25.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{x^2}$.

Знайти асимптоти заданих кривих:

8.1. $y=\frac{2}{(x+4)^2}$. **8.2.** $y=\frac{3x^2+1}{2-x}$. **8.3.** $y=\frac{x^2-1}{x-3x^2}$. **8.4.** $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-8}}$.

8.5. $y=(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}+3$. **8.6.** $y=(1-x)e^{\frac{1}{x}}$. **8.7.** $y=\frac{x^2}{x+1}$. **8.8.** $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

8.9. $y=x\cdot\operatorname{arctg}x$. **8.10.** $y=\sqrt[3]{x(x+4)^2}$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\frac{2}{5}$. **1.2.** 3. **1.3.** $\frac{1}{4}$, якщо $a<b$, $\frac{1}{3}$, якщо $a>b$, $\frac{2}{7}$, якщо $a=b$.
1.4. 0. **1.5.** 0. **1.6.** 1. **1.7.** $-\frac{3}{2}$.

2.1. $\frac{11}{6}$. **2.2.** 1. **2.3.** $\sqrt{2}+\cos 2$. **2.4.** $\frac{3}{7}$. **2.5.** $\frac{1}{48}$. **2.6.** $\frac{1}{2}$. **2.7.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2.8. $2\sqrt{3}$. **2.9.** $-\frac{1}{4}$. **2.10.** $\frac{2}{5}$.

3.1. $\frac{\pi}{2}$. **3.2.** $f(0+)=\frac{\pi}{2}, f(0-)=-\frac{\pi}{2}$. **3.3.** $f(2+)=+\infty, f(2-)=-\infty$.
3.4. $f\left(\frac{\pi}{2}+\right)==-\infty,\ f\left(\frac{\pi}{2}-\right)=+\infty$. **3.5.** $f(0+)=+\infty, f(0-)=-\infty$.
3.6. $+\infty$.

4.1. -2. **4.2.** 0. **4.3.** $f(+\infty)=\frac{10}{7}$, $f(-\infty)=\frac{5}{9}$. **4.4.** 1. **4.5.** 1. **4.6.** $f(x)$, якщо $x>0$; $g(x)$, якщо $x<0$; $\frac{f(0)+g(0)}{2}$, якщо $x=0$. **4.7.** 2^x, якщо $x>1$; x^2+1, якщо $x<1$; 2, якщо $x=1$. **4.8.** 1.
6.1. $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{12}$. **6.2.** 1. **6.3.** -2. **6.4.** -4. **6.5.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **6.6.** $\frac{3}{2}$. **6.7.** $\ln a$.
6.8. $-\frac{a^2}{2b}$. **6.9.** $a+b$. **6.10.** -2. **6.11.** $-\frac{1}{2}$. **6.12.** 5.

7.1. $\frac{1}{4}$. **7.2.** $\sqrt{2}$. **7.3.** 18. **7.4.** $\frac{1}{3}$. **7.5.** 2. **7.6.** $-\frac{1}{4}$. **7.7.** $\frac{3}{\ln 3}$.
7.8. $\frac{2}{\ln 3 \ln 5}$. **7.9.** e^{6}. **7.10.** e^{-5}. **7.11.** e^{-1}. **7.12.** e^{-a^2}. **7.13.** $e^{-\sqrt{2}}$.
7.14. $e^{-\frac{1}{2}}$. **7.15.** ∞. **7.16.** 2. **7.17.** 2. **7.18.** $e^{-\frac{3}{4}}$. **7.19.** 0. **7.20.** -2.
7.21. $\frac{9}{8}$. **7.22.** $\frac{2}{3}$. **7.23.** $-\frac{2}{3}$. **7.24.** $-\frac{\pi^2}{2}$. **7.25.** 1.

8.1. $x=-4,\ y=0$. **8.2.** $x=2,\ y=-3x-6$. **8.3.** $x=0,\ x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{3}$.
8.4. $x=8,\ y=x+4$. **8.5.** $y=3$, якщо $x\to+\infty$. **8.6.** $x=0,\ y=x+1$.
8.7. $x=-1,\ y=x-1$. **8.8.** $y=1$. **8.9.** $y=\pm\frac{\pi}{2}x-1$. **8.10.** $y=x+\frac{8}{3}$.

Розділ 4
НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Як відомо, будь-яке фізичне середовище являє собою сукупність великої кількості частинок. Макроскопічний опис деякого явища засновано на тому, що нехтують відстанями між частинками порівняно з характерними розмірами тієї частини простору, де проходить явище. При такому розгляді маса вважається розподіленою без усяких просвітів неперервно в зайнятій середовищем частині простору.

4.1. Неперервні функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0.

Припустимо, що значення функції $f(x)$ $(x \in U(x_0))$ мало відрізняються від $f(x_0)$, якщо x мало відрізняється від x_0. В цьому випадку будемо вважати, що значення функції змінюються в околі $U(x_0)$ без стрибків, тобто неперервно. Прикладом неперервної функції може служити закон руху $s = f(t)$ матеріальної точки, який пов'язує пройдений точкою шлях з часом. Оскільки час і простір неперервні, то закон руху ставить у відповідність малій зміні часу малу зміну пройденого шляху.

Перейдемо до точних означень.

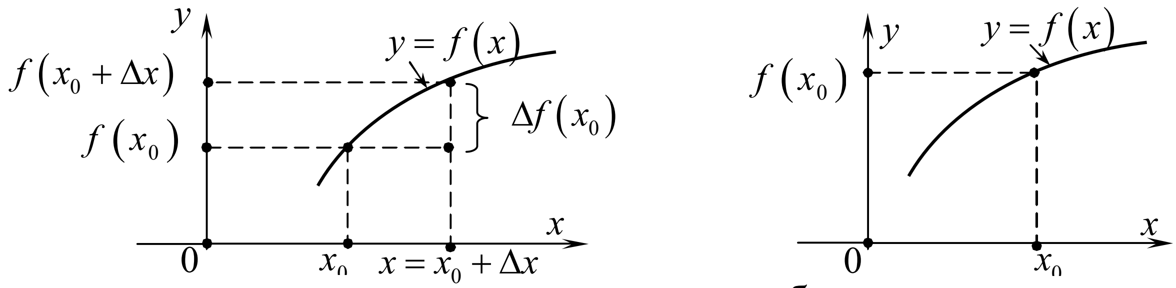
Означення 1. Будь-яке число $x \in U(x_0)$ може бути зображене у вигляді $x = x_0 + \Delta x$, де додатнє або від'ємне число Δx називається **приростом аргумента.**

Означення 2. Приростом $\Delta f(x_0)$ **функції** $f(x)$ у точці x_0, який відповідає приросту Δx незалежної змінної, назвемо число (рис. 4.1, а)

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Приклад 1. Знайти приріст функції x^3 у точках $x = -2$; $x = 0$.

Розв'язання: $\Delta f(-2) = f(-2 + \Delta x) - f(-2) = (-2 + \Delta x)^3 - (-2)^3 =$
$= 12\Delta x - 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\Delta f(0) = f(\Delta x) - f(0) = (\Delta x)^3$.



а б

Рис. 4.1

Означення 3. Функція $f(x)$ називається **неперервною** у точці x_0, якщо

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.}$$

З означення 3 випливає, що функція $f(x)$ **неперервна** у точці x_0, якщо границя цієї функції у точці x_0 існує і дорівнює значенню функції у точці x_0 (рис. 4.1, б)

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

Дійсно, оскільки $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Отже,

$f(x)$ неперервна в точці x_0	$\Leftrightarrow$	$\forall V\left(f(x_0)\right)\ \exists U(x_0):$ $x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \in V\left(f(x_0)\right).$

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої множини (наприклад, інтервалу $(a; b)$), то кажуть, що функція неперервна на цій множині (на інтервалі $(a; b)$).

Відзначимо такі важливі результати;

1) $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці x_0	$\Rightarrow$	$f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x_0) \neq 0\right)$ неперервні у точці x_0;

2) Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці u_0, а функція $u=g(x)$ неперервна у точці x_0, то складена функція $f(g(x))$ неперервна у точці x_0. Звідси випливає, що

$$\boxed{\text{елементарні функції неперервні в області визначення.}}$$

Приклад 2. Покажемо на підставі означення 3, що функції $\sin x$ та a^x є неперервними для всіх значень x.

Розв'язання: 1) $f(x)=\sin x \Rightarrow \Delta f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0 = = 2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$, якщо $\Delta x \to 0$; 2) $f(x)=a^x \Rightarrow \Rightarrow \Delta f(x_0)=a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{\Delta x}-1\right) \to 0$, оскільки функція $a^{\Delta x}-1$ є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$.

4.2. Розривні функції

Якщо функція $f(x)$ не є неперервною у точці x_0, то кажуть, що функція $f(x)$ **розривна** (має розрив) у цій точці.

Точка x_0 називається точкою **усувного** розриву функції $f(x)$, якщо

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0).}$$

Така назва пояснюється тим, що, змінюючи значення функції $f(x)$ лише в одній точці, функцію можна зробити неперервною.

Приклад 3. Функція $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ визначена в проколеному околі точки $x_0=1$. Визначити функцію у точці x_0 так, щоб функція $f(x)$ була неперервною у точці x_0.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$.

Звідси виходить, що функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, \text{ якщо } x \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, \quad \text{якщо } x = 1 \end{cases}$ неперервна у точці $x_0 = 1$.

Точка x_0 називається точкою **розриву першого роду,** якщо права і ліва границі в цій точці існують, але

$$\boxed{\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x).}$$

Число $h(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ називається **стрибком** функції у точці x_0.

Приклад 4. Знайти точки розриву функції $f(x) = 2^x \cdot \Pi(x)$ (рис. 4.2).

Розв'язання. Функція має розриви першого роду в точках $x = \pm1$:

1) $h(-1) = \lim\limits_{x\to-1+0} 2^x \cdot \Pi(x) - \lim\limits_{x\to-1-0} 2^x \cdot \Pi(x) = 2^{-1} - 0 = \dfrac{1}{2}$;

2) $h(1) = \lim\limits_{x\to1+0} 2^x \cdot \Pi(x) - \lim\limits_{x\to1-0} 2^x \cdot \Pi(x) = 0 - 2 = -2$.

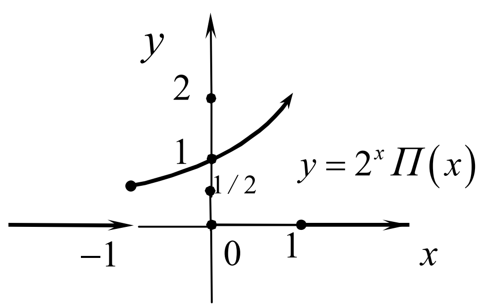


Рис. 4.2

Розриви усувні та першого роду іноді називають **простими розривами.**

Якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існує або є нескінченною, то точка x_0 називається точкою **розриву другого роду.**

Приклад 5. Визначити характер точок розриву функції $f(x) = \dfrac{1}{2 - e^{1/x}}$.

Розв'язання. Ця функція неперервна всюди, крім точок 0 і $1/\ln 2$. Точка $x=0$ є точкою розриву першого роду зі стрибком

$$h(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2-e^{1/x}}-\lim_{x\to 0-}\frac{1}{2-e^{1/x}}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

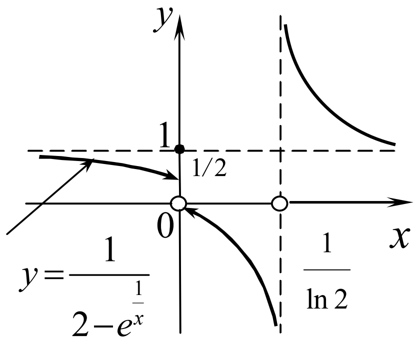


Рис. 4.3

Точка $x=\dfrac{1}{\ln 2}$ є точкою розриву другого роду:

$$\lim_{x\to\frac{1}{\ln 2}+0}\frac{1}{2-e^{1/x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to\frac{1}{\ln 2}-0}\frac{1}{2-e^{1/x}}=-\infty.$$

Ескіз графіка цієї функції поданий на рис.4.3. Розривними функціями описуються моделі багатьох процесів, що проходять у навколишньому світі.

Так, наприклад, поблизу температури розтавання льоду кількість теплоти, що знаходиться у грамі води (льоду), змінюється стрибкоподібно.

4.3. Властивості неперервної функції. Метод поділення відрізка навпіл

1. Локальні властивості (властивості в малому околі фіксованої точки):

1) $\boxed{f(x) \text{ неперервна у точці } x_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\exists U(x_0): \forall x\in U(x_0)\Rightarrow |f(x)|\le M}$;

2) $\boxed{f(x) \text{ неперервна у точці } x_0,\ f(x_0)\ne 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\exists U(x_0): \forall x\in U(x_0)\Rightarrow f(x)\cdot f(x_0)>0}$

(порівняйте з твердженням теореми 2 підрозд. 3.6).

2. Глобальні властивості (властивості на всій області визначення).

Означення 1. Функція $f(x)$ називається **неперервною** на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a;b)$, а також

$$f(a)=\lim_{x\to a+0} f(x),\ f(b)=\lim_{x\to b-0} f(x).$$

Важливою властивістю неперервної на відрізку $[a;b]$ функції є те, що сукупність її значень являє собою відрізок.

З цієї властивості випливають такі результати:

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то:

1) вона досягає на ньому як найбільшого $(\max\limits_{x\in[a;b]} f(x))$, так і найменшого $(\min\limits_{x\in[a;b]} f(x))$ своїх значень M і m. Цей факт ілюструє (рис. 4.4):

$$\boxed{\exists d_1, d_2 \in [a;b] : \forall x \in [a;b] \Rightarrow m = f(d_1) \le f(x) \le f(d_2) = M\ ;}$$

2) $\boxed{\forall \gamma \in (m;M)\ \exists \alpha \in [a\,;b] : f(\alpha) = \gamma\ ;}$

3) $\boxed{f(a)\cdot f(b) < 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\exists c \in (a;b) : f(c) = 0\,.}$

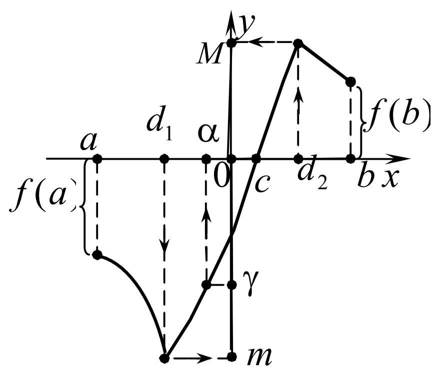


Рис. 4.4

На останньому результаті засновані методи відшукування коренів рівняння

$$f(x)=0 \qquad (1).$$

Розглянемо найпростіший з них.

Метод поділення відрізка навпіл

Цей метод полягає в наступному. Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$, а рівняння (1) має на цьому відрізку єдиний корінь c. Поділимо відрізок навпіл точкою $c_0=(a+b)/2$.

Якщо $f(c_0)=0$, то c_0- шуканий корінь, якщо $f(c_0)\neq 0$, то функція $f(x)$ змінює знак або на відрізку $[a;c_0]$або на відрізку $[c_0;b]$. Обираємо той з цих відрізків, на якому функція $f(x)$змінює знак, та позначаємо його через $[a_1;b_1]$. Поділимо цей відрізок навпіл точкою c_1 та позначимо $[a_2;b_2]$той з відрізків, на якому функція $f(x)$ змінює знак. Якщо продовжити цей процес, то можна знайти корінь рівняння (1) як завгодно точно.

Приклад 6. Знайти корінь рівняння $x^3+x^2-3=0$ на $[a=1;b=2]$.

Розв’язання: $f(a)=f(1)=-1<0$, $f(b)=f(2)=9>0$;

$c_0=(a+b)/2=1.5,\ \ f(c_0)=f(1.5)=2.625>0 \Rightarrow [a_1=1;b_1=1.5]$;

$c_1=(a_1+b_1)/2=1.25,\ \ f(c_1)=f(1.25)>0 \Rightarrow [a_2=1;b_2=1.25]$;

$c_2=(a_2+b_2)/2=1.125$, $f(c_2)=f(1.125)<0 \Rightarrow [a_3=1.125;b_3=1.25]$;

$c_3=(a_3+b_3)/2=1.1875, |c-c_3| < (b_3-a_3)/2=0.0625 \Rightarrow c\approx 1.1875\pm 0.0625$.

Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) і є неперервною на відрізку $[a;b]$, то обернена для $f(x)$ функція $g(y)$ зростає (спадає) і є неперервною на відрізку $\left[f(a);f(b)\right]$ $\left(\left[f(b);f(a)\right]\right)$.

Зауваження. Комплексна функція дійсної змінної $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ неперервна у точці x_0 (на проміжку), якщо у цій точці (на цьому проміжку) неперервні функції $f_k(x)$ $(k=1,2)$.

Приклад 7. Функція $x\cos x+i\sin x$ неперервна всюди, а функція $\dfrac{\sin x}{x}+i\dfrac{1}{x-1}$ не є неперервною у точках $x=0$ (точка усувного розриву) і $x=1$ (точка розриву другого роду).

Означення 2. Функція $f(x)$ називається **кусково-неперервною** на відрізку $[a;b]$, якщо вона має на цьому відрізку або усувні, або розриви першого роду в скінченній кількості точок (будучи неперервною у решти).

Інакше, функція $f(x)$ є кусково-неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо його можна поділити на скінченну кількість відрізків так, що всередині кожного з цих відрізків функція $f(x)$ є неперервною і має скінченні границі при наближенні x до меж цього відрізка.

4.4. Многочлен найкращого наближення

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді при будь-якому n існує єдиний многочлен $P_n(x)$, який серед усіх многочленів n-го степеня найменше усувається від $f(x)$ у тому розумінні, що

$$d_n = \max_{x\in[a;\,b]}\left|f(x)-P_n(x)\right| \le \max_{x\in[a;\,b]}\left|f(x)-Q_n(x)\right|,$$

де $Q_n(x)$ - довільний многочлен n- го степеня. Цей многочлен $P_n(x)$ називається многочленом **найкращого наближення.**

Зрозуміло, що $d_{n+1} \le d_n$. Можна довести, що $d_n \to 0$, $n \to +\infty$. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти многочлен $T_m(x)$, степінь m якого залежить від ε, такий, що в усіх точках відрізка $[a;\,b]$ (рівномірно) виконується нерівність

$$\left|f(x)-T_m(x)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \max_{x\in[a;\,b]}\left|f(x)-T_m(x)\right| < \varepsilon.$$

Іншими словами, який би не взяти окіл $V_\varepsilon(f(x))$ неперервної на відрізку $[a;\,b]$ функції $f(x)$, завжди знайдеться такий многочлен $T_m(x)$, що

$$T_m(x) \in V_\varepsilon(f(x))\left(x \in [a;\,b]\right).$$

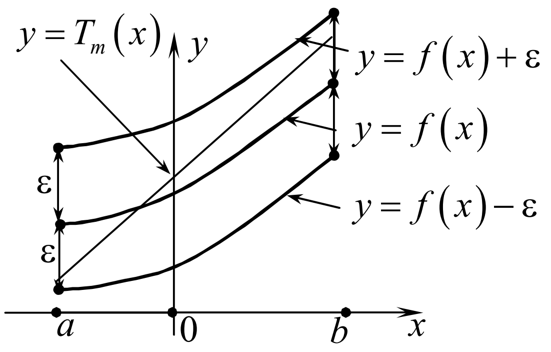


Рис. 4.5

На рис. 4.5 наведено графік функції $f(x)$ і вказано $V_\varepsilon(f(x))$ окіл цієї функції. У криволінійну смужку $V_\varepsilon(f(x))$ ширини 2ε потрапляє графік многочлена $T_m(x)$.

ВПРАВИ

Знайти точки розриву і дослідити їх характер у функцій:

1.1. $f(x)=\begin{cases} Ax, \text{ якщо } x\in[1;+\infty), \\ x^2-2x, \text{ якщо } x\in(-\infty;1). \end{cases}$

1.2. $f(x)=\begin{cases} A\cos x, \text{ якщо } x\in[0;+\infty), \\ x+1, \text{ якщо } x\in(-\infty;0). \end{cases}$

1.3. $f(x)=\begin{cases} 1/x^3, \text{ якщо } x\in[1;+\infty), \\ Ax^2, \text{ якщо } x\in(-\infty;1). \end{cases}$ **1.4.** $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n}\cdot\sin(\pi x/2)+x^2}{x^{2n}+1}$.

1.5. $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x\in(-\infty;\pi/2\ ), \\ Ax, \text{ якщо } x\in[\pi/2;+\infty). \end{cases}$

Чому мають дорівнювати функції:

2.1. $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, **2.2.** $\dfrac{\sin(x\sin 2x)}{x^2}$, **2.3.** $\dfrac{\mathrm{tg}2x}{x}$, **2.4.** $\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$
у точці $x=0$, щоб вони були неперервними в цій точці?

Дослідити точки розриву функцій:

3.1. $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$. **3.2.** $\lg\dfrac{1}{|x|}$. **3.3.** $\dfrac{x+2}{|x+2|}x$. **3.4.** $x^2\cdot \mathit{\Pi}(x)$. **3.5.** $\sin\pi x\cdot \mathit{\Pi}(x)$.

3.6. $\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$. **3.7.** $\dfrac{2x+3}{x(x-1)(x+2)^2}$. **3.8.** $\mathrm{tg}x$. **3.9.** $\lg\sin\pi x$. **3.10.** $2^x\cdot \boldsymbol{1}(x)$.

3.11. $\sin x\cdot\boldsymbol{1}(x)$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $x=1-$ точка розриву 1-го роду, якщо $A\neq-1$, $h(1)=A+1$; $f(x)$ неперервна, якщо $A=-1$. **1.2.** $x=0-$ точка розриву 1-го роду, якщо $A\neq1$, $h(0)=A-1$; $f(x)$ неперервна, якщо $A=1$. **1.3**. $x=1-$ точка розриву 1-го роду, якщо $A\neq1$, $h(1)=1-A$; $f(x)$ неперервна, якщо $A=1$. **1.4**. $x=-1-$ точка розриву 1-го роду,

$h(-1)=2$, $f(-1)=0$. **1.5.** $x=\frac{\pi}{2}$–точка розриву 1-го роду, якщо $A\neq\frac{2}{\pi}$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=A-1$; $f(x)$ неперервна, якщо $A=\frac{2}{\pi}$.

2.1. $\frac{1}{2}$. **2.2.** 2. **2.3.** 2. **2.4.** 5.

3.1. $x=0$ – точка розриву 1-го роду, $h(0)=\pi$. **3.2.** $x=0$ – точка розриву 2-го роду. **3.3.** $x=-2$ – точка розриву 1-го роду, $h(-2)=-4$. **3.4.** $x=-1$ – точка розриву 1-го роду, $h(-1)=1$; $x=1$ – точка розриву 1-го роду, $h(1)=-1$. **3.5.** неперервна. **3.6.** $x=-1$ – точка розриву 2-го роду. **3.7.** $x_1=0,$ $x_2=1,$ $x_3=-2$ – точки розриву 2-го роду. **3.8.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,$ $n\in Z$ – точки розриву 2-го роду. **3.9.** $x=n,$ $n\in Z$ – точки розриву 2-го роду. **3.10.** $x=0$ – точка розриву 1-го роду, $h(0)=1$. **3.11.** неперервна.

Розділ 5
ПОХІДНА

Одне з основних понять природознавчих наук – поняття похідної – виникло в процесі розв'язання двох практично важливих задач: задачі про визначення швидкості при неперервному русі і задачі про проведення дотичної до лінії. Тут, як і в інших прикладних задачах, наочно проявляється таке: практика приводить до деякого поняття (наприклад швидкості), математика чітко відзначає це поняття й виробляє метод, користуючись яким, можна доповнити експериментальне уявлення про швидкість можливістю її теоретичного обчислення.

5.1. Відносний приріст функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0.

Означення. Відносним приростом функції $f(x)$ у точці x_0 називається величина $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Приклад 1: а) нехай функція $Q(t)$ визначає кількість електрики (електричний заряд), що проходить через заданий переріз провідника за час t. Тоді за проміжок часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ через цей переріз пройде $\Delta Q(t_0)=Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)$ одиниць заряду. Тому середня сила струму дорівнює

$$i_{сер}=\frac{\Delta Q(t_0)}{\Delta t};$$

б) нехай матеріальна точка рухається вздовж осі Ox, $x(t)$ – її координата в момент часу t. Тоді середня швидкість $v_{сер}$ цієї точки на відрізку часу $[t_0; t_0+\Delta t]$ дорівнює

$$v_{сер}=\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t};$$

в) дамо геометричне тлумачення відносного приросту. Через точки $M_0\left(x_0;\ f\left(x_0\right)\right)$ і $M(x_0+\Delta x;\ f\left(x_0+\Delta x\right))$ графіка функції $f\left(x\right)$ проведемо січну $\left(M_0 M\right)$.

Припустимо, що ця січна утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\beta\left(\Delta x\right)$. Тоді з прямокутного трикутника $MM'M_0$ одержуємо $\dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}=tg\beta\left(\Delta x\right)$ (рис. 5.1).

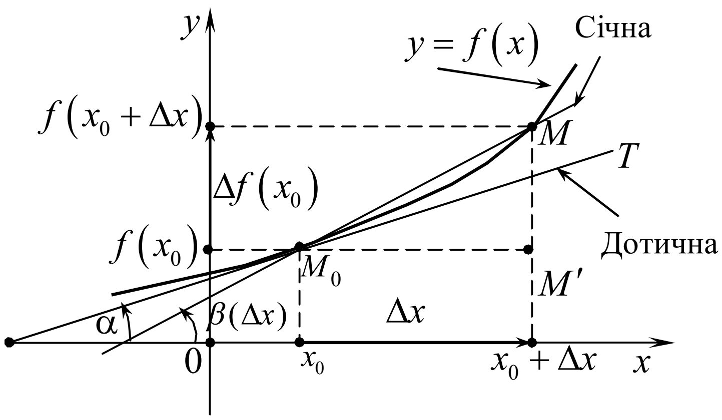


Рис. 5.1

5.2. Похідна функції

Нехай функція $f\left(x\right)$ визначена в деякому околі $U\left(x_0\right)$ точки x_0.

Означення 1. Назвемо **похідною функції** $f\left(x\right)$ у точці x_0 границю, якщо вона існує і скінченна, відносного приросту $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ при наближенні Δx до нуля. При цьому будемо казати, що функція $f\left(x\right)$ є **диференційовною** у точці x_0.

Похідну функції $f\left(x\right)$ у точці x_0 позначають одним з таких символів: $f'\left(x_0\right)$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$. Таким чином,

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}} \tag{5.1}$$

або

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1) \Leftrightarrow \Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \qquad \mathbf{(5.1')}$$

З (5.1′) виходить, що $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тобто, **якщо функція диференційовна в точці x_0, то вона є неперервною у цій точці**. Таким чином, множина диференційовних у точці x_0 функцій є лише частиною множини неперервних функцій у цій точці.

Числа $f_+'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, $f_-'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ називаються відповідно **правою та лівою похідними функції** $f(x)$ у точці x_0.

Інколи доцільно користуватись поняттям **нескінченної похідної**. А саме: якщо функція $f(x)$ неперервна у точці x_0 і $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty(-\infty)$, то вважаємо $f'(x_0) = +\infty(-\infty)$.

Аналогічним чином вносяться до розгляду **однобічні нескінченні похідні**:

$$f_+'(x_0) = +\infty(-\infty), \text{ якщо } f(x_0) = f(x_0 + 0);$$
$$f_-'(x_0) = +\infty(-\infty), \text{ якщо } f(x_0) = f(x_0 - 0).$$

Похідна (нескінченна похідна) $f'(x_0)$ існує тоді і лише тоді, коли існують і рівні між собою права та ліва похідні в цій точці $f_+'(x_0) = f_-'(x_0)$.

Відзначимо, що при $f'(x_0) = +\infty(-\infty)$ функція $f(x)$ не є диференційовною в точці x_0.

У тому разі, коли в точці x_0 існують однобічні нескінченні похідні різних знаків $f_+'(x_0) = +\infty(-\infty)$, а $f_-'(x_0) = -\infty(+\infty)$, будемо користуватись позначенням $f'(x_0) = \infty$.

Якщо функція $f(x)$ має скінченну похідну в кожній точці x деякого проміжку, то сама похідна $f'(x)$ є функцією, яка визначена на цьому проміжку. Функція $f'(x)$ $\left(\frac{df}{dx}\right)$ називається похідною функції $f(x)$. Область визначення $D_{f'}$ функції $f'(x)$ не ширше області визначення D_f функції $f(x): D_{f'} \subset D_f$.Якщо функція є диференційовною в довільній точці інтервалу $(a; b)$, то вона називається диференційовною на цьому інтервалі.

Функція $f(x)$ називається диференційовною на відрізку $[a; b]$, якщо вона диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і існують скінченні похідні $f_+'(a)$, $f_-'(b)$.

Означення 2. 1. Функція $f(x)$ називається **гладкою** на відрізку $[a;b]$, якщо вона має всередині цього відрізка неперервну похідну $f'(x)$ і $f'(a) = f'_+(a)$, $f'(b) = f'_-(b)$.

2. Функція $f(x)$ називається **кусково-гладкою** на відрізку $[a; b]$, якщо вона та її похідна $f'(x)$ є кусково-неперервними функціями (тобто цей відрізок можна розбити на скінченну кількість відрізків, в кожному з яких функція $f(x)$ є гладкою).

Приклад 2. Знайти, якщо вона існує, похідну в точці $x_0 = 0$ таких функцій:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = |x|$; 3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 4) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

5) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \neq 0, \\ 0, \text{ якщо } x = 0. \end{cases}$

Розв'язання: 1) $\Delta f(0) = (\Delta x)^2 - 0 = (\Delta x)^2 \Rightarrow \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \Delta x \to 0,$ якщо $\Delta x \to 0$. Похідна існує і дорівнює 0: $\left(x^2\right)'_{|x=0} = 0$.

2) $\Delta f(0) = |\Delta x| \Rightarrow \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \Delta x > 0; \\ -1, \text{ якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$

Похідна функції $f(x) = |x|$ у точці $x_0 = 0$ не існує, хоча сама функція є неперервною в цій точці. Але існують права та ліва похідні в точці $x_0 = 0$:

$$f_+'(0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 1, \; f_-'(0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = -1.$$

3) $\Delta f(0)=\sqrt[3]{\Delta x}-0=\sqrt[3]{\Delta x}\Rightarrow\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}\to+\infty$, якщо $\Delta x\to 0$.

Таким чином, $f'(0)=+\infty$ і функція $f(x)=\sqrt[3]{x}$ є неперервною, але не є диференційованою при $x_0=0$. Отже, $\left(D_f=(-\infty;+\infty)\neq D_{f'}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\right)$.

4) $\Delta f(0)=\sqrt[3]{(\Delta x)^2}\Rightarrow\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$.

Функція не має у точці $x_0=0$ похідної (ні скінченної, ні нескінченної).

Дійсно, $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=+\infty$, $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=-\infty$. Тобто $f'(0)=\infty$.

Функція $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ є неперервною, але не є диференційовною при $x_0=0$.

5) Функція є неперервною, але не є диференційовною при $x_0=0$. Вона не має у цій точці ні правої, ні лівої похідної (ні скінченної, ні нескінченної).

Дійсно, $f(\pm 0)=\lim\limits_{\Delta x\to\pm 0}\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}=0=f(0)$. Але границі $\lim\limits_{\Delta x\to\pm 0}\dfrac{\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to\pm 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ не існують.

Зауваження. Комплексна функція дійсної змінної $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в точці x_0 диференційо-вні функції $f_k(x)\ (k=1,2)$.При цьому вважають $f'(x_0)=f_1'(x_0)+if_2'(x_0)$.

5.3. Тлумачення похідної

5.3.1. Геометричний зміст похідної

Означення 1. Назвемо **дотичною** до графіка функції $f(x)$ у точці $M_0(x_0;\,f(x_0))$ граничне положення (якщо воно є) січної (M_0M) за умови, що точка $M(x_0+\Delta x;\,f(x_0+\Delta x))$ необмежено наближається до точки M_0 (що рівнозначно $\Delta x\to 0$).

Диференційовність функції $f(x)$ у точці x_0 рівнозначна існуванню в точці $M_0\left(x_0;\, f(x_0)\right)$ невертикальної дотичної з кутовим коефіцієнтом $tg\,\alpha = f'(x_0)$ (α – кут нахилу дотичної (M_0T) з додатним напрямом осі Ox (див. рис. 5.1)).

Пояснимо це докладніше.

Нагадаємо, що $tg\,\beta(\Delta x) = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, де $\beta(\Delta x)$ – кут нахилу січної (M_0M) з додатним напрямом осі Ox (див. приклад 1 в) підрозд. 5.1).

Якщо перейти до границі при $\Delta x \to 0$ в попередній рівності, то отримаємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\left(\beta(\Delta x)\right) = tg\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)\right) = tg\,\alpha = f'(x_0)$ (обидві границі існують). Отже, існує граничне положення січної, причому тангенс кута нахилу дотичної дорівнює $f'(x_0)$.

Як відомо з аналітичної геометрії, рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k, має вигляд $y - y_0 = k\cdot(x - x_0)$. Коли функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в точці $M_0\left(x_0;\, f(x_0)\right)$ $k = f'(x_0)$, і тому **рівняння дотичної** набуває вигляд:

$$\boxed{T:\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Пряму, яка проходить через точку дотику $M_0\left(x_0;\, f(x_0)\right)$ перпендикулярно дотичній до графіка функції $f(x)$ в цій точці, назвемо **нормаллю**. Якщо врахувати, що кутові коефіцієнти дотичної і нормалі задовольняють умові $k_{дот}\cdot k_{нор} = -1$, дістанемо **рівняння нормалі**:

$$\boxed{N:\ y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x) = x^3 - 4x$ у точці $x_0 = 1$. Дати геометричне тлумачення отриманому результату. Скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв’язання. Знайдемо відносний приріст у точці $x_0 = 1$:

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \frac{(1+\Delta x)^3 - 4(1+\Delta x) - (1-4)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}.$$

Отже, $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x}=-1$. Таким чином, тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції у точці $M_0(1;-3)$ дорівнює -1. Це означає, що дотична утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\dfrac{3\pi}{4}$ (рис. 5.2).

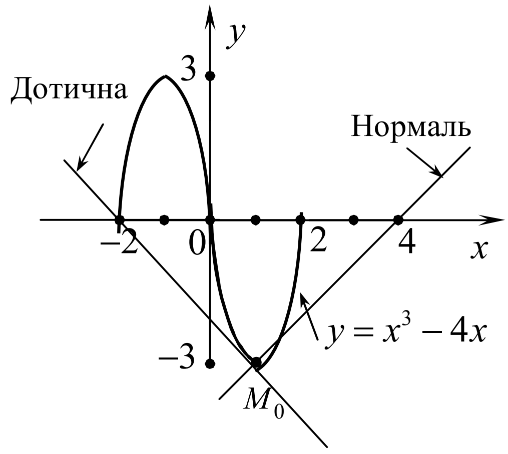


Рис. 5.2

Рівняння дотичної і нормалі мають відповідно вигляд

$$y=-3-(x-1)\Leftrightarrow y=-x-2,$$
$$y=-3+(x-1)\Leftrightarrow y=x-4.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f'(x_0)=+\infty(-\infty)$, або $f'(x_0)=\infty$, то в точці $M_0(x_0;f(x_0))$ графіка існує вертикальна дотична з рівнянням $x=x_0$. Характерні риси графіка в околі точки $M_0(x_0;f(x_0))$ для цього випадку вказані на рис. 5.3.

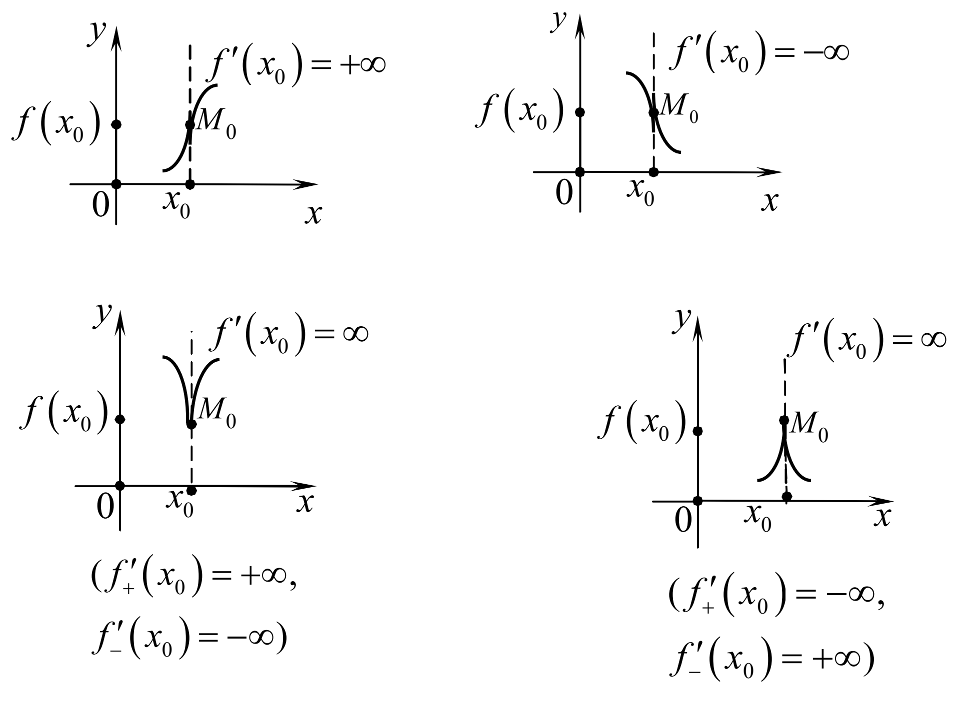


Рис. 5.3

Приклад 4. Написати рівняння дотичної до графіків таких функцій у точці $O(0;0)$: а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; в) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$.

Розв'язання. На основі результатів прикладу 2 отримаємо, що у випадках а) та б) рівняння дотичної до відповідних графіків має вигляд $x=0$ (рис. 5.4). У випадку в) дотична до графіка в початку координат не існує.

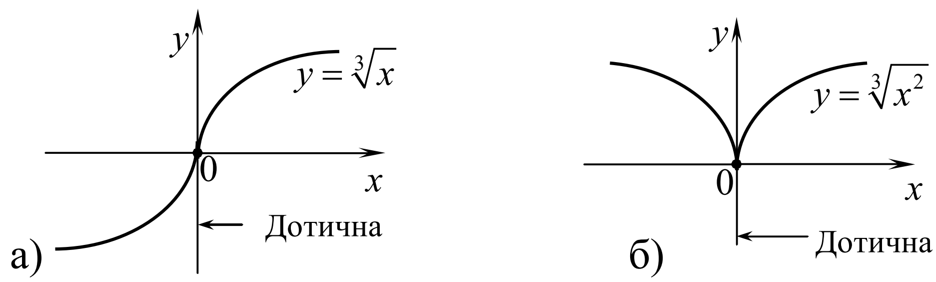


Рис. 5.4

5.3.2. Фізичний зміст похідної

Сила струму $i(t_0)$ у момент часу t_0 (див. приклад 1а, підрозд. 5.1) є похідною від заряду за часом в момент часу t_0

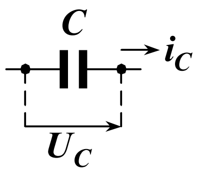
$$i(t_0)=\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=t_0}.$$

Миттєва швидкість $v(t_0)$ матеріальної точки (див. приклад 1б, підрозд. 5.1) у момент часу t_0 дорівнює похідній від координати за часом у момент t_0

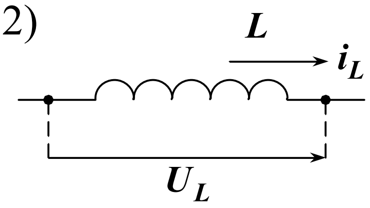
$$v(t_0)=\frac{dx}{dt}\Big|_{t_0}.$$

Таким чином, задачі з різноманітних розділів природознавчих наук (геометрія, електрика, механіка) розв'язуються за допомогою однотипних міркувань. Саме в цьому полягає особлива роль похідної при вивченні навколишнього світу.

Нарешті зазначимо, що математичні моделі ємності та індуктивності описуються відповідно співвідношеннями:

1) 

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt};$$

2) 

$$U_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}.$$

5.4. Правила диференціювання (знаходження похідних)

Обчислювати похідну як границю відносного приросту можна лише для порівняно простих функцій. Для більш громіздких функцій обчислення похідної на основі означення може викликати певні труднощі. Техніка обчислення похідних заснована на дотриманні наступних правил, що є логічними наслідками означення похідної.

1. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають похідні в точці x_0, то в цій точці мають похідні їх сума, добуток та частка, при цьому мають місце рівності:

$$\left(C \cdot f(x)\right)'_{x_0} = C \cdot f'(x_0) \ (C - \text{стала});$$

$$\left(f(x) + g(x)\right)'_{x_0} = f'(x_0) + g'(x_0);$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} \ \left(g(x_0) \neq 0\right).$$

2. Похідна складеної функції. Якщо функція $f(u)$ має похідну в точці u_0, а функція $u = g(x)$ має похідну в точці x_0 $\left(u_0 = g(x_0)\right)$, то складена функція $f\left(g(x)\right)$ має в точці x_0 похідну, яка дорівнює $f'(u_0) \cdot g'(x_0)$:

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)'_{x_0} = f'\left(u_0\right)\cdot g'\left(x_0\right).$$

Це правило розповсюджується на складену функцію, що є ланцюжком будь-якого скінченного числа диференційовних ланок

$$\left(f\left(g\left(s\left(t\left(x\right)\right)\right)\right)\right)'_{x} = f'_g\cdot g'_s\cdot s'_t\cdot t'_x.$$

3. Похідна оберненої функції. Нехай $y=f\left(x\right)$ і $x=g\left(y\right)$ – дві взаємно обернені функції. Якщо існує $f'\left(x_0\right)\neq 0$, то існує $g'\left(y_0\right)$ $\left(y_0=f\left(x_0\right)\right)$, причому $g'\left(y_0\right)=\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}$.

Таблиця похідних. З безпосередньо знайдених похідних функцій 1, x, $\sin x$, e^x можна на основі сформульованих вище правил диференціювання отримати похідні елементарних функцій (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

1. $\left(C\right)'=0$,	2. $\left(x^p\right)'=px^{p-1}$,
3. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$. Зокрема, $\left(e^x\right)'=e^x$,	4. $\left(\log_a\lvert x\rvert\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$. Зокрема, $\left(\ln\lvert x\rvert\right)'=\dfrac{1}{x}$,
5. $\left(\sin x\right)'=\cos x$,	6. $\left(\cos x\right)'=-\sin x$,
7. $\left(\mathrm{tg}\,x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$,	8. $\left(\mathrm{ctg}\,x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
9. $\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	10. $\left(\arccos x\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
11. $\left(\mathrm{arctg}\,x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,	12. $\left(\mathrm{arcctg}\,x\right)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$,
13. $\left(\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+A}\right\rvert\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+A}}$, $A\neq 0$	

Зауваження. 1. У формулі 2 табл. 5.1 при $p\in\left(0;1\right)$ $\left(x^p\right)'_0=+\infty$.
2. У формулі 9 табл. 5.1 $\left(\arcsin x\right)'_{x=\pm1}=+\infty$.

Приклад 5. Скласти рівняння дотичної та нормалі до параболи $y = 2x^2 - 6x + 3$ у точці $M_0(1; -1)$.

Розв'язання. Для того щоб знайти кутовий коефіцієнт дотичної, обчислимо похідну функції $2x^2 - 6x + 3$ при $x_0 = 1$.

Маємо $f'(x_0) = \left(2x^2 - 6x + 3\right)'_{x_0=1} = (4x - 6)_{x_0=1} = -2$ і, значить, рівняння дотичної має такий вигляд: $y = -1 - 2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Рівняння нормалі буде таким:

$$y = -1 + \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Провести дотичну до кривої $y = e^{3x-2} + 2$, паралельну прямій $y = 3x$.

Розв'язання. Нагадаємо, що кутові коефіцієнти паралельних прямих рівні між собою і тому задача розпадається на дві частини. Спочатку знайдемо кутовий коефіцієнт прямої. Він дорівнює 3. Потім потрібно знайти точку графіка, дотична в якій матиме той же кутовий коефіцієнт. З цією метою знайдемо похідну функції $e^{3x-2} + 2$. Маємо

$$\left(e^{3x-2} + 2\right)'_x = \left(e^u + 2\right)'_u \cdot (3x - 2)'_x = 3e^{3x-2}.$$

Тепер абсциса точки дотику визначається з рівняння $3e^{3x-2} = 3$. Його розв'язком буде $x_0 = \frac{2}{3}$.

Оскільки $\left(e^{3x-2} + 2\right)\Big|_{x=\frac{2}{3}} = 3$, то дотична повинна бути проведена в точці

$$M_0\left(\frac{2}{3}; 3\right): \; y = 3 + 3\left(x - \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow y = 3x + 1.$$

Приклад 7. Знайти похідні таких функцій:

1) $f(x) = \sqrt{x^3} \cdot \cos 2x \cdot \log_3\left(x^2 + 1\right) + (\cos 1)^2$;

2) $f(x) = \dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x} - 1\right)}{e^x - x^2}$; 3) $f(x) = \sin \sqrt[3]{\log_2 \operatorname{arctg} 5^{x^2 - x}}$.

Розв'язання. 1. Оскільки величина $(\cos 1)^2$ є сталою, то за правилом диференціювання добутку і складеної функції отримаємо

$$f'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' \cdot \cos 2x \cdot \log_3\left(x^2+1\right) + x^{\frac{3}{2}} \bullet \left(\cos 2x \cdot \log_3\left(x^2+1\right)\right)' =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \cos 2x \cdot \log_3\left(x^2+1\right) + x^{\frac{3}{2}}\left(-2\sin 2x \cdot \log_3\left(x^2+1\right) + \cos 2x \frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 3}\right).$$

2. Користуючись правилами диференціювання частки та складеної функції, знаходимо

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(e^x - x^2\right) - \arcsin\left(\sqrt{x}-1\right) \cdot \left(e^x - 2x\right)}{\left(e^x - x^2\right)^2}.$$

3. $f(x) = \sin\sqrt[3]{\log_2 \operatorname{arctg} 5^{x^2-x}}$. Подамо задану складену функцію у вигляді ланцюжка основних елементарних функцій: $f = \sin p$, $p = u^{\frac{1}{3}}$, $u = \log_2 v$, $v = \operatorname{arctg} w$, $w = 5^s$, $s = x^2 - x$.

Отже, $f'(x) = f'_p \cdot p'_u \cdot u'_v \cdot v'_w \cdot w'_s \cdot s'_x$. Оскільки $f'_p = (\sin p)'_p = \cos p$, $p'_u = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)'_u = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}$, $u'_v = \left(\log_2 v\right)'_v = \frac{1}{v\ln 2}$, $v'_w = \left(\operatorname{arctg} w\right)'_w = \frac{1}{1+w^2}$, $w'_s = \left(5^s\right)'_s = 5^s \ln 5$, $s'_x = \left(x^2 - x\right)' = 2x - 1$, то $f'(x) = \cos\sqrt[3]{\log_2 \operatorname{arctg} 5^{x^2-x}} \times$ $\times \frac{1}{3}\left(\log_2 \operatorname{arctg} 5^{x^2-x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} 5^{x^2-x} \ln 2} \cdot \frac{1}{1+5^{2\left(x^2-x\right)}} \cdot 5^{x^2-x} \cdot \ln 5 \cdot (2x-1)$.

При диференціюванні **степенево-показникової** функції $\left(u(x)\right)^{v(x)}$ її слід зобразити, використовуючи основну логарифмічну тотожність, у такому вигляді:

$$\left(u(x)\right)^{v(x)} = e^{\ln\left(u(x)\right)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}. \qquad (5.2)$$

Цей спосіб корисний і при знаходженні похідної від громіздкого добутку чи частки.

Приклад 8

1. Знайти похідну функції $f\left(x\right)=\left(\sin 2x\right)^{x^2+1}$.

Розв'язання. Подамо цю функцію у вигляді $f\left(x\right)=e^{\left(x^2+1\right)\ln\sin 2x}$;

$$f'\left(x\right)=\left(e^{w}\right)'_{w}\cdot w'_{x}=e^{\left(x^2+1\right)\ln\sin 2x}\cdot\left(2x\ln\sin 2x+\left(x^2+1\right)\left(\ln\sin 2x\right)'\right);$$

$$\left(\ln\sin 2x\right)'==\left(\ln t\right)'_{t}\cdot\left(\sin 2x\right)'=\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2=2\mathrm{ctg}2x.$$

Тому $f'\left(x\right)\ =\left(\sin 2x\right)^{x^2+1}\cdot\cdot\left(2x\ln\sin 2x+\left(x^2+1\right)\cdot 2\mathrm{ctg}2x\right)$.

2. Знайти похідну функції $f\left(x\right)=\sqrt[5]{\dfrac{e^{\cos 2x}\left(x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}}$.

Розв'язання. Функцію можна подати у такому вигляді: $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{5}\left(\cos 2x+\ln\left(x-1\right)-2\ln\left(x^2+1\right)\right)}$, або $f=e^{u}$, $u=\dfrac{1}{5}\left(\cos 2x+\ln\left(x-1\right)-2\ln\left(x^2+1\right)\right)$. Таким чином, $f'(x)=(e^{u})'_{u}\cdot u'_{x}$, де $u'_{x}=\dfrac{1}{5}\Big(\left(\cos 2x\right)'+\left(\ln(x-1)\right)'-$ $-\left(2\ln(x^2+1)\right)'\Big)$. Все звелося до диференціювання не добутку, як було в початковому записі, а до більш простої операції – диференціювання суми.

Надалі маємо: $\left(\cos 2x\right)'=-2\sin 2x$, $\left(\ln\left(x-1\right)\right)'=\dfrac{1}{x-1}$;

$$\left(2\ln\left(x^2+1\right)\right)'=2\frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)'=\frac{4x}{x^2+1}.$$

Остаточно шуканий результат з урахуванням початкового запису функції буде таким:

$$f'\left(x\right)=\sqrt[5]{\frac{e^{\cos 2x}\left(x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}}\cdot\frac{1}{5}\left(-2\sin 2x+\frac{1}{x-1}-\frac{4x}{x^2+1}\right).$$

5.5. Дотичний вектор кривої. Елемент довжини кривої

1. Дотичний вектор кривої. Досить часто криву (лінію) розглядають не як деяку множину точок простору (площини), а як слід рухомої точки. В цьому випадку координати точки кривої L є неперервними функціями деякого допоміжного змінного (параметра) t, якому звичайно надають зміст часу:

$$L = \left\{ \left(x;\, y;\, z \right) : x = x\left(t \right),\, y = y\left(t \right),\, z = z\left(t \right);\, t \in \left[\alpha ; \beta \right] \right\}.$$

Параметризація кривої встановлює на ній певний порядок точок: точка $M_2\left(x\left(t_2\right);\, y\left(t_2\right);\, z\left(t_2\right)\right)$ йде за точкою $M_1\left(x\left(t_1\right);\, y\left(t_1\right);\, z\left(t_1\right)\right)$, якщо $\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$. Таким чином, крива L вважається **орієнтованою** у напрямку зростання параметра t. Напрям руху точки $M\left(x\left(t\right);\, y\left(t\right);\, z\left(t\right)\right)$ вздовж кривої L, відповідний зростанню параметра t, називається додатним. Точка $A\left(x\left(\alpha\right);\, y\left(\alpha\right);\, z\left(\alpha\right)\right)$ називається початком кривої L, а точка $B\left(x\left(\beta\right);\, y\left(\beta\right);\, z\left(\beta\right)\right)$ – її кінцем. Зауважимо, що крива $L_- = \left\{\left(x;\, y;\, z\right):\right.$ $x = x\left(\alpha + \beta - t\right)$; $y = y\left(\alpha + \beta - t\right)$; $z = z\left(\alpha + \beta - t\right)$; $\left. t \in \left[\alpha;\, \beta\right]\right\}$ складається з тих же точок простору, що і крива L, але вона орієнтована у протилежному напрямі (тобто її початком є точка B, а кінцем – точка A). Якщо точки A та B збігаються, то крива називається **замкненою**. Будемо казати, що крива **проста**, якщо вона не має точок самоперетину. Проста крива L називається **гладкою**, якщо функції $x\left(t\right)$, $y\left(t\right)$, $z\left(t\right)$ мають на відрізку $\left[\alpha;\, \beta\right]$ неперервні похідні, які одночасно не дорівнюють нулю $\left(x'^2\left(t\right) + y'^2\left(t\right) + z'^2\left(t\right) \ne 0\right)$.

Називатимемо криву **кусково-гладкою**, якщо вона складається із скінченної кількості гладких кривих. Кусково-гладка крива має дотичну в довільній точці, крім, мабуть, скінченного числа точок, в яких існує граничне положення дотичної справа і зліва.

Положення точки, що рухається уздовж кривої, можна задати за допомогою вектора

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k},$$

який проведено з початку координат обраної системи у точку, яка розглядається. Нехай точка, що рухається, у моменти часу t_0 і $t_0+\Delta t$ знаходиться відповідно в точках M_0 і M своєї траєкторії. Тоді точка M_0 задається вектором $\vec{r}(t_0)$, а точка M – вектором $\vec{r}(t_0+\Delta t)$. Введемо до розгляду вектор $\Delta\vec{r}(t_0)\equiv\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ (рис. 5.5,а).

Колінеарний вектору $\Delta\vec{r}(t_0)$ вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ називається **середньою швидкістю** на проміжку $[t_0;t_0+\Delta t]$. Якщо $\Delta t\to 0$, то точка M наближається до M_0, а вектор

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t};\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t};\ \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\right)$$

до вектора

$$\vec{v}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}\left(t_0\right)}{dt}=\left(\frac{dx\left(t_0\right)}{dt};\frac{dy\left(t_0\right)}{dt};\frac{dz\left(t_0\right)}{dt}\right),$$

який напрямлений по дотичній до кривої у бік зростання параметра t (у бік руху точки). Отже, маємо

$$d\vec{r}\left(t_0\right)=\vec{v}\left(t_0\right)\cdot dt\quad\text{і}\ \left|d\vec{r}\left(t_0\right)\right|=\left|\vec{v}\left(t_0\right)\right|\cdot dt\,.$$

Означення 1. Дотичним вектором (вектором швидкості) кривої L у момент t_0 називається вектор

$$\vec{v}\left(t_0\right)\left(x_t'\left(t_0\right);\ y_t'\left(t_0\right);\ z_t'\left(t_0\right)\right).$$

Цей вектор прикладений у точці $M_0\left(x\left(t_0\right);y\left(t_0\right);z\left(t_0\right)\right)$ та напрямлений по дотичній до кривої у цій точці в той бік, в який рухається точка, що зображує криву L (рис. 5.5,б). Тому рівняння дотичної до кривої у точці M_0, що відповідає параметру t_0, має вигляд

$$\boxed{T:\frac{x-x\left(t_0\right)}{x_t'\big|_{t_0}}=\frac{y-y\left(t_0\right)}{y_t'\big|_{t_0}}=\frac{z-z\left(t_0\right)}{z_t'\big|_{t_0}}.}$$

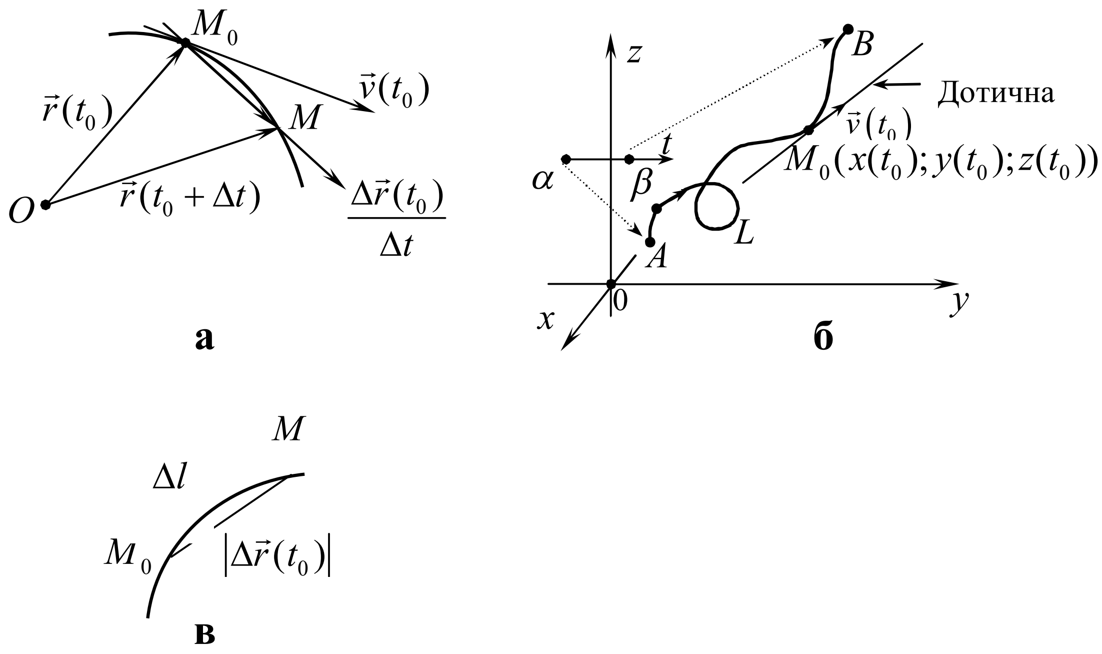


Рис. 5.5

Якщо параметрично задана крива лежить у площині xOy, то **рівняння дотичної** буде таким

$$\boxed{\frac{y-y(t_0)}{y'_t\big|_{t_0}}=\frac{x-x(t_0)}{x'_t\big|_{t_0}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y-y(t_0)=\frac{y'_t\big|_{t_0}}{x'_t\big|_{t_0}}\big(x-x(t_0)\big).}$$

Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної у точці $M_0\big(x_0=x(t_0);\ y_0=y(t_0)\big)$ дорівнює

$$\boxed{y'(x_0)=\frac{y'_t\big|_{t_0}}{x'_t\big|_{t_0}}.} \tag{5.3}$$

Формула (5.3) є **правилом диференціювання параметрично заданої функції,** коли відповідні одне одному значення x та y виражаються через третю змінну t, яка називається **параметром** .

Якщо крива L задана явно як графік функції $f(x)$, то за параметр можна взяти $x: L=\{(x;\ y): x=x;\ y=f(x)\}$. У цьому випадку вектор швидкості має вигляд $\vec{v}(1;\ f'(x))$.

2. Елемент довжини кривої. Довжина нескінченно малої дуги $\overset{\frown}{M_0M}$ і довжина $\left|\Delta\vec{r}\left(t_0\right)\right|$ хорди M_0M, що її стягує, є еквівалентними нескінченно малими. Це пояснюється тим що за малий проміжок часу Δt дуга майже не відрізняється від хорди , тобто не встигає "скривитися" (рис. 5.5,в). Таким чином, маємо

$$\Delta l = \left|\Delta\vec{r}\left(t_0\right)\right| + o\left(\Delta t\right) = \left|\vec{v}\left(t_0\right)\right| \cdot \Delta t + o\left(\Delta t\right). \tag{5.4}$$

Отже, приймаємо таке

Означення 2. Елементом довжини кривої (дифереціалом дуги кривої) в момент t називається величина $\left|\vec{v}\left(t\right)\right|dt$. Елемент довжини прийнято позначати dl. Отже,

$$dl = \left|\vec{v}\left(t\right)\right|dt.$$

Приклад 9

1. Знайти вектор швидкості та елемент довжини дуги гвинтової лінії $L = \left\{\left(x;\, y;\, z\right) : x = a\cos ct,\ y = a\sin ct,\ z = bt\right\}$ в момент $t_0 = \dfrac{\pi}{6c}$.

Розв'язання: $\vec{v}\left(t\right) = \left(-ac\sin ct;\, ac\cos ct;\, b\right) \Rightarrow dl = \left|\vec{v}\left(t\right)\right|dt =$
$= \sqrt{\left(-ac\sin ct\right)^2 + \left(ac\cos ct\right)^2 + b^2}\,dt = \sqrt{a^2c^2 + b^2}\,dt$.

Отже, $\vec{v}\left(\dfrac{\pi}{6c}\right) = \left(-ac\sin\dfrac{\pi}{6};\, ac\cos\dfrac{\pi}{6};\, b\right) = \left(-\dfrac{ac}{2};\, \dfrac{ac\sqrt{3}}{2};\, b\right)$.

2. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до лінії

$L = \left\{\left(x;\, y\right) : x = 2\arccos\sqrt{t},\ y = e^{-t+\frac{1}{2}}\right\}$ у точці $M_0\left(\dfrac{\pi}{2};\, 1\right)$.

Розв'язання. Точці M_0 відповідає значення параметра $t_0 = 0.5$. Оскільки $\vec{v}\left(t\right) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{t - t^2}};\, -e^{-t+\frac{1}{2}}\right)$, то $\vec{v}\left(0.5\right) = \left(-2;\, -1\right)$. Отже, кутовий коефіцієнт дотичної до лінії в точці M_0 буде дорівнювати $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{y'_t\big|_{t=0.5}}{x'_t\big|_{t=0.5}}=\frac{1}{2}$, а рівняння дотичної та нормалі будуть відповідно такими: $T: y-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $N: y-1=-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Написати рівняння дотичної до кривої $L=\left\{(x;\, y;\, z): x=4t-t^3,\ \ y=3t^2,\, z=3t+t^3\right\}$ у момент $t_0=1$.

Розв'язання: $\vec{v}(t)=\left(4-3t^2;\, 6t;\, 3+3t^2\right)\ \Rightarrow \vec{v}(t_0)=(1;\, 6;\, 6)$.

Отже, рівняння дотичної має вигляд $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-4}{6}$.

4. Знайти елемент довжини дуги таких кривих:

а) крива задається явно $y=f(x)$;

б) крива задана параметричним рівнянням у полярних координатах $L=\left\{(\varphi;\, \rho): \rho=\rho(t),\, \varphi=\varphi(t)\right\}$.

Розв’язання: а) $L=\left\{(x;\, y): x=x,\, y=f(x)\right\}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v}(x)=\left(1;\, f'(x)\right)\Rightarrow dl=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$;

б) оскільки зв’язок між полярними та декартовими координатами описується рівностями $x=\rho\cos\varphi,\, y=\rho\sin\varphi$, то параметричні рівняння кривої, яку розглядаємо, мають вигляд

$$L=\left\{(x;\, y): x=\rho(t)\cdot\cos\varphi(t),\ y=\rho(t)\cdot\sin\varphi(t)\right\}.$$

Отже,

$$\vec{v}(t)=\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt}\cdot\cos\varphi(t)-\rho(t)\cdot\sin\varphi(t)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right.;}_{\frac{dx}{dt}}\ \underbrace{\left.\frac{d\rho}{dt}\cdot\sin\varphi(t)+\rho(t)\cdot\cos\varphi(t)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)}_{\frac{dy}{dt}}$$

і тому $dl=\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt$.

Зокрема якщо крива задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$ (роль параметра відіграє полярний кут φ), то $dl=\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\rho^2}\,d\varphi$.

5.6. Диференціал функції

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 (має скінченну похідну $f'(x_0)$). Тоді приріст функції у цій точці може бути подано у вигляді

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}, \tag{5.4}$$

де $o(\Delta x)$ – нескінченно мала величина більш високого порядку мализни, ніж Δx. Якщо величина $o(\Delta x) \neq 0$, то приріст $\Delta f(x_0)$ є нелінійною нескінченно малою величиною, що залежить від Δx.

Означення. Диференціалом $df(x_0)$ диференційовної у точці x_0 функції $f(x)$ називається лінійна відносно Δx частина $f'(x_0)\Delta x$ приросту $\Delta f(x_0)$

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\Delta x}.$$

Отже, диференціал залежить від точки x_0, де він обчислюється, і від приросту незалежної змінної Δx.

Диференціал dx незалежної змінної не залежить від x і дорівнює Δx.

Дійсно, нехай $f(x) \equiv x$. Тоді $df(x) \equiv dx = (x)' \Delta x = \Delta x$ і приходимо до більш симетричної форми запису диференціала $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

Таким чином, введений раніше для позначення похідної символ $\frac{df}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів (df, поділене на dx).

Структура диференціала значно простіша, ніж структура приросту, оскільки диференціал є лінійною функцією. З точністю до нескінченно малих вищого порядку в порівнянні з Δx має місце наближена рівність

$$\boxed{\Delta f(x_0) \approx df(x_0)}. \tag{5.5}$$

І абсолютна $\left|\Delta f\left(x_0\right) - df\left(x_0\right)\right|$, і відносна $\left|\dfrac{\Delta f\left(x_0\right) - df\left(x_0\right)}{\Delta f\left(x_0\right)}\right|$ похибки наближеної рівності (5.5) прямують до нуля при $\Delta x \to 0$.

Наближену рівність (5.5) можна переписати у вигляді

$$\boxed{f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x}.$$

Позначимо $x = x_0 + \Delta x$. Тоді останнє співвідношення записується таким чином:

$$\boxed{f\left(x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \cdot \left(x - x_0\right)}. \tag{5.6}$$

Зміст формули (5.6) такий: в околі точки $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ ордината дотичної до графіка функції $f\left(x\right)$ у точці M_0 мало відрізняється від ординати графіка. Тому в околі цієї точки графік функції з достатньою точністю може бути замінений дотичною (рис. 5.6).

Геометричний зміст диференціала $df\left(x_0\right)$ – це приріст ординати дотичної при переході від точки M_0 до точки $M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$.

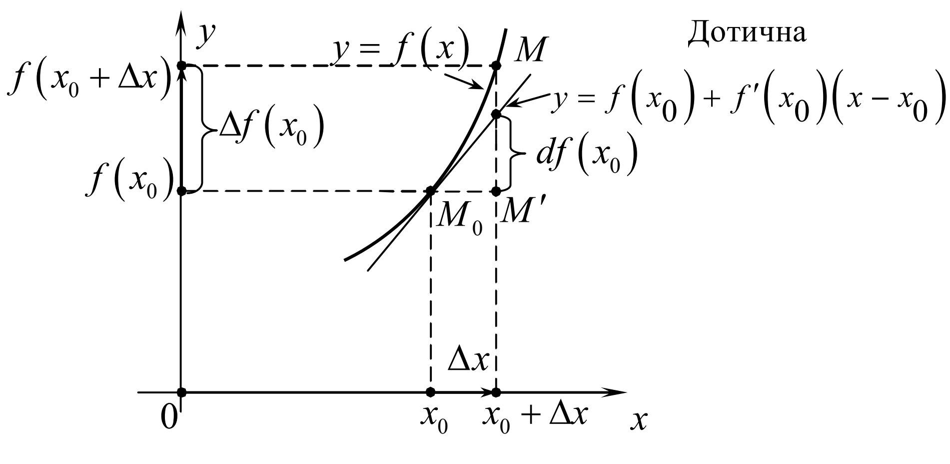


Рис. 5.6

Приклад 10

1. Обчислити наближено $\sqrt[3]{8.3}$; 2. Знайти наближене значення функції $f\left(x\right) = x\ln\left(x - 2\right)$ при $x = 3.1$; 3. Знайти приріст і

диференціал функції $2x^2-3x$ у точці $x_0=1$ при $\Delta x=0.1$; $\Delta x=0.01$. Для кожного значення Δx знайти абсолютну $|\Delta f-df|$ і відносну $\left|\dfrac{\Delta f-df}{\Delta f}\right|$ похибки.

Розв'язання: 1. Розглянемо функцію $\sqrt[3]{x}$ і припустимо $x_0=8$, $\Delta x=0.3$. Тоді диференціал функції $\sqrt[3]{x}$ дорівнюватиме

$$d\left(\sqrt[3]{x}\right)\Big|_8=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\Bigg|_8\Delta x=\frac{0.3}{3\cdot 4}=0.025.$$

Отже, $\sqrt[3]{8.3}\approx\sqrt[3]{8}+0.025=2.025$.

2. В точці $x_0=3$ значення функції дорівнює нулю. Знайдемо диференціал функції у точці $x_0=3$, що відповідає приросту $\Delta x=0.1$:

$$df(3)=\left(x\ln(x-2)\right)_3'\cdot\Delta x=3\cdot 0.1=0.3.$$

Отже, $\Delta f(3)\approx 0.3$. І тому $f(3.1)=f(3)+\Delta f(3)\approx 0.3$.

3. $\Delta f(1)=2(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)-(-1)=\Delta x+2(\Delta x)^2$,
$\Delta x=0.1\Rightarrow\Delta f(1)=0.12$, $df(1)=f'(1)\cdot 0.1=0.1$, $|\Delta f(1)-df(1)|=0.02$,

$$\left|\frac{\Delta f(1)-df(1)}{\Delta f(1)}\right|=0.1667.$$

При $\Delta x=0.01\Rightarrow\Delta f(1)=0.0102$, $df(1)=f'(1)\cdot 0.01=0.01$, $|\Delta f(1)-df(1)|==0.0002$,

$$\left|\frac{\Delta f(1)-df(1)}{\Delta f(1)}\right|=0.0196.$$

Заміна приросту диференціалом у цьому випадку виправдана.

Приклад 11. У результаті вимірювання радіуса кулі допущена похибка в 1%. Показати, що при обчисленні об'єму кулі за формулою $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, де R – отримане в результаті вимірювання значення радіуса, похибка становить 3% від його об'єму.

Розв'язання. Нехай R_0 – точне значення радіуса кулі, а $R_0+\Delta R$ – виміряне значення радіуса кулі. Тоді $\Delta R=\pm 0.01 R_0$,

$$\Delta V \approx dV = d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)_{|R_0} \approx 4\pi R_0^{\ 2}\cdot\Delta R = \pm 4\pi R_0^{\ 3}\cdot 0.01 = \pm 0.03V .$$

Отже, похибка складає 3% об'єму.

Похідна неявної функції. Нехай задана не сама функція $y=y(x)$, а лише рівняння $F(x,y)=0$, якому вона задовольняє, тобто є справедливою тотожність $F(x,y(x))\equiv 0$. Ліва частина цієї тотожності є складеною функцією від x, похідна якої лінійна відносно $y'(x)$.

Приклад 12. Знайти похідну від функції $y=y(x)$, яка неявно задана рівнянням: $x^3+2\sin y+e^{x\cdot y}-2=0$.

Розв'язання. Знайдемо похідну по x від тотожності $x^3+2\sin y(x)+e^{x\cdot y(x)}-2\equiv 0: 3x^2+2\cos y(x)\cdot y'(x)+e^{x\cdot y(x)}(y(x)+x\cdot y'(x))=0.$

Отже, $y'(x)=-\dfrac{3x^2+y(x)e^{x\cdot y(x)}}{2\cos y(x)+xe^{x\cdot y(x)}}$. Зокрема, якщо $y(1)=0$ (зрозуміло, що точка $(1;0)$ задовольняє рівнянню), то $y'(1)=-1$. І, отже, рівняння дотичної в точці (1; 0) має вигляд $y=-x+1$.

5.7. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $f(x)$ має скінченну похідну $f'(x)$ у кожній точці деякого проміжку.

Означення 1. Похідна від $f'(x)$ називається **другою похідною функції** $f(x)$ і позначається одним із символів $f''(x)$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$. Отже,

$$\boxed{f''(x)=\left(f'(x)\right)'}.$$

Функція $f(x)$ називається двічі диференційовною у точці x_0, якщо величина $f''(x_0)$ скінченна. В цьому випадку функція $f'(x)$ є диференційовною у точці x_0, а функція $f(x)$ є диференційовною у деякому околі $U(x_0)$ точки x_0. Функція двічі диференційовна на деякій множині, якщо вона двічі диференційовна в кожній точці цієї множини.

Якщо матеріальна точка рухається вздовж осі Ox і $x(t)$ – координата точки в момент часу t, тоді друга похідна $\frac{d^2x}{dt^2}$ визначає прискорення точки.

Нехай функція $f^{(n-1)}(x)$ є диференційовною у кожній точці деякого проміжку. Тоді похідна від $(n-1)$-ї похідної функції $f(x)$ називається n **- ю похідною функції** $f(x)$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Функція $f(x)$ називається n разів диференційовною в точці x_0, якщо величина $f^{(n)}(x_0)$ скінченна. Функція $f(x)$ n разів диференційовна на деякій множині, якщо вона n разів диференційовна в кожній точці цієї множини (функції $f(x)$, $f'(x)$,..., $f^{(n-1)}(x)$ неперервні на цій множині, але функція $f^{(n)}(x)$ не обов’язково буде неперервною).

Припустимо, що приріст $\Delta x = dx$ незалежної змінної є сталою величиною. Тоді диференціал $df = f'(x)dx$ є функцією лише від x.

Означення 2. **Диференціалом** $d^2f(x_0)$ **другого порядку** функції $f(x)$ у точці x_0 називається диференціал від диференціалу $df(x_0)$ у точці x_0. При цьому припускаємо, що приріст dx незалежної змінної при обчисленні другого диференціала обраний таким, як і при обчисленні першого диференціала.

Отже, якщо величина $f''(x_0)$є скінченною, то

$$d^2f(x_0) = d\left(f'(x)dx\right)\Big|_{x_0} = d\left(f'(x)\right)\Big|_{x_0} dx = f''(x_0)dx \cdot dx = f''(x_0)(dx)^2.$$

Диференціалом $n-$ **го порядку** називається диференціал від $n-1-$го порядку. Якщо величина $f^{(n)}(x_0)$ скінченна, то можна довести, що

$$d^nf(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n.$$

При цьому припускається, що приріст dx незалежної змінної при обчисленні першого і всіх наступних диференціалів не змінюється.

5.8. Кривина плоскої кривої

Мірою викривлення кривої є її кривина.

Нехай крива L є графіком двічі диференційованої функції $f(x)$, Оберемо на кривій L дві точки $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ і $M(x_0+\Delta x; f\left(x_0+\Delta x\right))$. Нехай $\Delta l-$ довжина дуги $\cup M_0 M$, а $\Delta\alpha-$ величина кута між дотичними до кривої у точках M_0 та M (рис. 5.7).

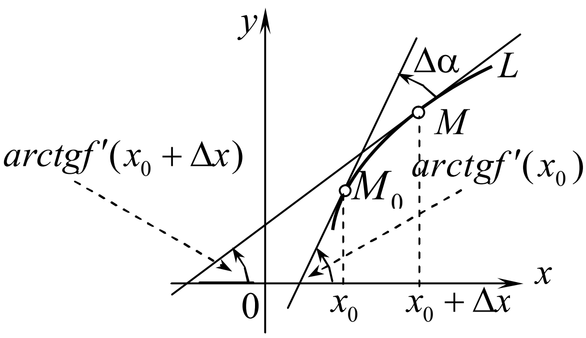


Рис. 5.7

Означення 1. Кривиною $K(x_0)$ кривої L у точці M_0 називається границя (скінченна або нескінченна)

$$K(x_0)=\left|\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|=\left|\frac{d\alpha}{dl}\right|.$$

Величина $R(x_0)=\dfrac{1}{K(x_0)}$ називається **радіусом кривини** кривої L у точці x_0.

Знайдемо кривину у точці M_0. Оскільки

$$\Delta\alpha=-(\ \mathrm{arctg} f'(x_0+\Delta x)-\mathrm{arctg} f'(x_0))=-(\mathrm{arctg} f'(x))'\Big|_{x_0}\cdot\Delta x+o(\Delta x)=$$

$$=-\frac{f''(x_0)}{1+(f'(x_0))^2}\Delta x+o(\Delta x),\ \text{то}\ d\alpha=-\frac{f''(x_0)}{1+(f'(x_0))^2}dx.$$

На підставі результату прикладу 4 а) $dl=\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$. Таким чином, за формулою (5.4) остаточно маємо

$$\boxed{K(x_0)=\frac{\left|f''(x_0)\right|}{(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}}}.\tag{5.7}$$

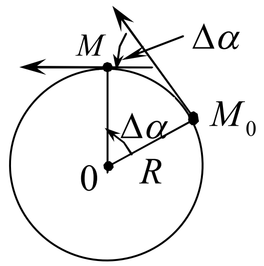


Рис. 5.8

Приклад 13. Знайти кривину: а) прямої $y = kx + l$; б) кола радіуса R (рис. 5.8).

Розв'язання: а) оскільки $f'(x) = k$, $f''(x) = 0$, то $K(x) = 0$ і, отже, радіус кривини прямої у довільній точці дорівнює $+\infty$;

б) коли крива L є колом, то кут $\Delta\alpha$ між дотичними дорівнює центральному куту, який утворюють радіуси, що проведені у точки дотику.

Отже, $\Delta l = R\Delta\alpha$ і, таким чином, кривина кола однакова в усіх його точках і дорівнює $1/R$.

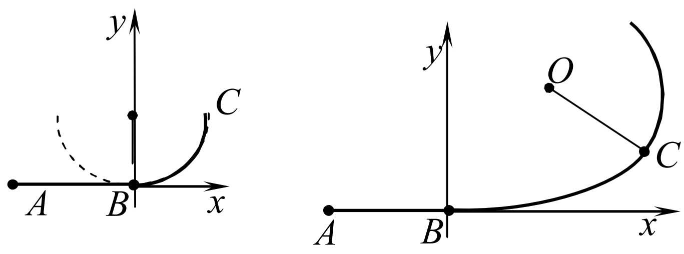
Якщо крива L задана в параметричній формі $L = \{(x; y) : x = x(t), y = y(t); \quad t \in [\alpha; \beta]\}$, то на підставі правила диференціювання параметрично заданої функції (5.3) $y'(x) = \dfrac{y'_t}{x'_t}$,

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Якщо підставити отримане значення в формулу (5.7) для кривини, то дістанемо

$$\boxed{K = \frac{|y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t|}{((x'_t)^2 + (y'_t)^2)^{3/2}}.} \qquad (5.8)$$

Наведемо **практичний приклад** застосування зміни кривини кривої. Нехай потяг маси m рівномірно рухається зі швидкістю v спочатку по відрізку AB прямої, а далі по дузі $\cup BC$ (рис. 5.9, а) кола радіуса R, для якої відрізок AB є дотичною. Як відомо з механіки, на відрізку AB прискорення потягу дорівнює нулю, а при проходженні стику в точці B миттєво виникає прискорення $\dfrac{v^2}{R}$. Отже, потяг завдає по рейках удар силою $\dfrac{mv^2}{R}$ та сам отримує такий же удар з боку рейок. Це дуже шкідливо і для рухомого складу і для рейок. Тому прямолінійну та колову ділянки полотна сполучують **перехідною ділянкою** BC (рис. 5.9,б), яку обирають у вигляді кривої $y = ax^3$. У цьому випадку радіус кривини перехідної ділянки спадає від $R(B)=+\infty$ (у точці стику з прямолінійною частиною полотна) до значення R (у точці стику з коловою частиною). Відповідно цьому поступово зростає відцентрова сила.



а б

Рис. 5.9

Приклад 14. Знайти кривину: а) кривої $y=ax^3$;

б) циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ в довільній точці $(x;y)$, $a>0$.

Розв'язання:

а) $y'=f'(x)=3ax^2$, $f''(x)=6ax \Rightarrow K(x)=\dfrac{6a|x|}{(1+9a^2x^4)^{\frac{3}{2}}}$;

б) $x'_t=a(1-\cos t)$, $x''_t=a\sin t$, $y'_t=a\sin t$, $y''_t=a\cos t$.

За формулою (5.8) одержимо

$$K=\frac{|a(1-\cos t)a\cos t-a\sin t\cdot a\sin t|}{\left[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t\right]^{3/2}}=\frac{|\cos t-1|}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{3/2}}=\frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

5.9.Метод дотичних розв'язання нелінійного рівняння

Припустимо,що функції $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$, $f'(x)\cdot f''(x)\neq 0$ при $x\in[a;b]$. Тоді рівняння $f(x)=0$ має на інтервалі $(a;b)$ єдиний корінь c. Розглянемо той з чотирьох можливих випадків, коли $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, $f(a)<0$, $f(b)>0$ (рис. 5.10).

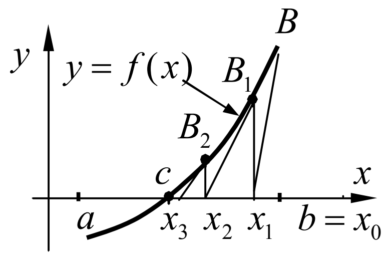


Рис.5.10

Проведемо дотичну до кривої $y=f(x)$ у точці $B(x_0=b;f(b))$ ($f(b)\cdot f''(b)>0$) та знайдемо абсцису x_1 точки перетину цієї дотичної з віссю Ox: $x_1=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$. Таким чином, корінь c рівняння належить відрізку $[a;x_1]$.

Далі знаходиться абсциса x_2 точки перетину дотичної у точці $B_1(x_1; f(x_1))$ з віссю Ox: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Послідовність $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ спадає і дуже швидко збігається при $n \to \infty$ до кореня рівняння c. Якщо виконується оцінка $\min\limits_{[a;b]} |f'(x)| = m > 0$, то похибку $|c - x_n|$ методу дотичних можна оцінити, використовуючи формулу Лагранжа:

$$f(x_n) - f(c) = f'(d)\cdot(x_n - c) \Rightarrow f(x_n) = f'(d)\cdot(c - x_n),$$

де точка d знаходиться між точним значенням c кореня і його наближеним значенням x_n. Отже,

$$|f(x_n)| = |f'(d)|\cdot|c - x_n| \ge m\cdot|c - x_n| \;\Rightarrow\; |c - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

Приклад 15. Знайти корінь рівняння $f(x) \equiv -x + \ln x + 2 = 0$, $[a = 3; b = 4]$.

Розв'язання:

$$f(3) = -1 + \ln 3 > 0, f(4) = -2 + \ln 4 < 0,\ f'(x) = -1 + 1/x < 0,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Оскільки $f(4)\cdot f''(4) > 0$, то цей випадок є цілком аналогічним розглянутому вище. А саме, проводимо дотичну до кривої у точці $B(x_0 = 4; f(4))$. Маємо:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{\ln 4 - 2}{-1 + 1/4} = 4 - \frac{-0.6137}{-3/4} = 3.1817,$$

$$f(x_1) = -3.1817 + \ln 3.1817 + 2 = -0.0243, \quad f'(x_1) = -1 + \frac{1}{3.1817} = -0.6857;$$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3.1463$, $f(x_2) = -0.0001$; $f'(x_2) = -0.6822$; $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} =$ $= 3.1462$, $f(x_3) = -0.0000046 \Rightarrow c \approx 3.1462$.

У випадках $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ і $f'(x) < 0, f''(x) > 0$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ виконується умова $f(a)\cdot f''(a) > 0$ і перша дотична проводиться у точці $A(x_0 = a; f(a))$.

ВПРАВИ

Знайти похідні від заданих функцій:

1.1. $5-6x+\frac{x^4}{3}$. **1.2.** $\frac{-3x^5}{a^3}$. **1.3.** $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}$.

1.4. $\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2+2x-1\right)$. **1.5.** $\frac{2x-1}{x+3}$. 1.**6.** $\left(x^3-3x\right)\left(x^4+x^2+3\right)$.

1.7. $\frac{x^2+x}{x^3-1}$. **1.8.** $\frac{v^4}{v^3+2}$. **1.9**. $\frac{3x^2+5x+2}{\sqrt{2\pi}}$. **1.10.** $\frac{1}{x^3-2x+5}$.

1.11. $\frac{5}{2x-7}-\frac{8}{x}$. **1.12.** $3\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[4]{x^3}$. **1.13.** $-\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$. **1.14.** $x^2\mathrm{ctg}x$.

1.15. $\frac{\mathrm{tg}x}{x+3}$. **1.16.** $\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$. **1.17.** $\frac{\cos x+1}{\sin x}$. **1.18.** $\sqrt{x}\sin 3x$.

1.19. $3\sin\frac{x}{3}-2\mathrm{tg}x+\frac{3}{7}$. **1.20.** $\frac{1}{2}\cos^2 x- -\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{4}e$.

1.21. $\frac{1}{12}\sin^2(6x+9)+\frac{\pi}{3}$. **1.22.** $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. **1.23.** $\cos(\sin x)$. **1.24.** $\sin\frac{1}{x}$.

1.25. $\left(1+\cos^2 x\right)^4$. **1.26.** $\frac{x}{\ln x}$. **1.27.** $\ln^4\cos x+3\pi$. **1.28.** $\ln\arcsin x$.

1.29. $\ln(\cos x+3)+\sqrt{e}$. **1.30.** $\sqrt{\ln^3(x+2)}$. **1.31.** $\ln\ln\ln x$.

1.32. $e^{-x+5}\left(x^2+6\right)$. **1.33.** $e^{-\cos^2 x}$. **1.34.** $e^{-x^3}\cdot\sin^2 3x$. **1.35.** $\mathrm{arctg}\left(2x^5+8x\right)$.

1.36. $\arcsin\sqrt{2x+7}$. **1.37.** $(x+2)\arcsin\ln x$. **1.38.** $\frac{x^2+1}{4^x}$. **1.39.** $25^{\frac{\ln x}{x}}$.

1.40. $5^{3\cos^2 x}$. **1.41.** $y=10^{x^2+3x+1}$. **1.42.** $\sin\left(e^{x^2+3x+2}\right)$.

Знайти похідні від заданих функцій:

2.1. $\frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}$. **2.2.** $e^{3x}\left(2x^3+5x+7\right)$. **2.3.** $\frac{x^3-\sqrt[4]{x}}{\cos x}$. **2.4.** $2x^3\arcsin x-$ $-\frac{1}{\sqrt{x}}+5$. **2.5.** $2^{\sin x}\cdot\mathrm{tg}\,x+\log_3 x$. 2.6. $\frac{e^{x^2}}{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}-\cos 2x$.

2.7. $(2x+7)^5\cdot\sin 3x- -5\arcsin\sqrt{x}$. **2.8.** $\sqrt[5]{(7x-3)^4}\cdot\mathrm{tg}2x+\ln\sin x$.

2.9. $2\frac{1}{\cos^4 2x}+x^2\arcsin x^3+\frac{\pi}{4}$. **2.10.** $e^{x\sin\frac{x}{2}}-4^{\cos 2x}$;

2.11. $e^{-5x^2+2}+\arccos\frac{1-x}{1+x}-6x$. **2.12.** $3\arcsin x^2+\sqrt{\pi}$.

2.13. $-3\log_2\left(x^2+3x+1\right)+e^3$. **2.14.** $e^{-x^3}\cdot\log_2 x+1.5\pi$.

2.15. $5^x-x^3+\sqrt[3]{x}+2$. **2.16.** $x^3\left(2+3x\right)^2+\dfrac{\cos x}{x}+107$. **2.17.** $\dfrac{5-e^x}{3+4^x}+\sqrt{x}$.

2.18. $x^2\ln x+\dfrac{\log_2 x}{tg\,x}+\dfrac{3\pi}{4}$. **2.19.** $\lg\left(x^4+\cos 2x\right)$. **2.20.** $2^{\cos 3x}+\cos^2 3x$.

2.21. $3^{\operatorname{tg}x}+\ln^2 x$. **2.22.** $\log_2{}^3\sin x+\ +\dfrac{4}{x^2}$. **2.23.** $\sqrt{1-5^{\cos x}}+\dfrac{x^2}{1+2x}$.

2.24. $\operatorname{tg}\sqrt[3]{\arcsin x}+\ x^2\cdot e^{-2x}$.

Обчислити похідні від складених функцій:

3.1. $\sqrt{x^2-6x^3\cos x}$. **3.2.** $\sqrt[3]{tg^2 3x+\sin\sqrt{x}}-x\ln x$. **3.3.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}+$ $+2\sin x^2$. **3.4.** $\log_2\left(\arcsin x-x^3\right)-\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}+3x^2$. **3.5.** $e^{-x^2}\sqrt{x^3+\operatorname{tg}\left(x^4-5x\right)}$.

3.6. $\arcsin^2\sqrt{x}-\sqrt{\operatorname{arctg}2x^3}-\dfrac{x}{x^2+1}$. **3.7.** $3^{2x-x^2}\operatorname{ctg}\ln x+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sqrt{3}$.

3.8. $\dfrac{\log_2\cos\left(x^2\right)}{x^2+\sqrt[3]{x}}$. **3.9.** $x^3\operatorname{tg}\left(x^2\right)-\operatorname{ctg}^2\sqrt{x+3}+3\ln x$. **3.10.** $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\arcsin\left(2x\right)}{\cos\dfrac{x}{x+1}}$.

3.11. $\cos^2\sqrt{\dfrac{x}{5}}\cdot\arccos\left(1-2x^3\right)$. **3.12.** $2^{x^2-\sqrt{x}}\cdot\arcsin\sqrt[3]{x-5}+\pi$.

3.13. $x\cos 2^{\operatorname{tg}x}+\ +e^{-x^2}+\sqrt{x}$. **3.14.** $3\sqrt{x^2-1}\cdot e^{\arcsin\frac{\sqrt{x}}{x+1}}$.

3.15. $2\operatorname{arctg}e^{\sqrt{5x}}-\ln^3\left(x^3-2\ln\left(x^2+1\right)\right)$.

3.16. $\cos\log_2\operatorname{arctg}\sqrt{e^{x^2}-\sin 5x}+\ln 2e^2$. **3.17.** $3\arcsin\log_2\left(1+\sin^2\left(x+3\right)\right)$.

3.18. $5\sin^2\dfrac{1-x}{1+x}\cdot 2^{\sqrt{3\operatorname{tg}x}}$. **3.19.** $x\cdot\sin\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\ln\left(2x-x^5\right)}$. **3.20.** $4\arccos e^{-\operatorname{tg}\sqrt{1-x}}$.

Знайти похідні, використовуючи основну логарифмічну тотожність (див. формулу $(5.1')$):

4.1. x^{x+1}. **4.2.** $\left(\cos 2x\right)^{\sqrt{x+1}}$. **4.3.** $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\operatorname{tg}5x}$. **4.4.** $\left(x^2-1\right)^{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

4.5. $\left(\sqrt{\arcsin x}\right)^{\sin 6x}$. **4.6.** $\left(2x-5\right)^2\cdot\left(3x+1\right)^4\cdot\left(x^2+1\right)^3$. **4.7.** $\dfrac{e^{x^2}\cdot\arcsin\left(x^3\right)}{x^3-1}$.

4.8. $\sqrt[5]{\frac{\left(1-x^2\right)\cdot\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^3}}$. **4.9.** $\frac{(4x+9)^3\cdot\sqrt[5]{(2x+3)^7}}{\sqrt[4]{(3x+1)^6}}$. **4.10.** $\frac{\sqrt{(1-x)\cos\sqrt{x}}}{\sin\left(x^2-1\right)}$.

Скласти рівняння дотичної і нормалі до таких кривих:

5.1. $y=\frac{x+1}{x-1}$ у точці $M_0(2;3)$. **5.2.** $y=\sqrt{x^2-1}$ у точці $M_0\left(2;\sqrt{3}\right)$.

5.3. $L=\left\{(x;y):x=t^2-1,\ y=t^2+t-3\right\}$ у точці $M_0(3;-1)$.

5.4. $L=\left\{(x;y):x=2\cos t,\ y=4\sin t\right\}$ у точці, яка відповідає значенню $t_0=\frac{\pi}{3}$. **5.5.** $y=x^3+4x^2-1$ у точці з абсцисою $x_0=-2$.

6. З точки $A(-1;-2)$, що не лежить на параболі $y=x^2-x-1$, провести дотичні до цієї параболи.

7. Скласти рівняння дотичної, що проведена з точки $A(0;-1/2)$ до частини гіперболи $y=\sqrt{x^2-1}$.

8. До кривої $y=x^4-2x^2+5x-1$ провести дотичні, паралельні прямій $5x-y+1=0$.

9. Закон прямолінійного руху точки вздовж осі Ox задається функцією $x=2+t^2+\frac{t^3}{3}$ (x – в метрах, t – в секундах). Знайти швидкість та прискорення у моменти $t=0$, $t=2$.

10. Точка рухається вздовж осі Ox за законом $x=\frac{1}{3}\left(t^3-3t^2+3t\right)$. В який момент часу вона зупиниться?

11. Визначити кінетичну енергію точки одиничної маси, що рухається вздовж осі Ox за законом $x=\ln\left(1+t^2\right)$,через 2 секунди після початку руху.

12. Знайти кутову швидкість і кутове прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = 1 + 3t + t^2$, через 2 секунди після початку руху.

13. Знайти приріст і диференціал функції $\sqrt{x}$ при $x_0 = 9$ і $\Delta x = 0.2$. Визначити абсолютну і відносну похибки, які отримаємо при заміні приросту диференціалом.

14. Знайти наближені значення заданих виразів: 1. $\sqrt[4]{82}$. 2. $ln\,\mathrm{tg}42^0 45'$. 3. $\arcsin 0.47$. 4. 0.98^4. 5. $\mathrm{ctg}45^0 23'$. 6. $\mathrm{arctg}1.08$.

15. Довести наближені рівності: $(1+x)^p \approx 1 + px$, $\ln(1+x) \approx x$,

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x,\ x_0 > 0.$$

16. В яких точках дотична до кривої $y = x^2 - 4x + 3$: а) паралельна осі Ox; б) утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{4}$?

17. В якій точці дотична до кривої $y^2 = 2x^3$ перпендикулярна прямій $4x - 3y - 2 = 0$?

18. Рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + bx + c$ у точці $M_0(1;1)$ має вигляд $y = x$. Знайти b і c.

Знайти при $t = t_0$ похідну параметрично заданих функцій:

19.1. $x = \ln(1+t^2),\ y = t - \mathrm{arctg}t,\ t_0 = 1$. **19.2.** $x = te^t,\ y = te^{-t},\ t_0 = 1$.
19.3. $x = t(1 - \sin t),\ y = 2t\cos t,\ t_0 = 0$. **19.4.** $x = -te^t,\ y = \arcsin t,\ t_0 = 0$.

Знайти похідну $y'(x)$ для функцій, які задані параметрично:
20.1. $x = t^3 + 1,\ y = t^2 + 2$. **20.2.** $x = 2\sin t - \sin 2t,\ y = 2\cos t + \cos 2t$.
20.3. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$. **20.4.** $x = e^{-t} + t,\ y = t^3 + \sin t$.

Написати рівняння дотичної до кривих в точках, що відповідають вказаним значенням параметра:

21.1. $L=\left\{(x;\,y;\,z): x=\operatorname{tg}t,\ y=\sin t,\ z=e^{-t^3}\right\}$, $t_0=0$.

21.2. $L=\left\{(x;\,y;\,z): x=e^{\cos t},\ y=t^2,\ z=\ln(1+t)\right\}$, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$.

21.3. $L=\left\{(x;\,y;\,z): x=\cos^2 t,\ y=\sqrt{1+t^2},\ z=t^3\right\}$, $t_0=1$.

21.4. $L=\left\{(x;\,y;\,z): x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ z=e^t\right\}$, $t_0=\pi$.

21.5. $L=\left\{(x;\,y;\,z): x=\operatorname{tg}t,\ y=\sin t,\ z=e^{-t^3}\right\}$, $t_0=0$.

Знайти елемент довжини дуги таких кривих:

22.1. $L=\left\{(x;y;z): x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=at\right\}$.

22.2. $L=\left\{(x;y): x=x,\ y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right\}$.

22.3. $L=\left\{(\varphi;\rho): \varphi=\varphi,\ \rho=1+\cos\varphi\right\}$.

22.4. $L=\left\{(x;y): x=t-\sin t,\ y=1-\cos t\right\}$.

22.5. $L=\left\{(\varphi;\rho;z): \rho=\rho(t),\ \varphi=\varphi(t),\ z=z(t)\right\}$, де ρ, φ, $z-$ циліндричні координати точки (див. підрозд. 10.3, п.1).

22.6. $L=\left\{(x;y): x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\right\}$.

22.7. $L=\left\{(\varphi;\theta;r): r=r(t),\ \theta=\theta(t),\ \ \varphi=\varphi(t)\right\}$, де r, θ, φ – сферичні координати точки (див. підрозд. 10.3, п.2).

22.8. $L=\left\{(x;y;z): x=x,\ y=f_1(x),\ z=f_2(x)\right\}$.

22.9. $x^3+y^3-3axy=0$, прийнявши за параметр $t=\dfrac{y}{x}$.

Знайти похідну $y'(x)$ від функцій, які задані неявно, у заданих точках:

23.1. $x^3+y-x^2-\operatorname{arctg}y+\dfrac{\pi}{4}=0,\ M_0(1;1)$.

23.2. $e^y-x-x^2y-e=0,\ M_0(0;1)$.

23.3. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{\pi}{9}+\ln 2=0,\ M_0(1;\sqrt{3})$.

Знайти $y''(x)$, якщо:

24.1. $x=e^t,\ y=t^3$. **24.2.** $x=R\cos t,\ y=R\sin t$.

24.3. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}=0$.

24.4. $y-x-\operatorname{arctg}y=0$.

Знайти кривину кривої у заданих точках:

25.1. $y = e^{2x}$, $M_0(0;1)$. **25.2.** $y = 2x - x^2$, $M_0(1;1)$.

25.3. $x = t^2$, $y = t - \dfrac{t^3}{3}$, $M_0\left(1;\dfrac{2}{3}\right)$. **25.4.** $y = x^4$, $M_0(1;1)$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $-6 + \dfrac{4}{3}x^3$. **1.2.** $-\dfrac{15x^4}{a^3}$. **1.3.** $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{9}{x^4}$.

1.4. $(2x-3)\left(x^2+2x-1\right) + \left(x^2-3x+3\right)\cdot(2x+2)$. **1.5.** $\dfrac{7}{(x+3)^2}$.

1.6. $\left(3x^2-3\right)\left(x^4+x^2+3\right) + \left(x^3-3x\right)\left(x^4+x^2+3\right)$.

1.7. $\dfrac{(2x+1)\left(x^3-1\right) - \left(x^2+x\right)\left(3x^2\right)}{\left(x^3-1\right)^2}$. **1.8.** $\dfrac{4v^3\left(v^3+2\right) - v^4\cdot 3v^2}{\left(v^3+2\right)^2}$. **1.9.** $\dfrac{6x+5}{\sqrt{2\pi}}$.

1.10. $-\dfrac{3x^2-2}{\left(x^3-2x+5\right)^2}$. **1.11.** $-\dfrac{10}{(2x-7)^2} + \dfrac{8}{x^2}$. **1.12.** $2x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{1}{4}}$.

1.13. $3x^{-\frac{7}{4}} - 2x^{-\frac{5}{3}}$. **1.14.** $2x\,\mathrm{ctg}x - \dfrac{x^2}{\sin^2 x}$. **1.15.** $\dfrac{\dfrac{x+3}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}x}{(x+3)^2}$.

1.16. $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos^2 x}$. **1.17.** $\dfrac{-\sin^2 x - (\cos x + 1)\cos x}{\sin^2 x}$.

1.18. $\dfrac{\sin 3x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot 3\cos 3x$. **1.19.** $\cos\dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$. **1.20.** $-\dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos^2 x \sin x$.

1.21. $\dfrac{1}{2}\sin 2(6x+9)$. **1.22.** $-\dfrac{1}{2\sin^2\left(\pi/4 + x/2\right)}$. **1.23.** $\cos x\cdot\cdot\sin(\sin x)$.

1.24. $-\dfrac{1}{x^2\cos 1/x}$. **1.25.** $4\left(1+\cos^2 x\right)^3\sin 2x$. **1.26.** $\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. **1.27.** $-4\mathrm{tgx}\cdot\ln^3\cos x$.

1.28. $\dfrac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$. **1.29.** $\dfrac{-\sin x}{\cos x + 3}$. **1.30.** $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\ln^{1/2}(x+2)}{x+2}$. **1.31.** $\dfrac{1}{x\ln x\cdot\ln\ln x}$.

1.32. $e^{-x+5}\left(x^2+6+2x\right)$. **1.33.** $e^{-\cos^2 x}(-\sin 2x)$. **1.34.** $e^{-x^3}\left(-3x^2\sin^2 3x + 3\sin 6x\right)$.

1.35. $\dfrac{10x^4+8}{1+\left(2x^5+8x\right)^2}$. **1.36.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x-7}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2x+7}}$. **1.37.** $\arcsin\ln x + \dfrac{x+2}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

1.38. $\dfrac{2x4^x-\left(x^2+1\right)4^x\ln 4}{4^{2x}}$. **1.39.** $25^{\frac{\ln x}{x}}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)\ln 25$. **1.40.** $5^{3\cos^2 x}\left(-3\sin 2x\right)\ln 5$.

1.41. $10^{x^2+3x+1}\ln 10\left(2x+3\right)$. **1.42.** $\cos\left(e^{x^2+3x-2}\right)e^{x^2+3x-2}\left(2x+3\right)$.

2.1. $\dfrac{2\sqrt{x}\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(11x^2+2\sqrt{x}\right)}{6x\sqrt[6]{x^5}}$. **2.2.** $e^{3x}\left(6x^3+15x+21+6x^2+5\right)$.

2.3. $\dfrac{\left(3x^2-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right)\cos x+\left(x^3-\sqrt[4]{x}\right)\sin x}{\cos^2 x}$. **2.4.** $6x^2\arcsin x+\dfrac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

2.5. $2^{\sin x}\ln 2\cdot\sin x+\dfrac{2^{\sin x}}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{x\ln 3}$. **2.6.** $e^{x^2}\dfrac{2x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}}{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}+2\sin 2x$.

2.7. $10(2x+7)^4\sin 3x+(2x+7)^5 3\cos 3x-\dfrac{5}{2\sqrt{x(1-x)}}$. **2.8.** $\dfrac{28}{5}(7x-3)^{-\frac{1}{5}}\operatorname{tg}2x+$

$+\dfrac{2\sqrt[5]{(7x-3)^4}}{\cos^2 2x}+\operatorname{ctg}x$. **2.9.** $\dfrac{16\sin 2x}{\cos^5 2x}+2x\arcsin x^3+\dfrac{3x^4}{\sqrt{1-x^6}}$.

2.10. $e^{x\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right)-4^{\cos 2x}\left(-2\sin 2x\right)\ln 4$.

2.11. $-10xe^{-5x^2+2}+\dfrac{2}{\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}\,(1+x)}-6$. **2.12.** $\dfrac{6x}{\sqrt{1-x^4}}$.

2.13. $-\dfrac{3(2x+3)}{\left(x^2+3x+1\right)\ln 2}$. **2.14.** $e^{-x^3}\left(-3x^2\log_2 x+\dfrac{1}{x\ln 2}\right)$. **2.15.** $5^x\ln 5-3x^2+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

2.16. $3x^2(2+3x)(5x+2)-\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}$. **2.17.** $\dfrac{-e^x\left(3+4^x\right)-\left(5-e^x\right)4^x\ln 4}{\left(3+4^x\right)^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.18. $2x\ln x+x+\dfrac{\operatorname{tgx}\cos^2 x-x\ln 2\log_2 x}{x\ln 2\sin^2 x}$. **2.19.** $\dfrac{4x^3-2\sin 2x}{x^4+\cos 2x}$.

2.20. $-3\cdot 2^{\cos 3x}\ln 2\sin 3x-3\sin 6x$. **2.21.** $\dfrac{3^{\operatorname{tgx}}\ln 3}{\cos^2 x}+\dfrac{2\ln x}{x}$.

2.22. $\dfrac{3\log^2{}_2\sin x}{\sin x\ln 2}\cos x-\dfrac{8}{x^3}$. **2.23.** $\dfrac{5^{\cos x}\ln 5\sin x}{2\sqrt{1-5^{\cos x}}}+\dfrac{2x^2+2x}{(1+2x)^2}$.

2.24. $\dfrac{1}{\cos^2\left(\sqrt[3]{\arcsin x}\right)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\arcsin^2 x}}+2xe^{-2x}+x^2\left(-2e^{-2x}\right)$.

3.1. $\dfrac{x-9x^2\cos x+3x^3\sin x}{\sqrt{x^2-6x^3\cos x}}$.

3.2. $\left(\dfrac{6tg3x}{\cos^2 3x}+\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\mathrm{tg}^2 3x+\sin\sqrt{x}\right)^2}}-\ln x-1$.

3.3. $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+4x)}-\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x}\left(x^2-1\right)^2}+4x\cos x^2$. **3.4.** $\dfrac{1}{\left(\arcsin x-x^3\right)\ln 2}\cdot\left(\dfrac{1-3x^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+$

$+\dfrac{x+1}{(x-1)^2\,2\sqrt{x}}+6x$. **3.5.** $\dfrac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x^3+\mathrm{tg}\left(x^2-x\right)}}\cdot\left(-4x\left(x^3+\mathrm{tg}\left(x^2-x\right)\right)+3x^2+\dfrac{2x-1}{\cos^2\left(x^2-x\right)}\right)$.

3.6. $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}-\dfrac{3x^2}{\sqrt{\mathrm{arctg}2x^3}\left(1+4x^6\right)}-\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$.

3.7. $3^{2x-x^2}\left((2-2x)\ln 3ctg\ln x-\dfrac{1}{x\sin^2(\ln x)}\right)$.

3.8. $\dfrac{1}{\ln 2\cdot\cos\left(x^2\right)}\left(-2x\sin\left(x^2\right)\right)\left(x^2+\sqrt[3]{x}\right)^{-1}+\log_2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(-\left(x^2+\sqrt[3]{x}\right)^{-2}\left(2x+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\right)$.

3.9. $3x^2\mathrm{tg}x^2+\dfrac{2x^4}{\cos^2 x^2}+\dfrac{\mathrm{ctg}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}\sin^2\sqrt{x+3}}+\dfrac{3}{x}$. **3.10.** $\dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\arcsin(2x)\left(\sin\dfrac{x}{x+1}\right)}{\cos^2\dfrac{x}{x+1}}+$

$+\dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin(2x)+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-4x^2}}\right)\cos\dfrac{x}{x+1}}{\cos^2\dfrac{x}{x+1}}$.

3.11. $\dfrac{6x^2\cos^2\sqrt{\dfrac{x}{5}}}{\sqrt{1-\left(1-2x^3\right)^2}}-\sin\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{x}{5}}\right)\arccos\left(1-2x^3\right)$.

3.12. $2^{x^2-\sqrt{x}}\ln 2\left(2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\arcsin\sqrt[3]{x-5}+\dfrac{2^{x^2-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2}}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-5)^2}}$. **3.13.** $\cos 2^{\mathrm{tg}x}-$

$-\dfrac{x\sin 2^{\mathrm{tg}x}\ln 2}{\cos^2 x}-2xe^{-x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.14.** $3e^{\arcsin\frac{\sqrt{x}}{x+1}}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}(1-x)}{\sqrt{(x+1)^2-x\cdot 2\sqrt{x}}}\right)$.

3.15. $\dfrac{\sqrt{5}\cdot e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{x}\left(1+\left(e^{\sqrt{5x}}\right)^2\right)}-\dfrac{3\ln^2\left(x^3-2\ln\left(x^2+1\right)\right)}{x^3-2\ln\left(x^2+1\right)}\left(3x^2-\dfrac{4x}{x^2+1}\right)$.

3.16. $\dfrac{-\sin\log_2 \operatorname{arctg}\sqrt{e^{x^2}-\sin 5x}}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{e^{x^2}-\sin 5x}\right)}\cdot\dfrac{2xe^{x^2}-5\cos 5x}{\ln 2\cdot\left(1+e^{x^2}-\sin 5x\right)\cdot 2\sqrt{e^{x^2}-\sin 5x}}$.

3.17. $\dfrac{3}{\sqrt{1-\left(\log_2\left(1+\sin^2(x+3)\right)\right)^2}}\cdot\dfrac{\sin 2(x+3)}{\ln 2\cdot\left(1+\sin^2(x+3)\right)}$.

3.18. $5\sin 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(-\dfrac{2}{(x+1)^2}\right)\cdot 2^{\sqrt{3\operatorname{tg}x}}+5\sin^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\cdot\dfrac{2^{\sqrt{3\operatorname{tg}x}}\cdot\ln 2}{2\sqrt{3\operatorname{tg}x}}\cdot\dfrac{3}{\cos^2 x}$.

3.19. $\sin\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\ln\left(2x-x^5\right)}+x\cos\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\ln\left(2x-x^5\right)}\times$

$\times\dfrac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}\ln\left(2x-x^5\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-\dfrac{2-5x^4}{\left(2x-x^5\right)\sin^2\ln\left(2x-x^5\right)}\right)$. **3.20.** $-\dfrac{4e^{-\operatorname{tg}\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-\left(e^{-\operatorname{tg}\sqrt{1-x}}\right)^2}\cdot 2\sqrt{1-x}}\times$

$\times\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{1-x}}$.

4.1. $\left(\ln x+\dfrac{x+1}{x}\right)x^{x+1}$. **4.2.** $\left(\dfrac{\ln\cos 2x}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{2\sqrt{x+1}\sin 2x}{\cos 2x}\right)(\cos 2x)^{\sqrt{x+1}}$.

4.3. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5\ln x}{\cos^2 5x}+\dfrac{\operatorname{tg}5x}{x}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\operatorname{tg}5x}$. **4.4.** $\left(\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}+\dfrac{2x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x^2-1}\right)\left(x^2-1\right)^{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

4.5. $\dfrac{1}{2}\left(6\cos 6x\ln\arcsin x+\dfrac{\sin 6x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\sqrt{\arcsin x}\right)^{\sin 6x}$.

4.6. $4(2x-5)(3x+1)^4\left(x^2+1\right)^3+$

$+12(2x-5)^2(3x+1)^3\left(x^2+1\right)^3+6x(2x-5)^2(3x+1)^4\left(x^2+1\right)^2$.

4.7. $\left(2x+\dfrac{3x^2}{\arcsin\left(x^3\right)\sqrt{1-x^6}}-\dfrac{3x^2}{x^3-1}\right)\dfrac{e^{x^2}\arcsin\left(x^3\right)}{x^3-1}$. **4.8.** $\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{2x}{1-x^2}-\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x}-\right.$

$\left.-\dfrac{6x}{x^2+1}\right)\cdot\sqrt[5]{\dfrac{\left(1-x^2\right)\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^3}}$. **4.9.** $\left(\dfrac{12}{4x+9}+\dfrac{14}{5(2x+3)}-\dfrac{9}{2(3x+1)}\right)\dfrac{(4x+9)^3(2x+3)^{\frac{7}{5}}}{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}$.

4.10. $\left(\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}-\dfrac{2x\cos\left(x^2-1\right)}{\sin\left(x^2-1\right)}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{(1-x)\cos\sqrt{x}}}{\sin\left(x^2-1\right)}$.

5.1. $2x+y-7=0$, $-x+2y-4=0$. **5.2.** $2x-\sqrt{3}y-1=0$, $\sqrt{3}x+2y-4\sqrt{3}=0$.

5.3. $3x-4y-13=0$, $4x+3y-\ -9=0$. **5.4.** $2x+\sqrt{3}y-8=0$, $\sqrt{3}x-2y+3\sqrt{3}=0$.

5.5. $4x+y+1=0$, $x-4y+30=0$.

6. $\left(3+2\sqrt{3}\right)x+y+2\sqrt{3}+5=0$, $\left(3-2\sqrt{3}\right)x+y-2\sqrt{3}+5=0$.

7. $\sqrt{5}x+2y+1=0$, $-\sqrt{5}x+\ +2y+1=0$.

8. $5x-y-1=0$**,** $5x-y-2=0$**.**

9. $v(0)=0,\ a(0)=2\,м/c^2,\quad v(2)=8\,м/c,\quad a(2)=6\,м/c^2$.

10. 1**. 11.** $8/25$**. 12.** $\omega=7\,1/c,\ \varepsilon=2\,1/c^2$**. 13.** 0.0001, 0.003012**.**

14.1. 3.0093. **14.2.** -0.078. **14.3.** 0.4889. **14.4.** 0.92. **14.5.** 0.987.
14.6. 0.825.

16. а) $x=2$ **; б)** $x=\frac{5}{2}$**. 17.** $\frac{1}{8}$**. 18.** $b=-1,\ c=1$ **.19.1.** $y'(\ln 2)=\frac{1}{2}$**. 19.2.** $y'(0)=1$**.**

19.3. $y'(0)=2$ **. 19.4.** $y'(0)=-1$**. 20.1.** $y'(x)=\frac{2}{3t}$**. 20.2.** $y'(x)=-\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)$**.**

20.3. $y'(x)=\frac{1+\mathrm{tg}t}{1-\mathrm{tg}t}$**. 20.4.** $y'(x)=\frac{3t^2+\cos t}{1-e^{-t}}$**. 21.1.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$**.**

21.2. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-\pi^2/4}{\pi}=\frac{z-ln\left(1+\pi/2\right)}{2/\pi+2}$ **. 21.3.** $\frac{x-\cos^2 1}{-\sin 2}=\frac{y-\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}=\frac{z-1}{3}$**.**

21.4. $\frac{x}{-e^{\pi}}=\frac{y+e^{\pi}}{-e^{\pi}}=\frac{z-e^{\pi}}{e^{\pi}}$ **. 21.5.** $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-3}$.

22.1. $dl=\sqrt{1+t^2+a^2}\,dt$ **. 22.2.** $dl=\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$**. 22.3.** $dl=2\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$**.**

22.4. $dl=2\sin\frac{t}{2}dt$**,** $t\in[0;2\pi]$**. 22.5.** $dl=\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$.

22.6. $dl=\frac{3}{2}a\sin 2t dt$ **,** $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$**.**

22.7. $dl=\sqrt{r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\,dt$.

22.8. $dl=\sqrt{1+\left(f_1'(x)\right)^2+\left(f_2'(x)\right)^2}\,dx$**.**

22.9. $dl=\frac{3a}{\left(1+t^3\right)^2}\sqrt{1+4t^2-4t^3-4t^5+4t^6+t^8}\,dt$**.**

23.1. $y'(1)=4$ **. 23.2.** $y'(0)=e^{-1}$**.**

23.3. $y'(1)=-(2+\sqrt{3})$. **24.1.** $3te^{-2t}(2-t)$. **24.2.** $\frac{-1}{R\sin^2 t}$. **24.3.** $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

24.4. $\frac{-(y^2+1)}{y^5}$. **25.1.** $K(0)=\frac{4}{5\sqrt{5}}$**. 25.2.** $K(1)=2$**. 25.3.** $K(1)=\frac{1}{2}$**.**

25.4. $K(1)=\frac{12}{17\sqrt{17}}$**.**

Розділ 6

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

6.1. Теорема про скінченний приріст (теорема Лагранжа)

Одним з найважливіших результатів диференціального числення є теорема про скінченний приріст (теорема про середнє значення диференціального числення).

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Якщо $f(a)=f(b)$, то існує така точка $c\in(a;b)$, що $f'(c)=0.$

Доведення. Нагадаємо, що неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ досягає на ньому як найменшого m, так і найбільшого M своїх значень: $f(d_1)=m, f(d_2)=M\left(d_1,d_2\in[a;b]\right)$ (див. с.73, глобальна властивість 1)). Можливі два випадки: 1) $m=M\Rightarrow f(x)=const\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow$ в якості c можна взяти довільну точку $(a;b)$; 2) $m<M\Rightarrow$ з умови $f(a)=f(b)$, що хоча б одна з точок d_1, d_2 належить інтервалу $(a;b)$. Припустимо, що $d_1\in(a;b)$. Тоді $\forall x\in(a;b), x\neq d_1\Rightarrow f(x)-f(d_1)>0$. Отже, для $\forall(x>d_1)\in\in(a;b)$ $\dfrac{f(x)-f(d_1)}{x-d_1}\geq 0.$ Оскільки функція $f(x)$ є диференційовною в точці d_1, то після переходу до границі при $x\to d_1, x>d_1$ у попередній нерівності, отримуємо $f'_+(d_1)=f'(d_1)\geq 0.$ Аналогічно $\forall(x<d_1)\in(a;b)$ маємо $\dfrac{f(x)-f(d_1)}{x-d_1}\leq 0$ і $f'_-(d_1)=f'(d_1)\leq 0.$ Таким чином, $f'(d_1)=0$ і, у цьому випадку $c=d_1.$ Якщо $d_2\in(a;b)$, то так само доводиться, що $c=d_2.$

Теорема Ролля застосовується при доведенні теореми Лагранжа

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і для всіх $x\in(a;b)$ існує скінченна або нескінченна похідна $f'(x)$.

Тоді

$$\boxed{\exists c \in (a; b):\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x.$$

Зрозуміло, що функція $g(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a; b)$. Крім того, вона приймає однакові значення на кінцях відрізку $[a; b]$:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{b - a},$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b = \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{b - a}.$$

Тоді на підставі теореми Ролля існує така точка $c \in (a; b)$, що $g'(c) = 0.$

Оскільки

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

то

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Отже маємо: $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Особливість цієї теореми полягає у тому, що в її твердженні бере участь невідома точка c, про яку нам відомо тільки те, що вона лежить десь на проміжку $(a; b)$. Незважаючи на цю невизначеність, теорема відіграє вирішальну роль при доведенні багатьох тверджень вищої математики та практичній оцінці приросту функції, коли відома множина значень її похідної.

З геометричної точки зору сформульована теорема полягає у наступному.

Будемо зсувати хорду $[AB]$ (рис. 6.1) паралельно до самої себе. Коли ця пряма перетне графік в останній раз, вона стане дотичною до нього в деякій точці $C(c;f(c))$.

Зрозуміло, що тангенс кута нахилу дотичної $f'(c)$ буде дорівнювати тангенсу кута нахилу хорди $[AB]$. Але кутовий коефіцієнт хорди дорівнює $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тому

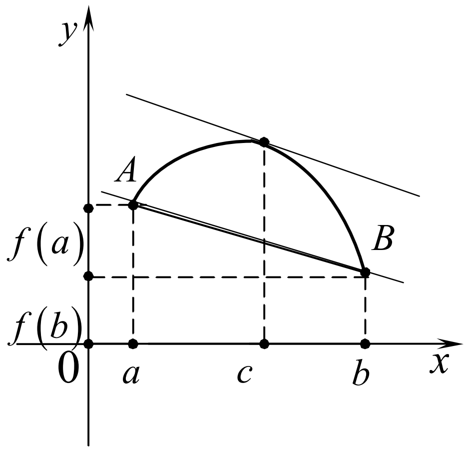


Рис. 6.1

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Часто використовуються інші форми запису цієї теореми. Позначимо кінці відрізка через x_0 та $x_0+\Delta x$, тоді

$$\exists c(x_0;x_0+\Delta x):\Delta f(x_0)=f'(c)\cdot\Delta x. \qquad (6.1)$$

Формула (6.1) програє при практичному застосуванні (при малих Δx) наближеному співвідношенню

$$\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x=df(x_0),$$

внаслідок того, що невідомо, де знаходиться точка c.

Якщо кінці відрізка позначити через x_0 та x, то теоремі про скінченний приріст можна надати вигляду

$$f(x)=f(x_0)+f'(c)\cdot(x-x_0),\ \ c\in(x_0;x).$$

Приклад 1. Перевірити правильність теореми про скінченний приріст таких функцій: 1) x^2-3x+5 на $[1;2]$; 2) $\sqrt[3]{x}$ на $[-1;1]$; 3) $\ln x$ на $[1;e]$; 4) $1-|x|$ на $[-1;1]$. Знайти відповідне значення c.

Розв’язання:

1) Умови теореми виконані:

$$f(2)-f(1)=f'(c)\cdot(2-1)\Rightarrow 3-3=(2c-3)\cdot 1\Rightarrow c=\frac{3}{2}.$$

2) Умови теореми виконані:

$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$, якщо $x\neq 0$, $f'(0)=+\infty$ (див.приклад 2 3), підр. 5.2);

$$f(1)-f(-1)=f'(c)\cdot 2\Rightarrow f'(c)=1\Rightarrow \sqrt[3]{c^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

3) Умови теореми виконані:

$$f(e)-f(1)=f'(c)\cdot(e-1)\Rightarrow 1-0=\frac{1}{c}(e-1)\Rightarrow c=e-1.$$

4) Умови теореми не виконані, тому що в точці $x_0=0$ не існує похідної (ні скінченної, ні нескінченної). Оскільки $f'(x)=f'_-(0)=1$ $\left(x\in(-1;0)\right)$, $f'(x)=f'_+(0)=-1$ $\left(x\in(0;1)\right)$, то немає точки $c\in(-1;1)$, такої що $f(1)-f(-1)=0=f'(c)\left(1-(-1)\right)$.

Приклад 2. В якій точці дотична до кривої $y=x^2-8x$ паралельна хорді, що стягує точки $A(-1;9)$ та $B(5;-15)$?

Розв'язання:

$f(5)-f(-1)=f'(c)\cdot\left(5-(-1)\right)\Rightarrow -15-9=(2c-8)\cdot 6\Rightarrow$

$\Rightarrow 2c-8=-4\Rightarrow c=2\Rightarrow C(2;-12)$.

6.2. Формула Тейлора

Припустимо, що функція $f(x)$ має n похідних у точці x_0.

Означення. **Многочленом Тейлора** n-го степеня функції $f(x)$ у точці x_0 називається многочлен

$$\boxed{T_n(x,x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.}$$

Зокрема, $T_0(x,x_0)=f(x_0)$, $\quad T_1(x,x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$,

$$T_2(x,x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Теорема Тейлора. Нехай функція $f(x)$ $n+1$ разів диференційовна на проміжку $(a;b)$ та $x_0 \in (a;b)$. Тоді для будь-якого $x \in (a;b)$ справедлива формула

$$\boxed{f(x) = T_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},} \qquad (6.2)$$

де точка c розташована між точками x_0 та x.

Співвідношення (6.2) називається формулою Тейлора n-го порядку. Похибка наближеної рівності $f(x) \approx T_n(x, x_0)$ оцінюється залишковим членом формули Тейлора

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Припустимо, що $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$ при $x \in (a\,;b)$. Тоді для залишкового члена дістанемо оцінку

$$\left|R_n(x\,, x_0)\right| \le M \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Досить часто ця оцінка відхилення функцій від її многочлена Тейлора сильно завищена. Збільшуючи степінь многочлена Тейлора, залишковий член $R_n(x, x_0)$ можна зробити як завгодно малим (величина $\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ зі зростанням n) навіть при значеннях x, не обов'язково близьких до x_0.

У тому разі, коли цікавляться не чисельною величиною похибки, а лише її порядком відносно $x - x_0$, користуються **локальним варіантом теореми Тейлора**: якщо функція $f(x)$ n раз диференційована в точці x_0, то

$$f(x) = T_n(x, x_0) + o\left((x-x_0)^n\right),\ x \to x_0\,.$$

Іншими словами, чим більш високим є степінь многочлена Тейлора і чим ближче x до x_0, тим менше відрізняються один від одного графіки функції та її многочлена Тейлора

$$\left|f(x)-T_n(x, x_0)\right| = o\left(\left|x-x_0\right|^n\right),\ x \to x_0.$$

Іноді говорять, що порядок дотику графіків функції $f(x)$ та її многочлена Тейлора $T_n(x, x_0)$ в точці $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ вище n (рис. 6.2).

Елементи доведення локального варианта формули Тейлора наведені у наступному розділі.

Суть формули Тейлора полягає у тому, що вона дозволяє оцінити похибку при заміні функції $f(x)$, яка може мати досить складну структуру, більш простою функцією – многочленом.

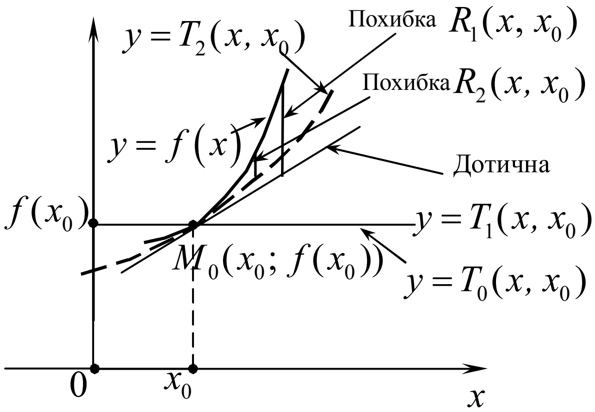


Рис. 6.2

Закони природи, взагалі кажучи, добре описуються функціями, які є диференційовними будь-яку кількість разів, а такі функції з довільною точністю можна замінити многочленами.

Приклад 3. Написати формулу Тейлора для функцій:

а) e^x, $x_0=0$, $n=5$;

б) $\sin x$, $x_0=0$, $n=3$;

в) $\cos x$, $x_0=0$, $n=4$;

г) $\sqrt[3]{7-x}$, $x_0=-1$, $n=2$.

Розв'язання:

а) Маємо $\left(e^x\right)^{(n)}_{|x=0} = e^x{}_{|x=0} = 1$, $T_5(x, 0) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$.

Отже, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + e^c\dfrac{x^6}{6!}$.

Наближена формула має вигляд $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$.

б) Маємо $\sin 0 = 0$, $(\sin x)'_{|x=0} = 1$, $(\sin x)''_{|x=0} = 0$, $(\sin x)'''_{|x=0} = -1$, $(\sin x)^{IV} = \sin x$. Отже, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cos c \cdot \frac{x^5}{5!}$. Наближена формула має вигляд $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, а її похибка $\left|R_3(x,\,0)\right| \le \frac{|x|^5}{5!}$.

в) Формула Тейлора має вигляд $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cos c \cdot \frac{x^6}{6!}$. Наближена формула $\cos x \approx T_4(x,0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ має похибку $\left|R_4(x,\,0)\right| \le \frac{|x|^6}{6!}$. Наприклад , якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, то похибка при користуванні наближеною формулою від'ємна і за модулем не перевищує $\frac{0.6^6}{720} < 0.00007.$

г) $f(-1) = 2$, $f'(x) = -\frac{1}{3}(7-x)^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}(7-x)^{-\frac{5}{3}}$,

$f'''(x) = -\frac{10}{27}(7-x)^{-\frac{8}{3}}$.

Отже, $\sqrt[3]{7-x} = 2 - \frac{1}{12}(x+1) - \frac{1}{288}(x+1)^2 - \frac{5}{81}(7-c)^{-\frac{8}{3}}(x+1)^3$.

Приклад 4. Знайти многочлен, за допомогою якого значення функції e^x на відрізку $-1 \le x \le 2$ обчислюється з точністю 10^{-3}.

Розв'язання:

Оскільки $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, то при

$x \in [-1;\,2]$ $\left|e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Оскільки $\frac{e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3}$ при $n = 10$, то дану задачу можна розв'язати за допомогою многочлена Тейлора десятого степеня

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{10}}{10!}.$$

Користуючись формулою Тейлора, можна отримати асимптотичні формули, більш точні, ніж ті, що використовувались раніше.

Наприклад, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right), \quad x \to 0$.

Використовуючи подібні формули, можна легко знаходити границі, які старими методами знайти не вдавалось:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2!}} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) - x}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) - x + \frac{x^2}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Зауваження. Формула Тейлора може бути записана за допомогою диференціалів. Наприклад, формула Тейлора другого порядку приймає вигляд

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(c).$$

6.3. Границі відношень нескінченно малих і нескінченно великих (правило Бернуллі–Лопіталя)

При знаходженні границь відношення нескінченно малих (нескінченно великих) часто застосовується наступний результат.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні у деякому проколеному околі $\overset{0}{U}(x_0)$ точки x_0, причому $g'(x) \neq 0$, якщо $x \in \overset{0}{U}(x_0)$.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ одночасно при $x \to x_0$ наближаються до 0 (або до $+\infty, -\infty, \infty$). Тоді, якщо $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A – число або один із символів: $+\infty, -\infty, \infty$), то $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема (з відповідними замінами умов) залишається справедливою, якщо x_0 – один із символів: $+\infty, -\infty, \infty$.

При обчисленні за допомогою похідної границь інших виразів їх необхідно алгебраїчними перетвореннями привести до відношення нескінченно малих (нескінченно великих).

Приклад 5. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}$ $(p>0)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{a^x}$ $(p>0,\, a>1)$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.

Розв'язання:

1) $f(x)=\ln x\to+\infty$; $g(x)=x^p\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Переконаємось у тому, що границя відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ існує

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^p)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{px^{p-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{px^p}=0.$$

Таким чином, на основі правила Бернуллі-Лопіталя границя відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ існує і дорівнює 0

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=0.}$$

Отже, логарифмічна функція при $x\to+\infty$ зростає повільніше, ніж степенева.

2) Оскільки степенева функція неперервна, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{a^{x/p}}\right)^p=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^{x/p}}\right)^p.$$

Оскільки $f(x)=x\to+\infty$, $g(x)=a^{\frac{x}{p}}\to+\infty$ при $x\to+\infty$ $(p>0,\, a>1)$, то з урахуванням правила Бернуллі-Лопіталя отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(a^{x/p})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^{x/p}\cdot\ln a\cdot 1/p}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^{x/p}}=0.$$

Таким чином,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=0\ \ (p>0,\, a>1)}$$

і, отже, показникова функція зростає швидше степеневої.

3) Скористаємось тепер основною логарифмічною тотожністю та неперервністю показникової функції

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)}{1/x}}.$$

Все звелось до знаходження границі $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)}{1/x}$.

Застосуємо правило Бернуллі-Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2}=-\frac{2}{\pi}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Застосуємо правило Бернуллі-Лопіталя для доведення локального варианта формули Тейлора.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ n разів диференційовна у точці x_0. то

$$\boxed{f(x)=T_n(x,\,x_0)+o(|x-x_0|^n),\ \ x\to x_0,} \qquad (6.3)$$

Доведення. Обмежимось для простоти випадком $n=2$.

Різницю $R_2(x,x_0)$ між функцією $f(x)$ і її многочленом Тейлора другого степеня в точці x_0 позначимо для короткості через $R_2(x)$:

$$R_2(x)=f(x)-T_2(x,\,x_0)=f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2).$$

Безпосередньо знаходимо: $T_2(x_0\,,x_0)=f(x_0)$,

$$T_2'(x,x_0)\big|_{x_0}=\left(f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right)'\Big|_{x_0}=$$
$$=\left(f'(x_0)+f''(x_0)\cdot(x-x_0)\right)\big|_{x_0}=f'(x_0)\ ,$$

$$T_2''(x,x_0)\big|_{x_0}=\left(T_2'(x\,,x_0)\right)'\big|_{x_0}=f''(x_0).$$

Отже,

$$R_2(x_0)=f(x_0)-T_2(x_0,x_0)=f(x_0)-f(x_0)=0,$$
$$R_2'(x_0)=f'(x_0)-T_2'(x_0,x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0,$$
$$R_2''(x_0)=f''(x_0)-T_2''(x_0,x_0)=f''(x_0)-f''(x_0)=0.$$

Для оцінки порядка мализни $R_2(x)$ при $x\to x_0$ знайдемо границю $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_2(x)}{(x-x_0)^2}$. Для того, щоб обчислити цю границю, доведеться двічі застосувати правило Бернуллі-Лопіталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_2'(x)}{2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_2''(x)}{2}=0,$$

отже, $R_2(x)=o((x-x_0)^2),\ x\to x_0$ і, таким чином,

$$f(x)=T_2(x,x_0)+o((x-x_0)^2),\ x\to x_0\,.$$

ВПРАВИ

Чи справедлива теорема про скінченний приріст для функцій:

1.1. $x^2+6x-35$ на відрізку $[-5;-1]$. **1.2.** x^3-x^2-x+1 на $[-1;1]$.

1.3. $\ln\sin x$ на $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$. **1.4.** x^3-4x^2+5x на $[0;3]$.

2. На дузі (AB) кривої $y=x^3-3x$ знайти точку, в якій дотична паралельна хорді, що стягує точки $A(0;0),B(2;2)$.

3.Довести, що рівняння $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}=0$ не має дійсних коренів.

Встановити асимптотичні формули при $x\to 0$:

4.1. $\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$. **4.2.** $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$.

4.3. $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+o\left(x^3\right)$.

4.4. $\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$. **4.5.** $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$.

4.6. $\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o\left(x^4\right)$. **4.7.** $\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o\left(x^4\right)$.

Знайти границі:

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. **5.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\ln\left(x+e^x\right)$.

5.3. $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{3}{\ln x}}$. **5.4.** $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{arctg}x)^{\frac{4}{\ln x}}$. **5.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x}\right)$. **5.7.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$. **5.8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to +0}x\cdot e^{\frac{2}{x}}$. **5.10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-x}{\arcsin x-x}$. **5.11.** $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\ln\left(1+x^2\right)-x^2}$. **5.13**. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot e^{2x}+\ln\left(1-x^2\right)}{x\cos x-\sin x}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-\sqrt{1+2x^3}}{\ln\left(1+x^2\right)-x^2+\frac{x^4}{2}}$. **5.15.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{\sin x}-\operatorname{tg}^2x-x}{x+x^3-\sin x}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^4}{2}}-\cos x^2}{x^8}$.

Оцінити за допомогою формули Тейлора похибку наближених формул:

6.1. $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$, $x\in[-1;1]$. **6.2.** $\operatorname{tg}x\approx x+\frac{x^3}{3}$, $x\in[-0.1;0.1]$.

6.3. $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, $x \in [-0.1; 0.1]$.

6.4. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$, $x \in [0; 0.2]$.

Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ (формула Маклорена) до $o(x^n)$ функції:

7.1. $f(x) = (x-3)e^{-2x}, n = 4$. **7.2.** $f(x) = (3x-1)\sqrt[3]{1+2x}$, $n = 3$.

7.3. $f(x) = \frac{e^x + 3x}{e^{2x}}$, $n = 5$. **7.4.** $f(x) = \frac{-x}{3x+2}$, $n = 5$.

За допомогою теореми про скінченний приріст довести нерівності:

8.1. $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$. **8.2.** $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

ВІДПОВІДІ

1.1. так. **1.2.** так. **1.3.** так. **1.4.** так.

2. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{10}{3\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{10}{3\sqrt{3}}\right)$.

5.1. 2. **5.2.** 2. **5.3.** e^{-3}. **5.4.** e. **5.5.** $\frac{1}{3}$. **5.6.** $\frac{1}{2}$. **5.7.** $\frac{1}{2}$. **5.8.** –2.

5.9. ∞ . **5.10.** –2. **5.11.** $-\infty$. **5.12.** $-\frac{1}{3}$. **5.13** 16. **5.14.** $\frac{9}{2}$.

5.15. $\frac{3}{7}$. **5.16.** $\frac{1}{6}$.

6.1. $2 \cdot 10^{-4}$. **6.2.** $2 \cdot 10^{-6}$. **6.3.** $3.4 \cdot 10^{-6}$. **6.4.** $4 \cdot 10^{-6}$.

7.1 $-3 + 7x - 8x^2 + 6x^3 - 10\frac{x^4}{3} + o(x^4)$. **7.2.** $-1 + \frac{7}{3}x + \frac{22}{9}x^2 - \frac{124}{27}x^3 + o(x^3)$.

7.3. $1 + 2x - \frac{11}{2}x^2 + \frac{35}{6}x^3 - \frac{95}{24}x^4 + \frac{239}{120}x^5 + o(x^5)$.

7.4. $-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{8}x^3 + \frac{27}{16}x^4 - \frac{81}{32}x^5 + o(x^5)$.

Розділ 7

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

У різних сферах людської діяльності (керування виробництвом, планування бойових операцій) виникають задачі, в яких потрібно знайти найбільш вдалий (оптимальний) спосіб дії. Більшість цих задач оптимізації надзвичайно складна і їх розв'язання ґрунтується на математичному моделюванні з використанням обчислювальних машин. Проте деякі прості задачі керування можна розв'язати методами диференціального числення (теорема про скінченний приріст, формула Тейлора).

7.1. Проміжки монотонності функції

Теорема про скінченний приріст приводить до наступної ознаки монотонності (зростання чи спадання) функції.

Теорема. (**Достатня умова монотонності**). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ для $x\in(a;b)$, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на відрізку $[a;b]$.

$$\boxed{\begin{matrix} f'(x)>0\ \left(f'(x)<0\right), \\ x\in(a;b) \end{matrix}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} f(x)\nearrow\left(f(x)\searrow\right) \\ x\in(a;b). \end{matrix}}$$

Доведення. Нехай $f'(x)>0$ і $x_1<x_2$ дві довільні точки інтервала $(a;b)$. На відрізку $[x_1;x_2]$ виконуються умови теореми Лагранжа і тому маємо

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)\ ,\ c\in(x_1\,;x_2).$$

Оскільки $f'(c)>0$, то

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \Leftrightarrow f(x_2)>f(x_1)$$

і, отже, функція $f(x)$ зростає.

Випадок $f'(x)<0$ розглядається аналогічно.

Відзначимо, що функція буде зростати (спадати) і в тому випадку, коли виконується умова $f'(x)\ge 0$ $\left(f'(x)\le 0\right)$, причому рівняння $f'(x)=0$ має скінченну кількість коренів.

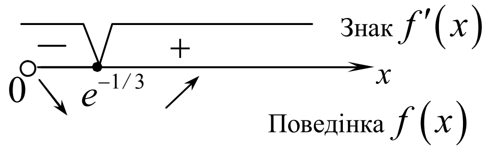
Отже, знаходження проміжків монотонності функції зводиться до відшукування проміжків знакопостійності її похідної.

Приклад 1. Знайти проміжки монотонності функції:

а) $f(x)=x^3\ln x$; б) $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$; в) $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x+2}$.

Розв'язання:

а) Функція $f(x)$ визначена на проміжку $(0;+\infty)$. Знайдемо її похідну $f'(x)=x^2\cdot(3ln x+1)$. Похідна набуває нульового значення лише при $e^{-1/3}$ (корінь рівняння $3\ln x+1=0$), оскільки точка $x=0$ не входить до області визначення функції. Числова піввісь розділяється точкою $x=e^{-1/3}$ на два проміжки, в кожному з яких похідна зберігає знак.

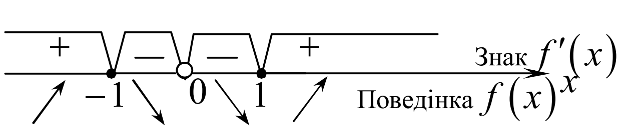


На проміжку $\left(0;e^{-1/3}\right)$ маємо $f'(x)<0$, а на проміжку $\left(e^{-1/3};+\infty\right)$ $f'(x)>0$. Таким чином, функція $x^3\cdot\ln x$ спадає на проміжку $\left(0;e^{-1/3}\right)$ і зростає на проміжку $\left(e^{-1/3};+\infty\right)$.

б) У даному випадку $D_f=R$. Продиференціюємо функцію

$$f'(x)=1-x^{-2/3}=\frac{x^{2/3}-1}{x^{2/3}}.$$

Похідна набуває нульового значення при $x=\pm 1$ і дорівнює $-\infty$ при $x=0$. Ці три точки розділяють числову вісь на чотири проміжки, в кожному з яких похідна зберігає знак.



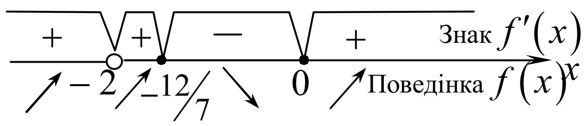
На проміжках $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$ $f'(x)>0$, а на проміжках $(-1;0)$ і $(0;1)$ $f'(x)<0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на проміжках $(-\infty;-1]$, $[1;+\infty)$ і спадає на проміжку $[-1;1]$ (об’єднання проміжків $(-1;0)$ і $(0;1)$ в один суцільний проміжок виникло через те, що знак $f'(x)$ у цих проміжках однаковий, а функція $f(x)$ неперервна в точці їх “стику”).

в) $D_f = R$. Знайдемо похідну:

$$f'(x) = 2x\cdot\sqrt[3]{x+2} + \frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{x(7x+12)}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}.$$

Похідна набуває нульового значення при $x = -12/7$ і $x=0$ та дорівнює $+\infty$ при $x=-2$.

На проміжках $(-\infty;-2)$, $\left(-2;-12/7\right)$, $(0;+\infty)$ похідна $f'(x)$ буде мати знак"+", а на проміжку $\left(-12/7;0\right)$ – знак "–". Отже, на проміжках $\left(-\infty;-12/7\right)$, $(0;+\infty)$ функція $f(x)$ зростає, а на проміжку $\left(-12/7;0\right)$ – спадає.



7.2. Екстремуми функції

Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0.

Означення. Точка x_0 називається точкою **локального максимуму (мінімуму)** функції $f(x)$, якщо існує проколений окіл $\overset{0}{U}(x_0)$ точки x_0, такий, що для всіх $x\in\overset{0}{U}(x_0)$ виконується нерівність

$$f(x_0) > f(x) \quad \left(f(x_0) < f(x)\right).$$

Іншими словами, в точці x_0 локального мінімуму (максимуму) значення функції є найбільшим (найменшим), порівняно зі значеннями, яких вона набуває у сусідніх з x_0 точках.

Точки локального максимуму і мінімуму називаються точками **локального екстремуму**, а значення функції у цих точках – **екстремумами**.

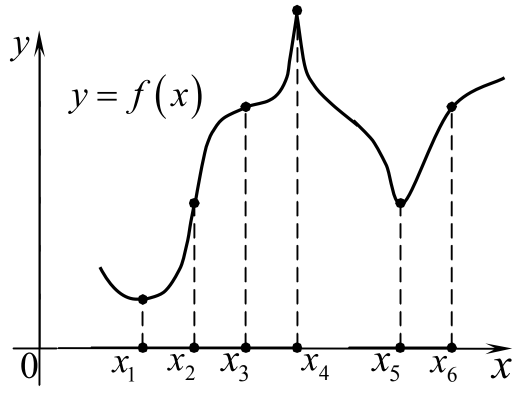


Рис. 7.1

Легко бачити, що точками локального екстремуму функції, графік якої наведено на рис. 7.1, є точки $x_1\left(f'(x_1)=0\right)$, $x_4\left(\exists f'_+(x_4)=-\infty,\ \exists f'_-(x_4)=+\infty\right.$. Як домовились раніше (с. 79) у подібному випадку будемо використовувати позначення $\left.f'(x_4)=\infty\right)$, $x_5\left(\exists f'_+(x_5),\ \exists f'_-(x_5)\right.$, але ці числа не рівні між собою).

Точки $x_2\left(\exists f'(x_2)=+\infty\right)$, $x_3\left(f'(x_3)=0\right)$ та $x_6\left(\exists f'_+(x_6)\neq\exists f'_-(x_6)\right)$ не є точками локального екстремуму.

Необхідна умова локального екстремуму

Теорема 1 (П. Ферма). Якщо функція $f(x)$ має локальний екстремум в точці x_0 і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0)$=0.

Доведення. Припустимо, що точка x_0 – точка локального максимуму.

Тоді $\exists \overset{0}{U}(x_0): \forall x\in \overset{0}{U}(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0)<0$. Отже, для $\forall (x>x_0)\in \overset{0}{U}(x_0)$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0.$ Оскільки функція $f(x)$ є диференційовною в точці x_0, то, після переходу до границі при $x\to x_0+0$ у попередній нерівності, отримуємо $f'_+(x_0)=f'(x_0)\le 0$. Аналогічно $\forall (x<x_0)\in \overset{0}{U}(x_0)$ маємо $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ і $f'_-(x_0)=f'(x_0)\ge 0.$ Таким чином, $f'(x_0)=0$.

Критичними точками неперервної функції називаються або точки, у яких похідна дорівнює нулю, або точки, у яких функція не є диференційовною (не має скінченної похідної).

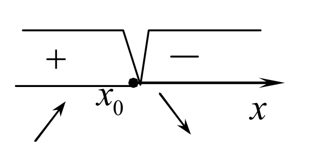
Інакше кажучи, точки локального екстремуму функції треба шукати серед множини її критичних точок.

x_0 – точка локального екстремуму функції $f(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x_0)=0$, або $f'(x_0)=\infty$, або $f'(x_0)$ не існує.

Таким чином, існування горизонтальної дотичної у точці $M_0(x_0; f(x_0))$ є необхідною умовою для того, щоб диференційовна функція $f(x)$ досягала локального екстремуму у внутрішній точці $x_0 \in D_f$. Однак ця умова не є достатньою. Наприклад, дотична до графіка функції $f(x)=x^3$ (приклад 7б, розд. 2) в початку координат горизонтальна, але ця функція не досягає локального екстремуму в точці $x_0=0$.

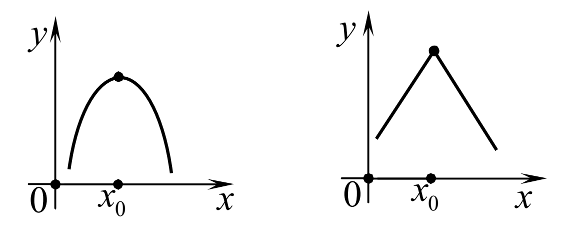
Достатні умови локального екстремуму

Теорема 2. Точками локального екстремуму є ті її критичні точки з області визначення функції $f(x)$, при переході через які похідна $f'(x)$ змінює знак. При цьому, якщо при переході через x_0 у додатному напрямі осі Ox знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «–» (з «–» на «+»), то точка x_0 є точкою локального максимуму (локального мінімуму).

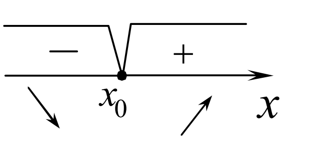


Знак $f'(x)$

$\Rightarrow$

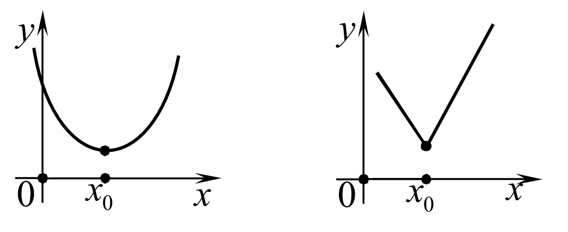


x_0 – точка локального максимуму



Знак $f'(x)$

$\Rightarrow$



x_0 – точка локального мінімуму

Доведення. Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, $f'(x)>0$ при $x \in U_\delta^-(x_0)$ і $f'(x)<0$ при $x \in U_\delta^+(x_0)$. Тоді за теоремою Лагранжа маємо:

1) $f(x)-f(x_0)=f'(c_1)\cdot(x-x_0)<0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$ для $x \in U_\delta^-(x_0)$;

2) $f(x)-f(x_0)=f'(c_2)\cdot(x-x_0)<0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$ для $x \in U_\delta^+(x_0)$.

Таким чином, x_0 – точка локального максимуму. Випадок зміни знака похідної з «–» на «+» розглядається аналогічно.

Нехай функція $f(x)$ є двічі диференційовною в критичній точці x_0. Це означає, що $f'(x)$ існує у деякому околі точки x_0 і $f'(x_0)=0.$

Теорема 3. Нехай в критичній точці x_0 $f'(x_0)=0.$ Якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 –точка локального максимуму, якщо ж $f''(x_0)>0$, то x_0 –точка локального мінімуму.

$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ $\left(f''(x_0)>0\right)$	$\Rightarrow$	x_0 – точка локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$.

Доведення. Нехай $f''(x_0)<0.$ Оскільки

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0},$$

то існує проколений окіл $\overset{o}{U}(x_0)$, такий, що $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$ для $x \in \overset{o}{U}(x_0)$.

Це означає, що $f'(x)>0$ для $x<x_0$ і $f'(x)<0$ для $x>x_0$, тобто при переході через критичну точку x_0 похідна змінює знак з «+» на «–». Отже, x_0 – точка локального максимуму.

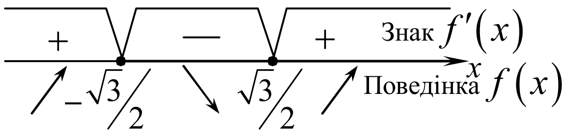
Випадок $f''(x_0)>0$ розглядається аналогічно.

Приклад 2. Дослідити на локальний екстремум функцію $f(x)=\left(x^2-8\right)\cdot e^x$.

Розв’язання. Функція визначена на всій числовій осі, а її похідна $f'(x)=\left(x^2+2x-8\right)e^x=(x+4)(x-2)e^x$. Зміна знаків похідної відбувається в точках $x=-4$ (з «+» на «–») та $x=2$ (з «–» на «+»). В точці $x=-4$ функція $f(x)$ має локальний максимум, що дорівнює $8e^{-4}$; в точці $x=2$ – локальний мінімум, що дорівнює $-4e^2$.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $f(x)=\dfrac{x}{2}-\mathrm{arctg}2x$.

Розв’язання. $D_f=R$; $f'(x)=\dfrac{4x^2-3}{2\left(1+4x^2\right)}$.



Оскільки в точці $-\sqrt{3}/2$ відбувається зміна знака похідної з “+” на “–“, то в цій точці функція $f(x)$ має локальний максимум, що дорівнює $-\sqrt{3}/4+\pi/3$. В точці $\sqrt{3}/2$ відбувається зміна знака похідної з “–” на “+”, отже, в цій точці функція $f(x)$ має локальний мінімум, що дорівнює $\sqrt{3}/4-\pi/3$. (Чи узгоджується отриманий результат з непарністю функції?)

У розглянутому вище прикладі 1 підрозд. 7.1 точка $e^{-\frac{1}{3}}$ – точка локального мінімуму функції $x^3\ln x$, точка – 1 є точкою локального максимуму функції $x-3\sqrt[3]{x}$, точка $-\dfrac{12}{7}$ є точкою локального максимуму і точка 0 є точкою локального мінімуму функції $x^2\cdot\sqrt[3]{x+2}$.

Приклад 4. **Закон заломлювання.** Нехай дано дві точки A і B, що лежать по різні сторони границі розділу двох середовищ з показниками заломлювання n_1 і n_2 (рис. 7.2). Згідно з принципом про **найкоротший час розповсюдження світла** шлях світлового променя з A у B повинен бути таким, щоб затрачений ним час, був найменшим.

Визначити найкоротший шлях.

Розв'язання. Зрозуміло, що цей шлях повинен складатися з двох відрізків, точка "стику" яких лежить на осі Ox:

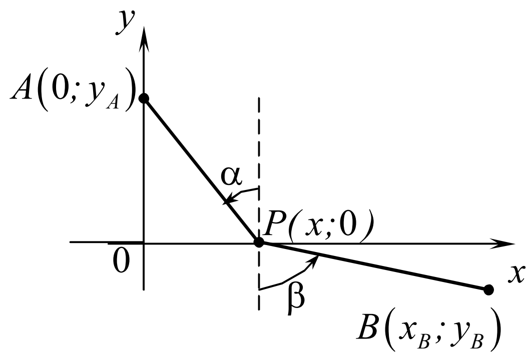


Рис. 7.2

$$|AP| = \sqrt{x^2 + y_A^2};$$
$$|BP| = \sqrt{\left(x_B - x^2\right) + y_B^2}.$$

Знайдемо час, затрачений на проходження шляху APB:

$$T(x) = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2\sqrt{\left(x_B - x\right)^2 + y_B^2}\right),$$

де c – час розповсюдження світла у вакуумі. Оскільки час повинен бути найкоротшим, то продиференціюємо функцію $T(x)$ і розв'яжемо рівняння $T'(x) = 0$:

$$T'(x) = \frac{1}{c}\left(n_1\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - n_2\frac{x_B - x}{\sqrt{\left(x_B - x\right)^2 + y_B^2}}\right);$$

$$T''(x) = \frac{1}{c}\left(n_1\frac{y_A^2}{\left(\sqrt{x^2 + y_A^2}\right)^3} + n_2\frac{y_B^2}{\left(\sqrt{\left(x_B - x\right)^2 + y_B^2}\right)^3}\right) > 0;$$

$$T'(x) = 0 \Rightarrow n_1\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = n_2\frac{x_B - x}{\sqrt{\left(x_B - x\right)^2 + y_B^2}}.$$

На рис. 7.2 видно, що останнє рівняння рівнозначне співвідношенню $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$. Зрозуміло, що цій умові задовольняє лише одна точка x_0, а оскільки $T''(x) > 0$, то через цю точку проходить шлях, що реалізує мінімальний час.

Аналогічно може бути розв'язана задача про визначення шляху відбитого променя.

Приклад 5. Виконано n вимірювань деякої величини. Отримані значення x_1, $x_2 \ldots$, x_n. Значення $\overline{x}$, величини, що вимірюється, визначається за умовою мінімізації суми квадратів його відхилень від x_1, $x_2 \ldots$, x_n. Визначити $\overline{x}$.

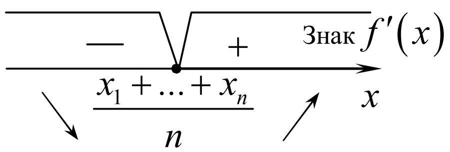
Розв'язання

Потрібно дослідити функцію

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2.$$

Знайдемо знак похідної

$$f'(x) = 2(x - x_1 + x - x_2 + \ldots + x - x_n) = 2n\left(x - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \Rightarrow$$



Отже, в точці $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ сума квадратів відхилень від x_1, $x_2 \ldots$, x_n мінімальна і тому $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

7.3. Найбільше і найменше значення функції

У застосуваннях часто потрібно знайти x, при якому функція $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення на даному відрізку.

У підрозд. 4.3, б говорилось, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на ньому існує принаймні одна точка, в якій функція досягає найбільшого (найменшого) значення на $[a; b]$. Звідси випливає, що для визначення найбільшого та найменшого значень неперервної функції на відрізку треба знайти значення функції у критичних точках, що належать цьому відрізку, та обчислити її значення $f(a)$, $f(b)$ на кінцях відрізку. Найменше та найбільше з отриманих чисел є відповідно найменшим та найбільшим значенням функції на відрізку $[a; b]$.

Приклад 6. Знайти найбільше та найменше значення функції:

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на відрізку $[-3; 3]$;

б) $f(x)=x\cdot\ln^2 x$ на відрізку$\left[e^{-1};\, e\right]$.

Розв’язання:

а) $f'(x)=6(x+1)(x-2)$.

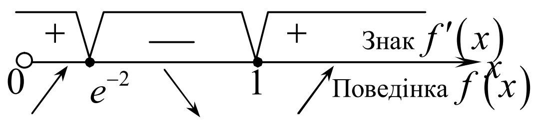
Отже, екстремальними точками будуть точки –1 та 2. Обидві вони належать відрізку, який розглядаємо. Обчислимо значення функції в екстремальних точках і на кінцях відрізка:

$$f(-1)=8,\; f(2)=-19,\; f(-3)=-44,\; f(3)=-8.$$

Отже, найменше значення функції дорівнює –44 та досягається на лівому кінці відрізка, а найменше значення функції дорівнює 8 та досягається у внутрішній точці відрізка:

$$\min_{x\in[-3;\,3]} f(x)=f(-3)=-44,\; \max_{x\in[-3;\,3]} f(x)=f(-1)=8.$$

б) $f'(x)=\ln x\cdot(\ln x+2)$.



У відрізок, що розглядаємо, потрапляє тільки одна екстремальна точка $x=1$. Знайдемо значення функції на кінцях відрізка та в точці 1:

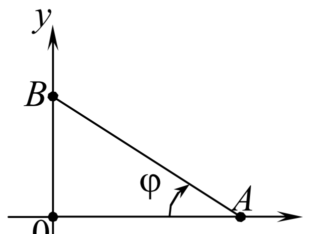
$$f\left(e^{-1}\right)=e^{-1},\; f(e)=e,\; f(1)=0.$$

$$\min_{x\in\left[e^{-1};\, e\right]} f(x)=f(1)=0,\; \max_{x\in\left[e^{-1};\, e\right]} f(x)=f(e)=e.$$

Приклад 7. Електричну лампочку можна пересувати по вертикалі. На якій відстані від горизонтальної площини слід її розташувати, щоб в точці

A цієї площини отримати найбільшу освітленість (рис. 7.3)?

Розв’язання. Освітленість обчислюється за формулою $T=c\sin\varphi|AB|^{-2}$, де c– сила світла джерела B.



Оскільки

$$|AB|=\frac{|OA|}{\cos\varphi},$$

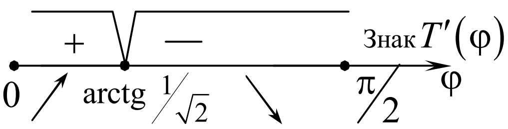
то

$$T(\varphi)=\frac{c}{|OA|^2}\cos^2\varphi\sin\varphi .$$

Рис. 7.3

Задача зводиться до визначення найбільшого значення функції $T(\varphi)$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Диференціюючи $T(\varphi)$, знайдемо

$$T'(\varphi)=\frac{c}{|OA|^2}\left(\cos^3\varphi-2\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\right)=\frac{c}{|OA|^2}2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2}-\mathrm{tg}^2\varphi\right).$$



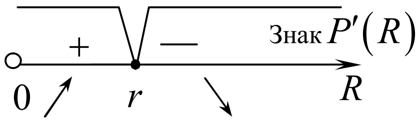
Оскільки $T(0)=T\left(\pi/2\right)=0$, то при $\varphi_0=\mathrm{arctg}\,1/\sqrt{2}$ досягається найбільша освітленість і тому лампочку слід закріпити на висоті $h=|OA|\,\mathrm{tg}\varphi_0=\frac{OA}{\sqrt{2}}$.

Якщо лампочку не можна підняти на висоту, яка більша, ніж H, то тоді кут φ змінюється не на відрізку $\left[0;\pi/2\right]$, а в більш вузькому проміжку $\left[0;\mathrm{arctg}\frac{H}{|OA|}\right]$. У тому випадку, коли $H<h$, найбільше значення освітленості досягається при $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{H}{|OA|}$ і лампочку слід повісити на висоті H.

Приклад 8. Відомо, що потужність струму, отриманого від гальванічного елемента в зовнішньому ланцюжку, визначається формулою $P=\frac{\varepsilon^2R}{(R+r)^2}$, де ε, r, R – відповідно сталі ЕДС, внутрішній та зовнішній опори елемента. При якому зовнішньому опорі потужність, що віддається елементом, буде найбільшою?

Розв’язання:

$$P'(R)=\varepsilon^2\frac{(r+R)(r-R)}{(R+r)^4}.$$



Оскільки $P(R)\to 0 \quad (R\to 0,\, R\to+\infty)$, то при зовнішньому опорі $R=r$ досягається найбільше значення потужності, що дорівнює $\frac{\varepsilon^2}{4r}$.

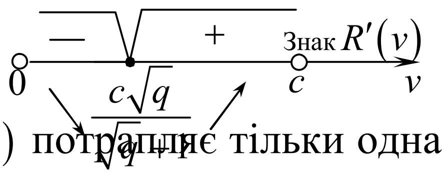
Приклад 9. Відомо, що витрати на паливо при експлуатації теплохода на лінії довжиною s кілометрів дорівнюють $\frac{s}{c-v}$, де v – швидкість теплохода, а c – деяка гранична швидкість, яку теплохід не може перевищувати при будь-якій витраті палива. Крім цього, постійні витрати при експлуатації теплохода складають $\frac{qs}{v}$. З якою швидкістю повинен рухатись теплохід, щоб витрати на паливо були найменшими?

Розв’язання. Загальні витрати R з експлуатації теплохода дорівнюють

$$R=s\left(\frac{1}{c-v}+\frac{q}{v}\right).$$

Продиференціюємо функцію $R(v)$

$$R'(v)=s\left(\frac{1}{(c-v)^2}-\frac{q}{v^2}\right)==s\frac{\left(\left(1+\sqrt{q}\right)v-\sqrt{qc}\right)\left(\left(1-\sqrt{q}\right)v+\sqrt{qc}\right)}{v^2(c-v)^2}.$$



У проміжок $(0;c)$ потрапляє тільки одна екстремальна точка $\frac{c\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$, в якій досягається найменше значення, оскільки $R(v)\to+\infty$ при $v\to+0$ та при $v\to c-0$. Підставляючи це значення в $R(v)$, знаходимо спільну суму витрат при найбільш економічному плаванні

$$\frac{1}{s}R = \frac{1}{c}\left(1+\sqrt{q}\right)^2 .$$

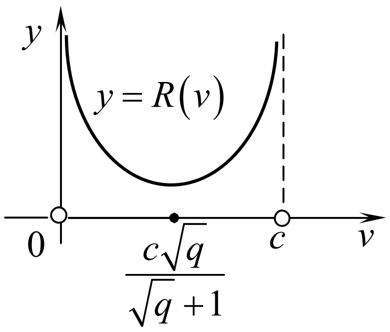


Рис. 7.4

Графік функції $R(v)$ наведено на рис. 7.4.

Задачі, подібні розглянутим, характерні для діяльності людини. Зокрема, задача космонавтики полягає у тому, щоб доставити керований космічний апарат в дану точку за найменший час або з найменшими витратами.

7.4. Опуклість. Точка перегину

Нехай функція $f(x)$ диференційовна на проміжку $(a; b)$.

Означення. Назвемо диференційовну на проміжку $(a; b)$ функцію $f(x)$ **опуклою вгору (вниз)** на проміжку $(a; b)$, якщо графік цієї функції в межах проміжку $(a; b)$ розташований нижче (вище) дотичної, проведеної в будь-якій точці $(x_0; f(x_0))$ $(x_0 \in (a; b))$ графіку (рис. 7.5).

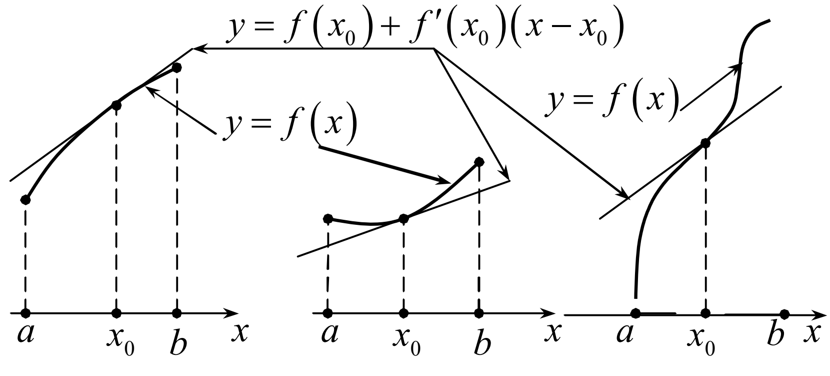


Рис. 7.5

Напрям опуклості функції визначається знаком другої похідної $f''(x)$.

Теорема 1. Якщо $f''(x) > 0$ $\left(f''(x) < 0\right)$ $\forall x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ опукла вниз (вгору) на проміжку $(a; b)$.

Доведення. Розглянемо випадок $f''(x)>0$. Нехай $x_0\in(a;b)$. Тоді рівняння дотичної до графіку цієї функції у точці $(x_0;\, f(x_0))$ має вигляд $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

За формулою Тейлора (6.2) при $n=1$ маємо

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,$$

де точка $c\in(a;b)$ знаходиться між точками x_0 і $x\in(a;b)$.

Оскільки за умови теореми $f''(c)>0$, то ордината $f(x)$ графіку більша при $x\neq x_0$, ніж ордината y дотичної.

Випадок $f''(x)<0$ розглядається аналогічно.

Означення. Точка x_0 називається точкою **перегину** функції $f(x)$, якщо існують таки лівий і правий півоколи точки x_0, що графік функції є розташованим по різні боки дотичної, яка проведена у точці $(x_0; f(x_0))$.

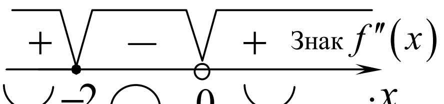
Теорема 2. Нехай в точці $(x_0; f(x_0))$ графік функції $f(x)$ має дотичну. Якщо $f''(x)$ має різні знаки зліва і справа від точки x_0 в деякому проколеному околі $\overset{o}{U}(x_0)$, то x_0 є точкою перегину функції $f(x)$.

Приклад 10. Визначити проміжки опуклості вгору та вниз і точки перегину функції $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot(x+8)$.

Розв'язання. Знайдемо другу похідну:

$$f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{2}{3}}\cdot(x+5), \qquad f''(x)=\frac{40}{9}x^{-\frac{1}{3}}\cdot(x+2).$$

Друга похідна дорівнює 0 при $x=-2$ та не визначена при $x=0$.



Функція опукла вниз на проміжках $(-\infty;-2)$ та $(0;+\infty)$, опукла вгору на проміжку $(-2;0)$. Точки -2 та 0 є точками перегину функції.

Приклад 11. Визначити точки перегину і проміжки опуклості вниз та вгору функції $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

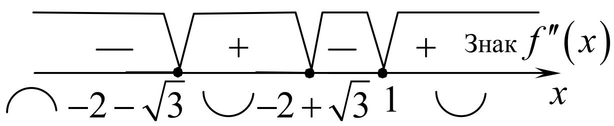
Розв'язання:

$$f'(x)=\frac{1-2x-x^2}{\left(x^2+1\right)^2};\; f''(x)=\frac{(-2-2x)\left(x^2+1\right)-\left(1-2x-x^2\right)4x}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=2\frac{(x-1)\left(x+2-\sqrt{3}\right)\left(x+2+\sqrt{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Друга похідна набуває нульового значення при 1, $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$.

Ці три точки розбивають числову вісь на чотири проміжки.



Функція опукла вгору на проміжках $\left(-\infty;-2-\sqrt{3}\right)$, $\left(-2+\sqrt{3};1\right)$ і опукла вниз на проміжках $\left(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$, $(1;+\infty)$. Точки $x=1$, $x=-2-\sqrt{3}$, $x=-2+\sqrt{3}$ є точками перегину функції.

7.5. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

Встановлені вище результати дозволяють чітко з усіма подробицями уявити поведінку графіка функції. Можна порадити при дослідженні функції та побудові її графіка додержуватись такої схеми:

1. Знайти область D_f визначення функції $f(x)$.

2. У тому випадку, якщо D_f симетрична відносно початку координат, визначити парна або непарна ця функція. Перевірити, чи є ця функція періодичною.

3. З'ясувати питання про існування асимптот (вертикальних та похилих).

4. Знайти декілька характерних точок (зокрема координати точок перетину графіка з осями координат); визначити характер поведінки функції у межових точках множини D_f.

5. Знайти проміжки знакосталості функції.

Ці пункти схеми вже дозволяють побудувати ескіз графіка, який потім уточнюють.

6. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції.

7. Визначити проміжки опуклості функції та її точки перегину.

8. Побудувати графік функції за отриманими результатами.

Приклад 12. Побудувати графік функції $f(x) = x^2(x-1)$.

Розв'язання:

1. $D_f = R$.

2. Функція не є ні парною, ні непарною. Функція неперіодична.

3. Оскільки функція неперервна на всій числовій осі, то вертикальних асимптот немає. Похилі асимптоти теж є відсутніми, бо

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(x-1)}{x} = +\infty .$$

4. При $x \to 0$ $f(x) \approx -x^2$; при $x \to \infty$ $f(x) \approx x^3$; $f(0) = 0$.

5. Функція набуває нульового значення при $x = 0$ і $x = -1$. Ці точки ділять числову вісь на три проміжки, в кожному з яких функція зберігає знак, точніше: на проміжку $(-\infty; 0)$ $f(x) < 0$, на проміжку $(0; 1)$ $f(x) < 0$, а на проміжку $(1; +\infty)$ $f(x) > 0$.

Зробимо ескіз графіка функції (рис. 7.6).

Тепер виникає впевненість у тому, що функція має дві екстремальні точки (одна з них $x = 0$, а друга належить проміжку $(0; 1)$) і одну точку перегину.

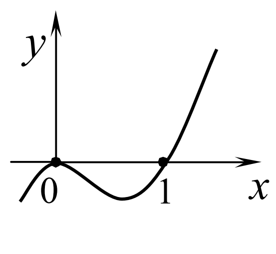
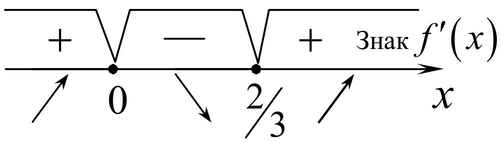


Рис. 7.6

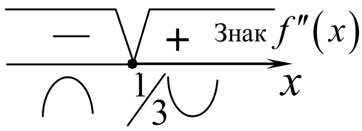
6. $f'(x) = 2x(x-1) + x^2 = x(3x-2)$;

$f'(x)$ набуває нульового значення в точках 0 і $2/3$, які розбивають числову вісь на три проміжки.



У проміжках $(-\infty; 0)$ і $\left(2/3; +\infty\right)$ функція зростає, а в проміжку $\left(0; 2/3\right)$ – спадає. Точка $x=0$ є точкою локального максимуму, $f(0)=0$; точка $x=2/3$ є точкою локального мінімуму $f\left(2/3\right)=-4/27$.

7. $f''(x)=6\left(x-1/3\right)$; $f''(x)$ набуває нульового значення в точці $x=1/3$, яка розбиває числову вісь на два проміжки.



На проміжку $\left(-\infty; 1/3\right)$ функція опукла вгору, а на проміжку $\left(1/3; +\infty\right)$ вниз. Точка $x=1/3$ є точкою перегину функції; $f\left(1/3\right)=-2/27$. На основі отриманих даних уточнюємо графік (рис. 7.7).

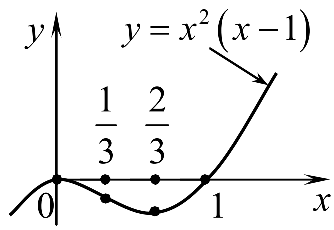


Рис. 7.7

Приклад 13. Побудувати графік функції $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$.

Розв’язання:

1. $D_f = R \setminus \{0\}$.

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

Функція неперіодична.

3. Оскільки $x=0$ є точкою розриву другого роду, то пряма $x=0$ буде вертикальною асимптотою графіка функції. Оскільки

$f(x)\to 0$ при $x\to\infty$, то пряма $y=0$ буде похилою (горизонтальною) асимптотою графіка функції.

4. $f(1)=0$.

5. При $x>1$ $f(x)>0$, а при $x<1$ $f(x)<0$.

Побудуємо ескіз графіка (рис. 7.8). Складається враження, що функція має одну точку екстремуму і одну точку перегину.

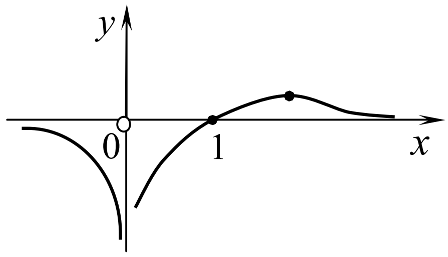


Рис. 7.8

6. $f'(x)=\dfrac{x^2-2x(x-1)}{x^4}=\dfrac{2-x}{x^3}$.

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x=2$ і не існує при $x=0$: $f'(0)=\infty$. Цими точками числова вісь розділяється на три проміжки $(-\infty;0)$, $(0;2)$ і $(2;+\infty)$. У першому і третьому проміжку функція спадає, а в другому – зростає. Оскільки при $x=0$ функція невизначена, то $x=0$ не є точкою екстремуму; в точці $x=2$ буде локальний максимум $f(2)=1/4$.

7. $f''(x)=\dfrac{-x^3-3x^2(2-x)}{x^6}=\dfrac{2(x-3)}{x^4}$; $f''(x)>0$,якщо $x\in(3;+\infty)$;

$f''(x)<0$, якщо $x\in(-\infty;3)$. Отже, точка $x=3$ є точкою перегину функції $f(3)=2/9$.

Отримані дані дозволяють уточнити ескіз графіка (рис. 7.9).

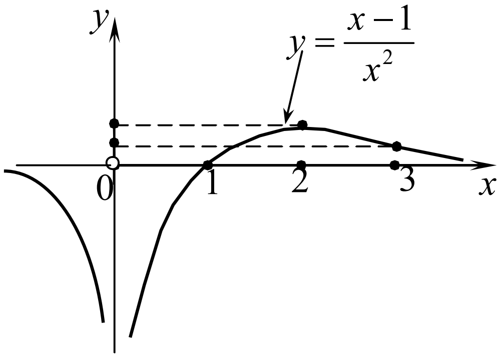


Рис. 7.9

Приклад 14. Побудувати графік функції $f(x)=\dfrac{8(x^3+x)}{(2x+1)^3}$.

Розв'язання:

1. $D_f=\left(-\infty;-1/2\right)\cup\left(-1/2;+\infty\right)$.

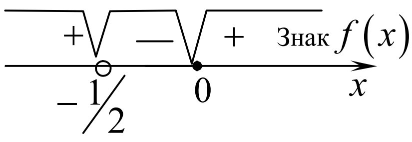
2. Функція не є ні парною, ні непарною, вона неперіодична.

3. $f(0)=0$.

4. Пряма $x=-1/2$ буде вертикальною асимптотою графіка функції (при цьому $f(x)\to+\infty$ при $x\to-1/2-0$ і $f(x)\to-\infty$ при

$x \to -\frac{1}{2}+0$), оскільки $f(x)\to 1$ при $x\to\infty$, то пряма $y=1$ буде горизонтальною асимптотою графіка функції.

5. Зміна знака функції відбувається в точках 0 і $-\frac{1}{2}$.



Побудуємо ескіз графіка (рис. 7.10).

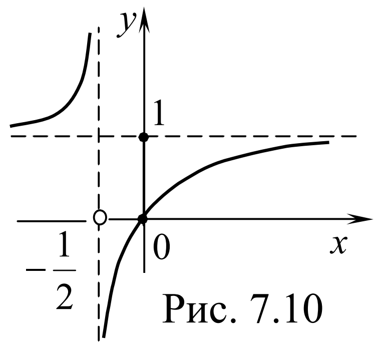
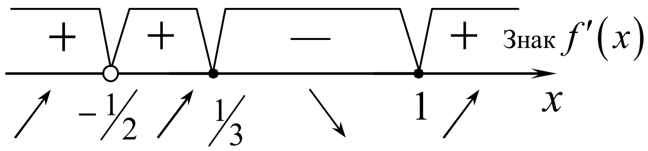


Рис. 7.10

6. $$f'(x)=8\cdot\frac{(3x^2+1)(2x+1)^3-6(2x+1)^2\cdot(x^3+x)}{(2x+1)^6}=$$

$$=8\cdot\frac{3x^2-4x+1}{(2x+1)^4}=24\frac{(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(2x+1)^4}.$$

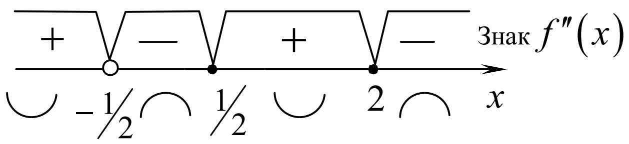


Отже, в точці $x=\frac{1}{3}$ буде локальний максимум, що дорівнює $\frac{16}{25}$, а в точці $x=1$ буде локальний мінімум, що дорівнює $\frac{16}{27}$.

Можна зробити висновок про те, що ескіз графіка помилково відображає поведінку функції (рис. 7.11).

7. $$f''(x)=24\frac{\left(2x-\frac{4}{3}\right)(2x+1)^4-\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)\cdot 4(2x+1)^3\cdot 2}{(2x+1)^8}=$$

$$=24\frac{-4x^2+10x-4}{(2x+1)^5}=-96\frac{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(2x+1)^5}.$$



У проміжках $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ функція опукла вниз, а в проміжках $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $(2; +\infty)$ – вгору.

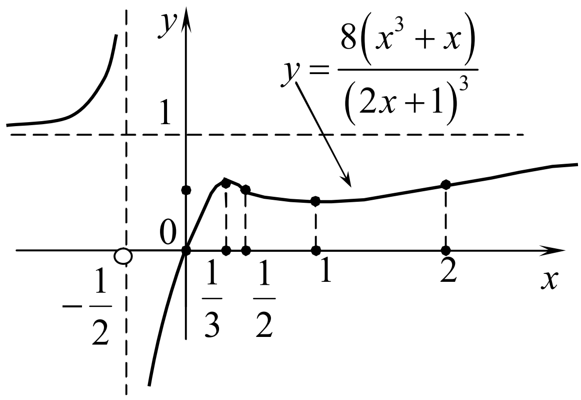


Рис.7.11

Точки $\dfrac{1}{2}$, 2 є точками перегину функції $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{8}$, $f(2) = \dfrac{16}{25}$; точка $-\dfrac{1}{2}$ не є точкою перегину, оскільки вона не входить до D_f.

ВПРАВИ

Знайти проміжки монотонності функції:

1.1. $f(x) = \sqrt{x}(x-2)$. **1.2.** $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x$. **1.3.** $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$.

1.4. $f(x) = xe^{-2x}$. **1.5.** $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$. **1.6.** $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Дослідити функції на екстремум:

2.1. $f(x) = \dfrac{x}{9-x^2}$. **2.2.** $f(x) = (7-x)\cdot\sqrt[3]{x+3}$. **2.3.** $f(x) = x\ln x$.

2.4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\cdot e^{2x}$. **2.5.** $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$. **2.6.** $f(x) = x^3\cdot e^{-4x}$.

Знайти найбільше та найменше значення функції у даних проміжках:

3.1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$, $x \in [-4; 3]$.

3.2. $f(x)=\ln x-2\operatorname{arctg} x, x\in\left[1;\sqrt{3}\right]$. **3.3.** $f(x)=\dfrac{x^4+48}{x}$, $x\in[1;3]$.

3.4. $f(x)=x-2\ln x$, $x\in\left[\dfrac{3}{2};e\right]$. **3.5.** $f(x)=x-2\sqrt{x}$, $x\in[0;5]$.

3.6. $f(x)=x\ln\dfrac{x}{5}$, $x\in[1;5]$.

Визначити проміжки опуклості і точки перегину функції:

4.1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$. **4.2.** $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x}$. **4.3.** $f(x)=x\ln^2 x$.

4.4. $f(x)=\ln\left(x^2+9\right)$. **4.5.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. **4.6.** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Побудувати графіки функцій:

5.1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$. **5.2.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$. **5.3.** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$.

5.4. $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x-1}$. **5.5.** $f(x)=\sqrt{x}-2x$. **5.6.** $f(x)=(x+4)\sqrt[3]{x}$.

5.7. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$. **5.8.** $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot e^{-x}$. **5.9.** $f(x)=x\cdot e^{-x}$.

5.10. $f(x)=x^2\cdot\ln x$. **5.11.** $f(x)=\sqrt{4x^2+7}$. **5.12.** $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$.

5.13. $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. **5.14.** $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$. **5.15.** $f(x)=\dfrac{x+4}{(x-2)^2}$.

5.16. $f(x)=x^3\cdot e^{-x}$. **5.17.** $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$. **5.18.** $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$.

5.19. $f(x)=\sqrt[3]{x^2(3-x)}$. **5.20.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3-4x}$. **5.21.** $f(x)=x\sqrt[3]{(x-5)^2}$.

5.22. $f(x)=4\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^3}}$. **5.23.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$. **5.24.** $f(x)=e^{1-x^2}$.

5.25. $f(x)=e^{4x-x^2}$. **5.26.** $f(x)=\left(x^2+2\right)e^{-x^2}$. **5.27.** $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

5.28. $f(x)=4\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x-2}$. **5.29.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-1}}{x-2}$. **5.30.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2\cdot|2-x|}$.

ВІДПОВІДІ

1.1. на $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ зростає, на $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ спадає. **1.2.** спадає на R.

1.3. на $\left(0;\left(\frac{3}{4}\right)^6\right)$ зростає, на $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^6;+\infty\right)$спадає. **1.4.** на $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ зростає, на $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ спадає. **1.5.** спадає на $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

1.6. на $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{3}{5};+\infty\right)$ зростає, на $\left(-1;-\frac{3}{5}\right)$ спадає.

2.1. нема екстремумів. **2.2.** $f_{\max}=\frac{15}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ при $x=-\frac{1}{2}$. **2.3.** $f_{\min}=-\frac{1}{e}$ при $x=\frac{1}{e}$. **2.4.** $f_{\min}=0$ при $x=0$, $f_{\max}=\frac{1}{\sqrt[3]{9e^2}}$ при $x=-\frac{1}{3}$. **2.5.** $f_{\min}=0$ при $x=0$, $f_{\min}=\frac{32}{3}$ при $x=4$, $f_{\max}=\frac{1}{4}$ при $x=-1$. **2.6.** $f_{\max}=\left(\frac{3}{4}\right)^3 e^{-3}\approx 0.021$ при $x=\frac{3}{4}$.

3.1. $\max\limits_{x\in[-4;3]} f(x)=f(-3)=f(3)=20,\ \min\limits_{x\in[-4;3]} f(x)= =f(1)=-12$.

3.2. $\max\limits_{x\in[1;\sqrt{3}]} f(x)=f\left(\sqrt{3}\right)\approx-1.545$, $\min\limits_{x\in[1;\sqrt{3}]} f(x)=f(1)=-\frac{\pi}{2}$. **3.3.** $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)= =f(1)=49,\ \min\limits_{x\in[1;3]} f(x)=f(2)=32$. **3.4.** $\max\limits_{x\in\left[\frac{3}{2};e\right]} f(x)=f(e)=e-2\approx1.718,\ \min\limits_{x\in\left[\frac{3}{2};e\right]} f(x)= =f(2)=2-2\ln 2\approx 0.6137$. **3.5.** $\max\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(5)\approx 0.528$, $\min\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(1)=-1$.

3.6. $\max\limits_{x\in[1;5]} f(x)=f(5)=0$, $\min\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f\left(\frac{5}{e}\right)=-\frac{5}{e}$.

4.1. **о**пукла вгору на $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(0;2\sqrt{3}\right)$, опукла вниз на $\left(-2\sqrt{3};0\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$, точки перегину: $x=0,\ x=-2\sqrt{3},\ x=2\sqrt{3}$. **4.2.** опукла вгору на $(-2;0)$, опукла вниз на $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$, точка перегину $x=-2$. **4.3.** опукла вгору на $\left(0;\frac{1}{e}\right)$, опукла вниз на $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$, точка перегину $x=\frac{1}{e}$. **4.4.** опукла вгору на $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$, опукла вниз на $(-3;3)$, точки перегину: $x=-3$, $x=3$. **4.5.** опукла вгору на $\left(0;\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}\right)$, опукла вниз на $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$, точка перегину $x=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$. **4.6.** опукла вгору на $(-3;-1)\cup(0;1)\cup(3;+\infty)$, опукла вниз на $(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(1;3)$, точки перегину: $x=-3$, $x=0$, $x=3$.

5.1. непарна; $f_{\min}=-\dfrac{1}{4}$ при $x=-2$, $f_{\max}=\dfrac{1}{4}$ при $x=2$; точки перегину: $x=-2\sqrt{3}$, $x=0$, $x=2\sqrt{3}$; асимптота $y=0$. **5.2.** непарна; точка перегину: $x=0$; асимптоти $y=0$, $x=\pm 2$. **5.3.** $f_{\min}=-12$ при $x=-6$, $f_{\max}=0$ при $x=0$; асимптоти: $y=x-3$, $x=-3$. **5.4.** асимптоти: $y=x-4$, $x=-1$. **5.5.** $f_{\max}=\dfrac{1}{8}$ при $x=\dfrac{1}{16}$. **5.6.** $f_{\min}=-3$ при $x=-1$; точки перегину: $x=0$, $x=2$. **5.7.** непарна; $f_{\min}=\sqrt{3}$ при $x=2\sqrt{3}$, $f_{\max}=-\sqrt{3}$ при $x=-2\sqrt{3}$; точки перегину: $x=-6$, $x=0$, $x=6$; асимптоти $x=-2$; $x=2$. **5.8.** точки перегину: $x=1$, $x=3$; права асимптота $y=0$. **5.9.** $f_{\max}=\dfrac{1}{e}$ при $x=1$; точка перегину $x=2$; права асимптота $y=0$. **5.10.** $f_{\min}=-\dfrac{1}{2e}$ при $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; точка перегину $x=e^{-\frac{3}{2}}$. **5.11.** парна; $f_{\min}=\sqrt{7}$ при $x=0$; права асимптота $y=2x$, ліва асимптота $y=-2x$. **5.12.** точки перегину: $x=0$, $x=2$; асимптота $y=-x$. **5.13.** $f_{\min}=3$ при $x=2$; асимптоти $y=x$, $x=0$. **5.14.** $f_{\min}=-1$ при $x=0$, $f_{\max}=\dfrac{5}{3}$ при $x=2$; існують 3 точки перегину: x_1, x_2, x_3 корні рівняння $x^3-3x^2+1=0$, $x_1\in\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, $x_2\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$, $x_3\in\left(2;2\dfrac{1}{2}\right)$; асимптота $y=1$. **5.15.** $f_{\min}=-\dfrac{1}{24}$ при $x=-10$; точка перегину $x=-16$; асимптоти $y=0$, $x=2$. **5.16.** $f_{\max}=\dfrac{27}{e^3}$ при $x=3$; точки перегину: $x=0$, $x=3\pm\sqrt{3}$; права асимптота $y=0$. **5.17.** $f_{\min}=1$ при $x=0$; асимптота $x=1$, права асимптота $y=0$; точка перегину $x=1$. **5.18.** $f_{\min}=0$ при $x=0$, $f_{\max}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$ при $x=4$; точки перегину: $x=4-3\sqrt{2}$, $x=4+3\sqrt{2}$; асимптоти $x=-2$, $y=0$. **5.19.** $f_{\min}=0$ при $x=0$, $f_{\max}=\sqrt[3]{4}$ при $x=2$; точка перегину $x=3$; асимптота $y=-x+1$. **5.20.** непарна; $f_{\min}=-\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$ при $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $f_{\max}=\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$ при $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; точки перегину: $x=-2$, $x=0$, $x=2$; асимптота $y=x$. **5.21.** $f_{\min}=0$ при $x=5$, $f_{\max}=3\sqrt[3]{4}$ при $x=3$; точка перегину $x=6$. **5.22.** $f_{\min}=0$ при $x=1$, $f_{\max}=\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$ при $x=3$; точки перегину: $x=1$, $x=5$; асимптота

$x=0$, права асимптота $y=0$. **5.23** $y=-1$ – права горизонтальна асимптота, $y=1$ – ліва горизонтальна асимптота. **5.24.** парна**;** $f_{\max}=e$ при $x=0$; точки перегину: $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; асимптота $y=0$. **5.25.** $f_{\max}=e^4$ при $x=2$; точки перегину: $x=2-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=2+\frac{1}{\sqrt{2}}$; асимптота $y=0$. **5.26.** парна**;** $f_{\max}=2$ при $x=0$; точки перегину: $x=-1$, $x=1$; асимптота $y=0$. **5.27.** непарна; $f_{\min}=-\frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x=-1$, $f_{\max}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x=1$; точки перегину: $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$; асимптота $y=0$. **5.28.** $f_{\min}=-2$ при $x=0$, $f_{\max}=0$ при $x=1$; точки перегину: $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x=0$, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$; асимптоти; $x=2$, $y=0$. **5.29.** $f_{\min}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ при $x=-4$; точки перегину: $x=-4-2\sqrt{3}$, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$; асимптоти $x=2$, $y=0$. **5.30.** $f_{\min}=0$ при $x=2$, $f_{\max}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$ при $x=\frac{4}{3}$; точка перегину $x=2$; ліва асимптота $y=-x$, права асимптота $y=x-\frac{2}{3}$.

Розділ 8

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

У природознавстві і техніці часто зустрічаються випадки, коли одна величина залежить від двох чи більшої кількості інших величин. Наведемо приклади: відомий закон Бойля-Маріотта $pV = RT$ виражає залежність об'єму V визначеної кількості газу від його тиску p і абсолютної температури T; температура нерівномірно нагрітого тіла залежить від координат точки цього тіла.

8.1. Функції двох змінних та їх геометричне зображення

Нехай D – деяка множина точок площини xOy.

Означення 1. Якщо кожній точці $M_0(x_0; y_0) \in D$ ставиться у відповідність однозначно визначене число $f(x_0, y_0)$ $(f(M_0))$, то кажуть,що на множині D задана **числова функція двох змінних** (функція точки) $f(x, y)$ $(f(M))$.

Аналогічно визначаються функції більшої кількості змінних.

Функції двох змінних можна наочно зобразити за допомогою просторової системи координат. **Графіком функції** $f(x, y)$ $(M(x; y) \in D)$ буде сукупність точок P простору з координатами $(x; y; f(x, y))$. Ці точки утворюють деяку поверхню S, рівняння якої $z = f(x, y)$ (рис. 8.1, а).

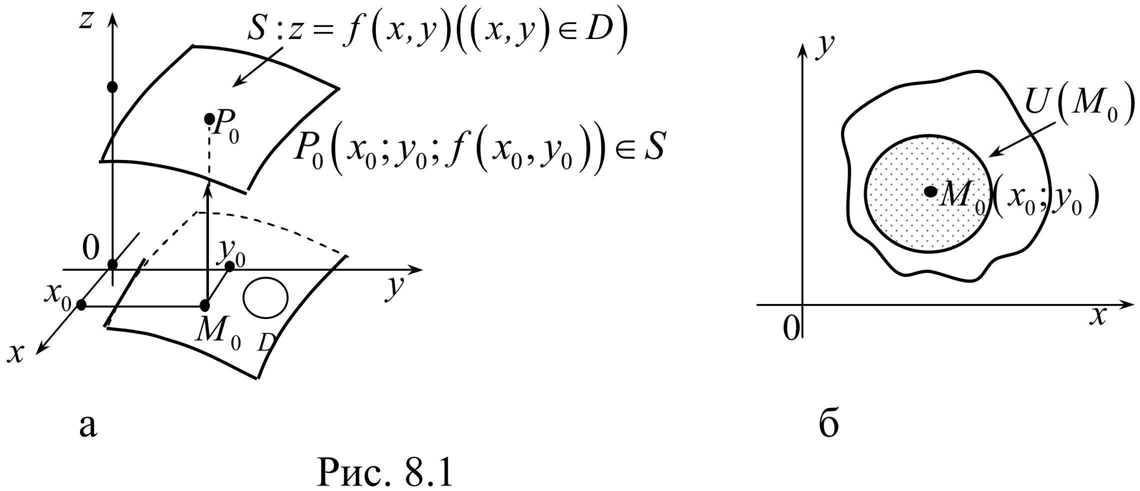


Рис. 8.1

Наприклад, графіком функції $f(x, y) = ax + by + c$ буде площина $z = ax + bx + c$; графік функції $f(x, y) = x^2 + y^2$ – параболоїд $z = x^2 + y^2$ (рис. 8.2); графік функції $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ – верхня порожнина конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 8.3), а графік функції $f(x, y) = x^2 - y^2$ – сідло (гіперболічний параболоїд) $z = x^2 - y^2$ (рис. 8.4).

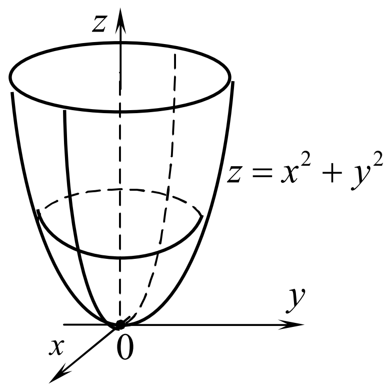


Рис. 8.2

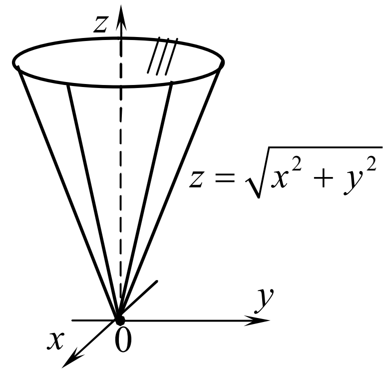


Рис. 8.3

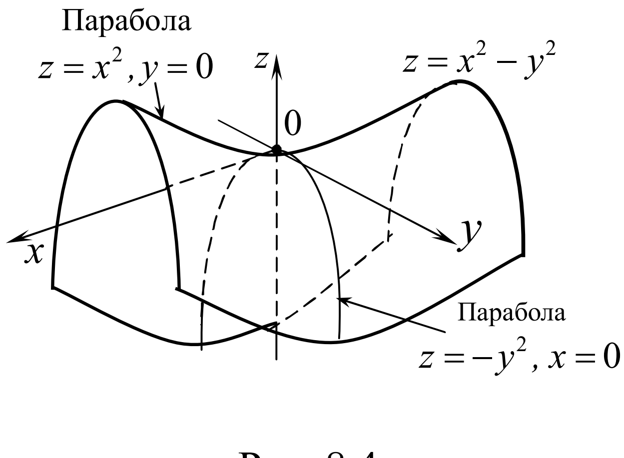


Рис. 8.4

Поняття границі і неперервності функції двох змінних у точці $M_0(x_0; y_0)$ вводиться абсолютно аналогічно тому, як це робилося у випадку функції однієї змінної. Єдине, що тут потрібно, це дати поняття околу точки M_0.

Означення 2. Околом $U(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$ називається така сукупність точок $M(x;y)$, яка містить у собі деякий круг з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$.

Проколеним околом $\overset{0}{U}(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$ називається окіл $U(M_0)$, за винятком самої точки $M_0(x_0; y_0)$ (див. рис. 8.1, б).

Означення 3. Число A називається **границею** функції $f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо для будь-якого околу $V(A)$ числа

A знайдеться такий проколений окіл $\overset{0}{U}(M_0)$ точки $M_0(x_0\,;y_0)$, що для всіх точок $M(x;y)\in\overset{0}{U}(M_0)$ значення функції $f(x,y)\in V(A)$.

Інакше кажучи,

$$\lim_{\substack{M(x;\,y)\to M_0(x_0\,;\,y_0)\\ (x\to x_0;\,y\to y_0)}} f(x,y)=A \Leftrightarrow f(x,y)-A\to 0,$$

якщо відстань $\left|\overrightarrow{MM_0}\right|\to 0$ при будь-якому способі наближення точки $M(x;y)$ до точки $M_0(x_0\,;y_0)$.

Виявляється, що навіть у тому випадку, коли існують і рівні між собою границі $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x, y_0+k(x-x_0)\right)$ вздовж будь-якої прямої ($x=x_0$ або $y=y_0+k(x-x_0)$), що проходить через точку $M_0(x_0\,;y_0)$, границя функції $\lim\limits_{(x\to x_0;\,y\to y_0)} f(x,y)$ у точці $M_0(x_0\,;y_0)$ може не існувати.

Означення 4. Приростом функції $f(x,y)$ у точці $M_0(x_0\,;y_0)$, який відповідає переходу до точки $M(x_0+\Delta x;\,y_0+\Delta y)$, називається величина $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

Означення 5. Функція $f(x,y)$ називається **неперервною** у точці $M_0(x_0\,;y_0)$, якщо існує такий окіл $U(M_0)$ цієї точки, що значення функції у точках цього околу як завгодно мало відрізняються між собою: $\Delta f(x_0,y_0)\to 0$, якщо $\left|\overrightarrow{M_0M}\right|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$.

Зауважимо, що функція може бути неперервною вздовж будь-якої прямої, що проходить через точку, але не бути неперервною в цій точці.

8.2. Частинні похідні

Нехай дана функція двох змінних $f(x,y)$. Зафіксуємо значення y, тобто покладемо $y=y_0$. Тоді функція двох змінних перетвориться на функцію $f(x,y_0)$ однієї змінної x.

Означення. Похідна від функції $f(x, y_0)$ у точці x_0 називається **частинною похідною** функції $f(x, y)$ за змінною x в точці $M_0(x_0\,; y_0)$.

Аналогічно визначається частинна похідна функції $f(x, y)$ за змінною y в точці $M_0(x_0\,; y_0)$.

Частинні похідні в точці $M_0(x_0\,; y_0)$ позначаються таким чином:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0;\, y_0)},\ f'_x(x_0, y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0;\, y_0)},\ f'_y(x_0, y_0).$$

Отже, $\boxed{f'_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}}$.

Якщо ж мова йде про частинні похідні у довільній точці, то позначення набувають вигляду: $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x, $\frac{\partial f}{\partial y}$, f'_y.

Відразу ж помітно, що частинні похідні від функції $f(x, y)$ є, взагалі кажучи, також функціями двох змінних.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функцій:

1) $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2 + 7.2$ у точці $(1; 2)$; 2) $f(x, y) = 2^{xy^2} + \frac{1}{x}$ у точці $(1; -1)$; 3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання:

1) При знаходженні частинної похідної за змінною x розглядаємо y як сталу величину:

$$f'_x = 3x^2 - 5y,\ \left. f'_x \right|_{(1;\, 2)} = -7.$$

Розглянемо x як сталу величину та знайдемо частинну похідну за змінною y: $f'_y = -5x + 2y$, $\left. f'_y \right|_{(1;\, 2)} = -1$.

2) $f'_x = 2^{xy^2} \cdot \ln 2 \cdot y^2 - \frac{1}{x^2}$, $\left. f'_x \right|_{(1;\, -1)} = 2\ln 2 - 1$. $f'_y = 2^{xy^2} \cdot \ln 2 \cdot xy \cdot 2$, $\left. f'_y \right|_{(1;\, -1)} = -4\ln 2$. 3) $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Геометричний зміст частинної похідної

Графіками функцій $f(x, y_0)$, $f(x_0, y)$ є відповідно лінії, отримані при перерізі поверхні S з рівнянням $z = f(x, y)$ площинами $y = y_0$ і $x = x_0$. Параметричні рівняння цих ліній такі:

$$L_1 = \{(x; y; z) : x = x, \ y = y_0, \ z = f(x, y_0)\},$$
$$L_2 = \{(x; y; z) : x = x_0, \ y = y, \ z = f(x_0, y)\}.$$

Знайдемо вектори швидкостей цих кривих (рис. 8.5):

$$\vec{v}_{L_1}(x_0) = (1\,; 0; f'_x(x_0, y_0)), \quad \vec{v}_{L_2}(y_0) = (0\,; 1\,; f'_y(x_0, y_0)) \qquad (8.1)$$

Рівняння дотичних до ліній L_1 і L_2 в точці $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ відповідно мають вигляд:

$$T_1 : \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{f'_x(x_0, y_0)} \Leftrightarrow \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0), \\ y = y_0 \end{cases},$$

$$T_2 : \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} \Leftrightarrow \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ x = x_0 \end{cases}.$$

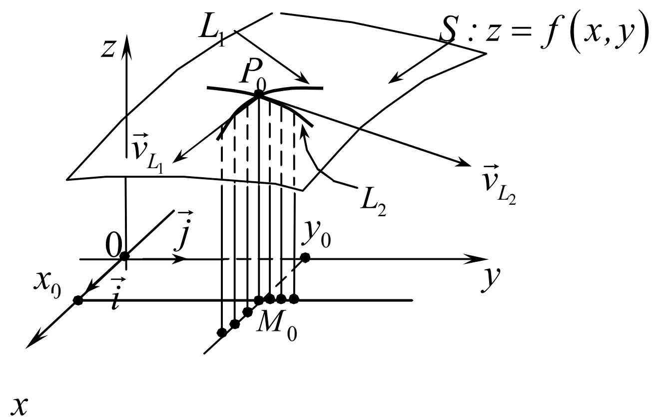


Рис. 8.5

Частинна похідна $f'_x(x_0, y_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної T_1 к осі Ox (кутовий коефіцієнт дотичної T_1).

Аналогічно **частинна похідна $f'_y(x_0, y_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної T_2 к осі Oy** (кутовий коефіцієнт дотичної T_2).

Доречно відзначити, що з існування скінченних частинних похідних $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ не випливає неперервність функції

$f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ (нагадаємо, якщо функція однієї змінної має скінченну похідну в точці x_0, то вона є і неперервною в цій точці). Це пов’язано з тим, що при знаходженні похідних $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ не використовуються значення функції $f(x, y)$ поза прямими $x = x_0$, $y = y_0$.

Наприклад, функція

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \cdot y \neq 0, \\ 0, \text{ якщо } x \cdot y = 0 \end{cases}$$

не є неперервною в точці $(0; 0)$, хоча $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

Дійсно,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Але ж при $\Delta x \cdot \Delta y \neq 0$ $\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = 1 \not\to 0$, якщо $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Іноді від частинних похідних f'_x та f'_y потрібно знайти частинні похідні – так звані частинні похідні другого порядку. Для функції двох змінних їх чотири:

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x, \; f''_{xy} = (f'_x)'_y, \; f''_{yx} = (f'_y)'_x, \; f''_{yy} = (f'_y)'_y.$$

Якщо друга і третя з написаних похідних є неперервними функціями, то вони збігаються $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Приклад 2. Знайти похідні другого порядку від функцій:

1) $f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$, 2) $f(x, y) = x^2 \cdot y^3 - 2xy$.

Розв’язання:

1) $f'_x = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow f''_{xy} = \dfrac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $f''_{xx} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$;

$f'_y = \dfrac{2y}{x^2 + y^2} \Rightarrow f''_{yx} = \dfrac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $f''_{yy} = \dfrac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$.

2) $f_x' = 2xy^3 - 2y \Rightarrow f_{xy}'' = 6xy^2 - 2$, $f_{xx}'' = 2y^3$;
$f_y' = 3x^2y^2 - 2x \Rightarrow f_{yx}'' = 6xy^2 - 2$, $f_{yy}'' = 6x^2y$.

8.3. Диференціал функції двох змінних

Нехай функція $f(x,y)$ має скінченні частинні похідні $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$.

Означення 1. Функція $f(x,y)$ називається **диференційовною** в точці $M_0(x_0;y_0)$, якщо приріст функції у точці $M_0(x_0;y_0)$ можна подати у вигляді

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).} \tag{8.2}$$

Звернемо увагу на те, що існування скінченних частинних похідних $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ не гарантує того, що приріст можна подати у вигляді (8.2). Прикладом такої функції може бути розглянута в п. 8.2 функція

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \cdot y \neq 0, \\ 0, \text{ якщо } x \cdot y = 0. \end{cases}$$

Оскільки $f_x'(0{,}0) = 0$, $f_y'(0{,}0) = 0$, то при відмінних від нуля Δx, Δy маємо

$$\Delta f(0{,}0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0{,}0) = 1 \neq f_x'(0{,}0)\Delta x + f_y'(0{,}0)\Delta y +$$
$$+ o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) = o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).$$

Якщо функція $f(x,y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0;y_0)$, то вона є і неперервною в цій точці, оскільки при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ $\Delta f(x_0,y_0) \to 0$.

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ має в околі $U(M_0)$ точки $M_0(x_0;y_0)$ частинні похідні, які неперервні в цій точці, то функція $f(x,y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0;y_0)$.

Означення 2. Якщо функція $f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0\,;y_0)$, то її **диференціалом** у цій точці називається величина:

$$\boxed{df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y}.$$

Оскільки x та y незалежні змінні, то замість $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ можна використовувати позначення dx та dy. Тоді запис диференціала набуває

більш симетричного вигляду:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy\,.$$

Отже, для диференційовної у точці $M_0(x_0; y_0)$ функції $f(x, y)$ має місце наближена рівність

$$\boxed{\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)} \Leftrightarrow \boxed{f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)}.$$

Приклад 3. Обчислити наближено $1.02^{4.05}$.

Розв’язання

Розглянемо функцію $f(x, y) = x^y$.

Тоді $f'_x = yx^{y-1}$, $f'_x\big|_{(1;\,4)} = 4$; $f'_y = x^y \ln x$, $f'_y\big|_{(1;\,4)} = 0$, тому $1.02^{4.05} =$ $= f(1.02,\ 4.05) \approx f(1, 4) + 4 \cdot 0.2 = 1.08$.

Зауваження. Майже всі прямі вимірювання фізичних величин пов’язані з похибками. Припустимо, що величини x та y виміряні з максимальними абсолютними похибками δx і δy відповідно. Це означає, що в експерименті отримані такі результати: $x = x_0 \pm \delta x,\ y = y_0 \pm \delta y$. Потрібно за цими даними отримати формулу для обчислення максимальної абсолютної похибки при непрямому вимірюванні величини $f(x,y)$. Припустимо, що Δx і Δy істинні похибки при вимірюванні величин x і y. Оскільки $|\Delta x| \le \delta x,\quad |\Delta y| \le \delta y$, то

$$\left|\Delta f(x_0, y_0)\right| \approx \left|df(x_0, y_0)\right| \le \left|f'_x(x_0, y_0)\right|\left|\Delta x\right| + \left|f'_y(x_0, y_0)\right|\left|\Delta y\right| \le$$
$$\le \left|f'_x(x_0, y_0)\right|\delta x + \left|f'_y(x_0, y_0)\right|\delta y$$

і природно означати максимальну абсолютну похибку величини $f(x,y)$ таким чином:

$$\delta f = \left|f'_x(x_0,y_0)\right|\delta x + \left|f'_y(x_0,y_0)\right|\delta y .$$

Отже, при непрямому вимірюванні величини $f(x,y)$ маємо $f(x,y) = f(x_0,y_0) \pm \delta f$.

8.4. Диференціювання складених функцій

Розглянемо функцію $f(x\,,y)$ двох змінних, кожна з яких є функцією незалежної змінної u: $x = g(u)$, $y = h(u)$.

Теорема 1. Якщо функції $g(u), h(u)$ є диференційовними в точці u_0, а функція $f(x, y)$ є диференційовною у відповідній точці $M_0\big(x_0 = g(u_0);\, y_0 = h(u_0)\big)$, то складена функція $f\big(g(u), h(u)\big)$ незалежного змінного u визначена в деякому околі точки u_0, є диференційовною у цій точці, причому

$$f'(u_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot g'(u_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot h'(u_0) .$$

Доведення. Оскільки функція $f(x,y)$ є діференційовною в точці $(x_0;y_0)$, то її приріст $\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ зображується у вигляді

$$\Delta f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot \Delta g + f'_y(x_0,y_0)\cdot \Delta h + o\left(\sqrt{(\Delta g)^2 + (\Delta h)^2}\right).$$

Нехай прирости $\Delta g = g(u_0+\Delta u) - g(u_0)$ і $\Delta h = h(u_0+\Delta u) - h(u_0)$ відповідають приросту Δu незалежної змінної u. Якщо $\Delta u \to 0$, то $\Delta g \to 0$ і $\Delta h \to 0$ і, отже, $\sqrt{(\Delta g)^2 + (\Delta h)^2} \to 0$. Оскільки при цьому

$\dfrac{\Delta g}{\Delta u} \to g'(u_0)$, $\dfrac{\Delta h}{\Delta u} \to h'(u_0)$, $\sqrt{\left(\dfrac{\Delta g}{\Delta u}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta h}{\Delta u}\right)^2} \to \sqrt{\big(g'(u_0)\big)^2 + \big(h'(u_0)\big)^2}$, то

$$\frac{o\left(\sqrt{(\Delta g)^2+(\Delta h)^2}\right)}{\Delta u}=\frac{o\left(\sqrt{(\Delta g)^2+(\Delta h)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta g)^2+(\Delta h)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta g)^2+(\Delta h)^2}}{\Delta u}=$$

$$=\frac{o\left(\sqrt{(\Delta g)^2+(\Delta h)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta g)^2+(\Delta h)^2}}\cdot\left(\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta g}{\Delta u}\right)^2+\left(\frac{\Delta h}{\Delta u}\right)^2}\right)\to 0.$$

Таким чином,

$$\frac{\Delta f}{\Delta u}=f'_x(x_0,y_0)\cdot\frac{\Delta g}{\Delta u}+f'_y(x_0,y_0)\cdot\frac{\Delta h}{\Delta u}+\frac{o\left(\sqrt{(\Delta g)^2+(\Delta h)^2}\right)}{\Delta u}\to$$
$$\to f'_x(x_0\,,\,y_0)\cdot g'(u_0)+f'_y(x_0\,,\,y_0)\cdot h'(u_0)\ \text{ при } \Delta u\to 0.$$

Отже, існує похідна $f'(u_0)$ і має місце рівність

$$f'(u_0)=f'_x(x_0\,,\,y_0)\cdot g'(u_0)+f'_y(x_0\,,\,y_0)\cdot h'(u_0)\ .$$

Розглянемо функцію двох змінних $f(x,\,y)$, кожна з яких є функцією незалежних змінних u і v: $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$.

Теорема 2. Нехай функції $g(u,v),h(u,v)$ є диференційовними в деякій точці $C_0(u_0;\,v_0)$, а функція $f(x,\,y)$ є диференційовною у відповідній точці $M_0(x_0=g(u_0,v_0);\,y_0=h(u_0,v_0))$. Тоді складена функція $f(g(u,v),h(u,v))$ незалежних змінних u,v визначена в деякому околі точки $C_0(u_0;v_0)$, є диференційовною у цій точці, причому

$$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|C_0=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|M_0\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\Big|C_0+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|M_0\cdot\frac{\partial h}{\partial u}\Big|C_0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}\Big|C_0=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|M_0\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\Big|C_0+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|M_0\cdot\frac{\partial h}{\partial v}\Big|C_0.$$

Доведення. Обмежимось лише обчисленням частинних похідних складеної функції $f(g(u,v)\,,\,h(u,v))$, а її диференційовність доводити не будемо. Фіксуємо одну зі змінних, наприклад, v і розглядаємо x і y лише як функції u. Всі умови попередньої теореми виконані. Отже, існує частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{C_0}$ складеної функції $f\left(g(u,v),\, h(u,v)\right)$ і має місце формула: $\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{C_0}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{C_0}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}\cdot\frac{\partial h}{\partial u}\Big|_{C_0}$. Цілком аналогічно, коли фіксуємо змінну u, обчислюється частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{C_0}$.

Наслідок. Розглянемо функцію $f(x)$ одного змінного, яке є функцією незалежних змінних u і v: $x=g(u,v)$.

Якщо функція $g(u,v)$ є диференційовною у деякій точці $C_0(u_0;\, v_0)$, а функція $f(x)$ є диференційовною у відповідній точці $x_0=g(u_0,v_0)$, то складена функція $f\left(g(u,v)\right)$ незалежних змінних u,v визначена в деякому околі точки $C_0(u_0;\, v_0)$, є диференційовною в цій точці, причому

$$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{C_0}=\frac{df}{dx}\Big|_{x_0}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{C_0},\qquad \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{C_0}=\frac{df}{dx}\Big|_{x_0}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{C_0}.$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні складених функцій:

1) $f(x,\, y)=\ln\left(x^3-y\right)$, де $x=u^2,\ y=\frac{1}{1-u}$;

2) $f(x,\, y)=x^2+y^3$, де $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$; 3) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$, де $x=u^2-v^2$.

Розв’язання:

1) $\frac{df}{du}=\frac{3x^2}{x^3-y}\cdot 2u-\frac{1}{x^3-y}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}$, де $x=u^2,\ y=\frac{1}{1-u}$;

2) $\frac{\partial f}{\partial u}=2x\cdot v+3y^2\cdot\frac{1}{v},\ \frac{\partial f}{\partial v}=2x\cdot u+3y^2\left(-\frac{u}{v^2}\right),$ де $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$;

3) $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{u}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$, $\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{-v}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$, де $x=u^2-v^2$.

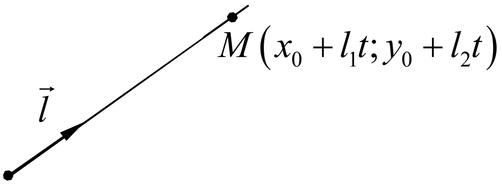
8.5. Похідна за напрямом. Градієнт. Лінії рівня

Нехай функція $f(x,y)$ визначена в деякому околі $U(M_0)$ точки $M_0(x_0;y_0)$ та диференційовна в цій точці. Нехай $\vec{l}\,(l_1;\, l_2)$ – довільний одиничний вектор, а $x=x_0+l_1t,\ y=y_0+l_2t,\ (t\ge 0)$ –

промінь, який проведено з точки M_0 у напряму вектора $\vec{l}$, $M(x_0 + l_1 t;\, y_0 + l_2 t)$ будь-яка точка променя. Нагадаємо, що $l_1 = \cos\alpha$, $l_2 = \cos\beta = \sin\alpha$, де α і β – відповідно кути між $\vec{l}$ і ортами $\vec{i}\,(1;\,0)$ і $\vec{j}\,(0;\,1)$ осей координат.

Похідна $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0}$ від функції $f(x,\, y)$ у точці M_0 **за напрямом** $\vec{l}$ визначається рівністю

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|\overrightarrow{M_0 M}|} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + l_1 t,\, y_0 + l_2 t) - f(x_0,\, y_0)}{t}.$$



Оскільки функція $f(x,\, y)$ є диференційовною у точці $M_0(x_0\,;\, y_0)$, то $f\left(x_0 + l_1 t,\, y_0 + l_2 t\right) - f\left(x_0,\, y_0\right) =$
$= f'_x(M_0) l_1 t + f'_y(M_0) l_2 t + o(t)$ і, отже,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = f'_x(M_0) \cdot l_1 + f'_y(M_0) \cdot l_2.} \tag{8.3}$$

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції у точці M_0 за напрямом $\vec{l}$. Частинні похідні $f'_x(M_0),\, f'_y(M_0)$ є відповідно швидкостями зміни функції у точці M_0 за напрямами $\vec{i}\,(1;\,0),\, \vec{j}\,(0;\,1)$ координатних осей Ox та Oy.

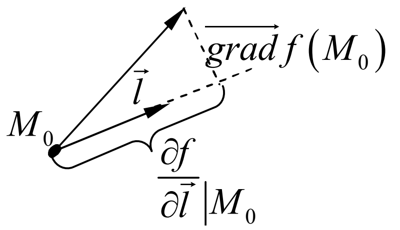
Градієнтом диференційовної у точці $M_0(x_0\,;\, y_0)$ функції $f(x,\, y)$ називається вектор

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f(M_0) = f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j}}. \tag{8.4}$$

Скористуємось тепер формулою для скалярного добутку векторів, які задані своїми координатами, і знайдемо, що

$$\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \cdot \vec{l} = f'_x(M_0) \cdot l_1 + f'_y(M_0) \cdot l_2.$$

Тоді формула (8.3) для похідної за напрямом набуває вигляду



$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = \overrightarrow{grad}\, f(M_0)\cdot \vec{l}\,.} \qquad (8.5)$$

З іншого боку, оскільки $\left|\vec{l}\right| = 1$, то за означенням скалярного добутку маємо

$$\overrightarrow{grad}\, f(M_0)\cdot \vec{l} = \left|\overrightarrow{grad}\, f(M_0)\right|\cdot \cos\left(\overrightarrow{grad}\, f(M_0),\hat{\ }\vec{l}\right)$$

і, отже, формулу (8.5) можна переписати таким чином

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = \left|\overrightarrow{grad}\, f(M_0)\right|\cdot \cos\left(\overrightarrow{grad}\, f(M_0),\hat{\ }\vec{l}\right).$$

З останньої формули випливає такий наслідок: якщо напрям $\vec{l}_0$ збігається з напрямом $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ (тобто, кут між векторами $\vec{l}_0$ і $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ дорівнює нулю), то

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}_0}\Big|_{M_0} = \max_{(\vec{l})} \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = \left|\overrightarrow{grad}\, f(M_0)\right| \ .$$

Отже, вектор $\overrightarrow{grad} f(M_0)$ вказує напрям, в якому функція $f(x,y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ найшвидше зростає, а його довжина дає величину відповідної похідної.

Приклад 5. Знайти похідну функції $f(x,\,y) = \sqrt{x^2 - 7y}$ у точці $M_0(4;1)$ за напрямом вектора $\vec{a}(2;1)$. Порівняти $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0}$ з максимальним значенням похідної у точці $M_0(4;1)$.

Розв’язання

Знайдемо орт напряму $\vec{l} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;1) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

Обчислюємо за формулами (8.3)-(8.4):

$$\overrightarrow{grad}\, f(M_0) = \frac{x}{\sqrt{x^2-7y}}\Big|_{M_0}\vec{i} - \frac{7}{2\sqrt{x^2-7y}}\Big|_{M_0}\vec{j} = \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{7}{6}\vec{j}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = \left(\frac{4}{3}\vec{i} - \frac{7}{6}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{8}{3} - \frac{7}{6}\right) = \frac{9}{6\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} <$$

$$< \max_{(\vec{l})}\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = \left|\overrightarrow{grad}\, f(M_0)\right| = \sqrt{\frac{64+49}{36}} = \frac{\sqrt{113}}{6}\,.$$

Похідна за напрямом функції $f(x, y, z)$

Нехай функція трьох змінних $f(x, y, z)$ має неперервні частинні похідні в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$, а напрям задається одиничним вектором $\vec{l}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, де α, β, γ – відповідно кути між $\vec{l}$ та ортами $\vec{i}(1; 0; 0), \vec{j}(0; 1; 0)$, $\vec{k}(0; 0; 1)$ осей координат. Тоді похідна за напрямом

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|M_0 = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + \cos\alpha \cdot t, \, y_0 + \cos\beta \cdot t, \, z_0 + \cos\gamma \cdot t) - f(x_0, y_0)}{t},$$

та
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|M_0 = \overrightarrow{grad} f(M_0) \cdot \vec{l},$$

де вектор $\overrightarrow{grad} f(M_0) = f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + f'_z(M_0)\vec{k}.$

Лінії рівня

Нехай функція $f(x, y)$ є диференційовною. Множина точок $f(x, y) = C_0$ (C_0 – дійсне число) називається **лінією рівня** C_0 **функції** $f(x, y)$**.** Покажемо, що вектор $\overrightarrow{grad} f(M_0)$ є направленим по нормалі до лінії рівня, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$. Рівняння $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ задає залежність між y і x неявно. Якщо $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ існує явний вираз $y = y(x)$ для цієї залежності. Тоді в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ має місце тотожність $f(x, y(x)) \equiv f(x_0, y_0)$. Продиференцюємо цю тотожність з урахуванням того, що його ліва частина є складеною функцією від x: $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y'(x) = 0$. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня у точці $M_0(x_0; y_0)$ дорівнює $y'(x_0) = -\dfrac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$. Отже, рівняння дотичної до лінії рівня у точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

і, таким чином, вектор $\left(f'_x(x_0, y_0); f'_y(x_0, y_0)\right)$ є перпендикулярним дотичної до лінії рівня у точці $M_0(x_0; y_0)$.

8.6. Дотична площина до поверхні

Нехай функція $f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Розглянемо на поверхні $S: z = f(x, y)$ точку $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ та проведемо через цю точку будь-які гладкі криві, що належать поверхні. Нехай $L = \{(x; y; z): x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\}$ одна з цих кривих , що проходить через точку P_0 при $t = t_0$. Оскільки крива L належить поверхні S, то відносно t маємо тотожність $-f(x(t),\ y(t)) + z(t) \equiv 0$. Знайдемо похідну від цієї тотожності при $t = t_0$:

$$-f'_x(M_0) \cdot x'(t_0) - f'_y(M_0) \cdot y'(t_0) + z'(t_0) = 0.$$

Остання рівність означає, що скалярний добуток визначеного лише поверхнею S і точкою $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ вектора $\vec{N}(-f'_x(M_0); -f'_y(M_0); 1)$ на вектор швидкості $\vec{v}_L(x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0))$ кривої L дорівнює нулю. Отже, $\vec{v}_L \perp \vec{N}$. Якщо змінювати криві, то будуть змінюватися вектори швидкості, але вони залишаться перпендикулярними вектору $\vec{N}$. Таким чином, вектори швидкостей кривих у точці P_0 будуть лежать у одній площині, яка перпендикулярна вектору $\vec{N}$ і проходить через точку P_0. Ця площина називається **дотичною площиною** до поверхні у точці P_0. Оскільки вектор $\overline{N}$ є нормальним вектором дотичної площини до поверхні $S: z = f(x, y)$ в точці $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$, то її рівняння має вигляд:

$$\boxed{T:\ -f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0.}$$

Серед площин, що проходять через точку P_0, дотична площина розташована в околі цієї точки ближче всього до поверхні S.

Порівнюючи рівняння дотичної площини з виразом для диференціала, приходимо до висновку про те, що **диференціал дорівнює приросту аплікати дотичної площини**

$\left(\Delta z = PP_2,\, dz = P_1P_2\right)$ **при переході з точки** $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ **до точки** $M\left(x = x_0 + \Delta x;\, y = y_0 + \Delta y\right)$ (рис. 8.6).

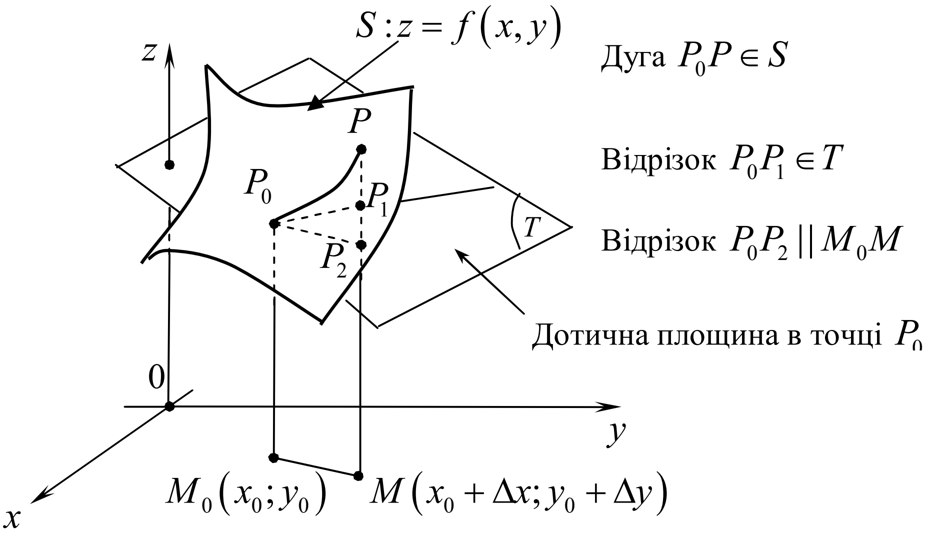


Рис. 8.6

Рівняння **нормалі** (прямої, що перпендикулярна дотичній площини) **до поверхні** $S:\ z = f\left(x,\, y\right)$ в точці P_0 має вигляд

$$\boxed{N: \frac{x - x_0}{-f'_x\left(x_0,\, y_0\right)} = \frac{y - y_0}{-f'_y\left(x_0,\, y_0\right)} = \frac{z - f\left(x_0,\, y_0\right)}{1}.}$$

Приклад 6. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні у вказаній точці: 1) $z = x^2 + y^2$, $P_0\left(1;\, 2;\, 5\right)$; 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, $P_0\left(\sqrt{3};\, -\sqrt{5};\, 3\right)$.

Розв'язання. 1) $T: -2\left(x-1\right) - 4\left(y-1\right) + z - 5 = 0$,

$$N: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-5}{-1}.$$

2) $T: -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3}\left(y + \sqrt{5}\right) + z - 3 = 0$,

$$N: -\sqrt{3}\left(x - \sqrt{3}\right) = \frac{y + \sqrt{5}}{\sqrt{5}/3} = z - 3.$$

Нехай Π_T – паралелограм, який побудований на векторах $\vec{v}_{L_1}(x_0)\Delta x$, $\vec{v}_{L_2}(y_0)\Delta y$ і розташований у дотичній площині T до поверхні в точці $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ (рис. 8.7). Позначимо через ΔS ту частину поверхні S, яка проектується у прямокутник $\Pi\{(x; y): x_0 \le x \le x_0 + \Delta x,\ y_0 \le y \le y_0 + \Delta y\}$ площини xOy.

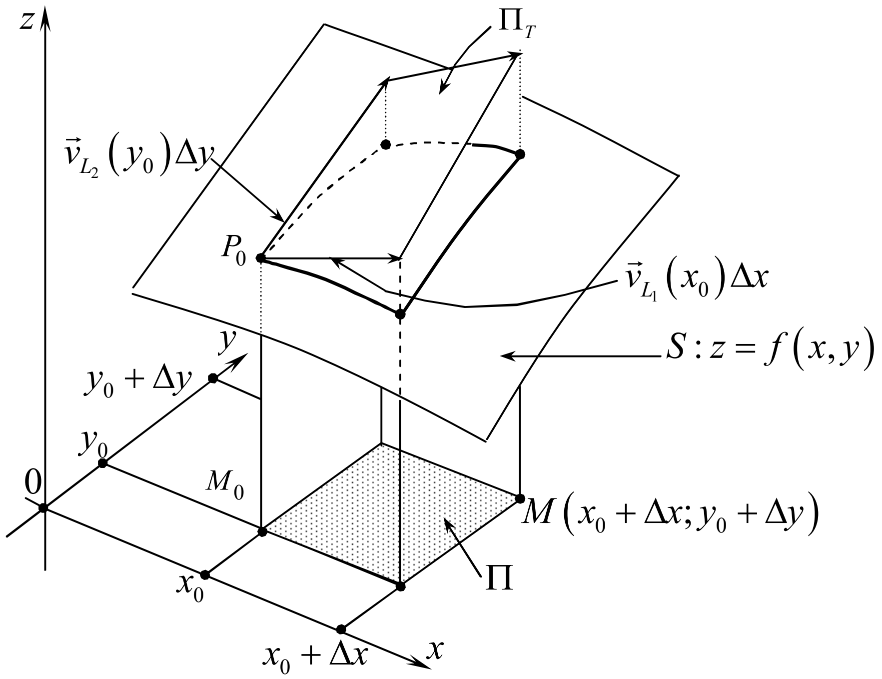


Рис. 8.7

З точністю до $o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$ площа $\Delta\sigma$ частини ΔS поверхні S дорівнює площі паралелограма Π_T. Як відомо з аналітичної геометрії, площа паралелограма, якій побудовано на двох векторах, дорівнює модулю векторного добутку цих векторів. Отже, на підставі (8.1), маємо:

$$\Delta\sigma \approx \left|\vec{v}_{L_1}(x_0)\Delta x \times \vec{v}_{L_2}(y_0)\Delta y\right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x & 0 & f'_x(x_0, y_0)\cdot\Delta x \\ 0 & \Delta y & f'_y(x_0, y_0)\cdot\Delta y \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left|-f'_x(x_0, y_0)\vec{i} - f'_y(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k}\right| \cdot \Delta x \cdot \Delta y =$$

$$= \sqrt{1 + f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0)} \cdot \Delta x \cdot \Delta y.$$

Тому приймаємо таке означення.

Означення. Елементом $d\sigma$ **площі поверхні** $S: z = f(x, y)$ називається вираз

$$\boxed{d\sigma = \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dx \cdot dy\,.}$$

Приклад 7. Знайти елементи площі поверхні:

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; 2) $z = x^2 + y^2$; 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

Розв'язання:

1) $f'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $f'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ $\Rightarrow d\sigma = \dfrac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

2) $d\sigma = \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}dxdy$.

3) $d\sigma = \sqrt{\dfrac{1 + 2\left(x^2 + y^2\right)}{1 + x^2 + y^2}}dxdy$.

8.7. Диференціал другого порядку

Всюди в цьому пункті і далі будемо припускати, що функція $f(x, y)$ має у деякому околі $U(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$ неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Означення. **Диференціалом другого порядку** в точці M_0 називається диференціал від диференціала першого порядку в цій точці

$$d^2 f(M_0) = d(df)_{|M_0}\,.$$

При цьому диференціали незалежних змінних $dx = \Delta x = x - x_0$, $dy = \Delta y = y - y_0$ вважаються сталими, які були обрані при обчисленні першого диференціала.

Отже,

$$d^2 f(M_0) = d(df)_{|M_0} = \frac{\partial}{\partial x}(df)_{|M_0} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}(df)_{|M_0} \cdot dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy\right)_{|M_0} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy\right)_{|M_0} \cdot dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_{|M_0} \cdot (\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}_{|M_0} \Delta x \cdot \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_{|M_0} \cdot (\Delta y)^2 .$$

Можна показати, що в околі $U(M_0)$ точки M_0 має місце формула Тейлора другого порядку

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2}d^2 f(M_0) + o\left(\left|\overrightarrow{M_0M}\right|^2\right). \qquad (8.6)$$

Знайдемо умови, за яких диференціал другого порядку зберігає знак. З цією метою перетворимо вираз для $d^2 f(M_0)$ таким чином:

$$d^2 f(M_0) = (\Delta y)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_{|M_0} \cdot \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}_{|M_0} \cdot \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_{|M_0} \right) =$$

$$= (\Delta y)^2 \left(f''_{xx}(M_0)\, t^2 + 2\Delta f''_{xy}(M_0)\, t + f''_{yy}(M_0) \right), \text{ де } t = \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Вираз у дужках – квадратний тричлен відносно змінного t. Як відомо зі шкільного курсу, квадратний тричлен зберігає знак, якщо його дискримінант $D<0$. При цьому тричлен є додатним, якщо його “старший” коефіцієнт додатний, та від’ємним, якщо цей коефіцієнт від'ємний. Введемо позначення $\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{|M_0}$.

Тоді $D = -\Delta(M_0)$.

Отже, маємо:

1) $d^2 f(M_0) > 0$, якщо $\Delta(M_0) > 0$, $f''_{xx}(M_0) > 0$;

2) $d^2 f(M_0) < 0$, якщо $\Delta(M_0) > 0$, $f''_{xx}(M_0) < 0$;

3) якщо $\Delta(M_0) < 0$, то $d^2 f(M_0)$ має той чи інший знак залежно від вибору диференціалів (приростів) Δx та Δy незалежних змінних x і y.

8.8. Екстремум функції двох змінних

Означення точки локального максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$ повністю збігається з означенням для випадку функції однієї змінної: точка $M_0(x_0; y_0)$ є точкою **локального максимуму (мінімуму)**, якщо існує такий проколений окіл $\overset{0}{U}(M_0)$ точки M_0, що для всіх точок $M \in \overset{0}{U}(M_0)$ виконується нерівність

$$f(M_0) > f(M) \quad \left(f(M_0) < f(M)\right).$$

Приклад 8

1) точка $O(0; 0)$ є точкою локального мінімуму функції $f(x, y) = x^2 + y^2$. Дійсно, $f(0; 0) = 0 < f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \forall M \in \overset{0}{U}(O)$ (рис. 8.2);

2) точка $O(0; 0)$ не є точкою локального екстремуму функції $f(x, y) = x^2 - y^2$. Дійсно, функція дорівнює нулю в точці O, а в будь-якому околі $\overset{0}{U}(O)$ цієї точки набуває як додатних, так і від'ємних значень: $f(x, 0) = x^2 > 0$, $f(0, y) = -y^2 < 0$ (див. рис. 8.4).

Теорема 1. (Необхідні умови існування локального екстремуму)

Якщо точка $M_0(x_0; y_0)$ є точкою локального екстремуму диференційовної функції $f(x, y)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю

$$\boxed{\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}} \qquad (8.7)$$

(отже, дотична площина до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ є паралельною площині xOy).

Точки, координати яких задовольняють системі (8.7), називаються **стаціонарними**, в цих точках може бути екстремум**.**

Таким чином, точки локального екстремуму диференційовної функції можуть знаходитися лише серед її стаціонарних точок.

Легко бачити, що рівність нулю частинних похідних першого порядку у якійсь точці ще не означає існування екстремуму в цій точці.

Розглянемо, наприклад, функцію $f(x, y) = x^2 - y^2$ (підрозд. 8.1, рис. 8.4). Тоді $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$ і точка $M_0(0; 0)$ є стаціонарною, проте не є точкою локального екстремуму.

Якщо точка $M_0(x_0; y_0)$ є стаціонарною точкою функції $f(x, y)$, то її диференціал першого порядку у цій точці дорівнює нулю

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dx = 0 .$$

Тоді з формули (8.6) безпосередньо випливає співвідношення $f(M) \approx f(M_0) + \frac{1}{2}d^2 f(M_0)$, яке приводить до наслідку:

1) якщо $d^2 f(M_0) > 0$, то $f(M) > f(M_0)$;

2) якщо $d^2 f(M_0) < 0$, то $f(M) < f(M_0)$.

Скористаємось тепер умовами збереження знака диференціала другого порядку (підрозд. 8.7) і одержимо наступний результат.

Теорема 2 (Достатні умови існування локального екстремуму)

Нехай точка $M_0(x_0; y_0)$ є стаціонарною точкою функції $f(x, y)$. Тоді точка $M_0(x_0; y_0)$:

1) є точкою локального мінімуму, якщо $\Delta(M_0) > 0$, $f''_{xx}(M_0) > 0$;

2) є точкою локального максимуму, якщо $\Delta(M_0) > 0$, $f''_{xx}(M_0) < 0$;

3) не є точкою локального екстремуму, якщо $\Delta(M_0) < 0$.

Зауваження. Якщо $\Delta(M_0) = 0$, то відповісти на питання про наявність екстремуму у точці $M_0(x_0; y_0)$ не можна і потрібні додаткові дослідження.

Приклад 9. Дослідити на екстремум функції:

1) $f(x, y) = x^4 + y^4$;

2) $f(x, y) = x^3 + y^3$.

Розв'язання: 1) $\begin{cases} f'_x = 4x^3 = 0, \\ f'_y = 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0; 0)$ – стаціонарна точка;

$$f''_{xx}(M_0) = 12x^2\Big|_{M_0} = 0,\ f''_{yy}(M_0) = 12y^2\Big|_{M_0} = 0,\ f''_{xy}(M_0) = 0 \Rightarrow \Delta(M_0) = 0 .$$

Таким чином, відповіді на питання про наявність екстремуму дати не можна. З іншого боку, точка $M_0(0;0)$ є точкою локального мінімуму $f(0,0)=0<f(x,y)=x^4+y^4$ $\forall M(x;y)\in \overset{0}{U}(M_0)$.

2) $\begin{cases} f'_x = 3x^2 = 0, \\ f'_y = 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0;0)$ – стаціонарна точка;

$f''_{xx}(M_0)=6x\big|_{M_0}=0$, $f''_{yy}(M_0)=6y\big|_{M_0}=0$, $f''_{xy}(M_0)=0 \Rightarrow \Delta(M_0)=0$.

Оскільки функція $f(x,y)=x^3+y^3$ додатна у півплощині $x+y>0$ і від'ємна у півплощині $x+y<0$, то в довільному проколеному околі $\overset{0}{U}(M_0)$ точки M_0 вона змінює знак. Через те що $f(0,0)=0$, точка M_0 не є точкою локального екстремуму.

Приклад 10. Дослідити на екстремум функцію $f(x,y)=x^3+xy^2+6xy$.

Розв'язання. Знайдемо точки, у яких може бути екстремум. З цією метою розв'яжемо систему рівнянь (8.5)

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + y^2 + 6y = 0, \\ f'_y = 2xy + 6x = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння випливає, що $x=0$ або $y=-3$. Підставивши послідовно знайдені значення в перше рівняння, знайдемо $y^2+6y=0$ або $x^2=3$. Отже, отримаємо чотири стаціонарні точки:

$$M_1(0;0);\ M_2(0;-6);\ M_3\left(\sqrt{3};-3\right);\ M_4\left(-\sqrt{3};-3\right).$$

Оскільки $f''_{xx}=6x$, $f''_{xy}=2y+6$, $f''_{yy}=2x$, то $\Delta(M_1)=\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$;

$\Delta(M_2)=\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}$; $\Delta(M_3)=\begin{vmatrix} 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}$; $\Delta(M_4)=\begin{vmatrix} -6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix}$.

У точках M_1 та M_2 екстремуму немає. Точка M_3 є точкою локального мінімуму $f(M_3)=f\left(\sqrt{3},-3\right)=-6\sqrt{3}$. Точка M_4 є точкою локального максимуму $f(M_4)=f\left(-\sqrt{3},-3\right)=6\sqrt{3}$.

8.9. Поняття про умовний екстремум

У застосуваннях дуже цікавими є задачі знаходження екстремуму функції $f(x, y)$ не на всій області її визначення D_f, а тільки на деякій її частині, наприклад, на лінії $G \subset D_f$. Такі задачі називаються задачами на умовний екстремум.

Нехай потрібно знайти локальний екстремум функції $f(x, y)$ при умові, що змінні x та y задовольняють обмеженню (зв'язку) $G: g(x, y) = 0$.

Означення. Точка $M_0(x_0; y_0)$ називається точкою **локального умовного екстремуму** функції $f(x, y)$ відносно зв'язку $G: g(x, y) = 0$, якщо M_0 є точкою локального екстремуму функції $f(x, y)$, що розглядається тільки на лінії G.

Далі припускаємо, що $g(x, y)$ має в околі $U(M_0)$ точки M_0 неперервні частинні похідні до другого порядку включно та $\left(g'_x(M_0)\right)^2 + \left(g'_y(M_0)\right)^2 \neq 0$.

Нехай з рівняння зв'язку просто виразити одну із змінних через другу. Тоді, виключаючи цю змінну з функції, зводимо задачу до відшукання екстремуму функції однієї змінної.

Приклад 11. Знайти локальні умовні екстремуми функції $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ при наявності зв'язку $x + y - 1 = 0$.

Розв'язання. З рівняння зв'язку маємо $y = -x + 1$. Після підстановки цього виразу в функцію $f(x, y)$ отримаємо функцію однієї змінної $f(x, 1 - x) = 5x^2 - 6x + 3$. Екстремуми цієї функції знаходяться звичайним шляхом: оскільки $\left(5x^2 - 6x + 3\right)' = 10x - 6$, $\left(10x - 6\right)' = 10$, то функція $5x^2 - 6x + 3$ при $x = \dfrac{3}{5}$ має мінімум, який дорівнює $\dfrac{6}{5}$. Отже, в точці $\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$ функція $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ досягає мінімуму відносно зв'язку $x + y - 1 = 0$. З геометричної точки зору це означає, що найнижчою точкою лінії перерізу еліптичного параболоїда $z = 2x^2 + 3y^2$ та площини $x + y - 1 = 0$ є точка $\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{2}{5}; \dfrac{6}{5}\right)$.

Якщо при розв'язанні рівняння зв'язку відносно однієї зі змінних натрапляємо на труднощі, то використовують метод, який відіграє велику роль при розв'язанні важливих сучасних задач оптимізації. Суть цього методу полягає у такому:

1) складаємо допоміжну функцію трьох змінних (функцію Лагранжа)

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y);$$

2) знаходимо частинні похідні цієї функції за змінними x, y, λ;

3) прирівнюючи до нуля знайдені в п. 2) похідні та розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо стаціонарні точки (точки можливого локального екстремуму);

4) знаходимо локальні екстремуми серед знайдених у п. 3) стаціонарних точок або доводимо, що екстремумів нема.

Продемонструємо цей метод на відносно простому прикладі.

Приклад 12. Знайти екстремуми функції $f(x, y) = x \cdot y$ при наявності зв'язку $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Розв'язання. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

та отримаємо необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda \cdot x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda \cdot y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння системи знайдемо $x = -2\lambda \cdot y$ та підставимо його в перше рівняння $y + 2\lambda \cdot (-2\lambda \cdot y) = 0 \Rightarrow y \cdot \left(1 - 4\lambda^2\right) = 0$.

Якщо $y = 0$, то $x = 0$, що суперечить третьому рівнянню (рівнянню зв'язку).

Якщо $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, то $y = \mp x$ і рівнянням зв'язку визначаються чотири стаціонарні точки: $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Точки M_1, M_2 відповідають значенню $\lambda = -\frac{1}{2}$, а точки M_3, M_4 – $\lambda = \frac{1}{2}$.

Дослідимо на екстремум точку M_1. За умови зв'язку $d\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2xdx + 2ydy = 0$ і, отже, у точці $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ маємо $dy = -dx$. З врахуванням цього другий диференціал функції Лагранжа в точці $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right)$ має вигляд

$$d^2L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{M_1} (dx)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} dxdy + \left.\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right|_{M_1} (dy)^2 =$$

$$= 2\lambda(dx)^2 + 2dxdy + 2\lambda(dy)^2 = -(dx)^2 - 2(dx)^2 - (dy)^2 < 0.$$

Таким чином, точка M_1 є точкою умовного локального максимуму функції $f(x, y) = xy$ за умови зв'язку $x^2 + y^2 - 1 = 0$: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

Аналогічним чином встановлюється наявність локального максимуму в точці M_2 та локального мінімуму в точках M_3, M_4.

Зауваження. Якщо $(x_0; y_0; \lambda_0)$ є стаціонарною точкою функції Лагранжа $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, то відповідь на питання про те, чи є точка $M_0(x_0; y_0)$ точкою умовного екстремуму функції $f(x, y)$ за умови зв'язку $g(x, y) = 0$, можна отримати за допомогою такого правила: Нехай

$$\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x(M_0) & g'_y(M_0) \\ g'_x(M_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ g'_y(M_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, то функція $f(x, y)$ має у точці $(x_0; y_0)$ умовний максимум.

Якщо $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, то функція $f(x, y)$ має у точці $(x_0; y_0)$ умовний мінімум.

Приклад 13. Знайти екстремум функції $f(x, y) = e^{xy}$ при наявності зв'язку $x + y - 1 = 0$.

Розв'язання. $L(x, y, \lambda) = e^{xy} + \lambda(x + y - 1) \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = ye^{xy} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xe^{xy} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь системи випливає, що $x = y$. Тоді з третього рівняння системи маємо $x = y = \dfrac{1}{2}$. Таким чином, $\left(x_0 = \dfrac{1}{2}; y_0 = \dfrac{1}{2}; \lambda_0 = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}\right)$ є єдиною стаціонарною точкою функції Лагранжа.

Оскільки

$$L_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) = L_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) = \tfrac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}, \; L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) = \tfrac{5}{4}e^{\frac{1}{4}},$$

$$g_x'(x_0, y_0) = g_y'(x_0, y_0) = 1,$$

то

$$\Delta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}\right) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tfrac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} & \tfrac{5}{4}e^{\frac{1}{4}} \\ 1 & \tfrac{5}{4}e^{\frac{1}{4}} & \tfrac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} \end{vmatrix} = \; = e^{\frac{1}{4}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} < 0.$$

Таким чином, функція e^{xy} має у точці $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ умовний максимум, який дорівнює $e^{\frac{1}{4}}$.

8.10. Метод найменших квадратів

Нехай з деяких міркувань відомо , що фізичні величини x і y пов'язані лінійно $y = ax + b$, але параметри a і b цієї залежності невідомі. З метою знайти ці параметри здійснюють декілька вимірів. Нехай при цьому спостерігаються таки результати

$$x_1 \, , x_2 \, , \dots , x_n$$
$$y_1 \, , y_2 \, , \dots , y_n$$

Коли б при вимірюванні похибки були б відсутні, то достатньо було б провести лише два вимірювання :

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b, \\ y_2 = a \cdot x_2 + b \end{cases}$$

і знайти з цієї системи невідомі a і b. Але при будь-якому вимірюванні похибки неминучі і тому знайдені a і b, взагалі кажучи, не будуть задовольняти іншим $n-2$ рівнянням $y_k = a \cdot x_k + b \ \ (k = 3 \, , \dots , n)$. З геометричної точки зору це означає, що експериментальні точки $(x_1 \, ; y_1), \dots, (x_n \, ; y_n)$ розкидані більш менш випадково відносно прямої

$$y = a \cdot x + b \, .$$

Оскільки всі різниці

$$y_k - (a \cdot x_k + b) \ \ (k = 1 \, , \dots , n)$$

неможливо перетворити на нуль, то відповідно **методу найменших квадратів** шуканими значеннями a і b будемо вважати ті , при яких величина

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} (y_k - a \cdot x_k - b)^2$$

є найменшою. Оскільки x_k і y_k є визначеними експериментом числами , то суму квадратів різниць можна розглядати як функцію двох змінних a і b.

Знайдемо стаціонарні точки функції $\Delta(a, b)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a} = -2\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - a \cdot x_k - b) \cdot x_k = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial b} = -2\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - a \cdot x_k - b) \qquad = 0. \end{cases}$$

Отримали систему двох лінійних відносно a і b рівнянь, яку подамо у вигляді

$$\begin{cases} a\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2 + b\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k = \sum_{k=1}^{n}y_k\cdot x_k, \\ a\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k + b\cdot n \quad = \sum_{k=1}^{n}y_k. \end{cases} \tag{8.8}$$

Визначник цієї системи $n\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_k-x_j\right)^2>0$ і, отже, існує єдиний її розв'язок $(a_0;b_0)$. Таким чином точка $(a_0;b_0)$ є єдиною стаціонарною точкою функції $\Delta(a,b)$, а саме локальним мінімумом:

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial a^2}=2\sum_{k=1}^{n}x_k^2>0,\ \frac{\partial^2\Delta}{\partial b^2}=2n,\ \frac{\partial^2\Delta}{\partial a\partial b}=2\sum_{k=1}^{n}x_k,\ \frac{\partial^2\Delta}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial^2\Delta}{\partial b^2}-\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial a\partial b}\right)^2=$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_k-x_j\right)^2>0.$$

З іншого боку, оскільки функція $\Delta(a,b)$ неперервна і $\Delta(a,b)\to+\infty$ при $\sqrt{a^2+b^2}\to+\infty$, то вона досягає свого найменшого значення. Внаслідок того, що стаціонарна точка єдина, маємо $\Delta(a_0,b_0)$ – найменше значення функції $\Delta(a,b)$.

Приклад. Нехай залежність $y=f(x)$ між величинами задана у вигляді набору точок

x_i	1.1	1.7	2.4	3.0	3.7	4.5	5.1	5.8
y_i	0.3	0.6	1.1	1.7	2.3	3.0	3.8	4.6

Знайти функцію f як лінійну функцію $y=ax+b$.

Розв'язання

Коефіцієнти системи (8.8), її розв'язок та шукана залежність (рис. 8.8) будуть такі:

$$\sum_{i=1}^{8}x_t^2=112.4,\quad \sum_{i=1}^{8}x_i=27.3,\quad \sum_{i=1}^{8}x_iy_i=77.2,\quad \sum_{i=1}^{8}y_i=17.4,$$

$$\begin{cases}112.4a+27.3b=77.2,\\ 27.3a\quad+8b\quad=17.4,\end{cases}\quad a=0.92,\ b=-0.97,\quad y=0.92x-0.97.$$

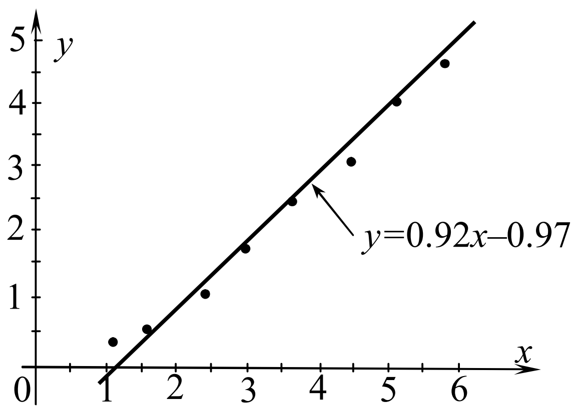


Рис. 8.8

ВПРАВИ

Знайти частинні похідні функцій:

1.1. $f(x, y) = x^4 - 3xy^2 + y^3 + e^{x^2}$ у точці $M_0(1; 2)$.

1.2. $f(x, y) = \log_2\left(x + y^3 + x^3 \cdot y^2\right)$ у точці $M_0(2; -1)$.

1.3. $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y}$ у точці $M_0(2; -4)$.

1.4. $f(x, y) = e^{-\frac{xy^2}{x^2+y}} + \sin\left(2x - \sqrt{y}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

1.5. $f(x, y) = \ln\cos\dfrac{\sqrt{x}}{y}$. **1.6.** $f(x, y) = 2^{\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}$.

Знайти диференціали функцій:

2.1. $f(x, y) = x^2 \cdot y^4 + x$. **2.2.** $f(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{x - y}$.

2.3. $f(x, y) = \ln\left(x^2 - y^3 \cdot x\right)$.

2.4. $f(x, y) = e^{x \cdot y}$ при $x_0 = -2$, $y_0 = -1$, $x = -2.3$, $y = 1.2$.

2.5. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ при $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $x = 1.2$, $y = 1.9$.

2.6. $f(x, y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$. **2.7.** $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$.

Обчислити наближені значення:

3.1. $\sqrt{(8.04)^2+(6.03)^2}$. **3.2.** $\sqrt[3]{2\cdot(6.05)^2-(2.93)^2+1}$.

3.3. $\operatorname{arctg}\dfrac{1.01}{\sqrt{1.01+1.98}}$. **3.4.** $\sqrt{\sin^2 1.6+3e^{-0.02}}$.

Знайти частинні похідні другого порядку від таких функцій:

4.1. $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. **4.2.** $f(x,y)=x\cdot y^2+\sin\dfrac{x}{y}$. **4.3.** $f(x,y)=e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}$.

4.4. $f(x,y)=\sin(y\ln x)+e^x\cdot\ln y$. **4.5.** $f(x,y)=x^2\cdot y^3+y\sqrt{x}+y^2$.

Дослідити на екстремум функції:

5.1. $f(x,y)=x^2+x\cdot y+2y^2-x+y$. **5.2.** $f(x,y)=3x^2-y^2+4y+5$.

5.3. $f(x,y)=2x\cdot y-2x-6y+5$. **5.4.** $f(x,y)=x^3+8y^3+6x\cdot y-1$.

5.5. $f(x,y)=x^3\cdot y^2(12-x-y)$.

5.6. $f(x,y)=x^2+x\cdot y+y^2-4\ln x-10\ln y$.

5.7. $f(x,y)=x^2+x\cdot y+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

5.8. $f(x,y)=x^3+3xy^2-30x-18y$.

Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в даній точці:

6.1. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $P_0\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3};\dfrac{\sqrt{23}}{6}\right)$. **6.2.** $z=x^2-y^2$, $P_0(1;2;-3)$.

6.3. $z=xy^2+x^3-1$, $P_0(-1;2;-6)$. **6.4.** $z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$, $P_0(1;-1;1)$.

Знайти елемент площі поверхні:

7.1. $z=x^2-y^2$. **7.2.** $z=\sqrt{x^2+y^2}$. **7.3.** $z=x^3+xy$.

Знайти похідні складених функцій:

8.1. $f(x,y)=e^{xy}$, де $x=\sqrt{u}+v$, $y=u^2v^3$. **8.2.** $f(x,y)=\sin\left(x^2+y\right)$, де $x=u+v^3$, $y=-3u+2v$. **8.3.** $f(x,y)=2^{x-y^2}$, де $x=\sin u$, $y=u^3$.

8.4. $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$, де $x=uv^2$.

Знайти градієнт функції $f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$:

9.1. $f(x,y)=x^2+y,\ M_0(-1;2)$. **9.2.** $f(x,y)=\ln(2x-y^2),\ M_0(1;1)$.

9.3. $f(x,y)=y^2e^{x-1},\ M_0(0;-1)$.**9.4.** $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{xy^2}{2},\ M_0(1;-1)$.

9.5. $f(x,y)=2^x\sin^2 y,\ M_0(-1;2)$.

Знайти похідну функції $f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ за напрямом вектора $\vec{a}$. Порівняти $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}|M_0$ з максимальним значенням похідної у точці M_0:

10.1. $f(x,y)=x^2+5y,\ M_0(1;-1),\ M_1(2;3),\ \vec{a}=\overrightarrow{M_0M_1}$.

10.2. $f(x,y)= =xe^{2y}+ye^x,\ M_0(3;1),\ M_1(4;1),\ \vec{a}=\overrightarrow{M_0M_1}$.

10.3. $f(x,y)=\ x^2+y^2-xy,\ M_0(1;1),\ M_1(2;1),\ \vec{a}=\overrightarrow{M_0M_1}$.

10.4. $f(x,y)=xe^y,\ M_0(1;-1),\ \vec{a}(3;1)$.

10.5. $f(x,y)=x+\sin y$**,** $M_0\left(-1;\dfrac{\pi}{3}\right),\ \vec{a}(-2;3)$.

10.6. $f(x,y)=x\operatorname{tg}y,\ M_0\left(1;\dfrac{\pi}{3}\right),\ \vec{a}(-1;2)$.

Знайти екстремуми функцій $f(x,y)$при наявності зв’язку $g(x,y)=0$:

11.1. $f(x,y)=xy^2,\ \ g(x,y)\equiv x+2y-1=0$. **11.2.** $f(x,y)=2x+y$, $g(x,y)\equiv x^2+y^2-1=0$. **11.3.** $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}, g(x,y)\equiv\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=0$.

11.4. $f(x,y)=xy^2,\ g(x,y)\equiv x-6y+3=0$.

11.5. $f(x,y)=3x^2-4xy,\ g(x,y)\equiv x^2+y^2-1=0$.

11.6. $f(x,y)=x^2+xy+y^2,\ g(x,y)\equiv x^2+y^2-1=0$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $f'_x(M_0)=2e-8,\ f'_y(M_0)=0$**.** **1.2.** $f'_x(M_0)=\dfrac{13}{9\ln 2},\ f'_y(M_0)=-\dfrac{13}{9\ln 2}$**.**

1.3. $f'_x(M_0)=-\dfrac{1}{2},\qquad f'_y(M_0)=-\dfrac{1}{8}$**.**

1.4. $f'_x = \dfrac{y^2\left(x^2-y\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}e^{-\frac{xy^2}{x^2+y}}+2\cos\left(2x-\sqrt{y}\right)-\dfrac{1}{2x\sqrt{xy}},$

$f'_y = -\dfrac{xy\left(2x^2+y\right)}{\left(x^2+y\right)^2}e^{-\frac{xy^2}{x^2+y}}-\dfrac{\cos\left(2x-\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{xy^2}}$.

1.5. $f'_x = -\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{x}}{y}, f'_y = \dfrac{\sqrt{x}}{y^2}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

1.6. $f'_x = \dfrac{\ln 2}{3}\dfrac{2^{\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2}}}, f'_y = -\dfrac{\ln 2}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot 2^{\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}}{y\cdot\sqrt{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2}}}$.

2.1. $df = \left(2x^4+1\right)dx+4x^2y^3dy$. **2.2.** $df = -\dfrac{y^2}{\left(x-y\right)^2}dx+\dfrac{x^2}{\left(x-y\right)^2}dy$.

2.3. $df = \dfrac{2x-y^3}{x\left(x-y^3\right)}dx-\dfrac{3y^2}{x-y^3}dy$. **2.4.** $df\left(-2\,;-1\right)=0.7e^2$.

2.5. $df\left(1\,;2\right)=0.125$.

3.1. 10.05. **3.2.** 4.03445. **3.3.** 0.53.

4.1. $f''_{xx} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ f''_{xy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, f''_{yy} = \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

4.2. $f''_{xx} = -\dfrac{1}{y^2}\sin\dfrac{x}{y},\ f''_{xy} = 2y+\dfrac{x\sin\frac{x}{y}-y\cos\frac{x}{y}}{y^3},\ f''_{yy} = 2x-\dfrac{x^2\sin\frac{x}{y}-2xy\cos\frac{x}{y}}{y^4}$.

4.3. $f''_{xx} = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{\sqrt{y}}},\ f''_{xy} = -\dfrac{x+\sqrt{y}}{2y^2}e^{\frac{x}{\sqrt{y}}},\ f''_{yy} = \dfrac{x\left(x+3\sqrt{y}\right)}{4y^3}e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}$.

4.4. $f''_{xx} = -\dfrac{y}{x^2}\left(y\sin\left(y\ln x\right)+\cos\left(y\ln x\right)\right)+e^x\ln y,\qquad f''_{yy} = -\ln^2 x\sin\left(y\ln x\right)-\dfrac{e^x}{y^2},$

$f''_{xy} = -\dfrac{y\ln x}{x}\left(\sin\left(y\ln x\right)\right)+\dfrac{1}{x}\cos\left(y\ln x\right)+\dfrac{e^x}{y}$. **4.5.** $f''_{xx} = 2y^3-\dfrac{y}{4x\sqrt{x}},\ f''_{xy} = 6xy^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}},$

$f''_{yy} = 6x^2y+2$.

5.1. $\left(\dfrac{5}{7};-\dfrac{3}{7}\right)$ - точка локального мінімуму, $f_{\min} = -\dfrac{4}{7}$.

5.2. В стаціонарній точці $(0\,;2)$ екстремуму немає.

5.3. В стаціонарній точці $(3\,;1)$ екстремуму немає.

5.4. $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ - точка локального максимуму, $f_{\max}=0$.

5.5. $(6\,;4)$ - точка локального максимуму, $f_{\max}=6912$.

5.6. $(1\,;2)$ - точка локального мінімуму, $f_{\min}=7-10\ln 2$.

6.1. $3x-2y+\sqrt{23}\,z-6=0,\ \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{\sqrt{23}}}=\dfrac{y+\frac{1}{3}}{-\frac{2}{\sqrt{23}}}=\dfrac{z-\frac{\sqrt{23}}{6}}{1}$.

6.2. $2x-4y-z+3=0,\ \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\ =\dfrac{z+3}{1}$.

6.3. $7x-4y-z+9=0,\quad \dfrac{x+1}{-7}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+6}{1}$.

7.1. $d\sigma=\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy$. **7.2.** $d\sigma=\sqrt{2}dxdy$.

7.3. $d\sigma=\sqrt{\left(3x^2+y\right)^2+x^2+1}\ dxdy$.

8.1. $\dfrac{\partial f}{\partial u}=ye^{xy}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}}+xe^{xy}\cdot 2uv^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}=ye^{xy}+xe^{xy}\cdot 3v^2u^2$, де $x=\sqrt{u}+v$, $y=u^2v^3$.

8.2. $\dfrac{\partial f}{\partial u}=2x\cos\left(x^2+y\right)-3\cos\left(x^2+y\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}=2x\cos\left(x^2+y\right)\cdot 3v^2+2\cos\left(x^2+y\right)$, де $x=u+v^3$, $y=-3u+2v$. **8.3.** $\dfrac{df}{du}=2^{x-y^2}\ln 2\cdot\ \cdot\cos u-2y\cdot 2^{x-y^2}\ln 2\cdot 3u^2$, де $x=\sin u$, $y=u^3$. **8.4.** $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot v^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}=\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot 2uv$, де $x=uv^2$.

9.1. $(-2;1)$. **9.2.** $(2;2)$. **9.3.** $\left(\dfrac{1}{e};-\dfrac{2}{e}\right)$. **9.4.** $\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$. **9.5.** $\left(\dfrac{\ln 2}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

10.1. $\dfrac{22}{\sqrt{17}}$. **10.2.** e^2+e^3. **10.3.** 3. **10.4.** $\dfrac{4}{e\sqrt{10}}$. **10.5.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{13}}$. **10.6.** $\dfrac{8-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

11.1. $(1;0)$ - точка умовного мінімуму, $f_{\min}=0$; $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ - точка умовного максимуму $f_{\max}=\dfrac{1}{27}$. **11.2.** $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}};\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ - точка умовного мінімуму, $f_{\min}=-\sqrt{5}$; $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ - точка умовного максимуму $f_{\max}=\sqrt{5}$.

11.3. $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ - точка умовного мінімуму, $f_{\min}=-\sqrt{2}$; $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ - точка умовного максимуму $f_{\max}=\sqrt{2}$. **11.4.** $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$ - точка умовного мінімуму, $f_{\min}=-\dfrac{1}{9}$; $(-3;0)$ - точка умовного максимуму $f_{\max}=0$.

11.5. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}};-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ - точки умовного мінімуму, $f_{\min}=-1$; $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ - точки умовного максимуму $f_{\max}=4$.

11.6. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ - точки умовного мінімуму, $f_{\min}=\dfrac{1}{2}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ - точки умовного максимуму $f_{\max}=\dfrac{3}{2}$.

Розділ 9

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Якщо операція диференціювання дозволяє знайти швидкість залежно від пройденого шляху, то за допомогою інтегрування, тобто оберненої операції відносно диференціювання, можна розв'язати задачу про знаходження пройденого шляху залежно від відомої швидкості руху.

9.1. Невизначений інтеграл

Означення 1. Диференційовна функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для всіх x, що належать цьому проміжку, виконується співвідношення

$$\boxed{F'(x) = f(x)}.$$

Наприклад, функція $F(x) = \frac{x^2}{2}$ є первісною для функції $f(x) = x$, на проміжку $(-\infty;\infty)$, а функція $\ln(-x)$ є первісною для функції $\frac{1}{x}$ на проміжку $(-\infty;0)$ ($\left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$).

Виникає питання: чи будь-яка функція $f(x)$ має первісну $F(x)$? Відповідь на це питання негативна. Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \in (-1;\, 0), \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x \in (0;\, 1) \end{cases}$$ не має первісної при $x \in (-1;\, 1)$.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона має первісну $F(x)$ на цьому відрізку.

Доведення цієї важливої теореми буде дано у підрозд. 10.2, п.7.

Надалі буде іти мова лише про первісні неперервних функцій.

Теорема 2. Нехай $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді будь-яка інша первісна цієї функції на тому ж проміжку може бути подана у вигляді $F(x)+C$, де C – деяке число.

Доведення

Дійсно, $\left(F(x)+C\right)'=\left(F(x)\right)'+C'=f(x)\Rightarrow F(x)+C$ – є первісною функції $f(x)$. Нехай тепер $F(x)$ і $\Phi(x)$ – дві деякі первісні функції $f(x)$. Тоді $\left(\Phi(x)-F(x)\right)'=\left(\Phi(x)\right)'-\left(F(x)\right)'=f(x)-f(x)=0$ на всьому проміжку. Отже, для двох довільних точок x_1 і x_2 цього проміжку на підставі теореми Лагранжа випливає, що $\Phi(x_1)-F(x_1)=\Phi(x_2)-F(x_2)$. Таким чином, для всіх x з проміжку, що розглядається, функція $\Phi(x)-F(x)$ є сталою: $\Phi(x)-F(x)=C\Rightarrow\Phi(x)=F(x)+C$.

Означення 2. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на деякому проміжку називається **невизначеним інтегралом** від цієї функції (на тому ж проміжку) і позначається символом $\int f(x)dx$.

Отже,

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C,}$$

де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, а C– довільна стала.

Наприклад:

1. $\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}+C$, $x\in R$.
2. $\int dx=\int 1dx=x+C,\ x\in R$.
3. $\int\dfrac{1}{x}dx=\ln x+C,\ x>0$.
4. $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+C$ в кожному проміжку, де $\cos x\neq 0$.

Процес знаходження первісної $F(x)$ називається **інтегруванням** функції $f(x)$.

З означення невизначеного інтеграла випливають такі його властивості:

1.1) $\int dF(x)=\int F'(x)\,dx=F(x)+C$;

2) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$;

2. $\int \left(kf\left(x\right)+l\,g\left(x\right)\right)dx = k\int f\left(x\right)dx + l\int g\left(x\right)dx \quad \left(k\cdot l\neq 0\right)$;

3. якщо $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+C$, то $\int f\left(kx+l\right)dx = \frac{1}{k}F\left(kx+l\right)+C$ ($k\neq 0$, l – числа).

Дійсно, $\left(\frac{1}{k}F\left(kx+l\right)\right)' = \frac{1}{k}\left(F\left(kx+l\right)\right)' = \frac{1}{k}\cdot f\left(kx+l\right)\cdot k = f\left(kx+l\right).$

Зауваження. Якщо $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)+if_2\left(x\right)$ – комплексна функція дійсної змінної, то $\int f\left(x\right)dx = \int f_1\left(x\right)dx + i\int f_2\left(x\right)dx$.

Задача інтегрування є значно важчою, ніж задача знаходження похідної. При цьому слід мати на увазі, що первісна деяких елементарних функцій не виражається через елементарні функції. Наприклад, первісні функцій

$$\cos x^2,\ e^{x^2},\ \frac{e^x}{x},\ \frac{x}{\ln x},\ x\cdot \mathrm{tg}\, x$$

не будуть елементарними функціями.

Таблиця похідних 5.1 дає можливість знайти найважливіші невизначені інтеграли (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

1. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}+C \ \left(p\neq -1\right)$	7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg}\, x + C$
2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$, зокрема $\int e^x dx = e^x + C$	9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}\, x + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$	10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+A}\right\rvert + C$, $A\neq 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	11. $\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert + C$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}\, x + C$	12. $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$

Наведені формули справедливі в тих проміжках, де визначена підінтегральна функція.

Приклад 1. Використовуючи властивості інтеграла та табл. 9.1, знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2-2x+3}{x\sqrt[3]{x}}dx$; 2) $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx$; 3) $\int \sqrt[7]{3x+1}dx$; 4) $\int \frac{1}{-5x+3}dx$;

5) $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$; 6) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$; 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$; 8) $\int \sin^2 ax dx$;

9) $\int \cos^3 ax dx$; 10) $\int \sin ax \cos bx\, dx$; 11) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$.

Розв'язання

1) Скористаємося властивістю **2** інтеграла

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{4}{3}} \right)dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} - 9x^{-\frac{1}{3}} + C;$$

2) скористаємося властивістю **2** інтеграла

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2}dx = \int \left(1 + \frac{2}{1+x^2}\right)dx = x + 2\operatorname{arctg} x + C;$$

3) скористаємося властивістю **3** інтеграла

$$\int \sqrt[7]{3x+1}dx = \int (3x+1)^{\frac{1}{7}}dx = \frac{7}{8\cdot 3}(3x+1)^{\frac{8}{7}} + C;$$

4) скористаємося властивістю **3** інтеграла

$$\int \frac{1}{-5x+3}dx = -\frac{1}{5}\ln\left|-5x+3\right| + C;$$

5) скористаємося властивістю **3** інтеграла

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

6) вилучаючи повний квадрат у знаменнику, а потім використавши властивість **3** інтеграла, знаходимо

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = 4\int \frac{1}{(2x+1)^2+3}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

7) вилучаючи повний квадрат у підкореневому виразі, а потім скориставшись властивістю **3** інтеграла, знаходимо

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}}dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx = 2\cdot\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)+C = \arcsin(2x-1)+C\,;$$

8) скористаємось формулою 7 (додаток, тригонометрія), властивостями **2** та **3** інтеграла

$$\int \sin^2 ax dx = \int \frac{1-\cos 2ax}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2ax dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2ax}{2a}\right)+C\,;$$

9) використовуючи формули 8, 11 (додаток, тригонометрія), знаходимо

$$\cos^3 ax = \cos^2 ax \cos ax = \frac{1+\cos 2ax}{2}\cos ax = \frac{1}{2}(\cos ax + \cos 2ax \cos ax) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos ax + \frac{1}{2}(\cos 3ax + \cos ax)\right) = \frac{3}{4}\cos ax + \frac{1}{4}\cos 3ax\,.$$

Тут також можна було скористатися формулою Ейлера (див. підрозд. 1.7.)

$$\cos^3 ax = \left(\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3ax}+3e^{iax}+3e^{-iax}+e^{-i3ax}}{8} = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i3ax}+e^{-i3ax}}{2}+$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3ax + \frac{3}{4}\cos ax\,.$$

Використовуючи властивості **2** і **3** інтеграла, знайдемо

$$\int \cos^3 ax dx = \int \frac{3}{4}\cos ax dx + \int \frac{1}{4}\cos 3ax dx = \frac{3}{4a}\sin ax + \frac{1}{12a}\sin 3ax + C\,;$$

10) якщо $|a| \neq |b|$, то з формули 12 (додаток, тригонометрія) та властивості **2** і **3** інтеграла отримаємо

$$\int \sin ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right)+C\,.$$

Якщо $a=b$, то

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2}\int \sin 2ax dx = -\frac{1}{4a}\cos 2ax + C\,.$$

Аналогічним чином знаходяться інтеграли вигляду

$$\int \cos ax \cos bx\, dx,\ \int \sin ax \sin bx\, dx.$$

Викладки, подібні до тих, що були зроблені в прикладі 1 (п. 8, 9, 10), можуть бути застосовані і до інтегралів вигляду

$$\int \sin^n ax \cos^m bx dx \ \ (m, n \in N).$$

11) здійснимо перетворення $\sin^4 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x \sin^2 x =$

$$= \frac{1}{16}(1-\cos 4x)(1-\cos 2x) = \frac{1}{16}\left(1-\cos 4x - \cos 2x + \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right).$$

Тому $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x\right) + C$.

9.2. Основні способи інтегрування

Розглянемо два найбільш важливих методи знаходження первісних.

9.2.1. Інтегрування частинами

Теорема. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервно диференційовні, то має місце формула

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx.}$$

Доведення. Оскільки $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$, то $u(x)\cdot v'(x) = (u(x)\cdot v(x))' - u'(x)\cdot v(x)$. Проінтегруємо останню рівність і скористаємось властивістю **2** інтеграла

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = \int (u(x)\cdot v(x))' dx - \int u'(x)\cdot v(x)dx.$$

Якщо врахувати, що $\int (u(x)\cdot v(x))' dx = u(x)\cdot v(x) + C$, то отримуємо рівність $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) + C - \int u'(x)\cdot v(x)dx$. Оскільки інтеграл справа містить довільну сталу, то C можна пропустити. Таким чином, остаточно маємо

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx.$$

Якщо врахувати, що $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, то попередню формулу можна записати у вигляді

$$\int u(x)\cdot dv = u(x)\cdot v(x) - \int v\cdot du.$$

Отримана формула, що називається **формулою інтегрування частинами**, зводить відшукування первісної функції $u(x)\cdot v'(x)$ до відшукування первісної функції $u'(x)\cdot v(x)$. Її застосування корисне тоді, коли друга задача більш проста. При обчисленні інтеграла $\int f(x)dx$ за формулою інтегрування частинами підінтегральна функція $f(x)$ подається у вигляді добутку $u(x)\cdot v'(x)$, так, щоб множник $u(x)$ при диференціюванні спрощувався, а первісна функції $v'(x)$ легко знаходилась.

Наведемо два розповсюджених види інтегралів, які обчислюються за формулою інтегрування частинами:

I. $\boxed{\int P_n(x)e^{ax}dx,\ \int P_n(x)\sin(ax+b)dx,\ \int P_n(x)\cos(ax+b)dx.}$

За $u(x)$ тут приймається многочлен $P_n(x)$, а за $v'(x)$ – відповідно e^{ax}, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$;

II. $\boxed{\int P_n(x)\cdot\ln(ax+b)dx,\ \int P_n(x)\operatorname{arctg} ax dx,\ \int P_n(x)\arcsin ax dx.}$

За $u(x)$ тут приймаються відповідно $\ln(ax+b)$, $\operatorname{arctg} ax$, $\arcsin ax$, а за $v'(x)$ – многочлен $P_n(x)$.

Приклад 2. Знайти інтеграли:

1) $\int(3x+1)\sin(5x-2)dx$; 2) $\int(4-3x)e^{-2x}dx$; 3) $\int(x-3)\ln(2x+1)dx$; 4) $\int x\operatorname{arctg}2x dx$; 5) $\int\frac{x+1}{\cos^2 ax}dx$; 6) $\int e^{ax}\cos bx dx$; 7) $\int\sqrt{ax^2+b}dx$.

Розв’язання

1) цей інтеграл відноситься до виду **I:**

$$\int\underbrace{(3x+1)}_{u}\cdot\underbrace{\sin(5x-2)}_{v'}dx = \left|\begin{array}{c} u(x) = 3x+1 \Rightarrow u' = 3 \\ v'(x) = \sin(5x-2) \Rightarrow v = -\frac{1}{5}\cos(5x-2) \end{array}\right| =$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{5}(3x+1)\cos(5x-2)}_{u\cdot v}-\int\underbrace{3}_{u'}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{5}\cos(5x-2)\right)}_{v}dx=-\frac{1}{5}(3x+1)\cos(5x-2)+$$

$$+\frac{3}{25}\sin(5x-2)+C\,.$$

2) цей інтеграл відноситься до виду **I:**

$$\int\underbrace{(4-3x)}_{u}\cdot\underbrace{e^{-2x}}_{v'}dx=\left|\begin{array}{l} u(x)=4-3x\Rightarrow u'=-3 \\ v'(x)=e^{-2x}\Rightarrow v=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}e^{-2x}(4-3x)-$$

$$-\int(-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx=e^{-2x}\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)+C\,.$$

3) даний інтеграл відноситься до виду **II.** Маємо:

$$\int\underbrace{(x-3)}_{v'}\cdot\underbrace{\ln(2x+1)}_{u}dx=\left|\begin{array}{l} u(x)=\ln(2x+1)\Rightarrow u'=\frac{2}{2x+1} \\ v'=x-3\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}-3x\end{array}\right|=\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)}_{v}\cdot\underbrace{\ln(2x+1)}_{u}-$$

$$-\int\underbrace{\frac{x^2-6x}{2x+1}}_{u'\cdot v}dx\,.$$

Задача звелась до знаходження інтеграла від неправильного дробу. Поділимо чисельник (x^2-6x) на знаменник ($2x+1$):

$$\begin{array}{r|l} x^2-6x & 2x+1 \\ -\quad x^2+\frac{x}{2} & \frac{x}{2}-\frac{13}{4}-\text{ціла частина} \\ \hline -\frac{13}{2}x & \\ -\quad -\frac{13}{2}x-\frac{13}{14} & \\ \hline \frac{13}{4} & -\text{остача.} \end{array}$$

Отже, $\dfrac{x^2-6x}{2x+1}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{13}{4}+\dfrac{13}{4}\dfrac{1}{2x+1}$ і тому

$$\int(x-3)\cdot\ln(2x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\ln(2x+1)-\int\left(\frac{x}{2}-\frac{13}{4}+\frac{13}{4}\frac{1}{2x+1}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\ln(2x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{13}{4}x-\frac{13}{8}\ln|2x+1|+C.$$

$$4)\ \int\underbrace{x}_{v'}\cdot\underbrace{\operatorname{arctg}2x}_{u}\,dx=\left|\begin{array}{c}u=\operatorname{arctg}2x\Rightarrow u'=\dfrac{2}{1+4x^2}\\ v'=x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\cdot\underbrace{\operatorname{arctg}2x}_{u}-$$

$$-\int\underbrace{\frac{x^2}{1+4x^2}}_{u'\cdot v}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\int\frac{1+4x^2-1}{1+4x^2}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{1+4x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C.$$

Тут, як і в прикладі 2.3, зображення $\frac{x^2}{1+4x^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+4x^2}$ можна дістати в результаті ділення. У наведеному вище розв’язанні застосовано штучний прийом.

$$5)\ \int\frac{x+1}{\cos^2 2x}dx=\left|\begin{array}{c}u(x)=x+1\Rightarrow u'=1\\ v'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 2x}\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2x\end{array}\right|=\frac{x+1}{2}\operatorname{tg}2x-\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx=$$

$$=\frac{x+1}{2}\operatorname{tg}2x+\frac{1}{4}\int\frac{(\cos 2x)'}{\cos 2x}dx=\frac{x+1}{2}\operatorname{tg}2x+\frac{1}{4}\int\left(\ln|\cos 2x|\right)'dx=\frac{x+1}{2}\operatorname{tg}2x+$$

$$+\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C.$$

Останній перехід засновано на першій властивості інтеграла.

6) цей інтеграл обчислюється двократним інтегруванням частинами. Після другого інтегрування частинами дістанемо рівняння, з якого можна знайти початковий інтеграл

$$\int\underbrace{e^{ax}}_{v'}\cdot\underbrace{\cos bx}_{u}\,dx=\left|\begin{array}{c}u(x)=\cos bx\Rightarrow u'=-b\sin bx\\ v'(x)=e^{ax}\Rightarrow v=\dfrac{1}{a}e^{ax}\end{array}\right|=\frac{1}{a}e^{ax}\cdot\cos bx+$$

$$+\frac{b}{a}\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx=\left|\begin{array}{c}u(x)=\sin bx\Rightarrow u'=b\cos bx\\ v'=e^{ax}\Rightarrow v=\dfrac{1}{a}e^{ax}\end{array}\right|=\frac{1}{a}e^{ax}\cdot\cos bx+$$

$$+\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right)=\frac{e^{ax}}{a^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Після перенесення інтеграла з правої частини рівності в ліву отримаємо

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right).$$

З останнього співвідношення випливає рівність

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C.$$

Зауваження. До цього результату можливо було б прийти, використовуючи формулу Ейлера (підрозд. 1.7)

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\int e^{ax}\cdot\operatorname{Re}\left\{e^{ibx}\right\}dx=\operatorname{Re}\left\{\int e^{(a+ib)x}dx\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right\}+C=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\int e^{(a+ib)x}dx\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right\}+C=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\operatorname{Re}\left\{(a-ib)e^{ibx}\right\}+C=$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C.$$

Метод інтегрування частинами та тільки що використаний спосіб дозволяють знайти інтеграли виду $\int P_n(x)\cdot e^{ax}\cos bx dx$, $\int P_n(x)\cdot e^{ax}\sin bx dx$, де $P_n(x)$ – многочлен.

Наприклад,

$$\int x^2e^x\sin x dx=\operatorname{Im}\left\{\int x^2e^{(1+i)x}dx\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i}-\frac{2}{1+i}\int xe^{(1+i)x}dx\right\}=$$

$$=\operatorname{Im}\left\{\frac{x^2e^{(1+i)x}(1-i)}{2}-(1-i)\left(x\cdot\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}-\frac{1}{1+i}\int e^{(1+i)x}dx\right)\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{x^2e^x(1-i)e^{ix}}{2}-\right.$$

$$\left.-(1-i)\left(\frac{xe^x(1-i)e^{ix}}{2}-\frac{(1-i)^2}{4}e^xe^{ix}\right)\right\}+C=\frac{x^2e^x}{2}(\sin x-\cos x)+xe^x\cos x-$$

$$-\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+C.$$

7) нехай $u(x)=\sqrt{ax^2+b}$, $v'(x)=1$. Тоді $u'(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{ax^2+b}}$, $v(x)=x$ і, отже,

$$\int \sqrt{ax^2+b}dx = x\sqrt{ax^2+b} - \int \frac{ax^2}{\sqrt{ax^2+b}}dx = x\sqrt{ax^2+b} - \int \frac{ax^2+b-b}{\sqrt{ax^2+b}}dx =$$
$$= x\sqrt{ax^2+b} - \int \sqrt{ax^2+b}dx + b\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}dx .$$

Отримано рівняння для знаходження початкового інтеграла $I = \int \sqrt{ax^2+b}dx$:

$$I = x\sqrt{ax^2+b} - I + b\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{ax^2+b} + b\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}dx \right).$$

Для того щоб закінчити розв'язання, потрібно з'ясувати, який знак має число a.

Якщо $a>0$, то $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left| x + \sqrt{x^2+\frac{b}{a}} \right| + C$.

Якщо $a<0, b>0$, то $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{|a|}{b}x^2}}dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{x\sqrt{|a|}}{\sqrt{b}} + C = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{\sqrt{|a|}x}{\sqrt{b}} + C .$$

9.2.2. Інтегрування підстановкою (заміна змінної)

Введення нової змінної інтегрування часто зводить розглядуваний інтеграл до табличного.

Теорема. Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx$. Якщо $\int f(t)dt = F(t) + C$, то

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = F\left(g(x)\right) + C .$$

Тут припускається, що функції $f(t)$, $g(x)$, $g'(x)$ неперервні і область значень функції $g(x)$збігається з областю визначення функції $f(t)$.

Доведення. На підставі правила диференціювання складеної функції маємо

$$\left(F\left(g(x)\right)\right)' = F'\left(g(x)\right)\cdot g'(x) = f\left(g(x)\right)\cdot g'(x).$$

Таким чином,

$$\boxed{\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \begin{vmatrix} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(t)dt = F(t) + C = F\left(g(x)\right) + C}.$$

Іноді використовують другу форму правила підстановки, коли x явно виражається через нову змінну t. Зробимо в інтегралі $\int f(x)dx$ підстановку $x = h(t)$, де $h(t)$ - неперервно диференційовна функція, така, що її область значень збігається з областю визначення функції $f(x)\left(E_h = D_f\right)$. Тоді $dx = h'(t)dt$ і правильною є формула

$$\int f(x)dx = \int f\left(h(t)\right)h'(t)dt.$$

Підстановка $h(t)$ підбирається таким чином, щоб первісну $H(t)$ функції $f\left(h(t)\right)h'(t)$ знайти було б нескладно. У результаті остаточно отримаємо

$$\boxed{\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = h(t) \\ dx = h(t)dt \end{vmatrix} = \int f\left(h(t)\right)h'(t)dt = H(t) + C = H\left(g(x)\right) + C},$$

де $t = g(x)$ є розв'язком рівняння $x = h(t)$.

Вкажемо корисні підстановки для таких інтегралів:

1) $\int f\left(a + bx^p\right)x^{p-1}dx = \begin{vmatrix} a + b\cdot x^p = t \\ b\cdot p\cdot x^{p-1}dx = dt \end{vmatrix} = \dfrac{1}{b\cdot p}\int f(t)dt$;

2) $\int f\left(a + b\ln x\right)\dfrac{1}{x}dx = \begin{vmatrix} a + b\cdot\ln x = t \\ \dfrac{b}{x}dx = dt \end{vmatrix} = \dfrac{1}{b}\int f(t)dt$;

3) $\int f\left(b + c\cdot a^x\right)a^x dx = \begin{vmatrix} b + c\cdot a^x = t \\ c\cdot a^x\ln a dx = dt \end{vmatrix} = \dfrac{1}{c\ln a}\int f(t)dt$;

4) $\int f\left(a + b\sin x\right)\cos x dx = \begin{vmatrix} a + b\sin x = t \\ b\cos x dx = dt \end{vmatrix} = \dfrac{1}{b}\int f(t)dt$;

5) $\int f\left(a + b\cos x\right)\sin x dx = \begin{vmatrix} a + b\cos x = t \\ -b\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{b}\int f(t)dt$;

6) $\int f\left(a+b\cdot \operatorname{tg} x\right)\frac{1}{\cos^2 x}dx=\begin{vmatrix} a+b\cdot \operatorname{tg} x=t \\ b\dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt \end{vmatrix}=\frac{1}{b}\int f\left(t\right)dt$.

Приклад 3. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$; 2) $\int \left(f(x)\right)^p \cdot f'(x)dx \ \left(p\neq -1\right)$.

Розв'язання

У кожному з цих інтегралів зробимо підстановку $t=f(x) \Rightarrow dt=f'(x)dx$. Тоді

1) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|f(x)\right|+C$;

2) $\int \left(f(x)\right)^p \cdot f'(x)dx=\int t^p dt=\frac{1}{p+1}t^{p+1}+C=\frac{1}{p+1}\left(f(x)\right)^{p+1}+C$, $p\neq -1$.

Зокрема

$\int f(x)\cdot f'(x)dx=\frac{1}{2}f^2(x)+C$, $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C$.

Приклад 4. Знайти інтеграли:

1) $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$; 2) $\int \frac{1}{x\left(2\ln x+3\right)}dx$; 3) $\int \frac{\cos\left(2x+3\right)}{\sqrt{\sin\left(2x+3\right)}}dx$;

4) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{3+5x^2}}dx$; 5) $\int \frac{x^2}{9+2x^3}dx$; 6) $\int \frac{x}{3+2x^2}dx$; 7) $\int e^x\sqrt[3]{2e^x-5}dx$;

8) $\int x\sqrt{2x^2+7}dx$; 9) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{3\operatorname{tg} x+2}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Розв'язання

Усі ці інтеграли можуть бути зведені до модельних інтегралів з прикладу 3:

1) здійснимо підстановку $\cos 2x=t \Rightarrow -2\sin 2xdx=dt$. Отже,

$\int \operatorname{tg} 2x\,dx=\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C$;

2) виконаємо підстановку $2\ln x+3=t \Rightarrow \frac{2}{x}dx=dt$

$\int \frac{dx}{x\left(2\ln x+3\right)}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\ln\left|2\ln x+3\right|+C$;

3) здійснимо заміну змінної $\sin(2x+3)=t \;\Rightarrow\; 2\cos(2x+3)dx=dt$

$$\int \frac{\cos(2x+3)}{\sqrt{\sin(2x+3)}}dx=\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\sqrt{t}+C=\sqrt{\sin(2x+3)}+C;$$

4) виконаємо підстановку $t=3+5x^2 \;\Rightarrow\; dt \Rightarrow 10xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt[4]{3+5x^2}}dx=\frac{1}{10}\int \frac{1}{\sqrt[4]{t}}dt=\frac{1}{10}\int t^{-\frac{1}{4}}dt=\frac{2}{15}t^{\frac{3}{4}}+C=\frac{2}{15}\sqrt[4]{\left(3+5x^2\right)3}+C;$$

$$5)\ \int \frac{x^2}{9+2x^3}dx=\begin{vmatrix}9+2x^3=t\\ 6x^2dx=dt\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\int \frac{1}{t}dt=\frac{1}{6}ln\left|9+2x^3\right|+C;$$

$$6)\ \int \frac{x}{3+2x^2}dx=\begin{vmatrix}3+2x^2=t\\ 4xdx=dt\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt=\frac{1}{4}ln|t|+C=\frac{1}{4}ln\left(3+2x^2\right)+C;$$

$$7)\ \int e^x\sqrt[3]{2e^x-5}dx=\begin{vmatrix}2e^x-5=t\\ 2e^xdx=dt\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{t}dt=\frac{3}{8}t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}\left(2e^x-5\right)^{\frac{4}{3}}+C;$$

$$8)\ \int x\sqrt{2x^2+7}dx=\begin{vmatrix}2x^2+7=t\\ 4xdx=dt\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\int \sqrt{t}dt=\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{6}\left(2x^2+7\right)^{\frac{3}{2}}+C;$$

$$9)\ \int \frac{1}{\sqrt[4]{3\operatorname{tg}x+2}\cdot\cos^2 x}dx=\left|3\operatorname{tg}x+2=t \Rightarrow \frac{3}{\cos^2 x}dx=dt\right|=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{4}}dt=$$

$$=\frac{4}{9}t^{\frac{3}{4}}+C=\frac{4}{9}\left(3\operatorname{tg}x+2\right)^{\frac{3}{4}}+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{2^x}{\sqrt{4-2^{2x}}}dx$; 2) $\int x\sqrt[3]{2+3x^2dx}$; 3) $\int \frac{x^7}{\sqrt{2x^2-3}}dx$; 4) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ $\left(x\in[-a;\,a]\right)$; 5) $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$ $\left(x\in[-a;\,a]\right)$; 6) $\int \frac{x^5}{x^4+1}dx$;
7) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx$; 8) $\int \cos^3 x\,dx$; 9) $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$.

Розв'язання

1) застосуємо підстановку $2^x=t \;\Rightarrow\; 2^x\ln 2dx=dt$

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{4-2^{2x}}}dx = \frac{1}{2\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\arcsin\frac{t}{2}+C = \frac{1}{\ln 2}\arcsin\frac{t}{2}+C =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^{x-1}+C;$$

2) виконаємо підстановку $2+3x^2=t \Rightarrow 6xdx=dt$

$$\int x^3\cdot\sqrt{2+3x^2}dx = \int x^2\cdot\sqrt{2+3x^2}xdx = \frac{1}{6}\int\frac{t-2}{3}\sqrt{t}dt = \frac{1}{18}\left(\int t^{\frac{3}{2}}dt - 2\int t^{\frac{1}{2}}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C = \frac{1}{135}\left(2+3x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(9x^2-4\right)+C;$$

3) виконаємо підстановку $2x^2-3=t \Rightarrow 4xdx=dt$

$$\int\frac{x^7}{\sqrt{2x^2-3}}dx = \int\frac{x^6x}{\sqrt{2x^2-3}}dx = \frac{1}{32}\int(t+3)^3\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{32}\int\frac{t^3+9t^2+27t+27}{\sqrt{t}}dt =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\int t^{\frac{5}{2}}dt + 9\int t^{\frac{3}{2}}dt + 27\int t^{\frac{1}{2}}dt + 27\int t^{-\frac{1}{2}}dt\right) = \frac{1}{32}\left(\frac{2}{7}\left(2x^2-3\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{18}{5}\left(2x^2-3\right)^{\frac{5}{2}} + \right.$$

$$\left. +18\left(2x^2-3\right)^{\frac{3}{2}} + 54\left(2x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}\right) + C = \frac{1}{70}\sqrt{2x^2-3}\left(5x^6+9x^4+18x^2+54\right)+C.$$

Підстановка $a+bx^2=t$, що була застосована в п. 5.2, 5.3, дозволяє обчислити інтеграли вигляду:

$$\int\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{a+bx^2}}dx,\ \int x^{2n+1}\sqrt{a+bx^2}dx\ \ (n\in N);$$

4) можна застосувати підстановку $x=a\sin t$ $\left(t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$. Тоді $dx=a\cos tdt$ і

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = a\cdot|a|\cdot\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = a\cdot|a|\cdot\int\cos^2 tdt = \frac{a\cdot|a|}{2}\cdot\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a\cdot|a|}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = \frac{a\cdot|a|}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+$$

$$+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C;$$

5) застосуємо підстановку $x=a\sin t$:

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^3\cdot|a|\cdot\int \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = \frac{a^3|a|}{4}\cdot\int \sin^2 2t\,dt = \frac{a^3|a|}{8}\cdot\int(1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{a^3|a|}{8}\cdot\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C = \frac{a^3|a|}{8}\cdot\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\left(1-2\frac{x^2}{a^2}\right)\right)+C =$$

$$= \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{|a|}-\frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}\left(a^2-2x^2\right)+C$$

(використовували співвідношення $\sin 4t = 4\sin t\cos t\left(1-2\sin^2 t\right)$).

6) $\displaystyle\int\frac{x^5}{x^4+1}dx = \begin{vmatrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{t^2}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$

$$= \frac{1}{2}(t-\operatorname{arctg} t)+C = \frac{1}{2}\left(x^2-\operatorname{arctg} x^2\right)+C;$$

7) вилучаємо повний квадрат у підкореневому виразі: $2x^2-3x+1 = 2\left(x^2-2x\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)+1 = 2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)$, а потім застосуємо підстановку $x-\frac{3}{4}=\frac{S}{4}$. Тоді

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx = \frac{5\sqrt{2}}{8}\int\frac{S}{\sqrt{S^2-1}}dS+\frac{27\sqrt{2}}{8}\int\frac{1}{\sqrt{S^2-1}}dS.$$

Перший з цих інтегралів обчислюється підстановкою $S^2-1=t$, а другий є табличним $(10, \ln)$. Отже,

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx = \frac{5\sqrt{2}}{16}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\frac{27\sqrt{2}}{8}\ln\left|S+\sqrt{S^2-1}\right|+C =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2-3x+1}+\frac{27}{4\sqrt{2}}\ln\left|4x-3+\sqrt{16x^2-24x+8}\right|+C.$$

Зауваження: а) вказаний шлях можна застосувати для знаходження інтегралів вигляду $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$;

б) інтеграли вигляду $\int(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ після вилучення повного квадрата в підкореневому виразі і відповідної підстановки зводяться до інтегралів, що розглянуті в прикладах 2.7 і 4.8;

в) для обчислення інтегралів вигляду $\int \frac{1}{\left(x^2+\alpha\right)\sqrt{ax^2+c}}dx$ доцільно робити підстановку $t = \sqrt{ax^2+c}\big/x$. Інтеграли вигляду $\int \frac{x}{\left(x^2+\alpha\right)\sqrt{ax^2+c}}dx$ находяться за допомогою підстановки $t=\sqrt{ax^2+c}$.

Як приклад обчислимо інтеграл $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}dx$.

Покладемо $t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Маємо $x^2=\frac{1}{t^2+1}$,

$$xdx=-\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2}dt \Leftrightarrow x^2dx=-\frac{tx}{\left(t^2+1\right)^2}dt \Leftrightarrow \frac{1}{t^2+1}dx=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\left(t^2+1\right)^2}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{t^2+1}dt.$$

Отже,

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}dx=-\int \frac{t^2+1}{\left(\mathrm{t}^2+2\right)\left(t^2+1\right)}dt=$$

$$=-\int \frac{1}{t^2+2}dt=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}+C.$$

Доречно зазначити, що в цьому окремому випадку підстановка $x=\sin t$ буде доцільною:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{1}{2\sin^2 t+\cos^2 t}dt=\int \frac{1}{1+2\operatorname{tg}^2 t}d\operatorname{tg} t=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C;$$

8) $\int \cos^3 x dx=\int \cos^2 x\cos x dx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\left(1-t^2\right)dt=t-\frac{t^3}{3}+C=$

$$=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C;$$

9) $\int \sin^3 x\cos^4 x dx = \int \sin^2 x\cos^4 x\sin x dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} =$

$= -\int \left(1 - t^2\right) t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$

9.3. Інтегрування раціональної функції

Кожний раціональний дріб (відношення двох многочленів), корені знаменника якого відомі, може бути проінтегрованим до кінця. Це твердження пояснюється двома обставинами. Перша з них носить алгебраїчний характер і полягає у тому, що раціональний дріб зображується у вигляді суми цілої частини (многочлена) і елементарних дробів, які відповідають кореням знаменника. Друга обставина заснована на тому, що інтегрування многочлена і елементарних дробів виконується ефективно. Роз'яснимо це докладніше.

Неправильний раціональний дріб після виділення цілої частини записується у вигляді суми многочлена і правильного дробу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{S_l(x)}{Q_m(x)}.$$

У цьому зображенні степені многочленів $P_n(x)$, $Q_m(x)$, $R_{n-m}(x)$, $S_l(x)$ рівні відповідно $n, m, n-m, l$ $(n \ge m > l)$ (див. підрозд. 1.12). Ціла частина (многочлен $R_{n-m}(x)$) знаходиться або діленням за методом "кута" (див. приклад 2.3), або штучними способами (див. приклади 1.2, 2.4, 5.6).

Правильний дріб $\frac{S_l(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму елементарних дробів (див. підрозд. 1.12), які визначаються характером коренів знаменника $Q_m(x)$.

Інтеграли від многочлена і від елементарних дробів, що відповідають дійсним кореням знаменника, знаходяться безпосередньо за допомогою таблиці інтегралів 9.1. Інтеграл від дробу $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, що відповідає парі комплексно-спряжених коренів знаменника $\left(D=p^2-4q<0\right)$, обчислюється таким чином:

а) вилучається повний квадрат у знаменнику:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+b^2\left(b^2=q-\frac{p^2}{4}\right);$$

б) потім робимо підстановку $x+\dfrac{p}{2}=bt\Rightarrow dx=bdt$, яка приводить інтеграл до лінійної комбінації двох табличних інтегралів (табл. 9.1, п. 9,12)

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)+b^2}dx=b\int\frac{M\left(bt-\frac{p}{2}\right)+N}{b^2\left(t^2+1\right)}dt=\frac{N-M\frac{p}{2}}{b}\int\frac{1}{t^2+1}dt+M\int\frac{t}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\frac{N-M\frac{p}{2}}{b}\operatorname{arctg}t+C_1=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\frac{N-M\frac{p}{2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2b}+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграли: 1) $\displaystyle\int\frac{2x-3}{x(x-1)^2(x+2)}dx$;

2) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2-2x+2}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x\left(x^2+x+1\right)}dx$.

Розв'язання:

1) розкладання правильного дробу, що стоїть під знаком інтеграла, на простіші було виконано у прикладі 21,а) розд. 1. Отже,

$$\int\frac{2x-3}{x(x-1)^2(x+2)}dx=\int\left(-\frac{\frac{3}{2}}{x}+\frac{\frac{10}{9}}{x-1}-\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{7}{18}}{x+2}\right)dx=-\frac{3}{2}\ln|x|+$$

$$+\frac{10}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{7}{18}\ln|x+2|+C;$$

2) розкладемо підінтегральний дріб на елементарні

$$\frac{2x-1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\Rightarrow 2x-1\equiv Ax\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+x^2\left(Mx+N\right).$$

Підставимо в отриману тотожність $x=0$: $B=-1$; після чого зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$x:\ 2=A$,.

$x^2:\ 0=B+N\Rightarrow N=1$,

$x^3:\ 0=A+M\Rightarrow M=-2$.

Отже,

$$\frac{2x-1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-2x+1}{x^2+1}\Rightarrow\int\frac{2x-1}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=$$

$$=\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{2x}{x^2+1}dx+$$

$$+\int\frac{dx}{x^2+1}=2\ln|x|+\frac{1}{x}-\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}x+C;$$

3) корені знаменника комплексні. Вилучаємо повний квадрат у знаменнику й покладемо $x-1=t$. Тоді

$$\int\frac{2x+3}{x^2-2x+2}dx=\int\frac{2x+3}{(x-1)^2+1}dx=\begin{vmatrix}x-1=t\\dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{2(t+1)+3}{t^2+1}dt=\int\frac{2t}{t^2+1}dt+$$

$$+5\int\frac{dt}{t^2+1}=\ln\left(1+t^2\right)+5\operatorname{arctg}t+C=\ln\left(x^2-2x+2\right)+5\operatorname{arctg}(x-1)+C;$$

4) виділяємо цілу частину підінтегрального дробу

$$\frac{x^4+1}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x^4+x^3+x^2-\left(x^3+x^2+x\right)+x+1}{x\left(x^2+x+1\right)}=x-1+\frac{x+1}{x\left(x^2+x+1\right)},$$

або інакше

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r}x^4+1\\x^4+x^3+x^2\end{array} & \begin{array}{l}x^3+x^2+x\\\hline x-1\end{array}\\
\hline
-\begin{array}{r}-x^3-x^2+1\\-x^3-x^2-x\end{array} & \\
\hline
x+1 &
\end{array}.$$

Розкладемо правильний дріб на елементарні

$$\frac{x+1}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}\Rightarrow x+1\equiv A\left(x^2+x+1\right)+x\left(Mx+N\right).$$

Підставимо в отриману тотожність $x=0$: $A=1$; після чого зрівняємо в тотожності коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^2:\ 0=A+M\Rightarrow M=-1,$$
$$x:\ \ 1=A+N\Rightarrow N=0.$$

Отже,

$$\frac{x+1}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+x+1}\Rightarrow\int\frac{x+1}{x\left(x^2+x+1\right)}dx=$$
$$=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+x+1}dx.$$

Обчислимо останній інтеграл:

$$\int\frac{x}{x^2+x+1}dx=\int\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\left|\begin{matrix}x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt\end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\left(t^2+1\right)}dt=\int\frac{t}{t^2+1}dt-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(2x+1\right)^2}{3}+1\right)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{4x^2+4x+4}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1.$$

Отже,

$$\int\frac{x^4+1}{x\left(x^2+x+1\right)}dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Зауваження. Не потрібно забувати про те, що іноді підстановка може істотно спростити підінтегральний дріб та застосування викладеної вище загальної схеми (див. приклад 4.5).

9.4. Інтегрування функцій, раціональних відносно $\sin x$, $\cos x$

Нехай $R(u, v)$– раціональна функція від двох змінних u і v (відношення двох многочленів від двох змінних).

Інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ зводиться до інтеграла від раціонального дробу універсальною підстановкою

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \ \Rightarrow \ x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Оскільки

$\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\left(\cos\frac{x}{2} \neq 0\right)$ (формули 4, 5 (додаток, тригонометрія)), то

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

При цьому раціональна функція $R_1(t)$ виходить, як правило, громіздкою і практична користь від універсальної підстановки невелика.

Спеціальна структура функції R дозволяє робити більш вдалі підстановки:

1) якщо $R(\sin x, \cos x) \equiv R_1(\sin x)\cos x$, то вдалою є підстановка $\sin x = t$;

2) в тому випадку, коли $R(\sin x, \cos x) \equiv R_1(\cos x)\sin x$, то зручна підстановка $\cos x = t$;

3) якщо $R(\sin x, \cos x) \equiv R_1\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right)$, то потрібно робити підстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Цю ж підстановку можна виконати і в інтегралі $\int R(\operatorname{tg} x)dx$.

Приклад 7. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{3\cos x + \sin x + 1}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}dx$.

Розв'язання:

1) $3\cos x+\sin x+1=\dfrac{3-3\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2\left(2-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$

Отже, після підстановки $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ отримаємо

$$\int\frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}=\int\frac{2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\cdot 2\left(2-t^2+\mathrm{t}\right)}dt=-\int\frac{dt}{(t-2)(t+1)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{3}\ln|t-2|+\frac{1}{3}\ln|t+1|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C;$$

2) $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{\cos^4 x\cdot\cos x}{\sin^3 x}dx=\left|\begin{array}{c}\sin x=t,\\ \cos x dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{\left(1-t^2\right)^2dt}{t^3}=$

$$=\int\left(t^{-3}-2t^{-1}+t\right)dt=\frac{t^{-2}}{-2}-2\ln|t|+\frac{t^2}{2}+C=-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|+\frac{\sin^2 x}{2}+C.$$

У цьому прикладі можливо також застосування підстановок:

а) $t=\cos x$; б) $t=\mathrm{tg}\,x$; в) $t=\mathrm{ctg}\,x$.

Тоді

а) $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{\cos^5 x\cdot\sin x}{\sin^4 x}dx=-\int\frac{t^5dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-V\right)^2}{V^2}dV,$

де $V=1-t^2$;

б) $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{\cos^4 x}{\mathrm{tg}^3 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{dt}{t^3\left(1+t^2\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dV}{\left(V-1\right)^2\cdot V^2},$

де $V=1+t^2$;

в) $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int t^3\cdot\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt=$

$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{\left(V-1\right)^2}{V^2}dV$, де $V=1+t^2$.

Бачимо, що всі вони набагато гірші, ніж підстановка $\sin x = t$, але кращі, ніж універсальна підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, яка приводить до інтеграла

$$\frac{1}{4}\int \frac{\left(1-t^2\right)^5 dt}{t^3\left(1+t^2\right)^3} = \frac{1}{8}\int \frac{\left(1-V\right)^5 dV}{V^2 \cdot \left(1+V\right)^3}, \text{ де } V = t^2;$$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = 4\int \frac{1}{\sin^2 2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx =$

$$= \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t, \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt, \\ \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = 4\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{4t^2}dt = \int\left(t^{-2} + 2 + t^2\right)dt = -t^{-1} + 2t + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Зауваження. До інтегрування раціональної функції зводяться інтеграли $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ і $\int R_1\left(a^x\right)dx$, в яких R і R_1 – раціональні функції відповідно двох і однієї змінної. У першому випадку це досягається підстановкою $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, а в другому – підстановкою $t = a^x$.

Приклад 8. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(x-1\right)^3\left(x-2\right)}}dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{e^{2ax}}{\alpha + \beta \cdot e^{ax}}dx$;

4) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{ax}\left(\alpha + \beta \cdot e^{ax}\right)}dx$.

Розв'язання:

1) $\dfrac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \dfrac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$. Отже,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = 4\int \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)}dt\ .$$

Оскільки підінтегральна функція є парною, то розкладання на елементарні дроби буде таким:

$$\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)} = \frac{A}{t^2+1} + \frac{B}{t^2-1} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = 2\operatorname{arctg} t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + C\ ;$$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}dx\ .$

Зробимо підстановку

$$\frac{x-2}{x-1} = t^2 \Rightarrow x = \frac{2-t^2}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2},\ x-1 = \frac{1}{1-t^2}.$$

Тоді

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}dx = \int \frac{2t\left(1-t^2\right)^2}{t\left(1-t^2\right)^2}dt = 2t + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C\ ;$$

3) зробимо підстановку $\alpha + \beta\cdot e^{ax} = t \Rightarrow \beta\cdot a\cdot e^{ax}dx = dt$

$$\int \frac{e^{2ax}}{\alpha+\beta\cdot e^{ax}}dx = \frac{1}{\beta\cdot a}\int \frac{(t-\alpha)}{\beta\cdot t}dt = \frac{1}{\beta^2\cdot a}\left(t - \alpha\ln|t|\right) + C =$$

$$= \frac{e^{ax}}{\beta\cdot a} - \frac{\alpha}{\beta^2\cdot a}\cdot\ln\left|\alpha+\beta e^{ax}\right| + C\ ;$$

4) використаємо ту ж саму підстановку. Маємо

$$\int \frac{1}{e^{ax}\left(\alpha+\beta e^{ax}\right)}dx = \frac{1}{\beta a}\int \frac{1}{\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)^2 t}dt = \frac{\beta}{a}\int \frac{1}{t(t-\alpha)^2}dt\ ;$$

$$\frac{1}{t(t-\alpha)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B_1}{t-\alpha}+\frac{B_2}{(t-\alpha)^2}\Rightarrow 1\equiv A(t-\alpha)^2+B_1t(t-\alpha)+B_2t;$$

$$t=0:\ A=\frac{1}{\alpha^2},\ t=\alpha:\ B_2=\frac{1}{\alpha},\ t^2:\ A+B_1=0\Rightarrow B_1=-\frac{1}{\alpha^2}.$$

Отже,

$$\int\frac{1}{e^{ax}(\alpha+\beta e^{ax})}dx=\frac{\beta}{a}\left(\frac{1}{\alpha^2}\ln|t|-\frac{1}{\alpha^2}\ln|t-\alpha|-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{t-\alpha}\right)+C=$$

$$=\frac{\beta}{\alpha^2 a}\left(\ln\left|\alpha+\beta e^{ax}\right|-ax\right)-\frac{1}{\alpha a}e^{-ax}+C_1.$$

Зауваження. Інтеграл вигляду $\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx$, де $R(x,y)-$ раціональна функція, а $P(x)$ – многочлен степеня вище другого, не виражається в загальному випадку через елементарні функції. Наприклад, інтеграли $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$, $\int\sqrt{x^4+1}dx$ виражаються в еліптичних функціях, які не зводяться до елементарних.

ВПРАВИ

Знайти інтеграли за допомогою таблиці інтегралів та заміни змінної:

1.1. $\int\left(x^3-3x^2+\frac{1}{2}x-4\right)dx$. **1.2.** $\int\left(e^{5x}+\sin\frac{x}{2}\right)dx$. **1.3.** $\int\frac{1}{\sqrt{1-4x}}dx$.

1.4. $\int\frac{1}{1+9x^2}dx$. **1.5.** $\int\left(\cos 3x+\sqrt[3]{x}\right)dx$. **1.6.** $\int\frac{1}{4x^2-16}dx$.

1.7. $\int\left(\frac{1}{2x-1}+e^{3-x}\right)dx$. **1.8.** $\int\left(e^x+1\right)^3dx$. **1.9.** $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$. **1.10.** $\int \mathrm{tg}^2x\,dx$.

1.11. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$. **1.12.** $\int\frac{x^2}{5-x^3}dx$. **1.13.** $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$. **1.14.** $\int\frac{\mathrm{tg}^5x}{\cos^2x}dx$.

1.15. $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$. **1.16.** $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$. **1.17.** $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x+3}}dx$. **1.18.** $\int x^2e^{x^3}dx$.

1.19. $\int\frac{1}{\sin^2x\sqrt[3]{\mathrm{ctg}x}}dx$. **1.20.** $\int\frac{x^4}{\cos^2\left(2x^5+7\right)}dx$. **1.21.** $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

1.22. $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$. **1.23.** $\int \frac{2^x}{1-4^x}dx$. **1.24.** $\int \frac{1}{x(1+\ln x)^3}dx$.

1.25. $\int \frac{1}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$. **1.26.** $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$. **1.27.** $\int x\cos x^2 dx$.

1.28. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}dx$. **1.29.** $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x-1)}dx$. **1.30.** $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$.

1.31. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$. **1.32.** $\int \frac{1}{\sqrt{4x-3-x^2}}dx$. **1.33.** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$.

1.34. $\int \left(x^2-9\sqrt{x}+\frac{1+2x}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$. **1.35.** $\int \frac{x-8}{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}dx$. **1.36.** $\int \frac{3+5x\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$.

1.37. $\int 4\cos^2\frac{x}{3}dx$. **1.38.** $\int 2^x\left(2^x+3\right)dx$. **1.39.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$.

1.40. $\int \frac{1}{5x-3}dx$. **1.41.** $\int \frac{1}{\cos^2(2x+3)}dx$. **1.42.** $\int e^{4x-1}dx$.

1.43. $\int \frac{1}{2-4x-x^2}dx$. **1.44.** $\int \frac{1}{2-4x+4x^2}dx$. **1.45.** $\int \frac{1}{\sqrt[5]{2x-3}}dx$.

1.46. $\int \frac{1}{2x^2+3x+4}dx$. **1.47.** $\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$. **1.48.** $\int \sin x\sin(2x+3)dx$.

1.49. $\int \sin^3(ax+b)dx$. **1.50.** $\int \sin x\sin 3x\cos 2x dx$. **1.51.** $\int \sin^4 2x\cos^4 2x dx$.

1.52. $\int \frac{1}{\sin^2(3x+4)}dx$. **1.53.** $\int \sin^2 x\cos\left(\frac{x}{2}-3\right)dx$. **1.54.** $\int \frac{\cos(3x-4)}{\sin\left(\frac{3}{2}x-2\right)}dx$.

1.55. $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$. **1.56.** $\int (2x-1)\sqrt[3]{2x-1}dx$. **1.57.** $\int \sin^2(3x-1)dx$.

1.58. $\int \cos 2x\cos(5x+1)dx$. **1.59.** $\int \frac{1}{\sin^2(3x+1)\cos^2(3x+1)}dx$.

1.60. $\int \frac{x}{(a+bx)^2}dx$. **1.61.** $\int \frac{x^2}{(a+bx)^2}dx$. **1.62.** $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

1.63. $\int \sqrt{1+\sin x}dx$. **1.64.** $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx$.

Знайти інтеграли способом інтегрування частинами:

2.1. $\int \left(x-6x^2\right)\cdot e^{-x}dx$. **2.2.** $\int (2-3x)\cdot\sin(x-1)dx$.

2.3. $\int (3x-1)\cdot\cos(2x+1)dx$. **2.4.** $\int (2x+1)\cdot\cos\left(\frac{x}{3}+1\right)dx$.

2.5. $\int x\sin x\cdot\cos x dx$. **2.6.** $\int \frac{x+3}{\sin^2(2x+1)}dx$. **2.7.** $\int x^2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-3\right)dx$.

2.8. $\int \sin\sqrt{x}dx$. **2.9.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. **2.10.** $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

2.11. $\int \frac{\ln(2-3x)}{x^2}dx$. **2.12.** $\int x^2\cdot e^{-\sqrt{x}}dx$. **2.13.** $\int \frac{x}{\sin^2(2x+3)}dx$.

2.14. $\int \sqrt{x}\cdot\ln x dx$. **2.15.** $\int \frac{6x-1}{\cos^2(x+5)}dx$. **2.16.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

2.17. $\int x\left(x^2+1\right)\cdot e^{-x^2}dx$. **2.18.** $\int x^2\cdot e^x\cos x dx$. **2.19.** $\int \cos(\ln x)dx$.

2.20. $\int e^{2x+5}\cdot\sin(3x+4)dx$. **2.21.** $\int (2x-3)\cdot\ln(5x+1)dx$.

2.22. $\int \arcsin x\,dx$. **2.23.** $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$. **2.24.** $\int x^2\operatorname{arctg} x dx$.

2.25. $\int x\operatorname{arctg}^2 x dx$. **2.26.** $\int \arcsin^2 x dx$. **2.27.** $\int \sqrt{x^2+2x+2}dx$.

2.28. $\int x^3\cdot\ln^2 x dx$. **2.29.** $\int x^3\cdot e^{x^2}dx$. **2.30.** $\int \left(2x^3-x\right)\cdot\ln\left(x^2-1\right)dx$.

2.31. $\int \left(x^2+x\right)\cdot\ln(x+1)dx$. **2.32.** $\int \left(x^2-x+1\right)\cdot\sin x dx$.

2.33. $\int \left(-x^2+3\right)\cdot e^{2x}dx$. **2.34.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^3}dx$. **2.35.** $\int x^2\cdot\cos^2 ax dx$.

2.36. $\int x\cdot\cos^3 ax dx$. **2.37.** $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.

Знайти інтеграли за допомогою різних методів:

3.1. $\int x\sin 3x dx$. **3.2.** $\int xe^{-2x}dx$. **3.3.** $\int \ln(x+1)dx$. **3.4.** $\int \arcsin x dx$.

3.5. $\int (2x+3)e^x dx$. **3.6.** $\int \frac{5}{(x+3)^2}dx$. **3.7.** $\int \frac{4x}{x^2+9}dx$. **3.8.** $\int \frac{4x+3}{x^2+6x+10}dx$.

3.9. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(x-1)}dx$. **3.10.** $\int \frac{x^2+1}{x\left(x^2+4\right)}dx$. **3.11.** $\int \frac{x^5+1}{x^3+x^2}dx$. **3.12.** $\int \frac{x}{x^3-1}dx$.

3.13. $\int \frac{3x-1}{x\left(x^2+4x+4\right)}dx$. **3.14.** $\int \cos^3 x\sin^2 x dx$. **3.15.** $\int \sin^3 x\cos x dx$.

3.16. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$. **3.17.** $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$. **3.18.** $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$. **3.19.** $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

3.20. $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx$. **3.21.** $\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$. **3.22.** $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$.

3.23. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$. **3.24.** $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$. **3.25.** $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

3.26. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$. **3.27.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$. **3.28.** $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

3.29. $\int x\sqrt[3]{x+1}dx$. **3.30.** $\int \frac{x}{\sqrt{-4x-x^2}}dx$. **3.31.** $\int \frac{2^x}{3\cdot 2^x+7}dx$.

3.32. $\int \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2}dx$. **3.33.** $\int \frac{3^x}{1+9^x}dx$. **3.34.** $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x\sqrt{\sin x}}dx$.

3.35. $\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}dx$. **3.36.** $\int \frac{1}{x\sqrt[6]{\ln^5 x}}dx$. **3.37.** $\int \frac{x^3}{x^2+9}dx$.

3.38. $\int \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+1}}dx$. **3.39.** $\int x\sqrt{x^2-8}dx$. **3.40.** $\int \frac{x^7}{\sin^2 x^8}dx$.

3.41. $\int \frac{\sin x}{3+\cos^2 x}dx$. **3.42.** $\int \sqrt{4-x^2}dx$. **3.43.** $\int \sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$.

3.44. $\int x\sqrt{R^2-x^2}dx$. **3.45.** $\int \frac{1}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}dx$.

3.46. $\int \frac{1}{\cos(2x+3)\sqrt{\sin(2x+3)}}dx$. **3.47.** $\int \frac{\sin(5x-1)}{\cos^2(5x-1)}dx$.

3.48. $\int \frac{x^5}{(x^{12}+1)^2}dx$. **3.49.** $\int \sqrt[7]{5+6\operatorname{tg}3x}\frac{1}{\cos^2 3x}dx$. **3.50.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}}dx$.

3.51. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{3x^2+2}}$. **3.52.** $\int x^3\cdot\sqrt{2x^2-3}dx$. **3.53.** $\int (3x-1)\sqrt{x^2+4x+5}dx$.

3.54. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x-2}}dx$. **3.55.** $\int \sin^7 x\cdot\cos^6 x dx$. **3.56.** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-2x}}dx$.

3.57. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x-3}}$. **3.58.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$. **3.59.** $\int \frac{x^3}{a+bx^2}dx$.

3.60. $\int \sin^4(2x-3)\cos(2x-3)dx$. **3.61.** $\int \frac{x(2+x)^2}{3-x}dx$.

Знайти інтеграли:

4.1. $\int \frac{2x+3}{x(1+x^2)}dx$. **4.2.** $\int \frac{x^2-2}{x(x+1)(x^2+1)}dx$. **4.3.** $\int \frac{x}{x^3-1}dx$. **4.4.** $\int \frac{x+2}{x^4-x}dx$.

4.5. $\int \frac{x(2-3x)^2}{(x+4)^2}dx$. **4.6.** $\int \frac{x^5-1}{x^2(x+1)(x^2+1)}dx$. **4.7.** $\int \frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)}dx$.

4.8. $\int \frac{e^{6x}}{1+2e^{2x}}dx$. **4.9.** $\int \frac{1}{e^x(3-e^x)^2}dx$. **4.10.** $\int \frac{1}{3+2\sin x}dx$.

4.11. $\int \frac{1}{2+3\sin x}dx$. **4.12.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}}dx$. **4.13.** $\int \frac{1}{2+3\operatorname{tg} x}dx$.

4.14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x}}dx$. **4.15.** $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$. **4.16.** $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}dx$.

4.17. $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$. **4.18.** $\int \sqrt{2+3e^x}dx$. **4.19.** $\int \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}dx$.

4.20. $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x\cos 2x}dx$. **4.21.** $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$. **4.22.** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

4.23. $\int \frac{1}{(x+7)\sqrt{x}}dx$. **4.24.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x\cos x}dx$. **4.25.** $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$.

4.26. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2+3\operatorname{tg}^2 x}}dx$. **4.27.** $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. **4.28.** $\int \frac{x}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}dx$.

4.29. $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$. **4.30.** $\int \frac{sin x}{\sqrt{2-sin^2 x}}dx$. **4.31.** $\int \sin x\sqrt{4-\sin^2 x}dx$.

4.32. $\int \sqrt{x}\cdot(\ln x)^2 dx$. **4.33.** $\int \frac{1}{x\sqrt{-4+20x-22x^2}}dx$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{4}-4x+C$. **1.2.** $\frac{1}{5}e^{5x}-2\cos\frac{x}{2}+C$. **1.3.** $\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$.

1.4. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+C$. **1.5.** $\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$. **1.6.** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$.

1.7. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|-e^{3-x}+C$. **1.8.** $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+\ +3e^x+x+C$.

1.9. $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. **1.10.** $\operatorname{tg}x-x+C$. **1.11.** $-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+C$.

1.12. $-\frac{1}{3}\ln|5-x^3|+C$. **1.13.** $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C$. **1.14.** $\frac{\operatorname{tg}^6 x}{6}+C$. **1.15.** $\ln(e^x+1)+C$.

1.16. $\ln(x^2-3x+8)+C$. **1.17.** $-2\sqrt{\cos x+3}+C$. **1.18.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$.

1.19. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x}+C$. **1.20.** $\frac{1}{10}\mathrm{tg}\left(2x^5+7\right)+C$. **1.21.** $2e^{\sqrt{x}}+C$.

1.22. $\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{x^3}{2}+C$. **1.23.** $-\frac{1}{2\ln 2}\ln\left|\frac{2^x-1}{2^x+1}\right|+C$. **1.24.** $-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\ln x)^2}+C$.

1.25. $-\arcsin e^{-x}+C$. **1.26.** $-\ln\left(1+\cos^2 x\right)+C$. **1.27.** $\frac{1}{2}\sin x^2+C$.

1.28. $e^{-\cos x}+C$. **1.29.** $\frac{1}{2}\ln\left|\ln^2 x-1\right|+C$. **1.30.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

1.31. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **1.32.** $\arcsin(x-2)+C$. **1.33.** $\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right|+C$.

1.34. $\frac{x^3}{3}-6x\sqrt{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+6\sqrt[3]{x}+\ +C$. **1.35.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{2}x+C$.

1.36. $-3\mathrm{ctg}\, x+\frac{5x^2}{2}+C$. **1.37.** $2x+3\sin\frac{2x}{3}+C$. **1.38.** $\frac{4^x}{\ln 4}+\ +\frac{3\cdot 2^x}{\ln 2}+C$.

1.39. $\sin x-\cos x+C$. **1.40.** $\frac{1}{5}\ln|5x-3|+C$. **1.41.** $\frac{1}{2}\mathrm{tg}(2x+3)+C$. **1.42.** $\frac{1}{4}e^{4x-1}+$ $+C$. **1.43.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{6}}{x+2-\sqrt{6}}\right|+C$. **1.44.** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2x-1)+C$.

1.45. $\frac{5}{8}\sqrt[5]{(2x-3)^4}+C$. **1.46.** $\frac{2}{\sqrt{23}}\mathrm{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{23}}+C$. **1.47.** $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$.

1.48. $\frac{1}{2}\left(\sin(x+3)-\frac{1}{3}\sin(3x+3)\right)+C$. **1.49.** $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{3}\cos^3(ax+b)-\cos(ax+b)\right)+C$.

1.50. $\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C$. **1.51.** $\frac{1}{128}\left(3x-\frac{1}{2}\sin 8x+\frac{1}{16}\sin 16x\right)+C$.

1.52. $-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}(3x+4)+C$. **1.53.** $\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)--\frac{1}{10}\sin\left(\frac{5x}{2}-3\right)-\frac{1}{6}\sin\left(\frac{3x}{2}+3\right)+C$.

1.54. $\frac{2}{3}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{3x}{4}-1\right)\right|+\frac{4}{3}\cos\left(\frac{3x}{2}-2\right)+C$. **1.55.** $\frac{\ln^5 x}{5}+C$.

1.56. $\frac{3}{14}(2x-1)^2\sqrt[3]{2x-1}+C$. **1.57.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin(6x-2)+C$. **1.58.** $\frac{1}{6}\sin(3x+$ $+1)+\frac{1}{14}\sin(7x+1)+C$. **1.59.** $-\frac{2}{3}\mathrm{ctg}(6x+2)+C$. **1.60.** $\frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx|+\frac{a}{a+bx}\right)+C$.

1.61. $\frac{1}{b^2}\left(x-\frac{2a}{b}\ln|a+bx|-\frac{a^2}{b(a+bx)}\right)+C$. **1.62.** $x-\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C$.

1.63. $2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$, **якщо** $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\ge 0$; $-2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$, **якщо** $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}<0$. **1.64.** $-2\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-x+C$.

2.1. $e^{-x}\left(6x^2+11x+11\right)+C$. **2.2.** $(3x-2)\cos(x-1)-3\sin(x-1)+C$.

2.3. $\frac{3x-1}{2}\sin(2x+\ 1)+\frac{3}{4}\cos(2x+1)+C$. **2.4.** $3(2x+1)\sin\left(\frac{x}{3}+1\right)+18\cos\left(\frac{x}{3}+1\right)+C$.

2.5. $\frac{1}{8}\sin 2x-\ -\frac{1}{4}x\cos 2x+C$.**2.6.** $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\sin(2x+1)-(x+3)\operatorname{ctg}(2x+1)\right)+C$.

2.7. $2\left(x^2-8\right)\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)+\ 8x\cos\left(\frac{x}{2}-3\right)+C$. **2.8.** $2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C$.

2.9. $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$. **2.10.** $x\ln\left(x+\ +\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$.

2.11. $\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3x-2}{3x}\right|-\frac{\ln|2-3x|}{x}+C$.

2.12. $-2e^{-\sqrt{x}}\left(x^2\sqrt{x}+5x^2+\ +20x\sqrt{x}+60x+120\sqrt{x}+120\right)+C$.

2.13. $-\frac{x}{2}\operatorname{ctg}(2x+3)+\frac{1}{4}\ln\sin(2x+3)+C$. **2.14.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C$.

2.15. $(6x-1)\operatorname{tg}(x+5)+6\ln\cos(x+5)+C$. **2.16.** $\frac{e^x}{1+x}+C$. **2.17.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+\right.$
$\left.+2\right)+C$. **2.18.** $\frac{1}{2}e^x\left[\left(x^2-1\right)\cos x+(x-1)^2\sin x\right]+C$. **2.19.** $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

2.20. $\frac{1}{13}e^{2x+5}\left(2\sin(3x+4)-3\cos(3x+4)\right)+C$. **2.21.** $x(x-3)\ln(5x+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{16}{5}x-$
$-\frac{16}{25}\ln(5x+1)+C$. **2.22.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

2.23. $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$. **2.24.** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)+C$.

2.25. $\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

2.26. $x\arcsin^2 x+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2x+C$. **2.27.** $\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+\frac{1}{2}(x+1)\times$
$\times\sqrt{x^2+2x+2}+C$. **2.28.** $\frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right)+C$. **2.29.** $\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right)+C$.

2.30. $\frac{x^2}{2}\left(x^2-\ 1\right)\ln\left(x^2-1\right)-\frac{x^4}{4}+C$.

2.31. $\frac{2x^3+3x^2-1}{6}\ln(x+1)-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}x+C$.

2.32. $-\left(x^2-x-1\right)\cos x+(2x-1)\sin x+C$. **2.33.** $\frac{1}{2}e^{2x}\left(-x^2+x+\frac{5}{2}\right)+C$.

2.34. $-\frac{1}{2x^2}\cdot\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$. **2.35.** $\frac{1}{6}x^3+\frac{x^2}{4a}\sin 2ax+\frac{x}{4a^2}\cos 2ax-$

$-\frac{1}{8a^3}\sin 2ax+C$. **2.36.** $\frac{3}{4}\left(x\frac{\sin ax}{a}+\frac{\cos ax}{a^2}\right)+\frac{1}{4}\left(x\frac{\sin 3ax}{3a}+\frac{\cos 3ax}{9a^2}\right)+C$.

2.37. $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

3.1. $-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$. **3.2** $-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$.

3.3. $x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+\quad +C$. **3.4.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **3.5.** $e^x(2x+1)+C$.

3.6. $-\frac{5}{x+3}+C$. **3.7.** $2\ln\left(x^2+9\right)+C$. **3.8.** $2\ln\left(x^2+6x+10\right)-9\mathrm{arctg}(x+3)+C$.

3.9. $3\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$. **3.10.** $\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln\left(x^2+4\right)+C$.

3.11. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x|-\frac{1}{x}+C$. **3.12.** $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **3.13.** $\ln\sqrt[4]{\frac{x+2}{x}}-\frac{7}{2}\frac{1}{x+2}+C$. **3.14.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$.

3.15. $\frac{\sin^4 x}{4}+\quad +C$. **3.16.** $-\mathrm{ctg}\,x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **3.17.** $\frac{1}{4\cos^4 x}+C$.

3.18. $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$. **3.19.** $-2\mathrm{ctg}2x+C$. **3.20.** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{2}+C$.

3.21. $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$. **3.22.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$. **3.23.** $2\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C$.

3.24. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|+C$. **3.25** $-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}+C$.

3.26. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$. **3.27.** $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-x+$

$+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$. **3.28.** $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$.

3.29. $\frac{3}{7}(1+x)^2\cdot\sqrt[3]{1+x}-\frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x}+C$. **3.30.** $-\sqrt{-4x-x^2}-2\arcsin\frac{x+2}{2}+C$.

3.31. $\frac{1}{3\ln 2}\ln\left(3\cdot 2^x+7\right)+\ C$. **3.32.** $-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{x}}+C$. **3.33.** $\frac{1}{\ln 3}\mathrm{arctg}3^x+C$.

3.34. $-\frac{2}{3\sin x\sqrt{\sin x}}+C$. **3.35.** $\ln|\ \mathrm{arctg}\,x\ |+C$. **3.36.** $6\sqrt[6]{\ln x}+C$.

3.37. $\frac{1}{2}(x^2+9-9\ln(x^2+9))+C$. **3.38.** $2\Big[\sqrt{x+1}\ln(x+2)-2(\sqrt{x+1}-$

$-\mathrm{arctg}\sqrt{x+1})\Big]+C$. **3.39.** $\frac{1}{3}\left(x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}+C$. **3.40.** $-\frac{1}{8}\mathrm{ctg}\,x^8+C$.

3.41. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}}+C$. **3.42.** $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$. **3.43.** $-\cos\ln|x|+C$.

3.44. $-\frac{1}{3}\left(R^2-x^2\right)\sqrt{R^2-x^2}+C$. **3.45.** $\frac{1}{2}\arcsin\left(2\ln x\right)+C$.

3.46. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\sin\left(2x+3\right)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{\sin\left(2x+3\right)}+1}{\sqrt{\sin\left(2x+3\right)}-1}\right|+C$. **3.47.** $\frac{1}{5\cos\left(5x-1\right)}+C$.

3.48. $\frac{1}{12}\left(\operatorname{arctg}x^6+\frac{x^6}{x^{12}+1}\right)+C$. **3.49.** $\frac{7}{144}\left(5+6\operatorname{tg}3x\right)^{\frac{8}{7}}+C$. **3.50.** $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+C$.

3.51. $\frac{\sqrt{3x^2+2}}{135}\left(9x^4-8x^2+\frac{32}{3}\right)+C$. **3.52.** $\frac{1}{10}\left(x^2+1\right)\left(2x^2-3\right)\sqrt{2x^2-3}++C$.

3.53. $\sqrt{x^2+4x+5}\left(x^2+\frac{x}{2}-2\right)-\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x+5}}{x+2-\sqrt{x^2+4x+5}}\right|+C$. **3.54.** $3\sqrt{x^2+x-2}+$
$+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-2}\right|+C$. **3.55.** $\frac{1}{13}\cos^{13}x-\frac{3}{11}\cos^{11}x+\frac{1}{3}\cos^9 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C$.

3.56. $\ln\left|\frac{\sqrt{1-2x}-1}{\sqrt{1-2x}+1}\right|-\frac{\sqrt{1-2x}}{x}+C$. **3.57.** $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{x-3}}{x}\right)+C$.

3.58. $\frac{1}{2\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+C$. **3.59.** $\frac{1}{2b^2}\left(a+bx^2-a\ln|a+bx^2|\right)+C$.

3.60. $\frac{1}{10}\sin^5\left(2x-3\right)+C$. **3.61.** $-\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}-25x-75\ln|x-3|+C$.

4.1. $3\ln|x|-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2\operatorname{arctg}x+C$.

4.2. $2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{3}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

4.3. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **4.4.** $\ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\times$
$\times\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **4.5** $\frac{9x^2}{2}-84x+532\ln|x+4|+\frac{784}{x+4}+C$.

4.6. $x+\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)++C$. **4.7.** $x-\frac{1}{x}-2\operatorname{arctg}x+C$.

4.8. $\frac{1}{8}\left(e^{4x}-e^{2x}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+\frac{1}{2}\right)\right)+C$. **4.9.** $-\frac{1}{9}\left(\frac{2e^x-3}{e^x(e^x-3)}++\frac{2}{3}(\ln|e^x-3|-x)\right)+C$.

4.10. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}+C$. **4.11.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x/2+3-\sqrt{5}/2}{\operatorname{tg}x/2+3+\sqrt{5}/2}\right|+C$.

4.12. $\frac{1}{b}\arccos\frac{b\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}}+C$. **4.13.** $\frac{3}{13}\ln\left|\mathrm{tg}\,x+\frac{2}{3}\right|+\frac{3}{13}\ln|\cos x|+\frac{2}{13}x+C$.

4.14. $-\frac{2}{35}\sqrt{2-x}\cdot\left(5x^3+12x^2+32x+128\right)+C$. **4.15.** $2\mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$.

4.16. $-\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^{-2}x+C$. **4.17.** $2\mathrm{tg}x+\frac{\mathrm{tg}^3x}{3}-\mathrm{ctg}x+C$.

4.18. $2\sqrt{2+3e^x}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+3e^x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+3e^x}+\sqrt{2}}\right|+C$. **4.19.** $\frac{11}{2\sqrt{3}}\times$

$\times\left(\ln|x-3|+2\ln\left(\sqrt{\frac{3x+2}{3x-9}}+1\right)+\frac{6(x-3)}{11}\sqrt{\frac{3x+2}{3x-9}}\right)+C$. **4.20.** $\ln\frac{|\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}}+C$.

4.21. $-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$. **4.22.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.

4.23. $\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{7}}+C$. **4.24.** $2\sqrt{\mathrm{tg}\,x}+C$. **4.25.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+e^{2x}}}{1+\sqrt{1+e^{2x}}}\right|+C$.

4.26. $\mathrm{arctg}\sqrt{2+3\mathrm{tg}^2x}+C$. **4.27.** $\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}-\mathrm{arctg}\sqrt{1-x^2}-\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

4.28. $\frac{2}{9}\frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}}+C$. **4.29.** $\frac{1}{2}\left(x-\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$.

4.30. $-\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)+C$.

4.31. $-\frac{1}{2}\left(3\ln\left(\cos x+\sqrt{3+\cos^2 x}\right)+\cos x\sqrt{3+\cos^2 x}\right)+C$.

4.32. $\left(\frac{2}{3}\ln^2 x-\frac{8}{9}\ln x+\frac{16}{27}\right)\cdot x\sqrt{x}+C$. **4.33.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-5x}{x\sqrt{3}}+C$.

Розділ 10

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

10.1. Означення визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбниця

Нехай матеріальна точка рухається у додатному напряму осі Ox з відомою у кожний момент часу $t \in [\alpha; \beta]$ швидкістю $v(t)$. Потрібно знайти шлях, який пройшла точка за проміжок часу від моменту $t = \alpha$ до $t = \beta$. Зробимо таким чином: розіб'ємо проміжок часу $[\alpha; \beta]$ на велику кількість проміжків $[t_{l-1}; t_l]$ $(l = 1, ..., n)$ малої довжини Δt_l так, щоб у кожному з цих проміжків рух точки можна було б вважати майже рівномірним.

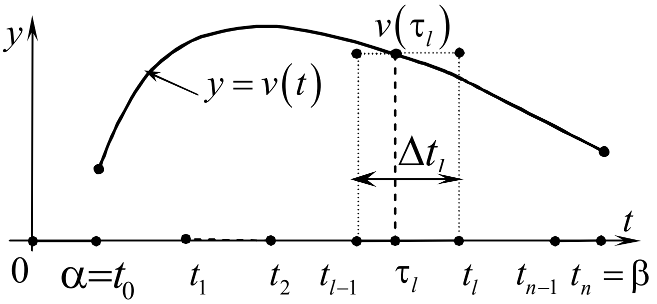


Рис.10.1

Тоді шлях, що пройдений точкою за проміжок часу $[t_{l-1}; t_l]$, наближено дорівнює $v(\tau_l) \cdot \Delta t_l$, де момент часу $\tau_l \in [t_{l-1}; t_l]$ (рис. 10.1).

Звідси виходить, що шлях, який точка пройшла за проміжок часу $[\alpha; \beta]$, може бути наближено оцінено сумою

$$v(\tau_1) \cdot \Delta t_1 + v(\tau_2) \cdot \Delta t_2 + ... + v(t_l) \cdot \Delta t_l + ... + v(\tau_n) \cdot \Delta t_n = \sum_{l=1}^{n} v(\tau_l) \cdot \Delta \tau_l .$$

Природно сподіватися, що чим дрібніше зроблено розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$, тим точніше ця сума дає істинне значення величини шляху, пройденого точкою. Позначимо $d(n) = \max \Delta t_l \left(l = 1, ..., n \right)$. За умови $d(n) \to 0$ (тобто, тривалість кожного з проміжків Δt_l наближається до нуля), границя $\lim\limits_{d(n) \to 0} \sum\limits_{l=1}^{n} v(t_l) \cdot \Delta t_l$ (якщо вона існує) і є шуканою величиною шляху.

Перейдемо до загальних побудов. Нехай обмежена функція $f(x)$ задана на відрізку $[a\,;b]$. Поділимо відрізок $[a\,;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ < \ldots < x_{l-1} < x_l < \ldots < x_n = b$ на n відрізків $[x_{k-1}\,;\,x_k]$, довжини яких дорівнюють Δx_k $(k = 1, \ldots, n)$. У кожному відрізку $[x_{k-1}\,;\,x_k]$ візьмемо довільну точку α_k і утворимо суму $\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot \Delta x_k$, яка називається **інтегральною сумою** функції $f(x)$ на відрізку $[a\,;b]$.

Цілком зрозуміло, що значення інтегральної суми залежить від способу розбиття відрізка $[a\,;b]$ і від вибору точок $\alpha_k \in [x_{k-1}\,;\,x_k]$.

Означення. Якщо існує незалежна від вибору точок α_k і способу розбиття відрізка $[a\,;b]$ скінченна границя інтегральної суми при $d(n) = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$, то вона називається **визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на відрізку $[a\,;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. При цьому функцію $f(x)$ називають **інтегровною** на відрізку $[a\,;b]$, а числа a, b – відповідно **нижньою** та **верхньою межею інтегрування**.

Отже, величина шляху, пройденого точкою, визначається інтегралом

$$\int\limits_a^b v(t)\,dt\,.$$

Зауважимо, що значення визначеного інтеграла залежить лише від $f(x)$ і проміжку інтегрування. Це означає, що визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(s)\,ds\,.$$

При означенні визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вважалось, що $b > a$.

Припустимо за означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \text{ якщо } a > b.$$

Наведемо декілька класів інтегровних функцій:

1) Якщо функція неперервна на $[a;b]$, то вона інтегровна на $[a;b]$.

2) Якщо функція неперервна на $[a;b]$, за виключенням скінченної кількості точок, і обмежена на $[a;b]$, то вона інтегровна на $[a;b]$.

Перейдемо до головного результату інтегрального числення – **формули Ньютона-Лейбніца.**

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку$[a;b]$, а $F(x)$ – одна з первісних $f(x)$ на цьому відрізку. Тоді

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}. \tag{10.1}$$

Доведення. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ довільним чином точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_{l-1} < x_l < ... < x_n = b$ на n відрізків $[x_{k-1};x_k]$, довжини яких дорівнюють Δx_k $(k = 1,2,...,n)$. Тоді

$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + ... + F(x_n) - F(x_{n-1}).$$

Застосуємо до кожної різниці $F(x_k) - F(x_{k-1})$ теорему Лагранжа:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = f(c_k)\cdot\Delta x_k, \quad c_k \in (x_{k-1};x_k).$$

Таким чином,

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k.$$

Отримана справа сума (при вказаному способі вибору точокc_k) є сталою при довільному розбитті відрізка $[a;b]$. Отже,

$$F(b)-F(a)=\lim_{d(n)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k\ ,$$

де $d(n)=\max\Delta x_k\ (k=1,...,n)$.

З іншого боку, оскільки функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ є незалежною від вибору точок α_k границею інтегральної суми при $d(n)\to 0$. Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Якщо праву частину $F(b)-F(a)$ формули Ньютона–Лейбніца позначимо через $F(x)\Big|_a^b$, то ця формула набуває вигляд

$$\int_a^b f(x)dx\ =F(x)\Big|_a^b\ .$$

10.2. Властивості визначеного інтеграла

1. Лінійність інтеграла. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a;b]$. Тоді функція $kf(x)+l\,g(x)$ (k і l – числа) інтегровна на $[a;b]$, причому

$$\int_a^b \big(kf(x)+l\,g(x)\big)dx=k\int_a^b f(x)dx+l\int_a^b g(x)dx. \qquad \mathbf{(}10.2\mathbf{)}$$

Доведення. Для довільного розбиття відрізка $[a;b]$ і довільного способу вибору точок α_i маємо

$$\sum_{i=1}^{n}\big(kf(\alpha_i)+lg(\alpha_i)\big)\cdot\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\cdot\Delta x_i+l\sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)\cdot\Delta x_i\,.$$

Оскільки за умови існує границя при $d(n)\to 0$ правої частини останньої рівності, то існує і рівна їй границя при $d(n)\to 0$ лівої частини цієї рівності.

Приклад 1

1) $\int\limits_0^1\left(2\cos x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=2\int\limits_0^1\cos x dx-\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}dx=2\sin x\Big|_0^1-$

$-\operatorname{arctg} x\Big|_0^1==2\sin 1-\operatorname{arctg}1=2\sin 1-\frac{\pi}{4}\approx 0.8975$.

2) Нехай $f(x)=Ax^2+Bx+C.$ Довести, що

$$\int\limits_a^b\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=\frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Доведення

$$\int\limits_a^b\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=A\int\limits_a^b x^2dx+B\int\limits_a^b xdx+C\int\limits_a^b dx=(A\frac{x^3}{3}+B\frac{x^2}{2}+Cx)\ \Big|_a^b=$$

$$=A\frac{b^3-a^3}{3}+B\frac{b^2-a^2}{2}+C(b-a)=$$

$$=\frac{b-a}{6}\cdot\left(2A\left(b^2+ab+a^2\right)+3B(b+a)+6C\right)=$$

$$=\frac{b-a}{6}\cdot\left(Ab^2+Bb+C+Aa^2+Ba+C+4\left(A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+B\left(\frac{a+b}{2}\right)+C\right)\right)=$$

$$=\frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

2. Адитивність інтеграла. Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$. Тоді функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, причому

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx. \qquad \textbf{(10.3)}$$

3. Інтегрування нерівностей. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є інтегровними на $[a;b]$.Якщо $f(x)\le g(x)\left(\forall x\in[a;b]\right)$**,** то

$$\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx. \qquad \textbf{(10.4)}$$

Доведення. Для довільного розбиття відрізка$[a;b]$і довільного способу вибору точок α_i маємо

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\cdot\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)\cdot\Delta x_i \quad .$$

Переходячи до границі при $d(n)\to 0$ в останньої нерівності отримуємо

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \, .$$

Наслідок. Якщо $m \le f(x) \le M \quad (x\in[a;b])$, то

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a). \qquad (10.5)$$

Приклад 2. Оцінити інтеграли:

1) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{3+\sqrt[3]{\sin x}}{2+\cos^2 x}dx$; 2) $I=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

Розв'язання:

1) Оскільки $1< f(x)=\frac{3+\sqrt[3]{\sin x}}{2+\cos^2 x}<2 \quad \left(\forall x\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)\right)$, то $\frac{\pi}{2}<I<\pi$;

2) $\frac{x^n}{2}<\frac{x^n}{1+x}<x^n$, $x\in(0;1)\Rightarrow \frac{1}{2(n+1)}=\int_0^1\frac{x^n}{2}dx<I<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$.

4. Теорема про середнє значення. Нехай функція $f(x)$ є неперервною на $[a;b]$. Тоді $\exists c\in(a\,;b)$:

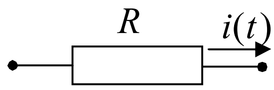
$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \, . \qquad (10.6)$$

Величина, що стоїть у правій частині останньої рівності, називається **інтегральним середнім** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і часто позначається символом $\langle f\rangle_{[a;\,b]}$.

Доведення. Нехай m і M – відповідно найменше і найбільше значення неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. На підставі оцінки (10.5) маємо $m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$. Отже, число

$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ знаходиться між найменшим і найбільшим значеннями неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Тоді на підставі властивості неперервної функції(див. 4.3. глобальні властивості 2)) існує така точка $c\in[a;b]$, що $f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Приклад 3. **Діючим значенням** гармонічного струму $i(t)=$ $=I_m\cdot cos(\omega t+\varphi_i)$ називається значення постійного струму I, який, проходячи крізь резистор з опором R, виділяє потужність, яка дорівнює середній потужності гармонічного струму за період $\frac{2\pi}{\omega}$. Знайти діюче значення гармонічного струму.



Розв’язання:

$$\langle P\rangle_{\left[0;\,\frac{2\pi}{\omega}\right]}=\frac{1}{2\pi/\omega}\cdot\int\limits_0^{2\pi/\omega} i^2(t)\cdot Rdt=\frac{\omega}{2\pi}\cdot I_m^2\cdot R\int\limits_0^{2\pi/\omega}\cos^2(\omega t+\varphi_i)\,dt=$$

$$=\frac{\omega}{4\pi}\cdot I_m^2\cdot R\cdot\int\limits_0^{2\pi/\omega}\big(1+\cos 2(\omega t+\varphi_i)\big)dt=$$

$$=\frac{\omega}{4\pi}\cdot I_m^2\cdot R\cdot\left(t+\frac{\sin 2(\omega t+\varphi_i)}{2\omega}\right)\Bigg|_0^{2\pi/\omega}=$$

$$=\frac{\omega}{4\pi}\cdot I_m^2\cdot R\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega}+\frac{\sin(4\pi+2\varphi_i)-\sin 2\varphi_i}{2\omega}\right)=\frac{\omega}{4\pi}\cdot I_m^2\cdot R\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{2}\cdot I_m^2\cdot R.$$

Отже, $I^2\cdot R=\frac{1}{2}I_m^2\cdot R\Rightarrow I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

5. Оцінка модуля інтеграла. Нехай функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a;\,b]$. Тоді

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx.$$

Приклад 4. Оцінити інтеграл $I=\int\limits_0^2 e^x\cos x^2dx$.

Розв’язання: $|I|\le\int\limits_0^2\left|e^x\cos x^2\right|dx=\int\limits_0^2 e^x\left|\cos x^2\right|dx<\int\limits_0^2 e^xdx=e^x\Big|_0^2=e^2-1$.

6. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на відрізку $[a;b]$, причому $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$, а $g(x)$ відрізняється від $f(x)$ лише в скінченній кількості точок. Тоді $g(x)$ інтегровна на $[a;b]$ і $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b g(x)dx$.

7. Інтеграл як функція верхньої межі. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді вона є неперервною і на відрізку $[a;x]$, де $x\in[a;b]$. Розглянемо інтеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$ як функцію верхньої межі $x\in[a;b]$ (змінну інтегрування позначили через t, щоб відрізняти від верхньої межі x).

Теорема. Похідна від інтеграла як функції верхньої межі існує і дорівнює $f(x)$

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x),\ x\in[a;b].$$

Доведення. Позначимо $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$. Тоді

$$\Phi(x+\Delta x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt,\ x+\Delta x\in[a;b].$$

Отже,

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt=$$

$$=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Останній інтеграл за теоремою про середнє значення дорівнює $f(c)\cdot\Delta x$, де c знаходиться між x і $x+\Delta x$. Таким чином,

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(c).$$

Якщо тепер $\Delta x \to 0$, то $c \to x$ і оскільки функція $f(x)$ є неперервною, то і $f(c) \to f(x)$. Отже, маємо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

З цього результату випливає важливий факт, що неперервна на проміжку $[a;b]$ функція $f(x)$ має на цьому проміжку первісну – інтеграл як функцію верхньої межі $\int_a^x f(t)dt$. Отже теорема 1 підр.9.1. доведена.

10.3. Інтегрування частинами та заміна змінної у визначеному інтегралі

1. Інтегрування частинами

Теорема. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно диференційовні на $[a;b]$. Тоді є справедливою формула інтегрування частинами

$$\boxed{\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx},$$

яку можна також записати у вигляді

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

Доведення. Оскільки функція $u(x) \cdot v(x)$ є первісною функції $u'(x) \cdot v(x) + \ +u(x) \cdot v'(x)$ то на підставі формули Ньютона–Лейбніца будемо мати

$$\int_a^b \big(u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)\big) dx = u(x) \cdot v(x)\,|_a^b.$$

З останнього співвідношення випливає формула

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\,|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx .$$

Оскільки $v'dx = dv$, $u'dx = du$, то отриманій формулі надають вигляду

$$\int_a^b u(x)\cdot dv = u(x)\cdot v(x)\,|_a^b - \int_a^b v(x)du .$$

Приклад 5

$$\int_0^{2\pi} x\cdot\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x \end{vmatrix} = x\cdot\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x dx = \cos x\Big|_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0 .$$

2. Інтегрування підстановкою

Теорема. Нехай функція $f(x)$є неперервною на відрізку $[a; b]$, а функція $g(t)$ є неперервно диференційовною на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, $a \le g(t) \le b$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt .$$

Доведення. Нехай $F(x)$є первісною функції $f(x)$. Тоді складена функція $F(g(t))$ є первісною функції $f(g(t))\cdot g'(t)$. Отже,

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt = F(g(t))\,|_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx .$$

Другий варіант заміни:

$$\int_a^b f(h(x))h'(x)dx = \begin{vmatrix} h(x) = t \\ h'(x)dx = dt \end{vmatrix} = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t)\,dt .$$

Приклад 6

1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \begin{vmatrix} \ln x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dt \\ t_H = \ln 1 = 0;\ t_B = \ln e = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{1+t}\Big|_0^1 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right);$

2) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = 3\sin t \Rightarrow dx = 3\cos t dt \\ t_H = 0;\ t_B = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2 t \cdot 3\cos t \cdot 3\cos t dt =$

$$= 81\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t dt = \frac{81}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt = \frac{81}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81}{16}\pi;$$

3) якщо інтегровна на проміжку $[-a;a]$ функція $f(x)$ задовольняє умові $f(x) = f(-x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$. Дійсно,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_0^a f(x)dx +$$

$$+\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_a^0 -f(-t)dt = 2\int\limits_0^a f(t)dt = 2\int\limits_0^a f(x)dx;$$

4) якщо інтегровна на проміжку $[-a;a]$ функція $f(x)$ задовольняє умові $f(x) = -f(-x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Дійсно, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_a^0 -f(-t)dt =$

$$= \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^a f(-t)dt = \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^a -f(x)dx = 0.$$

10.4. Наближене обчислення інтеграла

В тих випадках, коли первісна $F(x)$ функції $f(x)$ не може бути знайдена явно або вона є дуже громіздкою, інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ обчислюють наближено.

Метод трапецій. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b$. Довжини відрізків $[x_{k-1};x_k]$ $(k = 1,...,n)$, дорівнюють $\dfrac{b-a}{n}$.

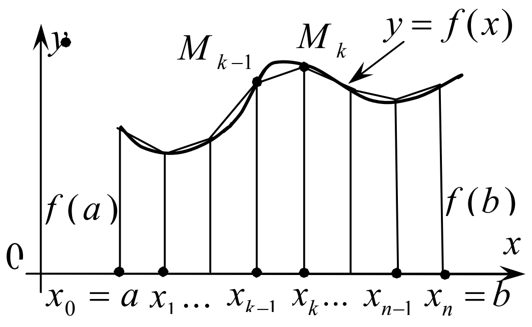


Рис. 10.2

На кожному відрізку $[x_{k-1};x_k]\,(k=1,...,n)$ замінимо графік функції $f(x)$ прямою $y=A_kx+B_k$, яка проходить через точки графіку $M_{k-1}(x_{k-1};f(x_{k-1})),M_k(x_k;f(x_k))$ (рис. 10.2), отже, кожна криволінійна смужка замінюється прямокутною трапецією.

Тоді

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \int_{x_{k-1}}^{x_k} (A_kx+B_k)dx = A_k\frac{x_k^2-x_{k-1}^2}{2}+B_k(x_k-x_{k-1}) =$$

$$=\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\cdot\left(A_k(x_k+x_{k-1})+2B_k\right)=\frac{b-a}{2n}\cdot\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right).$$

Отже, $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(A_kx+B_k)dx=\frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)$ і остаточно

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx J_n = \frac{b-a}{2n}\Big(f(a)+f(b)+2\big(f(x_1)+...+f(x_{n-1})\big)\Big).} \qquad (10.7)$$

Припустимо, що функція $f(x)$ має на проміжку $[a\,;b]$ неперервну другу похідну. Тоді похибку $R_n=\int_a^b f(x)dx-J_n$ методу трапецій можна оцінити таким чином:

$$|R_n|\le M\frac{(b-a)^3}{12n^2},\ \ \text{де}\quad M=\max_{[a;b]}|f''(x)|.$$

Використаємо формулу (10.7) для наближеного обчислення інтеграла $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$. Візьмемо $n=4$, $f(0)=1$, $f\left(x_1=\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{1+1/16}=\frac{16}{17}$, $f\left(x_2=\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{5}$, $f\left(x_3=\frac{3}{4}\right)=\frac{16}{25}$, $f(1)=\frac{1}{2}$.

Тоді $J_4 = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right)\right) = 0.782\,794$.

Точне значення інтеграла дорівнює $\frac{\pi}{4} \approx 0.785\,398$.

Метод парабол. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на $2n$ рівних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2l-2} < x_{2l-1} < x_{2l} < < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$.

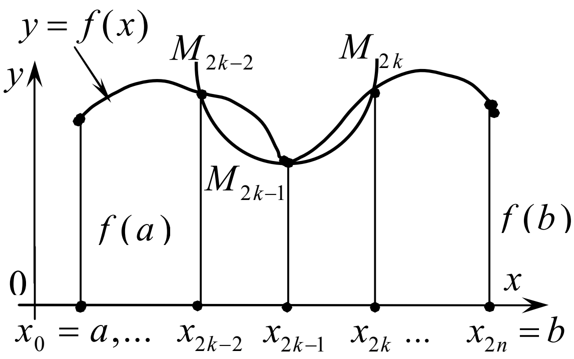


Рис. 10.3

Довжини відрізків $[x_{k-1};x_k]$ $(k = 1,\ldots,2n)$ дорівнюють $\frac{b-a}{2n}$. На кожному подвійному відрізку $[x_{2k-2};x_{2k}]$ $(k = 1,\ldots,n)$ замінимо графік функції $f(x)$ кривою вигляду $y = A_k x^2 + B_k x + C_k$ (параболою або прямою), яка проходить через точки графіку $M_{2k-2}(x_{2k-2};f(x_{2k-2}))$, $M_{2k-1}(x_{2k-1};f(x_{2k-1}))$, $M_{2k}(x_{2k};f(x_{2k}))$ (рис.10.3).

Тоді

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \left(A_k x^2 + B_k x + C_k\right)dx.$$

Якщо скористатись тепер результатом прикладу 1.2, то дістанемо:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right) \ (k = 1,\ldots,n).$$

Отже, маємо

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \left(A_k x^2 + B_k x + C_k\right)dx\right) = \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right)$$

і остаточно

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx I_{2n} = \frac{b-a}{6n}\big(f(a)+f(b)+\\ +2\big(f(x_2)+\ldots+f(x_{2n-2})\big)+4\big(f(x_1)+\ldots+f(x_{2n-1})\big)\big).\end{aligned}} \qquad (10.8)$$

Припустимо, що функція $f(x)$ має на проміжку $[a\,;b]$ неперервну четверту похідну. Тоді похибку $R_{2n} = \int_a^b f(x)dx - I_{2n}$ методу парабол можна оцінити таким чином: $\left|R_{2n}\right| \le \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$, *де* $M = \max\limits_{[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$. Формула парабол є точною для многочленів до третього степеня включно.

Застосуємо формулу (10.8) для наближеного обчислення того ж інтеграла при $2n = 4$

$$I_4 = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + 4\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{25}\right) + 2\cdot\frac{4}{5}\right) = 0.785\,392\,.$$

Отриманий результат відрізняється від точного значення менше, ніж на 0.00001.

10.5. Застосування визначеного інтеграла

При застосуванні визначеного інтеграла для знаходження геометричних, фізичних та т.п. величин користуються або диференціалами цих величин , або відповідними інтегральними сумами.

I. Обчислення площ фігур

1. Нехай $f(x) \ge 0$ неперервна функція, яка задана на відрізку $[a;b]$. Фігура на площині xOy, яка обмежена графіком $y = f(x)$, відрізками прямих $x = a,\, x = b$ і відрізком $[a;b]$ осі Ox, називається **криволінійною трапецією** (рис.10.4, а). Знайдемо її площу. Розіб’ємо відрізок $[a;b]$ довільним чином точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{l-1} < x_l < \ldots < x_n = b$ на n відрізків $[x_{k-1};x_k]$, довжини яких дорівнюють Δx_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ і позначимо

$d(n) = \max \Delta x_k \ (k = 1, 2, ..., n)$. При цьому криволінійна трапеція розіб'ється на n часткових криволінійних трапецій (вузьких смужок). Оберемо довільне $\alpha_k \in [x_{k-1}; x_k]$ і замінимо k – ту часткову криволінійну трапецію на прямокутник з основою $[x_{k-1}; x_k]$ і висотою $f(\alpha_k)$, площа якого дорівнює $f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k$. Звичайно, $\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k$ є інтегральною сумою функції $f(x)$ на $[a; b]$. Нехай m_k, M_k є відповідно найменшим і найбільшим значенням функції $f(x)$ на відрізку $[x_{k-1}; x_k]$. Тоді

$$m_k \cdot \Delta x_k \le f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k \le M_k \cdot \Delta x_k,$$

і, отже

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = S_n,$$

де s_n та S_n, називаються відповідно **нижньою та верхньою інтегральними сумами** $f(x)$ для даного розбиття відрізка $[a; b]$. Для неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке розбиття відрізку $[a; b]$ ($d(n)$ достатньо мало), що виконується умова $M_k - m_k < \varepsilon \ (k = 1, 2, ..., n)$. (Цей важливий факт ми доводити не будемо). Тоді

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k < \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon \cdot (b - a).$$

Це означає, що $\lim_{d(n) \to 0} (S_n - s_n) = 0$. З останнього та з теореми 3 підрозд. 3.6 випливає існування границі $\lim_{d(n) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k$, яку і приймають за площу криволінійної трапеції.

Отже, площа S_D фігури $D = \{(x; y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ виражається інтегралом

$$\boxed{S_D = \int_a^b f(x) dx}. \tag{10.9}$$

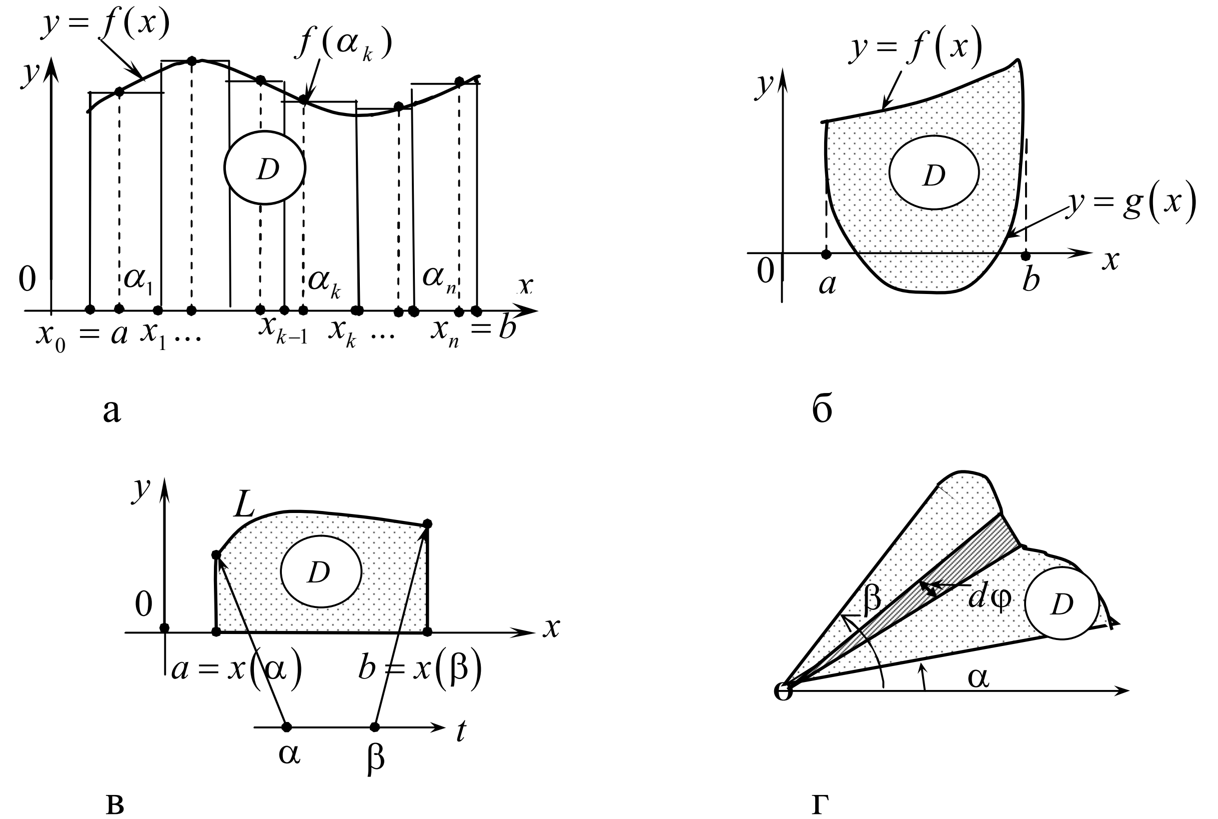


Рис. 10.4

2. Нехай $D = \{(x; y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$ – фігура, яка розміщена між графіками двох неперервних функцій (рис.10.4, б). Площа S_D фігури D обчислюється за формулою:

$$\boxed{S_D = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx}.$$

3. Нехай верхня межа криволінійної трапеції задана параметрично $L = \{(x; y) : x = x(t), y = y(t); t \in [\alpha; \beta]\}$ (рис. 10.4, в).

Якщо $y(t) \ge 0$, $\dfrac{dx}{dt} > 0$ – неперервні функції і $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то після заміни змінної за формулою $x = x(t)$ $(y = f(x) = f(x(t)) = y(t))$ в (10.9) одержимо, що площа S_D фігури D визначається за формулою

$$\boxed{S_D = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot \frac{dx}{dt} dt}.$$

4. Нехай $D=\{(\rho;\ \varphi): \alpha\le\varphi\le\beta,\ 0\le\rho\le\rho(\varphi)\}$ – сектор в полярних координатах, обмежений неперервною лінією $\rho=\rho(\varphi)$ (рис. 10.4, г). Диференціал площі у полярних координатах це площа трикутника, який з точністю до нескінченно малих більш високого порядку можна вважати круговим сектором. Тобто, $dS=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$ (див. дод., с.304). Тоді площа S_D фігури D дорівнює

$$\boxed{S_D=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi}\ .$$

Приклад 7

1) Знайти площу фігури, яка обмежена параболою $y=x^2-x-5$ і прямою $y=x-2$.

2) Знайти площу фігури, яка обмежена віссю Ox і однією хвилею синусоїди $y=\sin x$ (рис. 10.5, б).

3) Знайти площу фігури, яка обмежена однією аркою циклоїди $L=\{(x;y): x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t); t\in[0;\ 2\pi]\}$ і віссю Ox (рис.10.5, в).

4) Знайти площу фігури, яка обмежена кардіоїдою $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in[0;\ 2\pi]$ (рис. 10.5, г).

Розв'язання:

1) Ця фігура обмежена зверху прямою $y=x-2$, а знизу – параболою $y=x^2-x-5$. Для знаходження границь інтегрування розв'яжемо рівняння $x^2-x-5=x-2\Rightarrow x_1=-1$, $x_2=3$ (рис. 10.5, а). Площа S_D фігури D дорівнює :

$$S_D=\int_{-1}^{3}\left(x-2-\left(x^2-x-5\right)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(2x-x^2+3\right)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_{-1}^{3}=10\frac{2}{3}\text{ од.}^2.$$

2) Площа S_D фігури D дорівнює:

$$S_D=\int_0^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}(0-\sin x)dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=$$

$$=-(-1-1)+(1-(-1))=4\text{ од.}^2.$$

3) Площа S_D фігури D дорівнює:

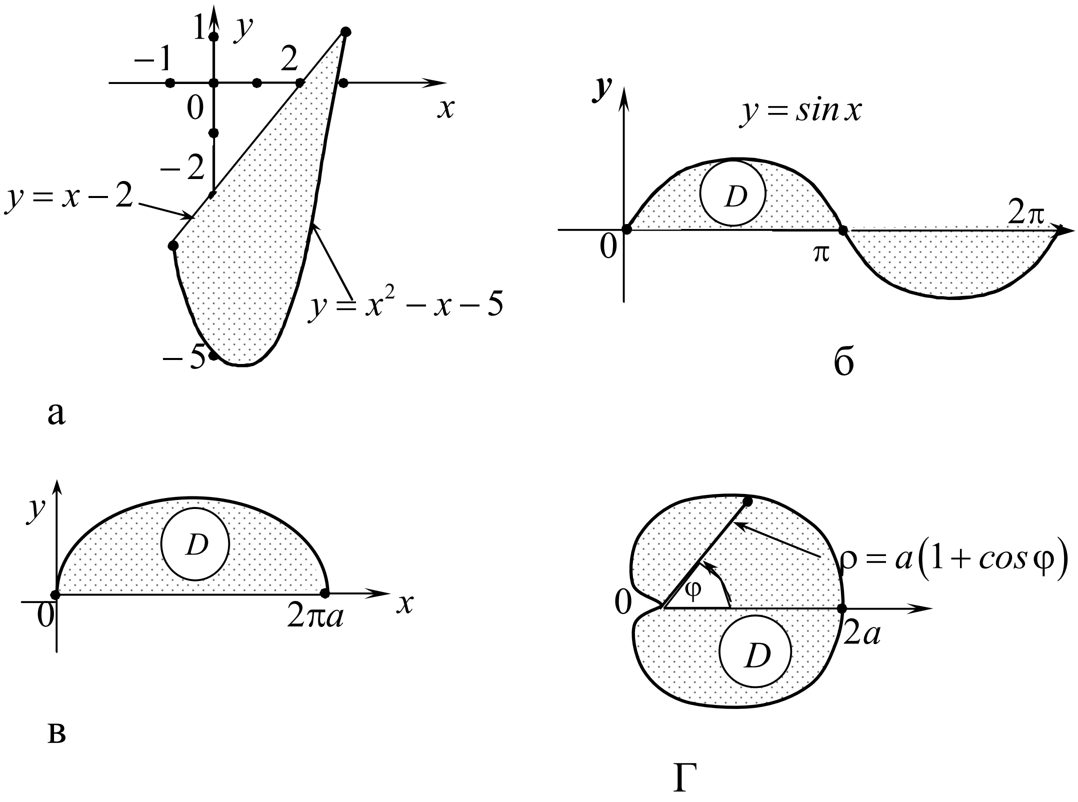


Рис 10.5

$$S_D=\int\limits_0^{2\pi}a\left(1-\cos t\right)a\left(1-\cos t\right)dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^2dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2t\right)dt=$$

$$=a^2\left(\left(t-2\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\cos 2t\right)dt\right)=a^2\left(2\pi+\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)=3\pi a^2\ \text{од.}^2.$$

4) $S_D=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2d\varphi=\dfrac{3\pi a^2}{2}$ од.^{2}.

2. Обчислення довжини дуги

Довжина ℓ дуги визначається як інтеграл від елемента довжини (диференціала) дуги $dl=\left|\vec{v}\left(t\right)\right|dt$

$$\boxed{\ell=\int\limits_\alpha^\beta\left|\vec{v}\left(t\right)\right|dt}.$$

Тоді на основі результатів підрозд.5, прикладу 9, п.4 отримаємо:

1) $L=\{(x;y;z):x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t);\ t\in[\alpha;\beta]\}\ \Rightarrow$

$$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt;$$

2) $L=\{(x;y):x=x,\ y=f(x);\ x\in[a;b]\}\ \Rightarrow \ell=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx;$

3) $L=\{(\varphi:\rho):\varphi=\varphi,\ \rho=\rho(\varphi);\ \varphi\in[\alpha;\beta]\}\ \Rightarrow \ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$

Приклад 8. Знайти довжину:

1) першої арки циклоїди

$$L=\{(x;y):x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t);\ t\in[0;\ 2\pi]\};$$

2) дуги кривої $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\ x\in[0;\ 1];$

3) кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi),\ \varphi\in[0;\ 2\pi].$

Розв'язання

1) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2\left((1-\cos t)^2+\sin^2 t\right)=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$

Звідси випливає, що довжина ℓ першої арки циклоїди дорівнює

$$\ell=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(-1-1)=8a \text{ од.};$$

2) $1+f'^2(x)=1+x\Rightarrow$ довжина ℓ дуги кривої =

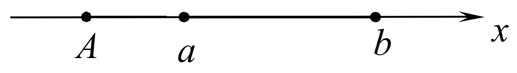
$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \text{ од.};$$

3) $\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=a^2\left[(1+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2\right]=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\ \Rightarrow$ довжина ℓ кардіоїди дорівнює $2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=2a\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\right)=$

$$=4a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}-\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=4a(1-(-1))=8a \text{ од.}$$

3. Обчислення маси, координати центра мас і моменту інерції матеріального стержня

Нехай $\gamma(x)$ – лінійна густина розподілу маси стержня в точці $x \in [a;\, b]$ ($\gamma(x) = \dfrac{dm}{dx}$, де $m(x)$ – кількість маси, що розподілена на відрізку $[a;\, x]$).



Тоді:

1) **маса стержня** = $\int\limits_a^b \gamma(x)dx$;

2) **координата** x_C **центра мас стержня** обчислюється за формулою

$$x_C = \frac{\int\limits_a^b x\gamma(x)dx}{\int\limits_a^b \gamma(x)dx};$$

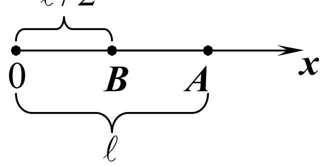
3) **момент інерції** I_A **стержня** відносно точки A визначається за формулою

$$I_A = \int\limits_a^b d^2(x) \cdot \gamma(x)dx,$$

$d(x) = |x - x_A|$ – відстань від точки стержня з координатою x до точки A.

Приклад 9. Дано стержень довжиною ℓ метрів і масою M кілограмів. Знайти координату центра мас і моменти інерції відносно середини і кінців стержня, якщо: 1) лінійна густина $\gamma(x)$ постійна; 2) лінійна густина $\gamma(x) = kx\big(x \in [0;\, \ell]\big)$.

Розв'язання: 1)



$$\gamma \cdot \ell = M \Rightarrow \gamma = \frac{M}{\ell};$$

$$I_0 = I_A = \frac{M}{\ell}\int\limits_0^\ell x^2 dx = \frac{M}{\ell} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^\ell = \frac{M\ell^2}{3} \text{кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_B=\frac{M}{\ell}\int_0^{\ell}\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2dx=\frac{M}{\ell}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^3\Bigg|_0^{\ell}=\frac{M^2}{3\ell}\left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^3-\left(-\frac{\ell}{2}\right)^3\right]=\frac{M\ell^2}{12}\text{кг}\cdot\text{м}^2;$$

2) $M=\int_0^{\ell}kxdx=k\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\ell}=k\cdot\frac{\ell^2}{2}\Rightarrow k=\frac{2M}{\ell^2}\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$;

$$x_C=\frac{\int_0^{\ell}x\cdot kx\cdot dx}{M}=\frac{k\ell^3}{3M}=\frac{2}{3}\ell;$$

$$I_0=\int_0^{\ell}x^2kxdx=\frac{k\ell^4}{4}=\frac{M\ell^2}{2}\text{кг}\cdot\text{м}^2;\quad I_A=\int_0^{\ell}\left(x-\ell\right)^2kxdx=$$

$$=k\cdot\int_0^{\ell}\left(x^3-2x^2\ell+x\ell^2\right)dx=k\cdot\left(\frac{\ell^4}{4}-\frac{2\ell^4}{3}+\frac{\ell^4}{2}\right)=\frac{M\ell^2}{6}\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

4. Обчислення об'ємів

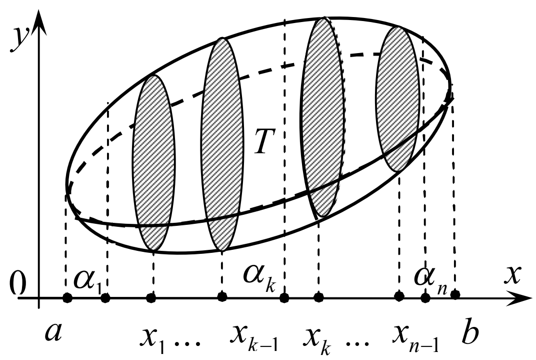


Рис.10.6 а

4.а. Припустимо, що відома площа $S(x)$ $\left(x\in[a;b]\right)$ довільного перерізу тіла T (рис. 10.6,а) площиною, яка перпендикулярна осі Ox. Будемо шукати об'єм тіла T.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ довільним чином точками
$a=x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b$
на n відрізків $[x_{k-1};x_k]$, довжини яких дорівнюють $-$ Δx_k $(k=1,2,\ldots,n)$ і позначимо $d(n)=\max\Delta x_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Через точки x_k проведемо площини, які перпендикулярні осі Ox. При цьому тіло T розіб'ється на n часткових вузьких шарів. Оберемо довільне $\alpha_k\in[x_{k-1};x_k]$ і замінимо $k-$тий частковий шар на циліндр, висотою якого є відрізок $[x_{k-1};x_k]$, а площа основи дорівнює $S(\alpha_k)$. Об'єм такого циліндра дорівнює $S(\alpha_k)\cdot\Delta x_k$. Тоді об'єм тіла T приблизно дорівнює $\sum_{k=1}^{n}S(\alpha_k)\cdot\Delta x_k$. Так само, як і у підрозділі 10.5.1

доводиться, що об’єм V_T тіла T дорівнює границі цієї суми (якщо ця границя існує) за умови $d(n)=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k\to 0$

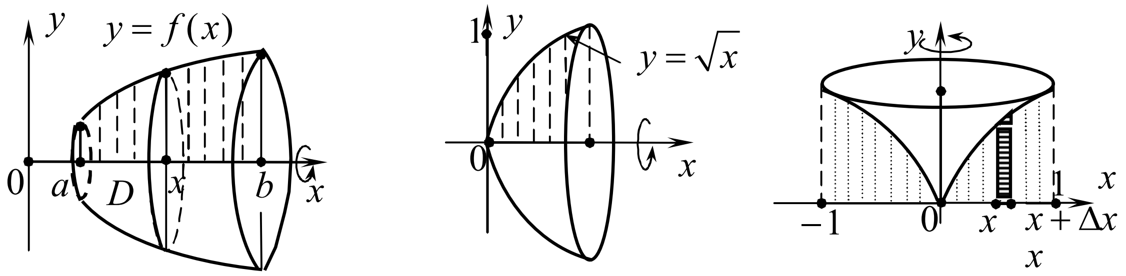
$$V_T=\lim_{d(n)\to 0}\sum_{k=1}^{n}S(\alpha_k)\cdot\Delta x_k .$$

Для неперервної функції $S(x)$ $(x\in[a;b])$ ця границя існує і виражається через інтеграл

$$V_T=\int_a^b S(x)dx .$$

4.б. Обчислення об’ємів тіл обертання. Нехай криволінійна трапеція $D=\{(x;y): 0\le a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ обертається навколо осі Ox (рис. 10.6, б). У цьому випадку $S(x)=\pi\cdot f^2(x)$ і тому об’єм V_{Ox} тіла обертання D навколо осі Ox дорівнює

$$\boxed{V_{Ox}=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)dx.}$$



б в г

Рис. 10.6

Об’єм V_{Oy} тіла обертання D навколо осі Oy дорівнює

$$\boxed{V_{Oy}=2\pi\cdot\int_a^b xf(x)dx},$$

оскільки елемент об’єму це об’єм кільцевого циліндру, утвореного обертанням заштрихованої трапеції (рис. 10.6,г) навколо осі Oy

$$\Delta V = \pi((x+\Delta x)^2 - x^2) f(x) = \pi(2x\Delta x + (\Delta x)^2) f(x) = 2\pi x f(x)dx + o(1).$$

Приклад 10. Знайти об’єми тіл, що утворені обертанням навколо осей Ox і Oy фігури $D = \left\{(x;\, y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$ (рис. 10.6, в, г).

Розв’язання

$$V_{Ox} = \pi \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \text{ од.}^3;$$

$$V_{Oy} = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{x} dx = \frac{4\pi}{5} \text{ од.}^3.$$

5. Обчислення площі поверхні обертання

Нехай крива $y = f(x) \ge 0$ $\left(x \in [a;\, b]\right)$ обертається навколо осі Ox. Тоді площа σ_{Ox} поверхні обертання дорівнює

$$\sigma_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

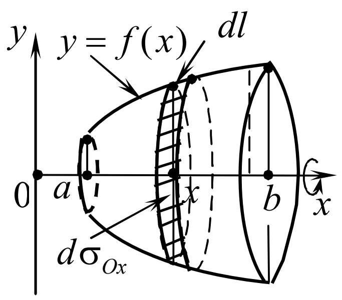


Рис.10.7

Дійсно, диференціал площі поверхні $d\sigma_{Ox}$ – елементарне кільце ширини dl та довжини $2\pi f(x)$ **(**рис. 10.7**),** оскільки $f(x)$ **-** радіус кільця

$$d\sigma_{Ox} = 2\pi f(x)dl = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Приклад 11. Знайти площу поверхні, яка утворюється при обертанні кривої $y = \sqrt{x}$ $\left(x \in [0;\, 1]\right)$ навколо осі Ox.

Розв’язання

$$\sigma_{Ox} = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}}dx = \frac{4\pi}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)}{6} \text{ од.}^2.$$

10.6. Невласні інтеграли

Перейдемо до узагальнення поняття визначеного інтеграла в двох напрямках: 1) проміжок інтегрування є нескінченним;

2) підінтегральна функція необмежено зростає в околі деякої точки.

10.6.1. Невласний інтеграл по нескінченному проміжку

Нехай функція $f(x)$ $x \in [a; +\infty)$ є інтегрованою на довільному проміжку $[a; A]$ $(A > a)$. Покладемо за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad . \qquad (10.10)$$

Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ назвемо **збіжним**, якщо границя існує і скінченна (величина цієї границі приймається за значення невласного інтеграла). У протилежному разі цей невласний інтеграл називається **розбіжним.**

Цілком аналогічно визначаються невласні інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{B \to -\infty} \int_B^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A \to +\infty \\ B \to -\infty}} \int_B^A f(x)\,dx.$$

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграли:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$; 2) $\int_\pi^{+\infty} \cos x dx$.

Розв'язання:

1) $\int_1^A \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_1^A = \operatorname{arctg} A - \frac{\pi}{4}$.

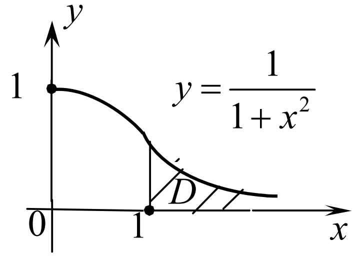


Рис.10.8

Оскільки $\lim_{A \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} A - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, то невласний інтеграл збігається і $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$. З геометричної точки зору площа нескінченної криволінійної трапеції $D = \left\{ (x; y) : 1 \le x \le +\infty,\ 0 \le y \le \frac{1}{1+x^2} \right\}$ дорівнює $\frac{\pi}{4}$ (рис. 10.8).

б) $\int\limits_{\pi}^{A}\cos x dx = \sin x\Big|_{\pi}^{A} = \sin A$. Оскільки границя $\lim\limits_{A\to+\infty}\sin A$ не існує, то невласний інтеграл $\int\limits_{\pi}^{+\infty}\cos x\, dx$ є розбіжним.

Приклад 2. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}\,dx\,. \qquad (10.11)$$

Розв'язання. Нехай $p=1$. Тоді при $A\to+\infty$ $\int\limits_{1}^{A}\frac{1}{x}dx = \ln A\to+\infty$ та інтеграл (10.11) є розбіжним. Якщо $p\neq 1$, то $\int\limits_{1}^{A}\frac{1}{x^{p}}\,dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{1}^{A} = \frac{A^{-p+1}-1}{-p+1}$. Звідки при $p>1$ маємо $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{1}{x^{p}}\,dx = \frac{1}{p-1}$ і, таким чином, інтеграл (10.11) збігається, причому

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}\,dx = \frac{1}{p-1}\,(p>1).$$

У тому разі, коли $p<1$, то $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{1}{x^{p}}\,dx = +\infty$ та інтеграл (10.10) є розбіжним. Отже, інтеграл (10.10) збігається при $p>1$ і розбігається при $p\leq 1$.

У розібраних вище прикладах відповідь на питання про збіжність або розбіжність інтеграла знаходили за допомогою первісної $F(x)$ підінтегральної функції $f(x)$. При цьому у разі збіжності невласного інтеграла знаходили і його значення. Проте часто потрібно лише відповісти на питання, збігається чи розбігається невласний інтеграл, а для цього необов'язково знаходити $F(x)$. А саме, наприклад, невласний інтеграл (10.10) від додатної функції $f(x)$збігається тоді і тільки тоді, якщо при зростанні A інтеграл $\int\limits_{a}^{A}f(x)\,dx$ є обмеженим зверху (див. теорему 4 підрозд. 3.6). У випадку, якщо інтеграл $\int\limits_{a}^{A}f(x)\,dx$ не є обмеженим, то інтеграл (10.10) розбігається (дорівнює $+\infty$). На цьому заснована наступна ознака порівняння.

Теорема. Нехай $0 \le f(x) \le g(x)$ $(x \in [a;+\infty))$, тоді:

1) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним, якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається;

2) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ є розбіжним, якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Наслідок. Якщо для додатних функцій $f(x)$ та $g(x)$ існує скінченна границя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C \ne 0,$$

то обидва інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно. Зокрема, якщо

$$0 \le f(x) \sim \frac{C}{x^p} \quad (x \to +\infty),$$

то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграли:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2} dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(2x^2+1)\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}(1+x^3)^q} dx$.

Розв'язання. Відзначимо, що елементарної первісної $F(x)$ в обох випадках не існує.

1) Оскільки $\frac{\cos^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ збігається, то на підставі теореми збігається і інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2} dx$;

2) $f(x)=\dfrac{(2x^2+1)\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x}\left(1+x^3\right)^q}\sim\dfrac{\pi}{x^{3q-\frac{3}{2}}}$. Отже, на підставі наслідку з теореми випливає, що інтеграл збігається при $p=3q-\dfrac{3}{2}>1\Leftrightarrow q>\dfrac{5}{6}$ і розбігається при $q\le\dfrac{5}{6}$.

Збіжний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ назвемо **абсолютно збіжним**, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$. У випадку, коли інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ розбігається, будемо казати, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається **умовно**. Слід зазначити, що із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$.

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$.

Розв'язання. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ є неперервно диференційовними на проміжку $[a;+\infty)$ та існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u(x)v(x)\right)$, то має місце формула інтегрування частинами

$$\int\limits_a^{+\infty}u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty}-\int\limits_a^{+\infty}u'(x)v(x)\,dx.$$

При цьому при збіжності (розбіжності) одного інтеграла збігається (розбігається) другий.

Застосуємо інтегрування частинами

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=-\frac{\cos x}{x}\Bigg|_1^{+\infty}-\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx=\cos 1-\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Оскільки $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$, а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ збігається, то на підставі теореми порівняння збігається і інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}dx$. Звідси випливає, що збігається інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ і, отже, збігається початковий інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Відзначимо однак, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$ є розбіжним. Таким чином, інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ є збіжним, але не абсолютно збіжним.

Таким же самим шляхом можна довести, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ є збіжним при $p > 0$ і абсолютно збіжним при $p > 1$.

9.6.2. Невласний інтеграл по скінченному проміжку від необмеженої функції

Нехай функція $f(x)$ є інтегровною на проміжку $[a;b-\varepsilon)$ при довільному $0 < \varepsilon < b - a$ і $\lim\limits_{x \to b-0} |f(x)| = +\infty$ (рис.10.9).

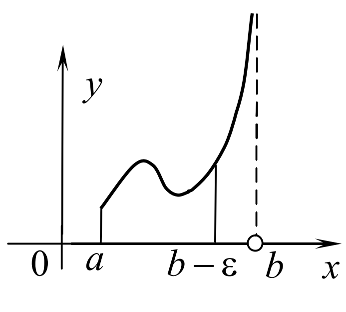


Рис. 10.9

Покладемо за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \qquad (10.11)$$

Невласний інтеграл з особливістю у точці b назвемо **збіжним**, якщо границя існує та скінченна. У протилежному разі цей невласний інтеграл називається **розбіжним.**

Аналогічно визначається невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ з особливістю у точці a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a-\varepsilon}^b f(x)\,dx .$$

Приклад 5. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$.

Розв'язання. При $p>0$ цей інтеграл є невласним з особливістю у точці $x=0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}dx;$$

$$p=1\textbf{:}\quad \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \ln\varepsilon \to +\infty \text{ при } \varepsilon\to+0;$$

$$p\neq 1\textbf{:}\quad \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1-\varepsilon^{-p+1}}{-p+1} \underset{\varepsilon\to+0}{\to} \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & при\ p<1, \\ +\infty & при\ p>1. \end{cases}$$

Отже, початковий невласний інтеграл є збіжним при $0<p<1$ та розбіжним при $p\geq 1$.

Властивості невласних інтегралів від необмежених функцій аналогічні властивостям невласних інтегралів по необмеженому проміжку. Наприклад, якщо $0\leq f(x) \sim \frac{C}{(x-a)^p}$ $при\ x\to a+0$, то невласний інтеграл з особливістю у точці a збігається при $0<p<1$ та розбігається при $p\geq 1$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^r\left(1+x^q\right)}dx \quad (r,q>0)$.

Розв'язання. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^r\left(1+x^q\right)}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^r\left(1+x^q\right)}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^r\left(1+x^q\right)}dx$.

Перший доданок є невласним інтегралом з особливістю у точці $x=0$:

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x^r} = \frac{1}{x^{r-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \text{ збігається при } r-\frac{1}{2}<1 \Leftrightarrow r<\frac{3}{2}.$$

Другий доданок є невласним інтегралом по нескінченному проміжку:

$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^{r+q}} = \dfrac{1}{x^{r+q-1}} \Rightarrow$ збігається при $r+q-1>1 \Leftrightarrow r+q>2$.

Отже, початковий інтеграл збігається при $q>2-r,$ де $r<\dfrac{3}{2}$.

10.7. Криволінійний інтеграл першого роду

До визначених інтегралів зводиться обчислення так званих криволінійних інтегралів.

Нехай у кожній точці гладкої просторової кривої $L = AB$ з кінцями у точках A і B задана обмежена функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо криву точками $M_0 = A,\ M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = B$ на n дуг $M_{k-1}M_k$ $(k=1,2,...,n)$ і виберемо на кожній дузі $M_{k-1}M_k$ довжини Δl_k точку $C_k(x_k;y_k;z_k)$ та складемо інтегральну суму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(C_k)\cdot\Delta l_k$.

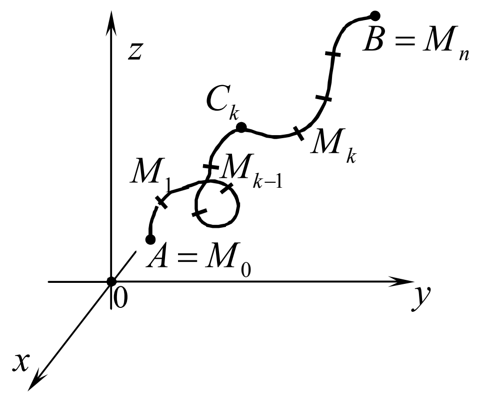


Рис. 10.10

Нехай $d(n) = max\{\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n\}$ – діаметр розбиття.

Якщо при $d(n)\to 0$ існує незалежна від вибору точок $C_k(x_k;y_k;z_k)$ і засобу розбиття кривої L скінченна границя інтегральної суми, то вона називається **криволінійним інтегралом першого роду** (інтегралом по довжині дуги) від функції $f(x,y,z)$ по кривій L та позначається символом $\int\limits_L f(x,y,z)dl$.

У тому випадку, коли функція $f(x,y,z)$ є неперервною, криволінійний інтеграл першого роду існує.

Відзначимо, що $\int\limits_L f(x,y,z)dl$ не залежить від напряму кривої L, тобто $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{BA} f(x,y,z)dl$, оскільки довжина Δl_k дуги $M_{k-1}M_k$ не залежить від того, яка з точок M_{k-1}, M_k є початком і кінцем цієї дуги.

Нехай крива L задана параметрично

$$L = \{(x;\, y;\, z) : x = x(t),\ y = y(t),\ \ z = z(t);\, t\in[\alpha;\beta]\}.$$

Тоді інтеграл по довжині дуги зводиться до визначеного інтегралу по параметру t:

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt\,.} \qquad (10.12)$$

Формула (10.12) стає зрозумілою, якщо згадати, що елемент довжини дуги у випадку параметричного завдання кривої дорівнює

$$dl = \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt\,.$$

За умови, що крива лежить у координатній площині ,одна з координат в формулі (10.12) буде відсутня. Наприклад, якщо крива лежить у площині xOy

$$L=\{(x;\,y): x=x(t),\ y=y(t);\, t\in[\alpha;\beta]\},$$

то отримуємо

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt\,.$$

Якщо крива L задана явно: $y=y(x)\ (a\le x\le b)$, треба перейти до параметричного завдання кривої $L=\{(x;\,y): x=x,\ y=y(x)\ ;\, a\le x\le b\}$ і формула (10.12) набуває вигляду

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f\big(x,y(x)\big)\cdot\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx\,. \qquad (10.13)$$

У тому разі, коли на кривій L розподілена маса з лінійною густиною $\gamma(x,y,z)$, за допомогою криволінійного інтегралу першого роду можна знайти масу, координати центра мас і моменти інерції матеріальної кривої. Зокрема, маса, координата x_C центру мас кривої L і момент інерції кривої L відносно площини xOy обчислюються відповідно за формулами

$$M=\int_L \gamma(x,y,z)dl\,,\ x_C=\frac{\int_L x\cdot\gamma(x,y,z)\,dl}{\int_L \gamma(x,y,z)\,dl}\,,\ I_{xOy}=\int_L z^2\cdot\gamma(x,y,z)dl\,. \quad (10.14)$$

Приклад 1. Знайти координату x_C центру мас кривої

$$L=\left\{(x;\,y;\,z): x=t,\ y=\frac{2\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t},\ z=\frac{1}{2}t^2;\ t\in[0;1]\right\}$$

і момент інерції кривої L відносно площини xOy, якщо на кривій розподілена маса з лінійною густиною $\gamma(x,y,z)=\gamma_0\cdot x\cdot z$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо елемент довжини дуги

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt=\sqrt{1+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{t}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot 2t\right)^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{(1+t)^2}\,dt=(1+t)\,dt\,.$$

Тоді $M=\gamma_0\cdot\int_0^1 t\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot(1+t)\,dt=\frac{9}{40}\,\gamma_0$, $x_C=\frac{40}{9}\cdot\int_0^1 t^2\cdot\frac{1}{2}t^2(1+t)\,dt=\frac{22}{27}$,

$$I_{xOy}=\gamma_0\cdot\int_0^1\frac{1}{4}t^4\cdot t\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot(1+t)\,dt=\frac{17}{576}\,\gamma_0\,.$$

ВПРАВИ

Знайти визначений інтеграл:

1.1. $\int_2^3 x\cdot\sqrt{x^2-4}\,dx$. **1.2.** $\int_0^1 x^6\cdot\sqrt[4]{15x^7+1}\,dx$. **1.3.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+2\cos t}\,dt$.

1.4. $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$. **1.5.** $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 2x\cdot\cos^2 2x\,dx$. **1.6.** $\int_0^2\frac{\ln(2x+1)}{x+1/2}\,dx$.

1.7. $\int_0^{1/2}\frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **1.8.** $\int_0^{1/2}\frac{\sqrt{\mathrm{arctg}\,2x}}{1+4x^2}\,dx$. **1.9.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2}2^{\mathrm{ctg}\,x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$.

1.10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$. **1.11.** $\int_0^{1/2}\frac{e^{2\arccos x-\pi}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **1.12.** $\int_{1/\pi}^{2/\pi}\left(\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$.

1.13. $\int_{3\pi/2}^{2\pi}\sqrt{1-3\sin x}\cdot\cos x\,dx$. **1.14.** $\int_1^e\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$. **1.15.** $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$.

1.16. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{3\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx$. **1.17.** $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx$. **1.18.** $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$.

1.19. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin 2x dx$. **1.20.** $\int\limits_0^{\pi} (3x - \pi) \sin 3x dx$. **1.21.** $\int\limits_0^{2\pi} (2x + 3) \sin \frac{x}{2} dx$.

1.22. $\int\limits_0^2 (-3x + 2) e^{-2x} dx$. **1.23.** $\int\limits_0^1 (2x - 1) e^{3x} dx$. **1.24.** $\int\limits_0^{\pi/2} \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) \cos 2x dx$.

1.25. $\int\limits_0^{\ln 2} x^2 e^{-x} dx$. **1.26.** $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin^2 x dx$. **1.27.** $\int\limits_1^e \sqrt{x} \ln x dx$.

1.28. $\int\limits_0^1 \frac{2x + 5}{(x + 2)^2 (x + 3)} dx$. **1.29.** $\int\limits_0^1 \frac{x + 1}{(x - 2)^2 (x + 3)} dx$.

1.30. $\int\limits_2^3 \frac{x + 1}{x(x^2 + 2x + 5)} dx$. **1.31.** $\int\limits_0^1 \frac{3x^2 + 1}{(x + 1)(x^2 + 9)} dx$.

1.32. $\int\limits_1^2 \frac{2x + 3}{x(x^2 + 8x + 17)} dx$. **1.33.** $\int\limits_0^1 \arccos x dx$. **1.34.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$.

1.35. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$. **1.36.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5 - 4x}} dx$. **1.37.** $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1 - x)}} dx$.

1.38. $\int\limits_1^{16} \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$. **1.39.** $\int\limits_1^e x^2 \ln^2 x dx$. **1.40.** $\int\limits_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1 + x}} dx$.

1.41. $\int\limits_1^e x^2 \ln^3 x dx$.

Знайти площу фігури, яка обмежена лініями:

2.1. $y = 5 - x,\ y = \frac{6}{x}$. **2.2.** $y = 4 - x^2,\ y = \frac{x}{2} - 1$.

2.3. $y = x^2 - 2x + 3, y = 4 - 2x$. **2.4.** $y = x^2 - 4x + 5,\ y = x + 1$.

2.5. $y = -x^2 + 4,\ x + y = 4$. **2.6.** $y = x^2 - 6x + 10,\quad y = x$. **2.7.** $y = x^3,\ y = \sqrt{x}$.

2.8. $y = \frac{2}{x},\ y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$. **2.9.** $y = \frac{3}{x},\ y = 4 - x$. **2.10.** $y = x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$.

2.11. $L = \{(x; y) : x = a \sin t,\ y = b \sin 2t;\ t \in [0, \pi]\}$.

2.12. $L = \{(x; y) : x = a \cos t,\ y = b \sin^3 t;\ t \in [0, 2\pi]\}$.

2.13. $\rho = a(1 - \cos\varphi),\ \rho = a\cos\varphi$.

Знайти довжину дуги кривої:

3.1. $y=\dfrac{x^2}{2}-1, \quad 0\le x\le \sqrt{2}$. **3.2.** $L=\left\{(x;y): x=t^2,\ y=\dfrac{t^3}{3}-t;\ 0\le t\le \sqrt{3}\right\}$.

3.3. $\rho=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3},\ \varphi\in[0,\ \pi]$.

4. Знайти об'єм криволінійного циліндра, який обмежений поверхнями $z=x^2+y^2$ (параболоїд), $x^2+y^2=2x$ (циліндр), $z=0$ (площина).

5. Знайти об'єм тіла обертання криволінійної трапеції, навколо осей координат:

5.1. $D=\{(x;y):\ 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \sin x\}$.

5.2. $D=\{(x;\ y): 0\le x\le 2, 0\le y\le 2x-x^2\}$.

5.3. $D=\left\{(x;y): 1\le x\le 4,\ 0\le y\le \dfrac{4}{x}\right\}$.

6. Обчислити площу поверхні обертання кривої навколо осі Ox:

6.1. $y=\dfrac{x^3}{3}\ (0\le x\le 2)$. **6.2.** $y=\sin x,\ (0\le x\le \pi)$.

7. Обчислити невласні інтеграли (або встановити їх розбіжність):

7.1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$. **7.2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx$. **7.3.** $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2+9}\,dx$. **7.4.** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\,dx$.

7.5. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$. **7.6.** $\displaystyle\int_1^{2}\frac{1}{x(2-x)}dx$. **7.7.** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln x\,dx$. **7.8.** $\displaystyle\int_9^{1}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

7.9. $\displaystyle\int_{6/\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$.

8 . Дослідити невласні інтеграли на збіжність:

8.1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$. **8.2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$. **8.3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^p}dx$. **8.4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+2x^3}}dx$.

8.5. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+x^3}dx$. **8.6.** $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{\operatorname{arctg}x}dx$. **8.7.** $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{\ln\left(1+x^3\right)}}{1-\cos x}dx$.

8.8. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$. **8.9.** $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{\operatorname{arctg}x}dx$.

9.1. Знайти масу, координати центра мас і моменти інерції відносно осей Ox і Oy чверті кола $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\ge 0$, якщо лінійна густина маси :1) $\gamma(x,y)=x\cdot y$; 2) $\gamma(x,y)=x\cdot y^2$; 3) $\gamma(x,y)=x^2\cdot y^2$.

9.2. Знайти масу, координати центра мас і моменти інерції відносно осей Ox і Oy дуги параболи $y=2\sqrt{x}$, $0\le x\le 3$, якщо лінійна густина маси $\gamma(x,y)=y$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\frac{5\sqrt{5}}{3}$. **1.2.** $\frac{124}{525}$. **1.3.** $\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **1.4.** $\ln\frac{3}{2}$. **1.5.** $\frac{1}{48}$. **1.6.** $\frac{1}{2}\ln^2 5$.

1.7. $\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{4}{3}}$. **1.8.** $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$. **1.9.** $\frac{1}{\ln 2}$. **1.10.** $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **1.11.** $\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{3}}\right)$.

1.12. 1. **1.13.** 16/9. **1.14.** $\frac{\pi}{4}$. **1.15.** $\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right)$. **1.16.** $\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

1.17. $\frac{3}{5}(\ln 2)^{\frac{5}{3}}$. **1.18.** -1. **1.19.** $\frac{\pi}{4}$. **1.20.** $\frac{\pi}{3}$. **1.21.** $8\pi+12$. **1.22.** $\frac{1}{4}\left(1+11e^{-4}\right)$.

1.23. $\frac{1}{9}\left(5+4e^3\right)$. **1.24.** 4π. **1.25.** $1-\ln 2-\frac{1}{2}(\ln 2)^2$. **1.26.** $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$.

1.27. $\frac{2}{9}e\sqrt{e}+\frac{4}{9}$. **1.28.** $\ln\frac{9}{8}+\frac{1}{6}$. **1.29.** $\frac{2}{25}\ln\frac{3}{8}+\frac{3}{10}$.

1.30. $\frac{1}{10}\ln\frac{117}{80}+\frac{2}{5}\left(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)$. **1.31.** $\frac{2}{5}\ln 2+\frac{13}{5}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

1.32. $\frac{3}{17}\ln 2-\frac{1}{17}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{37}{26}-22\left(\operatorname{arctg}6-\operatorname{arctg}5\right)\right)$. **1.33.** 1. **1.34.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.35. $2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. **1.36.** 1/6. **1.37.** $\frac{\pi^2}{4}$. **1.38.** $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$. **1.39.** $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$.

1.40. $\frac{1}{27}\left(5e^3-2\right)$. **1.41.** $\frac{2}{27}\left(2e^3+1\right)$.

2.1. $\left(\frac{5}{2}-6\ln\frac{3}{2}\right)$ од.^{2}. **2.2.** $15\frac{3}{16}$ од.^{2}. **2.3.** $\frac{4}{3}$ од.^{2}. **2.4.** $27/6$ од.^{2}. **2.5.** $1/6$ од.^{2}.
2.6. $76/3$ од.^{2}. **2.7.** $5/12$ од.^{2}. **2.8.** $\left(\frac{15}{4}-4\ln 2\right)$ од.^{2}. **2.9.** $(4-3\ln 3)$ од.^{2}.
2.10. $5/12$ од.^{2}. **2.11.** $\frac{4}{3}ab$ од.^{2}. **2.12.** $\frac{3\pi ab}{4}$ од.^{2}. **2.13.** $a^2\left(\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}\right)$ од.^{2}.

3.1. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)$ *лін.од.*. **3.2.** $2\sqrt{3}$ *лін.од.*. **3.3.** $\frac{a}{2}\left(\pi-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *лін.од.*.

4. $\frac{3\pi}{2}$ од.^{3}.

5.1. $V_{OX}=\frac{\pi^2}{2}$ од.^{3}, $V_{OY}=2\pi^2$ од.^{3}. **5.2.** $V_{OX}=\frac{16\pi}{15}$ од.^{3}, $V_{OY}=\frac{8\pi}{3}$ од.^{3}.
5.3. $V_{OX}=12\pi$ од.^{3}, $V_{OY}=32\pi$ од.^{3}.

6.1. $\frac{\pi}{9}\left(17^{\frac{3}{2}}-1\right)$ од.^{2}. **6.2.** $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ од.^{2}.

7.1. $\frac{3}{2}$. **7.2.** Розбігається. **7.3.** $\frac{\pi}{12}$. **7.4.** $\ln 2$. **7.5.** $\frac{\pi}{2}$.
7.6. Розбігається. **7.7.** Розбігається. **7.8.** $-\frac{9}{4}$. **7.9.** $\frac{1}{2}$.

8.1. Збігається. **8.2.** Збігається. **8.3.** Збігається, якщо $1<p<2$.
8.4. Збігається. **8.5.** Збігається. **8.6.** Збігається. **8.7.** Збігається.
8.8. Збігається, якщо $1<p<3$. **8.9.** Збігається, якщо $1<p<5$.

9.1. $\frac{1}{2}, C\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}, C\left(\frac{3\pi}{16};\frac{3}{4}\right), \frac{1}{5}, \frac{2}{15}$; 3) $\frac{\pi}{16}, C\left(\frac{32}{15\pi};\frac{32}{15\pi}\right), \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{32}$.
9.2. $\frac{28}{3}, C\left(\frac{58}{35};\frac{3(7\sqrt{12}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right))}{28}\right), \frac{928}{15}, \frac{3392}{105}$.

Розділ 11

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Поняття визначеного інтеграла та його наслідки майже без суттєвих змін розповсюджується на випадки функцій двох і трьох змінних.

11.1. Подвійний інтеграл

Нехай $L-$ плоска замкнена неперервна кусково-гладка проста крива. Якщо до сукупності точок, що лежать всередині L, приєднати точки L, то одержана сукупність точок має назву замкненої області D з межею L (рис. 11.1).

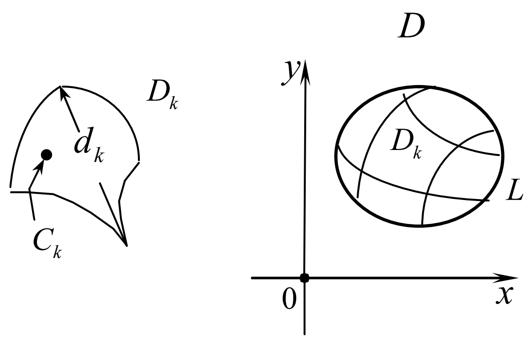


Рис. 11.1

Нехай $f(x, y)$ – обмежена функція, яка визначена у замкненій області D. Розіб'ємо довільно область D на n частин $D_k \left(k=1, \ldots, n\right)$, які не мають між собою спільних внутрішніх точок. Площу частини D_k позначимо ΔD_k, а найбільшу відстань між точками цієї частини $d_k \left(k=1, \ldots, n\right)$.

У кожній частині D_k виберемо довільну точку $C_k\left(x_k ; y_k\right)$ і утворимо суму $\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \Delta D_k$, яку назвемо **інтегральною сумою** функції $f(x, y)$ по області D.

Означення 1. Якщо інтегральна сума при $\max\limits_{1 \le k \le n} d_k \to 0$ наближається до певної скінченної границі, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частини, ні від вибору точок $C_k\left(x_k ; y_k\right) \in D_k$, то ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ по області D і позначається символом

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy .$$

При цьому функція $f(x, y)$ називається інтегровною в області D.

Величину $dxdy$ прийнято називати елементом площі в прямокутній декартовій системі координат (це пов'язано з розбиттям області D на прямокутні частини D_k прямими, які паралельні осям координат: $\Delta D_k = \Delta x_j \cdot \Delta y_i$).

Якщо порівняти між собою означення подвійного інтеграла з означенням визначеного інтеграла по відрізку, то в цілому вони збігаються. Тому властивості подвійного інтеграла аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Наприклад:

1) лінійність відносно підінтегральної функції

$$\iint_D \left(kf(x, y) + l\,g(x, y)\right)dx\,dy = k\iint_D f(x, y)\,dxdy + l\iint_D g(x, y)\,dx\,dy,$$

де k і l – числа;

2) адитивність відносно області інтегрування:

якщо $D = D_1 \cup D_2$, причому D_1 та D_2 не мають між собою спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Теорема 1. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D, вона є інтегровною у цій області.

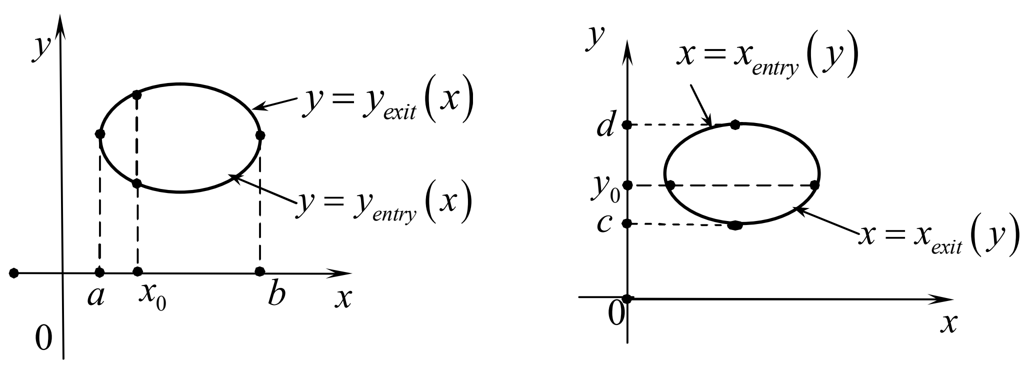
Подвійний інтеграл обчислюється шляхом зведення його до повторного (до двох послідовних інтегрувань).

Означення 2. Нехай проекцією області D на вісь Ox є відрізок $[a; b]$.

Область D називатимемо **правильною відносно осі** Ox, якщо будь-яка пряма $x = x_0$ $\left(x_0 \in (a; b)\right)$ перетинає межу області D у двох точках. Нижня з цих точок y_{entry} має назву точки входу в область D, а верхня y_{exit} – точки виходу (рис. 11.2, а).

Якщо точки входу лежать на кривій з рівнянням $y = y_{entry}(x)$, а точки виходу – на кривій $y = y_{exit}(x)$, то правильна відносно осі Ox область D визначається таким чином:

$$D = \left\{(x; y) : a \le x \le b,\ y_{entry}(x) \le y \le y_{exit}(x)\right\}.$$



а б

Рис. 11.2

Аналогічно визначається **правильна область відносно осі** Oy (рис. 11.2,б):

$$D = \{(x;\, y) : c \le y \le d,\, x_{entry}(y) \le x \le x_{exit}(y)\}.$$

Теорема 2

1) Якщо область D є правильною відносно осі Ox, то

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\, y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_{entry}(x)}^{y_{exit}(x)} f(x,\, y)\,dy \right) dx}. \tag{11.1}$$

2) Якщо область D є правильною відносно осі Oy, то

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\, y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_{entry}(y)}^{x_{exit}(y)} f(x,\, y)\,dx \right) dy}. \tag{11.2}$$

Отже, щоб знайти подвійний інтеграл, спочатку функцію $f(x,\, y)$ інтегрують по змінній y в межах від $y_{entry}(x)$ до $y_{exit}(x)$, вважаючи x сталою величиною, потім отриманий результат інтегрують по змінній x вздовж відрізка $[a;\, b]$.

Зробимо декілька зауважень щодо заміни змінних у подвійному інтегралі. Згадаємо, що при заміні змінного $x = g(t)$ у визначеному інтегралі (властивість 7, підрозд. 9.5) відрізок інтегрування $[a;\, b]$ замінюється на відрізок $[\alpha;\, \beta]$, а підінтегральна функція $f(x)$ – на $f(g(t))$. Крім того, в підінтегральному виразі

dx переходить у $g'(t)dt$, де $g'(t)$ – коефіцієнт розтягування при перетворенні відрізка $[\alpha;\beta]$ на відрізок $[a;b]$. Аналогічна картина буде і при заміні змінних у подвійному інтегралі:

1) замінюється область інтегрування $D \to D'$;

2) функція $f(x, y)$ виражається у нових змінних;

3) елемент площі $dxdy$ у прямокутних координатах замінюється на елемент площі у нових координатах.

Ми обмежимось лише випадком переходу до полярних координат φ та ρ, які пов'язані з координатами x та y формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

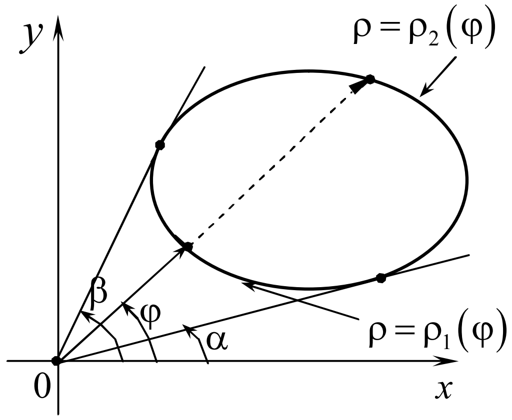


Рис. 11.3

Нехай область D після переходу до полярних координат набуває вигляду $D' = \{(\varphi;\rho) : \alpha \le \varphi \le \beta, \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\}$ (рис. 11.3).

Неважко показати, що елемент площі у полярних координатах дорівнює $\rho d\rho d\varphi$. Звідси випливає шукана формула переходу до полярних координат

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \right) d\varphi.} \qquad (11.3)$$

Зупинимось на деяких застосуваннях подвійного інтеграла.

Геометричні застосування

1. Якщо $f(x, y) \equiv 1\ ((x;y) \in D)$, то безпосередньо з означення подвійного інтеграла випливає така рівність:

$$\text{площа області } D = \iint\limits_D dxdy.$$

2. **Площа** σ частини **кусково-гладкої поверхні** $S : z = f(x, y)\ ((x;y) \in D)$ виражається інтегралом

$$\boxed{\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dxdy}. \qquad (11.4)$$

Підінтегральний вираз є елементом $d\sigma$ площі поверхні $S: z = f(x, y)$ (підрозд. 8.4).

3. Нехай $f(x, y) \geq 0 \left((x; y) \in D\right)$. Просторове тіло, яке обмежене зверху поверхнею $S: z = f(x, y)$, знизу – областю D, з боків – циліндричною поверхнею, напрямною якої є межа області D, а твірні, паралельні осі Oz, назвемо **криволінійним циліндром**. Об’єм V криволінійного циліндра обчислюється за формулою

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy}. \qquad (11.5)$$

Механічні застосування

Якщо матеріальна пластина займає область D і має поверхневу густину маси $\gamma(x, y)$ $\left((x; y) \in D\right)$, то:

1) **маса** M **пластини** дорівнює

$$\boxed{M = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy}; \qquad (11.6)$$

2) **координати** $(x_C; y_C)$ **центра мас пластини** визначаються за формулами:

$$\boxed{x_C = \frac{1}{M} \iint\limits_D x\gamma(x, y)\, dxdy, \quad y_C = \frac{1}{M} \iint\limits_D y\gamma(x, y)\, dxdy}; \qquad (11.7)$$

3) **моменти інерції пластини** I_{Ox}, I_{Oy} відносно осей координат Ox, Oy і I_0 відносно початку координат обчислюються за формулами:

$$\boxed{I_{Ox} = \iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\, dxdy, \ I_{Oy} = \iint\limits_D x^2\gamma(x, y)\, dxdy},$$

$$\boxed{I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y)\, dxdy}. \qquad (11.8)$$

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2 ydxdy$ по області D, яка обмежена лініями $y = x^2$, $y = 2x$ (рис. 11.4).

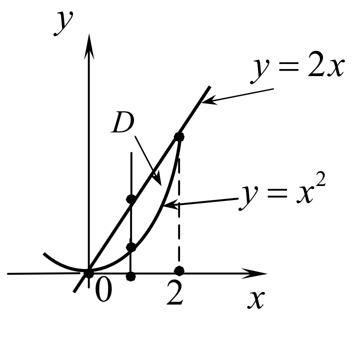


Рис. 11.4

Розв'язання. Область D є правильною відносно осі Ox. Знайдемо абсциси точок перетину ліній: $x^2 = 2x \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Точки входу в область лежать на параболі, точки виходу – на прямій. Таким чином, $D = \left\{(x;\, y): 0 \le x \le 2,\, x^2 \le y \le 2x\right\}$.

Тоді $\iint\limits_D x^2 ydxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2}^{2x} x^2 ydy \right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2 \left(y^2 \Big|_{x^2}^{2x} \right) dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2 \left(4x^2 - x^4\right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(4x^4 - x^6\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{4x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{128}{5} - \frac{128}{7} \right) = \frac{128}{35}.$$

Приклад 2. Знайти площу поверхні частини параболоїда $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, яка розташована всередині циліндра $x^2 + y^2 = 3$ (рис. 11.5).

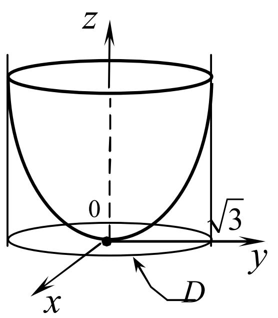


Рис. 11.5

Розв'язання. Оскільки $f(x,\, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$, то $f'_x = x,\; f'_y = y$. Проекцією D частини параболоїда, що розглядається, на площину xOy буде круг $x^2 + y^2 \le 3$. Таким чином,

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Для обчислення інтеграла перейдемо до полярних координат:

1) $D \to D'\left\{(\varphi;\, \rho): 0 \le \varphi < 2\pi,\, 0 \le \rho \le \sqrt{3}\right\}$;

2) $\sqrt{1 + x^2 + y^2} \to \sqrt{1 + \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1 + \rho^2}$;

3) $dxdy \to \rho d\rho d\varphi$.

Отже, $\sigma = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho\right)d\varphi.$

Оскільки вираз у дужках є сталою величиною, то його можна винести за знак зовнішнього інтеграла

$$\sigma = \int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3}\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}(8-1) = \frac{14\pi}{3} од.^2 \ .$$

Приклад 3. Знайти координати центра мас $(x_C; y_C)$ матеріальної пластини, яка обмежена прямими $y = x$, $y = 1$, $x = 0$ та має густину $\gamma(x, y) = \sqrt{x} + y$ (рис. 11.6).

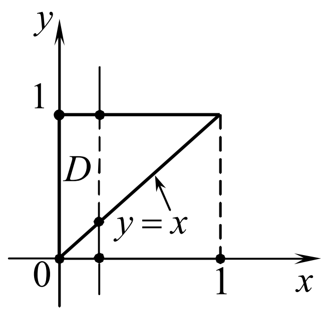


Рис. 11.6

Розв'язання. Область D, яку займає пластина, є правильною відносно осі Ox. Точки входу в область лежать на прямій $y = x$, а точки виходу – на прямій $y = 1$.

Таким чином, $D = \{(x; y): 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$.

Знайдемо масу пластини

$$M = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1\left(\sqrt{x}+y\right)dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1\left(y\sqrt{x}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^1 dx = \int\limits_0^1\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}-x\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5} \text{ од. маси.}$$

Переходимо до знаходження координат центра мас:

$$x_C = \frac{1}{M}\iint\limits_D x\gamma(x, y)dxdy = \frac{5}{3}\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1\left(x\sqrt{x}+xy\right)dy\right)dx = \frac{5}{3}\int\limits_0^1\left(yx\sqrt{x}+\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_x^1 dx =$$

$$= \frac{5}{3}\int\limits_0^1\left(x\sqrt{x}+\frac{x}{2}-x^2\sqrt{x}-\frac{x^3}{2}\right)dx = \frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{x^2}{4}-\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{67}{168};$$

$$y_C=\frac{1}{M}\iint\limits_D y\gamma(x,y)\,dxdy=\frac{5}{3}\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1(y\sqrt{x}+y^2)dy\right)dx=\frac{5}{3}\int\limits_0^1\left(\frac{y^2}{2}\sqrt{x}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^1 dx=$$

$$=\frac{5}{3}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\right)dx=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{1}{12}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{185}{252}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Цей інтеграл використовується дуже часто, наприклад, у теорії ймовірностей.

Розв’язання. Нехай $D_1=\{(x;y):\ x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$, $D_2=\{(x;y):\quad 0\le x\le R, 0\le y\le R\}$, $D_3=\{(x;y): x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$ (рис. 11.7).

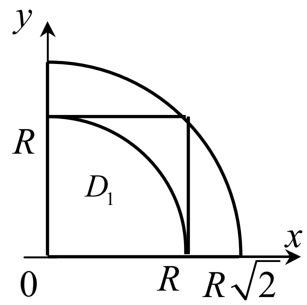


Рис 11.7

Оскільки $D_1\subset D_2\subset D_3$, а функція $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ є додатною, то

$$I_1=\iint\limits_{D_1}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy<I_2=\iint\limits_{D_2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy<$$

$$<I_3=\iint\limits_{D_3}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy.$$

Інтеграли I_1 і I_3 обчислимо в полярних координатах, а інтеграл I_2 подамо у вигляді квадрата деякого інтеграла:

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^R e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho\right)d\varphi=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{R^2}{2}}\right);$$

$$I_3=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{R\sqrt{2}} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho\right)d\varphi=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-R^2}\right);$$

$$I_2=\int\limits_0^R\left(\int\limits_0^R e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)dx=\int\limits_0^R e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int\limits_0^R e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)dx=\left(\int\limits_0^R e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\cdot\left(\int\limits_0^R e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)=$$

$$=\left(\int\limits_0^R e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2,$$

оскільки визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування. Отже, при довільному $R>0$ має місце оцінка

$\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{R^2}{2}}\right)<\left(\int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2<\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-R^2}\right)$. Спрямовуючи у цій оцінці $R\to+\infty$, отримуємо на підставі теореми 3 підрозд. 3.6 $\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2=\frac{\pi}{2}$.

Отже, $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$.

Відзначимо, що первісна функції $e^{-\frac{x^2}{2}}$ не є елементарною функцією і, отже, безпосередньо цей невласний інтеграл обчислити не можна.

11.2. Поверхневий інтеграл першого роду

Нехай в кожної точці гладкої поверхні $S: z=g(x,y)$ $\left((x;y)\in D\right)$ задана обмежена функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо поверхню S на куски $S_j\ (j=1,...,n)$ з площею $\Delta\sigma_j$, які можуть перетинатися лише по своїм межам. Виберемо точку $P_j(x_j;y_j;z_j)\in S_j$ і зіставимо інтегральну суму $\sum_{j=1}^{n} f(x_j,y_j,z_j)\cdot\Delta\sigma_j$.

Нехай d_j – відстань вздовж поверхні між двома найбільш віддаленими точками S_j, а $d(n)=max\{d_1,...,d_n\}$. Якщо при $d(n)\to 0$ існує незалежна від вибору точок $P_j(x_j;y_j;z_j)$ і засобу розбиття поверхні S скінченна границя інтегральної суми, то вона називається **поверхневим інтегралом першого роду** (інтегралом по площі поверхні) від функції $f(x,y,z)$ по поверхні S та позначається символом $\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma$.

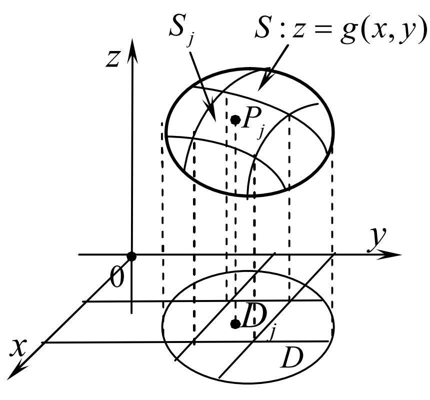


Рис. 11.8

У тому випадку, коли функція $f(x,y,z)$ є неперервною, інтеграл по площі поверхні існує.

Нехай D_j є проекцією S_j на площину xOy. Позначимо через ΔD_j площу D_j.Тоді з формули для площі поверхні і теореми про середнє значення для подвійного інтегралу будемо мати

$$\Delta\sigma_j = \iint_{D_j} \sqrt{1+(g'_x(x\ ,y\ ))^2+(g'_y(x\ ,y\ ))^2}\,dxdy =$$
$$= \sqrt{1+(g'_x(\overline{x}_j,\overline{y}_j))^2+(g'_y(\overline{x}_j,\overline{y}_j))^2}\,\Delta D_j \quad ,$$

де точка$\left(\overline{x}_j;\overline{y}_j\right)\in D_j$.

Утворимо інтегральну суму

$$\sum_{j=1}^{n} f\left(\overline{x}_j,\overline{y}_j,\overline{z}_j\right)\cdot\Delta\sigma_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_j,\overline{y}_j,g(\overline{x}_j,\overline{y}_j))\cdot\sqrt{1+(g'_x(\overline{x}_j,\overline{y}_j))^2+(g'_y(\overline{x}_j,\overline{y}_j))^2}\,\Delta D_j\,.$$

Оскільки функція $f(x,y,z)$ припускається неперервною, то переходячи до границі при $d(n)\to 0$ отримуємо обчислювальну формулу

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_D f(x,y,g(x,y))\cdot\sqrt{1+\left(g'_x\right)^2+\left(g'_y\right)^2}\,dxdy\,.} \qquad (11.9)$$

У тому разі, коли на поверхні S розподілена маса з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)$, за допомогою інтегралу по площі поверхні можна знайти масу, координати центра мас і моменти інерції матеріальної поверхні. Зокрема, маса , координата x_C центру мас і момент інерції поверхні S відносно осіOz обчислюються відповідно за формулами

$$M = \iint_S \gamma(x,y,z)\,d\sigma\,,\quad x_C = \frac{\iint_S x\cdot\gamma(x,y,z)\,d\sigma}{\iint_S \gamma(x,y,z)\,d\sigma}\,,\quad I_{Oz} = \iint_S \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y,z)\,d\sigma\,.$$

Приклад 1. Знайти масу, координати центра мас і момент інерції відносно осі Oz верхньої півсфери $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, якщо поверхнева густина маси $\gamma(x,y,z)=\gamma_0\cdot z\cdot\left(x^2+y^2\right)$.

Розв'язання. Проекцією D півсфери на площину xOy є круг радіуса 1 з центром у початку координат. Оскільки $g'_x=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $g'_y=-\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, то елемент площі поверхні $d\sigma=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$.

1) За формулою (11.9) маємо:

$$M=\gamma_0\cdot\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)\cdot zd\sigma=\gamma_0\cdot\iint\limits_D(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=$$
$$=\gamma_0\cdot\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Перейдемо в останньому інтегралі до полярних координат:

$$M=\gamma_0\cdot\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho\right)d\varphi=\gamma_0\cdot2\pi\cdot\frac{1}{4}=\gamma_0\cdot\frac{\pi}{2}\ ;$$

2) Оскільки поверхня S і густина γ є симетричними відносно осей Ox,Oy, то $x_C=y_C=0$.

$$\iint\limits_S z\cdot\gamma\left(x,y,z\right)d\sigma=\gamma_0\cdot\iint\limits_S z\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot zd\sigma=\gamma_0\cdot\iint\limits_D(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot dxdy.$$

Останній інтеграл після переходу до полярних координат набуває вигляду:

$$\gamma_0\cdot\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\rho^2\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right)d\varphi=\gamma_0\cdot\pi\cdot\int_0^1\left(1-u\right)\sqrt{u}du=\gamma_0\cdot\pi\cdot\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\pi\gamma_0}{15}.$$

Таким чином, $z_C=\dfrac{4\pi\gamma_0/15}{\pi\gamma_0/2}=\dfrac{8}{15}$;

3) $I_{Oz}=\gamma_0\cdot\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)\cdot z\cdot\left(x^2+y^2\right)d\sigma=$

$$=\gamma_0\cdot\iint\limits_D(x^2+y^2)^2\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=2\pi\gamma_0\int_0^1\rho^4\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{3}\gamma_0.$$

11.3. Потрійний інтеграл

Нехай у замкненій просторовій області G, яка обмежена поверхнею S, визначена обмежена функція $f(x,y,z)$.

Розіб'ємо довільно область G на n частин G_k $(k=1,2,...,n)$, які не мають між собою спільних внутрішніх точок. Об'єм частини G_k позначимо ΔG_k, а найбільшу відстань між точками цієї частини - $d_k\,(k=1,2,...,n)$. У кожній частині G_k виберемо довільну точку $C_k\left(x_k;\,y_k;\,z_k\right)$ і утворимо суму $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(x_k,\,y_k,\,z_k\right)\Delta G_k$, яку назвемо **інтегральною сумою** функції $f(x,y,z)$ по області G.

Означення 1. Якщо інтегральна сума при $\max\limits_{1\le k\le n} d_k \to 0$ наближається до певної скінченної границі, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частини, ні від вибору точок $C_k\left(x_k;y_k;z_k\right)\in G_k$, то ця границя називається **потрійним інтегралом** від функції $f(x,y,z)$ по області G і позначається символом $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$.

При цьому функція $f(x,y,z)$ називається інтегровною в області G. Величину $dxdydz$ будемо називати елементом об'єму в прямокутній системі координат (це пов'язано з розбиттям області G на елементарні прямокутні паралелепіпеди, грані яких паралельні координатним площинам: $\Delta G_k = \Delta x_j \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_p$).

Оскільки означення подвійного і потрійного інтегралів збігаються, то в певному розумінні, збігаються їх властивості і застосування. Наприклад:

1) лінійність відносно підінтегральної функції;
2) адитивність відносно області інтегрування;
3) позитивність: якщо
$f(x,y,z)\ge 0((x,y,z)\in G)$,то$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \ge 0$;

4) теорема про середнє значення: якщо функція $f(x,y,z)$є неперервною вG тоді $\exists C\in G$, така, що

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = f(C)\cdot V},$$

де об’єм V області G дорівнює $\boxed{V=\iiint\limits_G dxdydz}$;

5) **маса** M **тіла** G, об’ємна густина маси якого дорівнює $\gamma(x,y,z)$, знаходиться за формулою

$$\boxed{M=\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)\,dxdydz};\qquad(11.10)$$

6) **координати** $(x_C;\,y_C;\,z_C)$ **центра мас тіла** G визначаються за формулами

$$\boxed{\begin{aligned}&x_C=\frac{1}{M}\iiint\limits_G x\gamma(x,y,z)\,dxdydz,\ y_C=\frac{1}{M}\iiint\limits_G y\gamma(x,y,z)\,dxdydz,\\&z_C=\frac{1}{M}\iiint\limits_G z\gamma(x,y,z)\,dxdydz;\end{aligned}};\qquad(11.11)$$

7) **моменти інерції** I_{Ox},I_{Oy},I_{Oz} відносно осей координат і моменти інерції I_{xOy},I_{xOz},I_{yOz} відносно координатних площин знаходяться за формулами:

$$\boxed{\begin{gathered}I_{Ox}=\iiint\limits_G\left(y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz,\ I_{Oy}=\iiint\limits_G\left(x^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz,\\ I_{Oz}=\iiint\limits_G\left(y^2+x^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz,\ I_{xOy}=\iiint\limits_G z^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz,\\ I_{xOz}=\iiint\limits_G y^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz,\ I_{yOz}=\iiint\limits_G x^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz.\end{gathered}}$$

(11.12)

Теорема 1. Якщо функція $f(x,y,z)$ є неперервною в області G, то вона інтегровна в цій області.

Обчислюється потрійний інтеграл шляхом його зведення до трьох послідовних інтегрувань.

Теорема 2. Нехай проекцією поверхні S на площину xOy є область D і довільна пряма $x=x_0$, $y=y_0$ $\left((x_0;\,y_0)\in D\right)$, паралельна осі Oz, перетинає межу S області G у двох точках $P_{entry}\left(x_0;\,y_0;\,z_{entry}(x_0,\,y_0)\right)$, $P_{exit}\left(x_0;\,y_0;\,z_{exit}(x_0,\,y_0)\right)$ (рис. 11.9). Тоді

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_{entry}(x,y)}^{z_{\text{exit}}(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dxdy.} \qquad (11.13)$$

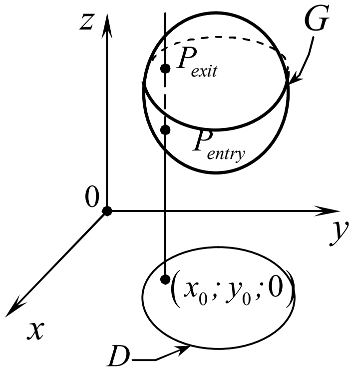


Рис. 11.9

Після першого інтегрування по змінній z (при фіксованих x та y) отримаємо в круглих дужках за формулою Ньютона-Лейбніца деяку функцію двох змінних x та y. Подвійний інтеграл по області D від цієї функції зводиться до двох послідовних інтегрувань так, як зазначалося вище.

Цілком зрозуміло, що можна змінювати в цій теоремі ролі змінних $x,\ y$, z.

Приклад 1. Знайти момент інерції I_{yOz} відносно відносно площини yOz тетраедра, який обмежено площинами $x + y + z = 1,\ x = 0,.\ y = 0,\ z = 0$. Об'ємна густина маси $\gamma(x, y, z) = x$.

Розв'язання. Проекцією області G на площину xOy є трикутник $D = \{(x;\ y):\ 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1 - x\}$ (рис. 11.10).

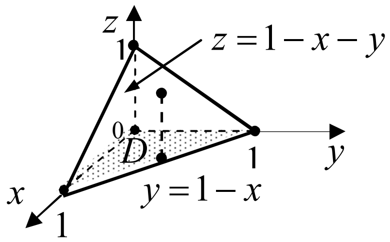


Рис. 11.10

Момент інерції I_{yOz} знайдемо за формулою

$$I_{yOz} = \iiint\limits_G x^2 \gamma(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$\iint\limits_D \left(\int\limits_0^{1-x-y} x^3 dz \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(x^3 z \Big|_0^{1-x-y} \right) dxdy = \iint\limits_D x^3 (1 - x - y)\,dxdy =$$

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(x^3 (1 - x) - x^3 y \right) dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^3 (1 - x)^2 - x^3 \frac{(1 - x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^3 (1 - x)^2\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x^3 - 2x^4 + x^5 \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{120}.$$

Приклад 2. Знайти масу півкулі

$G=\left\{(x;y;z):0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$, якщо об'ємна густина маси $\gamma(x,y,z)=z$ (рис. 11.11).

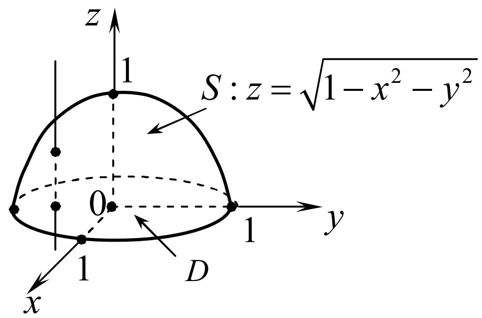


Рис. 11.11

Розв'язання

Проекцією D півсфери S на площину xOy є круг $x^2+y^2\le 1$.

Отже, маса M півкулі дорівнює

$$M=\iiint\limits_G zdxdydz=\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz\right)dxdy=$$

$$=\iint\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(1-x^2-y^2\right)dxdy.$$

Для обчислення останнього інтеграла перейдемо до полярних координат. Таким чином,

$$M=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho\right)d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\text{ од. маси.}$$

11.4. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Заміна змінних у потрійному інтегралі здійснюється аналогічно заміні змінних у подвійному інтегралі. А саме:

1) знаходиться область інтегрування у нових змінних $G\to G'$;

2) підінтегральна функція $f(x,y,z)$ виражається у нових змінних;

3) елемент об'єму $dxdydz$ у прямокутних координатах замінюється на елемент об'єму у нових координатах.

Ми зупинимось на переході до циліндричних і сферичних координат.

11.3.1. Циліндричні координати $(\varphi;\rho;z)$ (рис. 11.12) пов'язані з декартовими координатами $(x;y;z)$ формулами:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \quad 0\le\varphi<2\pi, \rho\ge 0, \ -\infty<z<+\infty. \end{cases}$$

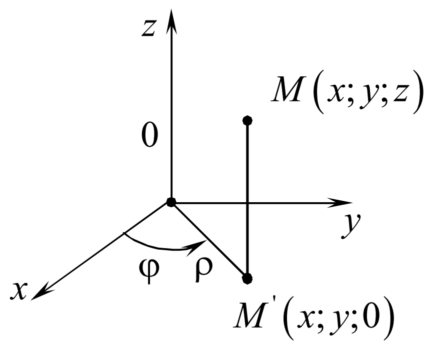


Рис. 11.12

Нехай область

$$G=\{(x;y;z):(x;y)\in D,$$
$$z_{entry}(x,y)\le z\le z_{exit}(x,y)\}$$

переходить у циліндричних координатах в область

$$G'=\{(\varphi;\rho;z):\alpha\le\varphi\le\beta,\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi),$$
$$z_{entry}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\le z\le z_{exit}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\},$$

де область $D'=\{(\varphi;\rho):\alpha\le\varphi\le\beta,\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)\}$. Тоді

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_\alpha^\beta\left(\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\left(\int\limits_{z_{entry}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}^{z_{exit}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}\rho(\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)dz\right)\rho d\rho\right)d\varphi}. \quad (11.14)$$

Зрозуміло, що перехід до циліндричних координат в області G істотно зводиться до переходу до полярних координат в області D (див. приклад 2, підрозд.10.1).

Приклад 3. Знайти момент інерції відносно осі Oz тіла G, яке обмежене параболоїдом $z=x^2+y^2$ і півконусом $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 11.13). Об'ємна густина маси $\gamma(x,y,z)=x^2$.

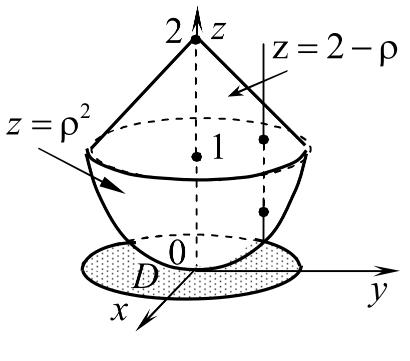


Рис.11.13

Розв'язання

Оскільки G є тілом обертання відносно осі Oz, то його проекцією D на площину xOy буде круг. Щоб знайти його радіус, виключимо z з рівнянь поверхонь у циліндричних координатах $2-\rho=\rho^2\Rightarrow\rho=1$.

Отже,

$$D' = \{(\rho;\varphi) : 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \rho \le 1\}$$

і, таким чином, отримуємо

$$I_{Oz} = \iiint\limits_G (x^2+y^2)^2 x^2 dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{\rho^2}^{2-\rho} \rho^2\rho^2\cos^2\varphi dz\right)\rho d\rho\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\left(\int_0^1 \rho^5 z\Big|_{\rho^2}^{2-\rho} d\rho\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\left(\int_0^1 \rho^5\left(2-\rho-\rho^2\right)\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\cdot\left(\frac{\rho^6}{3}-\frac{\rho^7}{7}-\frac{\rho^8}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\cdot\frac{11}{168} = \frac{11\pi}{168}.$$

11.3.2. Сферичні координати. У тому випадку, коли підінтегральна функція $f(x,y,z)$ є функцією від $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а область G є кулею або її частиною, доцільно обчислювати потрійний інтеграл у сферичних координатах. Нагадаємо, що прямокутні координати $(x;\,y;\,z)$ точки пов'язані з її **сферичними координатами** $(\varphi;\,\Theta;\,r)$ (рис. 11.14) формулами:

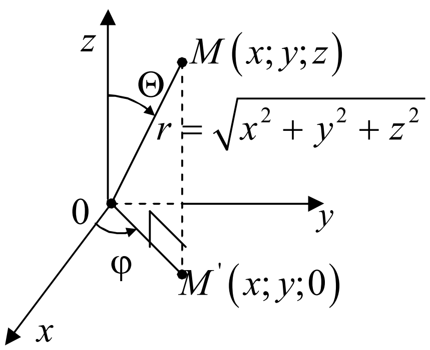


Рис. 11.14

$$\begin{cases} x = r\sin\Theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\Theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\Theta \end{cases}$$

$$0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \Theta \le \pi,\ r \ge 0.$$

Елемент об'єму в сферичних координатах дорівнює $r^2\sin\Theta dr d\Theta d\varphi$. Нехай область G переходить у сферичних координатах в область

$$G' = \{(\varphi;\Theta;r):\ \alpha \le \varphi \le \beta,\ \Theta_1(\varphi) \le \Theta \le \Theta_2(\varphi),\ r_1(\Theta,\varphi) \le r \le r_2(\Theta,\varphi)\}.$$

Тоді

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \\ &= \int_\alpha^\beta\left(\int_{\Theta_1(\varphi)}^{\Theta_2(\varphi)}\left(\int_{r_1(\Theta,\varphi)}^{r_2(\Theta,\varphi)} f(r\sin\Theta\cos\varphi, r\sin\Theta\sin\varphi, r\cos\Theta)r^2 dr\right)\sin\Theta d\Theta\right)d\varphi.\end{aligned}} \qquad (11.15)$$

Приклад 4. Знайти масу півкулі $G\left\{(x;y;z): x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0\right\}$, якщо густина маси $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат. З вигляду області G маємо, що $G'=\left\{(\varphi;\Theta;r): 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\Theta\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le r\le R\right\}$. Отже,

$$M=\iiint\limits_G\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^R r^2\cdot r^2dr\right)\sin\Theta d\Theta\right)d\varphi=$$

$$=\frac{2\pi R^5}{5}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin\Theta d\Theta=\frac{2\pi R^5}{5}(-\cos\Theta)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2\pi R^5}{5}.$$

Приклад 5. Знайти момент інерції відносно початку координат тіла G, яке обмежено півсферою $x^2+y^2+z^2=2z,\ z\ge 1$ і півконусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 11.15), якщо об'ємна густина маси $\gamma(x,y,z)=z$.

Розв'язання. Оскільки рівняння на півсфери і півконуса в сферичних координатах мають відповідно вигляд:

$$r^2=2r\cos\Theta\ \Rightarrow\ r=2\cos\Theta\quad i\quad r\cos\Theta=\sqrt{r^2\sin^2\Theta}\quad\Rightarrow\ \Theta=\frac{\pi}{4}$$

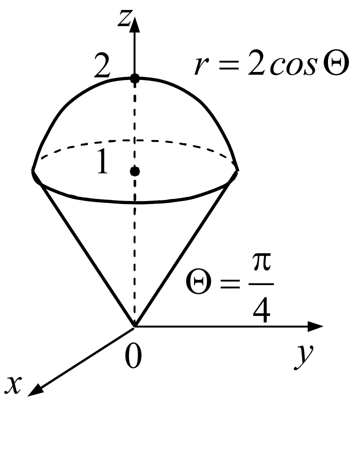


Рис. 11.15

то маємо

$$G'=\left\{(\varphi;\Theta;r):\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\Theta\le\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le 2\cos\Theta\right\}.$$

Таким чином,

$$I_0=\iiint\limits_G z\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/4}\left(\int\limits_0^{2\cos\Theta} r\cos\Theta r^2\cdot r^2dr\right)\sin\Theta d\Theta\right)d\varphi=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{2\cos\Theta}\cos\Theta\sin\Theta d\Theta=$$

$$=-\frac{64}{3}\pi\int\limits_0^{\pi/4}\cos^7\Theta d(\cos\Theta)=-\frac{64\pi}{3}\cdot\frac{\cos^8\Theta}{8}\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{8}{3}\pi\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{2}\pi.$$

ВПРАВИ

Розставити межі інтегрування у подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо область D обмежена лініями:

1.1. $y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=4$. **1.2.** $y=x^2,\ y=\frac{1}{2}(3-x),\ y=0$.

1.3. $y=e^x, y=e$, $x=0$. **1.4.** $y=-x^3,\ y=\sqrt{x},\ x=1$.

1.5. $y=x^2,\ y=-\sqrt{x},\ x=1$. **1.6.** $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=x,\ x=0$.

1.7. $y=x^2,\ y=3x+4$. **1.8.** $y=x^2,\ y=2x$. **1.9.** $x^2+y^2=2, y=x^2,\ y>0$.

1.10. $y=\sqrt{x},\ x=4,\ y=0$. **1.11**. $x^2+y^2-2x=0,\ y=x, y>x$. **1.12.** x^2+ $+y^2-2y=0,\ y=x,\ y>x$. **1.13.** $x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

1.14. $x^2+y^2\ge 1, x^2+\ +y^2\le 4,\ x\le 0,\ y\ge 0$. **1.15.** $y=\sin x,\ y=\frac{2}{\pi}x,\ x>0$.

1.16. $y=x,\ y=1,\ x=0$. **1.17.** $y=x,\ y=2-x,\ y=0$.

1.18. $y=2-x,\ y=1,\ x=2$.

Обчислити інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями:

2.1. $f(x,y)=x,\ y=0,\ y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$. **2.2**. $f(x,y)=\frac{y}{x^2},\ y=x^2$, $y=x^3$. **2.3.** $f(x,y)=x^2+1, y=x^2+1,\ y=x+1,\ x=0,\ x=2$.

2.4. $f(x,y)=xy, y=\sqrt{x}$, $y=0,\ x+y=2$.

2.5. $f(x,y)=x+y, x^2+y^2=2,\ y=x^2,\ y\ge 0$. **2.6.** $f(x,y)=x/y$, $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ x=2$. **2.7.** $f(x,y)=y\sin x, y^2=2x,\ y=x$.

Обчислити інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, переходячи до полярних координат:

3.1. $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, D=\{(x;y):\ x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le e^2\}$.

3.2. $f(x,y)=e^{x^2+y^2}, \quad D=\{(x;y):\ x^2+y^2\le R^2\}$.

3.3. $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}, D=\{(x;y):\ x^2+y^2-2x=0,\ y=x,\ y=0\}$.

3.4. $f(x,y)=y(x^2+y^2),\ D=\left\{(x;y):\ x^2+y^2\ge 4,\ \ x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge 0\right\}$.

3.5. $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2},\ D=\left\{(x;y):\ x^2+y^2-2x\le 0,\ \ 0\le y\le x\right\}$.

3.6. $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2},\ D=\left\{(x;y):\ \ x^2+y^2-2x\le 0,\ \ 0\le y\le x\right\}$.

3.7. $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2},\ D=\left\{(x;y):\ x^2+y^2-2x=0,\ \ 0\le y\le x\right\}$.

4. Плоска пластина обмежена параболою $y=x^2$ і прямою $y=x$. Густина маси пластини $\gamma(x,y)=\sqrt{x}y$. Знайти: 1) масу пластини; 2) координати центра мас; 3) моменти інерції відносно осей координат.

5. Плоска пластина обмежена прямими $y=x, x=2$ та гіперболою $y=\dfrac{1}{x}$. Густина маси пластини $\gamma(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$. Знайти: 1) масу пластини; 2) координати центра мас; 3) моменти інерції відносно осей координат.

6. Плоска однорідна пластина обмежена гіперболою $y=\dfrac{6}{x}$ і півколом $y=\sqrt{13-x^2}$. Знайти: 1) масу пластини; 2) координати центра мас.

7. Плоска пластина обмежена кривими $y=x^3,\ y=\sqrt{x}$. Густина маси пластини $\gamma(x,y)=x^2y$. Знайти: 1) масу пластини; 2) координати центра мас; 3) моменти інерції відносно осей координат.

8. Плоска пластина обмежена півколом $y=\sqrt{8-x^2}$ і параболою $y=\dfrac{x^2}{2}$. Густина маси пластини $\gamma(x,y)=xy$. Знайти: 1) масу пластини; 2) координати центра мас.

9.1. Плоска однорідна пластина обмежена кривою $9y^2=4x^3-x^4$. Знайти: 1) масу пластини; 2) координати центра мас.

9.2. Плоска однорідна пластина обмежена параболою $y = x^2 + 1$ і прямими $y = 2x,\ x = 0$. Знайти: 1) масу пластини; 2) координати центра мас; 3) моменти інерції відносно осей координат.

Задачі на поверхневі інтеграли

10.1. Знайти масу, координати центра мас і момент інерції відносно осі Oz верхньої півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, якщо поверхнева густина маси :

1) $\gamma(x, y, z) = z$; 2) $\gamma(x, y, z) = x^2 \cdot y^2$; 3) $\gamma(x, y, z) = z \cdot x^2 \cdot y^2$;

4) $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z$; 5) $\gamma(x, y, z) = \gamma_0$.

10.2. Знайти масу, координати центра мас і момент інерції відносно осі Oz частини верхньої півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,, x \ge 0, y \ge 0$, якщо поверхнева густина маси: 1) $\gamma(x, y, z) = z \cdot x \cdot y$; 2) $\gamma(x, y, z) = z^2 \cdot x^2 \cdot y$.

10.3. Знайти масу, координати центра мас і момент інерції відносно осі Oz частини параболоїда $z = x^2 + y^2,\ z \le 1$, якщо поверхнева густина маси: 1) $\gamma(x, y, z) = \gamma_0$; 2) $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

10.4. Знайти масу, координати центра мас і момент інерції відносно осі Oz частини півконуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яку вирізає циліндр $x^2 + y^2 = x$, якщо поверхнева густина маси: 1) $\gamma(x, y, z) = \gamma_0$; 2) знайти масу, координати центра мас і момент інерції відносно осі Oz частини параболоїда $z = x^2 + y^2,\ z \le 1$, якщо поверхнева густина маси:

1) $\gamma(x, y, z) = \gamma_0$; 2) $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$; 3) $\gamma(x, y, z) = \left(x^2 + y^2\right) \cdot z$.

Задачі на потрійні інтеграли

11. Область G обмежена параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площинами $x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_G x\,dx\,dy\,dz$.

12. Область G обмежена площинами $2x + y + z = 11,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_G x\,dx\,dy\,dz$.

13. Область G обмежена параболоїдом $z = x^2 + y^2$, площинами $x = 0,\ y = 1,\ z = 0$ та циліндром $y = x^2$. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_G ydxdydz$.

14. Знайти об’єм тіла G, яке обмежене площинами $z = 0,\ x + z = 6$ та циліндрами $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x}$.

15. Область G обмежена півкулею $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0$. Обчислити $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz$.

16. Знайти координати центра мас та момент інерції відносно осі Oz тіла, яке обмежене параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, густина маси $\gamma(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$.

17. Знайти масу і момент інерції відносно осі Oz півкулі $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, якщо об’ємна густина маси $\gamma(x, y, z) = y^2 z$.

18. Знайти масу тіла, яке обмежене площинами $x - 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + 2y + 3z = 6$, якщо об’ємна густина маси $\gamma(x, y, z) = x$.

19. Знайти об’єм і масу тіла, яке обмежено параболоїдом $z = 6 - x^2 - y^2$ і півконусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, якщо об’ємна густина маси $\gamma(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$.

20. Розташоване у першому октанті тіло обмежено півциліндром $z = \sqrt{1 - x^2}$ і площинами $y = 2x,\ y = 0,\ z = 0$. Знайти масу тіла і момент інерції відносно осі Oz, якщо об’ємна густина маси $\gamma(x, y, z) = x^3 y^2 z$.

21. Знайти координати центра мас та момент інерції відносно осі Oz тіла G, обмеженого площинами $2z + x = 2,\ y = x,\ y = 2x,\ x = 1,\ z = 0\ (x < 1)$, якщо густина маси $\gamma(x, y, z) = x$.

22. Знайти масу, координати центра мас та момент інерції I_{Oz} відносно осі Oz тіла, яке обмежено півсферою $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ і півконусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, якщо об’ємна густина маси $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

23. Однорідне тіло G є спільною частиною двох куль $x^2+y^2+z^2\le 1$ і $x^2+y^2+z^2\le 2z$. Знайти масу і момент інерції I_{xOy} тіла відносно площини xOy.

24. Знайти момент інерції I_{xOy} однорідного тіла, яке обмежене площиною $x+y+z=1$ і розташоване в першому октанті.

25. Знайти масу, координати центра мас та моменти інерції I_{Ox} I_{Oy}, I_{Oz}, I_{xOy} тіла, яке обмежене параболоїдом $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ та площинами z=1, x=0. y=0 (x>0,y>0), якщо об'ємна густина маси $\gamma(x,y,z)=x^2$.

26. Розв'язати задачу 22 за умови $\gamma(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)z$.

27. Знайти масу, координати центра мас та моменти інерції I_{Oz}, I_{xOy} тіла, яке обмежене сферою $x^2+y^2+z^2=2z$ і півконусом $z=\sqrt{x^2+y^2}, (z>x)$, якщо об'ємна густина маси $\gamma(x,y,z)=z$.

28. Розв'язати задачу 27 за умови $\gamma(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

29. Знайти моменти інерції I_{Oz} та I_{xOy} півкулі $x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$, якщо: 1) $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 2) $\gamma(x,y,z)=\dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 3) $\gamma(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)z$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\displaystyle\int_2^4\left(\int_x^{2x} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_2^4\left(\int_2^{y} f(x,y)\,dx\right)dy+\int_4^8\left(\int_{\frac{y}{2}}^{4} f(x,y)\,dx\right)dy$.

1.2. $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx\right)dy==\int_0^1\left(\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\right)dx+\int_1^3\left(\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy\right)dx$.

1.3. $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{e^x}^{e} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_1^e\left(\int_0^{\ln y} f(x,y)\,dx\right)dy$.

1.4. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right)dx = = \int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{-\sqrt[3]{y}}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy + \int\limits_0^1\left(\int\limits_{y^2}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy$.

1.5. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^2} f(x,y)\,dy\right)dx = = \int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{y^2}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy + \int\limits_0^1\left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy$.

1.6. $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int\limits_{x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,dy\right)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx\right)dy + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left(\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$.

1.7. $\int\limits_{-1}^{4}\left(\int\limits_{x^2}^{3x+4} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy + \int\limits_1^{16}\left(\int\limits_{\frac{y-4}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$.

1.8. $\int\limits_0^2\left(\int\limits_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_0^4\left(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$. **1.9.** $\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx =$

$= \int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy$.

1.10. $\int\limits_0^4\left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_0^2\left(\int\limits_{y^2}^{4} f(x,y)\,dx\right)dy$.

1.11. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi$.

1.12. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx\right)dy + \int\limits_1^2\left(\int\limits_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy =$

$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{2\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi$. **1.13.** $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx =$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi$. **1.14.** $\int\limits_{-2}^{-1}\left(\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx + \int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx =$

$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int\limits_1^2 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi$. **1.15.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}y} f(x,y)\,dx\right)dy$.

1.16. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1 f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^y f(x,y)\,dx\right)dy$. **1.17.** $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x f(x,y)\,dy\right)dx +$

$$+\int_1^2\left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_y^{2-y} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

1.18. $\int_1^2\left(\int_{2-x}^{2} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{2-y}^{2} f(x,y)\,dx\right)dy$.

2.1 π. **2.2.** $\frac{1}{15}$. **2.3.** $11\frac{11}{15}$. **2.4.** $\frac{1}{3}$. **2.5.** $\frac{22}{15}$. **2.6.** $2\left(\ln 4-\frac{3}{4}\right)$.
2.7. $1-(\sin 2+\cos 2)$.

3.1. 2π. **3.2.** $\pi\left(e^{R^2}-1\right)$. **3.3.** $\frac{3\pi+8}{16}$. **3.4.** $\frac{422}{5}$. **3.5.** $\frac{\pi}{16}$. **3.6.** $\frac{1}{2}$. **3.7.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

4. 1) $\frac{4}{77}$; 2) $C\left(\frac{77}{117};\frac{77}{135}\right)$; 3) $I_{Ox}=\frac{4}{209},I_{Oy}=\frac{4}{165}$.

5. 1) $2\left(\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}\right)$; 2) $C\left(\frac{4\ln 2-\frac{15}{16}}{\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}};\frac{\frac{9}{8}}{\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}}\right)$; 3) $I_{Ox}=\frac{13}{5},I_{Oy}=\frac{2}{5}\left(32\ln 2-\frac{31}{5}\right)$.

6. 1) $\gamma\left(\frac{13}{2}\arcsin\frac{5}{13}-6\ln\frac{3}{2}\right)$; 2) $C\left(\frac{1}{3\left(\frac{13}{2}\arcsin\frac{5}{13}-6\ln\frac{3}{2}\right)};\frac{1}{3\left(\frac{13}{2}\arcsin\frac{5}{13}-6\ln\frac{3}{2}\right)}\right)$.

7. 1) $\frac{5}{72}$; 2) $C\left(\frac{18}{25};\frac{2}{3}\right)$; 3) $I_{Ox}=\frac{1}{30},\quad I_{Oy}=\frac{5}{132}$.

8. 1) $\frac{14}{3}$; 2) $C\left(\frac{272}{245};\frac{2}{35}\left(32\sqrt{2}-13\right)\right)$.

9. 1 1) $\gamma\frac{8\pi}{3}$; 2) $C\left(\frac{5}{2};0\right)$. **9.2** 1) $\frac{1}{3}\gamma$; 2) $C\left(\frac{1}{4};\frac{4}{5}\right)$; 3) $I_{Ox}=\frac{26}{105}\gamma,\ I_{Oy}=\frac{1}{30}\gamma$.

10.1 1) $\pi, C\left(0;0;\frac{2}{3}\right),\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{2\pi}{15}$, $C\left(0;0;\frac{5}{16}\right),\frac{4\pi}{35}$; 3) $\frac{\pi}{24},C\left(0;0;\frac{16}{35}\right),\frac{\pi}{32}$;
4) $\frac{2\pi}{3},C\left(0;0;\frac{3\pi}{16}\right),\frac{2\pi}{5}$; 5) $2\pi\gamma_0$, $C\left(0;0;\frac{1}{2}\right),\frac{4\pi}{3}\cdot\gamma_0$.
10.2 1) $\frac{1}{8}$, $C\left(\frac{8}{15};\frac{8}{15};\frac{8}{15}\right),\frac{1}{12}$; 2) $\frac{\pi}{96},C\left(\frac{64}{35\pi};\frac{16}{35};\frac{64}{35\pi}\right),\frac{5\pi}{768}$.

10.3 1) $\frac{\pi\gamma_0}{6}(5\sqrt{5}-1), C\left(0;0;\frac{25\sqrt{5}+1}{10\cdot(5\sqrt{5}-1)}\right), \frac{\pi\gamma_0}{12}\left(5\sqrt{5}+\frac{1}{5}\right)$;

2) $\frac{\pi}{12}\left(5\sqrt{5}+\frac{1}{5}\right)$, $C\left(0;0;\frac{125\sqrt{5}-1}{7\cdot(25\sqrt{5}+1)}\approx 0.7\right), \frac{\pi}{420}\cdot(125\sqrt{5}-1)$.

10.4 1) $\frac{\sqrt{2}\pi\gamma_0}{4}$, $C\left(\frac{1}{2};0;\frac{16}{9\pi}\right), \frac{3\sqrt{2}\pi\gamma_0}{32}$; 2) $\frac{3\sqrt{2}\pi}{32}$, $C\left(\frac{2}{3};0;\frac{512}{225\pi}\right), \frac{5\sqrt{2}\pi}{96}$; 3) $\frac{16\sqrt{2}}{75}$, $C\left(\frac{5}{7};0;\frac{375\pi}{1536}\right), \frac{32\sqrt{2}}{245}$.

11. $\frac{1}{15}$**. 12.** $\frac{1}{96}$**. 13.** $\frac{20}{63}$**. 14.** $\frac{48\sqrt{6}}{5}\text{од.}^3$**. 15.** $\frac{4\pi R^5}{15}$**. 16.** $\left(0;0;\frac{24}{35}\right); I_{Oz}=\frac{\pi}{40}$**.**
17. $M=\frac{\pi}{24}$, $I_{Oz}=\frac{\pi}{48}$**. 18.** 9. **19.** $V=\frac{32}{3}\pi, M=31\frac{3}{35}\pi$**. 20.** $M=\frac{8}{189}$, $I_{Oz}=\frac{136}{1485}$**.**
21. $\left(\frac{18}{25};\frac{27}{25};\frac{8}{25}\right)$**,** $I_{Oz}=\frac{7}{18}$**. 22.** $\frac{\pi}{30}\left(8-5\sqrt{2}\right)$**,** $\left(0;0;\frac{5\left(8+5\sqrt{2}\right)}{112}\right)$**,** $I_{Oz}=$
$=\frac{2\pi}{105}\left(8-\frac{43\sqrt{2}}{8}\right)$**. 23.** $M=\frac{5\pi}{12}\gamma$**,** $I_{xOy}=\frac{59\pi}{480}\gamma$. **24.** $\frac{\gamma}{60}$**. 25.** $M=\frac{\pi}{12}$, $C\left(\frac{64\sqrt{2}}{35}\pi; \frac{32\sqrt{2}}{35}\pi; \frac{3}{4}\right)$, $I_{Ox}=\frac{17\pi}{240}$, $I_{Oy}=\frac{9\pi}{80}$, $I_{Oz}=\frac{\pi}{12}, I_{xOy}=\frac{\pi}{20}$. **26.** $\frac{\pi}{48}$**,** $\left(0;0;\frac{32}{35}\left(2-\frac{7\sqrt{2}}{8}\right)\right)$**,**
$I_{Oz}=\frac{\pi}{192}$**. 27** $\frac{7\pi}{6}$**,** $\left(0;0;\frac{9}{7}\right)$**,** $I_{Oz}=\frac{13\pi}{30}$**,** $I_{xOy}=\frac{31\pi}{15}$. **28.** $\frac{16\pi}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$**,**
$\left(0;0;\frac{15\left(16-\sqrt{2}\right)}{28\left(8-\sqrt{2}\right)}\right)$**,** $I_{Oz}=\frac{2\pi}{315}\left(64-11\sqrt{2}\right)$**,** $I_{xOy}=\frac{2\pi\left(32-\sqrt{2}\right)}{45}$. **29.** 1) $I_{Oz}=\frac{2\pi R^6}{9}$**,**
$I_{xOy}=\frac{\pi R^6}{9}$; 2) $I_{Oz}=\frac{2\pi R^6}{45}$**,** $I_{xOy}=\frac{\pi R^6}{15}$; 3) $I_{Oz}=\frac{16\pi R^9}{945}$**,** $I_{xOy}=\frac{4\pi R^9}{315}$.

Додаток

Деякі співвідношення і формули елементарної математики

АЛГЕБРА

Означення та тотожності:

1) $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$;

2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$;

4) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$;

5) $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \textit{ if } a \ge 0, \\ -a, \textit{ if } a < 0; \end{cases}$

6) $a^0 \overset{(озн)}{=} 1$, якщо $a \ne 0$; 7) $a^{\frac{m}{n}} \overset{(озн)}{=} \sqrt[n]{a^m}$, якщо $a \ge 0$, $m, n \in N$;

8) $a^{-p} \overset{(озн)}{=} \dfrac{1}{a^p}$, якщо $a > 0$, $p > 0$;

9) $a^{\log_a M} \overset{(озн)}{=} M$, якщо $M > 0$, $a > 0$, $a \ne 1$.

Рівняння:

1) $ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \ne 0) \ \Rightarrow \ x_{1,\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

2) Рівняння $f(x)\cdot g(x) = 0 \ \ (x \in D)$ рівнозначно сукупності двох рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{array}\right. \ (x \in D)$.

Нерівності:

а) $|x - x_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0 \ \Leftrightarrow \ x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$;

б) $\log_a x > b \ \Leftrightarrow \ x > a^b \ \ (a > 1)$;

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \ \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x) > 0$.

Формули:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $\left(a^p\right)^q = a^{p\cdot q} \ (a,\, b > 0)$; $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$;

2) $\log_a (A \cdot B) = \log_a |A| + \log_a |B|$; 3) $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a |A| - \log_a |B|$;

4) $\log_a A^2 = 2\log_a |A|$; 5) $\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$ $\left(\begin{matrix} a > 0,\ a \neq 1, \\ b > 0,\ b \neq 1 \end{matrix}\right)$; $\lg e \cong 0.43429...$, $\ln 10 \cong 2.30258...$;

6) $a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... = \dfrac{a}{1-q}$, якщо $q^2 < 1$;

7) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

8) $a^2 = |a|^2$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$;

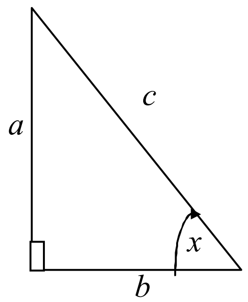
9) $(x+a)^n = x^n + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot a + C_n^2 \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + ... + C_n^{n-1} \cdot x \cdot a^{n-1} + a^n$;

$C_n^k = C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\quad (0 \leq k \leq n;\ k, n \in N)$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$, $0! = 1$.

Площа кругового сектора з центральним кутом α: $S = {r^2\alpha}/{2}$.

ТРИГОНОМЕТРІЯ

Означення та тотожності:



$\sin x = \dfrac{a}{c}$,

$\cos x = \dfrac{b}{c}$,

$\operatorname{tg} x = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{b}{a}$.

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0)$;

3) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad (\sin x \neq 0)$.

Формули:

1) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$; 2) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$;

3) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad \left(\begin{matrix} \cos(x \pm y) \neq 0, \\ \cos x \neq 0,\ \cos y \neq 0 \end{matrix}\right)$;

4) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad (\cos x \neq 0)$;

5) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad (\cos x \neq 0)$;

6) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad (\cos x \neq 0,\ \cos 2x \neq 0)$;

7) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$; 8) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$;

9) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0)$; 10) $\sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}\big(\cos(x - y) - \cos(x + y)\big)$;

11) $\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\big(\cos(x - y) + \cos(x + y)\big)$;

12) $\sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\big(\sin(x + y) + \sin(x - y)\big)$;

13) $\sin x \pm s\,\mathrm{in}\, y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cos \dfrac{x \mp y}{2}$;

14) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$; 15) $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{x - y}{2}$.

Формули зведення:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$; 2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$;

3) $\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$; 4) $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$;

5) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x$; 6) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \sin x$;

7) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x$; 8) $\operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x$; 9) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x$.

Рівняння:

1) $\sin x = a\left(|a| \le 1\right) \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi \quad (k \in Z)$, де $\arcsin a$ – єдиний розв'язок початкового рівняння, що належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\arcsin a = -\arcsin(-a)\right)$. Тут і надалі Z позначає множину цілих чисел.

Часткові випадки:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$; $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $(k \in Z)$; $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

2) $\cos x = a\left(|a| \le 1\right) \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi k \quad (k \in Z)$, де $\arccos a$ – єдиний розв'язок початкового рівняння, що належить проміжку $[0; \pi]$ $\left(\arccos(-a) = \pi - \arccos a\right)$.

Часткові випадки:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$, $(k \in Z)$; $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k$.

3) $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi \quad (k \in Z)$, де $\operatorname{arctg} a$ – єдиний розв'язок початкового рівняння, що належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a\right)$.

Значення тригонометричних функцій для деяких значень аргументу

$f(x)$ \ x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	0	Не існує
$\operatorname{ctg} x$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не існує	0

Значення обернених тригонометричних функцій для деяких значень аргументу

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\mathbf{1}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\mathrm{arctg}\,x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Гіперболічні функції:

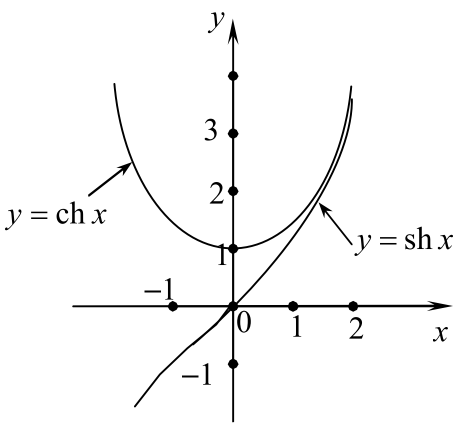
$\mathrm{sh}\,x \overset{(озн)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}\,x \overset{(озн)}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}\,x$; $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$;

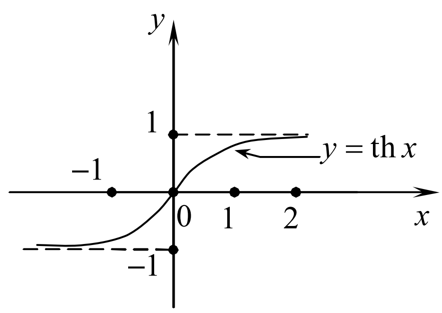
$\mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$; $\mathrm{cth}\,x = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$; $\mathrm{sh}\,2x = 2\mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,x$; $\mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$;

$(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$, $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$; $(\mathrm{th}\,x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, $(\mathrm{cth}\,x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

$\int \mathrm{ch}\,x dx = \mathrm{sh}\,x + C$, $\int \mathrm{sh}\,x dx = \mathrm{ch}\,x + C$.

Графіки гіперболічних функцій





Бібліографічний список

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного пнрнменного. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
3. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2002. – 454 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 467 с.
5. Вища математика. Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик та ін. – К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
6. Могульский Е.З. Начальные разделы курса высшей математики. – Харьков: ХВУ, 1997. – 218 с.
7. Могульський Е.З., Храбустовський В.І., Бородай Г.П. Вступ до лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навч. посібник. – Харків: УкрДАЗТ, 2007. – 128 с.
8. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. – К.: Техніка, 2000. Ч.1. – 592 с.,Ч.2. –792 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 456 с., Т.2. – 576 с.
10. Сборник задач по математике для ВТУЗов / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – 461 с.
11. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальний посібник

Могульський Євген Зіновйович,
Бородай Геннадій Прокопович,
Дрогаченко Анатолій Олександрович
та ін.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Відповідальний за випуск Бородай Г.П.

Редактор Третьякова К.А.

Підписано до друку 21.01.09 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 9,0. Тираж 300. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Харків 2011