

**Э.Д. Чихладзе, М.А. Веревичева, Е.И. Галагурия,
М.А. Ковалев, Л.Б. Кравцев, Е.В. Опанасенко, А.Н. Петров**

**ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ,
ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Харьков 2010



**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И СВЯЗИ
УКРАИНЫ**

**УКРАИНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
АКАДЕМИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО
ТРАНСПОРТА**

**Э.Д. Чихладзе, М.А. Веревичева, Е.И. Галагурия,
М.А. Ковалев, Л.Б. Кравцов, Е.В. Опанасенко, А.Н. Петров**

**ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ,
ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**Под редакцией заслуженного работника образования,
доктора технических наук, профессора Э.Д. Чихладзе**

Харьков 2010

УДК 539.3

Основы линейной теории упругости, пластичности и ползучести: Учеб. пособие / Э.Д. Чихладзе, М.А. Веревицева, Е.И. Галагурия и др. – Харьков: УкрГАЗТ, 2010. – 149 с.

В учебном пособии изложены основы линейной теории упругости, пластичности и ползучести и их применение к решению одномерных, плоских и трехмерных задач. В нем последовательно отражены основные понятия и результаты. Изложение отличается полнотой, доступностью и ясностью.

Ил. 81, табл. 8, библиогр.: 23 назв.

Под редакцией заслуженного работника образования,
доктора технических наук, профессора Э.Д. Чихладзе

Рецензенты:

профессора М.И. Мироненко (ХГТУСА),

В.П. Шпачук (ХНАГХ)

ISBN 978-966-2033-24-3

© Украинская государственная академия
железнодорожного транспорта,

Э.Д. Чихладзе, М.А. Веревицева, Е.И. Галагурия,
М.А. Ковалев, Л.Б. Кравцов, Е.В. Опанасенко, А.Н. Петров

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ответственный за выпуск Веревицева М.А.

Редактор Ибрагимова Н.В.

Подписано к печати 06.04.10 г.

Формат бумаги 60x84 1/16. Бумага писчая.

Усл.-печ.л 9,5. Уч.-изд.л. 9,75.

Заказ № Тираж 100. Цена

Издательство УкрГАЗТ, свидетельство ДК № 2874 от 12.06.2007 г.

Типография УкрГАЗТ,
61050, Харьков - 50, пл. Фейербаха, 7

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Раздел 1. Напряжения и деформации	5
1.1. Составляющие напряжения	5
1.1.1. Зависимости между напряжениями и усилиями ...	6
1.1.2. Обозначения напряжений, правило знаков	6
1.1.3. Закон парности касательных напряжений	7
1.1.4. Тензор напряжений	8
1.2. Составляющие деформации	8
1.2.1. Тензор деформаций	10
1.2.2. Зависимости между составляющими напряжения и составляющими деформации (физический закон)	11
Раздел 2. Основные уравнения теории упругости	16
2.1. Уравнения равновесия	16
2.2. Уравнения на границе	17
2.2.1. Исследование напряжений в трех измерениях	18
2.3. Уравнения совместности	20
2.3.1. Дифференциальные уравнения относительно напряжений (уравнения Бельтрами-Митчелла)	20
..	
2.3.2. Уравнения равновесия в форме Навье	21
Раздел 3. Простейшие задачи теории упругости	23
3.1. Определение перемещений при растяжении и сжатии	23
3.2. Растяжение стержня под действием собственного веса	26
3.3. Кручение круглых валов постоянного сечения	28
Раздел 4. Плоские (двумерные) задачи теории упругости	30
4.1. Плоское деформированное состояние	30
4.2. Плоское напряженное состояние	32
4.3. Функция напряжений	33
4.4. Решение дифференциального уравнения плоской задачи при помощи полиномов	34
...	
4.5. Изгиб консольной балки	37
4.6. Плоская задача в полярных координатах	39
4.6.1. Общие уравнения в полярных координатах	39
4.6.2. Деформации в полярных координатах	42
4.6.3. Напряженно-деформированное состояние трубы при действии равномерного давления	44

4.6.4.	Напряженное состояние пластинки с малым круглым отверстием	47
	
4.6.5.	Напряженное состояние бесконечно большой пластинки единичной толщины при действии на прямолинейный край сосредоточенной силы	49
4.7.	Изгиб пластин	54
4.7.1.	Общие положения	54
4.7.2.	Уравнения равновесия	57
4.7.3.	Изгиб эллиптической пластинки, защемленной по контуру	58
4.7.4.	Изгиб круглой пластинки	60
4.7.5.	Решение задач на изгиб прямоугольных пластинок	61
4.7.6.	Решение дифференциального уравнения для пластинки, две противоположные грани которой шарнирно оперты, а две другие закреплены произвольным образом	64
	
4.7.7.	Решение дифференциального уравнения для симметричной пластинки, нагруженной симметричным нагружением	66
	
Раздел 5.	Применение численных методов для решения задач теории упругости	70
5.1.	Метод конечных разностей	70
5.1.1.	Функция W зависит от переменной X	70
5.1.2.	Функция W зависит от переменных X и Y ...	71
	
5.1.3.	Граничные условия	73
5.1.4.	Шарнирное опирание пластинки по линии $x=0$..	73
5.1.5.	Защемленный край пластинки при $x=0$	74
5.1.6.	Свободный край пластинки при $x=0$	74
5.1.7.	Составление системы разностных уравнений	75
5.1.8.	Примеры составления системы линейных уравнений	76
	
5.1.8.1.	Система уравнений для пластинки с защемленным верхним краем, свободным нижним и шарнирами по боковым сторонам ..	76
	

5.1.8.2.	Система уравнений для пластинки с шарнирным опиранием боковых и верхнего краев и свободным нижним краем	80
5.1.8.3.	Система уравнений для пластинки с шарнирным опиранием боковых и нижнего краев и защемленным верхним краем	81
5.1.8.4.	Система уравнений для пластинки с шарнирным опиранием левого и верхнего краев, свободным нижним краем и защемленным правым	83
5.2.	Матричный метод перемещений и метод конечных элементов стержневых систем	86
5.2.1.	Метод перемещений в матричной форме	87
5.2.1.1.	Общие положения и предпосылки	87
5.2.1.2.	Уравнения равновесия. Статическая матрица	90
5.2.1.3.	Принцип двойственности статических и геометрических уравнений	91
5.2.1.4.	Физические уравнения. Матрица жесткости системы	92
5.2.1.5.	Разрешающая система уравнений	95
5.2.2.	Общие положения метода конечных элементов ...	98
5.2.2.1.	Подготовка расчета. Ввод исходных данных	101
5.2.2.2.	Силовое воздействие	102
5.2.2.3.	Тепловое воздействие	102
5.2.2.4.	Осадка опор	103
5.2.2.5.	Матрицы жесткости типовых стержневых элементов	104
5.2.2.6.	Формирование матрицы жесткости конструкции	108
5.2.2.7.	Определение перемещений и усилий в элементах	110
5.2.2.8.	Матрицы жесткости стержневых элементов с использованием интерполяционных полиномов и функций формы	111
5.2.2.8.1.	Матрица жесткости в локальной системе координат	111
	..	

5.2.2.8.2.	Матрица жесткости в глобальной системе координат	118
Раздел 6.	Основные сведения о пластичности материалов	123
6.1.	Общие положения	123
6.2.	Идеализированные диаграммы пластического поведения материала	124
6.3.	Условия пластичности	125
6.3.1.	Критерий текучести Треска	125
6.3.2.	Критерий текучести Мизеса	126
6.4.	Соотношения между напряжениями и деформациями	127
6.5.	Основные уравнения теории пластичности (теория малых упруго-пластических деформаций)	129
Раздел 7.	Ползучесть материалов	131
7.1.	Общие положения	131
7.2.	Зависимости между напряжениями и деформациями при линейной ползучести	133
7.3.	Релаксация напряжений	137
7.4.	Принцип Вольтерра	140
	Библиографический список	142
	Приложение 1. Формулы для определения коэффициентов $A_n, B_n, C_n, \ddot{A}_n$ в общем несимметричном случае нагружения	143
	Приложение 2. Формулы для определения коэффициентов A_n, D_n в случае симметричной пластинки и симметричного нагружения	145

ВВЕДЕНИЕ

Книга написана на основании использования опыта преподавания курса студентам дорожно-строительной специальности Харьковского национального автомобильно-дорожного университета и строительной специальности Украинской государственной академии железнодорожного транспорта.

Современная механика представляет собой комплекс дисциплин, применяемых для расчета сооружений на прочность, жесткость, устойчивость. В представленном учебном пособии рассматриваются основы таких научных дисциплин, как теория упругости, теория пластичности, теория ползучести.

Теория упругости. Упругое поведение материалов характеризуется тем, что деформации остаются конечными, а при разгрузке полностью исчезают. Теория упругости лежит в основе многих расчетных и экспериментальных методов механики деформируемого твердого тела. При этом главной задачей теории упругости является определение возникающих внутренних сил, которые характеризуются напряжениями, а также деформациями.

В излагаемой здесь теории упругости мы ограничимся в соответствии с большинством практических приложений малыми (бесконечно малыми) деформациями, поведение материала будем описывать законом Гука. Преимущество такого подхода состоит прежде всего в том, что математическое описание существенно упрощается благодаря геометрической линейности. Характерным является линейность всех уравнений относительно искомых величин и их производных. Таким образом, в книге рассматривается геометрически и физически линейная теория изотропного упругого тела, которая и в настоящее время лежит в основе многих приложений.

Теория пластичности – наука, устанавливающая общие законы образования пластических деформаций и возникающих на всех стадиях пластического деформирования напряжений. Основные задачи теории пластичности состоят в математической формулировке соотношений между напряжениями и деформациями, соответствующих феноменологическому описанию пластических деформаций, и в установлении количественных критериев наступления пластичности. В книге основные понятия теории пластичности вводятся непосредственным рассмотрением диаграммы зависимостей напряжений от деформаций при испытании материала на простое одноосное растяжение (или сжатие). Предполагается, что пластические деформации не зависят от времени.

Теория ползучести. Как следует из изложенного выше, в теории упругости и пластичности напряженное и деформированное состояние тела вполне определяется нагрузкой, приложенной к этому телу, и

температурой окружающей среды. Если в нагрузке и температуре среды не предполагается никаких изменений, то и не будет изменений напряженного и деформированного состояния тела. В действительности это не так, и деформация может нарастать во времени. Изменение во времени деформаций и напряжений, возникающих в результате начального нагружения тела, называют ползучестью.

Ползучесть происходит в случаях, когда при нагружении возникают пластические (остаточные) деформации, а также когда вслед за нагружением наблюдаются только упругие деформации. Поэтому в теории ползучести по мере возможности используются методы как теории упругости, так и теории пластичности. В представленном учебном пособии рассмотрена теория, в основе которой лежит представление об упруго-вязком или пластически вязком теле.

Авторы пользуются случаем выразить свою признательность всем, оказавшим им помощь. При работе над рукописью особую благодарность они приносят рецензентам д-ру физ.-мат. наук, проф. Мироненко Н.И., д-ру техн. наук, проф. Шпачуку В.П., д-ру техн. наук, проф. Шкелеву Л.Т., д-ру техн. наук, проф. Бабенко А.Е. и д-ру техн. наук, проф. Бобир М.И. за важные для качества книги научные и методические указания. В работе над рукописью и корректурами неоценимую помощь оказала инж. Павленко Р.Г. Считаю своим долгом принести также ей свою сердечную благодарность.

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

1.1. Составляющие напряжения

Внутренние усилия действуют во всех точках сечения (рис. 1.1) и представляют собой в общем случае неравномерно распределенную нагрузку, характеризующуюся в каждой точке числовым значением и направлением вектора интенсивности dR .

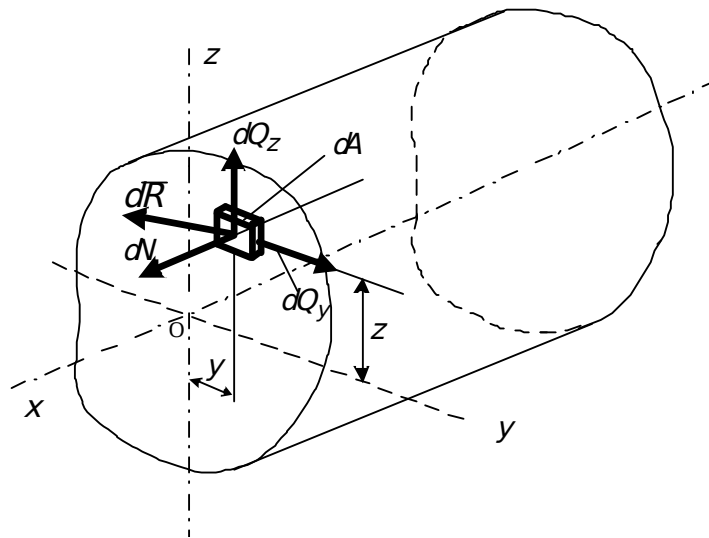


Рис. 1.1. Нормальные и касательные напряжения в точке

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади сечения dA . В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Равнодействующая их dR будет проходить через центр тяжести элемента dA . Проекциями dR на оси X, Y, Z будут элементарная продольная сила dN и элементарные поперечные силы dQ_y и dQ_z . Разделив величины dN, dQ_y, dQ_z на площадь dA , получим величины продольных и поперечных сил, приходящихся на единицу площади:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}. \quad (1.1)$$

Эти величины называют напряжениями в точке (X, Y, Z) сечения стержня, причем σ – нормальное напряжение, τ – касательное.

Таким образом, напряжением называется внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения.

1.1.1. Зависимости между напряжениями и усилиями

Установим общие зависимости между σ и τ , с одной стороны, и N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , M_x – с другой:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA, \\
 Q_y &= \int_A \tau_y dA, \\
 Q_z &= \int_A \tau_z dA, \\
 M_y &= \int_A \sigma z dA, \\
 M_z &= \int_A \sigma y dA, \\
 M_x &= \int_A (\tau_y z - \tau_z y) dA.
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Полученные уравнения будем называть статическими уравнениями или интегральными уравнениями равновесия.

1.1.2. Обозначения напряжений, правило знаков

Если взять очень малый элемент объема в виде куба вблизи точки O (рис. 1.1) со сторонами, параллельными осям координат, то обозначения для составляющих напряжения, действующих по граням этого элемента, и положительные направления их будем принимать такими, как показано на рис. 1.2. Если размеры рассматриваемого параллелепипеда бесконечно малы, то одноименные и параллельные напряжения для каждой пары параллельных граней разнятся между собой на бесконечно малую величину, т. е. практически одинаковы, что и показано на рис. 1.2.

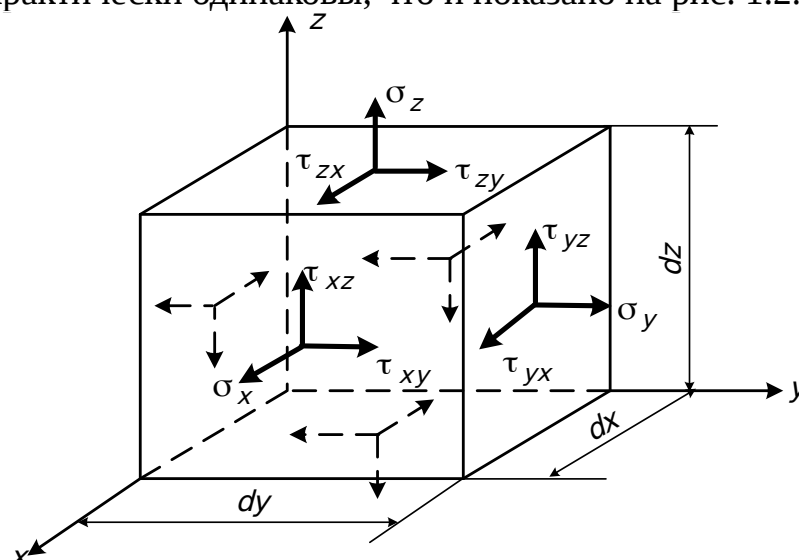


Рис. 1.2. Нормальные и касательные напряжения в элементе объема тела

Нормальные напряжения обозначены буквой σ с индексом, соответствующим обозначению оси: σ_x , σ_y , σ_z . Нормальное напряжение положительно, когда оно вызывает растяжение, и отрицательно, когда оно

вызывает сжатие. Касательные напряжения обозначены буквой τ с двумя индексами. Первый индекс обозначает направление нормали к рассматриваемой площадке, второй индекс – направление составляющей напряжений: τ_{yx} , τ_{xy} , τ_{xz} и т. д. За положительные направления составляющих касательного напряжения, действующего на любой грани элементарного кубика, принимают направления осей координат, если растягивающее напряжение по той же грани имеет направление, совпадающее с положительным направлением соответствующей оси. Если растягивающее напряжение имеет противоположное положительной оси направление, то за положительное направление составляющих касательного напряжения следует взять обратное направление оси.

1.1.3. Закон парности касательных напряжений

Из условия равновесия, взяв сумму моментов сил относительно оси X (рис. 1.2), получим

$$\tau_{zy}dx dy dz = \tau_{yz}dx dz dy.$$

Отсюда $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Аналогично, взяв момент сил относительно осей Z и Y , найдем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Равенства

$$\tau_{zy} = \tau_{yz},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tag{1.3}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

носят название закона парности (взаимности) касательных напряжений и формулируются так:

по двум взаимно перпендикулярным площадкам составляющие касательного напряжения, перпендикулярные линии пересечения этих площадок, равны между собой.

1.1.4. Тензор напряжений

Напряжения, действующие на элемент объема (рис. 1.2), образуют так называемый тензор напряжений

$$\tau_{\alpha} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Здесь первый столбец состоит из компонент напряжений, действующих на площадках, нормальных к оси X , второй – к оси Y , третий – к оси Z . Если задан тензор напряжений, то напряженное состояние в точке определено.

Тензор напряжений, отнесенный к главным осям, имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Так как материалы обладают, как правило, различными механическими свойствами по отношению к равномерному всестороннему растяжению и к сдвигу, то выгодно представить тензор напряжений в виде суммы

$$T_{\sigma} = \sigma T_1 + D_{\sigma}, \quad (1.6)$$

где $\sigma T_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$ – шаровой тензор, соответствующий среднему напряжению в точке $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$;

$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix}$ – тензор, характеризующий формоизменение в окрестности той же точки и называемый девиатором напряжения.

1.2. Составляющие деформации

При исследовании деформаций упругого тела мы будем исходить из допущения, что налицо имеется достаточное число связей для того, чтобы предотвратить его движение как свободного твердого тела. Так что никакие перемещения частиц невозможны без деформации его. Будем рассматривать только малые деформации, которые обычно встречаются в инженерных сооружениях. Вектор перемещений деформированного тела имеет проекции U , V , W соответственно на оси X , Y , Z . Предположим, что эти составляющие перемещений непрерывно изменяются по объему тела.

Рассмотрим бесконечно малый элемент dx , dy , dz упругого тела (рис. 1.3).

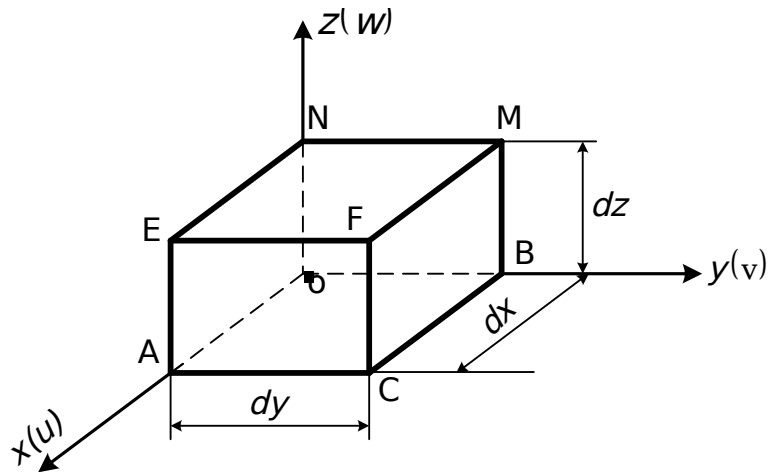


Рис. 1.3. К выводу зависимостей между линейными деформациями и перемещениями

Если тело подвергается деформации, то перемещение в направлении оси X бесконечно близкой точки A равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Поэтому приращение длины элемента OA вследствие деформации равно $\frac{\partial u}{\partial x} dx$. Следовательно, относительное удлинение в направлении оси X равно

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.7)$$

Аналогично

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.9)$$

Помимо линейных деформаций ε_x , ε_y , ε_z , тело испытывает и угловые деформации. Рассмотрим искажение угла между элементарными отрезками OA и OB (рис. 1.4).

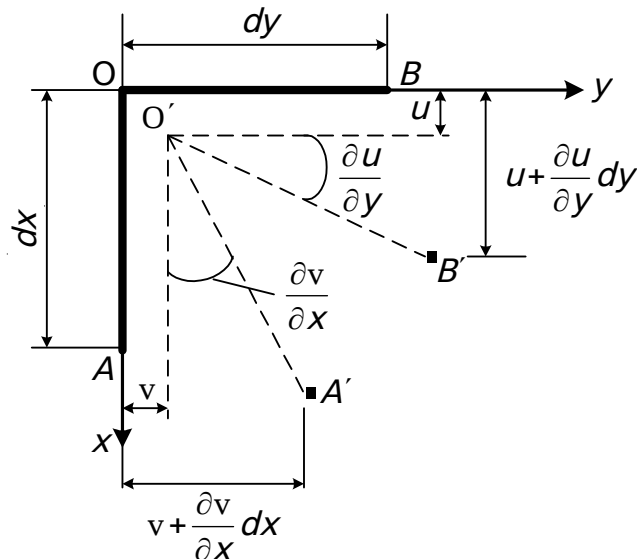


Рис. 1.4. К выводу зависимостей между угловыми деформациями и перемещениями

Перемещения точки А в направлении оси Y и точки В в направлении оси X будут соответственно $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ и $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$. Вследствие этих перемещений новое направление $O'A'$ будет составлять со своим первоначальным направлением угол $\partial v / \partial x$. Таким же образом, направление $O'B'$ будет составлять с направлением OB малый угол $\partial u / \partial y$. Отсюда следует, что первоначально прямой угол AOB между элементами OA и OB уменьшится на величину

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.10)$$

Деформации сдвига между плоскостями XOY и XOZ , XOY и YOZ будут соответственно

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.11)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.12)$$

1.2.1. Тензор деформаций

Матрица компонент тензора малых деформаций имеет вид

$$\tau_{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0,5\gamma_{yx} & 0,5\gamma_{zx} \\ 0,5\gamma_{xy} & \epsilon_y & 0,5\gamma_{zy} \\ 0,5\gamma_{xz} & 0,5\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

причем следует особо подчеркнуть, что компонентами тензора являются половины изменений углов γ_{xy} и т. д. В этом случае между теорией напряжений и деформаций существует полная аналогия. Тензор деформаций (1.13) может быть представлен по аналогии с тензором напряжений в форме суммы двух тензоров – шарового, характеризующего изменение объема тела

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ – средняя деформация, и девиатора, характеризующего изменение его формы,

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & 0,5\gamma_{xy} & 0,5\gamma_{xz} \\ 0,5\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & 0,5\gamma_{yz} \\ 0,5\gamma_{zx} & 0,5\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

1.2.2. Зависимости между составляющими напряжения и составляющими деформации (физический закон)

Экспериментально установлено, что для большинства материалов при малых деформациях в упругой стадии связь между деформациями и напряжениями может быть принята линейной. Эта связь была впервые указана Гуком для растяжения и сжатия и носит название закона Гука.

Представим элементарный прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям координат, подвергающийся действию нормального напряжения σ_x , равномерно распределенного по двум противоположным граням (рис. 1.5).

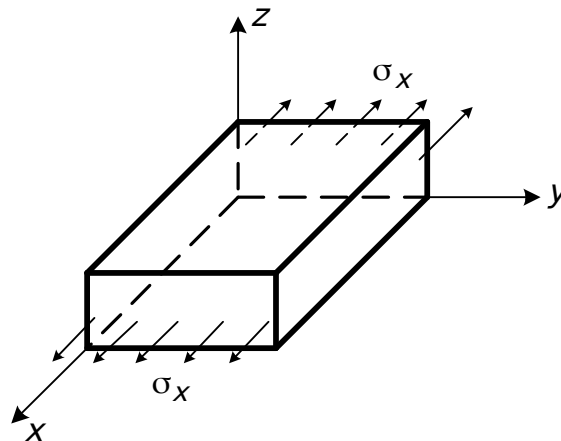


Рис. 1.5. К выводу обобщенного закона Гука, направление X

Опыты показывают, что в случае изотропного материала эти нормальные напряжения не вызывают изменения углов элемента.

Увеличение размеров элемента в направлении оси X на $\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$

сопровождается поперечным сужением $\varepsilon''_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$ и $\varepsilon''_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$.

Воспользуемся принципом независимости действия сил и рассмотрим линейные деформации, обусловленные нормальными напряжениями σ_y и σ_z (рис. 1.6).

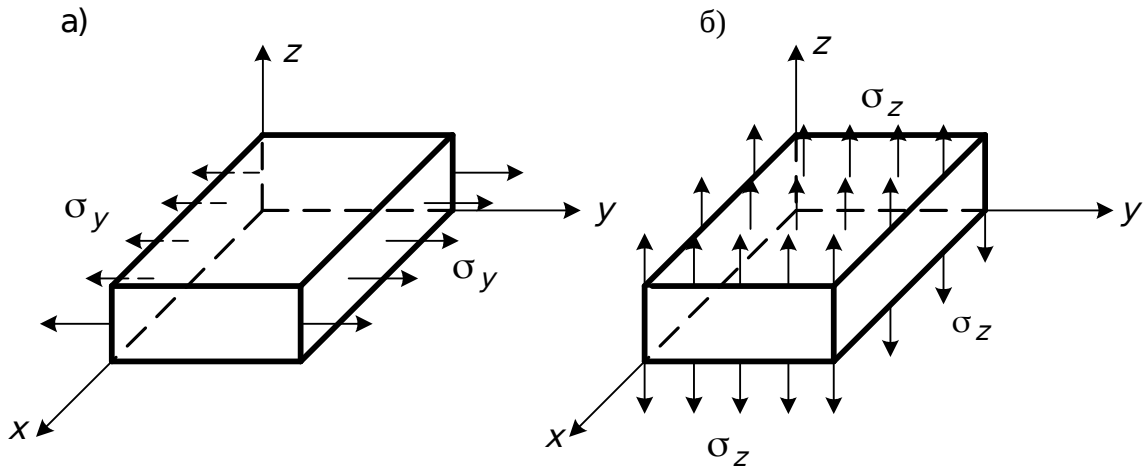


Рис. 1.6. К выводу обобщенного закона Гука, направления Y, Z

В результате действия нормальных напряжений σ_y (рис. 1.6, а) элемент удлиняется в направлении оси Y на величину $\epsilon'_y = \sigma_y / E$ и укорачивается в направлении осей X и Z на $\epsilon''_x = -\nu \sigma_y / E$, $\epsilon''_z = -\nu \sigma_y / E$.

В результате действия нормальных напряжений σ_z (рис. 1.6, б) происходит удлинение в направлении оси Z $\epsilon'_z = \sigma_z / E$ и укорочение в направлении осей X и Y – $\epsilon''_x = -\nu \sigma_z / E$, $\epsilon''_y = -\nu \sigma_z / E$. Складывая деформации, вызванные напряжениями σ_x , σ_y , σ_z , получим

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Полученные выражения (1.16) являются аналитическими зависимостями обобщенного закона Гука для изотропного тела. Из этих формул видно, что зависимости между напряжениями и деформациями полностью определяются двумя физическими величинами, характеризующими свойства материалов, – модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , которые определяются экспериментально. Теперь рассмотрим действие касательных напряжений (рис. 1.7).

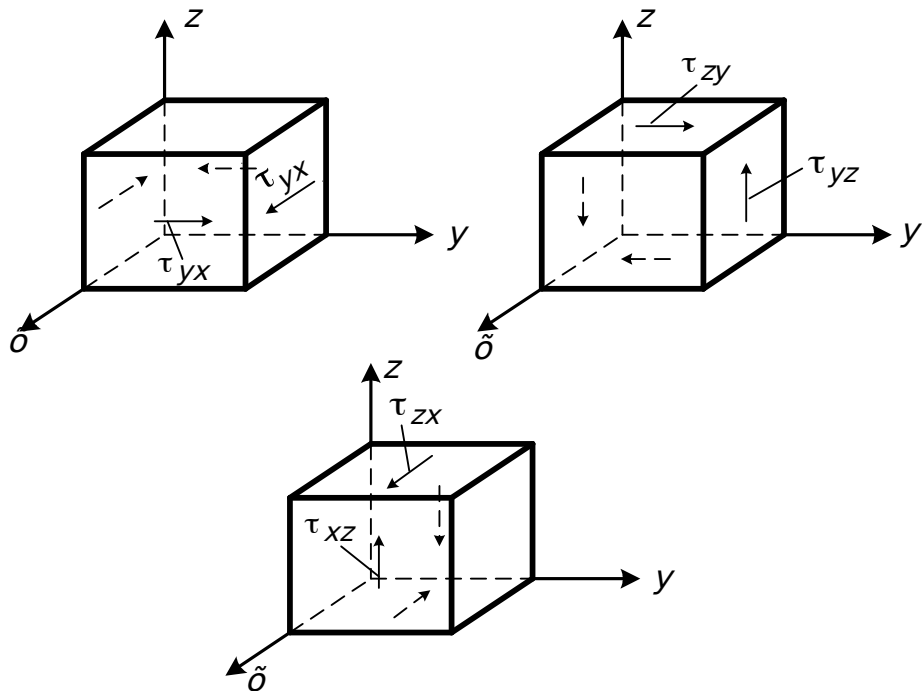


Рис. 1.7. К выводу зависимостей между касательными напряжениями и сдвигами

Опытами установлено, что изменение угла между любыми двумя координатными осями зависит от составляющих напряжения, параллельных этим осям. Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma_{yx} &= \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \gamma_{zy} &= \frac{\tau_{zy}}{G}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь G – модуль сдвига, равный

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{1.18}$$

Докажем справедливость равенства (1.18). Для этого рассмотрим деформацию прямоугольного параллелепипеда, по граням которого действуют $\sigma_y = -\sigma_z$, $\sigma_x = 0$ (рис. 1.8).

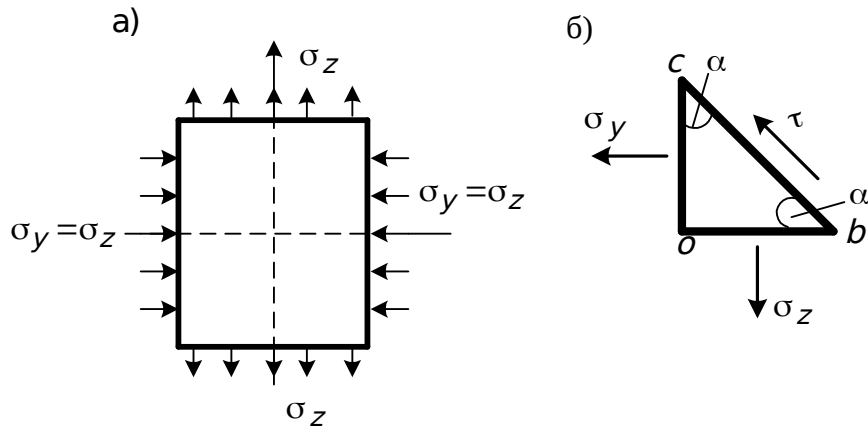


Рис. 1.8. К выводу зависимости между E и G

В соответствии с уравнениями (1.16) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\sigma_z(1+\nu)}{E}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\sigma_z(1+\nu)}{E}, \\ \sigma_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Выделим из прямоугольного параллелепипеда элемент obc и рассмотрим его равновесие (рис. 1.8, б). Площадь грани ck обозначим через A , тогда площадь грани ok равна $A \cos \alpha$, а площадь грани oc – $A \sin \alpha$. Спроектируем все силы на грань bc

$$\sigma_y \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_z \cos \alpha \sin \alpha + \tau = 0,$$

отсюда $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma_z$.

В процессе деформации угол α (рис. 1.8, б) будет изменяться на малую величину $\gamma/2$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z}.$$

Для того чтобы было справедливо полученное равенство, необходимо, чтобы модуль сдвига определялся по формуле (1.18). Численные значения модуля упругости и коэффициента поперечных деформаций для различных материалов определяют лабораторным путем. Эти значения для наиболее часто применяемых материалов приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Значения модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν
для некоторых материалов

Материал	E , ГПа	ν
Сталь прокатная	206	0,3
Алюминиевые сплавы	70	0,3
Медь, латунь, бронза	100–130	0,31 – 0,35
Бетон	4 – 40	0,2
Кирпичная кладка	0,1 – 7,8	0,25
Древесина при растяжении (сжатии): вдоль волокон поперек волокон	10 0,4	0,5 0,02
Резина	0,007	0,5
СВАМ при соотношении продольных и поперечных сил 1:1 10:1	35 58	0,13 –
Пробка	–	0

Раздел 2

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1. Уравнения равновесия

Рассмотрим условие равновесия малого прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx , dy , dz (рис. 2.1). Здесь мы принимаем во внимание малые изменения составляющих напряжений вследствие малых приращений координат. Усилия получаем умножением напряжений в центре тяжести грани на ее площадь. Через X , Y , Z обозначим составляющие объемной силы, действующей на элемент.

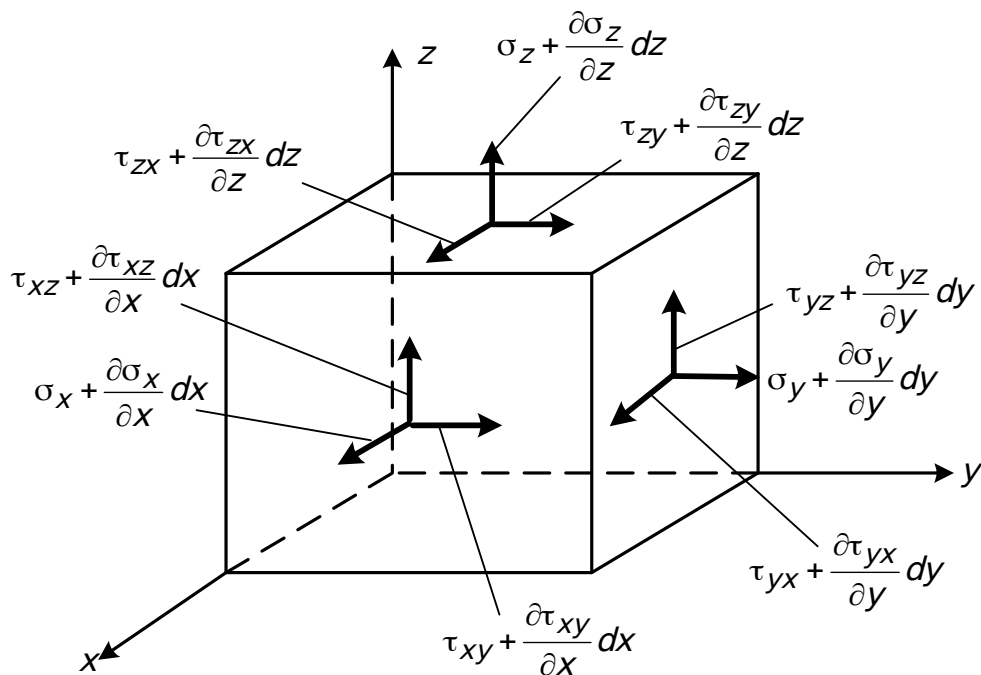


Рис. 2.1. К выводу дифференциальных уравнений равновесия

Спроектируем все силы, действующие на элемент, на оси X , Y , Z . В результате получим дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.2. Уравнения на границе

Уравнения (2.1) должны быть удовлетворены для во точках по объему тела. Напряжения меняются по объему тела, и когда приходим к поверхности его, то они должны быть таковы, чтобы уравновесить внешние силы, действующие на поверхности тела.

Уравнения на поверхности тела можно получить, рассматривая условие равновесия элементарного четырехгранника, выделенного из тела тремя координатными плоскостями и наклонной плоскостью (рис. 2.2).

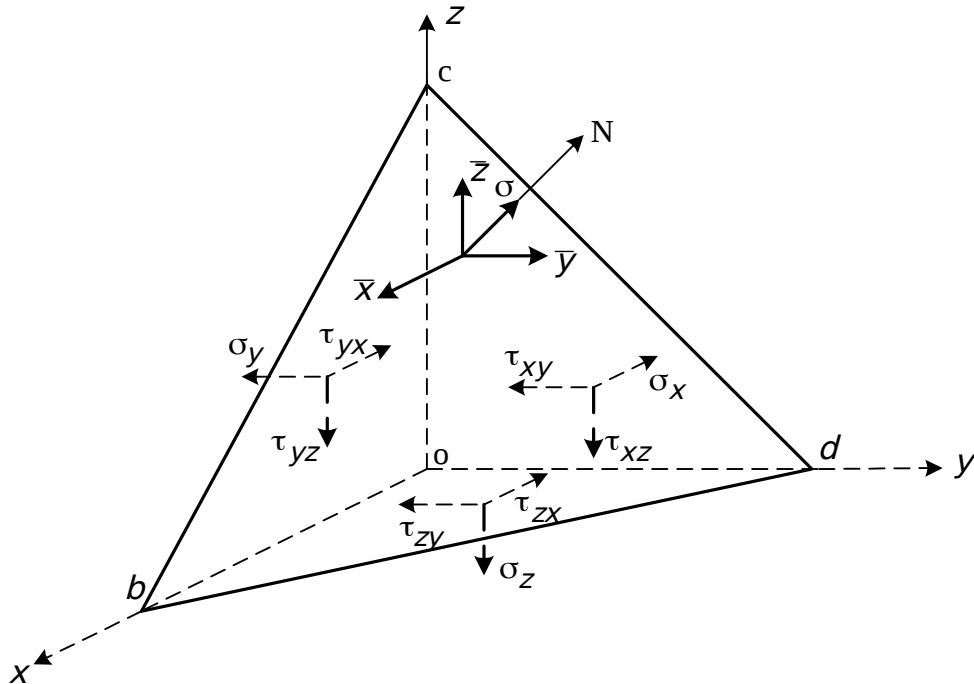


Рис. 2.2. К исследованию напряжений в трех измерениях

Найдем напряжения на наклонной плоскости. Спроектируем все силы, действующие на элемент, на оси X , Y , Z . При этом объемными силами пренебрегаем. В результате получаем

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ \bar{Y} &= \sigma_y m + \tau_{yx} l + \tau_{yz} n, \\ \bar{Z} &= \sigma_x n + \tau_{zx} l + \tau_{zy} m.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь l , m , n – направляющие косинусы, определяющие положение внешней нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке: $l = \cos(N, x)$, $m = \cos(N, y)$, $n = \cos(N, z)$; A – площадь грани bcs ; Al – площадь грани odc ; Am – площадь грани obc ; An – площадь грани bos ; \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} – отнесенные к единице площади составляющие поверхностных сил в данной точке.

2.2.1. Исследование напряжений в трех измерениях

Найдем положение главных площадок. Предположим, что площадка bcc (рис. 2.2) – одна из трех главных площадок. Тогда на этой площадке касательное напряжение $\tau = 0$, а вектор полного напряжения

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\bar{Z})^2 + (\bar{Y})^2 + (\bar{X})^2} = \sigma = \bar{X}l + \bar{Y}m + \bar{Z}n.$$

Составляющие этого напряжения по координатным осям определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma l, \\ \bar{Y} &= \sigma m, \\ \bar{Z} &= \sigma n.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Приравняв правые части уравнений (2.3) и (2.2), получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных l , m , n :

$$\begin{aligned}(\sigma_X - \sigma)l + \tau_{XY}m + \tau_{XZ}n &= 0, \\ \tau_{YX}l + (\sigma_Y - \sigma)m + \tau_{YZ}n &= 0, \\ \tau_{ZX}l + \tau_{ZY}m + (\sigma_Z - \sigma)n &= 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Между направляющими косинуса нормали N существует зависимость

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,\tag{2.5}$$

поэтому они не могут одновременно равняться нулю, как следует из уравнений (2.4). Получим ненулевые решения уравнений (2.4). Для этого составим определитель этой системы уравнений и приравняем его нулю.

$$\begin{vmatrix} \sigma_X - \sigma & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & (\sigma_Y - \sigma) & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & (\sigma_Z - \sigma) \end{vmatrix} = 0.\tag{2.6}$$

Раскрыв его и произведя группировку членов, найдем

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0,\tag{2.7}$$

где

$$J_1 = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z,\tag{2.8}$$

$$J_2 = \sigma_X\sigma_Y + \sigma_X\sigma_Z + \sigma_Y\sigma_Z - \tau_{XY}^2 - \tau_{XZ}^2 - \tau_{YZ}^2,\tag{2.9}$$

$$J_3 = \sigma_X\sigma_Y\sigma_Z - \sigma_X\tau_{YZ}^2 - \sigma_Y\tau_{XZ}^2 - \sigma_Z\tau_{XY}^2 + 2\tau_{XY}\tau_{XZ}\tau_{YZ}.\tag{2.10}$$

Корни уравнения (2.7) будут значениями трех главных напряжений. Главные напряжения не зависят от выбора осей X , Y , Z . Следовательно, корни уравнения, а значит, и его коэффициенты J_1 , J_2 , J_3 не меняются при повороте осей координат. Величины J_1 , J_2 , J_3 называются поэтому первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений.

Для отыскания ℓ , m , n , соответствующих одному из трех главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 , надо значение этого главного напряжения подставить в уравнения (2.4) вместо σ . Совместное решение (2.4) и (2.5) дает искомые величины ℓ , m , n . Одно из трех главных напряжений будет алгебраически наибольшим в данной точке. Обозначим его σ_1 . Наименьшее напряжение обозначим σ_3 , а промежуточное σ_2 , т. е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Площадками действия экстремальных касательных напряжений являются площадки, проходящие через одну из главных осей и составляющие с двумя другими осями углы 45° . Если величины главных напряжений подчинены неравенству $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то наибольшее касательное напряжение равно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.11)$$

Площадка, равнонаклонная к направлениям трех главных напряжений, называется октаэдрической, а действующие напряжения – октаэдрическими:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (2.12)$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим теперь энергию деформации. При объемном напряженном состоянии в случае малых деформаций удельная потенциальная энергия равна

$$U = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]. \quad (2.14)$$

В общем случае деформирования происходит изменение объема и формы рассматриваемого элемента. В соответствии с этим потенциальную энергию деформации можно представить как энергию изменения объема $U_{\text{об}}$ и энергию изменения формы $U_{\text{ф}}$:

$$U_{\text{об}} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad (2.15)$$

$$U_{\text{ф}} = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]. \quad (2.16)$$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ происходит только изменение объема, энергия изменения формы в этом случае равна нулю.

2.3. Уравнения совместности

Если задача состоит в определении напряженного состояния тела, подвергающегося действию заданных сил, то нужно решить уравнения (2.1) и это решение должно быть таким, чтобы удовлетворялись условия (2.2) на поверхности. Уравнений (2.1), содержащих шесть составляющих напряжений (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}), недостаточно для определения последних. Задача является статически неопределимой. Чтобы получить

решение, примем во внимание упругие деформации (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12). Из уравнений (1.7) – (1.12) исключим производные от U , V , W . Тогда останутся уравнения, в которые будут входить лишь производные от деформаций:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Отсюда видно, что шесть компонент деформации не могут быть произвольными, между ними должны существовать зависимости (2.17).

2.3.1. Дифференциальные уравнения относительно напряжений (уравнения Бельтрами-Митчелла)

Подставим в полученные уравнения (2.17) выражения для закона Гука (1.16) – (1.17), введем обозначения $\nabla^2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$; $\Sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и будем считать, что объемные силы равны нулю, т. е. $\nabla^2(\Sigma) = 0$. При действии объемных сил (или массовых сил, например силы тяжести или центробежной силы) частные решения всегда можно найти. Они не должны удовлетворять граничным условиям, и из-за линейности основных уравнений могут быть просто сложены с решением однородной задачи. В результате отмеченной выше подстановки и преобразований получим:

$$\begin{aligned}(1+\nu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y \partial z} &= 0, \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial z} &= 0, \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Видим, что в дополнение к уравнениям равновесия (2.1) и к условиям на поверхности (2.2) составляющие напряжения в любом изотропном теле должны удовлетворять шести уравнениям совместности.

Уравнения (2.18) содержат лишь вторые производные составляющих напряжения. Следовательно, если внешние силы таковы, что уравнения равновесия (2.1) вместе с условиями на поверхности (2.2) могут быть удовлетворены, когда мы возьмем составляющие напряжения либо постоянными, либо линейными функциями координат, то уравнения (2.18) обращаются в тождества. Эта система напряжений является правильным решением задачи.

2.3.2. Уравнения равновесия в форме Навье

Получим дифференциальные уравнения (2.1) относительно перемещений. Введем обозначения:

$$\sigma_x = \lambda \nabla + 2G \epsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda \nabla + 2G \epsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda \nabla + 2G \epsilon_z, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \\ \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad \nabla^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

С учетом обозначений имеем:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \nabla^*}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \nabla^*}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \nabla^*}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Таким образом, исключение деформаций и напряжений позволяет получить три дифференциальных уравнения (2.19) лишь относительно перемещений. Преимущество этого подхода состоит в том, что условия совместности (2.17), (2.18) при этом не нужны. С другой стороны, исключение деформаций и перемещений при использовании условий совместности приводит к шести дифференциальным уравнениям (2.18) лишь относительно напряжений (уравнения Бельтрами-Митчелла). Полученные таким образом уравнения Навье (2.19) и Бельтрами-Митчелла (2.18) часто называют основными уравнениями теории упругости. В зависимости от постановки (первая граничная задача: определение напряжений и перемещений внутри упругого тела в состоянии равновесия, если известно распределение сил на поверхности; вторая граничная задача: определение напряжений и перемещений внутри упругого тела в состоянии равновесия, если известны перемещения точек поверхности) при решении задачи теории упругости применяется тот или иной путь.

Общего решения, а также пригодного для всех случаев метода решения уравнений Навье (2.19) и Бельтрами-Митчелла (2.18) не существует. Однако построение этих уравнений привело к разработке многочисленных методов решений для различных частных задач. Большое значение при этом имеет линейность основных уравнений, открывающая

возможность наложения решений. Если пренебречь объемными силами (силы тяжести или центробежные силы), то могут быть получены частные решения, не зависящие от граничных условий. Эти решения должны, об этом говорилось выше, суммироваться с общими решениями однородных уравнений, удовлетворяющими граничным условиям в напряжениях или перемещениях. Плодотворный путь решения основных уравнений (2.18), (2.19), как будет показано ниже, состоит во введении вспомогательных функций, которые связаны с перемещениями или напряжениями. Возможности построения точных решений задач теории упругости ограничены. Как для пространственных, так и для плоских задач точные решения можно получить только для областей с геометрически простыми границами и чаще всего только для бесконечных и полубесконечных областей. Очень трудным или почти невозможным является получение точных решений для областей конечных размеров. Основную трудность составляет при этом не подбор функций, дающих решение уравнений, а удовлетворение их граничным условиям. По этой причине уже давно осознана необходимость эффективных приближенных методов.

Одним из таких методов является метод конечных элементов. Чтобы ясно представлять суть метода конечных элементов, рассматривается (см. п. 4.8.2) прежде всего на примере плоской задачи теории упругости метод перемещений, который был развит чисто интуитивно из матричных методов статики упругих систем.

Раздел 3

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

3.1. Определение перемещений при растяжении и сжатии

Определение перемещений при известных значениях напряжений заключается в интегрировании системы дифференциальных зависимостей (1.7) – (1.12).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Определим перемещение стержня, растянутого силой на конце (рис. 3.1).

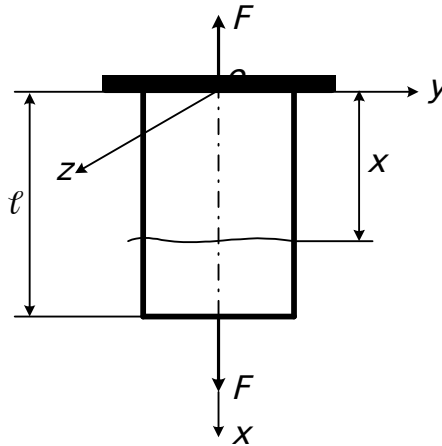


Рис. 3.1. К определению перемещений в стержне при растяжении или сжатии

Напряжения: $\sigma_x = \frac{N}{A}$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$.

На основании закона Гука (1.16), (1.17) имеем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0.$$

Используя приведенные выше дифференциальные зависимости, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N}{EA}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu N}{EA}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu N}{EA}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Интегрирование первых трех уравнений дает

$$u = \frac{Nx}{EA} + D, \quad v = -\frac{\nu Ny}{EA}, \quad w = -\frac{\nu Nz}{EA}. \quad (3.3)$$

Уравнения (3.1), (3.2) при этих значениях u , v , w выполняются, следовательно (3.3) – искомые перемещения. Следует отметить, что заделанное сечение не может свободно искажаться: $v=0$ и $w=0$ во всех точках, а не только в точках, лежащих на оси. Распределение усилий в этом сечении отлично от того, что дает формула $\sigma_x = N/A$. Решение (3.3), однако, является удовлетворительным для сравнительно длинных консолей.

Жесткие перемещения в направлении осей Y , Z и жесткие повороты вокруг координатных осей под действием продольной осевой силы невозможны. Поэтому во втором и третьем уравнениях (3.1) постоянные интегрирования приняты равными нулю. Что касается первого уравнения (3.1), то здесь удержана только одна постоянная D , так как закрепление должно препятствовать только смещению стержня в направлении оси Ox (рис. 3.1).

Перемещения (v и w) не зависят от расстояния до закрепления, т. е. от положения сечения. На оси стержня они равны нулю, а по мере удаления от оси возрастают по абсолютной величине. Знак минус указывает на направление перемещений, обратное направлению координатных осей Oy и Oz .

Перемещения u точек стержня в направлении растяжения одинаковы в каждом поперечном сечении (X фиксировано). Это означает, что при растяжении плоская форма сечения не искажается. Если стержень растягивается несколькими силами, приложенными в разных сечениях, то в пределах каждого участка, где нормальная сила имеет постоянное значение, вычисление перемещений можно производить по формулам (3.3). Постоянная D при этом на разных участках имеет разные значения. Последние определяются условиями сопряжения участков между собой.

Если стержень растягивается несколькими силами (рис. 3.2), приложенными в разных сечениях, то в пределах каждого участка, где продольная сила имеет постоянное значение, вычисление перемещений можно выполнять по формулам (3.3). Постоянная D при этом на различных участках имеет разные значения. Последние определяются условиями соединения участков между собой. Покажем это.

Перемещения u на участках стержня задаются равенствами

$$u_1 = \frac{N_1 x_1}{EA} + D_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a;$$

$$u_2 = \frac{N_2 x_2}{EA} + D_2, \quad a \leq x_2 \leq a + b;$$

$$u_3 = \frac{N_3 x_3}{EA} + D_3, \quad a + b \leq x_3 \leq a + b + c.$$

Здесь

$$N_1 = F_1 + F_2 + F_3, \quad N_2 = F_2 + F_3, \quad N_3 = F_3.$$

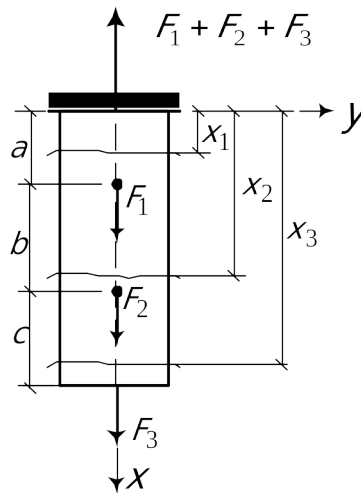


Рис. 3.2. Перемещения в стержне, нагруженном несколькими силами

По условию $u_1 = 0$ при $x_1 = 0$ (защемление), отсюда

$$D_1 = 0.$$

На границе между первым и вторым участками при $x_1 = a$, $x_2 = a$ должно быть $u_2 = u_1$, то есть

$$\frac{N_2 a}{EA} + D_2 = \frac{N_1 a}{EA},$$

откуда

$$D_2 = \frac{F_1 a}{EA}.$$

Аналогично из равенства $u_3 = u_2$ при $x_2 = a + b$ и $x_3 = a + b$, то есть на границе между вторым и третьим участками

$$\frac{N_3(a+b)}{EA} + D_3 = \frac{N_2(a+b)}{EA} + D_2,$$

откуда

$$D_3 = \frac{F_1 a + F_2(a+b)}{EA}.$$

Все постоянные найдены, теперь можно определить перемещения. Разбиение на участки при вычислении перемещений необходимо выполнять и в тех случаях, когда стержень имеет ступенчатую форму, то

есть состоит из отдельных частей с разными площадями поперечных сечений.

3.2. Растяжение стержня под действием собственного веса

Рассмотрим консольный стержень (рис. 3.3).

Продольная сила в сечении X равна

$$N = \gamma x A,$$

где γ – объемный вес материала стержня; A – площадь поперечного сечения. При растяжении стержня в поперечных сечениях возникают только равномерно распределенные нормальные напряжения

$$\sigma_x = \gamma x, \quad (3.4)$$

изменяющиеся по длине стержня по линейному закону.

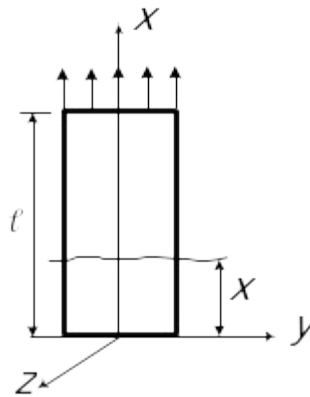


Рис. 3.3. К определению перемещений в брус от собственного веса

Используя зависимости (1.7), (1.8), (1.9), получим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\gamma x}{E}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu \gamma x}{E}, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu \gamma x}{E}. \quad (3.7)$$

Интегрируя уравнение (3.5), найдем

$$u = \frac{\gamma x^2}{2E} + f_0, \quad (3.8)$$

где f_0 – функция от координат y и z , подлежащая в дальнейшем определению.

Подставим выражение (3.8) в (1.10), (1.11), получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.9)$$

откуда

$$v = -x \frac{\partial f_0}{\partial y} + v_0, \quad w = -x \frac{\partial f_0}{\partial z} + w_0, \quad (3.10)$$

где v_0 и w_0 являются функциями координат y и z .

Подставим решение (3.10) в уравнения (3.1), найдем

$$-x \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\nu y x}{E}, \quad -x \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\frac{\nu y x}{E}. \quad (3.11)$$

Так как v_0 и w_0 не зависят от x , то уравнения (3.11) мы сможем удовлетворить, лишь приняв

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} = \frac{\nu y}{E}, \quad (3.12)$$

$$v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad f_0 = \frac{\nu y}{2E} (y^2 + z^2).$$

На основании уравнений (3.8) и (3.12) можем записать общие выражения для функции u :

$$u = \frac{\nu}{2E} \left[x^2 + \nu (y^2 + z^2) \right] + D. \quad (3.13)$$

Интегрируя (3.6) и (3.7), найдем

$$v = -\frac{\nu y x y}{E}, \quad w = -\frac{\nu y x z}{E}. \quad (3.14)$$

Форма стержня после деформации показана на рис. 3.4 пунктиром.

Как и ранее, жесткие повороты вокруг координатных осей под действием равномерно-распределенной нагрузки γA , представляющей собой вес груза, невозможны. Поэтому в уравнениях (3.14) постоянные интегрирования равны нулю.

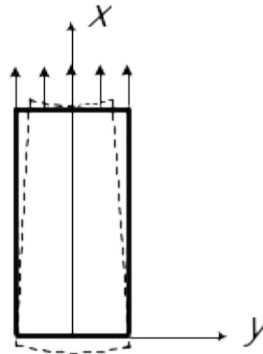


Рис. 3.4. Деформация бруса под действием собственного веса

В уравнении (3.13) постоянная D определяется из граничного условия – при $x=l$ $u=0$. Плоскости поперечных сечений при растяжении собственным весом не остаются плоскими, они искривляются. Искажение сечений не зависит от положения их вдоль длины стержня (величина $\sqrt{y^2 + z^2}$ постоянна и не зависит от X). Точки же стержня, лежащие на оси X , имеют лишь вертикальные перемещения.

3.3. Кручение круглых валов постоянного сечения

Элементарная теория кручения круглых валов устанавливает, что касательное напряжение τ в любой точке сечения (рис. 3.5) перпендикулярно к радиусу r и пропорционально его длине и что угол скручивания θ на единицу длины вала таков, что

$$\tau = G\theta r, \quad (3.15)$$

где G – модуль упругости при сдвиге (см. (1.18)).

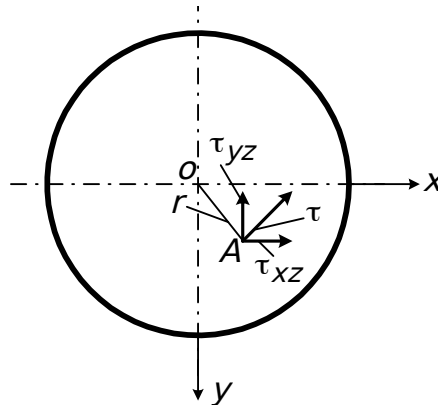


Рис. 3.5. Распределение касательных напряжений в сечении вала

Раскладывая это напряжение на две составляющие, параллельные осям X и Y , найдем

$$\tau_{yz} = G\theta r \frac{x}{r} = G\theta x, \quad (3.16)$$

$$\tau_{xz} = -G\theta r \frac{y}{r} = -G\theta y. \quad (3.17)$$

Элементарная теория предполагает также, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Мы можем показать, что это элементарное решение при известных условиях является точным решением. Так как все составляющие напряжения либо линейные функции от координат, либо равны нулю, то уравнения совместности (2.18) удовлетворяются, и необходимо лишь рассмотреть уравнения равновесия (2.1) и условие на поверхности (2.2).

Подставив полученные выше выражения для составляющих напряжения в уравнения (2.1) мы найдем, что эти уравнения будут

удовлетворены, если только нет объемных сил. Боковая поверхность вала свободна от внешних воздействий, и условие (2.2), если вспомнить, что для цилиндрической поверхности $\cos(N, z) = n = 0$, сводится к уравнению

$$\tau_{xz} \cos(N, x) + \tau_{yz} \cos(N, y) = 0. \quad (3.18)$$

В случае круглого цилиндра имеем, кроме того,

$$\cos(N, x) = \frac{x}{r}, \quad \cos(N, y) = \frac{y}{r}.$$

Подставляя эти значения и выражения (3.16), (3.17) в уравнение (3.18), убедимся в том, что это условие выполняется.

Рассмотрим теперь условие на поверхности для концов вала. Мы видим, что приложенные к поверхности концов вала касательные усилия должны быть распределены точно таким же образом, как напряжения τ_{xz} и τ_{yz} , по любому промежуточному сечению вала. Только в этом случае распределения напряжений согласно формулам (3.16), (3.17) являются точным решением задачи. Равнодействующая концевых усилий равна нулю, т.е. $\int_A \tau_{xz} dA = 0$, $\int_A \tau_{yz} dA = 0$.

Перемещения могут быть найдены следующим образом. Приняв условие заделки стержня в виде $u = v = w = 0$ при $x = y = 0$ и $z = 0$ и исключив возможность выражения относительно осей x, y , найдем

$$u = -\theta y z, \quad v = \theta x z, \quad w = 0. \quad (3.19)$$

Это указывает на правильность предположения, что поперечные сечения остаются плоскими, а радиусы прямолинейными, как это обычно принимается при элементарном изложении теории кручения.

Раздел 4

ПЛОСКИЕ (ДВУМЕРНЫЕ) ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Большое значение для приложений имеют задачи, в которых искомые функции зависят от двух координат. При этом различают два случая, математическое описание которых совпадает: плоское деформированное состояние и плоское напряженное состояние.

4.1. Плоское деформированное состояние

Первый случай соответствует длинному призматическому телу, которое нагружается поверхностными силами, не зависящими от Z и не имеющими составляющей в направлении оси Z (рис. 4.1). При этом упругое тело может быть или бесконечно длинным, или оно имеет конечную длину и его края соответствующим образом закреплены. В каждом поперечном сечении тела определяющим является тогда плоское деформированное состояние.

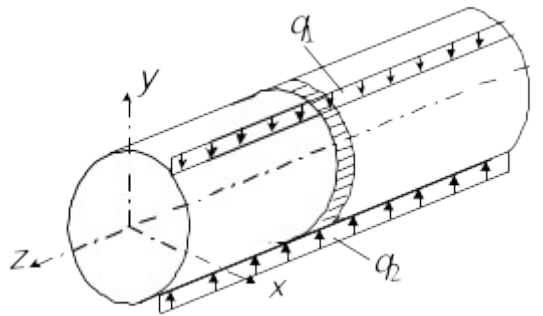


Рис. 4.1. Плоское деформированное состояние в призматическом теле

Для простого деформированного состояния перемещения (в декартовых координатах) имеют вид

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = \text{const} \quad \text{или} \quad w = 0, \quad (4.1)$$

кроме того, обращаются в нуль все производные по Z , т. е. $\partial/\partial Z = 0$. При этом кинематические уравнения (1.7) – (1.12) запишутся как

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Далее следуют равенства

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0. \quad (4.3)$$

Остается только одно условие совместности деформаций (2.17)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.4)$$

Ненулевыми компонентами тензора напряжений являются σ_x , σ_y , τ_{xy} , а также σ_z . Для закона Гука (1.16) получаются соотношения

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_y \right], \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu(1 + \nu) \sigma_x \right], \quad (4.6)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (4.8)$$

Из уравнений равновесия (2.1) остаются

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (4.9)$$

причем объемные силы здесь не учитываются. Граничные условия (2.2) для напряжений, если на краю цилиндра заданы напряжения ρ_x и ρ_y , имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_x \ell + \tau_{xy} m, \\ \rho_y &= \tau_{xy} \ell + \sigma_y m, \\ \rho_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если речь идет о призматическом теле длиной ℓ , концевые сечения которого оперты, то для них справедливы граничные условия $u(x, y, 0) = u(x, y, \ell) = 0$. При этом координаты x, y фиксированы. Тогда силы, действующие в концевых поперечных сечениях, равны

$$F_z = \int_A \sigma_z dA, \quad (4.11)$$

причем напряжения интегрируются по поперечному сечению призматического тела. Наконец, основные уравнения в перемещениях (2.19) и напряжениях (2.18) запишутся соответственно как

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0, \quad (4.12)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v = 0,$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (4.13)$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

В уравнениях (4.12) и (4.13) объемные силы приняты равными нулю.

4.2. Плоское напряженное состояние

Во втором случае речь идет о плоском упругом теле малой толщины (так называемой пластине), которое нагружается только силами в своей плоскости, причем нормальные напряжения в направлении толщины отсутствуют (рис. 4.2).

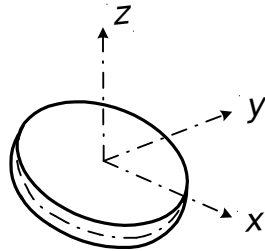


Рис. 4.2. Плоское напряженное состояние в тонкой пластинке

Приложенные силы или равномерно распределены по толщине и, следовательно, не зависят от z (что с хорошим приближением всегда выполняется для тонких пластин), или распределены симметрично относительно так называемой срединной плоскости (воображаемая поверхность, которая делит пополам толщину пластины). В такой пластинке, которая соответствующим образом закреплена, основным является плоское напряженное состояние. В плоскости $X Y$ имеются компоненты тензора напряжений

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad (4.14)$$

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (4.15)$$

Тогда компоненты перемещений u, v и w вообще не зависят от z . При этом кинематические уравнения соответствуют уравнениям (4.2) для плоского деформированного состояния, условия совместности – уравнению (4.4), уравнения равновесия – уравнениям (4.9), а краевые условия – условиям (4.10) в напряжениях для первой граничной задачи.

Различие между плоским деформированным состоянием и плоским напряженным состоянием проявляется при рассмотрении деформаций в законе Гука. Из него следует

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.17)$$

Плоское напряженное состояние реализуется не точно, а лишь приближенно в очень тонких пластинках. Как было показано Файлоном, можно рассмотреть обобщенный случай и модифицировать приведенные выше соотношения. При этом предполагается, что приложенные силы симметрично распределены относительно срединной плоскости.

Если предположить, что напряжения σ_z в пластинке отсутствуют, а τ_{zx} и τ_{zy} на наружной и внутренней поверхностях пластины равны нулю,

то для основных величин, например напряжений σ_x , можно ввести их средние значения по толщине пластины

$$\bar{\sigma}_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz. \quad (4.18)$$

Этот случай, следуя Ляву, называют обобщенным плоским напряженным состоянием. Он имеет большое практическое значение. В заключение отметим, что из уравнения совместности деформации (4.4) при подстановке напряжений для плоского деформированного состояния или плоского напряженного состояния при отсутствии объемных сил получается одно и то же соотношение, а именно

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (4.19)$$

где $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ – оператор Лапласа второго порядка, который показывает, что нужно взять вторые производные от $(\sigma_x + \sigma_y)$ отдельно по X и Y и сложить их.

4.3. Функция напряжений

Решение плоских задач в двух измерениях сводится к интегрированию дифференциальных уравнений равновесия (4.9) вместе с уравнением совместности (4.4) и условием на контуре (4.10). Обычным приемом решения этих уравнений является введение новой функции, которая называется функцией напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \rho q x. \quad (4.20)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения равновесия будут удовлетворены тождественно. Таким образом, мы получили целый ряд решений уравнений равновесия (4.9). Действительным решением будет то, которое удовлетворяет также уравнению совместности (4.4). Поставим функцию напряжений (4.20) в уравнение (4.4). В результате получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.21)$$

Итак, у нас сначала было восемь совместно решаемых уравнений: два уравнения равновесия (4.9); три уравнения (4.2), связывающие деформации и перемещения, и три физических уравнения (4.16), (4.17). Далее, исключив перемещения, мы перешли к шести уравнениям: (4.4), (4.8), (4.16), (4.17), (4.19). Теперь же осталось только одно уравнение (4.21). Решая какую-нибудь задачу, мы должны подобрать функцию φ так, чтобы она удовлетворяла уравнению (4.21) и условиям на контуре (4.10). Подбрав функцию φ , мы можем получить соответствующие формулы для

напряжений и найти напряжения в любой точке упругого тела. Отметим также, что уравнение (4.21) носит название бигармонического уравнения.

4.4. Решение дифференциального уравнения плоской задачи при помощи полиномов

Как было показано в предыдущем параграфе, необходимо подобрать функцию φ , которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению (4.21) и условиям на контуре (4.10). Обычно это бывает затруднительно, а иногда и вообще не удается сделать. Поэтому попробуем сначала решить обратную задачу (см. п. 2.3.2). Будем задаваться видом функции и исследовать, какому случаю напряженного состояния она соответствует. Зададимся функцией напряжений в виде следующего выражения:

$$\varphi = 2xy + \frac{4}{3}y^3 + 6x^3y - 3y^2.$$

Дифференциальное уравнение (4.21) тождественно удовлетворяется. Получим формулы для определения нормальных и касательных напряжений в любой точке пластинки без учета ее собственного веса (рис. 4.3):

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 36xy, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 8y - 6, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2(1 + 9x^2).$$

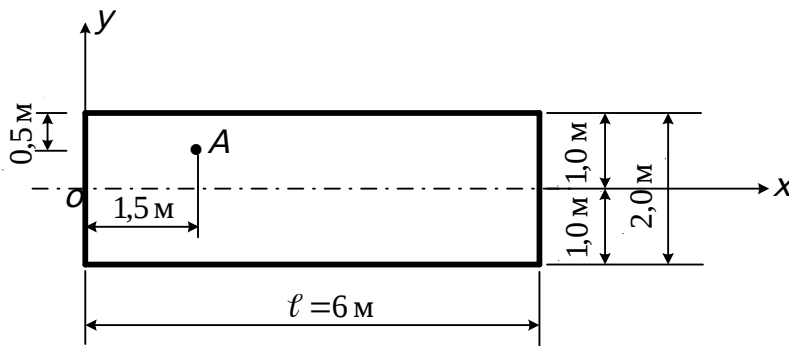


Рис. 4.3. Схема пластинки

Определим внешние силы, приложенные к граням пластинки. При этом используем условие на поверхности тела (4.10). Левая грань: $x=0$; $\sigma_x = 8y - 6$; $\sigma_y = 0$; нормаль к площадке не совпадает с положительным направлением оси X , следовательно $\tau_{xy} = -2$,

$$\bar{X} = -(8y - 6), \quad \bar{Y} = 2.$$

Верхняя грань: $y=1$ м; $\sigma_y = 36x$; $\sigma_x = 2$; $\tau_{xy} = -2(1 + 9x^2)$; нормаль к площадке совпадает с положительным направлением оси Y , следовательно, внешние силы равны

$$\bar{X} = -2(1 + 9x^2), \quad \bar{Y} = 36x.$$

Правая грань: $x = 6$ м; $\sigma_y = 216y$; $\sigma_x = 8y - 6$; $\tau_{xy} = -650$; нормаль к площадке совпадает с положительным направлением оси X , следовательно, внешние силы равны

$$\bar{X} = (8y - 6), \quad \bar{Y} = -650.$$

Нижняя грань: $y = -1$ м; $\sigma_y = -36x$; $\sigma_x = -14$; $\tau_{xy} = -2(1 + 9x^2)$; внешние силы равны

$$\bar{X} = 2(1 + 9x^2), \quad \bar{Y} = 36x.$$

Эпюры внешних сил, действующих на грани пластинки, показаны на рис. 4.4.

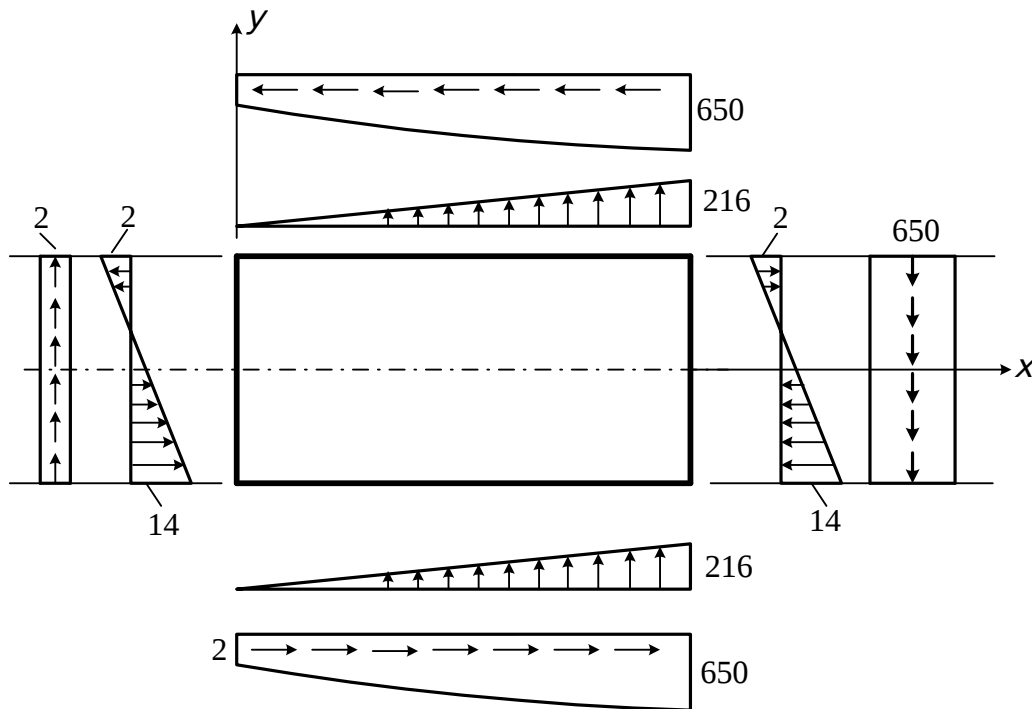


Рис. 4.4. Схема усилий, действующих на грани пластинки

Проверим условие равновесия пластинки. Как видно из рис. 4.4, условие равновесия по горизонтали выполняется, так как эпюры \bar{X} на левой и правой гранях имеют одинаковые значения ординат, но разные знаки. То же самое можно сказать об эпюрах \bar{X} на верхней и нижней гранях. Составим сумму проекций всех сил, действующих на пластинку, на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0 \quad 2 \frac{1}{2} 216 \cdot 6 - 650 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 0.$$

Таким образом, заданная пластинка под действием внешних сил находится в равновесии.

Прежде чем перейти к исследованию напряженного состояния в точке А (рис. 4.3) отметим, что уравнение (4.21) является линейным. Поэтому сумма нескольких решений этого уравнения является также его решением. Мы можем наложить одно на другое элементарные решения, полученные здесь, и таким образом прийти к новым решениям, имеющим практическое значение.

А сейчас определим напряженное состояние в точке А (рис. 4.3).

$$\sigma_y = 36 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = 27,$$

$$\sigma_x = 8 \cdot 0,5 - 6 = -2,$$

$$\tau_{xy} = -2(1 + 9 \cdot 2,25) = -42,5.$$

Главные напряжения:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-2 + 27}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-2 - 27)^2 + 4(42,5)^2} = 12,5 \pm 44,21,$$

$$\sigma_1 = 57,41; \quad \sigma_2 = -32,41.$$

Размерность напряжений – МПа.

Угол наклона главных площадок: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y},$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-42,5}{57,41 - 27} = -1,397, \quad \alpha = -54,41^\circ.$$

Схема напряжений, действующих в точке А, показана на рис. 4.5.

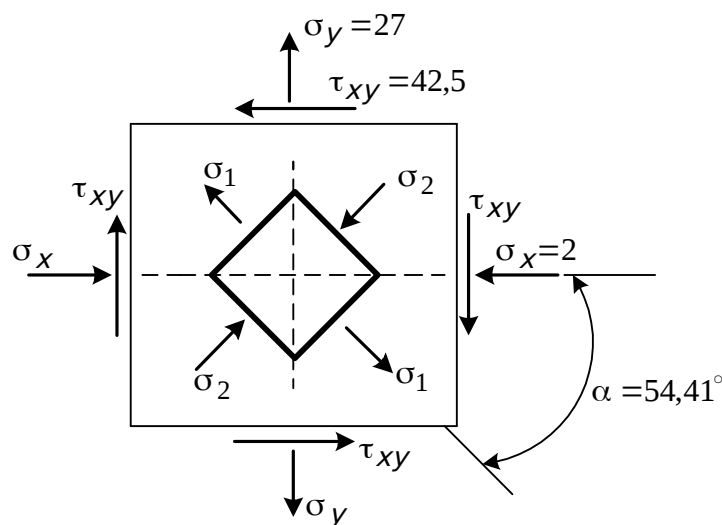


Рис. 4.5. Напряженное состояние в точке А

4.5. Изгиб консольной балки

Рассмотрим консоль, имеющую узкое прямоугольное сечение размерами $h \times 1$. Консоль изгибается силой F , приложенной на конце. Верхний и нижний края сечения свободны от нагрузки. Касательные усилия, равнодействующей которых является сила F , распределены в торцевом сечении колонны по квадратной параболе (рис. 4.6).

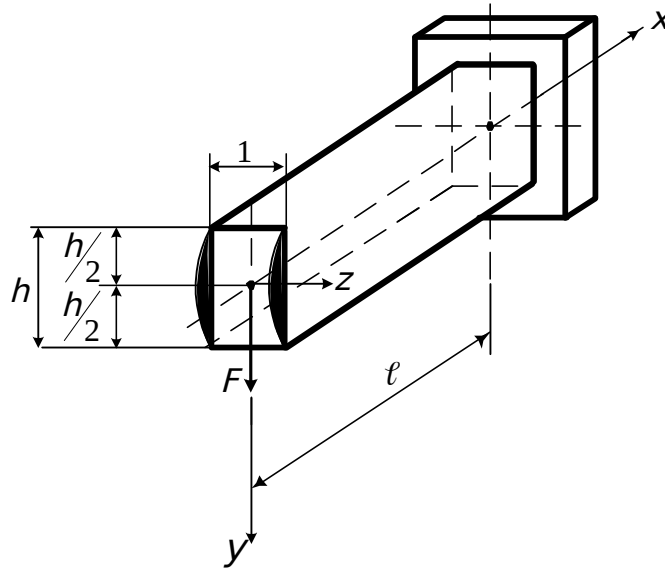


Рис. 4.6. Расчетная схема консольной балки

Отмеченные выше условия нагружения могут быть удовлетворены, если функцию напряжений представить в следующем виде:

$$\varphi = \frac{A}{6} xy^3 + Bxy. \quad (4.24)$$

Найдем напряжения по формулам (4.20). При этом будем пренебрегать собственным весом балки. Тогда

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Axy, \quad (4.25)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (4.26)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{A}{2} y^2 - B. \quad (4.27)$$

Для того чтобы продольные стороны балки $\left(y = \pm \frac{h}{2} \right)$ были свободны от усилий, должно выполняться следующее условие:

$$\tau_{xy} = -\frac{A h^2}{2 \cdot 4} - B = 0.$$

Отсюда

$$A = -\frac{8B}{h^2}. \quad (4.28)$$

Теперь необходимо потребовать равенства сумме касательных напряжений силе F , т. е.

$$-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{4B}{h^2} y^2 - B \right) dy = F. \quad (4.29)$$

Здесь «минус» перед интегралом связан с правилом знаков для касательных напряжений. Из (4.29) найдем

$$B = \frac{3F}{2h}. \quad (4.30)$$

Подставив найденные значения коэффициентов A и B в выражения (4.25) и (4.27), получим

$$\sigma_x = -\frac{F_x}{J_z} y, \quad (4.31)$$

$$\sigma_y = 0,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F}{8J_z} (h^2 - 4y^2). \quad (4.32)$$

Полученные решения совпадают с элементарными решениями, приведенными в курсе сопротивления материалов. Следует отметить, что это решение является точным только тогда, когда усилия по концам стержня распределены по законам (4.23) – (4.27). Если же усилия по концам распределены каким-либо другим способом, то полученное распределение напряжений можно считать удовлетворительным для поперечных сечений, расположенных на некотором расстоянии от концов стержня ($\approx h$).

4.6. Плоская задача в полярных координатах

4.6.1. Общие уравнения в полярных координатах

При исследовании напряжений в круглых кольцах и дисках, кривых брусках и т. п. представляется выгодным пользоваться полярными координатами. Положение точки на срединной плоскости пластинки определяется расстоянием r от начала координат "0" и углом θ между направлением r и некоторой осью Ox , занимающей определенное положение на плоскости.

Рассмотрим равновесие малого элемента $abcs$, вырезанного из пластинки радиальными сечениями Oc и Ob и двумя нормальными к пластинке цилиндрическими поверхностями ao и bc , радиусы которых равны r и $(r + dr)$ (рис. 4.7).

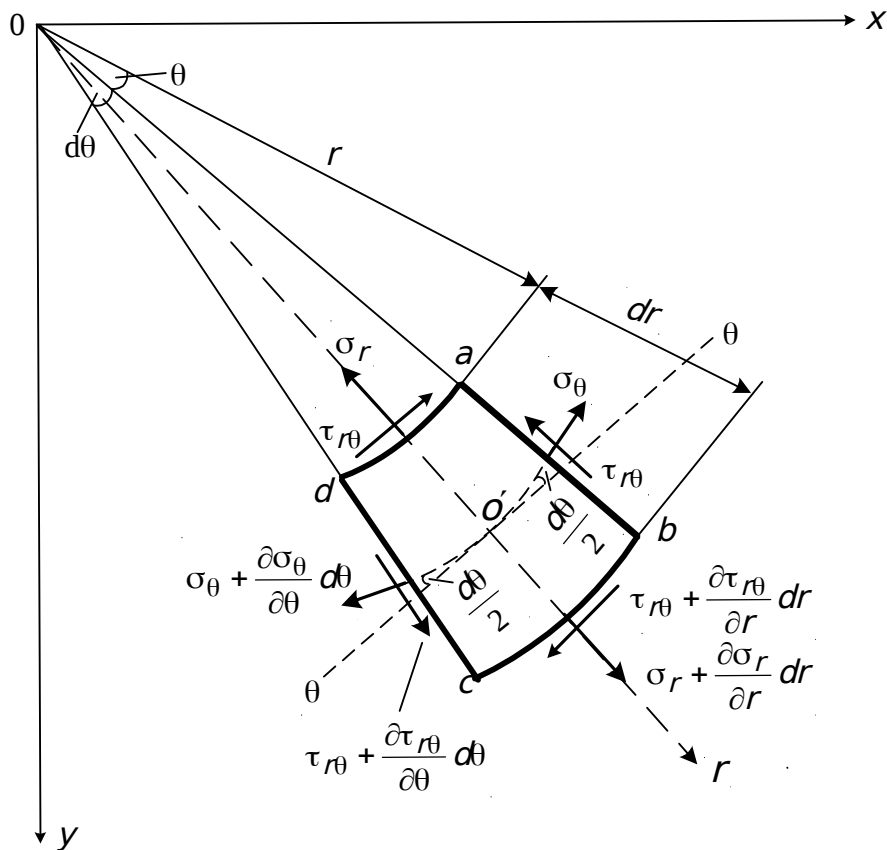


Рис. 4.7. Схема напряжений, действующих на малый элемент, вырезанный из пластинки

Составляющие нормальных напряжений в радиальном направлении будем обозначать σ_r , а составляющие нормальных напряжений в тангенциальном направлении – σ_θ . Для составляющих касательного напряжения будем пользоваться обозначением $\tau_{r\theta}$. Положительные направления составляющих напряжений указаны на рис. 4.7.

Предполагая, что напряжения равномерно распределяются по сторонам рассматриваемого элемента, найдем нормальное усилие в радиальном направлении (толщину пластинки принимаем равной единице)

$$\sigma_r \cdot r d\theta.$$

Нормальное усилие на стороне bc элемента с учетом изменения составляющей напряжения σ_r будет равно

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta.$$

Аналогично получим выражения для нормальных усилий на сторонах ak и ca , касательных усилий – на сторонах aa и bc и касательных усилий на сторонах ak и ca . Полагаем также, что объемная

сила отсутствует, кроме того, ввиду малости угла θ принимаем $\sin \frac{\alpha\theta}{2} = \frac{\alpha\theta}{2}$, $\cos \frac{\alpha\theta}{2} = 1$. Теперь запишем уравнение равновесия элемента. Для этого спроектируем усилия на оси r (радиальное направление) и θ (тангенциальное направление). В результате получим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

Эти два уравнения заменяют собой уравнения равновесия для плоской задачи в полярных координатах.

Уравнения (4.33) будут удовлетворены, если принять

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad (4.34)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad (4.35)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (4.36)$$

Для того чтобы получить распределение напряжений, которое может иметь место в упругом теле, должно быть удовлетворено условие совместности. При декартовых координатах это условие требует, чтобы функция напряжений удовлетворяла уравнению (4.21). В рассматриваемом случае нам необходимо это уравнение представить в полярных координатах. Зависимости между полярными и декартовыми координатами определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \frac{y}{x} &= \operatorname{tg} \theta, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

Пользуясь приведенными формулами и рассматривая φ как функцию от r и θ , найдем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (4.38)$$

Как и в случае решения плоской задачи в декартовых координатах, здесь также подбирается функция φ , удовлетворяющая уравнению (4.36) и условиям на контуре.

4.6.2. Деформации в полярных координатах

При рассмотрении перемещений в полярных координатах обозначим через U и V составляющие перемещения соответственно в радиальном и тангенциальном направлениях (рис. 4.8).

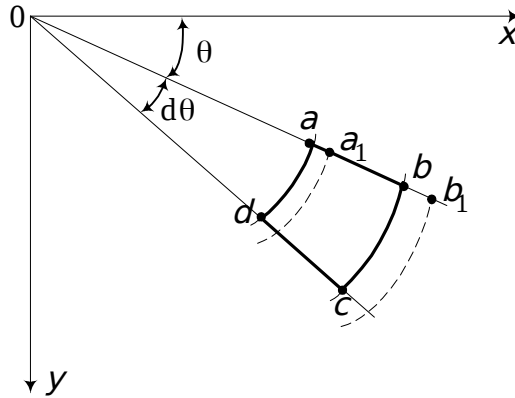


Рис. 4.8. К определению деформации ε_r

Если U – радиальное перемещение стороны ao элемента $abcs$, то радиальное перемещение стороны bc равно

$$u + \frac{\partial u}{\partial r} dr.$$

Тогда относительное удлинение элемента $abcs$ в радиальном направлении равно

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (4.39)$$

Что касается деформации в тангенциальном направлении, то следует заметить, что она зависит не только от перемещения V , но также и от радиального перемещения U (рис. 4.9). Вследствие радиальных перемещений U элемент ao переходит на новую окружность. Первоначальная его длина $ad = r d\theta$ становится равной $a_1 d_1 = (r + u) d\theta$.

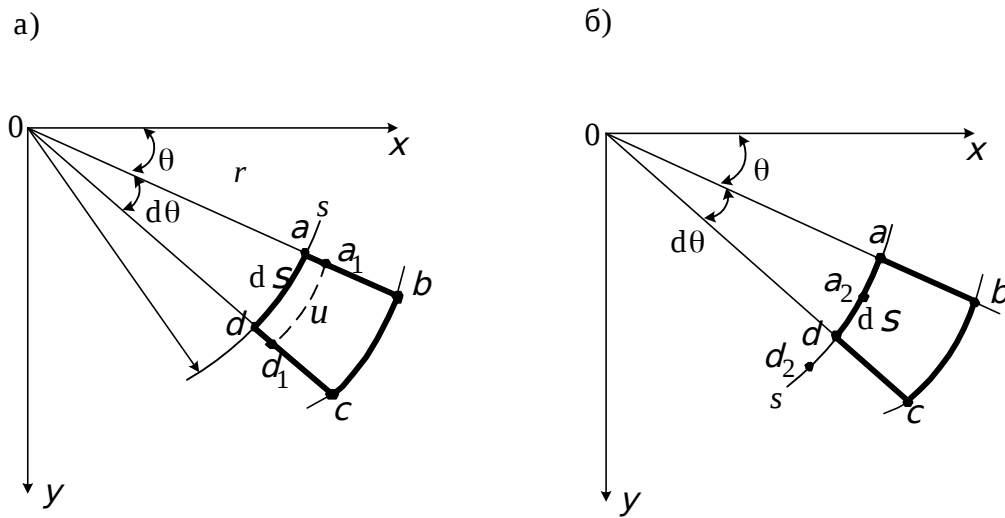


Рис. 4.9. К определению деформации ε_θ

Отсюда

$$\varepsilon'_\theta = \frac{a_1 d_1 - ad}{ad} = \frac{(r+u) d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}.$$

Вследствие разницы в перемещениях точек a и d в направлении дуги S

$$\varepsilon''_\theta = \frac{a_2 d_2 - ad}{ad} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) - v}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Таким образом, тангенциальная деформация равна

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon'_\theta + \varepsilon''_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (4.40)$$

Рассмотрим теперь деформацию сдвига (рис. 4.10).

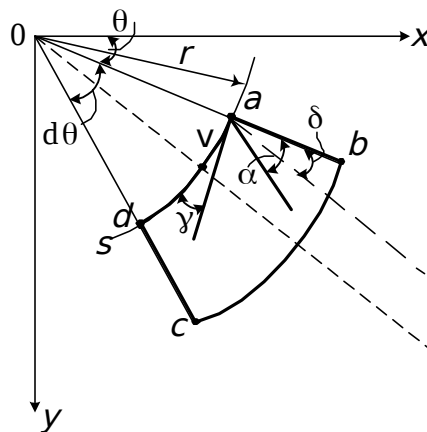


Рис. 4.10. К определению деформации сдвига

Если бы точка a не перемещалась, то искажение угла bac обуславливалось бы поворотом сторон ak и ao и было бы равно

$$\gamma'_{r\theta} = \alpha + \gamma = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Вследствие перемещения точки a по дуге S на величину v наклон грани ak изменится на угол $\delta = v/r$, который нужно вычесть из найденного выше искажения угла $\gamma'_{r\theta}$. Следовательно, полное изменение угла bac , являющегося деформацией сдвига, равно

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (4.41)$$

Подставив теперь выражения для составляющих деформаций (4.39) – (4.41) в формулы закона Гука для плоского напряженного состояния (4.16), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

характеризующие связь между перемещениями и напряжениями в полярных координатах.

4.6.3. Напряженно-деформированное состояние трубы при действии равномерного давления

Рассмотрим толстостенный цилиндр, подверженный равномерному давлению по внутренней и внешней поверхностям (рис. 4.11).

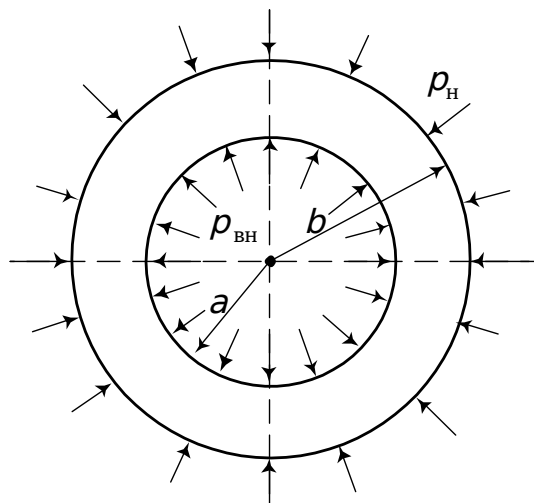


Рис. 4.11. К расчету трубы на действие внутреннего и внешнего давления

Через a и b обозначим радиусы внутренней и внешней поверхностей цилиндра, а через p_H и p_{BH} – наружное и внутреннее давления. Граничные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p_{BH} \text{ при } r=a, \\ \sigma_r &= -p_H \text{ при } r=b.\end{aligned}$$

Судя по граничным условиям, напряжения в этом случае должны распределяться симметрично относительно центральной оси цилиндра, перпендикулярной плоскости сечения. Тогда составляющие напряжения не зависят от угла θ и являются функциями одного лишь r . Из условий симметрии следует также, что касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ должны быть равны нулю.

Таким образом, из двух уравнений равновесия (4.33) остается лишь одно

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (4.43)$$

По той же причине уравнение (4.38) приобретает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.44) является линейным однородным дифференциальным уравнением, решением его будет функция

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (4.45)$$

Составляющие напряжения (4.34), (4.35), (4.36) будут иметь вид

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned} \quad (4.47)$$

В выражениях (4.46), (4.47) имеется три постоянных интегрирования A , B , C . Граничные условия определяют только две постоянные. Для того чтобы однозначно найти эти постоянные, рассмотрим перемещения. Для этого воспользуемся зависимостями (4.42).

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \\ \frac{u}{r} &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r).\end{aligned}$$

Интегрируя первое уравнение, находим

$$Eu = -\frac{A}{r}(1 + \nu) + 2C(1 - \nu)r + B[(1 - 3\nu)r + 2(1 - \nu)(r \ln r - r)] + D_1. \quad (4.48)$$

Интегрирование второго уравнения дает

$$Eu = -\frac{A}{r}(1+\nu) + 2C(1-\nu)r + Br[(3-\nu) + 2\ln r(1-\nu)]. \quad (4.49)$$

Для того чтобы оба выражения (4.48), (4.49) совпадали, должны быть выполнены условия

$$B=0 \text{ и } D_1=0.$$

С учетом этого имеем

$$\varphi = A \ln r + Cr^2, \quad (4.50)$$

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad (4.51)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C. \quad (4.52)$$

Определим постоянные A и C из граничных условий

$$2C = \frac{\rho_{\text{вн}} - \rho_{\text{н}} b^2}{b^2 - a^2}, \quad A = \frac{(\rho_{\text{н}} - \rho_{\text{вн}}) a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (4.53)$$

Компоненты напряжений оказываются равными

$$\sigma_r = \frac{(\rho_{\text{н}} - \rho_{\text{вн}}) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{\rho_{\text{вн}} a^2 - \rho_{\text{н}} b^2}{b^2 - a^2}, \quad (4.54)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(\rho_{\text{н}} - \rho_{\text{вн}}) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{\rho_{\text{вн}} a^2 - \rho_{\text{н}} b^2}{b^2 - a^2}. \quad (4.55)$$

Интересно отметить, что сумма $\sigma_r + \sigma_\theta$ постоянна по всей толщине стенок цилиндра. Поэтому напряжения σ_r и σ_θ вызывают равномерное растяжение или укорочение в направлении оси трубы. Деформация в элементе трубы, вырезанном двумя смежными поперечными сечениями, не препятствует деформации смежных элементов. Вследствие этого элемент находится в плоском напряженном состоянии.

В частном случае, когда $\rho_{\text{вн}} = 0$,

$$\sigma_r = \frac{\rho_{\text{н}} b^2}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right), \quad (4.56)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\rho_{\text{н}} b^2}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right). \quad (4.57)$$

Напряжение σ_r достигает наибольшего значения на наружной поверхности (рис. 4.12), где оно равно наружному давлению. Напряжения $\sigma_{\theta \text{ max}}$ больше, чем наружное давление. Оно приближается к величине последнего с увеличением радиуса L , но никогда не может оказаться ниже $\rho_{\text{н}}$, как бы мы не увеличивали количество материала трубы.

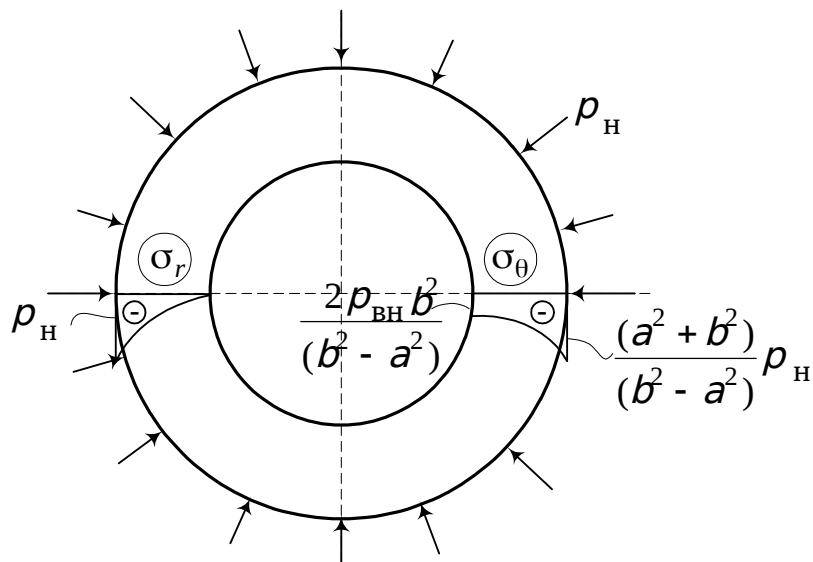


Рис. 4.12. Эпюры σ_r и σ_θ в толстостенной трубе при внешнем давлении

4.6.4. Напряженное состояние пластинки с малым круглым отверстием

Если сплошная пластинка испытывает равномерное растяжение по направлению X (рис. 4.13), то

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

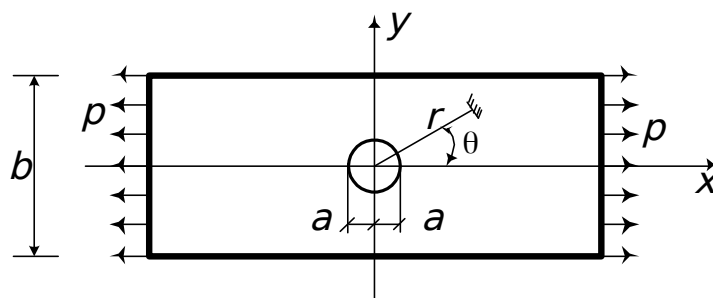


Рис. 4.13. К расчету пластинки с малым круглым отверстием

Рассмотрим, как изменяется напряженное состояние пластинки, если сделать в ней круглое отверстие, диаметр которого $2a$ мал по сравнению с шириной b . Очевидно, что напряжения, вызванные наличием отверстия, имеют характер местных напряжений: на достаточно большом расстоянии от отверстия они станут почти такими же, как и в сплошной пластинке. Искомая функция напряжений φ для пластинки с отверстием должна давать при достаточно больших значениях r те же напряжения, что и функция φ для пластинки без отверстия.

Для сплошной пластинки

$$\varphi_0 = \frac{\rho}{4}(r^2 - r^2 \cos 2\theta). \quad (4.58)$$

Для пластинки с отверстием

$$\varphi = \frac{\rho}{4} \left[r^2 - 2a^2 \ln r - \left(r^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (4.59)$$

Если в выражении (4.59) a устремить к нулю, то (4.59) сводится к (4.58). Определим напряжения. Так как наибольший интерес представляет тангенциальное напряжение, то на нем и остановимся

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\rho}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (4.60)$$

Изобразим эпюру σ_θ у края отверстия (рис. 4.14).

При $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ $\cos 2\theta = -1$. Тогда

$$\sigma_\theta = \rho \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right). \quad (4.61)$$

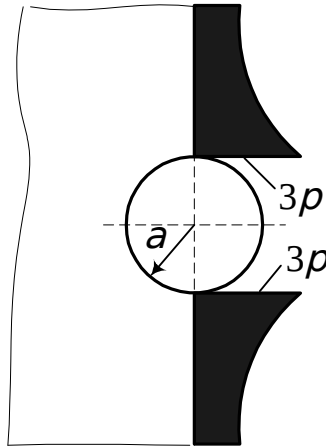


Рис. 4.14. Эпюра σ_θ у края отверстия

При: $r = a$	$\sigma_\theta = 3\rho,$
$r = 2a$	$\sigma_\theta = 1,22\rho,$
$r = 3a$	$\sigma_\theta = 1,07\rho,$
$r = 4a$	$\sigma_\theta = 1,04\rho,$
$r = \infty$	$\sigma_\theta = \rho.$

Полученные формулы (4.60), (4.61) верны в случае, если ширина пластинки b велика по сравнению с отверстием $2a$. Если же ширина не очень велика, но все же больше, чем $4a$, то для определения наибольшего растягивающего напряжения можно пользоваться приближенной формулой

$$\sigma_{\theta, \max} = 3\rho \frac{b}{(b-a)}. \quad (4.62)$$

Из приведенного решения можно сделать вывод о том, что в окрестностях отверстий, выточек и т. п. наблюдается резкое увеличение

напряжений, называемое концентрацией напряжений. Это служит причиной образования трещины, которая, быстро развиваясь, приводит к разрушению конструкции.

Особенно опасна концентрация напряжений при действии нагрузок, периодически меняющаяся во времени. Возникает вопрос о том, каким образом можно снизить концентрацию напряжений. Для этого в различного рода трещинах, выточках, в местах резкого изменения площади поперечного сечения следует заменить острые выточки плавными кривыми, т. е. увеличить радиус кривизны конца трещины или отверстия. Это неизменно приводит к снижению концентрации напряжений. Так, например, для прекращения развития трещины в пластинках иногда на конце трещины высверливается круглое отверстие.

4.6.5. Напряженное состояние бесконечно большой пластинки единичной толщины при действии на прямолинейный край сосредоточенной силы

Рассмотрим бесконечно большую пластинку, нагруженную сосредоточенной вертикальной силой (рис. 4.15).

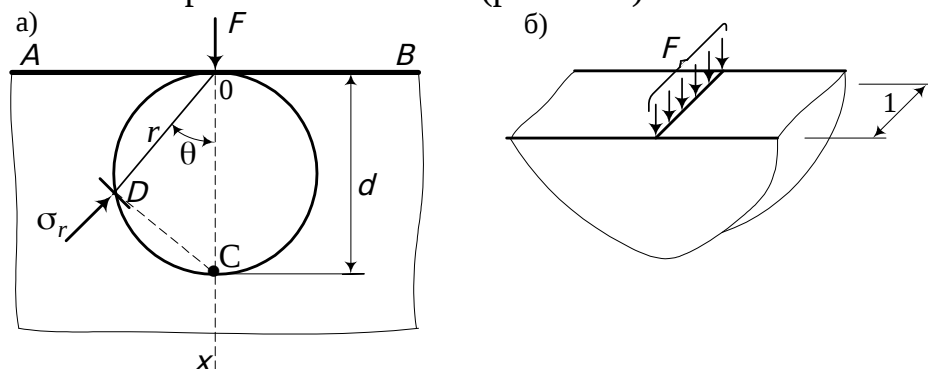


Рис. 4.15. Действие сосредоточенной силы на прямолинейный край бесконечно большой пластины

Распределение груза по толщине пластинки – равномерное (рис. 4.15, б). Толщина пластинки принята равной единице, так что F – сила, приходящаяся на единицу площади пластинки. Решение рассматриваемой задачи было получено Фламаном с использованием решения Я. Буссинеска в трех измерениях. Распределение напряжений можно установить из элементарных соображений. По мере удаления от точки приложения силы напряжения будут убывать. Поэтому предположим, что σ_r изменяется обратно пропорционально радиусу r . Кроме того, предположим, что наибольшие напряжения σ_r будут возникать в направлении действия силы F . По мере отклонения влево или вправо от оси X они также будут убывать. Это соответствует тому, что σ_r изменяется прямо пропорционально $\cos \theta$. Таким образом, принимаем

$$\sigma_r = -k \frac{\cos \theta}{r}, \quad (4.63)$$

где K – коэффициент, подлежащий определению.

Полагаем также, что

$$\sigma_{\theta} = 0,$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Чтобы подтвердить правильность сделанных предположений, найдем функцию напряжений φ . Легко проверить, что при следующем выражении для этой функции

$$\varphi = -\frac{K}{2} r\theta \sin \theta \quad (4.64)$$

дифференциальные уравнения равновесия (4.33) и уравнения совместности (4.38) удовлетворяются. При этом σ_r соответствует выражению (4.63), а σ_{θ} и $\tau_{r\theta}$ равняются нулю.

Остается определить коэффициент K из граничных условий. Верхний край пластинки (рис. 4.16) свободен от напряжений везде, за исключением точки приложения силы. Здесь возникают очень большие напряжения, превышающие предел упругости материала, и в результате сила F оказывается распределенной по площадке конечной величины.

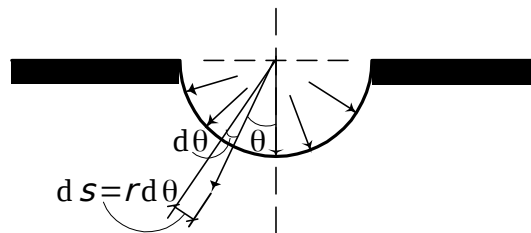


Рис. 4.16. Схема передачи сосредоточенной силы на прямолинейный край пластинки

Вырежем из пластинки по круглой цилиндрической поверхности малого радиуса часть материала, испытывающего пластическую деформацию. Тогда к оставшейся части пластинки можно применить уравнение теории упругости. Равнодействующая усилий, действующих по цилиндрической поверхности, должна быть равна силе F :

$$\int_0^{\pi} \sigma_r \cdot r \cos \theta d\theta = F.$$

Подставим сюда σ_r согласно (4.63). Знак минус при подстановке выражения σ_r не вводим, так как он уже учтен при выборе направления усилий. В результате получим

$$K \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = F \quad \text{и}$$

$$K = \frac{2F}{\pi}.$$

Формула для напряжений принимает окончательный вид

$$\sigma_r = -\frac{2F \cos \theta}{\pi r}. \quad (4.65)$$

Чтобы наглядно представить картину распределения напряжений, сделаем следующее построение. Возьмем произвольную точку D (рис. 4.15). Покажем для нее нормальную к радиусу площадку и действующее на ней радиальное напряжение σ_r . Продолжим направление площадки до пересечения с осью X в точке C . Отрезок OC примем за диаметр d , на котором построим окружность. Из треугольника OCD найдем

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d}.$$

Это соотношение справедливо для любой точки окружности, поэтому во всех ее точках по площадкам, нормальным к радиусу, будут действовать одинаковые нормальные напряжения

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi d}.$$

Можно построить целый ряд таких окружностей. Они называются кругами равных напряжений или кругами Буссинеска. Каждая из таких окружностей является геометрическим местом точек с равными главными напряжениями (рис. 4.17).

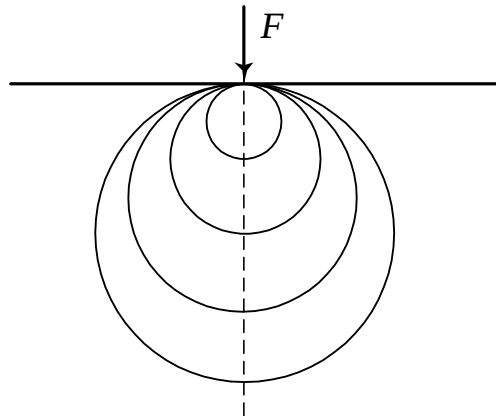


Рис. 4.17. Круги равных напряжений (круги Буссинеска)

Полученное представление о распределении напряжений чрезвычайно наглядно, но не вполне удобно для практического применения. Чтобы судить о надежности сооружения, необходимо знать, как распределяются на заданной глубине нормальные и касательные напряжения по горизонтали и вертикали. Определим напряжения в горизонтальном и вертикальном сечениях (рис. 4.18).

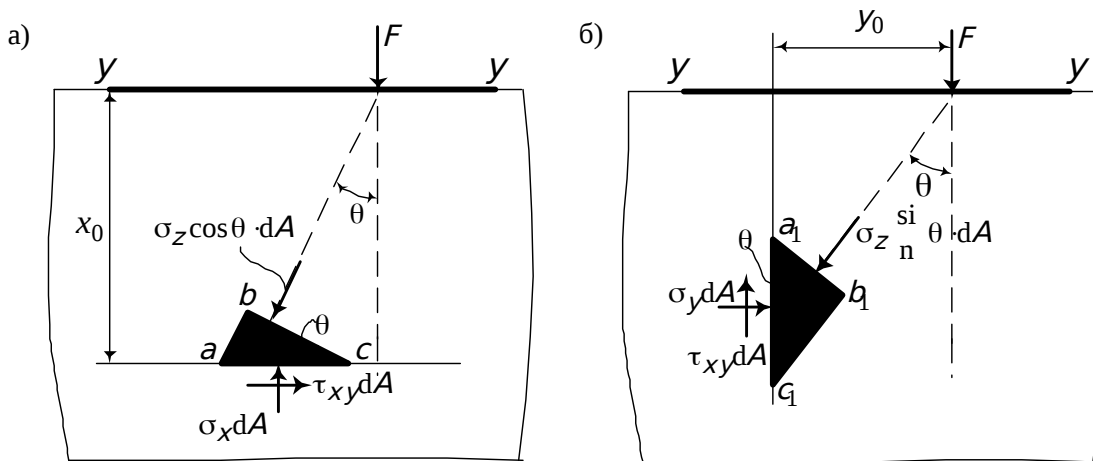


Рис. 4.18. Усилия в вертикальных и горизонтальных сечениях бесконечно большой пластинки

Выделим из пластинки элементарные призмы abc и $a_1 b_1 c_1$. Используя условия проекции на координатные оси и выражения (4.37), найдем

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.66)$$

$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.67)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (4.68)$$

Для заданной постоянной глубины x_0 напряжения σ_x (рис. 4.19, а) достигают максимального значения по линии действия силы F , т. е. при $y=0$. С удалением от места приложения груза напряжения убывают по величине и распределяются на все большую площадь.

Напряжения σ_y (рис. 4.19) у верхнего края пластинки равны нулю. С увеличением x возрастают, на некоторой глубине достигают наибольших значений и затем убывают. С удалением сечения от линии действия силы численные значения напряжений убывают, а максимум смещается вниз. Разные знаки τ_{xy} (рис. 4.19, б) справа и слева от оси x показывают на различие в направлении напряжений.

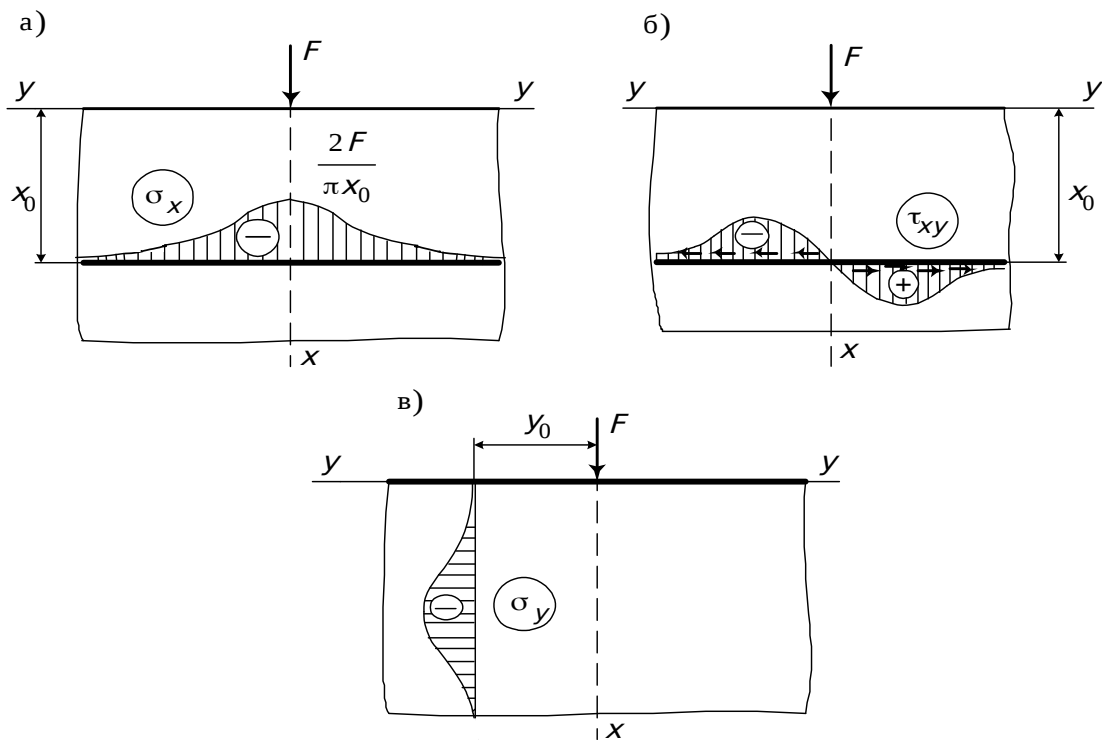


Рис. 4.19. Эпюры σ_x , σ_y , τ_{xy}

4.7. Изгиб пластин

4.7.1. Общие положения

Пластинкой называется тело призматической или цилиндрической формы, ограниченное двумя параллельными основаниями (рис. 4.20).

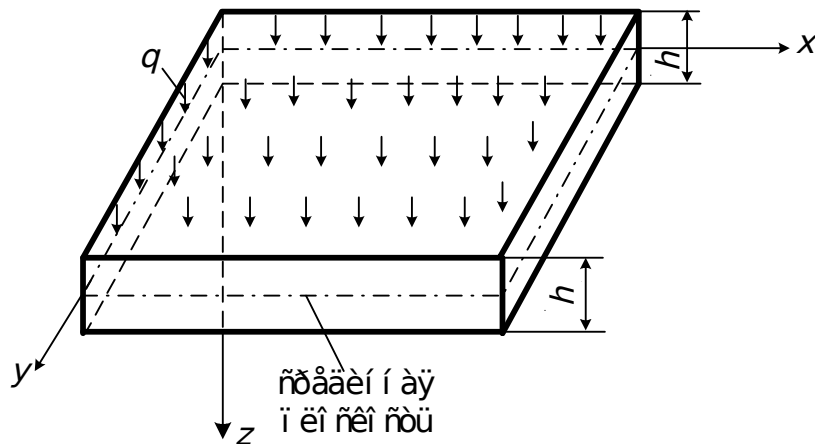


Рис. 4.20. Схема пластинки

Плоскость, которая делит высоту h пластинки пополам, называется срединной плоскостью. Линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью называется контуром пластинки. При изгибе пластинки срединная плоскость имеет то же значение, что и нейтральный слой в балке. Начало координат поместим в одной из точек срединной плоскости (рис. 4.20). При исследовании будем считать, что система осей координат неподвижна и не перемещается вместе с пластинкой при ее деформации. В общем случае на пластинку может действовать много сил различных направлений. Мы будем изучать изгиб пластинки под нагрузкой, перпендикулярной срединной плоскости.

Пластинку можно рассматривать точно так же, как пространственное тело, используя основные уравнения теории упругости (2.1), (2.2), (2.17), (2.18), (2.19), но такой расчет получается очень сложным и применяется редко. При практическом расчете пластинки введем ряд гипотез и допущений, значительно облегчающих исследования.

Будем предполагать, что отдельные слои пластинки не оказывают давления друг на друга, и во всех точках пластины $\sigma_z = 0$. Это приводит к тому, что формулы для напряжений принимают вид

$$\sigma_x = \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right) (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad (4.69)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right) (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad (4.70)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}. \quad (4.71)$$

Подставив в эти уравнения зависимости (1.7), (1.8), (1.10), найдем

$$\sigma_x = \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (4.72)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (4.73)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.74)$$

В дальнейшем удобнее в формулах напряжений иметь не горизонтальные перемещения U и V , а вертикальные, т. е. прогибы W . Установим зависимость между перемещениями. Для этого введем следующую предпосылку: вертикальные линии, проведенные перпендикулярно плоскости пластинки, при деформации только наклоняются, но не искривляются (это предположение аналогично гипотезе Бернулли при расчете балок) (рис. 4.21).

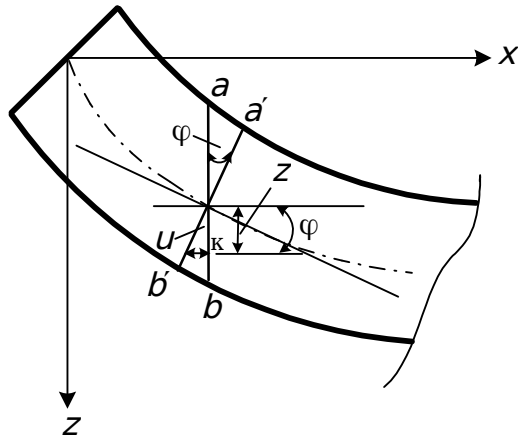


Рис. 4.21. Иллюстрация гипотезы прямых нормалей

Вертикальная линия ac , проведенная в пластинке, при деформации последней не изгибается, а только наклоняется на некоторый угол φ , принимая положение $a'b$.

Перемещение по направлению X какой-либо точки K , имеющей до деформации координату Z , равно

$$u = -Zg\varphi.$$

Угол φ – угол наклона касательной к срединной поверхности после деформации:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Поэтому

$$u = -Z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.75)$$

Аналогично

$$v = -Z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.76)$$

Знак минус в формулах (4.75) и (4.76) показывает, что при положительном Z перемещения U и V направлены в противоположные стороны положительных направлений осей X и Y .

Подставим выражения (4.75), (4.76) в (4.72) – (4.74) и получим

$$\sigma_x = - \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (4.77)$$

$$\sigma_y = - \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (4.78)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.79)$$

Найдем теперь моменты, действующие на единицу ширины (длины) пластинки:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (4.80)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (4.81)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.82)$$

В выражениях (4.80) – (4.82) D – цилиндрическая жесткость, равная

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (4.83)$$

4.7.2. Уравнения равновесия

Выделим из пластинки бесконечно малый элемент размерами в плане dx , dy (рис. 4.22) и высотой h и покажем действующие на него усилия.

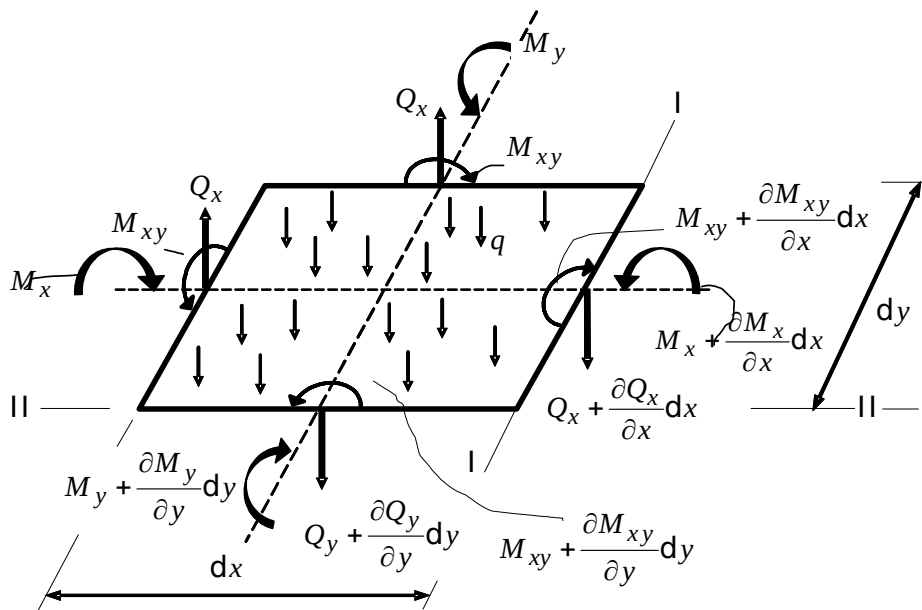


Рис. 4.22. К выводу дифференциальных уравнений равновесия

Спроектируем все силы на вертикальную ось

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (4.84)$$

Возьмем теперь сумму моментов относительно оси I-I

$$-\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0.$$

Отсюда

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (4.85)$$

Точно также, взяв сумму моментов относительно оси II-II (рис. 4.22), получим

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0,$$
$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.86)$$

Если бы не существовало крутящих моментов, то зависимости между поперечными силами и моментами были бы такими же, как и для балок. Подставим значения Q_x и Q_y в формулу (4.84). В результате найдем

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (4.87)$$

Теперь подставим в уравнение (4.87) найденные выше значения моментов (4.80) – (4.82):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (4.88)$$

Полученное нами уравнение имеет сходство с уравнением совместности (4.21). Однако в уравнение (4.88) вместо функции φ входит физическая величина – прогиб w . Между этими двумя уравнениями существенная разница. Уравнение плоской задачи (4.21) выведено как уравнение совместности, уравнение же (4.88) представляет собой уравнение равновесия. При выводе его мы обошлись без уравнения совместности.

4.7.3. Изгиб эллиптической пластинки, защемленной по контуру

Задача об изгибе эллиптической пластинки (рис. 4.23) с заделанными краями в случае действия равномерно распределенной нагрузки решается особенно просто. Покажем это.

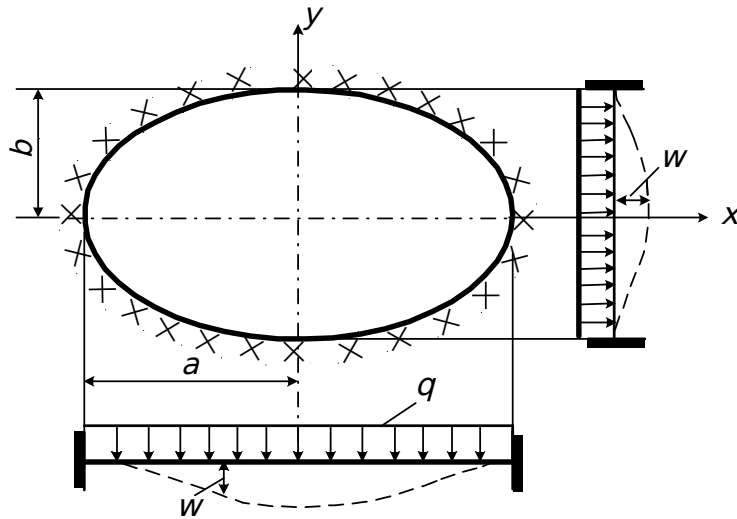


Рис. 4.23. Расчетная схема эллиптической пластинки

Уравнение контура пластинки

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1, \quad (4.89)$$

где \bar{x} и \bar{y} – координаты точек на опорном контуре.

Задаемся выражением прогиба пластинки в следующем виде:

$$w = w_0 \left(\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (4.90)$$

Очевидно, что на контуре пластинки, т. е. при $\bar{x} = \bar{x}$ и $\bar{y} = \bar{y}$, согласно (4.89) прогиб равняется нулю. Другое граничное условие должно отвечать тому, что контур защемлен и углы поворота $\frac{\partial w}{\partial \bar{x}}$ и $\frac{\partial w}{\partial \bar{y}}$ равны нулю, где

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} = 2w_0 \left(\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1 \right) \frac{2\bar{x}}{a^2}, \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{y}} = 2w_0 \left(\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1 \right) \frac{2\bar{y}}{b^2}. \quad (4.92)$$

Приведенные производные при $\bar{x} = \bar{x}$ и $\bar{y} = \bar{y}$ равняются нулю, а следовательно, равняются нулю $\frac{\partial w}{\partial n}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$, где n – нормаль к эллиптическому контуру в рассматриваемой точке, а s – касательная к нему же. Итак, выбранное уравнение упругой линии удовлетворяет граничным условиям. Для того чтобы определить, удовлетворяет ли это уравнение исходному дифференциальному уравнению (4.88)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4} = \frac{q}{D},$$

выполним ряд дифференцирований:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 24 \frac{w_0}{a^4}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 24 \frac{w_0}{b^4}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 8 \frac{w_0}{a^2 b^2}.$$

Подставив эти производные в (4.88), получим

$$w_0 \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) = \frac{q}{D}. \quad (4.93)$$

Отсюда

$$w_0 = \frac{q}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) D}. \quad (4.94)$$

Следовательно, функция $w(x, y)$ известна:

$$w(x, y) = \frac{q}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) D} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (4.95)$$

Получим выражения для напряжений ($x=y=0$):

$$\sigma_x = - \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = - \frac{4Ew_0}{(1-\nu^2)} z \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right), \quad (4.96)$$

$$\sigma_y = - \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = - \frac{4Ew_0}{(1-\nu^2)} z \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right), \quad (4.97)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - \frac{Ez}{1+\nu} \frac{8w_0 xy}{a^2 b^2}. \quad (4.98)$$

В случае круглой пластинки $b=a$ и

$$w_0 = \frac{qa^4}{64D}, \quad w = \frac{w_0}{a^4} (a^2 - r^2)^2. \quad (4.99)$$

4.7.4. Изгиб круглой пластинки

В общем случае нагружения круглой пластинки весьма удобно пользоваться полярными координатами r и θ (см. п. 4.6). Поэтому все основные уравнения изгиба пластинки запишем в полярных координатах, ограничимся простейшим случаем, когда нагрузка, изгибающая пластинку, распределена симметрично относительно центра. При этом условии срединная поверхность изогнутой пластинки будет поверхностью вращения и величина прогиба w будет зависеть лишь от расстояния r рассматриваемой точки до центра пластинки. В таком случае в уравнении (4.38) пропадут члены, заключающие производные по θ , и мы получим дифференциальное уравнение для изогнутой пластинки в таком виде:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}. \quad (4.100)$$

Общий интеграл уравнения (4.100) для случая, когда интенсивность нагрузки q представляется целой алгебраической функцией от r (возьмем, например, равномерно распределенную нагрузку), запишется так:

$$w = C_1 r^2 + C_2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (4.101)$$

Условия на контуре ($r=a$) запишутся различно в зависимости от способа закрепления:

– для заделанного края

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0; \quad (4.102)$$

– для шарнирно опертого края

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0. \quad (4.103)$$

Определяя произвольные постоянные C_1 и C_2 на основании условий (4.102) и (4.103), получаем:

– для пластинки с заделанным краем

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2; \quad (4.104)$$

– для пластинки с шарнирно опертым краем

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \nu} \right]. \quad (4.105)$$

Имея уравнение изогнутой поверхности, легко найти значение изгибающих и скручивающего моментов, а также соответствующие им напряжения.

4.7.5. Решение задач на изгиб прямоугольных пластинок

Расчет пластинки следует начинать с нахождения такой функции W , которая удовлетворяла бы основному уравнению (4.88) и условиям на контуре (рис. 4.24). Как и в других задачах, такую функцию W приходится подбирать, задавая ее и делая проверки.

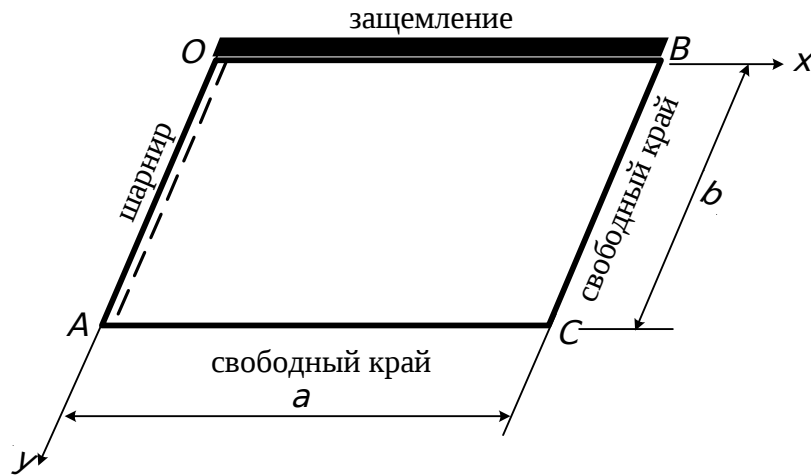


Рис. 4.24. Условия на контуре пластинки

На шарнирном крае ($x=0$) отсутствует прогиб $w=0$ и изгибающий момент $M_x=0$.

В случае жесткой заделки ($y=0$) края должны обращать в нуль прогиб $w=0$ и угол поворота в направлении, перпендикулярном этому краю, т. е. $\frac{\partial w}{\partial y}=0$.

На свободном конце должны обращаться в нуль изгибающий, крутящий моменты и поперечная сила:

$$\text{при } x=a \quad M_x=0, \quad M_{xy}=0, \quad Q_x=0;$$

$$\text{при } y=b \quad M_y=0, \quad M_{xy}=0, \quad Q_y=0.$$

Таким образом, вместо двух граничных условий, которые мы имели в случае опертого и заделанного краев, здесь получаются три условия. Два последних не могут быть удовлетворены одновременно. Распределенный крутящий момент равносителен поперечной силе $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ (или $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$).

Поэтому, добавляя ее к основной поперечной силе Q_x (Q_y), получим

$$\text{при } x=a \quad M_x=0, \quad Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0; \tag{4.106}$$

$$\text{при } y=b \quad M_y=0, \quad Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Если для данного конкретного случая будет найдена функция прогибов w , то далее могут быть найдены изгибающие и крутящие моменты в любом месте пластинки, определяемом координатами x и y :

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \tag{4.107}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \tag{4.108}$$

$$M_{xy} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.109)$$

Поперечные силы будут определяться по формулам

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad (4.110)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.111)$$

Можно поперечные силы выразить непосредственно через прогибы, подставив в формулы (4.110), (4.111) значения моментов (4.107) – (4.109):

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (4.112)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (4.113)$$

Зная моменты, найдем нормальные напряжения

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{J}, \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{J}, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy} z}{J}. \quad (4.114)$$

Эпюры распределения напряжений по толщине пластинки показаны на рис. 4.25 (касательные напряжения τ_{xz} здесь не показаны).

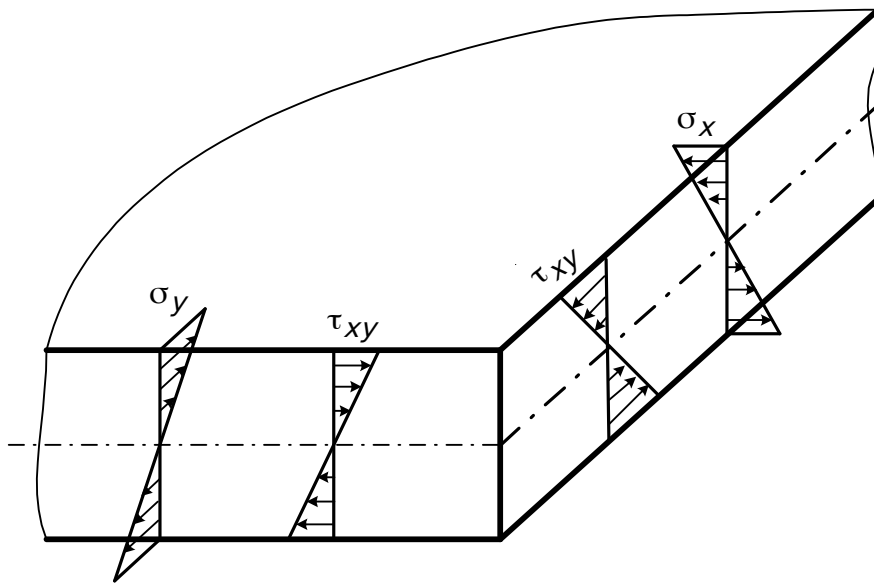


Рис. 4.25. Эпюры напряжений по толщине пластинки

В общем случае задача об изгибе пластинки не решается аналитически (т. е. ее решение не выписывается в виде формулы, а находится различными приближенными, численными методами при помощи программирования). Однако в некоторых частных случаях аналитическое решение возможно. Рассмотрим такие случаи.

4.7.6. Решение дифференциального уравнения для пластинки, две противоположные грани которой шарнирно оперты, а две другие закреплены произвольным образом

Рассмотрим пластинку, у которой два противоположных края, например, OB и AC оперты шарнирно; два других – OA и BC могут быть опертыми как угодно или свободными (рис. 4.26).

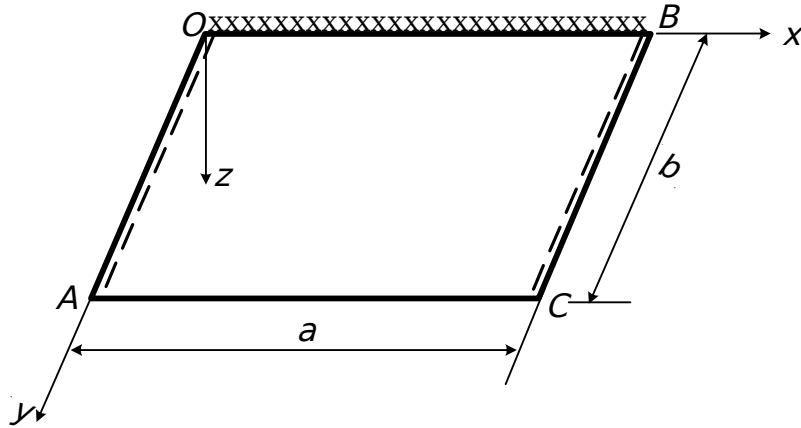


Рис. 4.26. Схема пластинки

Решение дифференциального уравнения (4.88) будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (4.115)$$

Здесь $f_m(y)$ – неизвестная пока функция y , которая должна быть выбрана таким образом, чтобы было удовлетворено уравнение (4.88) и условия по сторонам пластинки, параллельным оси x . Найдем производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{IV}(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m''(y) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Подставив выражения (4.116) в дифференциальное уравнение (4.88), найдем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[f_m^{IV}(y) - 2f_m''(y) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + f_m(y) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q}{D}. \quad (4.117)$$

Умножим обе части уравнения (4.117) на $\sin \frac{n\pi x}{a}$ ($n=1,2,\dots$) и проинтегрируем в пределах от нуля до a . Учитывая, что

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ a/2 & \text{при } m = n \end{cases}$$

получим

$$f_n^{IV}(y) - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n''(y) + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 f_n(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (4.118)$$

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad (4.119)$$

$$\varphi_n = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \alpha x dx. \quad (4.120)$$

С учетом обозначений (4.119) и (4.120) получим дифференциальное уравнение относительно функции $f_n(y)$

$$f_n^{IV} - 2\alpha^2 f_n'' + \alpha^4 f_n = \frac{\varphi_n}{D}. \quad (4.121)$$

Общее решение этого уравнения состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения $\frac{\varphi_n}{D\alpha^4}$ полного уравнения:

$$f_n = \frac{\varphi_n}{D\alpha^4} + A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n \operatorname{sh} \alpha y + C_n y \operatorname{ch} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y. \quad (4.122)$$

Произвольные постоянные A_n, B_n, C_n, D_n определяются из граничных условий на краях.

Граничные условия, выраженные через переменную f_n , будут иметь такой вид:

– полное защемление:

$$y=0, \quad y=b: \quad f_n=0, \quad f_n'=0; \quad (4.123)$$

– шарнирное опирание:

$$y=0, \quad y=b \quad f_n=0, \quad \alpha^2 f_n'' - f_n''=0; \quad (4.124)$$

– свободный край:

$$y=0, \quad y=b: \quad \alpha^2 f_n'' - f_n''=0, \quad \alpha^2(2-\nu)f_n' - f_n'''=0. \quad (4.125)$$

Продифференцируем уравнение (4.122) один, два и три раза по y , что будет соответствовать условиям (4.123) – (4.125):

$$f_n' = \alpha(A_n \operatorname{sh} \alpha y + B_n \operatorname{ch} \alpha y) + (C_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n \operatorname{sh} \alpha y) + \alpha y(C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n \operatorname{ch} \alpha y), \quad (4.126)$$

$$f_n'' = \alpha^2 (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n \operatorname{sh} \alpha y) + 2\alpha (C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n \operatorname{ch} \alpha y) + \alpha^2 y (C_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n \operatorname{sh} \alpha y), \quad (4.127)$$

$$f_n''' = \alpha^3 (A_n \operatorname{sh} \alpha y + B_n \operatorname{ch} \alpha y) + 3\alpha^2 (C_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n \operatorname{sh} \alpha y) + \alpha^3 y (C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n \operatorname{ch} \alpha y). \quad (4.128)$$

Теперь определим постоянные A_n , B_n , C_n , D_n . Формулы для этих постоянных интегрирования приведены в прил. 1.

4.7.7. Решение дифференциального уравнения для симметричной пластинки, нагруженной симметричным нагружением

Если пластинка симметрична и нагружение симметрично, то в решении дифференциального уравнения (4.121) оставляем только симметричные члены. Тогда

$$f_n = \frac{\varphi_n}{D\alpha^4} + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + A_n \operatorname{ch} \alpha y. \quad (4.129)$$

Здесь

$$\varphi_n = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} q(x) \cos \alpha x dx. \quad (4.130)$$

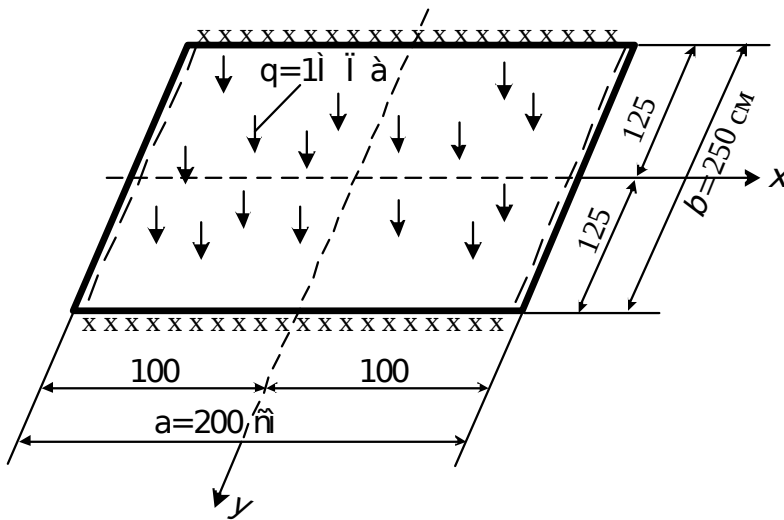
Постоянные интегрирования A_n и D_n для этого случая приведены в прил. 2.

Прогиб в симметричной пластинке, нагруженной симметричным нагружением, определяется по такой формуле:

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(y) \cos \alpha x. \quad (4.131)$$

Изгибающие и крутящие моменты, а также напряжения определяются по формулам (4.107), (4.108), (4.109), (4.114).

Пример расчета



Исходные данные:
 $\nu = 0,3$; $E_s = 2,1 \cdot 10^5$
 МПа; $h = 5$ см.

Рис. 4.27. Расчетная схема пластинки

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n \cos \alpha x;$$

$$f_n = D_n y \operatorname{sh} \alpha y + A_n \operatorname{ch} \alpha y + \frac{\varphi_n}{D \alpha^4};$$

$$\varphi_n = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} q \cos \alpha x dx;$$

$$\varphi_n = \frac{2q}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Граничные условия

– на шарнирно-опертых сторонах

$$f_n = 0; \quad \nu f_n'' - \alpha^2 f_n = 0;$$

– на защемленных сторонах

$$f_n = 0, \quad f_n' = 0,$$

$$A_n = - \frac{\varphi_n}{D \alpha^4} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} + \frac{\alpha b}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha b}{2}}{\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b},$$

$$D_n = \frac{2\varphi_n}{D \alpha^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2}}{\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b}.$$

Прогиб ($x=0, y=0$)

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\varphi_n}{D \alpha^4} \right) \cos \alpha x,$$

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[A_n + \frac{\varphi_n}{D \alpha^4} \right],$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha^2 \left(A_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\varphi_n}{D \alpha^4} \right) \cos \alpha x,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (\alpha A_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \alpha \operatorname{ch} \alpha y) \cos \alpha x,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (\alpha^2 A_n \operatorname{ch} \alpha y + \alpha D_n \operatorname{ch} \alpha y + \alpha D_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n y \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha y) \cos \alpha x,$$

при $x=0, y=0$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\alpha^2 A_n + \frac{\varphi_n}{D \alpha^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (\alpha^2 A_n + 2 \alpha D_n),$$

$$M_x = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D \left[\left(\alpha^2 A_n + \frac{\varphi_n}{D \alpha^2} \right) - \nu (\alpha^2 A_n + 2 \alpha D_n) \right],$$

$$M_y = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D \left[- (\alpha^2 A_n + 2 \alpha D_n) + \nu \left(\alpha^2 A_n + \frac{\varphi_n}{D \alpha^2} \right) \right],$$

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{J}, \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{J}, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Вычисляем значения прогибов w и напряжений σ_x и σ_y , записывая промежуточные результаты в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Численные значения параметров

Величина	n			$\sum_{n=1,3,5}$
	1	3	5	
α	0,0157	0,0471	0,0785	
φ_n	$0,637q$	$- 0,212q$	$0,127q$	
A_n	$- 76 \cdot 10^5 \frac{q}{D}$	$1642 \frac{q}{D}$	$- 3,960 \frac{q}{D}$	
D_n	$39,2 \cdot 10^3 \frac{q}{D}$	$- 11,25 \frac{q}{D}$	$0,0287 \frac{q}{D}$	
W	$29,5 \cdot 10^5 \frac{q}{D}$	$- 0,41 \cdot 10^5 \frac{q}{D}$	$0,033 \cdot 10^5 \frac{q}{D}$	$28,623 \cdot 10^5 \frac{q}{D} = 1,19 \text{ см}$
M_x	$899,38q$	$- 92,73q$	$20,58q$	$827,23q$
M_y	$855,7q$	$- 30,1q$	$6,19q$	$831,8q$
σ_x				198,5 МПа
σ_y				199,65 МПа

Эпюры напряжений σ_x и σ_y см. на рис. 4.25.

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

5.1. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей является одним из самых эффективных методов расчета пластинок, пригодных для любых условий опирания, для любого нагружения и для любых очертаний пластинки. Сущность этого метода состоит в том, что дифференциальное уравнение пластинки (4.88)

$$\nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{q}{D}$$

заменяется системой линейных алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются прогибы W в отдельных точках поверхности пластинки. Перед тем как осуществить переход от дифференциального уравнения в частных производных до уравнений в конечных разностях, остановимся на главных положениях этого метода.

5.1.1. Функция W зависит от переменной X

Рассмотрим непрерывную функцию $w(x)$, которая зависит от переменной X , и предположим, что известны значения $w(x)$, которые отвечают равноудаленным друг от друга значениям X (рис. 5.1).

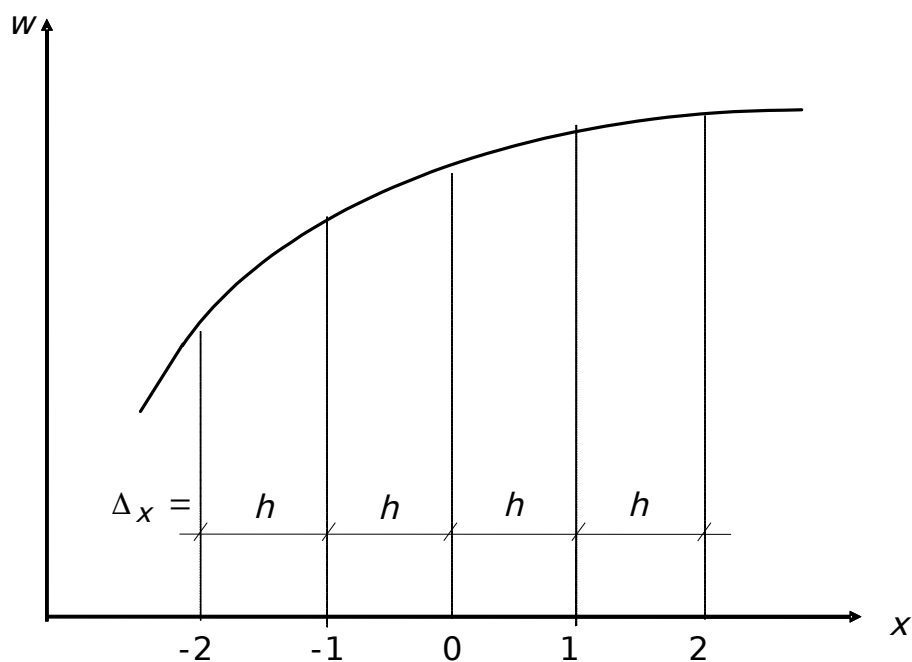


Рис. 5.1. Кривая $w = w(x)$

Для точки O запишем значение производной в конечных разностях:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{h}(w_1 - w_0) - \text{первая правая разность};$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{h}(w_0 - w_{-1}) - \text{первая левая разность};$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2h}(w_1 - w_{-1}) - \text{первая центральная разность}.$$

Таким же образом можно примерно выразить вторую производную:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{1}{h} \frac{d}{dx}(w_1) - \frac{1}{h} \frac{d}{dx}(w_0) = \frac{1}{h^2}(w_2 - 2w_1 + w_0) -$$

вторая правая разность;

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{1}{h} \frac{d}{dx}(w_0) - \frac{1}{h} \frac{d}{dx}(w_{-1}) = \frac{1}{h^2}(w_0 - 2w_{-1} + w_{-2}) -$$

вторая левая разность;

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{h^2}(w_1 - 2w_0 + w_{-1}) - \text{вторая центральная разность}.$$

Вообще производные в той или иной точке будут аппроксимироваться с наибольшей точностью через центральные разности.

5.1.2. Функция W зависит от переменных X и Y

Если W является функцией X и Y , то должны быть введены частные производные. Воспользуемся теми же соображениями, что и в п. 5.1.1, и примем $\Delta_x = \Delta_y = h$ (рис. 5.2).

Из определения частных производных вытекают равенства:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2h}(w_1 - w_3), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2h}(w_2 - w_4),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}(w_1 - 2w_0 + w_3), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}(w_2 - 2w_0 + w_4),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4}(w_5 - 4w_1 + 6w_0 - 4w_3 + w_9),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4}(w_7 - 4w_2 + 6w_0 - 4w_4 + w_{11}),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h^4} (w_6 + w_8 + w_{10} + w_{12} - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 4w_0).$$

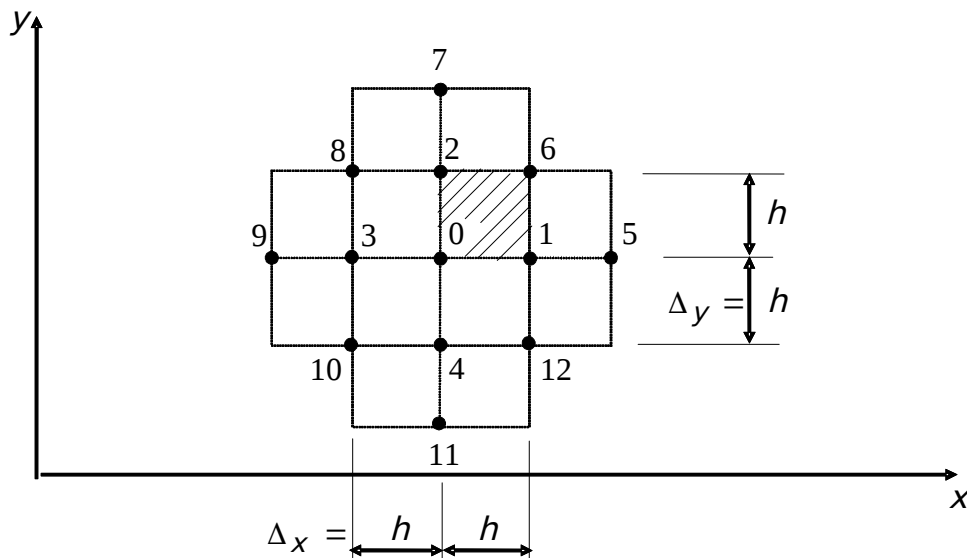


Рис. 5.2. Исследуемая область пластинки

Уравнение (4.88) в точке О приобретает вид

$$\frac{1}{h^2} [20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_6 + w_8 + w_{10} + w_{12}) + (w_5 + w_7 + w_9 + w_{11})] = \frac{q_0}{D}. \quad (5.1)$$

Здесь свободный член уравнения определяется путем сбора нагрузки q_0 с площади, что соответствует узлу 0 (она заштрихована на рис. 5.2), и делением ее на цилиндрическую жесткость пластинки D согласно (4.83). При этом правую часть уравнения нужно умножить на площадь элемента h^2 .

Составляя уравнение (5.1) для каждого узла сетки, получим систему линейных алгебраических уравнений, число которых равняется числу узлов сетки, т. е. числу неизвестных прогибов w . Только для тех узлов, в которых прогибы заранее известны (например, в местах опирания пластинки, где прогибы равны нулю), уравнение (5.1) составлять не нужно.

Точность решения зависит от густоты сетки. Совпадение полученного методом конечных разностей решения можно контролировать с использованием принципа Рунге, что при наличии двух решений с разным шагом сетки позволяет получить уточненное решение и оценку погрешности.

5.1.3. Граничные условия

Для крайних узлов, а также для линий, соседних с крайними, при составлении уравнения (5.1) приходится вводить законтурные точки, как показано на рис. 5.3.

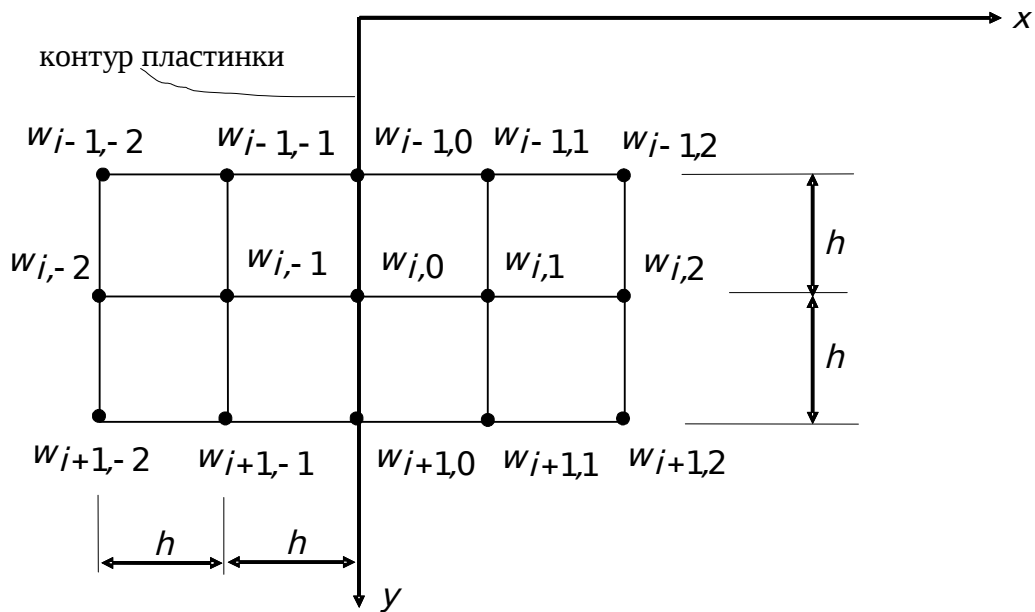


Рис. 5.3. К выводу разностной аппроксимации граничных условий

При этом появляется значительное количество дополнительных неизвестных, таких как прогибы в законтурных точках. Недостающие уравнения составляются как граничные условия, выраженные в конечных разностях.

5.1.4. Шарнирное опирание пластинки по линии $x=0$

При шарнирном опирании функция прогибов может быть продолжена за линию шарнирного опирания (рис. 5.4).

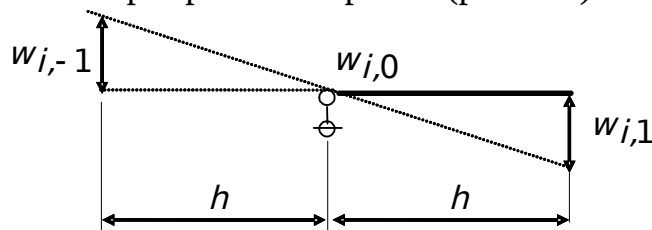


Рис. 5.4. Шарнирное опирание

Тогда

$$w_{j,-1} = -w_{j,1}. \quad (5.2)$$

В соответствии с п. 4.7.5 граничные условия при шарнирном опирании будут иметь вид

$$w_{j,0} = 0, \quad w_{j,-1} = -w_{j,1}. \quad (5.3)$$

5.1.5. Защемленный край пластинки при $x=0$

Для защемленного края пластинки функцию прогибов продлим за линии закрепления, как показано на рис. 5.5.

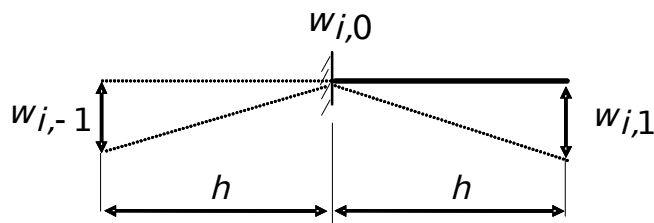


Рис. 5.5. Защемление

Тогда

$$w_{i,-1} = w_{i,1}. \quad (5.4)$$

В соответствии с п. 4.7.5 граничные условия в конечно-разностной форме имеют вид

$$w_{i,0} = 0, \quad (w_{i,1} - w_{i,-1}) = 0. \quad (5.5)$$

5.1.6. Свободный край пластинки при $x=0$

Для свободного края пластинки должны быть выполнены такие условия:

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (5.6)$$

В конечно-разностной форме эти условия имеют такой вид:

$$\begin{aligned} & w_{i,2} - 2w_{i,1} + 2w_{i,-1} - w_{i,-2} + \\ & + (2 - \nu)(w_{i+1,1} - 2w_{i,1} + w_{i-1,1} - w_{i+1,-1} + 2w_{i,-1} - w_{i-1,-1}) = 0, \\ & (w_{i,1} - 2w_{i,0} + 2w_{i,-1}) + \nu(w_{i+1,0} - 2w_{i,0} + 2w_{i-1,0}) = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} w_{i,-1} &= -w_{i,1} + 2(1 + \nu)w_{i,0} - \nu(w_{i+1,1} + w_{i-1,1}), \\ w_{i,-2} &= w_{i,2} - 4(3 - \nu)w_{i,1} + 6(2 + 2\nu - \nu^2)w_{i,0} - \\ & - 4(1 + 2\nu - \nu^2)(w_{i+1,0} + w_{i-1,0}) + 2(2 - \nu)(w_{i+1,1} + w_{i-1,1}) + \\ & + \nu(2 - \nu)(w_{i+2,0} + w_{i-2,0}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.1.7. Составление системы разностных уравнений

Разобьем пластинку на $n \times n$ элементов со стороной h , т. е. введем разностную сетку размером $n \times n$ (например, на рис. 5.6 приведена сетка размером 7×7).

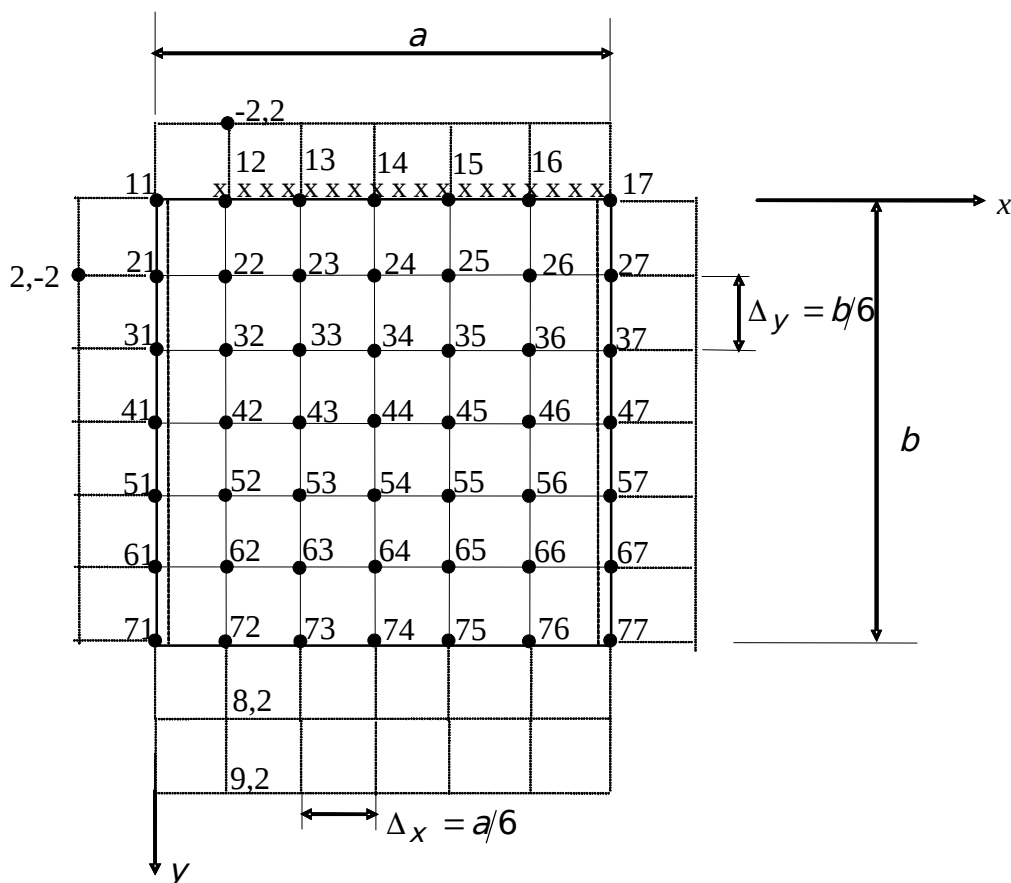


Рис. 5.6. Разностная сетка

Согласно (5.1) разностное уравнение в узлах (i,j) , $i,j = 1, \dots, n$ запишется таким образом:

$$\begin{aligned}
 & 20w_{ij} - 8(w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1}) + \\
 & + 2(w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}) + \\
 & + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} = \frac{q_{ij}}{D} h^2.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Дополнительные уравнения записываются для законтурных узлов $(i,j = -2, -3, n+1, n+2)$ в зависимости от вида закрепления края пластинки в соответствии с (5.3), (5.4) или (5.7). Их количество в зависимости от вида закрепления составляет от $4(n-2)$ до $8(n-2)$, т. е. количество уравнений может на $8(n-2)$ превышать количество узлов сетки. Для примера, для сетки размером $n=10 \times 10 = 100$ общее количество узлов для свободных

краев составляет $10 \times 10 + 8(10 - 2) = 164$. Это означает, что необходимо решать систему 164 уравнений со 164 неизвестными, т.е. матрица системы имеет размер 164×164 , что больше чем на 50 % превышает размерность сетки. Работа с таким объемом памяти вызывает значительные трудности при написании программы и делает ее неудобной для чтения.

Для уменьшения размерности системы целесообразно выражения для граничных условий (5.3), (5.4) или (5.7) подставить в уравнение (5.9). При этом размерность матрицы системы при любом виде закрепления будет равняться $n \times n$.

5.1.8. Примеры составления системы линейных уравнений

Приведены примеры составления системы линейных уравнений для пластинок с разными видами закрепления.

5.1.8.1. Система уравнений для пластинки с заземленным верхним краем, свободным нижним и шарнирами по боковым сторонам

Схема пластинки приведена на рис. 5.6, $n = 7$.

На краях пластинки имеем:

– на левом и правом краях соответственно с (5.3)

$$\begin{aligned} w_{i,1} = 0, \quad w_{i,-2} = -w_{i,2}, \quad i = 1, \dots, 7, \\ w_{i,7} = 0, \quad w_{i,8} = -w_{i,6}, \quad i = 1, \dots, 7; \end{aligned} \quad (5.10)$$

– на верхнем крае

$$w_{1,j} = 0, \quad w_{-2,j} = w_{2,j}, \quad j = 1, \dots, 7; \quad (5.11)$$

– на нижнем крае

$$\begin{aligned} w_{n+1,j} = -w_{n-1,j} + 2(1 + \nu)w_{n,j} - \nu(w_{n,j+1} + w_{n,j-1}), \\ w_{n+2,j} = w_{n-2,j} - 4(3 - \nu)w_{n-1,j} + 6(2 + 2\nu - \nu^2)w_{n,j} - \\ - 4(1 + 2\nu - \nu^2)(w_{n,j+1} + w_{n,j-1}) + 2(2 - \nu)(w_{n-1,j+1} + w_{n-1,j-1}) + \\ + \nu(2 - \nu)(w_{n,j+2} + w_{n,j-2}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Составляя уравнение (5.9) в узлах и подставляя в него выражения (5.10) – (5.12), получим систему линейных уравнений размерностью 49×49 :

$$w_{1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$w_{21} = 0,$$

$$20w_{22} - 8(w_{32} + w_{23}) + 2w_{33} + w_{42} + w_{24} = W_{22},$$

$$21w_{23} - 8(w_{33} + w_{22} + w_{24}) + 2(w_{32} + w_{34}) + w_{43} + w_{25} = W_{23},$$

$$\begin{aligned} 21w_{24} - 8(w_{34} + w_{23} + w_{25}) + 2(w_{33} + w_{35}) + w_{44} + w_{22} + w_{26} = \\ = W_{24}, \end{aligned}$$

;

$$21w_{25} - 8(w_{35} + w_{24} + w_{26}) + 2(w_{34} + w_{36}) + w_{45} + w_{23} = W_{25},$$

$$20w_{26} - 8(w_{36} + w_{25}) + 2w_{35} + w_{46} + w_{24} = W_{26},$$

$$w_{27} = 0,$$

$$w_{31} = 0,$$

$$19w_{32} - 8(w_{42} + w_{22} + w_{33}) + 2(w_{23} + w_{43}) + w_{52} + w_{34} = W_{32},$$

$$20w_{33} - 8(w_{43} + w_{32} + w_{23} + w_{34}) + 2(w_{42} + w_{22} + w_{24} + w_{44}) + w_{53} + w_{35} = W_{33},$$

$$20w_{34} - 8(w_{44} + w_{33} + w_{24} + w_{35}) + 2(w_{43} + w_{23} + w_{25} + w_{45}) + w_{54} + w_{32} + w_{36} = W_{34},$$

$$20w_{35} - 8(w_{45} + w_{34} + w_{25} + w_{36}) + 2(w_{44} + w_{24} + w_{26} + w_{46}) + w_{55} + w_{33} = W_{35},$$

$$19w_{36} - 8(w_{46} + w_{35} + w_{26}) + 2(w_{45} + w_{25}) + w_{56} + w_{34} = W_{36},$$

$$w_{37} = 0,$$

$$w_{41} = 0,$$

$$19w_{42} - 8(w_{52} + w_{32} + w_{43}) + 2(w_{33} + w_{53}) + w_{62} + w_{22} + w_{44} = W_{42},$$

$$20w_{43} - 8(w_{53} + w_{42} + w_{33} + w_{44}) + 2(w_{52} + w_{32} + w_{34} + w_{54}) + w_{63} + w_{23} + w_{45} = W_{43},$$

$$20w_{44} - 8(w_{54} + w_{43} + w_{34} + w_{45}) + 2(w_{53} + w_{33} + w_{35} + w_{55}) + w_{64} + w_{42} + w_{24} + w_{46} = W_{44},$$

$$20w_{45} - 8(w_{55} + w_{44} + w_{35} + w_{46}) + 2(w_{54} + w_{34} + w_{36} + w_{56}) + w_{65} + w_{43} + w_{25} = W_{45},$$

$$19w_{46} - 8(w_{56} + w_{45} + w_{36}) + 2(w_{55} + w_{35}) + w_{66} + w_{44} + w_{26} = W_{46},$$

$$w_{47} = 0,$$

$$w_{51} = 0,$$

$$19w_{52} - 8(w_{62} + w_{42} + w_{53}) + 2(w_{43} + w_{63}) + w_{72} + w_{32} + w_{54} = W_{52},$$

$$20w_{53} - 8(w_{63} + w_{52} + w_{43} + w_{54}) + 2(w_{62} + w_{42} + w_{44} + w_{64}) + w_{73} + w_{33} + w_{55} = W_{53},$$

$$20w_{54} - 8(w_{64} + w_{53} + w_{44} + w_{55}) + 2(w_{63} + w_{43} + w_{45} + w_{65}) + w_{74} + w_{52} + w_{34} + w_{56} = W_{54},$$

$$20w_{55} - 8(w_{65} + w_{54} + w_{45} + w_{56}) + 2(w_{64} + w_{44} + w_{46} + w_{66}) + w_{75} + w_{53} + w_{35} = W_{55},$$

$$19w_{56} - 8(w_{66} + w_{55} + w_{46}) + 2(w_{65} + w_{45} + w_{46}) + w_{76} + w_{54} + w_{36} = W_{56},$$

$$w_{57} = 0,$$

$$w_{61} = 0,$$

$$18w_{62} - 8(w_{52} + w_{63}) + 2w_{53} + w_{42} + w_{64} + w_{72}[2(1+\nu) - 8] + w_{73}(2 - \nu) = W_{62},$$

$$19w_{63} - 8(w_{62} + w_{53} + w_{64}) + 2(w_{52} + w_{54}) + w_{43} + w_{65} + w_{73}[2(1+\nu) - 8] + (2 - \nu)(w_{72} + w_{74}) = W_{63},$$

$$19w_{64} - 8(w_{63} + w_{54} + w_{65}) + 2(w_{53} + w_{55}) + w_{62} + w_{44} + w_{66} + w_{74}[2(1+\nu) - 8] + (2 - \nu)(w_{73} + w_{75}) = W_{64},$$

$$19w_{65} - 8(w_{64} + w_{55} + w_{66}) + 2(w_{54} + w_{56}) + w_{63} + w_{45} + w_{75}[2(1+\nu) - 8] + (2 - \nu)(w_{74} + w_{76}) = W_{65},$$

$$18w_{66} - 8(w_{65} + w_{56}) + 2w_{55} + w_{64} + w_{46} + w_{76}[2(1+\nu) - 8] + w_{75}(2 - \nu) = W_{66},$$

$$w_{71} = 0,$$

$$(15 - 8\nu - 5\nu^2)w_{72} + 4(-2 + \nu + \nu^2)w_{73} + (1 - \nu^2)w_{74} + 2(2 - \nu)w_{63} - 4(3 - \nu)w_{62} + 2w_{52} = W_{72},$$

$$(16 - 8\nu - 6\nu^2)w_{73} + 4(-2 + \nu + \nu^2)(w_{72} + w_{74}) + (1 - \nu^2)w_{75} + 2(2 - \nu)(w_{62} + w_{64}) - 4(3 - \nu)w_{63} + 2w_{53} = W_{73},$$

$$(16 - 8\nu - 6\nu^2)w_{74} + 4(-2 + \nu + \nu^2)(w_{73} + w_{75}) + (1 - \nu^2)(w_{72} + w_{76}) + 2(2 - \nu)(w_{63} + w_{65}) - 4(3 - \nu)w_{64} + 2w_{54} = W_{74},$$

$$(16 - 8\nu - 6\nu^2)w_{75} + 4(-2 + \nu + \nu^2)(w_{76} + w_{74}) + (1 - \nu^2)w_{73} + 2(2 - \nu)(w_{66} + w_{64}) - 4(3 - \nu)w_{65} + 2w_{55} = W_{75},$$

$$(15 - 8\nu - 5\nu^2)w_{76} + 4(-2 + \nu + \nu^2)w_{75} + (1 - \nu^2)w_{74} + 2w_{56} - 4(3 - \nu)w_{66} + 2(2 - \nu)w_{65} = W_{76},$$

$$w_{77} = 0,$$

$$W_{ij} = \frac{q_{ij}}{D} h^2, \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

5.1.8.2. Система уравнений для пластинки с шарнирным опиранием боковых и верхнего краев и свободным нижним краем

Схема пластинки приведена на рис. 5.7, $n=7$

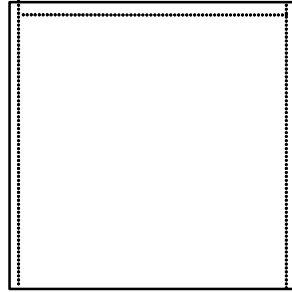


Рис. 5.7. Схема пластинки с шарнирным опиранием боковых и верхнего краев и свободным нижним краем

На краях пластинки имеем:

- на правом и левом краях условия (5.10);
- на верхнем крае

$$w_{1,j} = 0, \quad w_{2,j} = w_{2,j}, \quad j=1, \dots, 7;$$

- на нижнем крае условия (5.12).

Уравнения, записанные для узлов с номерами $i=3, \dots, 7, j=1, \dots, 7$, имеют такой вид:

$$\begin{aligned} w_{1,j} &= 0, \quad j=1, \dots, 7, \\ w_{21} &= 0, \\ 18w_{22} - 8(w_{32} + w_{23}) + 2w_{33} + w_{42} + w_{24} &= W_{22}, \\ 19w_{23} - 8(w_{33} + w_{22} + w_{24}) + 2(w_{32} + w_{34}) + w_{43} + w_{25} &= W_{23}, \\ 19w_{24} - 8(w_{34} + w_{23} + w_{25}) + 2(w_{33} + w_{35}) + w_{44} + w_{22} + w_{26} &= \\ &= W_{24} \\ &\cdot \\ &\quad 19w_{25} - 8(w_{35} + w_{24} + w_{26}) + 2(w_{34} + w_{36}) + w_{45} + w_{23} = W_{25}, \quad (5.13) \\ 18w_{26} - 8(w_{36} + w_{25}) + 2w_{35} + w_{46} + w_{24} &= W_{26}, \\ w_{27} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения, которые остались (т. е. уравнения, записанные для узлов с номерами $i=3, \dots, 7, j=1, \dots, 7$), и правые части W_{ij} имеют такой же вид, как и в предыдущем случае уравнения (5.13).

5.1.8.3. Система уравнений для пластинки с шарнирным опиранием боковых и нижнего краев и защемленным верхним краем

Схема пластинки приведена на рис. 5.8, $n=7$

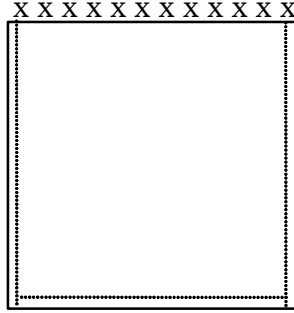


Рис. 5.8. Схема пластинки с шарнирным опиранием боковых и нижнего краев и заземленным верхним краем

На краях пластинки имеем:

– на правом и левом краях условия (5.10);

– на верхнем крае

$$w_{1,j} = 0, \quad w_{2,j} = w_{2,j}, \quad j=1, \dots, 7;$$

– на нижнем крае

$$w_{7,j} = 0, \quad w_{8,j} = -w_{6,j}, \quad j=1, \dots, 7.$$

Система линейных уравнений с правыми частями имеет вид:

$$w_{1,j} = 0, \quad j=1, \dots, n,$$

$$w_{21} = 0,$$

$$20w_{22} - 8(w_{32} + w_{23}) + 2w_{33} + w_{42} + w_{24} = W_{22},$$

$$21w_{23} - 8(w_{33} + w_{22} + w_{24}) + 2(w_{32} + w_{34}) + w_{43} + w_{25} = W_{23},$$

$$21w_{24} - 8(w_{34} + w_{23} + w_{25}) + 2(w_{33} + w_{35}) + w_{44} + w_{22} + w_{26} = W_{24},$$

$$21w_{25} - 8(w_{35} + w_{24} + w_{26}) + 2(w_{34} + w_{36}) + w_{45} + w_{23} = W_{25},$$

$$20w_{26} - 8(w_{36} + w_{25}) + 2w_{35} + w_{46} + w_{24} = W_{26},$$

$$w_{27} = 0,$$

$$w_{31} = 0,$$

$$19w_{32} - 8(w_{42} + w_{22} + w_{33}) + 2(w_{23} + w_{43}) + w_{52} + w_{34} = W_{32},$$

$$20w_{33} - 8(w_{43} + w_{32} + w_{23} + w_{34}) + 2(w_{42} + w_{22} + w_{24} + w_{44}) + w_{53} + w_{35} = W_{33},$$

$$20w_{34} - 8(w_{44} + w_{33} + w_{24} + w_{35}) + 2(w_{43} + w_{23} + w_{25} + w_{45}) + w_{54} + w_{32} + w_{36} = W_{34},$$

$$20w_{35} - 8(w_{45} + w_{34} + w_{25} + w_{36}) + 2(w_{44} + w_{24} + w_{26} + w_{46}) + w_{55} + w_{33} = W_{35},$$

$$19w_{36} - 8(w_{46} + w_{35} + w_{26}) + 2(w_{45} + w_{25}) + w_{56} + w_{34} = W_{36},$$

$$w_{37} = 0,$$

$$w_{41} = 0,$$

$$19w_{42} - 8(w_{52} + w_{32} + w_{43}) + 2(w_{33} + w_{53}) + w_{62} + w_{22} + w_{44} = W_{42},$$

$$\begin{aligned}
& 20w_{43} - 8(w_{53} + w_{42} + w_{33} + w_{44}) + 2(w_{52} + w_{32} + w_{34} + w_{54}) + \\
& + w_{63} + w_{23} + w_{45} = W_{43}, \\
& 20w_{44} - 8(w_{54} + w_{43} + w_{34} + w_{45}) + 2(w_{53} + w_{33} + w_{35} + w_{55}) + \\
& + w_{64} + w_{42} + w_{24} + w_{46} = W_{44}, \\
& 20w_{45} - 8(w_{55} + w_{44} + w_{35} + w_{46}) + 2(w_{54} + w_{34} + w_{36} + w_{56}) + \\
& + w_{65} + w_{43} + w_{25} = W_{45}, \\
& 19w_{46} - 8(w_{56} + w_{45} + w_{36}) + 2(w_{55} + w_{35}) + w_{66} + w_{44} + w_{26} = \\
& = W_{46} \\
& w_{47} = 0, \\
& w_{51} = 0, \\
& 19w_{52} - 8(w_{62} + w_{42} + w_{53}) + 2(w_{43} + w_{63}) + w_{32} + w_{54} = W_{52}, \\
& 20w_{53} - 8(w_{63} + w_{52} + w_{43} + w_{54}) + 2(w_{62} + w_{42} + w_{44} + w_{64}) + \\
& + w_{33} + w_{55} = W_{53}, \\
& 20w_{54} - 8(w_{64} + w_{53} + w_{44} + w_{55}) + 2(w_{63} + w_{43} + w_{45} + w_{65}) + \\
& + w_{52} + w_{34} + w_{56} = W_{54}, \\
& 20w_{55} - 8(w_{65} + w_{54} + w_{45} + w_{56}) + 2(w_{64} + w_{44} + w_{46} + w_{66}) + \\
& + w_{53} + w_{35} = W_{55}, \\
& 19w_{56} - 8(w_{66} + w_{55} + w_{46}) + 2(w_{65} + w_{45}) + w_{54} + w_{36} = W_{56}, \\
& \quad w_{57} = 0, \\
& w_{61} = 0, \\
& 18w_{62} - 8(w_{52} + w_{63}) + 2w_{53} + w_{42} + w_{64} = W_{62}, \\
& 19w_{63} - 8(w_{53} + w_{62} + w_{64}) + 2(w_{52} + w_{54}) + w_{43} + w_{65} = W_{63}, \\
& 19w_{64} - 8(w_{54} + w_{63} + w_{65}) + 2(w_{53} + w_{55}) + w_{44} + w_{62} + w_{66} = \\
& = W_{64}, \\
& 19w_{65} - 8(w_{55} + w_{64} + w_{66}) + 2(w_{54} + w_{56}) + w_{45} + w_{63} = W_{65}, \\
& 18w_{66} - 8(w_{56} + w_{65}) + 2w_{55} + w_{46} + w_{64} = W_{66}, \\
& w_{67} = 0, \quad w_{7,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

5.1.8.4. Система уравнений для пластинки с шарнирным опиранием левого и верхнего краев, свободным нижним краем и заземленным правым

Схема пластинки приведена на рис. 5.9, $n=7$

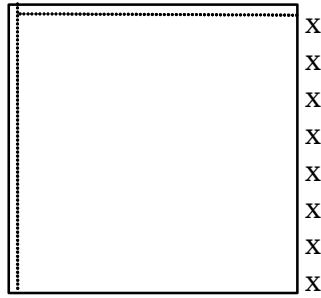


Рис. 5.9. Схема пластинки с шарнирным опиранием левого и верхнего краев, свободным нижним и защемленным правым краем

На краях пластинки имеем:

– на левом крае условия (5.10)

$$w_{i,1} = 0, \quad w_{i,-2} = -w_{i,2}, \quad i=1, \dots, 7;$$

– на правом крае

$$w_{i,7} = 0, \quad w_{i,8} = w_{i,6}, \quad i=1, \dots, 7;$$

– на верхнем крае

$$w_{1,j} = 0, \quad w_{-2,j} = -w_{2,j}, \quad j=1, \dots, 7;$$

– на нижнем крае условие (5.12).

Система линейных уравнений размерностью 49×49 имеет такой

вид:

$$w_{1,j} = 0, \quad j=1, \dots, 7,$$

$$w_{21} = 0,$$

$$18w_{22} - 8(w_{32} + w_{23}) + 2w_{33} + w_{42} + w_{24} = W_{22},$$

$$19w_{23} - 8(w_{33} + w_{22} + w_{24}) + 2(w_{32} + w_{34}) + w_{43} + w_{25} = W_{23},$$

$$19w_{24} - 8(w_{34} + w_{23} + w_{25}) + 2(w_{33} + w_{35}) + w_{44} + w_{22} + w_{26} = \\ = W_{24},$$

$$19w_{25} - 8(w_{35} + w_{24} + w_{26}) + 2(w_{34} + w_{36}) + w_{45} + w_{23} = W_{25},$$

$$20w_{26} - 8(w_{36} + w_{25}) + 2w_{35} + w_{46} + w_{24} = W_{26},$$

$$w_{27} = 0, \quad w_{31} = 0,$$

$$19w_{32} - 8(w_{42} + w_{22} + w_{33}) + 2(w_{23} + w_{43}) + w_{52} + w_{34} = W_{32},$$

$$20w_{33} - 8(w_{43} + w_{32} + w_{23} + w_{34}) + 2(w_{42} + w_{22} + w_{24} + w_{44}) + \\ + w_{53} + w_{35} = W_{33},$$

$$20w_{34} - 8(w_{44} + w_{33} + w_{24} + w_{35}) + 2(w_{43} + w_{23} + w_{25} + w_{45}) + \\ + w_{54} + w_{32} + w_{36} = W_{34},$$

$$20w_{35} - 8(w_{45} + w_{34} + w_{25} + w_{36}) + 2(w_{44} + w_{24} + w_{26} + w_{46}) + \\ + w_{55} + w_{33} = W_{35},$$

$$21w_{36} - 8(w_{46} + w_{35} + w_{26}) + 2(w_{45} + w_{25}) + w_{56} + w_{34} = W_{36},$$

$$w_{37} = 0, \quad w_{41} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& 19w_{42} - 8(w_{52} + w_{32} + w_{43}) + 2(w_{33} + w_{53}) + w_{62} + w_{22} + w_{44} = \\
& = W_{42}, \\
& 20w_{43} - 8(w_{53} + w_{42} + w_{33} + w_{44}) + 2(w_{52} + w_{32} + w_{34} + w_{54}) + \\
& + w_{63} + w_{23} + w_{45} = W_{43}, \\
& 20w_{44} - 8(w_{54} + w_{43} + w_{34} + w_{45}) + 2(w_{53} + w_{33} + w_{35} + w_{55}) + \\
& + w_{64} + w_{42} + w_{24} + w_{46} = W_{44}, \\
& 20w_{45} - 8(w_{55} + w_{44} + w_{35} + w_{46}) + 2(w_{54} + w_{34} + w_{36} + w_{56}) + \\
& + w_{65} + w_{43} + w_{25} = W_{45}, \\
& 21w_{46} - 8(w_{56} + w_{45} + w_{36}) + 2(w_{55} + w_{35}) + w_{66} + w_{44} + w_{26} = \\
& = W_{46}, \\
& w_{47} = 0, \quad w_{51} = 0, \\
& 19w_{52} - 8(w_{62} + w_{42} + w_{53}) + 2(w_{43} + w_{63}) + w_{72} + w_{32} + w_{54} = \\
& = W_{52}, \\
& 20w_{53} - 8(w_{63} + w_{52} + w_{43} + w_{54}) + 2(w_{62} + w_{42} + w_{44} + w_{64}) + \\
& + w_{73} + w_{33} + w_{55} = W_{53}, \\
& 20w_{54} - 8(w_{64} + w_{53} + w_{44} + w_{55}) + 2(w_{63} + w_{43} + w_{45} + w_{65}) + \\
& + w_{74} + w_{52} + w_{34} + w_{56} = W_{54}, \\
& 20w_{55} - 8(w_{65} + w_{54} + w_{45} + w_{56}) + 2(w_{64} + w_{44} + w_{46} + w_{66}) + \\
& + w_{75} + w_{53} + w_{35} = W_{55}, \\
& 21w_{56} - 8(w_{66} + w_{55} + w_{46}) + 2(w_{65} + w_{45}) + w_{76} + w_{54} + w_{36} = \\
& = W_{56}, \\
& w_{57} = 0, \quad w_{61} = 0, \\
& 18w_{62} - 8(w_{52} + w_{63}) + 2w_{53} + w_{42} + w_{64} + \\
& + w_{72}[2(1+v) - 8] + w_{73}(2-v) = W_{62}, \\
& 19w_{63} - 8(w_{62} + w_{53} + w_{64}) + 2(w_{52} + w_{54}) + w_{43} + w_{65} + \\
& + w_{73}[2(1+v) - 8] + (2-v)(w_{72} + w_{74}) = W_{63}, \\
& 19w_{64} - 8(w_{63} + w_{54} + w_{65}) + 2(w_{53} + w_{55}) + w_{62} + w_{44} + w_{66} + \\
& + w_{74}[2(1+v) - 8] + (2-v)(w_{73} + w_{75}) = W_{64}, \\
& 19w_{65} - 8(w_{64} + w_{55} + w_{66}) + 2(w_{54} + w_{56}) + w_{63} + w_{45} + \\
& + w_{75}[2(1+v) - 8] + (2-v)(w_{74} + w_{76}) = W_{65}, \\
& 20w_{66} - 8(w_{65} + w_{56}) + 2w_{55} + w_{64} + w_{46} + \\
& + w_{76}[2(1+v) - 8] + w_{75}(2-v) = W_{66}, \\
& w_{71} = 0, \\
& (15 - 8v - 5v^2)w_{72} + 4(-2 + v + v^2)w_{73} + (1 - v^2)w_{74} + \\
& + 2(2 - v)w_{63} - 4(3 - v)w_{62} + 2w_{52} = W_{72}, \\
& (16 - 8v - 6v^2)w_{73} + 4(-2 + v + v^2)(w_{72} + w_{74}) + (1 - v^2)w_{75} + \\
& + 2(2 - v)(w_{62} + w_{64}) - 4(3 - v)w_{63} + 2w_{53} = W_{73}, \\
& (16 - 8v - 6v^2)w_{74} + 4(-2 + v + v^2)(w_{73} + w_{75}) + (1 - v^2)(w_{72} + \\
& + w_{76}) + 2(2 - v)(w_{63} + w_{65}) - 4(3 - v)w_{64} + 2w_{54} = W_{74},
\end{aligned}$$

(5.15)

$$\begin{aligned}
& (16 - 8\nu - 6\nu^2)w_{75} + 4(-2 + \nu + \nu^2)(w_{76} + w_{74}) + (1 - \nu^2)w_{73} + \\
& + 2(2 - \nu)(w_{66} + w_{64}) - 4(3 - \nu)w_{65} + 2w_{55} = W_{75}, \\
& (17 - 4\nu - 7\nu^2)w_{76} + 4(-2 + \nu + \nu^2)w_{75} + (1 - \nu^2)w_{74} + \\
& + 2w_{56} - 4(3 - \nu)w_{66} + 2(2 - \nu)w_{65} = W_{76}, \\
& w_{77} = 0.
\end{aligned}$$

5.2. Матричный метод перемещений и метод конечных элементов стержневых систем

В основе метода конечных элементов лежит дискретизация решаемой задачи, которая осуществляется иными способами, нежели в методе сеток (см. п. 5.1). После того как приблизительно с начала 50-х годов прошлого века стали появляться быстродействующие вычислительные машины, начали развиваться матричные методы в статике упругих систем для расчета сложных конструкций. Возникли различные вычислительные методы для анализа многократно статически неопределимых систем. Аргирис в особенности довел методы перемещений и сил в матричной форме до эффективных общих вычислительных методов расчета статики и динамики сложных систем. Примерно к тому же времени относится обобщение этих методов благодаря идее расчленения сплошной среды на конечное множество частей с последующим применением к ним вычислительных матричных методов. В различных работах впервые появилось понятие «конечного» элемента и последовало применение метода сначала к плоским задачам теории упругости с использованием треугольных или прямоугольных конечных элементов.

Обычно метод конечных элементов (МКЭ) вводится через энергию деформации и интерполяционные функции. Однако проще получить разрешающие уравнения МКЭ через матричный метод перемещений (ММП). Это и будет выполнено в данной книге.

5.2.1. Метод перемещений в матричной форме

5.2.1.1. Общие положения и предпосылки

Примем, как и в классическом методе перемещений, следующие гипотезы: деформации растяжения-сжатия и сдвига малы по сравнению с деформациями изгиба и ими можно пренебречь, т. е. считать, что перемещения узлов происходят только за счет изгиба стержней; перемещения системы малы, поэтому пренебрегаем сближением концов стержней при изгибе, т. е. длина стержня остается равной длине хорды, соединяющей его концы после искривления; в шарнирно-стержневых системах (фермах) деформации растяжения-сжатия учитываются как единственные.

Рассмотрим раму (рис. 5.10).

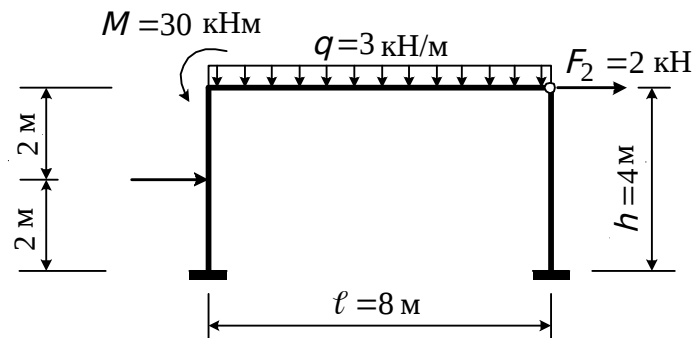


Рис. 5.10. Схема заданной рамы

В раме будет два неизвестных – поворот жесткого узла Z_1 и линейное перемещение обоих узлов по горизонтали Z_2 (рис. 5.11).

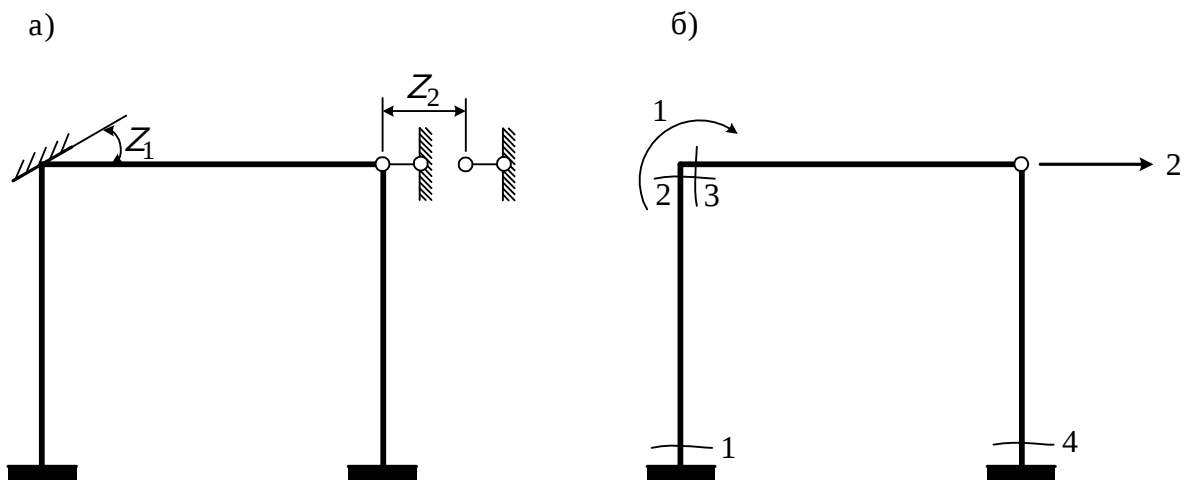


Рис. 5.11. Основная система метода перемещений (а), направление перемещений, сечение с неизвестными усилиями (моментами) $S_1 - S_4$ (б)

На рис. 5.11, б связи, закрепляющие узлы от возможных перемещений, условно не показаны.

Построим грузовую эпюру метода перемещений (рис. 5.12).

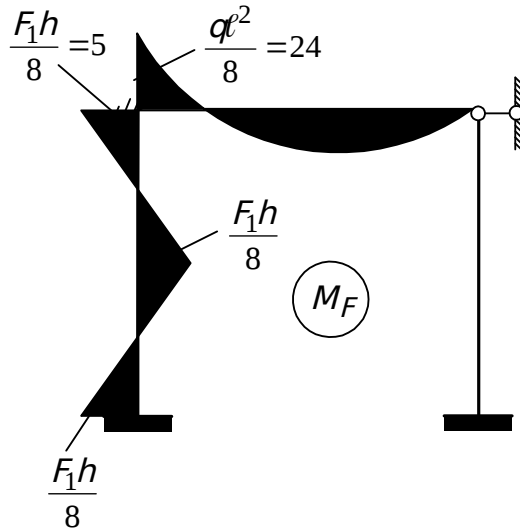


Рис. 5.12. Грузовая эпюра M_F

Вырезаем жесткий узел и находим суммарный момент в жестком узле (рис. 5.13).

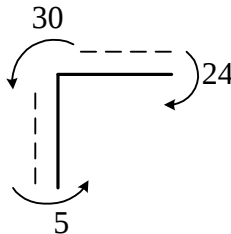


Рис. 5.13. К определению суммарного момента в жестком узле

Суммарный момент в жестком узле равен

$$P_1 = 24 - 5 - 30 = -11 \text{ кНм.}$$

Чтобы найти суммарную силу в направлении Z_2 , рассмотрим равновесие ригеля, двумя сечениями отделенного от рамы (рис. 5.14).

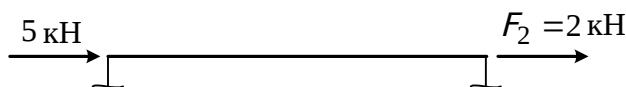


Рис. 5.14. К определению суммарной силы в направлении Z_2

Тогда суммарная сила в направлении Z_2 равна:

$$P_2 = 2 + 5 = 7 \text{ кН.}$$

Теперь вектор внешних сил будет иметь вид

$$P = \begin{bmatrix} -11 \\ 7 \end{bmatrix}^T.$$

Расчетная схема рамы, соответствующая данному вектору, показана на рис. 5.15.

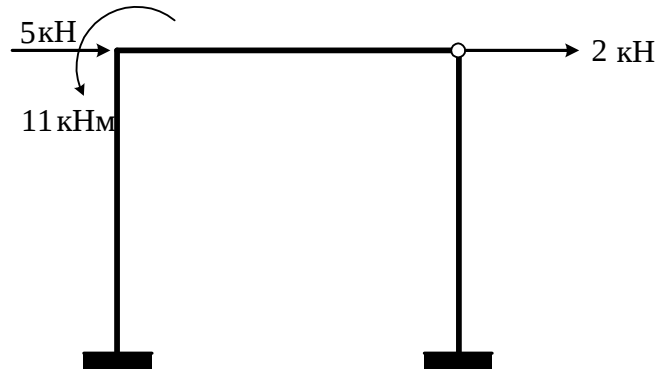


Рис. 5.15. Расчетная схема рамы

Заметим, что вертикальные реакции от равномерно-распределенной нагрузки не дают составляющих в вектор (5.15).

Чтобы записать вектор грузовой эпюры (рис. 5.12), установим правило знаков. Условимся положительными моментами считать моменты, вращающие элемент по часовой стрелке (рис. 5.16).

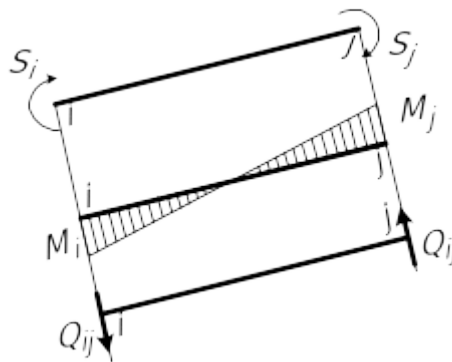


Рис. 5.16. Правило знаков

В этом случае в стержне возникает отрицательная поперечная сила Q_{ij} , вращающая элемент против часовой стрелки (рис. 5.16),

$$Q_{ij} = \frac{-M_j - M_i}{\ell} = -\frac{M_i + M_j}{\ell}.$$

Вектор грузовой эпюры (рис. 5.12) запишется следующим образом:

$$S_0 = [-5 \quad 5 \quad -24 \quad 0]^T. \quad (5.16)$$

5.2.1.2. Уравнения равновесия. Статическая матрица

Направление внешних сил соответствует направлению, выбранному в расчетной схеме (рис. 5.15), направление внутренних сил получено в соответствии с правилом знаков (рис. 5.16).

Положительные моменты вращают стержни по часовой стрелке, следовательно, в соответствии с третьим законом Ньютона моменты S_2 и S_3 вращают узел против часовой стрелки (рис. 5.17).

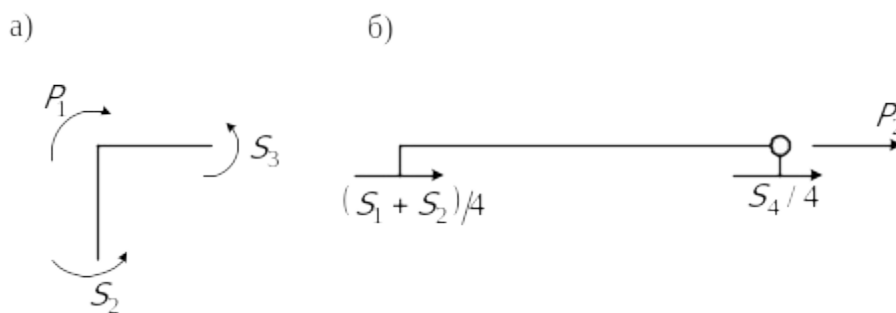


Рис. 5.17. К составлению уравнений равновесия

Поперечные силы в стержнях всегда отрицательны, поэтому узлы рамы они вращают против часовой стрелки (рис. 5.17, б).

Уравнения равновесия жесткого узла и верхней части рамы (рис. 5.11) имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &= S_2 + S_3, \\ P_2 &= -S_1/4 - S_2/4 - S_4/4. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Запишем систему уравнений (5.17) в матричной форме

$$P = A \cdot S, \quad (5.18)$$

где

$$P = [P_1 \quad P_2]^T, \quad S = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4]^T, \quad (5.19)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Покажем, что запись уравнений (4.150) в матричной форме соответствует действительности.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix},$$

отсюда $P_1 = 0 \cdot S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4,$

$$P_2 = -\frac{S_1}{4} - \frac{S_2}{4} + 0 - \frac{S_4}{4}.$$

Статическая матрица A (5.20) имеет размер $m \cdot n$, где m – число строк, равное числу возможных перемещений узлов; n – число столбцов, равное числу внутренних усилий.

При $m > n$ – система изменяема ($w = m - n > 0$).

При $m = n$ – система неизменяема и статически определима, если $\text{Det}A \neq 0$ (при $\text{Det}A = 0$ – система мгновенно изменяема).

При $m < n$ – система неизменяема и статически неопределима (число лишних связей $L = n - m$).

5.2.1.3. Принцип двойственности статических и геометрических уравнений

Для доказательства этого принципа используем принцип возможных перемещений Лагранжа, в соответствии с которым для системы, находящейся в равновесии, суммарная работа внешних и внутренних сил на любом возможном перемещении равна нулю.

Работа внешних сил $P = AS$ на возможных перемещениях δZ определяется выражением

$$V_P = P^T \delta Z = (AS)^T \delta Z = A^T S^T \delta Z. \quad (5.21)$$

Работа внутренних сил S на возможных деформациях $\delta e = \delta(BZ) = B \delta Z$ запишется как

$$V_S = -S^T \delta e = -S^T B \delta Z. \quad (5.22)$$

Здесь знак минус показывает, что работа внутренних сил всегда отрицательна, так как внутренние силы препятствуют деформациям. В соответствии с принципом возможных перемещений

$$V_P + V_S = 0. \quad (5.23)$$

Подставляем выражения (5.21), (5.22) в (5.23). В результате имеем

$$S^T A^T \delta Z = S^T B \delta Z.$$

Это равенство возможно при условии

$$B = A^T. \quad (5.24)$$

В соответствии с доказанным принципом уравнения неразрывности деформаций для любой упругой системы могут быть получены из уравнений равновесия простой заменой строк столбцами матрицы коэффициентов уравнений равновесия (5.20) и наоборот:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & - & \frac{1}{4} \\ 1 & - & \frac{1}{4} \\ 1 & - & \frac{1}{4} \\ 0 & - & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Матрица деформаций (5.25) выражает деформации e_i элементов стержневой системы через перемещение Z_k ее узлов. Ее размер $m \cdot n$, где m – число строк, равное числу деформаций e_i и равное числу неизвестных усилий S_i , n – число столбцов, равное числу возможных узловых перемещений Z_k ,

$$e = BZ = A^T Z, \quad (5.26)$$

где $e = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)^T$ – вектор деформаций элементов;

$Z = (Z_1 \ Z_2)^T$ – вектор перемещений узлов.

5.2.1.4. Физические уравнения. Матрица жесткости системы

Установим связь между усилиями и деформациями системы. Для n -го элемента системы эту связь на основании закона Гука можно представить как

$$S_n = k_n e_n, \quad (5.27)$$

где S_n и e_n – векторы усилий и деформаций в элементе;

k_n – матрица жесткости элемента.

Покажем, как получается матрица жесткости типовых стержневых элементов на плоскости.

а) шарнирно-стержневой элемент (рис. 5.18).

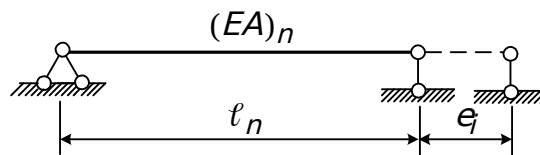


Рис. 5.18. Шарнирно-стержневой элемент

В соответствии с законом Гука для осевого растяжения-сжатия удлинение элемента связано с осевой силой формулами

$$e_j = \frac{S_j l_n}{(EA)_n} \quad \text{или} \quad S_j = \left(\frac{EA}{l} \right)_n e_j,$$

и следовательно,

$$k_n = \left(\frac{EA}{l} \right)_n; \quad (5.28)$$

б) комбинированный балочный элемент с заделкой и шарниром по концам (рис. 5.19).

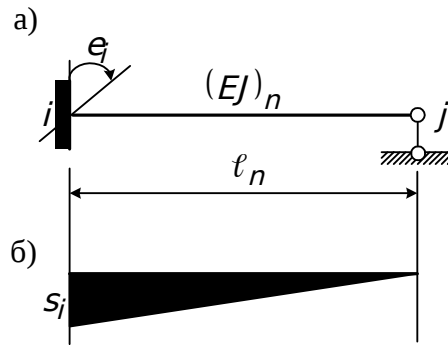


Рис. 5.19. Комбинированный балочный элемент (а), эпюра моментов от поворота заделки (б)

Как известно, ордината эпюры моментов равна $S_i = 3 \left(\frac{EJ}{l} \right)_n e_i$, и матрица жесткости элемента имеет вид

$$k_n = 3 \left(\frac{EJ}{l} \right)_n; \quad (5.29)$$

в) балочный элемент с двумя заделками по концам (рис. 5.20).

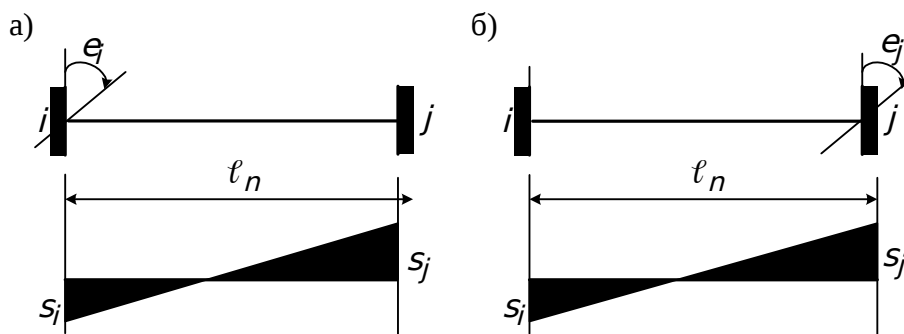


Рис. 5.20. Балочный элемент с двумя заделками по концам

Опорные моменты S_i и S_j при повороте сечения i на e_i и сечения j на e_j можно получить суммированием эпюр моментов, полученных при повороте сначала узла i на e_i (рис. 5.20, а), затем узла j на угол e_j (рис. 5.20, б):

$$S_i = \left(\frac{4EJ}{l} \right)_n e_i + \left(\frac{2EJ}{l} \right)_n e_j,$$

$$S_j = \left(\frac{2EJ}{l} \right)_n e_i + \left(\frac{4EJ}{l} \right)_n e_j.$$

Тогда составляющие формулы (5.27)

$$S_n = k_n e_n$$

будут:

$S_n = (S_i \ S_j)^T$ – вектор усилий элемента "n";

$e_n = (e_i \ e_j)^T$ – вектор деформаций элемента "n";

$$k_n = \left(\frac{EJ}{l} \right)_n \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ – матрица жесткости элемента.} \quad (5.30)$$

Для всех элементов системы, содержащей m искомым внутренних усилий, связь между усилиями и деформациями запишем в виде

$$S = k e, \quad (5.31)$$

где $S = [S_1, S_2 \dots S_m]^T$ – вектор усилий в системе;

$e = [e_1, e_2 \dots e_n]^T$ – вектор деформаций системы;

K – матрица жесткости всех элементов системы,

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & K_m \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Матрица K – квадратная, симметричная относительно главной диагонали, порядок ее равен числу m – числу искомым усилий, \mathcal{E} – количество элементов. Для рассматриваемой рамы (рис. 5.10, 5.11) матрицы жесткости отдельных стержней имеют вид

$$k_{1,2} = \frac{EJ}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = \frac{EJ}{4},$$

$$k_3 = \frac{4EJ}{8} \cdot 3 = 6i, \quad k_4 = \frac{EJ}{4} \cdot 3 = 3i,$$

а матрица жесткости всех элементов будет такой:

$$K = i \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.2.1.5. Разрешающая система уравнений

Запишем еще раз три группы уравнений, отражающих три стороны задачи расчета упругих систем: статическую, геометрическую и физическую.

1. Уравнение равновесия (5.18)

$$P = A \cdot S.$$

2. Уравнение неразрывности деформаций (5.26)

$$e = BZ = A^T Z.$$

3. Обобщенный закон Гука для всей системы (5.31)

$$S = ke.$$

Если матрица A (5.20) квадратная и $\text{Det}A \neq 0$, то заданная система статически определима, и можно найти внутренние усилия

$$S = A^{-1} P.$$

После этого решение задачи можно завершить. Если матрица A (5.20) прямоугольная, то при $n > m$ система статически неопределима и, кроме уравнений равновесия (5.18), необходимо рассмотреть геометрические (5.26) и физические (5.31) уравнения. В системе (5.18), (5.26), (5.31) неизвестными являются векторы усилий S , деформаций e , перемещений Z . Для проверки прочности и жесткости необходимо и достаточно знать усилия и перемещения. Поэтому вектор e исключим, подставив (5.26) в (5.31):

$$S = kA^T Z. \quad (5.33)$$

Формула (5.33) позволяет найти усилие S по известным перемещениям Z . Подставляя (5.33) в (5.18), получим

$$P = A k A^T Z = K Z, \quad (5.34)$$

где $K = A k A^T$ называется матрицей жесткости всей конструкции. Она устанавливает связь между внешними узловыми силами и перемещениями узлов. Матрица K – квадратная, симметричная, имеет порядок m , где m – число возможных перемещений узлов. Решение уравнения (5.34) дает

$$Z = K^{-1} P, \quad (5.35)$$

где K^{-1} – обратная матрица, всегда существующая для геометрически неизменяемых систем. Решение (5.35) имеет формальный смысл, так как получение обратной матрицы довольно трудоемкая процедура. Поэтому на практике и во всех вычислительных комплексах вектор Z получают непосредственным решением системы разрешающих уравнений (5.34). После определения вектора Z усилие определяется по (5.33). В методе перемещений необходимой и достаточной проверкой правильности решения является статическая проверка, т. е. проверка равновесия узлов системы. Матричный аналог статической проверки – уравнение равновесия (5.18), т. е. полученный вектор S надо умножить слева на статическую матрицу A и сравнить результат с вектором узловых сил.

При расчете на внеузловую нагрузку к расчетным усилиям надо добавить усилия от внеузловой нагрузки S_0 согласно (5.16):

$$S_{ok} = kA^T Z + S_0. \quad (5.36)$$

Матричное уравнение (5.34) эквивалентно системе канонических уравнений метода перемещений: каждый элемент k_{ij} матрицы жесткости K (5.32) равен коэффициенту r_{ij} , представляющему реактивное усилие в связи по направлению перемещения Z_i от перемещения $Z_j = 1$. Сравним формулу (5.36) с разрешающей формулой классического метода перемещений

$$M_{ok} = \sum M_i Z_i + M_p. \quad (5.37)$$

Очевидно, что формулы (5.36) и (5.37) эквивалентны с точностью до обозначений, если под S понимать изгибающие моменты в рамах. Кроме того, очевидно, что матрица KA^T в формуле (5.36) имеет смысл матрицы единичных усилий.

В конце этого параграфа изложим порядок расчета по ММП.

1. Выбираем основную систему метода перемещений (рис. 5.11, а). Строим расчетную схему (рис. 5.15), определяя направление неизвестных перемещений Z (рис. 5.11) и искомых усилий S (рис. 5.17).

2. В случае внеузловой нагрузки строим эпюру M_F (рис. 5.12), приводим нагрузки к узловым и строим векторы P (5.15), S_0 (5.16).

3. Строим статическую матрицу A (5.20) и матрицу жесткости всех элементов (5.32).

4. Выполняем матричные операции KA^T , $K = AKA^T$.

5. Решаем систему уравнений равновесия (5.34), находим вектор Z .

6. Определяем внутренние усилия (5.33).

7. Выполняем матричную проверку $AS = P$ (5.18).

8. Окончательное значение усилий определяем по формуле (5.36).

9. По найденным усилиям строим соответствующие эпюры.

Пример. Рассчитать раму, приведенную на рис. 5.10. Вектор внешних сил – (5.15), рис. 5.15. Вектор грузовой эпюры – (5.16), рис. 5.12. Статическая матрица – (5.20). Матрица жесткости (см. п. 5.2.1.5)

$$K = i \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad i = \frac{EJ}{4}.$$

Выполняем матричные операции

$$KA^T = i \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & -0,25 \\ 1 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{bmatrix},$$

$$K = A \cdot KA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0 & -0,25 \end{bmatrix} \times i \begin{bmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 10 & -1,5 \\ -1,5 & 0,9375 \end{bmatrix}.$$

Решаем уравнение

$$KZ = P, \text{ или}$$

$$\begin{aligned} 10Z_1 - 1,5Z_2 &= -11/i \\ -1,5Z_1 + 0,9375Z_2 &= 7/i. \end{aligned}$$

Отсюда $Z_1 = 0,0263/i$, $Z_2 = 7,5088/i$.

Определяем внутренние усилия

$$S = k A^T Z = i \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0263 \\ 7,5088 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,2106 \\ -11,158 \\ 0,1578 \\ -5,6316 \end{pmatrix}.$$

Осуществляем матричную проверку

$$A S \cong P,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0 & -0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11,2106 \\ -11,1580 \\ 0,1578 \\ -5,6316 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,002 \\ 7,00005 \end{pmatrix}.$$

Получаем практически точно вектор P (5.15). Окончательные значения усилий определяем по формуле

$$S_{ok} = S + S_0 = (-11,2106 \quad -11,1580 \quad 0,1578 \quad -5,6316)^T + (-5 \quad 5 \quad -24 \quad 0)^T = (-16,21 \quad -6,16 \quad -23,84 \quad -5,63)^T.$$

По найденным значениям строим окончательную эпюру.

5.2.2. Общие положения метода конечных элементов

Матричный метод перемещений позволяет составить расчетный алгоритм вплоть до получения усилий во всех элементах рассматриваемой системы и поручить все вычисления ЭВМ. Но для этого вначале необходимо вручную составить исходные матрицы A (5.20), K (5.32) и векторы P (5.18), S_0 (5.16).

В методе конечных элементов также получается разрешающая система уравнений $KZ = P$, но матрица жесткости K вычисляется не по известной формуле

$$K = A k A^T,$$

а путем суммирования матриц жесткости отдельных элементов $K_{\mathcal{E}}$, т. е.

$$K = \sum_{\mathcal{E}=1}^n K_{\mathcal{E}},$$

где $K_{\mathcal{E}} = (A k A^T)$, а после определения перемещений Z усилия вычисляются поэлементно по формуле

$$S_{\mathcal{E}} = (k A^T)_{\mathcal{E}} Z_{\mathcal{E}},$$

где вектор усилий $S_{\mathcal{E}}$, матрица усилий $(k A^T)_{\mathcal{E}}$ и вектор перемещений $Z_{\mathcal{E}}$ относятся к элементу. Такой подход позволяет один раз получить матрицы жесткости типовых элементов, произвольно расположенных в пространстве, составить алгоритм расчета и программу, по которой ЭВМ выполнит всю работу по вычислению элементов матрицы $K_{\mathcal{E}}$, их суммированию, т. е. по составлению ансамбля элементов. Название метода отражает его главную идею – представление конструкции как совокупности отдельных конечных элементов, соединенных между собой в узлах, в которых приложены внешние силы.

На плоскости типовые конечные элементы могут быть только трех типов:

- шарнирно-стержневой элемент;
- балочный заземленный элемент;
- балочный комбинированный элемент.

Любую самую сложную конструкцию на плоскости можно представить как совокупность названных элементов. Следовательно, задача состоит в построении матрицы жесткости $K_Э$ для трех типовых элементов.

Отметим одну принципиальную особенность. В ММП (матричный метод перемещений) рамных систем, как и в методе перемещений, осевыми деформациями стержней пренебрегают. В основной системе закрепляют узлы от поворотов и вводят связи, препятствующие линейным перемещениям узлов соответствующей шарнирной схемы. В МКЭ этого сделать принципиально невозможно, так как при произвольном перемещении концов балочного элемента обязательно возникают осевые деформации. Следовательно, в основной системе МКЭ следует закреплять каждый узел как от угловых, так и от линейных перемещений, соответственно увеличивается число неизвестных перемещений. Поэтому результаты расчета по ММП и МКЭ в общем случае не должны совпадать, хотя для реальных конструкций, состоящих из элементов с большой осевой жесткостью, и должны быть близки.

При построении матриц жесткости $K_Э = (AKA^T)$ стержневых элементов в МКЭ, как и в ММП, удовлетворяются уравнения равновесия (5.18), физические уравнения (5.31), уравнения неразрывности (5.26), поэтому перемещения узлов системы, найденные из разрешающей системы уравнений $KZ = P$, будут точно отражать поле перемещений. Так же точно находятся деформации и усилия в элементах. Следовательно, МКЭ является точным методом расчета стержневых систем, естественно, в пределах точности гипотез, лежащих в основе расчета стержневых систем.

Точно такой же путь решения в МКЭ для систем из пластин, оболочек, объемных элементов. Конечными элементами для таких систем служат плоские треугольные, прямоугольные, изопараметрические (с криволинейными краями) элементы либо объемные – тетраэдры, параллелепипеды с разным числом узловых точек.

При вычислении матриц жесткости континуальных элементов не удастся получить точные решения, поэтому МКЭ для континуальных систем является приближенным методом. Повышение точности решения при расчете континуальных систем достигается за счет более мелкого разбиения конструкции на элементы или за счет применения элементов более высокой точности.

Приведем сравнительную таблицу алгоритмов ММП и МКЭ (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Сравнение алгоритмов ММП и МКЭ

ММП	МКЭ
1. Строятся вручную исходные матрицы A (5.20), K (5.32), векторы P (5.15), S_0 (5.16)	1. Вводятся в машину координаты узлов X_i, Y_i . Задаются элементы соответствующими узлами и жесткостями A, E , внешние воздействия (нагрузки, температурные, осадки опор)
2. Вычисляется матрица усилий kA^T , матрица жесткости $K = AK A^T$ конструкции	2. Машина по стандартному алгоритму вычисляет матрицы усилий $(kA^T)_\varepsilon$, матрицы жесткости всех элементов $K_\varepsilon (AK A^T)$ и записывает их на жесткий диск компьютера
3. Решается система уравнений $KZ = P$, находится вектор Z	3. Составляется матрица жесткости конструкции $K = \sum_{\varepsilon=1}^n K_\varepsilon$
4. Определяются расчетные усилия $S = kA^T Z$	4. Решается система $KZ = P$
5. Добавляются усилия от внеузловой нагрузки $S_{ok} = S + S_0$	5. Находятся усилия во всех элементах $S_\varepsilon = (kA^T)_\varepsilon Z_\varepsilon$
	6. Добавляются усилия от внеузловой нагрузки $S_{\varepsilon,ok} = S_\varepsilon + S_{0\varepsilon}$

Несмотря на внешнюю схожесть алгоритмов расчета, методы отличаются не только способом расчета – вручную или на машине. Главное отличие – в ММП исходные матрицы приходится строить вручную для каждой новой конструкции, в МКЭ же глобальная матрица жесткости конструкции получается простым суммированием по определенному правилу матриц жесткости всех элементов, вычисленных по стандартным алгоритмам, заложенным в машине.

5.2.2.1. Подготовка расчета. Ввод исходных данных

Требуется рассчитать произвольную плоскую стержневую конструкцию на действие силовых нагрузок, теплового воздействия, осадок опор. Введем последовательно все узлы конструкции по их координатам: узлами будем считать опоры, точки перелома стержней, шарниры, точки ступенчатого изменения жесткости, точки приложения сил или сосредоточенных моментов. Координаты узлов считываются с узлов растровой сетки или задаются с экрана.

Введем элементы по начальному узлу i и по конечному узлу j , предварительно назначая его жесткостные характеристики – модуль упругости E , площадь поперечного сечения A , момент инерции J .

Заметим, что балочные элементы задаются узлами i, j, k , где третий узел k определяет плоскость элемента в пространстве. Единственное условие – узел k не должен лежать по линии $i-j$.

Программа тут же определяет его геометрические характеристики:

длину $l = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$;

$$\sin \alpha = \frac{\Delta Y}{l}, \quad \cos \alpha = \frac{\Delta X}{l};$$

$$\Delta X = X_j - X_i, \quad \Delta Y = Y_j - Y_i.$$

Здесь α – угол наклона элемента к горизонту.

Вводим узловые нагрузки – силы и сосредоточенные моменты, а также внеузловую нагрузку – равномерно распределенную нагрузку, действующую:

Q_1 – вдоль стержня от узла i к узлу j ;

Q_2 – в поперечном направлении в плоскости элемента;

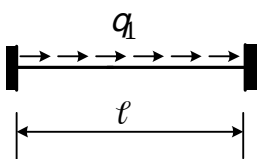

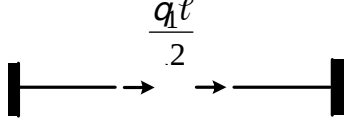
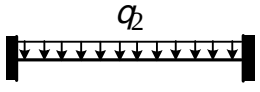

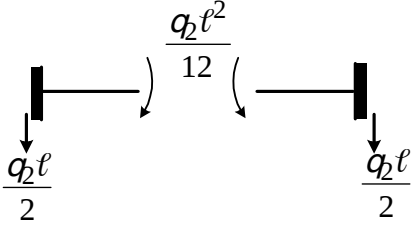
Q_3 – в поперечном направлении из плоскости элемента.

5.2.2.2. Силовое воздействие

Расчетная схема элемента, эпюра усилий и узловая нагрузка приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Эпюры усилий и узловые нагрузки при силовых воздействиях

Расчетная схема	Эпюра S_0	Узловая нагрузка
		
		

5.2.2.3. Тепловое воздействие

При изменении температуры крайних волокон стержневого элемента толщиной d на t_1 и $t_2 < t_1$ разложим, как обычно, тепловое воздействие на две составляющие: перепад температур $t = \Delta t = t_1 - t_2$ и равномерный нагрев (охлаждение) всех волокон $t_{cp} = (t_1 + t_2)/2$. От равномерного нагрева на t_{cp} стержень длиной l должен был бы удлиниться на $\Delta l = \alpha t_{cp} l$, где α – коэффициент линейного расширения. Поскольку в основной системе МКЭ все узлы закреплены от перемещений как угловых, так и линейных, стержень окажется сжатым силой N , укорочение от которой равно Δl , т. е.

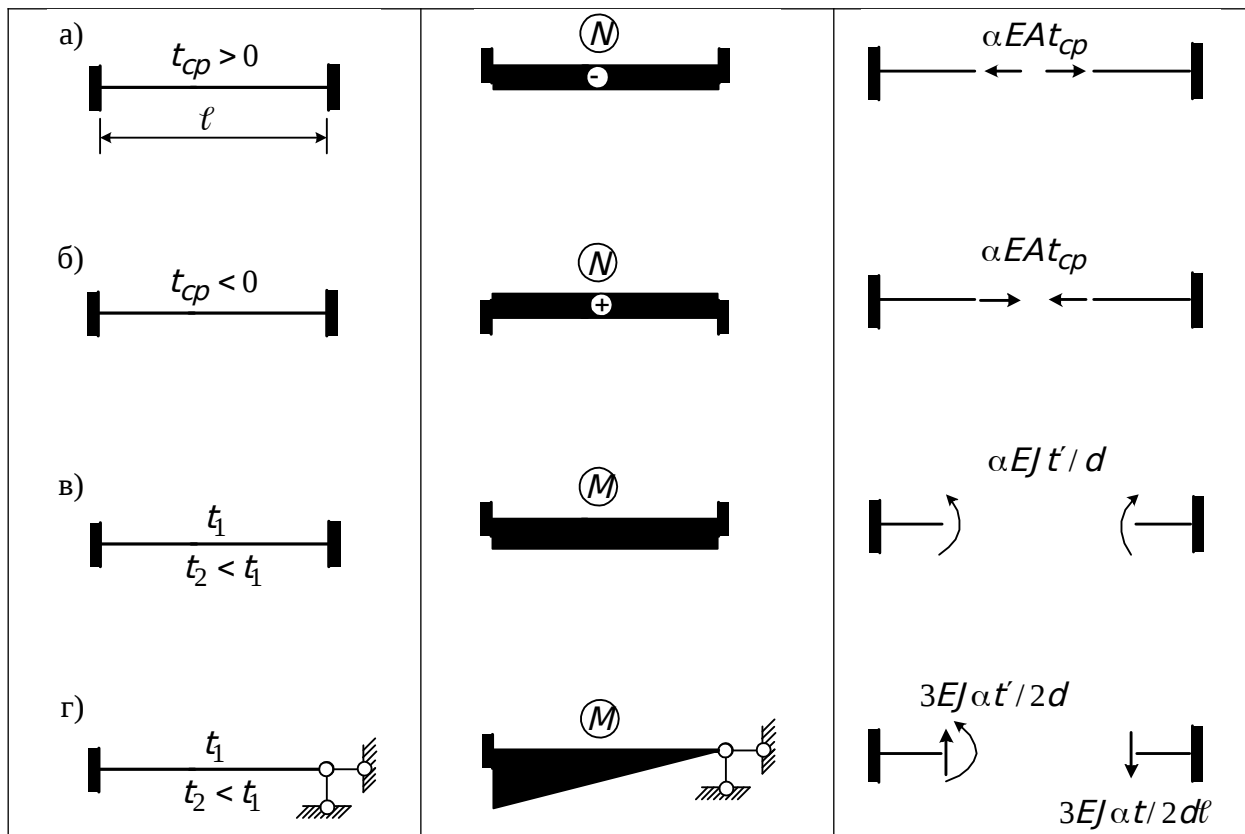
$$N = \frac{EA}{l} \Delta l = \frac{EA}{l} \alpha t_{cp} l = \alpha EA t_{cp}.$$

При равномерном охлаждении, т. е. при $t_{cp} < 0$, стержень будет растянут такой же силой $N = \alpha EA t_{cp}$. В табл. 5.3 показаны расчетные схемы, а также эпюры S_0 продольных сил и узловые нагрузки от равномерного нагрева при $t_{cp} > 0$ и от равномерного охлаждения при $t_{cp} < 0$.

Таблица 5.3

Эпюры усилий и узловые нагрузки при воздействии температуры

Расчетная схема	Эпюра S_0	Узловая нагрузка
-----------------	-------------	------------------



От перепада температур Δt в стержнях возникнут изгибающие моменты, при этом растянутыми будут всегда менее нагретые волокна. В табл. 5.3 на схемах в) и г) показаны эпюры моментов и узловые нагрузки в балочном и комбинированном элементах высотой сечения d от перепада температур Δt .

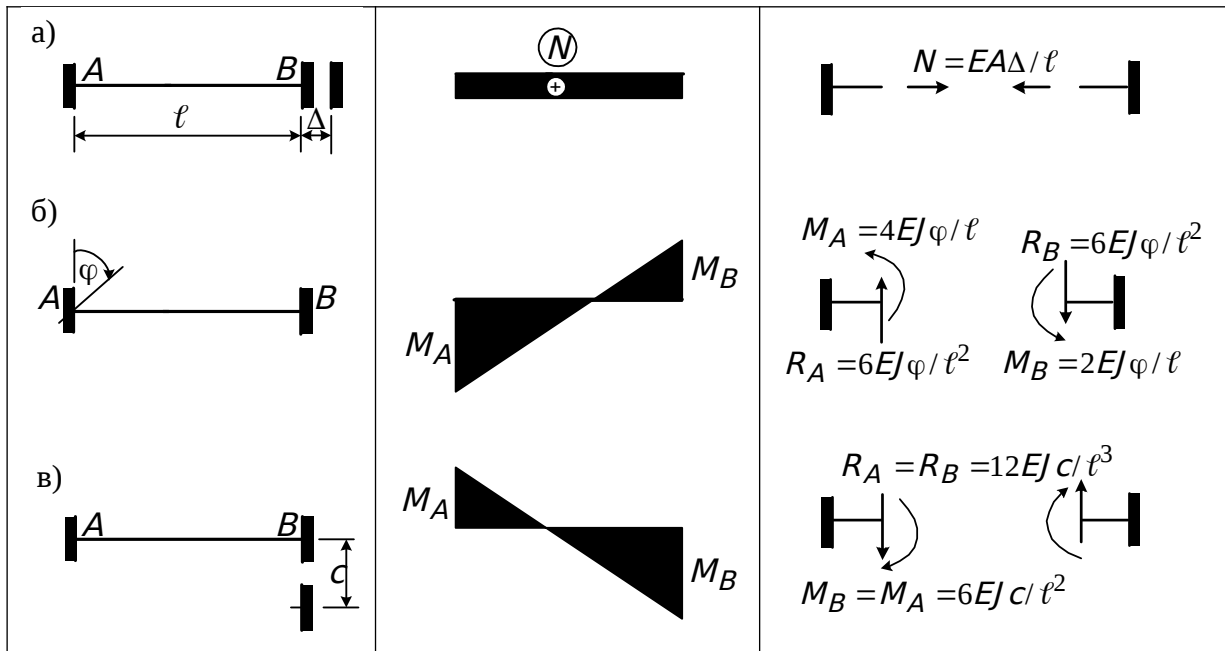
5.2.2.4. Осадка опор

При заданной осадке опор все элементы, прикрепленные к ней, получают соответствующие деформации, в них возникают усилия, так как в основной системе МКЭ все узлы закреплены от перемещений. Так, от заданного линейного перемещения Δ одной из опор в направлении оси любого стержня он удлинится (укоротится) на такую же величину Δ , что вызовет в нем растягивающую (сжимающую) продольную силу $N = EA\Delta / \ell$ и соответствующие опорные реакции на концах. В табл. 5.4 приведены эпюры продольных усилий S_0 и соответствующие узловые нагрузки, возникающие в стержневых элементах любого типа от перемещения одной из опор вдоль оси стержня на Δ .

Таблица 5.4

Эпюры усилий и узловые нагрузки при осадке опор

Расчетная схема	Эпюра S_0	Узловая нагрузка
-----------------	-------------	------------------



На рис. б), в) в табл. 5.4 показаны эпюры моментов и соответствующие узловые нагрузки в балочных элементах при повороте опорного сечения на угол φ и от линейного смещения «с» в направлении нормали к оси стержня.

5.2.2.5. Матрицы жесткости типовых стержневых элементов

Построение матриц жесткости $K_{\mathcal{E}}$ типового элемента является центральной задачей метода конечных элементов. Эта матрица устанавливает связь между узловыми перемещениями и силами. Используем формулу матричного метода перемещений (5.34)

$$K_{\mathcal{E}} = (AKA^T)_{\mathcal{E}}$$

для отдельного элемента, рассматриваемого как целая конструкция. Здесь матрицы A и K – статическая матрица (см. п. 5.2.1.2) и матрица жесткости элемента (см. п. 5.2.1.4).

Рассмотрим вывод матриц жесткости типовых стержневых элементов.

Шарнирно-стержневой элемент

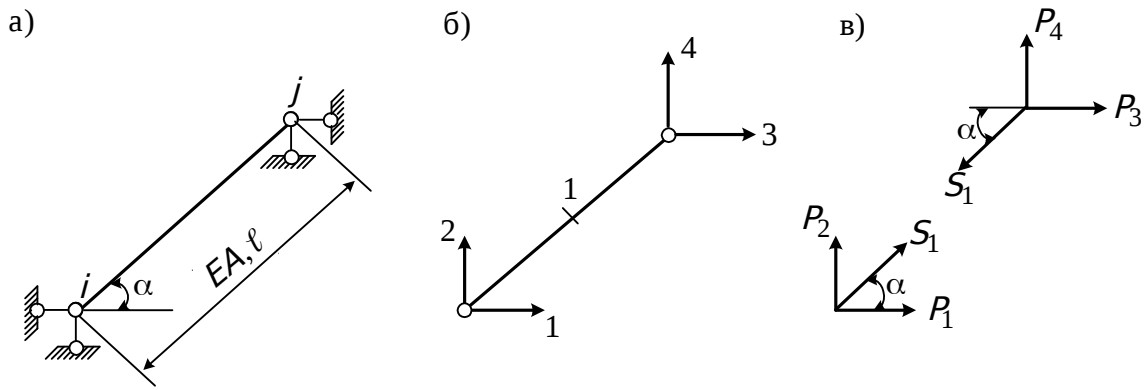


Рис. 5.21. Схемы шарнирно-стержневого элемента

Для шарнирно-стержневого элемента (см. рис. 5.21, а) сначала построим расчетную схему (рис. 5.21, б), где стрелками указаны возможные локальные степени свободы, связанные с перемещениями $Z_1 - Z_4$ и соответствующими возможными внешними силами $P_1 - P_4$. Кроме того, в элементе возможны одно осевое усилие S_1 и соответствующая деформация ϵ . Рассмотрев равновесие узлов (рис. 5.21, в), запишем соотношения между внешними и внутренними силами:

$$P_1 = -S_1 \cos \alpha, \quad P_2 = -S_1 \sin \alpha, \quad P_3 = S_1 \cos \alpha, \quad P_4 = S_1 \sin \alpha. \quad (5.38)$$

Если систему (5.38) записать в матричном виде $P = AS$, то матрица A элемента будет

$$A = [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha]^T.$$

Матрица жесткости шарнирно-стержневого элемента k была получена ранее в матричном методе перемещений (уравнение (5.28), п. 5.2.1.4)

$$k = \left(\frac{EA}{l} \right).$$

Вычисляем матрицу единичных усилий

$$kA^T = \frac{EA}{l} [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha].$$

Наконец, вычислим матрицу жесткости элемента K

$$K_{4 \times 4} = A \cdot kA^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & & \\ & & K_{33} & \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} = [K_{ij}], \quad (5.39)$$

где $K_{11} = \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha$ и т. д.

Не вписанные элементы матрицы (5.39) симметричны относительно главной диагонали.

Балочный защемленный элемент

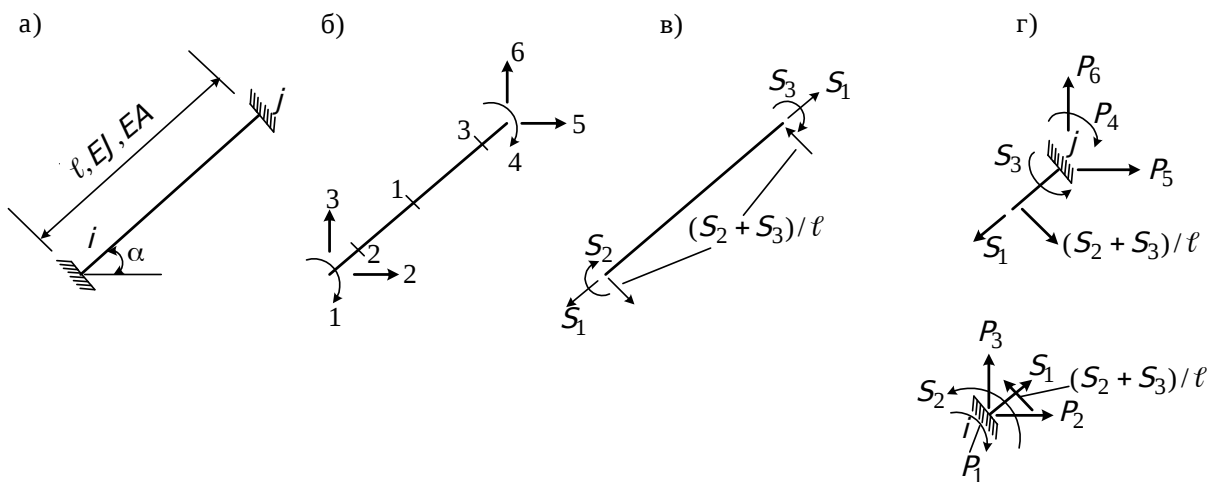


Рис. 5.22. Схемы балочного защемленного элемента

Для балочного защемленного элемента, показанного на рис. 5.22, а, составим расчетную схему (рис. 5.22, б), где стрелками показаны шесть локальных степеней свободы $Z_1 - Z_6$ и соответствующие им возможные узловые силы $P_1 - P_6$. Засечками обозначены осевая сила S_1 и изгибающие моменты по концам S_2 и S_3 . На рис. 5.22, в отдельно указаны эти силы, а также возникающие по концам поперечные силы. Рассмотрим равновесие узлов i и j (рис. 5.22, г):

$$\begin{aligned}
 & \sum M = 0 \quad P_1 = S_2, \\
 \text{Узел } i & \quad \sum X = 0 \quad P_2 = -S_1 \cos \alpha + \frac{S_2 + S_3}{\ell} \sin \alpha, \\
 & \quad \sum Y = 0 \quad P_3 = -S_1 \sin \alpha - \frac{S_2 + S_3}{\ell} \cos \alpha, \\
 & \\
 & \quad \sum M = 0 \quad P_4 = S_3, \\
 \text{Узел } j & \quad \sum X = 0 \quad P_5 = S_1 \cos \alpha - \frac{S_2 + S_3}{\ell} \sin \alpha, \\
 & \quad \sum Y = 0 \quad P_6 = S_1 \sin \alpha + \frac{S_2 + S_3}{\ell} \cos \alpha.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Запишем теперь матрицу A как матрицу коэффициентов системы уравнений (5.40):

$$A = \begin{vmatrix} & & 1 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha / \ell & \sin \alpha / \ell \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha / \ell & -\cos \alpha / \ell \\ & & 1 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha / \ell & -\sin \alpha / \ell \\ \sin \alpha & \cos \alpha / \ell & \cos \alpha / \ell \end{vmatrix} \cdot$$

Матрица жесткости всех элементов K для балочного защемленного элемента при учете деформации растяжения-сжатия определится как комбинация, или сумма матриц внутренней жесткости для шарнирного и балочного элементов матричного метода перемещений (5.28), (5.29)

$$k = \begin{vmatrix} EA/\ell & & \\ & 4EJ/\ell & 2EJ/\ell \\ & 2EJ/\ell & 4EJ/\ell \end{vmatrix}.$$

Матрица единичных усилий вычисляется по формуле kA^T и имеет размер 3×6 . Матрица жесткости $K = AK A^T$ имеет размер 6×6 , симметрична относительно главной диагонали.

Балочный комбинированный элемент

Матрицы балочного комбинированного элемента (рис. 5.19) получаются совершенно так же, как и балочного защемленного (рис. 5.22, а), если в узле J поставить шарнир. Тогда степеней свободы будет 5, искомым усилий 2, матрица K будет иметь размер 5×5 .

Пространственный защемленный элемент

Как известно, в жестком узле пространственной стержневой системы имеется 6 степеней свободы – 3 линейных перемещения и 3 поворота вокруг осей, поэтому стержень, соединяющий два узла, будет иметь 12 степеней свободы. Усилий в стержне, подлежащих определению, всего 6: нормальная сила S_1 , изгибающие моменты по концам из плоскости стержня S_2 и S_3 , изгибающие моменты в плоскости стержня S_4 и S_5 и крутящий момент S_6 . Статическая матрица размером 12×6 строится так же, как и для элемента на плоскости, а матрица жесткости K будет

$$k = \begin{vmatrix} EA/\ell & & & & & & \\ & 4EJ_2/\ell & 2EJ_2/\ell & & & & \\ & 2EJ_2/\ell & 4EJ_2/\ell & & & & \\ & & & 4EJ_3/\ell & 2EJ_3/\ell & & \\ & & & 2EJ_3/\ell & 4EJ_3/\ell & & \\ & & & & & & GJ_1/\ell \end{vmatrix}.$$

Здесь J_1 – момент инерции при кручении; J_2 – момент инерции из плоскости элемента; J_3 – момент инерции в плоскости элемента; G – модуль сдвига.

Формирование матрицы жесткости K пространственного стержневого элемента проводится по тому же алгоритму, что и для элемента на плоскости.

5.2.2.6. Формирование матрицы жесткости конструкции

Ранее было показано (п. 5.2.1.5), что разрешающая система уравнений матричного метода перемещений $KZ=P$ является системой канонических уравнений метода перемещений, следовательно, каждый компонент K_{ij} матрицы K является реакцией в i -й связи при перемещении j -й связи на единицу. Реакция в любом узле по направлению i -й связи, очевидно, складывается из реакций, возникающих во всех примыкающих к узлу элементах, по тому же направлению i . Следовательно, матрица жесткости системы K получается сложением матриц жесткости элементов K_{ε} , составляющих систему:

$$K = \sum_{\varepsilon=1}^m K_{\varepsilon},$$

где m – число элементов.

Очевидно, матрица K квадратная, симметричная относительно главной диагонали, ее размер равен числу степеней свободы системы. Процедуру сложения проследим на простом примере рис. 5.23, где наглядно продемонстрируем процесс последовательного заполнения матрицы K путем вложения в нее матриц жесткости элементов K_{ε} .

На рис. 5.23 цифрами в кружках обозначены узлы, стрелками и цифрами – глобальные степени свободы, всего 9. Ферма состоит из шарнирных элементов, локальные степени свободы для трех элементов показаны на рис. 5.24.

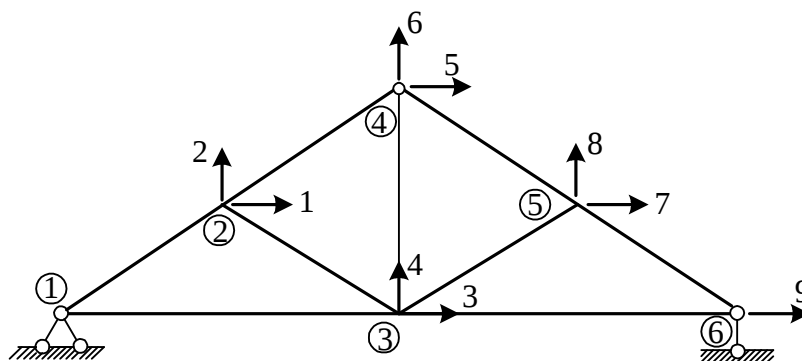


Рис. 5.23. Схема фермы

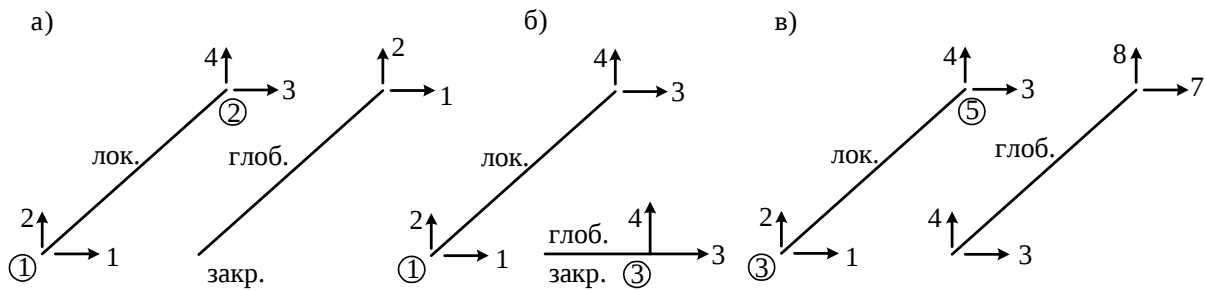


Рис. 5.24. Элементы фермы

Заготовим матрицу размером 9×9 со всеми компонентами, равными нулю (рис. 5.25).

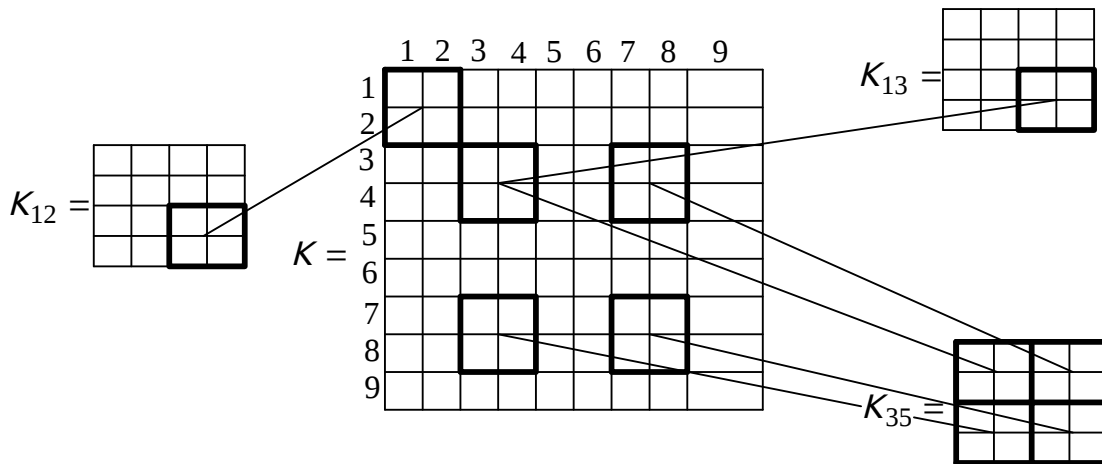


Рис. 5.25. Схема матрицы размером 9x9

Берем первый элемент 1-2 (рис. 5.24, а). Узел 1 закреплен, поэтому компоненты K_{12} соответствуют локальным степеням свободы 1 и 2 (две первые строки и два первых столбца не используются). Локальные степени свободы 3, 4 соответствуют глобальным степеням 1 и 2, поэтому субматрица 3-4 помещается на пересечении 1-2 строк и столбцов матрицы K , как показано на рис. 5.25. Мы вложили в матрицу K только три матрицы из девяти, но, надеемся, главная идея усвоена.

5.2.2.7. Определение перемещений и усилий в элементах

После формирования матрицы жесткости системы K решается система линейных уравнений $KZ=P$ и находится вектор Z , т. е. перемещения всех узлов.

Усилия в конструкции находятся поэлементно по формуле

$$S_j = (kA^T)_j \cdot Z_j. \quad (5.41)$$

Здесь матрица единичных усилий элемента (kA^T) была вычислена при формировании матрицы жесткости элемента $K_3 = (AKA^T)_3$. Вектор Z_3 – это компоненты вектора Z , соответствующие локальным степеням свободы. Например, для элемента 3-6 фермы (рис. 5.23) составляющие формулы (5.41) будут

$$(kA^T)_{35} = (EA/l)_{35} \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix},$$

$$(Z)_{35} = (Z_3 \ Z_4 \ Z_7 \ Z_8)^T.$$

В результате умножения по формуле (5.41) вектор-строки на вектор-столбец получим усилие S_{35} – одно число, соответствующее осевой силе в элементе 3-5. Для балочных элементов в соответствии с рис. 5.22 S_1 – осевое усилие, S_2 и S_3 – моменты по концам стержня. Для комбинированного элемента S_1 – осевое усилие, S_2 – момент в заделке.

Для пространственного стержневого элемента согласно его матрице жесткости K S_1 – осевое усилие, S_2 и S_3 – изгибающие моменты из плоскости стержня, S_4 и S_5 – изгибающие моменты в плоскости стержня, S_6 – крутящий момент (см. п. 5.2.2.5). Поперечные силы определяются по формуле $Q_{ij} = -(M_i + M_j)/l$ в соответствии с принятым знаком для изгибающих моментов, когда концевые моменты вращают стержень по часовой стрелке (рис. 5.16).

Наконец, если было задано внеузловое воздействие типа распределенной нагрузки, температуры или осадки опор, то грузовые эпюры добавляются к расчетным по известной формуле

$$S_{ok} = S + S_0.$$

5.2.2.8. Матрицы жесткости стержневых элементов с использованием интерполяционных полиномов и функций формы

5.2.2.8.1. Матрица жесткости в локальной системе координат

Рассмотрим стержневой элемент постоянного сечения в локальной системе координат X, Z , подверженный действию сил только в узлах i и j (рис. 5.26).

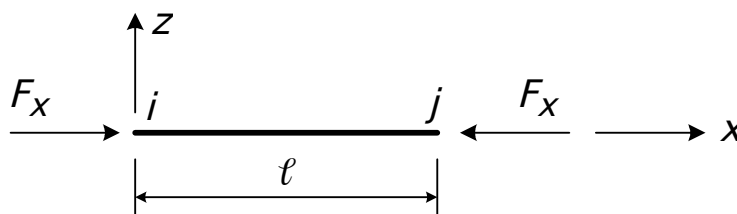


Рис. 5.26. Схема воздействий на стержневой элемент

Кроме указанных на чертеже (рис. 5.26) осевых сил F_x , действуют также силы F_z и моменты M в узлах i и j ; U и W – перемещения вдоль осей X и Z . При учете только растяжения и изгиба деформация ε_x определится так:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2, \quad (5.42)$$

где первый член – осевая деформация, второй член – деформация изгиба, третий член – связанная деформация изгиба и растяжения, нелинейная по W . Первые два члена получены в курсе сопротивления материалов и линейной теории упругости (разд. 1), появление третьего члена можно объяснить тем, что в деформированном состоянии, для которого и производится расчет, длина элементарного стержня dx изменяется и становится равной

$$dx = \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx.$$

Раскладывая последнее выражение в ряд, получим

$$dx = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \dots \right] dx.$$

Ограничиваясь двумя членами ряда, видим, что в деформированном состоянии длина элемента dx изменяется на $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, что и приводит к появлению третьего члена в выражении (5.42).

Энергия деформации для элемента определяется работой напряжений $\sigma_x = E\varepsilon_x$ на деформациях ε_x по всему объему элемента V длиной l и площадью поперечного сечения A :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x^2 dV = \frac{1}{2} \int_l \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + F_x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx, \quad (5.43)$$

где первый член связан с осевой деформацией, остальные с изгибной. Подставим $U = U_c + U_u$, где

$$U_c = \frac{1}{2} \int_l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx, \quad (5.44)$$

$$U_u = \frac{1}{2} \int_l \left[EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + F_x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx.$$

Представим $U(x)$ и $U(x)$ через узловые перемещения стержня:

$$u(x) = [N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ N_4(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = N_c \Delta_c, \quad (5.45)$$

$$U(x) = [N_5(x) \ N_6(x)] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = N_u \Delta_u,$$

где $N_j(x)$ – функции формы, играющие фундаментальную роль в МКЭ, позволяющие представить перемещения любой точки в элементе через перемещения его узлов.

Подставив (5.45) в (5.44), получим

$$U_c = \frac{1}{2} \Delta_c^T K_c \Delta_c, \quad (5.46)$$

$$U_u = \frac{1}{2} \Delta_u^T K_u \Delta_u + \frac{1}{2} \Delta_u^T K_T \Delta_u,$$

где

$$K_c = \int_0^l EA (N_c)^T N_c dx, \quad K_u = \int_0^l EA (N_u)^T N_u dx, \quad (5.47)$$

$$K_T = \int_0^l F_x (N_u)^T N_u dx.$$

Здесь матрица K_c – матрица осевой жесткости элемента; K_u – матрица изгибной жесткости элемента; K_T – геометрическая матрица жесткости, характеризующая приращение изгибной жесткости вследствие наличия осевых сил F_x и зависящая от геометрических размеров элемента (для стержня – от длины l).

Для построения матриц жесткости элемента (5.47) необходимо получить функции формы $N_j(x)$. Рассмотрим балочный элемент, изображенный на рис. 5.27.

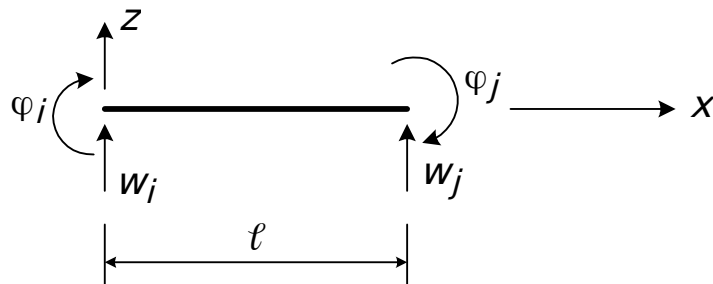


Рис. 5.27. Балочный элемент

Рассмотрим вектор узловых перемещений

$$\Delta_U = [W_i, \varphi_i, W_j, \varphi_j]^T,$$

где

$$\varphi_i = - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0}, \quad \varphi_j = - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l}.$$

Углы поворота φ_i и φ_j равны отрицательному значению тангенса угла наклона нейтральной оси, так как выражение в положительном направлении, т. е. по часовой стрелке, вызывает отрицательное смещение W .

Для описания поля перемещений функции W выберем полный кубический полином, содержащий четыре члена, так как имеем четыре степени свободы в векторе Δ_U :

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = M(x)\alpha. \quad (5.48)$$

Запишем вектор Δ_U с использованием соотношения (5.48):

$$\Delta_U = \begin{Bmatrix} W_i \\ \varphi_i \\ W_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(x=0) \\ - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} \\ w(x=l) \\ - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

Перепишем (5.49) в более компактной форме

$$\Delta_U = A\alpha,$$

откуда найдем

$$\alpha = A^{-1}\Delta_U. \quad (5.50)$$

Подстановка (5.50) в (5.48) дает

$$w(x) = M(x)\alpha = M(x)A^{-1}\Delta_U = N_U\Delta_U, \quad (5.51)$$

где функция формы

$$N_U = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] A^{-1}, \quad (5.52)$$

а обратная матрица A^{-1} имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l^3 & 0 & 0 \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ 2 & -l & -2 & -l \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Вычислим в соответствии с (5.52) функции формы

$$\begin{aligned}
N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3}, \\
N_2(x) &= -x + \frac{2x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2}, \\
N_3(x) &= \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3}, \\
N_4(x) &= \frac{x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2}.
\end{aligned}
\tag{5.54}$$

На рис. 5.28 показаны деформации балки от единичных смещений опор.

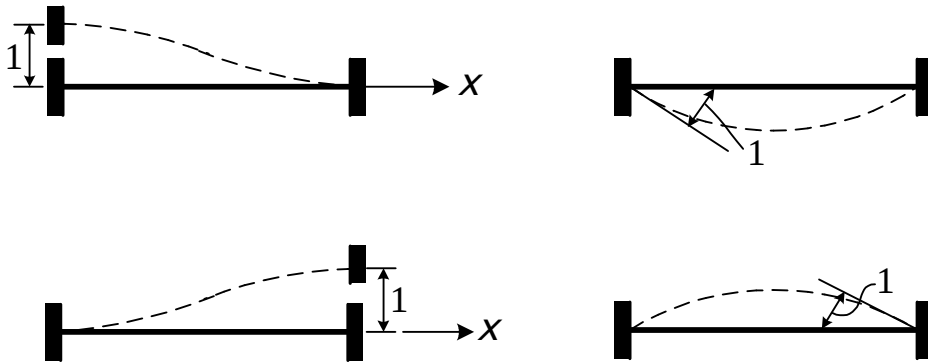


Рис. 5.28. Деформации балки от единичных смещений опор

Эти деформации как раз и описываются соответствующими функциями формы, которые называются балочными функциями и представляют собой полиномы Эрмита.

Матрица жесткости k_U в соответствии с выражением (5.47) может быть представлена как

$$k_U = \ell \int_0^{\ell} EJ \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix}^T [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] dx. \tag{5.55}$$

Очевидно, размер матрицы k_U будет 4x4. Определим для иллюстрации компоненту матрицы $(k_U)_{44}$:

$$(k_U)_{44} = \int_0^{\ell} EJ (N_4)^2 dx = \int_0^{\ell} EJ \left(\frac{2}{\ell} - \frac{6x}{\ell^2} \right)^2 dx = \frac{4EJ}{\ell^2} \left(\ell - \frac{6\ell^2}{2\ell} + \frac{9\ell^3}{3\ell^2} \right) = \frac{4EJ}{\ell}.$$

Аналогично находятся все остальные компоненты матрицы k_U . Окончательно получаем

$$k_U = \begin{bmatrix} 12EJ/\ell^3 & -6EJ/\ell^2 & -12EJ/\ell^2 & -6EJ/\ell^2 \\ -6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell & 6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell \\ -12EJ/\ell^3 & 6EJ/\ell^2 & 12EJ/\ell^3 & 6EJ/\ell^2 \\ -6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell & 6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell \end{bmatrix}. \tag{5.56}$$

Сравнив компоненты матрицы жесткости (5.55) с реакциями однопролетных балок метода перемещений на единичные перемещения опор, обнаруживаем их равенство. К примеру, при повороте узла j на угол $\varphi = 1$ эпюра моментов и реакции представлены на рис. 5.29.

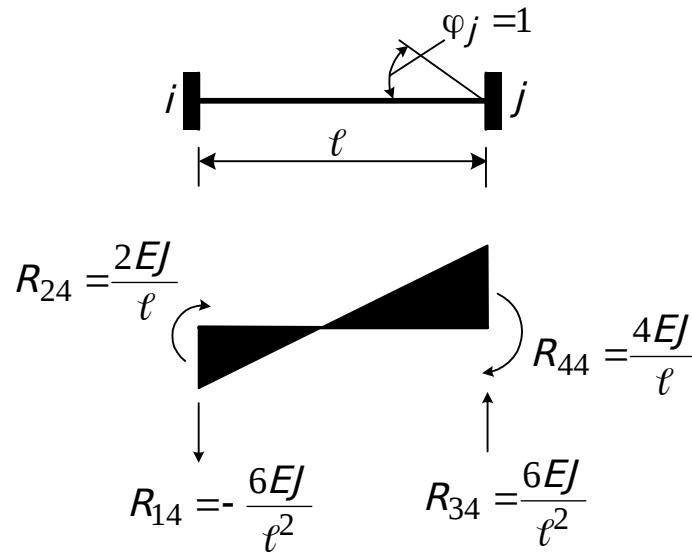


Рис. 5.29. Эпюра моментов и реакции однопролетной балки от поворота узла j на единицу

Реакции из табличной эпюры на рис. 5.29 и компоненты четвертого столбца матрицы k_U совпадают. Это значит, что выбор функции W в виде кубического полинома (5.48) привел к точному решению для стержня постоянной жесткости, не нагруженного в пролете, и при отсутствии осевой силы. Если мы воспользуемся таким же полиномом для вычисления геометрической матрицы K_2 , то это приведет к приближенному решению, т. е. мы будем считать, что при наличии осевых сил изогнутая ось стержня будет описываться кубической параболой. Считая, что осевая сила F_x вдоль стержня постоянна, в соответствии с (5.47) определим

$$K_2 = F_x \int_0^l (N_U)^T N_U dx = F_x L_2, \quad (5.57)$$

где матрица L_2 после соответствующих вычислений будет

$$L_2 = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Матрица осевой жесткости K_C в соответствии с (5.47) при $EA = \text{const}$ имеет вид

$$K_C = EA \int_0^l \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_5 & N_6 \end{bmatrix} dx, \quad (5.59)$$

где функции формы N_5 и N_6 могут быть получены аналогично предыдущему при задании функции $u(x) = b_0 + b_1x$ в виде линейного полинома. Предоставим читателю проделать необходимые формальные выкладки, мы же построим линейные функции N_5 и N_6 в соответствии с общим требованием к функциям формы, а именно функция формы N_i должна принимать значение, равное 1 в узле, где задана величина Δ_i , и равна нулю в других узлах, отвечающих остальным степеням свободы. Такому требованию отвечают следующие функции:

$$N_5(x) = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad (5.60)$$

$$N_6(x) = \frac{x}{\ell}.$$

Теперь не составляет труда построить матрицу осевой жесткости k_c :

$$k_c = \frac{EA}{\ell} \int_0^{\ell} \begin{Bmatrix} -1/\ell \\ 1/\ell \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/\ell & 1/\ell \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

Объединим векторы Δ_c и Δ_u :

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_c \\ \Delta_u \end{Bmatrix} = [u_i \quad u_j \quad w_i \quad \varphi_i \quad w_j \quad \varphi_j]^T. \quad (5.62)$$

Тогда общая матрица жесткости и геометрическая матрица в локальной системе координат примут вид

$$k = \begin{bmatrix} k_c & 0 \\ 0 & k_u \end{bmatrix}; \quad K_T = F_X L_1 = F_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

или в развернутом виде

$$k = \begin{bmatrix} EA/\ell & -EA/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/\ell & EA/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12EJ/\ell^3 & -6EJ/\ell^2 & -12EJ/\ell^3 & -6EJ/\ell^2 \\ 0 & 0 & -6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell & 6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell \\ 0 & 0 & -12EJ/\ell^3 & 6EJ/\ell^2 & 12EJ/\ell^3 & 6EJ/\ell^2 \\ 0 & 0 & -6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell & 6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell \end{bmatrix}, \quad (5.64)$$

$$L_1 = \frac{1}{30\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 36 & -36 & -3\ell \\ 0 & 0 & -3\ell & 4\ell^2 & 3\ell & -\ell^2 \\ 0 & 0 & -36 & 3\ell & 36 & 3\ell \\ 0 & 0 & -3\ell & -\ell^2 & 3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

5.2.2.8.2. Матрица жесткости в глобальной системе координат

Рассмотрим стержневой элемент $i-j$, связанный с локальной системой координат XZ , в глобальной системе координат XY (рис. 5.30).

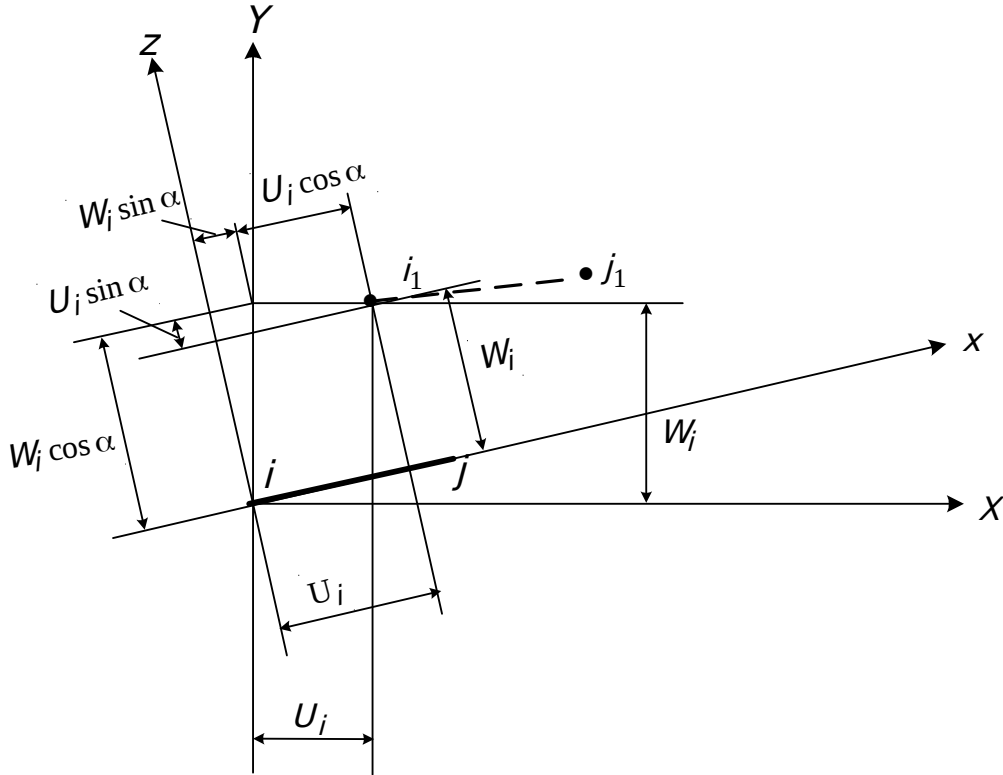


Рис. 5.30. Стержневой элемент $i-j$ в глобальной системе координат

После деформации конструкции стержень займет новое положение (штриховая линия). Из анализа рис. 5.30 следует, что

$$U_j = U_j \cos \alpha + W_j \sin \alpha, \quad (5.66)$$

$$W_j = -U_j \sin \alpha + W_j \cos \alpha.$$

Составляя подобные соотношения для узла j и, учитывая, что поворот узлов не зависит от выбора системы координат, перепишем соотношение (5.66) в матричной форме

$$\Delta = BZ, \quad (5.67)$$

где

$$\Delta = [U_i \quad U_j \quad W_i \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]^T, \quad (5.68)$$

$$Z = [U_i \quad U_j \quad W_i \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица B представляет собой матрицу перевода перемещений из глобальной системы координат в локальную или матрицу связи перемещений в локальной и глобальной системах координат, т. е. является матрицей деформации.

Для того чтобы получить матрицу жесткости K элемента в глобальной системе координат, запишем сначала физическое уравнение, связывающее вектор узловых сил элемента S с вектором Δ в локальной системе координат XU :

$$S = k\Delta, \quad (5.69)$$

где k – матрица жесткости элемента в локальной системе координат.

Приравняем работу узловых сил P на перемещениях Z глобальной системы координат работе узловых сил S на перемещениях Δ локальной системы координат, так как работа – скалярная величина и не зависит от выбора системы координат,

$$P^T Z = S^T \Delta = S^T B Z. \quad (5.70)$$

Здесь использовано соотношение (5.67), представляющее геометрические уравнения, а матрица B имеет смысл матрицы деформаций. Сокращая выражение (5.70) на Z и транспонируя обе части равенства, получаем статическое уравнение равновесия

$$P = B^T S, \quad (5.71)$$

где $B^T = A$ – статическая матрица (5.24).

Заменяя в (5.71) S согласно (5.69), а Δ согласно (5.67), получим

$$P = B^T k B Z = K Z. \quad (5.72)$$

Таким образом, при выводе матрицы K мы использовали три стороны задачи – физическую, геометрическую и статическую аналогично ММП в п. 5.2.1. Отличие здесь в том, что при выводе матрицы K использовали не статическую матрицу A , а матрицу деформаций B . Итак, перевод матрицы жесткости из локальной системы координат в глобальную сводится к выполнению преобразования

$$K = B^T k B. \quad (5.73)$$

Матрица K учитывает осевые деформации и изгиб стержней. То обстоятельство, что при продольно-поперечном изгибе возникают дополнительные реакции от продольной силы, учитывает матрица

геометрической жесткости L . Перевод матрицы L_1 в глобальную систему координат производится аналогично (5.73):

$$L = B^T L_1 B. \quad (5.74)$$

Продольное усилие F_x зависит от перемещений узлов стержня Δ . Известно, что продольное усилие пропорционально удлинению стержня, т. е.

$$F_x = \frac{EA}{\ell} \Delta_x = \frac{EA}{\ell} (U_i - U_j), \quad (5.75)$$

где Δ_x – удлинение стержня; U_i и U_j – перемещения узлов i и j вдоль стержня в локальной системе координат.

Уравнение (5.75) можно переписать в матричной форме:

$$F_x = T^T \Delta, \quad (5.76)$$

где

$$T^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell} & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.77)$$

$$\Delta = [U_i \quad U_j \quad W_j \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]^T.$$

Подставляя (5.67) в (5.76), находим продольное усилие

$$F_x = T^T BZ. \quad (5.78)$$

Выполняя последующие подстановки (5.78) в (5.71) и затем в (5.74) с учетом того, что для отдельного стержня $F_x = \text{const}$, получаем

$$L(Z) = B^T L_1 B T^T BZ. \quad (5.79)$$

Построим матрицу жесткости и геометрическую матрицу жесткости для комбинированного балочного элемента с шарниром в узле j (рис. 5.19). В этом случае изгибающий момент $M_j = 0$. Используя шестую строку из (5.64), запишем выражение для этого момента:

$$M_j = -\frac{6EJ}{\ell^2} W_i + \frac{2EJ}{\ell} \varphi_i + \frac{6EJ}{\ell^2} W_j + \frac{4EJ}{\ell} \varphi_j = 0. \quad (5.80)$$

Преобразуя уравнение (5.80), получим

$$\varphi_j = \frac{3}{2\ell} W_i - \frac{1}{2} \varphi_i - \frac{3}{2\ell} W_j. \quad (5.81)$$

Запишем связь между вектором перемещений балочного заземленного элемента $\Delta = [U_i \quad U_j \quad W_j \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]^T$ и вектором перемещений комбинированного балочного элемента $\Delta_k = [U_i \quad U_j \quad W_j \quad \varphi_i \quad W_j]^T$ в виде

$$\Delta = C \Delta_k, \quad (5.82)$$

где матрица преобразования C строится с учетом (5.81):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2\ell & -1/2 & -3/2\ell \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

Теперь подобно тому, как выражение (5.67) представляет преобразование вектора Z в вектор Δ через матрицу B и приводит к формулам (5.73) и (5.74), мы можем, учитывая аналогию уравнений (5.67) и (5.82), получить матрицы жесткости комбинированного элемента, заменив в формулах (5.73) и (5.74) матрицу B на матрицу C :

$$K_k = C^T k C, \quad (5.84)$$

$$L_k = C^T L_1 C.$$

Для шарнирно-стержневых элементов (рис. 5.18) изгибающие моменты в узлах i и j равны нулю, поэтому из (5.64) находим

$$M_i = -\frac{6EJ}{\ell^2} w_i - \frac{4EJ}{\ell} \varphi_i + \frac{6EJ}{\ell^2} w_j + \frac{2EJ}{\ell} \varphi_j = 0. \quad (5.85)$$

$$M_j = -\frac{6EJ}{\ell^2} w_j - \frac{2EJ}{\ell} \varphi_j + \frac{6EJ}{\ell^2} w_i + \frac{4EJ}{\ell} \varphi_i = 0.$$

Решение системы уравнений (5.85) относительно неизвестных φ_i и φ_j дает

$$\varphi_i = \frac{w_j}{\ell} - \frac{w_i}{\ell}, \quad (5.86)$$

$$\varphi_j = \frac{w_j}{\ell} - \frac{w_i}{\ell}.$$

Записав связь между вектором перемещений балочного заземленного элемента Δ и вектором перемещений шарнирно-стержневого элемента

$$\Delta_{ш} = [U_i \quad U_j \quad W_i \quad W_j] \quad \text{как} \quad \Delta = C \Delta_{ш}, \quad (5.87)$$

с учетом (5.86) получим матрицу преобразований C :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\ell & -1/\ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\ell & -1/\ell \end{bmatrix}. \quad (5.88)$$

Следуя вышеизложенной процедуре для комбинированного элемента, получим матрицы жесткости

$$K_{ш} = \begin{bmatrix} EA/\ell & -EA/\ell & 0 & 0 \\ -EA/\ell & EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.89)$$

$$L_{1, ш} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\ell & -1/\ell \\ 0 & 0 & -1/\ell & 1/\ell \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

Матрица (5.90) отражает тот факт, что при поперечном смещении W_j шарнирной опоры j ферменного элемента, нагруженного осевой силой N , возникают поперечные опорные реакции NW_j/ℓ , равные и противоположно направленные.

Раздел 6

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

6.1. Общие положения

Упругие деформации, которые изучались в предыдущих разделах, обладают свойством полного восстановления после снятия приложенных нагрузок. Кроме того, упругие деформации зависят только от величины напряжений и не зависят от истории деформирования или нагружения. Любая деформация, возникающая как ответная реакция материала на приложенные нагрузки или воздействия окружающей среды и не подчиняющаяся законам линейной теории упругости, может рассматриваться как неупругая деформация. В частности необратимые смещения, которые получаются в результате скольжения или дислокаций на атомном уровне и, как следствие, ведут к остаточным изменениям размеров, называются пластическими деформациями. Такие деформации имеют место только при интенсивности напряжения выше некоторого порога, известного как предел текучести. Будем называть этот предел σ_T . Основные проблемы теории пластичности состоят в математической формулировке соотношений между напряжениями и деформациями и в установлении правил определения количественных критериев для указания начала наступления пластичности.

Рассмотрим диаграмму зависимости напряжений от деформации при испытании некоторого гипотетического материала на простое одноосное растяжение (или сжатие). Такая диаграмма представлена на рис. 6.1.

Нагружение считают простым, если все компоненты нагрузок, начиная с нуля, возрастают одновременно и так, что соотношения между компонентами нагрузок в любой момент времени сохраняются неизменными, т. е. все внешние силы возрастают пропорционально общему параметру¹.

¹ Более полную формулировку простого и сложного нагружения см. в работе [20]

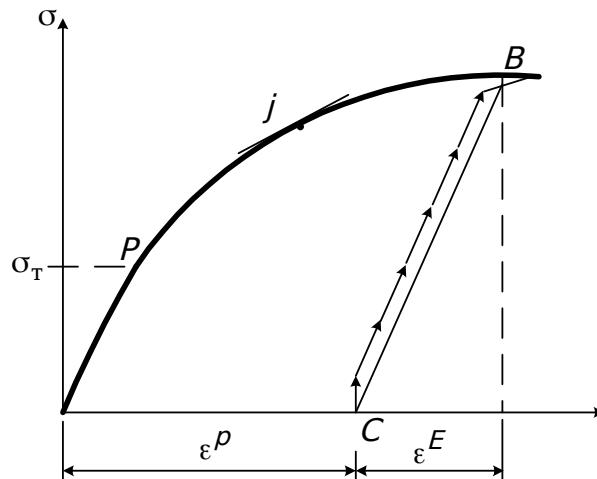


Рис. 6.1. Диаграмма зависимости напряжений от деформаций

Предел текучести точка P , соответствующая предельному напряжению σ_T , разделяет кривую напряжение-деформация (рис. 6.1) на упругую и пластическую область. Предел упругости наиболее часто берется как предел пропорциональности и лежит в верхнем конце линейной части кривой. Иногда за него принимают точку J , где наклон кривой достигает 50 % от своего первоначального значения, в другом способе расчета за предел текучести принимается такое значение напряжения, которое дает 0,2 % остаточной деформации. В упругой области существует взаимно однозначное соответствие между напряжением и деформацией. В пластической области дело обстоит иначе. При разгрузке от некоторого состояния, например, точка B на рис. 6.1, изображающая состояние, следует по пути BC , практически параллельному линейной упругой части кривой. В точке C , где напряжение достигает нуля, обнаруживается остаточная пластическая деформация ϵ^P .

На рис. 6.1 символом ϵ^E обозначена восстановленная упругая деформация, соответствующая точке B . При повторной нагрузке точка, изображающая состояние, движется из C обратно к B по пути, очень близкому к BC , но не попадает точно в B и из-за потери энергии в цикле разгрузка-нагрузка образуется небольшая петля гистерезиса. После возвращения к точке B требуется увеличение нагрузки, чтобы вызвать дальнейшую деформацию. Итак, ясно, что в пластической области напряжение зависит от всей истории нагружения или деформирования среды.

Хотя известно, что температура оказывает существенное влияние на пластическое поведение материала, в теории пластичности часто принимают условия изотермии и считают температуру просто параметром. Точно также на практике в общепринятой теории пластичности обычно пренебрегают влиянием скорости нагружения на диаграмму напряжение-деформация. В соответствии с этим пластические деформации считаются не зависящими от времени и изучаются отдельно от таких явлений, как ползучесть и релаксация.

6.2. Идеализированные диаграммы пластического поведения материала

Четыре из наиболее часто употребляемых идеализированных диаграмм представлены на рис. 6.2.

На рис. 6.2, а упругая область и явление упрочнения полностью отсутствуют, тогда как на рис. 6.2, б существует упругая зона, предшествующая пределу текучести, а упрочнения нет. При отсутствии упрочнения деформация называется идеально-пластической. Представления рис. 6.2, а, б наиболее полезны при изучении ограниченных пластических деформаций, когда большие деформации запрещены.

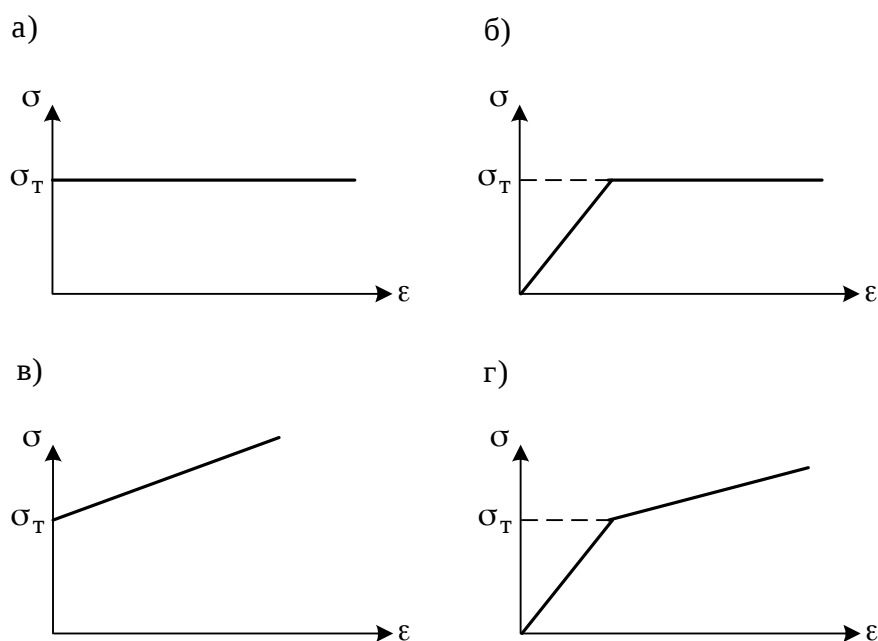


Рис. 6.2. Идеализированные диаграммы σ - ϵ пластического материала:

- а) жестко-идеально-пластический материал;
- б) упруго-идеально-пластический материал;
- в) жестко-пластический материал с линейным упрочнением;
- г) упруго-пластический материал с линейным упрочнением

На рис. 6.2, в упругая зона отсутствует, а упрочнение предполагается линейным. Эта модель, так же как и модель, представленная на рис. 6.2, г, широко используется при изучении не ограниченного внешними условиями пластического течения. Отметим, что существуют и другие модели деформирования, например ступенчатое упрочнение.

6.3. Условия пластичности

Условия пластичности являются важным обобщением на трехмерное напряженное состояние. Из многочисленных условий пластичности два

приемлемо просты математически и в то же время достаточно точны, чтобы быть весьма полезными при изучении начальной стадии пластичности изотропных материалов. Это условия (критерии) Треска и Мизеса.

6.3.1. Критерий текучести Треска

Согласно этому критерию, пластическое поведение начинается тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает предела текучести при простом растяжении

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (6.1)$$

6.3.2. Критерий текучести Мизеса

Согласно этому критерию пластическое поведение начинается тогда, когда второй инвариант девиатора напряжений (п. 1.1.4) достигает некоторого критического значения

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (6.2)$$

Изобразим пространство главных напряжений. Это пространство определяется тем, что в качестве меры расстояний вдоль осей координат берутся величины напряжений (рис. 6.3, а). Каждая точка такого пространства соответствует некоторому напряженному состоянию. Радиус вектор OP любой точки $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ может быть разложен на две компоненты: OA – вдоль прямой OZ , которая составляет равные углы с осями координат, и OB – в плоскости, перпендикулярной OZ , проходящей через начало координат и имеющей уравнение $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Компонента вдоль оси OZ , для которой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, представляет гидростатическое давление, а компонента в перпендикулярной плоскости – девиаторную часть напряжения. Если посмотреть вдоль прямой OZ (рис. 6.3, а) в направлении к началу координат – точке O , то станет ясно, что проекции осей координат на перпендикулярную к оси OZ плоскость оказываются расположенными симметрично под углом 120° одна к другой, как показано на рис. 6.3, б.

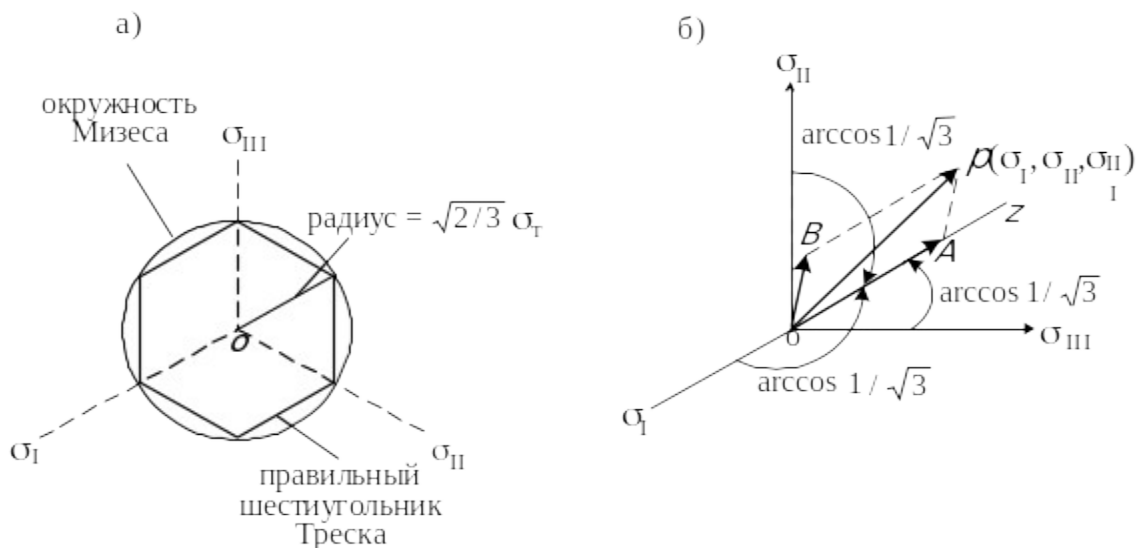


Рис. 6.3. Пространство напряжений (а); проекции осей координат на плоскость, перпендикулярную к оси Z и проходящую через начало координат (б)

Кривые текучести, соответствующие критериям Треска (6.1) и Мизеса (6.2), изображены на рис. 6.3,а. За основу (точку, через которую должна проходить кривая) принято пластическое напряженное состояние при простом растяжении. В такой ситуации окружность Мизеса радиуса $\sqrt{2/3} \sigma_T$ оказывается описанной около правильного шестиугольника Треска.

Продолжение нагружения после достижения начального предела текучести приводит к пластическим деформациям, которые могут сопровождаться изменениями первоначальной поверхности текучести. Если материал предполагается идеально-пластическим, то поверхность текучести не изменяется в процессе пластического деформирования и начальное условие пластичности остается в силе. Этому соответствуют одномерные диаграммы «напряжения-деформации», изображенные на рис. 6.2, а и 6.2, б. Однако для материала с упрочнением (рис. 6.2, в, 6.2, г) пластическое деформирование в общем случае сопровождается изменениями поверхности текучести. Для учета таких изменений рассмотрим наиболее простой закон упрочнения. Гипотеза изотропного упрочнения при нагружении постулирует, что поверхность текучести просто увеличивается в размерах, сохраняя при этом свою начальную форму. Кривые текучести для критериев Мизеса и Треска будут концентрическими окружностями и правильными шестиугольниками соответственно.

6.4. Соотношения между напряжениями и деформациями

Условие перехода из упругого состояния в пластическое определим по формуле предельного состояния Мизеса (6.2). По этой гипотезе переход из упругого состояния в пластическое происходит тогда, когда величина

$$\sigma_j = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)}, \quad (6.3)$$

называемая интенсивностью напряжений, достигает предела текучести. Величина σ_j в упругом состоянии может быть выражена при помощи соотношений (1.16), (1.17) через деформации

$$\sigma_j = E \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)}, \quad (6.4)$$

Обозначим через

$$\varepsilon_j = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)} \quad (6.5)$$

интенсивность деформаций.

Тогда для упругого состояния

$$\sigma_j = E \varepsilon_j. \quad (6.6)$$

Для законов пластичности удобно выбрать такую же форму написания. При сложном напряженном состоянии

$$\sigma_j = E \varepsilon_j, \quad (6.7)$$

где E – секущий модуль деформации, зависящий от степени деформации, т. е. $E = E(\varepsilon)$.

Таким образом, основную гипотезу теории пластичности при простом нагружении можно сформулировать так:

при сложном напряженном состоянии зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформации для каждой точки тела принимается такой же, как зависимость между напряжением и удлинением при простом растяжении того же тела.

Исключительная важность закона (6.7) для механики упругих и пластических деформаций, а следовательно, и важность понятий интенсивности напряжений и интенсивности деформаций заключается прежде всего в том, что при помощи этого закона любое сложное объемное напряженное состояние независимо от того, имеет ли рассматриваемая область упругие или неупругие деформации, как бы сводится к простому растяжению или сжатию стержня.

Установим зависимости между компонентами напряжений и компонентами деформации, по форме аналогичные известным в теории упругости выражениям (1.16) и (1.17), но с заменой постоянного модуля

упругости E на переменный $G = E/3 = \frac{\sigma_j}{3\varepsilon_j}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_x - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_j}{3\varepsilon_j}(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}), \\
\sigma_y - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_j}{3\varepsilon_j}(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}), \\
\sigma_z - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_j}{3\varepsilon_j}(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}), \\
\tau_{xy} &= \frac{\sigma_j}{3\varepsilon_j}\gamma_{xy}, \\
\tau_{yz} &= \frac{\sigma_j}{3\varepsilon_j}\gamma_{yz}, \\
\tau_{zx} &= \frac{\sigma_j}{3\varepsilon_j}\gamma_{zx}.
\end{aligned}
\tag{6.8}$$

Так как объемная деформация при пластической деформации практически равна нулю, то в первых трех уравнениях (6.8) слагаемое ε_{cp} часто исключают и уравнения принимают вид

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_j}{\varepsilon_j} \varepsilon_x \text{ и т. д.}$$

При плоском напряженном упруго-пластическом состоянии уравнения теории пластичности иногда удобно выразить в форме, аналогичной выражению (4.16),

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu'\sigma_y), \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu'\sigma_x),
\end{aligned}$$

где для области пластических деформаций допустимо принять $\nu = 0,5$. Из последних уравнений получаем формулы для напряжений, выраженных через деформации

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{4}{3}E(\varepsilon_x + 0,5\varepsilon_y), \\
\sigma_y &= \frac{4}{3}E(\varepsilon_y + 0,5\varepsilon_x),
\end{aligned}
\tag{6.9}$$

где $E = \sigma_j / \varepsilon_j$.

6.5. Основные уравнения теории пластичности (теория малых упруго-пластических деформаций)

Математический аппарат этой теории пластичности составляют следующие уравнения: три статических уравнения (2.1), единые для упругого и пластического тел; шесть геометрических соотношений (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), также общих для механики деформируемого тела независимо от природы тела; шесть физических уравнений (6.8), отражающих конкретные свойства упруго-пластического

тела, выраженных через компоненты напряжений и деформаций, выражений для интенсивности напряжений и деформаций (6.3), (6.5) и уравнение (6.7), связывающее последние между собой.

Таким образом, всего имеем 18 уравнений, куда входят 18 неизвестных. Решением задачи теории пластичности, следовательно, явится такое, которое для каждой точки деформируемого тела удовлетворяет этим 18 уравнениям и, кроме того, на границе тела удовлетворяет контурным условиям (6.2).

Рассмотрим пример. Толстостенная цилиндрическая труба, размеры которой указаны на рис. 6.4, находится под действием внутреннего равномерного давления p_0 ; труба закрыта с торцов. Необходимо найти значение p_0 , при котором впервые достигается предел текучести. При этом следует использовать критерии текучести Мизеса (6.2) и Треска (6.1).

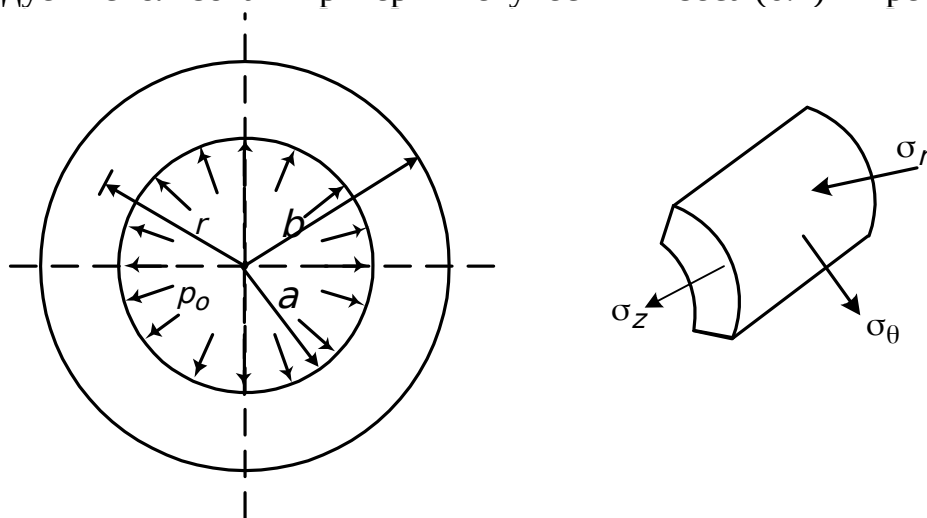


Рис. 6.4. Схема толстостенной трубы

Компоненты напряжения в цилиндрических координатах будут главными напряжениями. Анализ упругого состояния (см. п. 4.6.3) позволяет показать, что

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p_0(b^2/r^2 - 1)/Q, \\ \sigma_\theta &= p_0(b^2/r^2 + 1)/Q, \\ \sigma_z &= p_0/Q,\end{aligned}$$

где $Q = (b^2/a^2 - 1)$.

Для данной задачи критерий Мизеса (5.2) имеет вид

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2\sigma_T^2,$$

или

$$p_0^2 b^4 / r^4 = Q^2 \sigma_T^2 / 3.$$

Предел текучести впервые достигается при $r = a$ и

$$\rho_0 = (\sigma_T / \sqrt{3}) (1 - a^2 / b^2).$$

Критерий Треска (6.1) сводится к равенству

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_T,$$

так как σ_z – промежуточное по величине главное напряжение. Таким образом, $2\rho_0 b^2 / r^2 = \sigma_T$, и теперь предел текучести впервые достигается при $r = a$ и

$$\rho_0 = (\sigma_T / 2) (1 - a^2 / b^2).$$

Раздел 7

ПОЛЗУЧЕСТЬ МАТЕРИАЛОВ

7.1. Общие положения

В этом разделе рассматривается свойство материалов, связанное с деформированием их во времени при постоянной нагрузке или напряжении.

Способность материала деформироваться во времени при действии постоянных нагрузок называется ползучестью.

Явление ползучести присуще таким материалам, как бетон, кирпич, древесина, полимеры, естественный камень, грунты и т. п. Металлы также обнаруживают это свойство деформирования, которое становится особенно заметным при высокой температуре, а в цветных металлах (свинце, меди и т. п.) даже при комнатной температуре.

Фактор ползучести имеет существенное значение для работы конструкций. Достаточно отметить, что напряжение в арматуре железобетонных конструкций может в процессе ползучести бетона увеличиться в 2-2,5 раза, а перемещения – в 3-4 раза. Хотя явление ползучести было известно давно, экспериментально его исследовал одним из первых В. Вебер в 1835 г. в опытах по воздействию крутящего момента на кварцевые волокна. В них обнаруживалось удивительное для неживой материи свойство хранить «память» о воздействиях, которые она испытывала в прошлом.

Опыты по изучению ползучести показали, что она наблюдается при любых напряжениях, даже таких, которые при кратковременном действии нагрузки вызывают только упругие деформации. Результаты испытаний представляют в виде кривых ползучести, т. е. кривых зависимости деформаций от времени (рис. 7.1).

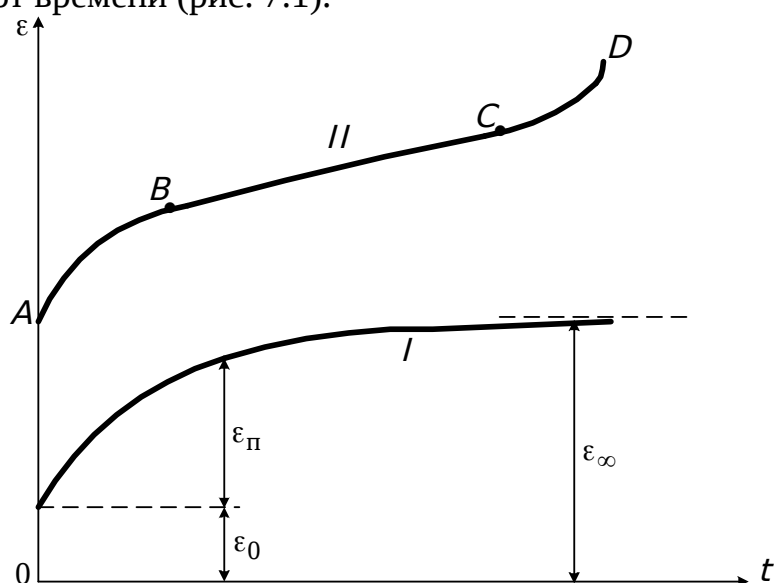


Рис. 7.1. Характерные кривые ползучести материала

В начальный момент времени деформация имеет значение ε_0 , равное упругой деформации или сумме упругой и пластической деформации. Обычно считается, что время нагружения (или разгрузки) образца пренебрежимо мало по сравнению со временем проведения эксперимента, в связи с чем можно полагать, что напряжение и деформации ε_0 появляются мгновенно.

С увеличением времени t наблюдается возрастание деформаций, характер которого определяется скоростью $\dot{\varepsilon}$ (точкой обозначена производная по времени t). На графике I (рис. 7.1) процесс деформирования сопровождается уменьшением скорости $\dot{\varepsilon}$ и асимптотическим стремлением ее к нулю. Полная деформация образца, определяемая суммой начальной деформации ε и деформации ползучести, т. е. $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{п}$, стремится к предельному значению ε_{∞} . На графике II можно выделить три участка: АВ, ВС, CD. Участок АВ характеризуется уменьшением скорости деформирования и соответствует неустановившейся ползучести. По окончании ее скорость $\dot{\varepsilon}$ принимает минимальное значение: наступает фаза установившейся ползучести, когда скорость $\dot{\varepsilon}$ постоянна (участок ВС). С увеличением напряжения σ продолжительность перехода установившейся ползучести сокращается. Испытание заканчивается либо хрупким разрушением образца в момент времени, соответствующий точке С, либо вязким разрушением, которое происходит с образованием шейки. В последнем случае появляется участок CD.

Если увеличение деформаций ползучести пропорционально увеличению напряжений, то говорят о линейной ползучести, в противном случае – о нелинейной ползучести. Ползучесть бетона, пластмасс при малых напряжениях линейна. В частности линейная ползучесть бетона при сжатии имеет место при напряжениях, меньших приблизительно половины призмной прочности. Ползучесть металлов при высоких температурах нелинейная. На ползучесть различных материалов, кроме величины действующих напряжений и температуры, оказывают значительное влияние и другие факторы. Например, на ползучесть бетона сказывается водоцементное отношение, вид цемента, масштабный характер, влажность бетона, характер заполнения и т. д.

Современное состояние теории ползучести характеризуется большим количеством различных теорий, которые по отношению друг к другу далеко не являются согласными, а в применении их к отдельным задачам оказываются даже противоречивыми. Экспериментальные исследования, которые в области теорий ползучести проводились и интенсивно ведутся во многих странах, оказываются все еще далеко не достаточными, чтобы построить единую теорию ползучести. Исходя из этих соображений, в данном разделе преимущественно рассмотрена теория, в основе которой лежит представление об упруго-вязком теле. Теории, построенные на таких

представлениях, оказываются наиболее стройными и в качественном отношении отражают правильный процесс развития деформаций во времени.

7.2. Зависимости между напряжениями и деформациями при линейной ползучести

Рассмотрим образец из вязко-упругого материала, обладающего свойством линейной ползучести, при одноосном напряженном состоянии. Внешняя нагрузка прикладывается в момент времени $\tau > 0$ (рис. 7.2, а, б).

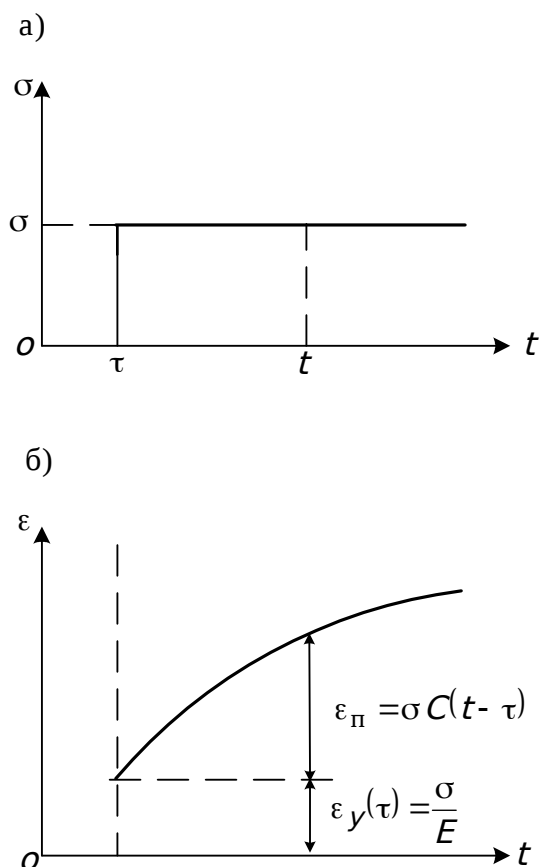


Рис. 7.2. Кривая ползучести для образца, нагруженного в момент времени τ

За начало отсчета времени принимается момент изготовления образца. Температура образца постоянна и равна комнатной. Если нагрузка постоянна, то деформация образца в момент времени t ($t > \tau > 0$) определяется выражением

$$\epsilon(t, \tau) = \sigma \delta(t - \tau), \quad (7.1)$$

причем

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E} + C(t - \tau). \quad (7.2)$$

Функция $C(t-\tau)$ определяет деформацию ползучести при $\sigma=1$. Здесь предполагается, что свойства материала не зависят от времени (материал не обладает свойством старения).

В момент времени τ ползучесть проявиться не успела, потому

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E}.$$

Для $t > \tau$ выполняется условие $C(t-\tau) > 0$, так как деформация ползучести монотонно возрастает с увеличением времени.

Для получения зависимостей между напряжениями и деформациями важное значение имеет принцип наложения. Согласно ему суммарная деформация ползучести при переменном напряжении может быть найдена как сумма деформаций ползучести, вызванных соответствующими приращениями напряжений. Полная деформация образца будет

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{t_0}^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (7.3)$$

Здесь введено обозначение

$$K(t-\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} C(t-\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) \geq 0. \quad (7.4)$$

Функция $K(t-\tau)$ имеет размерность $1/(\text{сут} \cdot \text{МПа})$. Первое слагаемое в соотношении (7.3) соответствует упругой деформации, а интегральный член – деформации ползучести, накапливаемой в образце при действии нагрузки от момента времени t_0 до t . Функция $K(t-\tau)$ указывает на то, что если в момент времени τ было приложено напряжение $\sigma(\tau)$, которое действовало в течение времени $d\tau$, то материал сохраняет воспоминание о действии этого напряжения в виде малой деформации $d\varepsilon_{\text{п}} = K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau$.

Теория ползучести, представленная соотношением (7.3), получила название наследственной теории ползучести. Функция $K(t-\tau)$ может иметь различное представление. Например, в зависимости от материала для $K(t-\tau)$ используются выражения

$$K(t-\tau) = \gamma \frac{K}{E} \bar{e}^{-\gamma(t-\tau)}, \quad K(t-\tau) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{K_i}{E} \bar{e}^{-\gamma_i(t-\tau)}, \quad \gamma_i > 0,$$

$$K(t-\tau) = \frac{k}{E^\alpha \sqrt{t-\tau}}, \quad K(t-\tau) = \frac{k}{E^\alpha \sqrt{t-\tau}} \bar{e}^{-\gamma(t-\tau)}, \quad 0 < \frac{1}{\alpha} < 1,$$

где γ, K, α – постоянные коэффициенты.

Рассмотрим более детально явление ползучести, описываемое уравнением (7.3). Подставим в это уравнение функцию K в виде

$$K(t-\tau) = \gamma \frac{K}{E} \bar{e}^{-\gamma(t-\tau)}.$$

В результате получим следующую зависимость:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \gamma K \int_0^t \bar{e}^{-\gamma(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right], \quad t_0 = 0.$$

Умножив обе части этого равенства на $e^{\gamma t}$, найдем

$$E e^{\gamma t} \dot{\varepsilon}(t) = e^{\gamma t} \dot{\sigma}(t) + \gamma k \int_0^t e^{\gamma \tau} \sigma(\tau) d\tau.$$

После чего продифференцируем их один раз по времени t :

$$E(\gamma e^{\gamma t} \dot{\varepsilon} + e^{\gamma t} \ddot{\varepsilon}) = \gamma e^{\gamma t} \dot{\sigma} + e^{\gamma t} \ddot{\sigma} + \gamma k e^{\gamma t} \sigma.$$

Поделив теперь уравнение на $e^{\gamma t}$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\gamma E \varepsilon + E \dot{\varepsilon} = \gamma(1+k)\sigma + \dot{\sigma},$$

решение которого должно удовлетворять начальному условию $\varepsilon(0) = \sigma(0) | E$.

Для стареющих материалов механические свойства изменяются с течением времени. Упругие деформации и деформации ползучести зависят от того, в каком возрасте был нагружен образец. Зависимость между деформациями и напряжениями записывается как (см. 7.1)

$$\varepsilon(t, \tau) = \sigma \delta(t, \tau), \quad \delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau). \quad (7.5)$$

В частности при расчете бетонных и железобетонных конструкций для функций $E(t)$ и $C(t, \tau)$ часто принимают выражения

$$E(\tau) = E_0(1 - \beta e^{-\alpha \tau}), \quad C(t, \tau) = \varphi(t) f(t - \tau),$$

$$\varphi(t) = A + \frac{B}{D + t}, \quad \text{или} \quad \varphi(t) = A + B e^{-\alpha t},$$

$$f(t - \tau) = 1 - e^{-\lambda(t - \tau)}.$$

С увеличением τ функции $E(\tau)$, $\varphi(\tau)$ стремятся к постоянным значениям, а $\delta(t, \tau)$ определяется при этом соотношением

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E_0} + A[1 - e^{-\lambda(t - \tau)}]. \quad (7.6)$$

Важно отметить, что при $t \rightarrow \infty$ и постоянном напряжении деформация ползучести не зависит от момента времени τ (от возраста материала, при котором было произведено нагружение образца), а зависит только от продолжительности действия нагрузки $t - \tau$.

Количественно о деформациях ползучести и скорости их приближения к предельному значению можно судить по следующим данным, которые удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов для бетона: $E_0 = 20$ ГПа, $\beta = 1$, $\alpha = 0,03$ (1/сут), $A = 0,09$ (1/ГПа), $D = 0$, $B = 0,482$ (сут/ГПа), $\gamma = 0,026$ (1/сут). Значения модуля упругости $E(\tau)$, функции $C(t, \tau)$ и деформации ε_∞ (при $\sigma = 0,1$ МПа) для разных t и τ содержатся в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Значение модуля упругости, функции $C(t, \tau)$ и предельной деформации ε_∞

$E(\tau)$	$t_{\text{сут}}$					$\varepsilon_\infty \cdot 10^5$
	50	100	150	360	720	

$\tau_{\text{сут}}$	МПа	$E(\tau) \cdot C(t - \tau)$					
7	3800	0,40	0,55	0,59	0,60	0,60	4,22
14	6900	0,52	0,76	0,83	0,86	0,86	2,69
28	11400	0,53	1,03	1,17	1,22	1,22	1,95
90	18600	–	0,41	1,41	1,78	1,78	1,50

Графики изменения деформаций $\varepsilon(t)$, соответствующие этим данным, показаны на рис. 7.3.

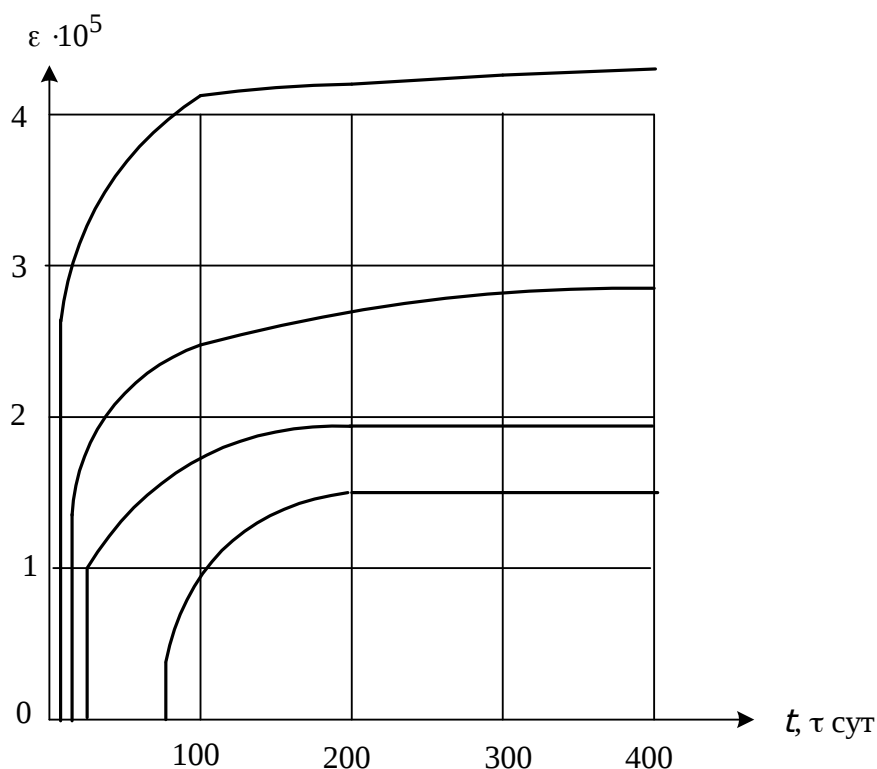


Рис. 7.3. Кривые ползучести для бетона, полученные при нагружении образцов через 7, 14, 28 и 90 суток с момента изготовления

Эти данные свидетельствуют о том, что модуль упругости $E(\tau)$ с увеличением возраста бетона быстро приближается к своему предельному значению E_0 . Через три месяца со дня изготовления образца разница между действительным и предельным модулями упругости составляет всего 7%. Наиболее интенсивный рост деформаций ползучести наблюдается в первое время после нагружения образца, а предельное значение деформаций существенно зависит от возраста бетона к моменту приложения нагрузки. Значения ε_∞ для бетона, старением которого можно пренебречь, определяется формулой (7.6) и равно $1,4 \cdot 10^{-5}$. В общем случае соотношение между напряжениями и деформациями для «стареющих» материалов записывается аналогично (7.3):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^t \mathcal{K}(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (7.7)$$

Здесь вновь вводится обозначение

$$\mathcal{K}(t, \tau) = - \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau).$$

Теория ползучести, в основу которой положено выражение (7.7), носит название теории наследственного старения. В дальнейшем для краткости будем записывать уравнения типа (7.7) в операторной форме

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(1 + \mathcal{K})\sigma, \quad (7.8)$$

причем $\frac{1}{E}\mathcal{K}\sigma = \int_{t_0}^t \mathcal{K}(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau.$

7.3. Релаксация напряжений

В том случае, когда известен закон изменения деформации во времени $\varepsilon(t)$, напряжение $\sigma(t)$ может быть найдено путем решения уравнения

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^t \mathcal{K}(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau.$$

Уравнение, в котором искомая функция стоит под знаком интеграла, называется интегральным. Решение таких уравнений сопряжено с математическими трудностями, и выбор метода их решения в значительной степени зависит от вида функции $\mathcal{K}(t, \tau)$. В п. 7.2 было показано, что если использовать дополнительную функцию

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \frac{\gamma k}{E} e^{-\gamma(t-\tau)},$$

то приведенное выше уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{\sigma} + \gamma(1 + k)\sigma = E\dot{\varepsilon} + \gamma E\varepsilon \quad (7.9)$$

с начальным условием $\varepsilon(0) = \sigma(0) / E$.

Рассмотрим задачу об изменении напряжений в стержне, вызванных постоянной деформацией (рис. 7.4, а, в).

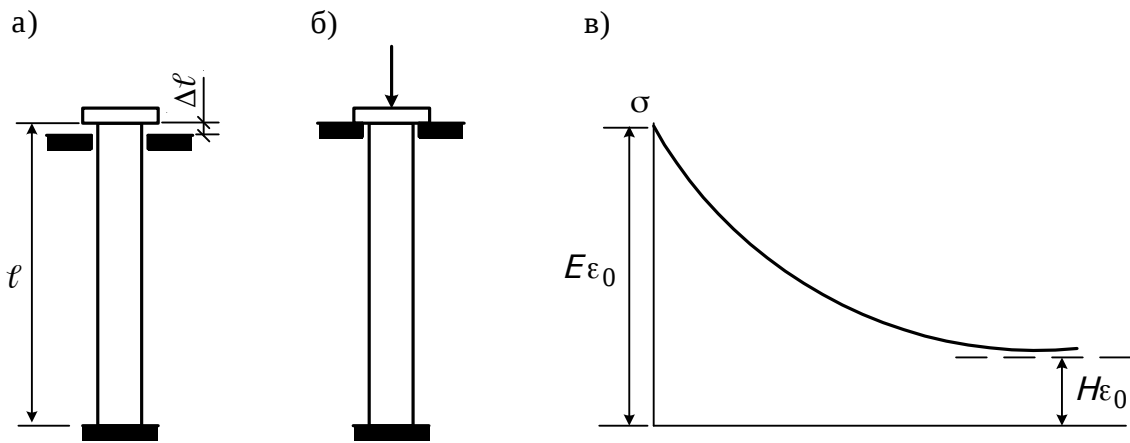


Рис. 7.4. Нагружение стержня (а, б), кривая релаксации (в)

В начальный момент времени напряжение равно $\sigma_0 = E\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \Delta l / l$.

Напряжение в произвольный момент времени найдем из уравнения (7.9), которое при заданном воздействии принимает следующий вид:

$$\dot{\sigma} + \gamma(1+k)\sigma = \gamma E\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \text{const.} \quad (7.10)$$

Общее решение (7.10) записывается как сумма частного решения $\sigma_{\text{част}} = \frac{E\varepsilon_0}{1+k}$ и решения однородного дифференциального уравнения $\sigma(t) = C e^{-\gamma(1+k)t}$, где C – произвольная постоянная.

В итоге имеем

$$\sigma(t) = C e^{-\gamma(1+k)t} + \frac{E\varepsilon_0}{1+k}.$$

Постоянная C находится из начального условия (при $t=0$):

$$E\varepsilon_0 = C + \frac{E\varepsilon_0}{1+k}.$$

Отсюда

$$C = \frac{k}{1+k} E\varepsilon_0.$$

Окончательно найдем

$$\sigma(t) = \frac{E\varepsilon_0}{1+k} \left[1 + k e^{-\gamma(1+k)t} \right]. \quad (7.11)$$

Получен закон изменения напряжений во времени в поперечном сечении стержня, подверженного постоянной деформации ε_0 . График этой зависимости представлен на рис. 7.4, в. При $t \rightarrow \infty$ напряжения стремятся к постоянному значению

$$\sigma_{\infty} = \frac{E\varepsilon_0}{1+k} = H\varepsilon_0.$$

Построим кривую релаксации применительно к бетонной колонне (табл. 7.2). Будем считать, что к моменту нагружения возраст бетона достаточно большой, поэтому для функции $K(t-\tau)$ справедливо выражение

$$K(t-\tau) = \frac{\gamma k}{E} e^{-\gamma(t-\tau)},$$

причем $\gamma = 0,03$ (1/сут); $k = 1,8$.

Подстановка этих параметров в выражение (6.11) дает возможность вычислить значение напряжения в любой момент времени.

Таблица 7.2

Значения параметров кривой релаксации

t , сут	0	20	40	60	$t \rightarrow \infty$
$\frac{\sigma}{E\varepsilon_0}$	1	0,477	0,379	0,361	0,357

Полученные результаты показывают, что при заданных характеристиках материала напряжения значительно уменьшаются во времени и при $t \rightarrow \infty$ составляют $0,357\sigma_0$.

7.4. Принцип Вольтерра

Линейное соотношение между напряжениями и деформациями в форме (7.8) отличается от аналогичного соотношения для упругого материала только тем, что вместо величины $1/E$ в законе Гука записан интегральный оператор $\frac{1}{E}(1+k)$. Отсюда следует простое правило построения решения задачи теории линейной ползучести (линейной вязкоупругости), которое носит название принципа Вольтерра. Принцип заключается в следующем:

Решение задачи для вязко-упругого стержня или стержневой системы может быть получено так же, как решение аналогичной задачи для упругого стержня, если в процессе решения с интегральным оператором обращаться как с упругими постоянными.

В результате решение представляется как произведение функции от упругих постоянных и от пространственных координат на известную функцию времени, которое описывает внешнее силовое воздействие. Далее следует заменить упругие постоянные интегральными операторами и произвести необходимые операции над ними.

В частности, если напряженное состояние конструкции в предположении упругости ее элементов не зависит от упругих постоянных, то напряженное состояние конструкции, материал которой обладает свойством линейной ползучести, совпадает с решением упругой задачи.

Отсюда видно, что во всех статически определимых вязко-упругих системах напряженное состояние совпадает с напряженным состоянием аналогичных упругих систем. Если внешние нагрузки остаются постоянными во времени, то и напряжения также не меняются во времени. Влияние ползучести сказывается только на числовых значениях деформаций и перемещений. Последние могут быть найдены, как и в упругих системах, по формуле Максвелла-Мора. Ограничиваясь учетом только изгибающих моментов и нормальных сил, запишем формулу Максвелла-Мора для вязко-упругих систем:

$$\Delta_{\pi F} = \int \frac{1}{E} (1+K) \frac{M_{\pi} M_F}{J} ds + \int \frac{1}{E} (1+K) \frac{N_{\pi} N_F}{A} ds. \quad (7.12)$$

В том случае, когда усилия M_F , N_F неизменны во времени, выражение (7.12) принимает вид

$$\Delta_{\pi F} = \delta(t, t_0) \int \frac{M_{\pi} M_F}{J} ds + \delta(t, t_0) \int \frac{N_{\pi} N_F}{A} ds$$

или

$$\Delta_{\pi F} = E_0 \delta(t, t_0) \Delta_{\pi F}^{\text{уп}}. \quad (7.13)$$

Пример. Определить прогиб конца консольной балки (рис. 7.5, а) в момент времени $t_0 = 0$ загруженной равномерно распределенной нагрузкой, постоянной во времени. Материал балки является вязко-упругим, для которого

$$K(t-\tau) = \frac{\gamma k}{E_0} e^{-\gamma(t-\tau)},$$

причем E_0 , k , γ – заданные постоянные.

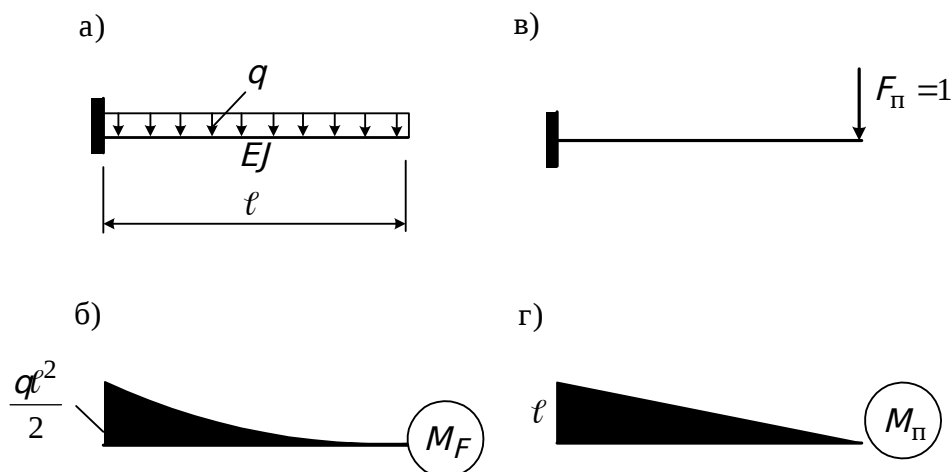


Рис. 7.5. Схема вязко-упругой балки

Перемещение конца упругой консоли y_0 найдем, построив необходимые эпюры M_{II} , M_q (рис. 7.5, б-г) и вычислив интеграл Мора:

$$y_0 = \frac{ql^4}{8E_0J}.$$

На основании принципа Вольтерра перемещение в момент времени t можно получить из равенства (7.13), причем

$$E_0 \delta(t, t_0) = 1 + \int_0^t \gamma k e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = 1 + k(1 - e^{-\gamma t}).$$

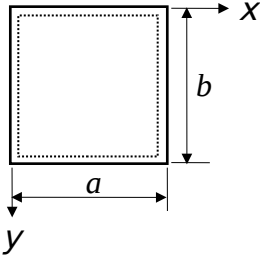
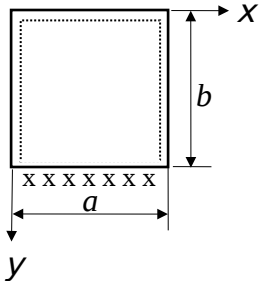
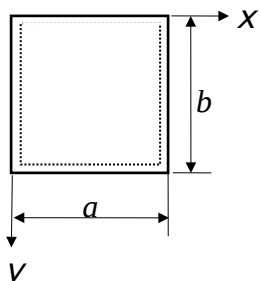
$$\text{Итак, } y(t) = \left[1 + k(1 - e^{-\gamma t})\right] \frac{ql^4}{8E_0J}.$$

Как видно, при постоянной нагрузке прогиб изменяется во времени по экспоненциальному закону, достигая при $t \rightarrow \infty$ предельного значения

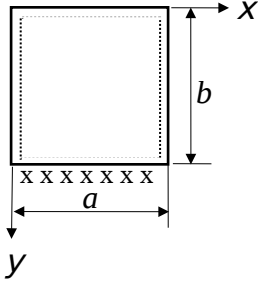
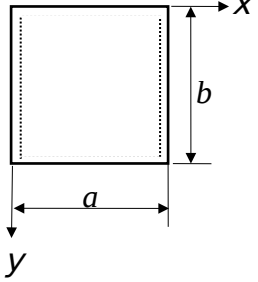
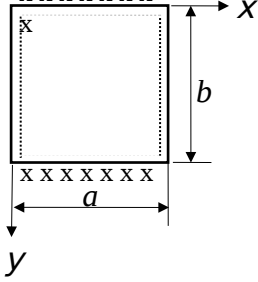
$$y_\infty = (1 + k) y_0.$$

Формулы для определения коэффициентов $A_n, B_n, C_n, \ddot{A}_n$ в общем несимметричном случае нагружения

Таблица П. 1.1

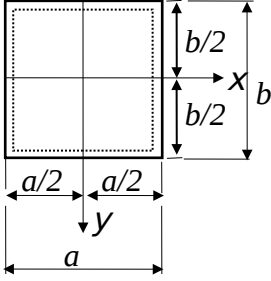
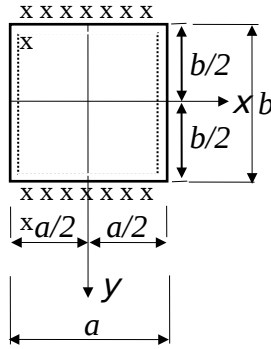
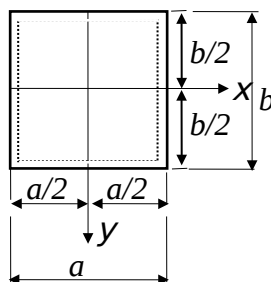
Схема опирания пластинки	Формулы для определения $A_n, B_n, C_n, \ddot{A}_n$
<p style="text-align: center;">1</p> 	<p style="text-align: center;">2</p> $A_n = -\frac{\varphi_n}{D\alpha^4}, \quad \ddot{A}_n = \frac{\varphi_n}{2 D\alpha^4},$ $B_n = -\frac{\varphi_n(2\text{sh}\alpha b - \alpha b(\text{ch}\alpha b - 1))}{2D\alpha^4 \text{sh}^2 \alpha b},$ $C_n = -\frac{\varphi_n}{2D\alpha^3} \frac{\text{ch}\alpha b - 1}{\text{sh}\alpha b}$
<p style="text-align: center;">2.</p> 	$\ddot{A}_n = \frac{\varphi_n[\alpha b(1-\nu)\text{ch}\alpha b + \nu\text{sh}2\alpha b + (3-\nu)\text{sh}2\alpha b]}{D\alpha^3[(3+\nu)\text{sh}2\alpha b + 2\alpha b(1-\nu)]},$ $A_n = -\frac{\varphi_n \nu}{D\alpha^4(1-\nu)} - \frac{2}{\alpha(1-\nu)} \ddot{A}_n,$ $B_n = -\frac{\varphi_n[\alpha b(2\text{sh}\alpha b - \alpha b) - 2(\text{ch}\alpha b - 1)\text{ch}\alpha b]}{2D\alpha^3[\text{sh}\alpha b \cdot \text{ch}\alpha b - \alpha b]},$ $C_n = -\frac{\varphi_n[\text{sh}^2 \alpha b - 2\nu(\text{ch}\alpha b - 1)\text{ch}\alpha b]}{2D\alpha^3[\text{sh}\alpha b \cdot \text{ch}\alpha b - \alpha b]}$
<p style="text-align: center;">3.</p> 	$A_n = -\frac{\varphi_n}{D\alpha^4}, \quad \ddot{A}_n = \frac{\varphi_n}{2D\alpha^4},$ $C_n = -\frac{\varphi_n[\alpha b(1-\nu)\text{sh}\alpha b - 2\nu(1-\text{ch}\alpha b)\text{ch}\alpha b]}{D\alpha^3[(3+\nu)\text{sh}2\alpha b + 2\alpha b(1-\nu)]},$ $B_n = C_n \frac{1+\nu}{\alpha(1-\nu)}$

Продолжение табл. П. 1.1

1	2
<p>4.</p> 	$D_n = \frac{\varphi_n \left[\nu(1+\nu) \operatorname{sh}^2 \alpha b - 2\nu \operatorname{ch}^2 \alpha b - 2(1-\nu) - \alpha b \right]}{D \alpha^3 \left[(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 4 \operatorname{ch}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]}$ $A_n = \frac{\varphi_n \nu}{D \alpha^4 (1-\nu)} - \frac{2}{\alpha(1-\nu)} D_n$ $C_n = \frac{\varphi_n (1-\nu) \left[2\alpha b \nu + 2\alpha b (1-\nu) \operatorname{ch} \alpha b - 2(1+\nu) \operatorname{sh} \alpha b \right]}{2D \alpha^3 \left[(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 4 \operatorname{ch}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]}$ $B_n = C_n \frac{1+\nu}{\alpha(1-\nu)}$
<p>5.</p> 	$A_n = - \frac{\varphi_n \nu}{D \alpha^4 (1-\nu)} - \frac{2}{\alpha(1-\nu)} D_n$ $D_n = \frac{\varphi_n \nu \left[\alpha b (1-\nu) + (3+\nu) \operatorname{sh} \alpha b \right]}{D \alpha^3 \left[(3+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]}$ $C_n = - \frac{\varphi_n \nu \left[\alpha b (1-\nu) + (3+\nu) \operatorname{sh} \alpha b \right] (\operatorname{ch} \alpha b - 1)}{D \alpha^3 \left[(3+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]}$ $B_n = C_n \frac{1+\nu}{\alpha(1-\nu)}$
<p>6.</p> 	$A_n = - \frac{\varphi_n}{D \alpha^4}$ $B_n = \frac{\varphi_n (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b (\operatorname{ch} \alpha b - 1))}{D \alpha^4 (\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2)}$ $C_n = - \frac{\varphi_n (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b (\operatorname{ch} \alpha b - 1))}{D \alpha^3 (\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2)}$ $D_n = \frac{\varphi_n (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b \operatorname{sh} \alpha b)}{D \alpha^3 (\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2)}$

Приложение 2

Формулы для определения коэффициентов A_n, D_n в случае симметричной пластинки и симметричного нагружения

Схема опирания пластинки	Формулы для определения A_n, \ddot{A}_n
<p>1.</p> 	$A_n = - \frac{\varphi_n}{D\alpha^4} \frac{2\text{ch} \frac{\alpha b}{2} + \frac{\alpha b}{2} \text{sh} \frac{\alpha b}{2}}{2\text{ch}^2 \frac{\alpha b}{2}},$ $\ddot{A}_n = \frac{\varphi_n}{2D\alpha^3 \text{ch} \frac{\alpha b}{2}}$
<p>2.</p> 	$A_n = - \frac{\varphi_n}{D\alpha^4} \frac{\text{sh} \frac{\alpha b}{2} + \frac{\alpha b}{2} \text{ch} \frac{\alpha b}{2}}{\text{sh} \alpha b + \alpha b},$ $\ddot{A}_n = \frac{2\varphi_n}{D\alpha^3} \frac{\text{sh} \frac{\alpha b}{2}}{\text{sh} \alpha b + \alpha b}$
<p>3.</p> 	$A_n = \frac{2\nu\varphi_n}{D\alpha^4(1-\nu)} \frac{(1+\nu)\text{sh} \frac{\alpha b}{2} - \frac{\alpha b}{2}(1-\nu)\text{ch} \frac{\alpha b}{2}}{(3+\nu)\text{sh} \alpha b - 2\alpha b(1-\nu)},$ $\ddot{A}_n = \frac{2\nu\varphi_n}{D\alpha^3} \frac{\text{sh} \frac{\alpha b}{2}}{(3+\nu)\text{sh} \alpha b - 2\alpha b(1-\nu)}$

Библиографический список

1. Дж. Мейз. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Изд-во «Мир», 1974. – 318с.
2. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. – М.: Изд-во «Мир», 1965. – 199 с.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 247 с.
4. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 390 с.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 675 с.
6. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1957. – 372 с.
7. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально-пластических тел. – М.: Изд. ин. лит., 1956. – 398 с.
8. Соколовский В.В. Теория пластичности. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
9. Тимошенко С.П. Теория упругости. – М.: ОНТИ, 1934. – 445 с.
10. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
11. Галагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
12. Сеницын С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем. – М.: Изд-во Ассоц. стр. вузов, 2002. – 319 с.
13. Хан Х. Теория упругости / Пер. с нем. – М.: Мир, 1988. – 343 с.
14. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – 5-е изд. – М.: Наука, 1966. – 797 с.
15. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.
16. Argyris J.H., Kelsey S. Energy Theorems and Structural Analysis. – London: Butterworth, 1960; Part I reprinted from Aircr. Engrg., 26, Oct-Nov 1954 and 27, April-May 1955.
17. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
18. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 550 с.
19. Чихладзе Э.Д. Сопротивление материалов. – Харьков: УкрГАЗТ, 2002. – 362 с.
20. Малинин Н.М. Прикладная теория пластичности и текучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
21. Мироненко М.І. Інтегральні перетворення в теорії пружності. – Харків: РЦНІТ, 2003. – 439 с.
22. Жакин А.И. Тензорный анализ. Механика. Гравитация. – Курск: изд-во ТАС, 1998. – 294 с.
23. Жакин А.И. Механика сплошных сред. Лекции по дополнительным главам. – Харьков: ХГУ, 1993. – 177 с.