



**БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА**

Е.Д. Чихладзе



Е.Д. Чихладзе

**БУДІВЕЛЬНА  
МЕХАНІКА**



**УКРАЇНЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**Е.Д. ЧИХЛАДЗЕ**

# **БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА**

**Підручник**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів вищих навчальних закладів, які  
навчаються за напрямом підготовки «Будівництво»*

**Харків 2011**

**УДК 624.04**  
**ББК 38.112**  
**Ч 713**

*Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Будівництво» (№1/11-8444 від 02.09.2010 р.)*

Видання друге, доповнене та перероблене.

**Рецензенти:**

професор О.Ф. Яременко (Одеська державна академія  
будівництва і архітектури),  
професор В.О. Гришин (Одеський національний  
морський університет)

**Чихладзе Е.Д.**

Ч 713 Будівельна механіка: Підручник. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 320 с., рис. 234, табл. 14.

ISBN 978-966-2033-49-6

Дана книга, написана відповідно до програми курсів для транспортних вузів, відрізняється більш поглибленим розглядом методів розрахунку стержневих систем і поширенням цих методів на системи нестержневі (континуальні). Підручник містить велику кількість докладних прикладів розрахунку, що сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу і застосуванню в практичній діяльності.

При підготовці другого видання до тексту внесено доповнення: метод переміщень у матричній формі і метод скінченних елементів на його основі, а також усунені недоліки, помічені у попередньому виданні.

Призначений для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямком підготовки «Будівництво».

УДК 624.04  
ББК 38.112

**ISBN 978-966-2033-49-6**

© Українська державна академія  
залізничного транспорту, 2011

# Підручник

**Чихладзе** Елгуджа Давидович

## БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Відповідальний за випуск Веревічева М.А.

Редактор Ібрагімова Н.В.

---

Підписано до друку 14.10.10 р.

Формат паперу 60x84 1/8. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 8,75. Тираж 300. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту

61050, Харків - 50, майдан Фейербаха, 7

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

**Е.Д. ЧИХЛАДЗЕ**

# **БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА**

*Підручник*

**Харків 2011**

## З М І С Т

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	8
<b>Розділ 1. Загальні положення</b> .....	10
1.1. Предмет і задачі будівельної механіки .....	10
1.2. Види споруд і їх особливості .....	11
1.3. Навантаження і впливи .....	13
1.4. Реальна споруда та її розрахункова схема .....	14
1.5. Кінематичний аналіз споруд .....	18
1.5.1. Визначення числа ступенів свободи споруд, складених із дисків, сполучених між собою шарнірами. . .	18
1.5.2. Визначення числа ступенів свободи шарнірно-стержневої системи (ферми) .....	21
1.5.3. Миттєво змінювані системи .....	22
1.5.4. Приклади кінематичного аналізу споруд .....	24
<b>Розділ 2. Багатопрогонові статично визначні балки</b> .....	26
2.1. Розрахунок багатопрогонових статично визначних балок на нерухоме навантаження .....	27
2.1.1. Матрична форма розрахунку .....	28
2.2. Розрахунок багатопрогонових статично визначних балок на рухоме навантаження .....	33
2.2.1. Лінії впливу опорних реакцій у простих балках	34
2.2.2. Лінії впливу згинальних моментів у перерізах простих балок .....	36
2.2.3. Лінії впливу поперечних сил у перерізах простих балок .....	38
2.2.4. Зв'язок матриці впливу і лінії впливу .....	40
2.2.5. Лінії впливу при вузловій передачі навантаження ..	41
2.2.6. Кінематичний метод побудови ліній впливу .....	43
2.2.7. Лінії впливу для багатопрогонових статично визначних балок .....	46
2.2.8. Завантаження ліній впливу нерухомим навантаженням .....	48
2.2.9. Завантаження ліній впливу рухомим навантаженням	53
<b>Розділ 3. Статично визначні плоскі ферми</b> .....	56
3.1. Класифікація ферм .....	56
3.2. Визначення зусиль у стержнях ферм .....	59
3.2.1. Метод вирізання вузлів .....	60
3.2.2. Метод перерізів (метод моментної точки) .....	61
3.2.3. Метод заміни зв'язків .....	63
3.3. Лінії впливу зусиль у фермах .....	64
3.3.1. Лінії впливу зусиль у балкових фермах .....	65

3.3.2.	Лінії впливу в стержнях консольних ферм . . . . .	68
3.3.3.	Лінії впливу в стержнях консольно-балкових ферм	70
3.3.4.	Лінії впливу в стержнях шпренгельних ферм . . . . .	72
3.3.5.	Приклад розрахунку ферми на нерухоме навантаження аналітично і за лініями впливу . . . . .	76
<b>Розділ 4.</b>	<b>Розпірні системи . . . . .</b>	<b>83</b>
4.1.	Розрахунок тришарнірної арки на нерухоме навантаження . . . . .	83
4.2.	Особливості розрахунку тришарнірної арки з затягуванням . . . . .	85
4.3.	Розрахунок систем, що включають тришарнірну арку . . . . .	87
4.4.	Розрахунок тришарнірних рам на нерухоме навантаження . . . . .	89
4.5.	Розрахунок тришарнірної арки на рухоме навантаження	94
4.6.	Розрахунок тришарнірних рам на рухоме навантаження	97
4.7.	Розрахунок аркових ферм . . . . .	101
4.7.1.	Розрахунок аркових ферм на нерухоме навантаження . . . . .	101
4.7.2.	Розрахунок аркових ферм на рухоме навантаження	103
4.8.	Розрахунок комбінованих систем . . . . .	104
4.8.1.	Розрахунок комбінованих систем на нерухоме навантаження . . . . .	106
4.8.2.	Розрахунок комбінованих систем на рухоме навантаження . . . . .	108
<b>Розділ 5.</b>	<b>Теорія переміщень . . . . .</b>	<b>109</b>
5.1.	Дійсна робота зовнішніх сил . . . . .	109
5.2.	Дійсна робота внутрішніх сил . . . . .	111
5.2.1.	Робота внутрішніх поздовжніх сил . . . . .	111
5.2.2.	Робота внутрішніх згинальних моментів . . . . .	112
5.2.3.	Робота внутрішніх тангенціальних сил . . . . .	113
5.3.	Можливі переміщення і можлива робота зовнішніх і внутрішніх сил . . . . .	116
5.4.	Загальна формула для визначення переміщень . . . . .	118
5.5.	Визначення переміщень від заданого зовнішнього навантаження . . . . .	121
5.5.1.	Приклад визначення переміщень від заданого зовнішнього навантаження . . . . .	126
5.6.	Визначення переміщень від температурних впливів . . . . .	127
5.6.1.	Приклад визначення переміщень від температурних впливів . . . . .	129
5.7.	Визначення переміщень від заданого зсуву зв'язків . . . . .	131

5.7.1.	Приклад визначення переміщень від зсуву опорних зв'язків .....	131
5.8.	Основні енергетичні теореми .....	132
5.8.1.	Теорема про взаємність робіт .....	132
5.8.2.	Теорема про взаємність переміщень .....	134
5.8.3.	Теорема про взаємність реакцій .....	135
5.8.4.	Теорема про взаємність реакцій і переміщень .....	136
5.9.	Визначення переміщень за допомогою фіктивних вантажів .....	137
5.9.1.	Розгорнута формула фіктивних вантажів, що враховує вплив згинальних моментів і поздовжніх сил .....	140
5.9.2.	Побудова фіктивної балки .....	142
5.9.3.	Приклади визначення переміщень за допомогою фіктивних вантажів .....	143
<b>Розділ 6.</b>	<b>Методи розрахунку статично невизначних систем ..</b>	<b>147</b>
6.1.	Метод сил .....	147
6.1.1.	Визначення ступеня статичної невизначності .....	148
6.1.2.	Основна система й основні невідомі .....	149
6.1.3.	Система канонічних рівнянь .....	152
6.1.4.	Визначення коефіцієнтів і вільних членів і перевірки правильності їхнього визначення .....	152
6.1.5.	Розв'язання системи канонічних рівнянь .....	156
6.1.6.	Побудова епюр $M$ , $Q$ , $N$ у заданій статично невизначній системі та їх перевірки .....	157
6.1.7.	Розрахунок на температурні впливи .....	162
6.1.8.	Розрахунок на зсув опорних чи інших зв'язків .....	164
6.2.	Метод переміщень .....	167
6.2.1.	Визначення ступеня кінематичної невизначності (числа невідомих) .....	167
6.2.2.	Основна система .....	170
6.2.3.	Канонічні рівняння при розрахунку на дію зовнішнього навантаження .....	171
6.2.4.	Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь .....	172
6.2.5.	Перевірки правильності визначення реактивних зусиль і моментів .....	179
6.2.6.	Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі .....	180
6.2.7.	Побудова епюр $M$ , $Q$ , $N$ у заданій системі .....	182
6.2.8.	Розрахунок на температурні впливи .....	183
6.2.9.	Розрахунок на зсув опорних зв'язків .....	190
6.3.	Змішаний метод .....	195



6.4.	Особливості розрахунку симетричних систем на несиметричні впливи .....	198
6.5.	Метод переміщень у матричній формі .....	201
6.5.1.	Загальні положення і передумови .....	201
6.5.2.	Рівняння рівноваги. Статична матриця .....	204
6.5.3.	Принцип подвійності статичних і геометричних рівнянь .....	205
6.5.4.	Фізичні рівняння. Матриця жорсткості системи ...	206
6.5.5.	Розв'язувальна система рівнянь .....	209
6.6.	Загальні положення методу скінченних елементів ....	212
6.6.1.	Підготовка розрахунку. Уведення вихідних даних	215
6.6.2.	Силовий вплив .....	215
6.6.3.	Тепловий вплив .....	216
6.6.4.	Осідання опор .....	217
6.6.5.	Матриці жорсткості типових стержневих елементів	218
6.6.6.	Формування матриці жорсткості конструкції .....	221
6.6.7.	Визначення переміщень і зусиль в елементах .....	223
<b>Розділ 7.</b>	<b>Особливості розрахунку статично невизначних балок, арок, ферм .....</b>	<b>224</b>
7.1.	Розрахунок нерозрізних балок на опорах, що пружно зміщуються, на силові впливи .....	224
7.2.	Розрахунок нерозрізних балок на опорах, що пружно зміщуються, на температурні впливи .....	230
7.3.	Розрахунок нерозрізних балок на опорах, що пружно зміщуються, на змушені зсуви опорних чи інших зв'язків .....	232
7.4.	Лінії впливу для балки на опорах, що пружно зміщуються .....	235
7.5.	Розрахунок двошарнірних арок .....	237
7.5.1.	Приклад розрахунку двошарнірної арки на дію зовнішнього навантаження .....	241
7.5.2.	Лінії впливу в перерізах двошарнірної арки .....	244
7.6.	Розрахунок безшарнірних арок .....	246
7.6.1.	Лінії впливу в перерізах безшарнірної арки .....	251
7.7.	Розрахунок статично невизначних ферм .....	252
7.7.1.	Розрахунок на дію зовнішнього навантаження .....	253
7.7.2.	Розрахунок на задані температурні впливи .....	255
7.7.3.	Розрахунок на зсув зв'язків (неточність складання) .	256
7.7.4.	Розрахунок на рухоме навантаження .....	256
7.7.5.	Приклад розрахунку .....	258

<b>Розділ 8.</b>	<b>Динамічні розрахунки конструкцій</b>	268
8.1.	Загальні положення	268
8.2.	Поперечні коливання прямих брусів	269
8.2.1.	Диференціальне рівняння поперечних коливань	269
8.2.2.	Вільні коливання бруса	270
8.2.3.	Головні форми коливань	271
8.2.4.	Вимушені коливання бруса	275
8.3.	Поздовжні коливання прямих брусів	278
8.3.1.	Диференціальне рівняння поздовжніх коливань	278
8.3.2.	Два основних види розв'язків.	279
8.3.3.	Вимушені поздовжні коливання	282
8.4.	Вплив постійної осьової сили на поперечні коливання бруса	284
8.5.	Розрахунок нерозрізних балок на вібраційні впливи	287
8.5.1.	Загальні теореми	287
8.5.2.	Розрахунок нерозрізних балок, завантажених одночасно на декількох прогонах, методом сил	289
8.5.3.	Розрахунок нерозрізних балок, завантажених на одному прогоні	297
8.5.4.	Розрахунок нерозрізних балок методом переміщень	305
8.5.5.	Розрахунок статично невизначних рам методом переміщень	308
<b>ВИСНОВОК</b>		312
<b>БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК</b>		313
<b>ДОДАТОК 1.</b>	Чисельні значення функцій $A_{sx}, B_{sx}, C_{sx}, D_{sx}$	314
<b>ДОДАТОК 2.</b>	Значення початкових параметрів для однопрогонових балок.	317

## ПЕРЕДМОВА

Запропонований увазі читачів підручник написаний на основі багаторічного досвіду викладання курсу будівельної механіки в Харківському національному автомобільно-дорожньому університеті та в Українській державній академії залізничного транспорту. Зміст цього підручника викликаний сучасними вимогами до рівня підготовки інженерів-будівельників транспортних споруд, яким у своїй практичній діяльності доводиться не тільки створювати нові конструкції, але й оцінювати міцність, жорсткість і стійкість експлуатованих споруд у зв'язку з їхньою реконструкцією. Виходячи з цього у підручнику викладається тільки те найважливіше і необхідне, без чого не можна створити чіткого і закінченого викладення предмета і що істотно необхідно інженеру в його щоденній діяльності.

Зазначимо найбільш істотні особливості цього навчального видання. У першому розділі «Загальні положення» наведені види споруд і їхні особливості; навантаження і впливи; реальні споруди і їхні розрахункові схеми; кінематичний аналіз споруд.

У другому розділі в матричній формі викладені методи розрахунку багатопрогонових статично визначних балок на нерухоме і рухоме навантаження і у зв'язку з цим теорія ліній впливу.

Третій розділ присвячений статично визначним плоским фермам. Тут дана класифікація ферм, способи визначення зусиль, лінії впливу зусиль у балкових, консольних, консольно-балкових фермах із простою і складною решіткою. Дано докладний приклад розрахунку ферми аналітичним способом і за лініями впливу.

У четвертому розділі «Розпірні системи» розглянуті тришарнірні арки з затягуванням і без нього, системи, що включають тришарнірну арку, тришарнірні рами з різною висотою вертикальних стійок, із похилими стійками; аркові системи, комбіновані системи. Наведено розрахунки на рухомі і нерухомі навантаження.

П'ятий розділ «Теорія переміщень» включає дійсну і можливу роботу сил, прикладених до пружної системи; загальну формулу для визначення переміщень, складену із силових, температурних переміщень, а також переміщень від зсуву опорних або інших зв'язків. Наведено докладні приклади визначення переміщень від показаних впливів. У цьому ж розділі викладені основні енергетичні теореми і метод фіктивних вантажів.

Шостий розділ присвячений методам розрахунку статично невизначних систем. Тут викладені класичні методи: сил, переміщень, змішаний і основи методу скінченних елементів, який представлений як природне поширення методів розрахунку стержневих систем на системи нестержневі (континуальні). Побудовано матриці жорсткості для стержневих та балкових елементів.

У цьому розділі розглянуті особливості розрахунку статично невизначних балок, арок, ферм. Нерозрізні балки подані на опорах, що пружно зміщаються. Розглянуті силові, температурні впливи і впливи, викликані змушеним зсувом опорних зв'язків. Описано методи розрахунку двошарнірних, безшарнірних арок, статично невизначних ферм на відзначені вище впливи з прикладами, що їх ілюструють.

Останній, восьмий, розділ присвячений динамічному розрахунку конструкцій. Тут розглянуті поперечні і поздовжні коливання прямих брусів. Отримано відповідні диференціальні рівняння і їхні розв'язки. Наведено розрахунки нерозрізних балок і рам на вібраційні впливи з притягненням методів сил і переміщень із докладними прикладами. Побудовано лінії впливу в припущенні, що маса вантажу мала порівняно з масою балки.

У додатках наведені чисельні значення функцій  $A_{sx}$ ,  $B_{sx}$ ,  $C_{sx}$ ,  $D_{sx}$  і значення початкових параметрів для однопрогонових балок.

При підготовці другого видання до тексту включені додаткові питання (метод переміщень у матричній формі і на цій основі – метод скінченних елементів), які представляються суттєвими для формування інженерного мислення.

Автор висловлює глибоку вдячність рецензентам: д-ру техн. наук, проф. О.Ф. Яременку (зав. кафедрою будівельної механіки Одеської державної академії будівництва і архітектури); д-ру техн. наук, проф. В.О. Гришину (зав. кафедрою теоретичної і прикладної механіки Одеського національного морського університету), д-ру техн. наук, проф. В.А. Баженову (зав. кафедрою будівельної механіки Київського національного університету будівництва та архітектури).

У роботі над рукописом і коректурами надана неоціненна допомога канд. техн. наук, доц. М.А. Веревічевою та інженером Р.Г. Павленко. Вважаю своїм обов'язком висловити названим особам свою сердечну подяку.

Всі зауваження і побажання будуть прийняті автором із вдячністю. Листи з цього приводу прошу надсилати за адресою: 61050, Харків, УкрДАЗТ, майд. Фейєрбаха, 7, к. 1.118, кафедра будівельної механіки.

## РОЗДІЛ I ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

### 1.1. Предмет і задачі будівельної механіки

Будівельна механіка – наука, що займається розробленням принципів і методів розрахунку споруд на міцність, жорсткість і стійкість. Якщо об'єктом вивчення в опорі матеріалів були переважно окремі елементи споруди, то об'єктом вивчення в будівельній механіці, як правило, буде ціла споруда, із них складена. Таким є принципове розходження між будівельною механікою й опором матеріалів. Проте строге розмежування обох наук ускладнене, оскільки багато граничних питань можуть бути віднесені до будь-якої з них.

Міцність, стійкість і жорсткість споруди залежать як від матеріалу, розмірів і форми її елементів, так і від внутрішніх сил, що виникають і розвиваються в споруді при дії на неї навантаження, або інших факторів. Можна сказати так, що розміри міцних і стійких елементів споруди з даного матеріалу і форми визначаються величинами внутрішніх сил у цих елементах. Також внутрішніми силами визначаються деформації елементів і всієї споруди в цілому.

Із сказаного випливає: основна задача будівельної механіки полягає в розробці методів визначення внутрішніх сил у спорудах і їх переміщень.

При визначенні внутрішніх сил треба мати на увазі, що будь-яка споруда під навантаженням змінює свою форму – деформується. При строгій постановці внутрішні сили слід було б визначати у споруді, що знаходиться в деформованому стані, з урахуванням поведінки навантаження під час деформації споруди. Проте це пов'язано з великими труднощами, оскільки внутрішні сили споруди в деформованому стані і його деформації взаємозалежні. Навіть якщо матеріал споруди діє за законом Гука, то, як правило, лінійної залежності між переміщеннями і навантаженнями не буде. Ще більш ускладнюється задача у випадках, коли матеріал споруди не діє за законом Гука або працює за його межею. З огляду на порівняно малі зміни форми споруди при її деформації, для спрощення розрахунку внутрішні сили звичайно визначають приблизно за початковим, недеформованим станом споруди. У багатьох випадках (але не завжди) точність визначення внутрішніх сил практично прийнятна. Проте, що не завжди точність визначення внутрішніх сил за недеформованим станом достатня, необхідно пам'ятати, особливо при розрахунках, коли деформація споруди може бути значною (один із прикладів такого роду наведений у п. 1.4).

## 1.2. Види споруд і їх особливості

Залежно від конструктивних рішень споруд доцільно виділити ту систему елементів, яка в основному сприймає діюче навантаження. Розрізняють такі характерні типи систем: стержневі системи; системи, складені з елементів, у яких розміри по двох напрямках (довжина і ширина) значно перевершують розмір по третьому напрямку (як відомо, до цих елементів належать пластини, плити, оболонки); системи, у яких три розміри однакового порядку (масиви, суцільні середовища, тіла); висячі системи.

Стержневі системи поділяються на плоскі і просторові. Наприклад, до плоских стержневих систем належать ферми (рис. 1.1, а), рами (рис. 1.1, б), арки (рис. 1.1, в).

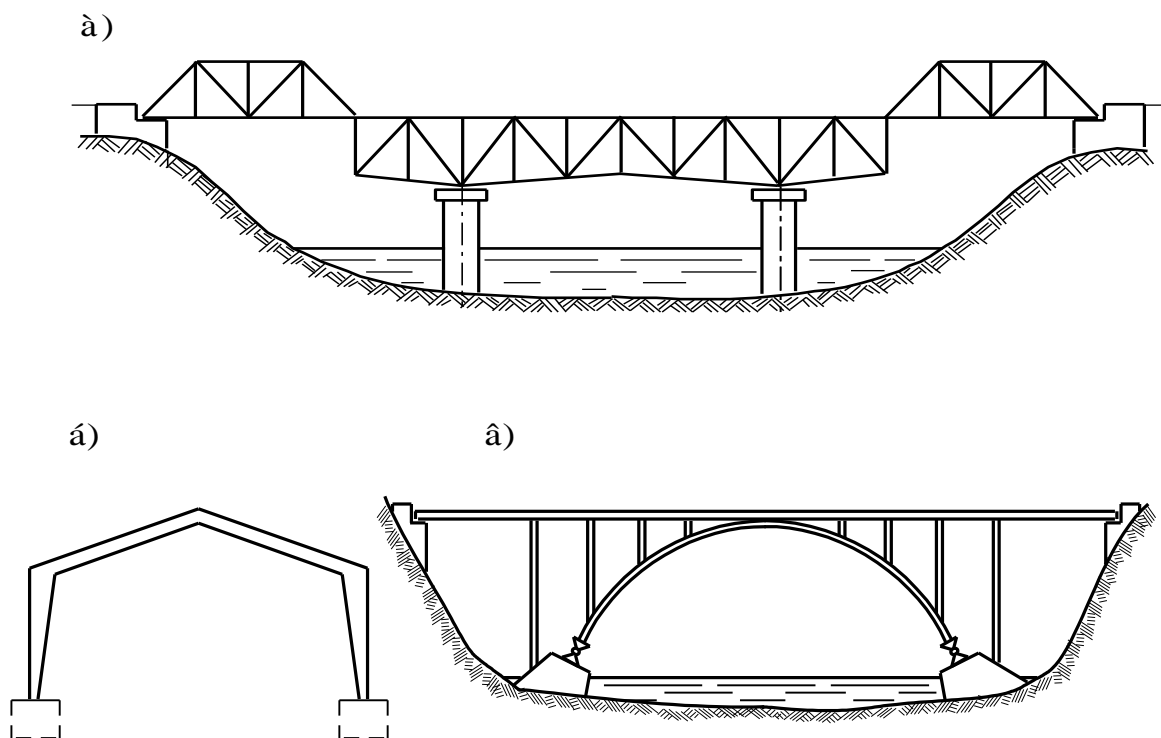


Рис. 1.1. Схеми споруд, складені з плоских стержневих систем:  
а – міст із прогоновими спорудами з ферм; б – промислова будівля із несучим елементом у вигляді рами; в – арковий міст

На рис. 1.2 показана просторова рама, що часто застосовується в якості каркаса промислових будівель.

Наведемо приклад споруд другого типу. Це пластинчасті системи: несучі конструкції багатоповерхових будинків, складені з плоских панелей, і несучі просторові конструкції у вигляді оболонок.

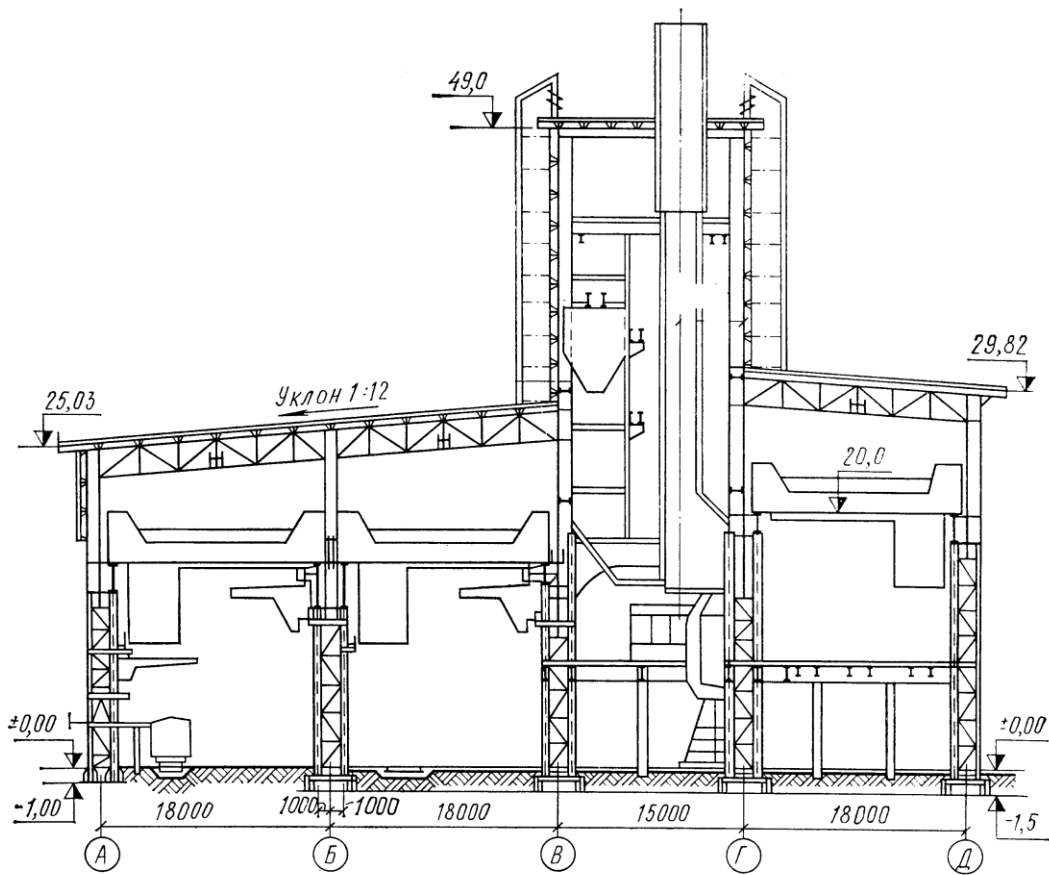


Рис. 1.2. Рама каркаса промислової будівлі

На рис. 1.3 показана, наприклад, склепіння-оболонка, складена з плоских панелей.

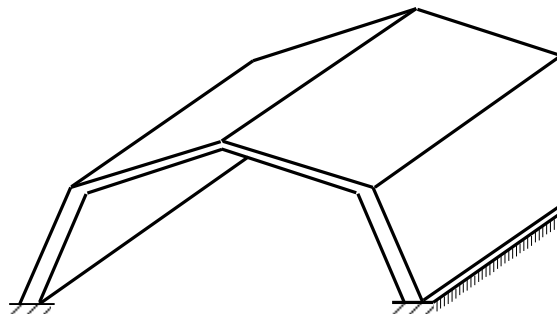


Рис. 1.3. Схема склепіння-оболонки

До масивних систем, у яких усі три розміри мають один порядок, належать гідротехнічні споруди, наприклад, греблі (рис. 1.4).

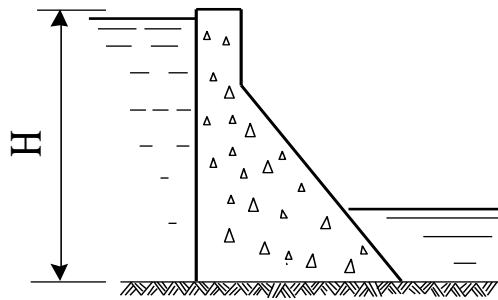


Рис. 1.4. Поперечний переріз бетонної греблі

До особливого типу споруд належать висячі системи, за допомогою яких можна перекривати значні прогони (рис. 1.5).

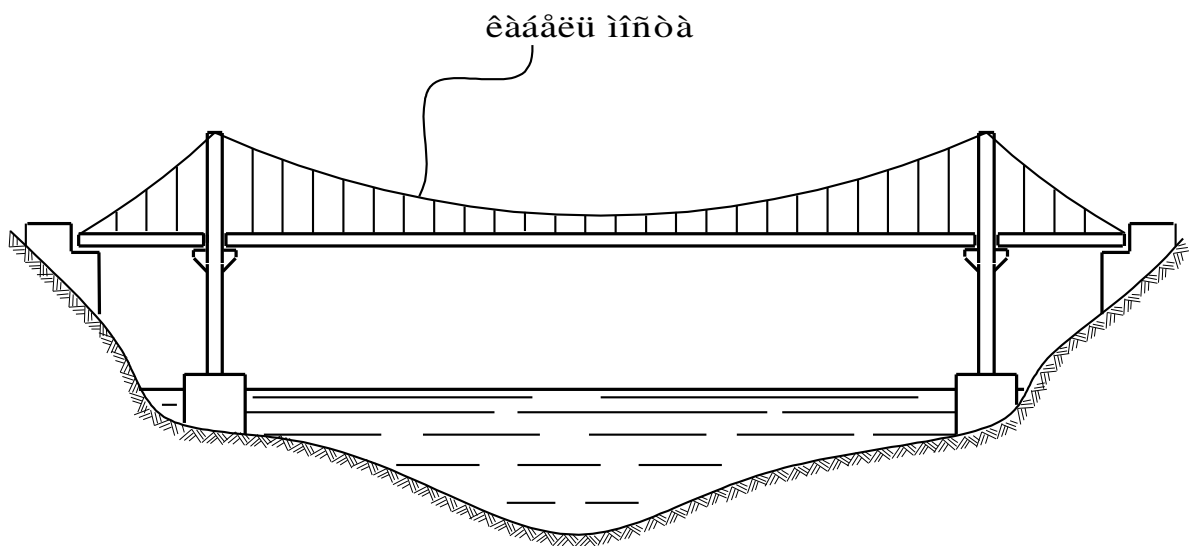


Рис. 1.5. Схема висячого моста

У будівельній механіці розглядаються методи визначення зусиль у системах усіх перелічених типів, проте головна увага приділяється не особливостям розрахунку окремих споруд, а загальним методам аналізу напружено-деформованого стану (НДС) і принципам, на яких засновані ці методи.

### 1.3. Навантаження і впливи

У курсі опору матеріалів ми ознайомилися з різноманітними видами навантажень, як-от зосередженими силами і розподіленими навантаженнями, а також із тимчасовими, постійними, статичними і динамічними впливами. Нагадаємо про ці види навантажень. Постійне



навантаження діє безперервно протягом усього терміну служби споруди, до нього належить, наприклад, вага споруд. Тимчасове навантаження має обмежену тривалість, наприклад, вага снігу на покрівлі, дія вітру на стіни, навантаження на міст від потяга, що рухається, і т. п. Статичні навантаження змінюються в часі настільки повільно, що прискореннями елементів конструкції при переміщеннях можна знехтувати. Інакше кажучи, при цьому не враховуються сили інерції, пов'язані з переміщеннями точок системи. Динамічні навантаження, на відміну від статичних, змінюють свою величину і положення в порівняно короткі проміжки часу. При дії динамічних навантажень доводиться враховувати сили інерції як самої системи, так і розташованого на ній устаткування.

Крім зовнішніх сил, істотний вплив на споруду спричиняє, наприклад, температура, осідання фундаменту, землетрус, дія вогню, хімічна агресія, корозія і т. п. При зміні температури виникають деформації елементів споруди, що за певних умов викликають внутрішні сили і напруження. Для ряду споруд проводяться розрахунки на дію вогню. При горінні будівлі від дії високої температури різко змінюються механічні характеристики матеріалу, із якого виготовлені її елементи. Разом із цим змінюється й опірність конструкції діючому навантаженню, що часто призводить до обвалення конструкції.

Дуже складно поводитися споруда під час землетрусу. При русі основи споруда відчуває змушені коливання, унаслідок чого виникають динамічні напруження. При цьому конструкція одержує великі прискорення, виникають значні сили інерції і великі деформації, що часто призводять до руйнування.

Визначення навантажень є одним із питань аналізу взаємодії між спорудами і зовнішнім середовищем. Правильне вирішення цієї задачі дозволяє створювати надійні та економні споруди.

#### **1.4. Реальна споруда та її розрахункова схема**

При вивченні курсу опору матеріалів було показано, як складається розрахункова схема для простих споруд. При графічному зображенні розрахункової схеми кожний стержень зображується однією лінією – віссю стержня. Такий самий прийом будемо застосовувати в будівельній механіці. Для прикладу на рис. 1.6 показана розрахункова схема просторової рами.

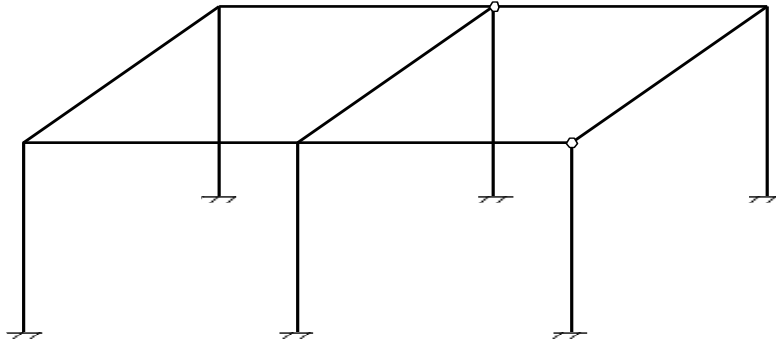


Рис. 1.6. Розрахункова схема просторової рами

У будівельній механіці велика увага приділяється аналізу з'єднань елементів. Вузли рам можуть бути трьох типів: жорсткі, у яких збіжні елементи жорстко сполучені один з одним – при деформації системи відсутні взаємні повороти перерізів елементів, що примикають; шарнірні, у яких всі елементи або частина елементів вільно повертаються один відносно іншого; вузли з пружно-податливими з'єднаннями елементів (рис. 1.7) – тут між стержнями 1-2, 1-3, 2-3 є пружні зв'язки, що імітуються пружинами, і при зміні кута між будь-якою парою стержнів треба перебороти певний опір.

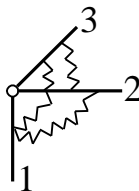


Рис. 1.7. Вузол з пружно-податливими з'єднаннями елементів

Найчастіше зустрічаються споруди, для яких розрахункова схема приймається такою, що складається із стержнів і пластин. На рис. 1.8 показана схема каркасної будівлі, у якій несучими елементами є колони і перекриття у вигляді пластин. У цьому випадку стіни не показані. Передбачається, що вони з легких панелей і не передають навантаження з одного поверху на інший.

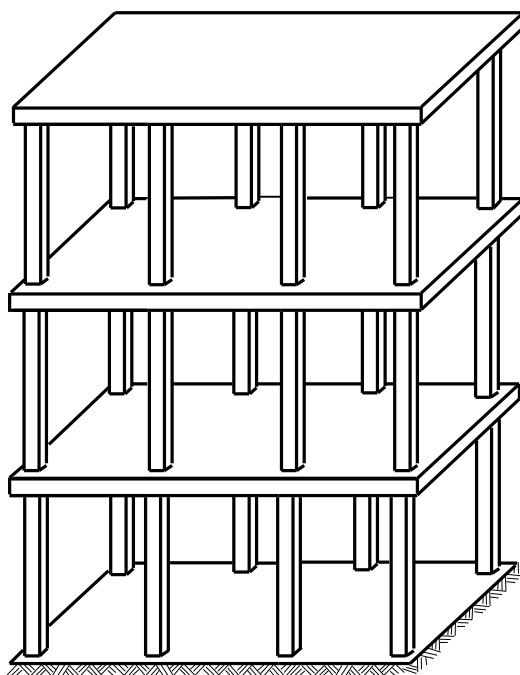


Рис. 1.8. Розрахункова схема каркасної будівлі

При розрахунку цегельних або панельних будівель розрахункова схема приймається такою, що складається із пластин, частина з яких має отвори для віконних або дверних прорізів. На практиці зустрічаються різноманітні споруди, а їхні розрахункові схеми можуть бути складними, які включають у себе стержні, пластини, оболонки, масивні тіла. Прикладом може служити розрахункова схема для промислової будівлі, що складається з панельних плит, колон і ферм перекриття (рис. 1.9).

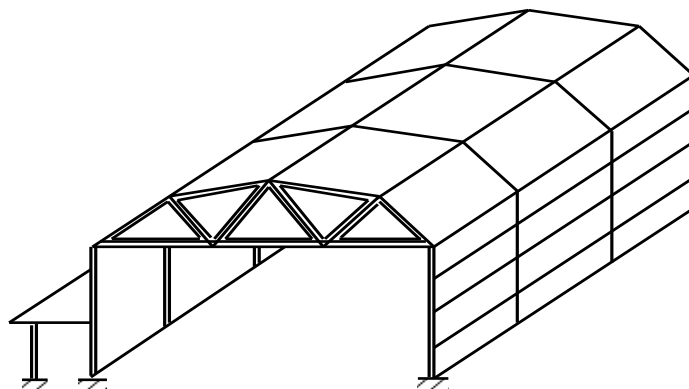


Рис. 1.9. Розрахункова схема промислової будівлі

При складанні розрахункових схем доводиться в першу чергу робити схематизацію геометричних форм споруд. Поряд із цим необхідно враховувати властивості матеріалу, із якого передбачається виготовляти їх елементи. У курсі опору матеріалів головна увага приділялася роботі стержнів у межах лінійно-пружних деформацій. І в будівельній механіці значне місце буде відведено цьому виду деформування матеріалу. При

урахуванні нелінійної діаграми деформування матеріалу задача розрахунку споруди належить до розряду так званих фізично нелінійних задач. Звичайно це ускладнює розрахунок і призводить до необхідності приймати якийсь із методів послідовних наближень.

Вибір розрахункової схеми пов'язаний також із діючим на споруду навантаженням.

Таким чином, під розрахунковою схемою слід розуміти геометричну схему споруди з діючим навантаженням і даними, що характеризують фізико-механічні властивості матеріалу.

Зупинимося ще на одному питанні. При розрахунку споруд доводиться визначати переміщення окремих точок. У більшості випадків ці переміщення малі порівняно з розмірами споруди або її елементів. Проте зустрічаються задачі, у яких доводиться враховувати зміну геометрії споруди внаслідок можливих переміщень. Такі задачі в багатьох випадках призводять до нелінійних рівнянь і називаються геометрично нелійними. Їх розв'язання звичайно проводяться так само, як і фізично нелінійних задач, методами послідовних наближень. Як приклад можна вказати на розрахунок висячих мостів великих прогонів (рис. 1.5). Зміна обрису кабелю моста хоча і не дуже велика, але вона істотно позначається на розподілі навантаження, що передається з кабелю на балку. Згинальні моменти у балці істотно змінюються. Таким чином, сама розрахункова схема в процесі завантаження змінюється, мов би деформується, і тому розрахунок проводиться за деформованою схемою.

Розглянемо приєднання конструкцій до основи (землі). Опори, усі шарніри яких є кульовими, показані на рис. 1.10 а, б, в.

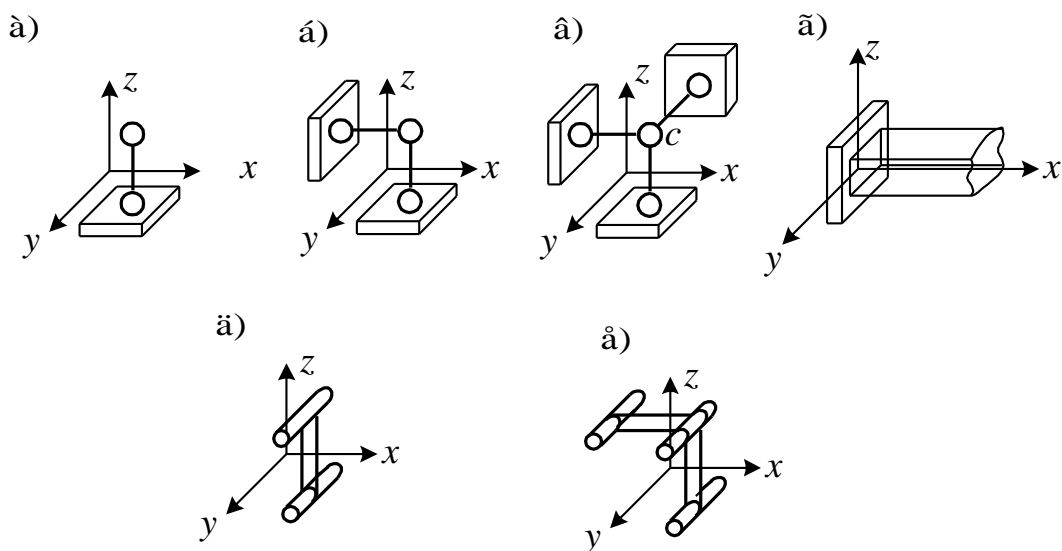


Рис. 1.10. Типи опорних пристроїв

Опора на рис. 1.10, а припускає поворот навколо трьох осей і поступальне переміщення по будь-якому напрямку на поверхні (5 ступенів

свободи). Ця опора називається шарнірно-рухомою опорою. Передбачається, що тіло, яке обпирається, притиснуте до кулі зовнішніми силами і відокремитися від неї не може.

На рис. 1.10, б показана опора, що припускає поступальний рух по напрямку осі  $y$  і поворот навколо трьох осей (4 ступені свободи). На рис. 1.10, в – опора, що припускає обертання навколо нерухомої точки  $c$  (три ступені свободи). Опори, наведені на рис. 1.10, б, в, називаються шарнірно-нерухомими. Защемлення (жорстке закріплення) (рис. 1.10, г) – це опорний пристрій, у якому число ступенів свободи дорівнює нулю. Отже, тіло, приєднане за допомогою такої опори, не має лінійних зсувів уздовж осей  $x$ ,  $y$  і  $z$  і поворотів відносно всіх трьох осей.

Для прикріплення споруд до землі, крім кульових шарнірів, можуть використовуватися і циліндричні (рис. 1.10, д, е). Опора, показана на рис. 1.10, д, має два ступені свободи (поворот і поступальне переміщення уздовж осі  $x$ ), а опора (див. рис. 1.10, е) володіє одним ступенем свободи (поворот відносно осі  $z$ ).

## 1.5. Кінематичний аналіз споруд

Реальні споруди повинні бути незмінними системами, спроможними сприймати навантаження без помітної зміни геометрії. Інженер до детального розрахунку системи повинен уміти проаналізувати її структуру або, як ще говорять, дослідити утворення системи, тобто встановити, чи є вона геометрично незмінною (геометрично незмінною називається така система, у якій зміна форми обумовлюється лише деформацією матеріалу). Крім того, необхідно знати, чи можливий розрахунок системи за допомогою тільки рівнянь рівноваги, тобто чи є система статично визначною або ж вона статично невизначна.

Розрахункові схеми багатьох споруд мають вид кінематичних ланцюгів, складених з окремих частин-дисків (диск – частина стержневої системи, незмінюваність якої доведена). З цих систем і почнемо аналіз.

### 1.5.1. Визначення числа ступенів свободи споруд, складених із дисків, сполучених між собою шарнірами

Ступенем свободи якого-небудь тіла і системи тіл називається кількість геометричних параметрів, що незалежно один від одного можуть змінюватися під час руху системи (тіла) і визначають її положення. Почнемо з вивчення плоских систем.

Плоска фігура (рис. 1.11, а) має у своїй площині три ступені свободи. Положення її на площині визначається трьома незалежними змінними: двома координатами  $x$  і  $y$  якої-небудь точки  $A$  і кутом нахилу  $\varphi$  якої-небудь прямої  $AB$ .

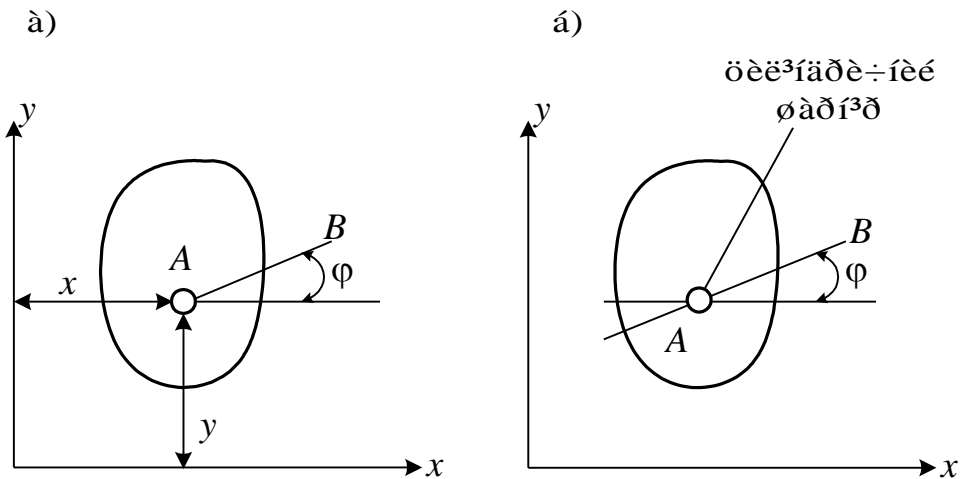


Рис. 1.11. Положення плоскої фігури на площині

Циліндричний шарнір із нерухомою геометричною віссю (рис. 1.11, б), навколо якої фігура може обертатися, еквівалентний двом зв'язкам. Дійсно, точка  $A$  втрачає два ступені свободи, і єдиним незалежним параметром руху залишається кут  $\varphi$ . Можуть зустрітися іноді такі ланцюги, у яких декілька шарнірів насаджено на одну вісь. Такий шарнір слід розглядати як декілька шарнірів, тому що він забороняє взаємний рух декількох дисків. Ми будемо називати його кратним шарніром. Так, наприклад, шарнір, що зв'язує між собою три стержні (диска), слід розглядати як здвоєний шарнір (рис. 1.12).



Рис. 1.12. Схема здвоєного шарніра

Взагалі шарнір, що зв'язує  $n$  дисків, відіграє роль  $(n - 1)$  простих шарнірів. Оскільки диск, нічим не стиснутий у своєму русі, має в площині три ступені свободи, то загальна кількість ступенів свободи при ігноруванні зв'язків складала  $3D$ . Кожний шарнір еквівалентний двом зв'язкам, а опорний стержень – одному зв'язку. На підставі сказаного ступінь свободи аналізованого типу споруди можна визначити таким чином:

$$W = 3D - 2Ш - C_0. \quad (1.1)$$

Якщо  $W > 0$ , то система має рухомість; якщо  $W = 0$ , то кількість зв'язків складає необхідний мінімум; при  $W < 0$  кількість зв'язків перевищує мінімум (система рухома).

З (1.1) одержимо умову геометричної незмінюваності і нерухомості при мінімальній кількості зв'язків

$$3D = 2Ш + C_0. \quad (1.2)$$

Кількість зайвих зв'язків ( $W < 0$ ) знайдемо таким чином:

$$L = -W = C_0 + 2Ш - 3D. \quad (1.3)$$

Визначимо за формулою (1.3) кількість зайвих зв'язків, що має замкнутий контур у рамі, показаний на рис. 1.13, а.

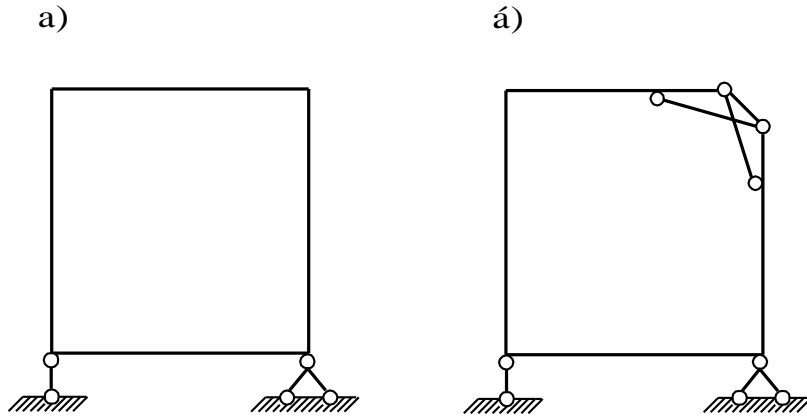


Рис. 1.13. Схема рами, що має замкнутий контур

Замкнутий контур можна розглядати як диск із трьома сполученими стержнями (дисками), рис. 1.13, б. Тут  $C_0 = 3$ ;  $Ш = 6$ ;  $D = 4$ . Тоді  $L = 3 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 3$ . Це означає, що замкнутий безшарнірний контур у рамі має три зайві зв'язки.

Для рам, що мають декілька замкнутих контурів (рис. 1.14), кількість зайвих зв'язків може бути визначена за такою простою формулою:

$$L = 3K - Ш, \quad (1.4)$$

де  $Ш$  – кількість всіх простих шарнірів, включаючи й опорні (при цьому землю треба включати до складу дисків системи).

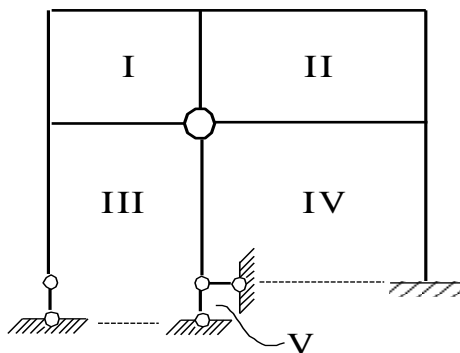


Рис. 1.14. До визначення кількості зайвих зв'язків у рамах, що мають замкнуті контури

Рама, показана на рис. 1.14, має 5 замкнутих контурів і 9 простих шарнірів. Відповідно до формули (1.4) кількість зайвих зв'язків у ній дорівнює 6. Для просторових рам ступінь статичної невизначності можна знайти за формулою

$$L = 6K - 3Ш. \quad (1.5)$$

### 1.5.2. Визначення числа ступенів свободи шарнірно-стержневої системи (ферми)

Розглянемо такі системи, у яких стержні (диски) шарнірно сполучені між собою, причому кожний диск містить два шарніри простих або кратних. Ступінь свободи таких систем можна вивчати за формулами, що наведені вище, – (1.1), (1.4), але для них можна вивести й інші формули. Прийемо центри шарнірів за окремі точки, що можуть переміщатися в просторі. Кількість таких точок або вузлів позначимо через  $Y$ , кількість дисків або стержнів через  $C$ , кількість опорних стержнів –  $C_0$ . Якби вузли не були взаємно пов'язані за допомогою стержнів, то кожний із них мав би: у площині два ступені свободи і сумарний ступінь свободи, що дорівнює  $2Y$ ; у просторі –  $3Y$ . Кожний стержень, що з'єднує дві точки  $A$  і  $B$  (рис. 1.15), еквівалентний одному зв'язку, тому що накладає на координати цих точок єдину умову – зберігання постійної відстані між останніми. Повне число зв'язків складає  $C + C_0$ , де  $C_0$  – кількість опорних зв'язків.

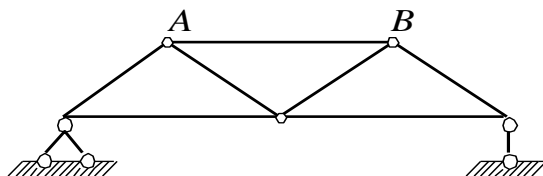


Рис. 1.15. До визначення кількості ступенів свободи у фермах

Отже, кількість ступенів свободи шарнірно-стержневої плоскої системи дорівнює

$$W = 2Y - C - C_0. \quad (1.6)$$

У фермі, показаній на рис. 1.15,  $Y = 5$ ,  $C = 7$ ,  $C_0 = 3$  і  $W = 0$ , тобто конструкція має необхідний мінімум зв'язків.

Для просторової ферми

$$W = 3Y - C - C_0. \quad (1.7)$$



### 1.5.3. Миттєво змінювані системи

Якщо ми в геометрично незмінній системі будемо змінювати довжину тих або інших стержнів, то одержимо ряд систем, що мають ту саму структуру, але відрізняються між собою довжиною і нахилом стержнів. Існують проте такі варіації, що мають властивість геометричної змінюваності. Такі системи, існування яких було помічено ще в 1837 р., називаються миттєво змінюваними. Назва підказується тим, що при безперервному варіюванні форми системи, тобто при безперервній зміні якого-небудь із її геометричних параметрів, вона буде змінюваною тільки при одному “миттєвому” значенні цього параметра.

Проаналізуємо систему, показану на рис. 1.16.

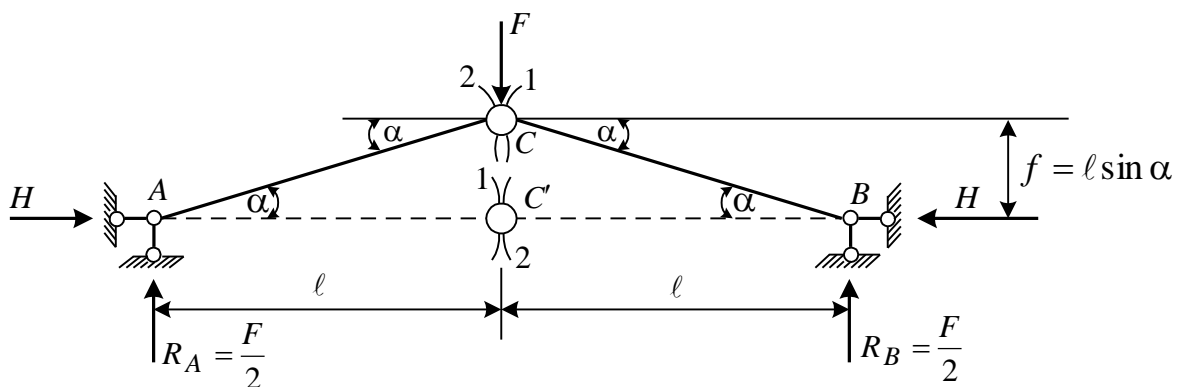


Рис. 1.16. До аналізу геометричної змінюваності систем

Ця система, із погляду її незмінюваності, має мінімально необхідну кількість стержнів і зв'язків. За формулою (1.1)  $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$ ; за формулою (1.4)  $L = 3 \cdot 3 - 9 = 0$ . Система нерухома і незмінна.

Будемо тепер варіювати параметром  $\alpha$ . При  $\alpha = 0$  стержні  $AC$  і  $CB$  лежать на одній прямій. Якщо ми роз'єднаємо стержні  $AC'$  і  $C'B$  у точці  $C'$ , то правий кінець стержня  $AC'$  переміститься по колу 2, а лівий кінець  $BC'$  – по колу 1. Але ці кола мають загальну дотичну, отже, загальний нескінченно малий елемент. Тому з'єднання обох стержнів у точці  $C'$  не заважає нескінченно малому переміщенню загальної точки  $C'$ . Аналізована система  $AC'B$  миттєво змінювана. Системи, точки яких спроможні переміщатися без зміни геометричних розмірів із точністю до малих вищого порядку, називаються миттєво змінюваними.

Інша картина при  $\alpha \neq 0$  (система  $ACB$ ): кола 1 і 2 не мають загальної дотичної, тому одночасне нескінченно мале переміщення загальної точки  $C$  по обох колах неможливе.

Обчислимо горизонтальну реакцію  $H$ . Для цього візьмемо суму моментів лівих сил щодо точки  $C$

$$\frac{F}{2} \ell - H \cdot \ell \sin \alpha = 0,$$

звідси

$$H = \frac{F}{2 \sin \alpha}.$$

При малому куті  $\alpha$  виникає велика горизонтальна реакція. Таким чином, системи, близькі до миттєво змінюваних, погано сприймають навантаження. При  $\alpha = 0$   $H = \infty$ . Можна сказати, що в миттєво змінюваних системах деякі зусилля дорівнюють нескінченності.

Якщо споруда за своєю структурою геометрично незмінна, то система рівнянь статyki є визначеною. Це означає, що при будь-якому навантаженні всі зусилля, одержані з цієї системи рівнянь, будуть визначеними і скінченними. Якщо система рівнянь невизначена, це означає, що при довільному навантаженні рівняння статyki або не можна задовольнити ніякими скінченними значеннями зусиль (всі або деякі зусилля дорівнюють нескінченності), або можна задовольнити нескінченною множиною значень зусиль (всі або деякі зусилля дорівнюють невизначеності  $\left(\frac{0}{0}\right)$  або нескінченності). Вкажемо також на

ознаки, за якими можна визначити миттєву змінюваність:

1) два диски сполучені трьома і більше стержнями, що перетинаються в одній точці (рис. 1.17);

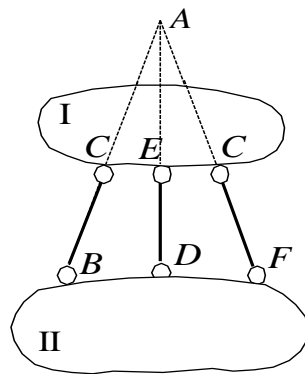


Рис. 1.17. Перша ознака миттєвої змінюваності

2) два диски сполучені шарніром і стержнем, що проходить через шарнір (рис. 1.18).

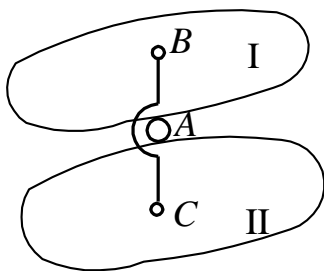


Рис. 1.18. Друга ознака миттєвої змінюваності

На закінчення пункту зазначимо: система, геометрично незмінна і така, що не має зайвих зв'язків, завжди статично визначна; навпаки, система статично визначна – геометрично незмінна і не має зайвих зв'язків. Кожному навантаженню системи, геометрично незмінному і такому, що не має зайвих зв'язків, відповідає єдина система значень усіх зусиль, коротше кажучи, єдиний розв'язок.

#### 1.5.4. Приклади кінематичного аналізу споруд

Наведемо приклади визначення кількості ступенів свободи і наступного аналізу геометричної структури споруд. На рис. 1.19 показана багатопрогонова балка.

à)

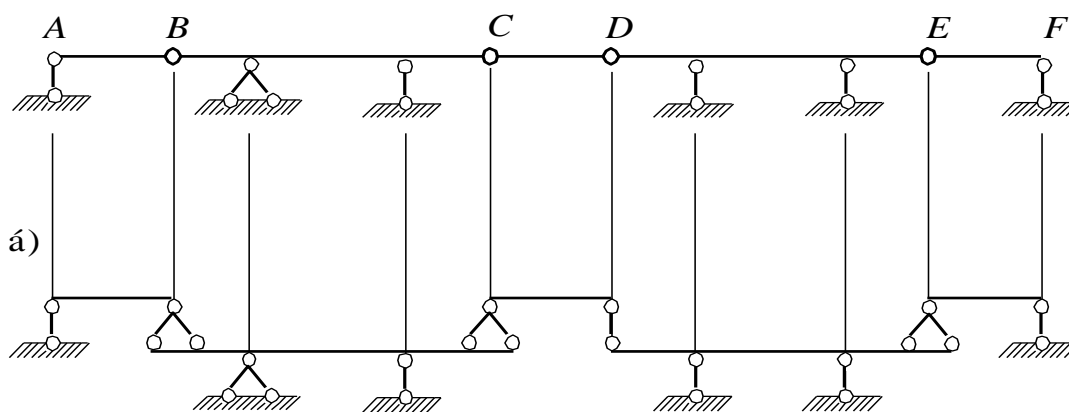


Рис. 1.19. Схема багатопрогонової статично визначної балки (а) і схема взаємодії (поверхова схема) її дисків (б)

Для показаної на рис. 1.19 розрахункової схеми  $D=5$ ,  $Ш=4$ ,  $C_0=7$ ,  $W=0$ . Система має необхідний мінімум зв'язків. Вона статично визначна. Доведемо, що ця балка є геометрично незмінною. Для аналізу геометричної структури складемо схему взаємодії (поверхову схему). Диски  $BC$  і  $DE$  є головними, вони нерухомо пов'язані з основою наземними опорами. Диски  $AB$  і  $EF$  з одного боку спираються на опори  $A$  і  $F$ , а з іншого боку – на диски  $BC$  і  $DE$ . Диск  $CD$  не має зв'язку з наземними опорами і по обидві сторони спирається на диски  $BC$  і  $DE$ . Горизонтальна нерухомість усіх дисків багатопрогової балки забезпечується однією нерухомою опорою частини (диска)  $BC$ .

Підрахунок кількості стержнів, дисків, шарнірів є, як бачимо, операцією дуже важливою, особливо в тих випадках, коли досліджувана система більш-менш складна. Проте ця операція недостатня. Вона повинна бути доповнена аналізом геометричної структури. На підтвердження цього розглянемо ще дві балки, показані на рис. 1.20.

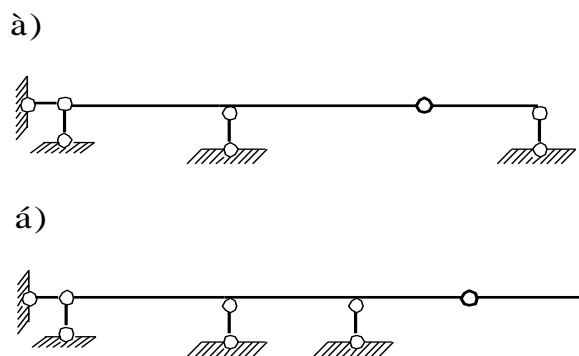


Рис. 1.20. До аналізу геометричної незмінюваності споруди

Перша система (рис. 1.20, а) дійсно геометрично незмінна і нерухома; друга балка (рис. 1.20, б) має в лівій частині зайвий опорний стержень, а в правій – один ступінь свободи, хоча обидві балки мають однакову кількість стержнів, шарнірів, дисків.

На рис. 1.21 зображені різноманітні системи, прикріплені до землі за допомогою трьох стержнів.

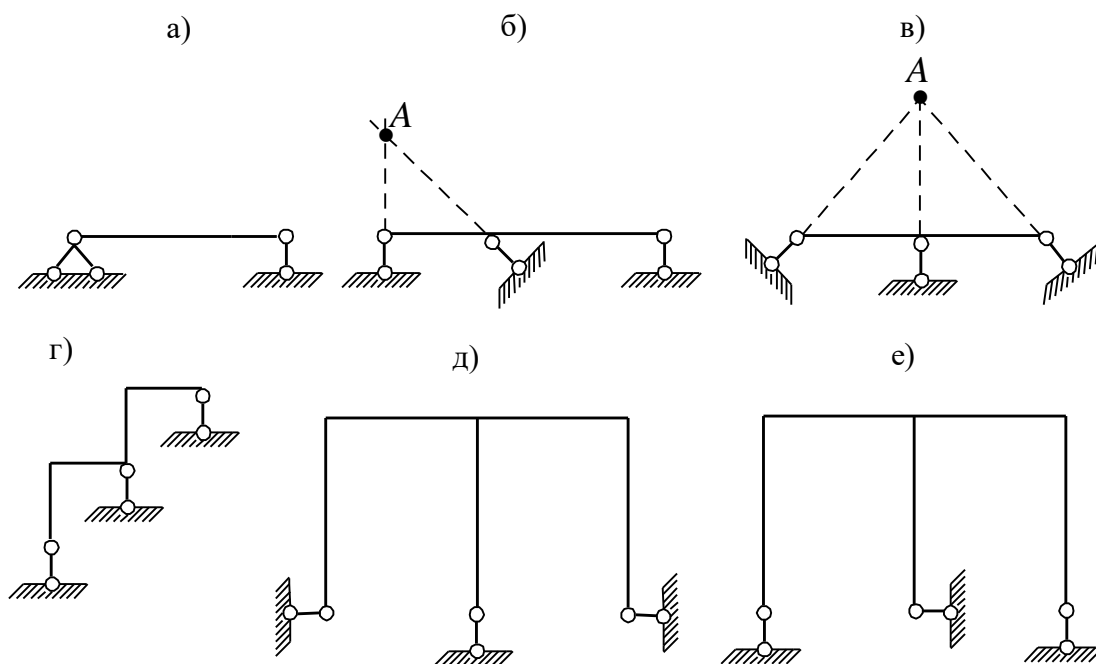


Рис. 1.21. Схеми прикріплень плоских споруд до основи

Системи на рис. 1.21, в, д є змінюваними, тому що стержні, що прикріплюють, перетинаються в одній точці, щодо якої можливий малий поворот. Рама на рис. 1.21, г є також змінюваною, тому що стержні, що прикріплюють, паралельні між собою. Інші системи (рис. 1.21, а, б, е) незмінні. Для всіх систем  $D=1$ ,  $\Pi=0$ ,  $C_0=3$ . Зазначимо також просте розташування шести опорних стержнів, що завжди гарантує нерухоме прикріплення просторового типу (рис. 1.22): у точці  $A$  розташовані три опорних стержні, що не лежать в одній площині; у точці  $B$  площини стержнів не проходять через точку  $A$ ; у точці  $C$  стержень не перетинає пряму  $AB$ .

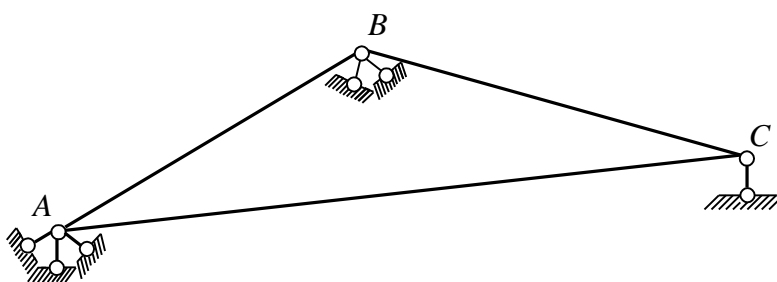


Рис. 1.22. Схема розташування опорних стержнів для нерухомого закріплення тіла

## РОЗДІЛ 2

### БАГАТОПРОГОНОВІ СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ БАЛКИ

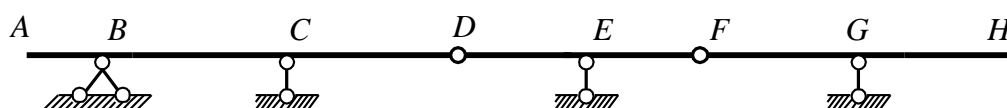
З усіх побудованих мостів найбільш поширені мости балкової системи, або балкові мости, завдяки простоті конструкції, ясності статичної схеми і найбільшій придатності для виконання в збірному

варіанті. Багатопрогоновими статично визначними (шарнірно-консольними) балками, що застосовуються в якості несучих конструкцій мостів та інших споруд, називається сукупність балок, що спираються на наземні опори і зв'язані між собою проміжними шарнірами.

## 2.1. Розрахунок багатопрогонових статично визначних балок на нерухоме навантаження

Аналізуючи схему статично визначної споруди (рис. 2.1) із геометричної або кінематичної точки зору, у більшості випадків можна розрізнити основну частину, що сама по собі геометрично незмінна і нерухома, та інші елементи, що до неї прикріплені і від неї запозичують свою нерухомість і незмінюваність (див. п. 1.5.4).

à)



á)

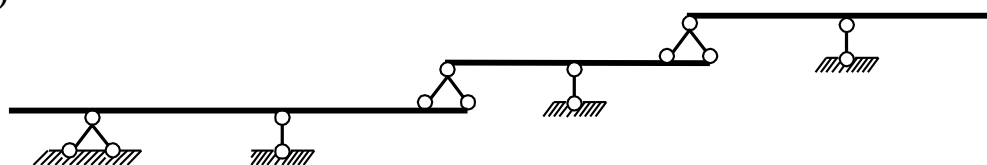


Рис. 2.1. Схема багатопрогонової статично визначної балки

Основна частина відрізняється від елементів, що спираються на неї, такою ознакою: якщо останні будуть зруйновані або вилучені, то основна частина все ж таки залишається нерухомою і незмінною; навпаки, якщо основна частина буде зруйнована, то разом із нею повалиться й усе те, що на неї спирається. Наприклад, балка  $AD$  є основною частиною відносно двох інших балок. Навантаження, розташоване на основній балці (частині) статично визначної споруди, викликає зусилля тільки в цій частині; навпаки, навантаження, розташоване на прикріпленій частині, викликає зусилля як у цій частині, так і в тій, що служить для неї основною. Покажемо, що це дійсно так.

Нехай навантаження прикладене до основної балки. Припустимо, що зусилля в балках  $DF$  і  $FH$  дорівнюють нулю. Для балки  $AD$  можна одержати розв'язок, що буде також задовольняти умови рівноваги всієї споруди. Оскільки двох різних розв'язків, що задовольняють всі умови рівноваги, бути не може, то справедливість твердження доведена.



Вирази (2.3) аналогічно (2.1) можна записати як

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Позначимо: вектор-стовпець, що характеризує навантаження,

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}; \quad (2.5)$$

вектор-стовпець внутрішніх сил

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}; \quad (2.6)$$

матрицю коефіцієнтів рівнянь (2.3), (2.4)

$$L = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

За допомогою позначень (2.5), (2.6), (2.7) рівності (2.3) або (2.4) можна записати коротко:

$$\vec{S} = L\vec{F}. \quad (2.8)$$

Матриця  $L$  називається матрицею впливу внутрішніх сил. Це прямокутна матриця порядку  $m \times n$ . Вона має  $m$  рядків і  $n$  стовпців, оскільки число обчислювальних внутрішніх сил  $m$  і число незалежних навантажень  $n$  у загальному випадку різне. Складання цієї матриці еквівалентне розв'язанню в загальному вигляді задачі обчислення внутрішніх сил у заданій багатопрогоновій балці від навантаження



заданого вигляду. Якщо складена матриця впливу  $L$ , то обчислення внутрішніх сил від заданого навантаження зводиться до формальної операції множення матриці на заданий числовий вектор. Поняття матриці впливу тісно пов'язане з поняттям епюри внутрішніх сил. Фізичний зміст кожного елемента матриці  $S_{ik}$  – це величина  $i$ -го зусилля від  $F_k = 1$ . Наприклад, 1-й стовпець матриці  $L$  складається з величин внутрішніх сил від  $F_1 = 1$ . Іншими словами, цей стовпець складається з ординат відповідних епюр внутрішніх сил від одиничного навантаження  $F_1 = 1$ . Аналогічно кожний  $k$ -й стовпець матриці  $L$  складається з ординат епюри внутрішніх сил від  $F_k = 1$ .

### 2.1.1.1. Приклад розрахунку

Розрахункова схема заданої балки показана на рис. 2.2, а.

Балки 1-8 і 14-17 є основними, тому що вони нерухомо пов'язані з землею. Балка 8-12 з одного боку пов'язана з землею, а з іншого – спирається на балку 1-8 – запозичує у неї два відсутні для нерухомості зв'язки. Балка 12-14 не має зв'язків із землею, тому вона по обидва боки спирається на балки 8-12 і 14-17. Горизонтальна нерухомість всіх елементів багатопрогонової балки забезпечується нерухомою опорою 17. Схема взаємодії елементів балки показана на рис. 2.2, б.

Як було відзначено вище (див. п. 2.1.1), кожний елемент матриці  $L$  (2.7)  $S_{ik}$  – це величина  $i$ -го зусилля від  $F_k = 1$ . Тому, щоб скласти матриці впливу, необхідно побудувати одиничні епюри. Для цього по черзі до заданої балки прикладаються одиничні навантаження:  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$ ,  $q = 1$ ,  $M = 1$ . Розрахувати балку на дію одиничних і неединичних навантажень зручніше за допомогою схеми взаємодії. При цьому окремі частини балки розглядаються як однопрогонові балки (див. п. 2.1). Розрахунок починається із «верхніх» балок і послідовно переходить до тих, що лежать нижче, причому, крім навантаження, безпосередньо до них прикладеного, враховується тиск від балок, що лежать вище, який дорівнює опорним реакціям останніх, але з оберненим напрямком. На рис. 2.2, в – і показані одиничні епюри, побудовані з використанням схеми взаємодії. Втім, побудувати ці епюри можна було, розглядаючи балку цілком. При цьому потрібно скласти три незалежних рівняння рівноваги для всієї системи і додаткові рівняння рівноваги частин балки у формі моментів відносно кожного шарніра. Такий шлях є більш громіздким.

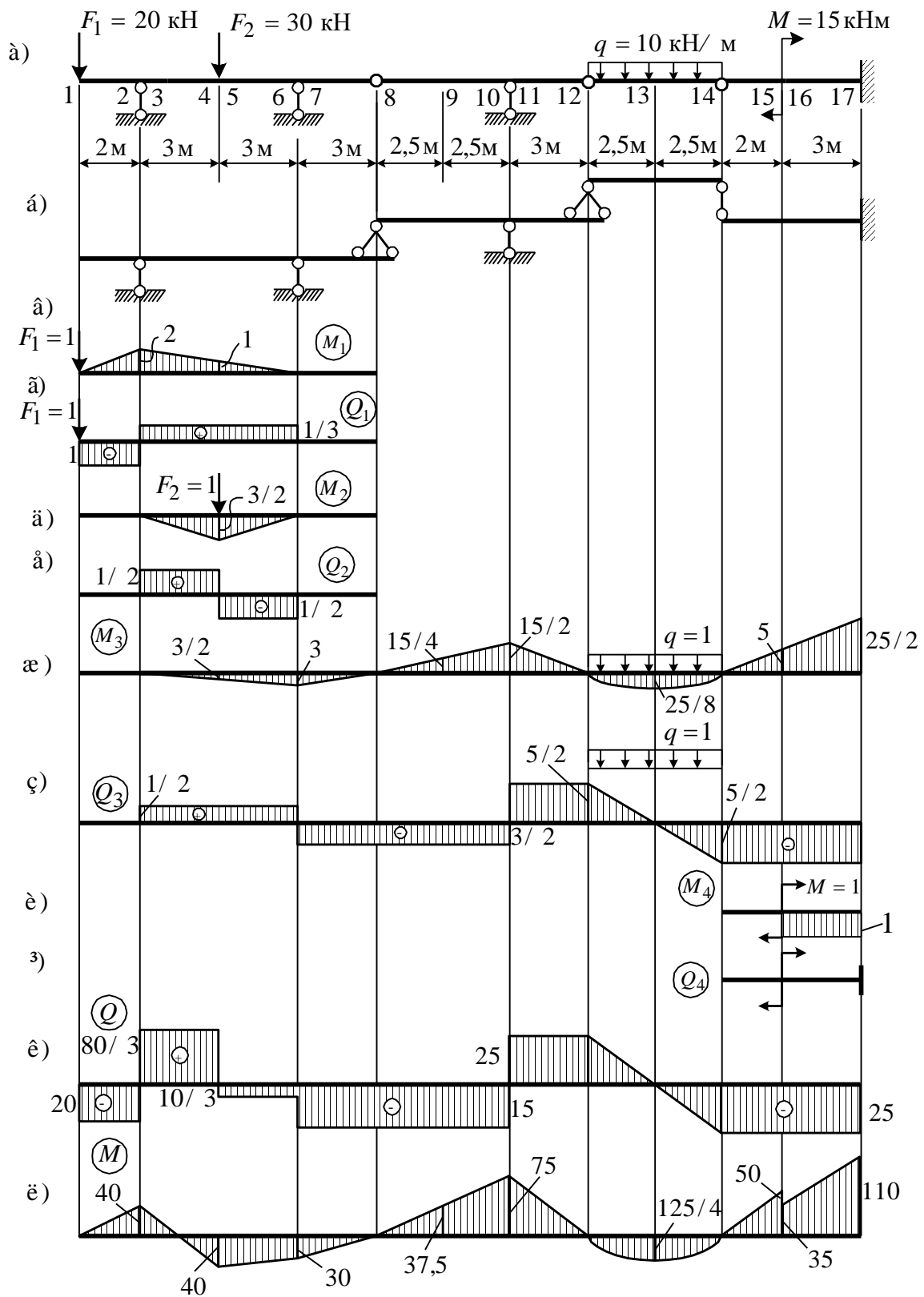


Рис. 2.2. Розрахункова схема багатопрогонової статично визначної балки (а), схема взаємодії (б), одиничні епюри (в) – (і), остаточні епюри (к), (л)

Складемо матричне рівняння для визначення згинальних моментів:

$$\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \\ M_{16} \\ M_{17} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15/4 & 0 \\ 0 & 0 & -15/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -25/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Обчислюємо згинальні моменти у перерізах багатопрольотної балки і будуємо епюру моментів (рис. 2.2, л).

Матричне рівняння для визначення поперечних сил має такий вигляд:

$$\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \\ Q_{16} \\ Q_{17} \end{matrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Епюра поперечних сил показана на рис. 2.2, к. Тут же показані чисельні значення поперечних сил, підраховані відповідно до (2.10).

## 2.2. Розрахунок багатопрогонних статично визначних балок на рухоме навантаження

Сучасні споруди часто доводиться розраховувати на рухоме навантаження. По спорудах переміщаються крани, потяги, автомобілі і т. п. Навантаження в цьому випадку може розглядатися як система пов'язаних один з одним вантажів з заданими відстанями між ними, наприклад відстанями між осями колісних пар потяга. При великих швидкостях руху необхідно в розрахунках враховувати сили інерції, що виникають при деформації системи. Але, вважаючи, що швидкості руху вантажів достатньо малі, будемо нехтувати цими силами інерції. У задачах розрахунку за недеформованою схемою статично визначних систем на рухоме навантаження загальним і універсальним є метод ліній впливу. У п. 2.1.1 ми переконалися в зручності завантажень одиничними впливами: перед тим, як робити розрахунки на конкретні складні завантаження, зручно виконати розрахунки на прості одиничні навантаження і скласти матриці впливу  $L$  (2.7). Тоді розрахунки на реальні завантаження зведуться до операції множення матриці на вектор (2.8). Реалізація цієї ідеї виявляється найбільш корисною в розрахунках на рухоме навантаження. Спочатку слід вивчити, як змінюється зусилля  $S_i$  при русі по споруді одиничної сили  $F=1$ , і побудувати графік зміни  $S_i$ . Потім цей графік можна використовувати для визначення небезпечного завантаження. Взагалі слід зазначити, що особливістю розрахунків на статичне рухоме навантаження є розв'язання додаткових задач на відшукування розрахункового завантаження, тобто визначення найбільш небезпечного положення навантаження, при якому шукане зусилля  $S_i$  досягає максимуму або мінімуму.

Отже, лінією впливу будь-якого зусилля  $S_i$  називається графік зміни цього зусилля при русі по споруді вантажу  $F=1$ .

Необхідно мати чітке уявлення про те, що на графіку є незалежною змінною, а що функцією. Незалежна змінна – координата рухомого вантажу, функція – досліджувана величина. Час  $t$  у рівняння ліній впливу не входить, тому що рух вантажу передбачається настільки повільним (про це говорилося вище), що останній у будь-якому своєму положенні може вважатися нерухомим. Вірніше було б сказати, що лінія впливу (л.в.) виражає собою вплив вантажу не рухомого, а такого, що стоїть нерухомо, але точка прикладання якого може мати будь-яку абсцису  $x$ .

Порівняємо епюру внутрішніх сил із лінією впливу. Епюра дає можливість оглядати відразу розподіл величини, яка нас цікавить, по всіх перерізах стержня, але тільки для одного, цілком визначеного положення навантаження. Лінія впливу, навпаки, дає можливість оглядати відразу

закон зміни якої-небудь величини, що належить до визначеного перерізу стержня, при всіляких положеннях одиничного вантажу. Проте вона нічого не говорить про зміну аналогічної величини, що належить до іншого перерізу стержня. І ще. Будемо застосовувати статичний спосіб побудови лінії впливу: вантаж  $F=1$  встановлюємо в довільне положення; абсцису його точки прикладання в довільно обраній системі координат позначимо  $x$ ; вважаючи вантаж нерухомим, визначаємо шукану величину як функцію від  $x$ ; для того щоб отримана формула перетворилася в рівняння лінії впливу, вважаємо в ній значення  $x$  перемінним.

### 2.2.1. Лінії впливу опорних реакцій у простих балках

Розглянемо спочатку двоконсольну балку (рис. 2.3, а).

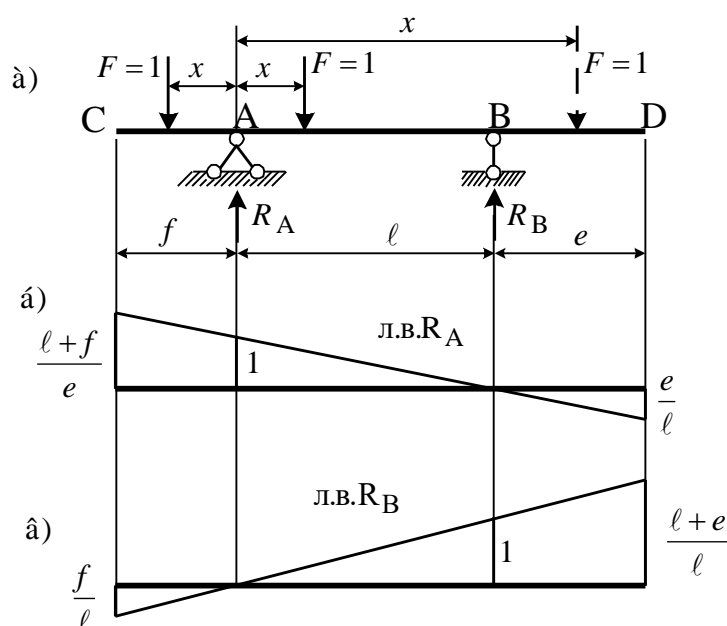


Рис. 2.3. Лінії впливу опорних реакцій двоконсольної однопрогонової балки

**Лінія впливу  $R_A$ .** Початок координат приймемо в точці А.

Розглянемо три положення одиничного вантажу.

Вантаж на ділянці АВ ( $l \geq x \geq 0$ ).

Складаємо умову рівноваги

$$\sum M_B = 0: \quad R_A l - 1(l - x) = 0.$$

Звідси знаходимо величину опорної реакції

$$R_A = \frac{l - x}{l}.$$

Щоб перейти до рівняння лінії впливу  $R_A$ , вважаємо  $x$  перемінною величиною. При  $x = 0$   $R_A = 1$  і при  $x = \ell$   $R_A = 0$ .

Вантаж на ділянці  $BD$   $(\ell + e) \geq x \geq \ell$ . Рівняння рівноваги  $\sum M_B = 0$  має вигляд:

$$R_A \ell + 1(x - \ell) = 0.$$

Знову знаходимо з цього рівняння  $R_A$

$$R_A = -\frac{x - \ell}{\ell}.$$

Одержуємо: при  $x = \ell$ ,  $R_A = 0$ ; при  $x = (\ell + e)$ ,  $R_A = -\frac{e}{\ell}$ .

Вантаж на ділянці  $CA$   $f \geq x \geq 0$ . Початок координат, як і раніше, в точці  $A$ , але додатний напрямок осі абсцис прийнято справа наліво, тобто від точки  $A$  до точки  $C$ .

Складемо рівняння рівноваги

$$\sum M_B = 0: \quad R_A \ell - 1(x - \ell) = 0.$$

Знайдемо звідси величину опорної реакції  $R_A$

$$R_A = \frac{x + \ell}{\ell}.$$

Вважаємо  $x$  перемінною величиною і обчислюємо: при  $x = 0$   $R_A = 1$ ; при  $x = f$   $R_A = \frac{\ell + f}{\ell}$ .

Графік лінії впливу  $R_A$  являє собою пряму лінію (рис. 2.3, б), тому що в усі вищенаведені розрахункові формули  $x$  входить у першому степені. Аналогічно будуємо лінію впливу опорної реакції  $R_B$  (рис. 2.3, в).

Побудуємо також лінію впливу опорної реакції в консольній балці (рис. 2.4, а).

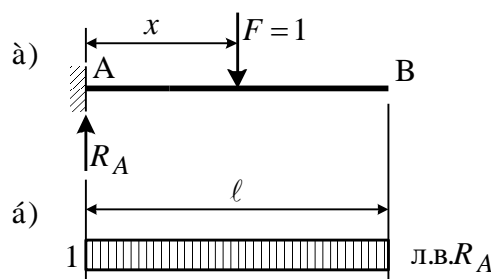


Рис. 2.4. Лінія впливу опорної реакції в консольній балці

Складемо рівняння рівноваги у формі проєкцій усіх сил, що діють на балку на вертикальну вісь

$$\sum F = 0: R_A - 1 = 0,$$

звідси

$$R_A = 1.$$

Отримана формула показує, що опорна реакція не залежить від абсциси  $x$ . Тому графік л.в.  $R_A$  буде таким, як на рис. 2.4, б.

### 2.2.2. Лінії впливу згинальних моментів у перерізах простих балок

Побудуємо лінії впливу моментів у перерізах двоконсольної однопрогонової балки (рис. 2.5, а).

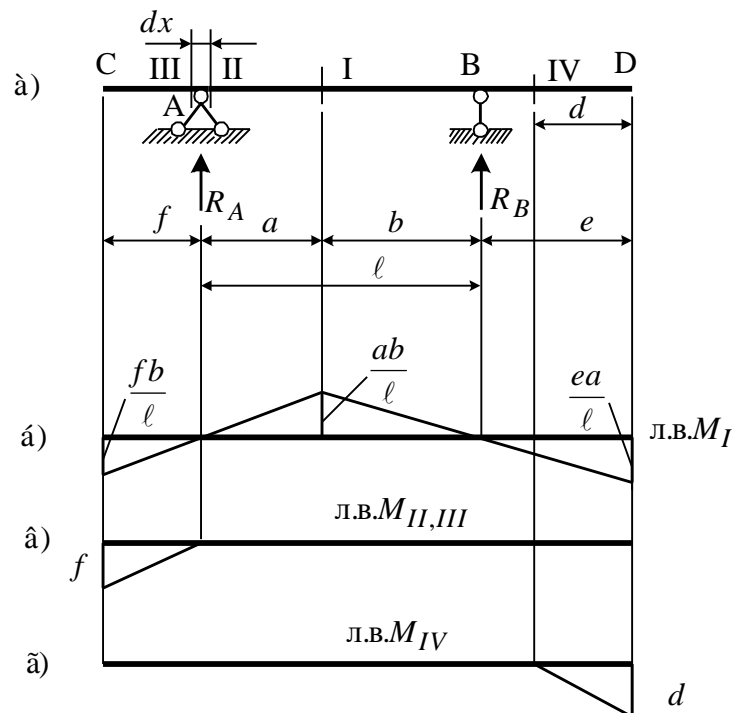


Рис. 2.5. Лінії впливу згинальних моментів у перерізах двоконсольної однопрогонової балки

#### Лінія впливу $M_I$

Розглядаємо два положення одиничного навантаження. Вантаж  $F=1$  справа від перерізу (ділянка I-D).

Розглянемо ліву відсічену частину балки. З умови рівноваги цієї частини маємо

$$M_I = R_A a.$$

Отже, лінія впливу  $M_I$  на ділянці I-D буде такою самою, як лінія впливу  $R_A$  (рис. 2.3, б), всі ординати якої збільшені в “ $a$ ” разів.

Вантаж справа від перерізу I (ділянка I-C). Розглянемо праву відсічену частину балки. З умови рівноваги цієї частини маємо

$$M_I = R_B b.$$

Звідси робимо висновок, що лінія впливу  $M_I$  на ділянці I-C буде такою самою, як лінія  $R_B$  (рис. 2.3, в) на цій ділянці, ординати якої збільшені в “ $b$ ” разів. Графік лінії впливу  $M_I$  показаний на рис. 2.5, б. З цього графіка витікає, що згинальний момент у перерізі I досягає максимальної додатної величини, якщо вантаж розташований у перерізі I. При перебуванні вантажу в точках C і D згинальний момент у перерізі I змінює знак на зворотний, тобто з плюса на мінус.

### **Лінія впливу $M_{II,III}$**

При побудові лінії впливу моменту в перерізах, розташованих нескінченно близько зліва і справа від опори, не слід робити розходження між перерізами II і III, тому що відстань між ними мізерно мала і, отже, вона на нехтовно малу величину змінює плече одиничної сили і величину моменту.

Початок координат помістимо в точці A. Якщо одиничний вантаж розташований на ділянці AD, то з умови рівноваги лівої відсіченої частини балки очевидно, що  $M_{II,III} = 0$ . Нехай тепер одиничний вантаж переміщається від точки A до точки C. Тоді, розглядаючи рівновагу тієї самої лівої частини, маємо

$$M_{II,III} = -1x.$$

Тепер неважко побудувати лінію впливу  $M_{II,III}$  (рис. 2.5, в). Аналогічно міркуючи, побудуємо лінію впливу  $M_{IV}$  (рис. 2.5, г).

У консольній балці (рис. 2.6, а) побудуємо лінії впливу моментів у точці A і перерізі I.

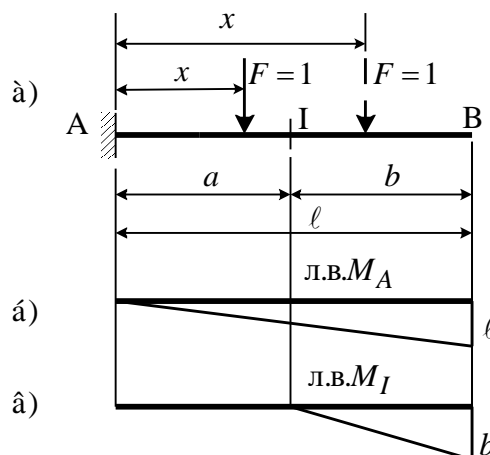


Рис. 2.6. Лінії впливу моментів у консольній балці



### Лінія впливу $M_A$

Початок координат помістимо в точку А. Відстань до вантажу позначимо через  $x$ . Причому  $0 \leq x \leq \ell$ . Визначимо згинальний момент у точці А

$$M_A = -1x.$$

При  $x = 0$   $M_A = 0$  і при  $x = \ell$   $M_A = -\ell$ . Лінія впливу показана на рис. 2.6, б.

### Лінія впливу $M_I$

Якщо вантаж розташований на ділянці А – І, то згинальний момент у перерізі І дорівнює нулю. Це очевидно, якщо подивитися на праву частину балки. Якщо вантаж переміщається по ділянці ІВ, то

$$M_I = -1(x - a), \quad a \leq x \leq \ell.$$

При  $x = 0$   $M_I = 0$  і при  $x = \ell$   $M_I = -1 \cdot b$ .

Графік показаний на рис. 2.6, в.

### 2.2.3. Лінії впливу поперечних сил у перерізах простих балок

Почнемо, як і в попередніх випадках, із двоконсольної однопрогонової балки (рис. 2.7, а).

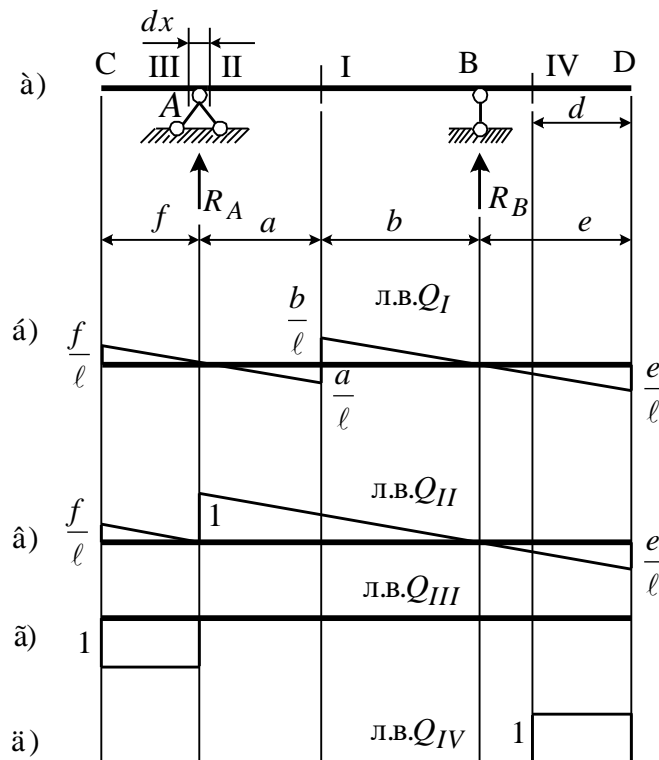


Рис. 2.7. Лінії впливу поперечних сил у перерізах однопрогонової двоконсольної балки

### **Лінія впливу $Q_I$**

Вантаж на ділянці I-D. Розглядаємо рівновагу лівої відсіченої частини балки

$$Q_I = R_A .$$

Отже, лінія впливу  $Q_I$  на ділянці I-D буде такою самою, як і лінія впливу  $R_A$  на цій ділянці. Аналогічно, при русі вантажу по ділянці I-C маємо

$$Q_I = -R_B$$

і лінія впливу  $Q_I$  на цій ділянці буде такою самою, як і лінія впливу  $R_B$ , всі ординати якої помножені на (-1). Лінія впливу  $Q_I$  показана на рис. 2.7, б.

### **Лінія впливу $Q_{II}$**

Переріз II розташований справа від опори А на нескінченно близькій відстані. Таким чином, реакція  $R_A$  розташована в лівій відсіченій частині балки, а реакція  $R_B$  – у правій. При побудові лінії впливу  $Q_{II}$ , як і раніше, розглядаємо два положення одиничного навантаження. При русі вантажу по ділянці II-D (справа від перерізу)  $Q_{II} = R_A$ , а при русі вантажу по ділянці II-C  $Q_{II} = -R_B$ . Таким чином, на ділянці II-D лінія впливу  $Q_{II}$  має вигляд лінії впливу  $R_A$ , а на ділянці II-C –  $R_B$  (див. рис. 2.7, в).

### **Лінія впливу $Q_{III}$**

Переріз III розташований на нескінченно близькій відстані, але зліва від опори. У цьому випадку реакції  $R_A$  і  $R_B$  відносяться до правої відсіченої частини балки. При русі вантажу по ділянках III-D і III-C для розташування поперечної сили в перерізі III розглядаємо ліву відсічену частину балки (вільний кінець). Якщо вантаж розташований на ділянці III-D  $Q_{III} = 0$ , а якщо на ділянці III-C –  $Q_{III} = -1$  (див. рис. 2.7, г). Аналогічно будується лінія впливу  $Q_{IV}$  (рис. 2.7, д). При побудові ліній впливу в перерізах консольної балки (рис. 2.8, а) початок координат поміщаємо в точці А для лінії впливу  $Q_A$  (рис. 2.8, б), у перерізі I – для лінії впливу  $Q_I$  (рис. 2.8, в) і для знаходження необхідних зусиль розглядаємо умови рівноваги правої відсіченої частини балки (вільний кінець).

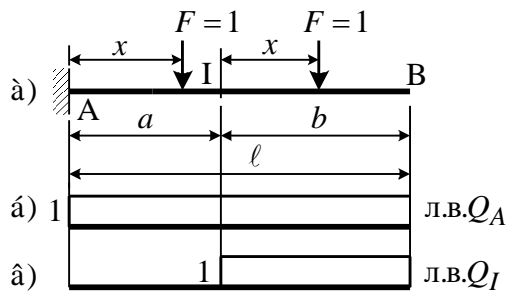


Рис. 2.8. Лінії впливу поперечних сил у перерізах консольної балки

### 2.2.4. Зв'язок матриці впливу і лінії впливу

Встановимо зв'язок матриці впливу (2.7) і лінії впливу. Розглянемо простий приклад: складемо матрицю впливу згинальних моментів для балки, завантаженої декількома вертикальними силами (рис. 2.9).

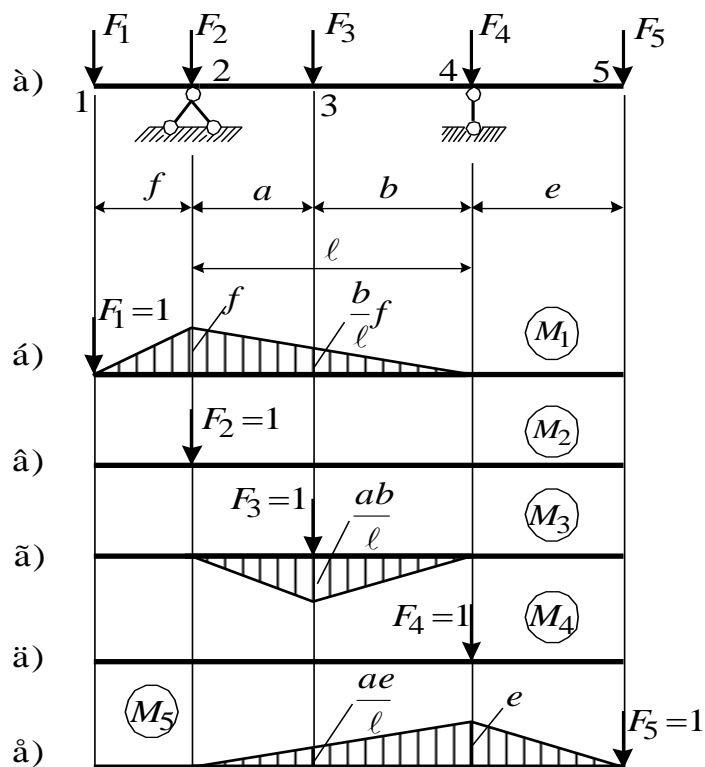


Рис. 2.9. Схема балки, завантаженої зосередженими силами (а), і епюри моментів (б) – (е)

Матриця впливу згинальних моментів для зображеної на рис. 2.9 балки має такий вигляд:

$$L_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{bf}{l} & 0 & \frac{ab}{l} & 0 & -\frac{ae}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Розглянемо елементи першого рядка цієї матриці. Вони являють собою значення моменту  $M_1$  від одиничних сил  $F_1=1$ ,  $F_2=1$ ,  $F_3=1$ ,  $F_4=1$ ,  $F_5=1$ . Але можна ці елементи розглядати і як значення моментів  $M_1$  від однієї і тієї самої сили  $F=1$ , що переміщається уздовж балки (рис. 2.10).

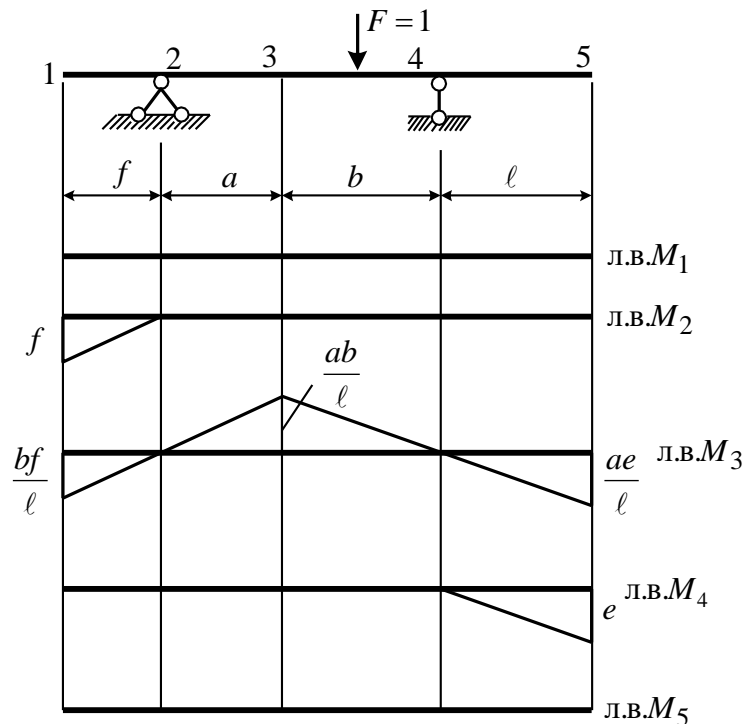


Рис. 2.10. Лінії впливу  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $M_5$

Таким чином, елементи кожного рядка матриці  $L_m$  являють собою ординати відповідної їй лінії впливу.

### 2.2.5. Лінії впливу при вузловій передачі навантаження

У багатьох реальних спорудах навантаження переміщається не по основній несучій конструкції, а по верхній споруді. Вона являє собою

систему поздовжніх і поперечних балок, що передають навантаження на основну конструкцію у вузлах (рис. 2.11, а).

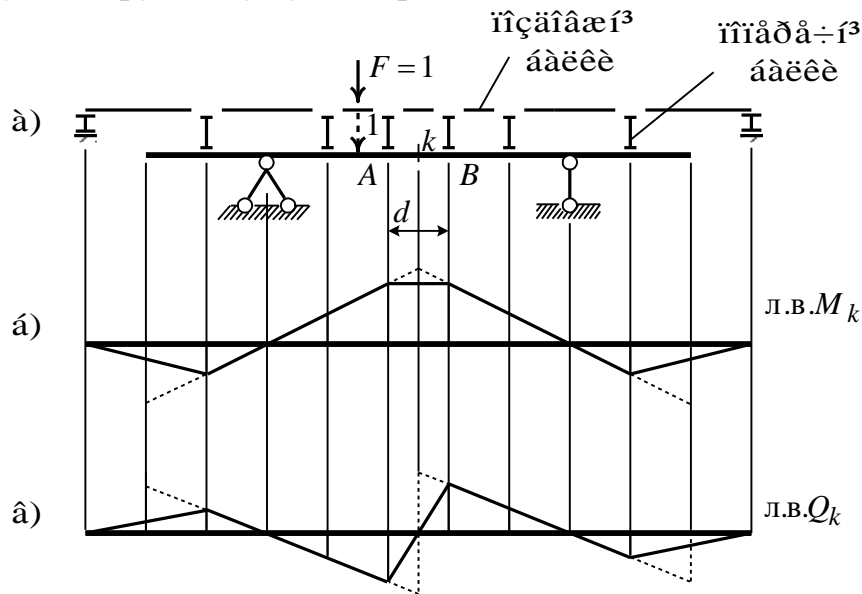


Рис. 2.11. Побудова ліній впливу при вузловій передачі навантаження

При побудові ліній впливу зусиль в основній конструкції необхідно враховувати вузлову передачу навантаження. Для цього спочатку подумки відкинемо верхню споруду і побудуємо шукану лінію впливу в припущенні, що вантаж переміщається по основній конструкції. Далі можна виділити вузлові ординати, що залишаються такими самими і для лінії впливу в заданій конструкції: положення вантажу під вузлом еквівалентне його положенню на основній конструкції. До знайдених вузлових ординат необхідно додати крайні нульові ординати (див. рис. 2.11, а, б). Коли вантаж знаходиться в цих положеннях, система не працює, тому  $M_k = 0$  і  $Q_k = 0$ .

Доведемо, що між вузлами будь-яка лінія являє собою пряму. Розглянемо ділянку АВ, показану на рис. 2.11, а (рис. 2.12).

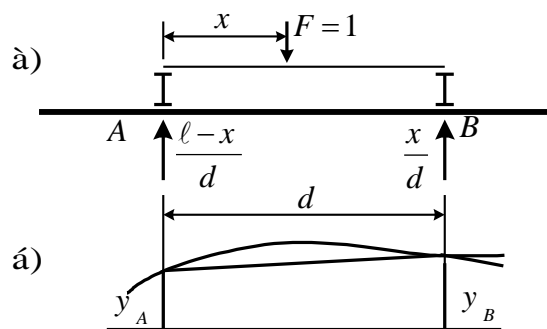


Рис. 2.12. До доведення виду лінії впливу між вузлами

При довільному положенні вантажу на ліву А і праву В опори передається тиск, що дорівнює (рис. 2.12, а)

$$\frac{\ell - x}{d} \text{ і } \frac{x}{d}.$$

Спільний вплив цих двох нерухомих, але перемінних за величиною сил, виразиться формулою

$$z = \left( \frac{\ell - x}{d} \right) y_A + \frac{x}{d} y_B,$$

яка являє собою рівняння прямої, що з'єднує верхні кінці ординат  $y_A$  і  $y_B$ .

Отже, для одержання лінії впливу, що відповідає дії вузлового навантаження, необхідно спроектувати вузли на лінію впливу, побудовану для випадку безпосередньої передачі навантаження, і проекції суміжних вузлів з'єднати прямими лініями (рис. 2.11, б, в).

### 2.2.6. Кінематичний метод побудови ліній впливу

Побудова ліній впливу – одна з задач статичного розрахунку. Цю задачу можна також розв'язати кінематичним методом, який слід вважати універсальним методом статичного розрахунку.

Розглянемо спочатку простий приклад. Знайдемо зусилля, що виникає в балці АВ при русі вантажу  $F$ , наприклад реакцію опори А (рис. 2.13, а).

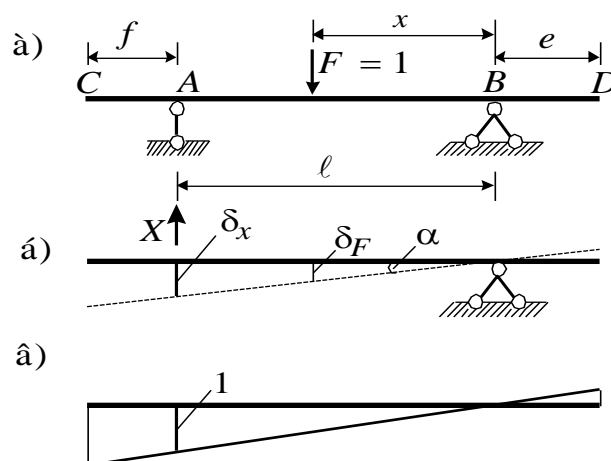


Рис. 2.13. До побудови л.в.  $R_A$  кінематичним методом

Видалимо опорний стержень, у якому виникає реакція, яка нас цікавить, і замінимо її силою (рис. 2.13, б). Характер споруди в цьому випадку зміниться, із геометрично незмінної і нерухомої вона перетвориться в кінематичний ланцюг з одним ступенем свободи, тобто в механізм. При довільному значенні сили  $X$  цей механізм не буде в рівновазі, і стержень АВ буде рухатися униз або вгору. Тільки при одному, цілком визначеному значенні цієї сили, буде існувати рівновага. Знайдемо цю силу. Для цього розглянемо нескінченно мале відхилення балки як абсолютно жорсткого стержня (див. пунктир на рис. 2.13, б). Складемо сумарну роботу сил  $X$  і  $F$  і прирівняємо її до нуля, тому що ми хочемо, щоб балка знаходилася в рівновазі:

$$F\delta_F - X\delta_x = 0,$$

звідки

$$X = F \frac{\delta_F}{\delta_x}.$$

Величини  $\delta_F$  і  $\delta_x$  – нескінченно малі і, отже, невизначувані. Проте відношення між ними є скінченним, цілком визначним за величиною і знаком. Виразимо вертикальні переміщення  $\delta_F$  і  $\delta_x$  у такий спосіб (див. рис. 2.13, а, б):

$$\delta_F = x \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\delta_x = \ell \operatorname{tg} \alpha.$$

Тоді

$$X = \frac{x}{\ell}.$$

Отримана формула і є рівнянням лінії впливу опорної реакції  $R_A$  (рис. 2.13, в). Знаки ординат лінії впливу встановлюються просто. На ділянці ВС переміщення  $\delta_x$  і  $\delta_F$  мають однакові знаки, на ділянці ВD – різні. У першому випадку їхнє відношення додатне, у другому – від’ємне. Таким чином, на ділянці ВС ординати л.в. додатні, на ділянці ВD – від’ємні. Слід звернути увагу на те, що знак відношення не залежить від того, повернулася балка за годинниковою стрілкою або проти.

Покажемо, як побудувати лінії впливу згинального моменту і поперечної сили кінематичним методом (рис. 2.14, а, б, в).

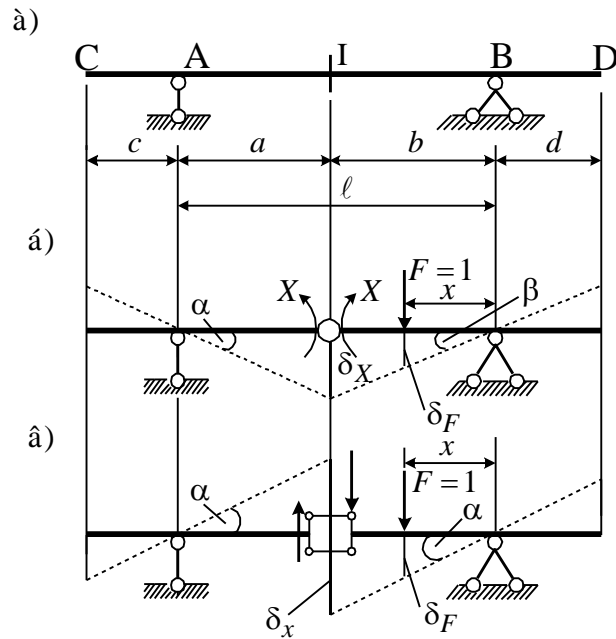


Рис. 2.14. До побудови ліній впливу згинального моменту і поперечної сили кінематичним методом

**Лінія впливу  $M_I$ .** Для звільнення балки від зв'язку, у якому виникає згинальний момент, поставимо в переріз I шарнір. Переміщення механізму показане на рис. 2.14, б пунктиром. Помістимо вантаж на ділянці I-B. Складемо, як і в попередньому випадку, рівняння робіт

$$X(\alpha + \beta) - 1 \cdot \delta_F = 0,$$

звідси

$$X = \frac{\delta_F}{\alpha + \beta} = \frac{\delta_x \frac{x}{b}}{\frac{\delta_x}{a} + \frac{\delta_x}{b}} = \frac{ax}{\ell}.$$

Це рівняння описує лінію впливу  $M_I$  на ділянці I-D. Для одержання рівняння л.в.  $M_I$  при прямованні вантажу по ділянці I-C слід міркувати аналогічно.

**Лінія впливу  $Q_I$ .** Відкинемо в перерізі I зв'язок, що перешкоджає взаємному вертикальному переміщенню обох частин балки. Два інші зв'язки, із яких один перешкоджає взаємному поздовжньому переміщенню, а інший – взаємному повороту, ми повинні зберегти. Можливе вертикальне переміщення механізму буде полягати в повороті лівої частини навколо точки A, а правої – навколо точки B на той самий кут  $\alpha$ . Очевидно, що прямі BI і AI залишаться паралельними між собою.



Складемо рівняння робіт:

$$X\left(\frac{a}{\ell} + \frac{b}{\ell}\right) - 1 \cdot \delta_F = 0,$$

звідки

$$X = \frac{\delta_F}{\frac{a}{\ell} + \frac{b}{\ell}} = \frac{x}{\ell}.$$

Аналогічно побудуємо лінію впливу на ділянці I-C.

### **2.2.7. Лінії впливу для багатопрогонових статично визначних балок**

При побудові ліній впливу для багатопрогонової статично визначної балки спочатку будуємо лінію впливу в межах однієї ланки, у якій знаходиться досліджуваний переріз або опора, розглядаючи його як однопрогонову балку, а потім лінію впливу поширюємо на інші ланки (однопрогонові балки), що спираються на аналізовану (безпосередньо або через інші ланки). При цьому необхідно враховувати такі правила: якщо вантаж переміщається по основній ланці, то він викликає зусилля тільки в перерізах основної ланки; якщо вантаж переміщається по другорядній ланці, то він викликає зусилля як у перерізах другорядної ланки, так і в перерізах ланки, на яку він спирається; якщо вантаж розташований над наземною опорою, то він цілком сприймається цією опорою. Виходячи з цих правил, у межах кожної другорядної балки лінія впливу являє собою відрізок прямої, яка починається від крайньої ординати сусідньої основної балки і проходить через нуль під протилежною опорою другорядної балки. Таким чином, над усіма шарнірами, що з'єднують однопрогонові балки, лінія впливу має переломи.

Розглянемо побудову лінії впливу для багатопрогонової статично визначної балки на прикладі (рис. 2.15, а).

Спочатку побудуємо схему взаємодії елементів балки (рис. 2.15, б). Перейдемо тепер до побудови лінії впливу моменту в перерізі I. Розглядаючи ланку BE, в якій знаходиться переріз I, як однопрогонову двоконсольну балку, будуємо лінію впливу на цій ділянці (див. рис. 2.5, в). Зліва на цю ланку спирається балка AB. При положенні вантажу в точці A (наземна опора) він сприймається опорою і не викликає згинального моменту у досліджуваному перерізі I.

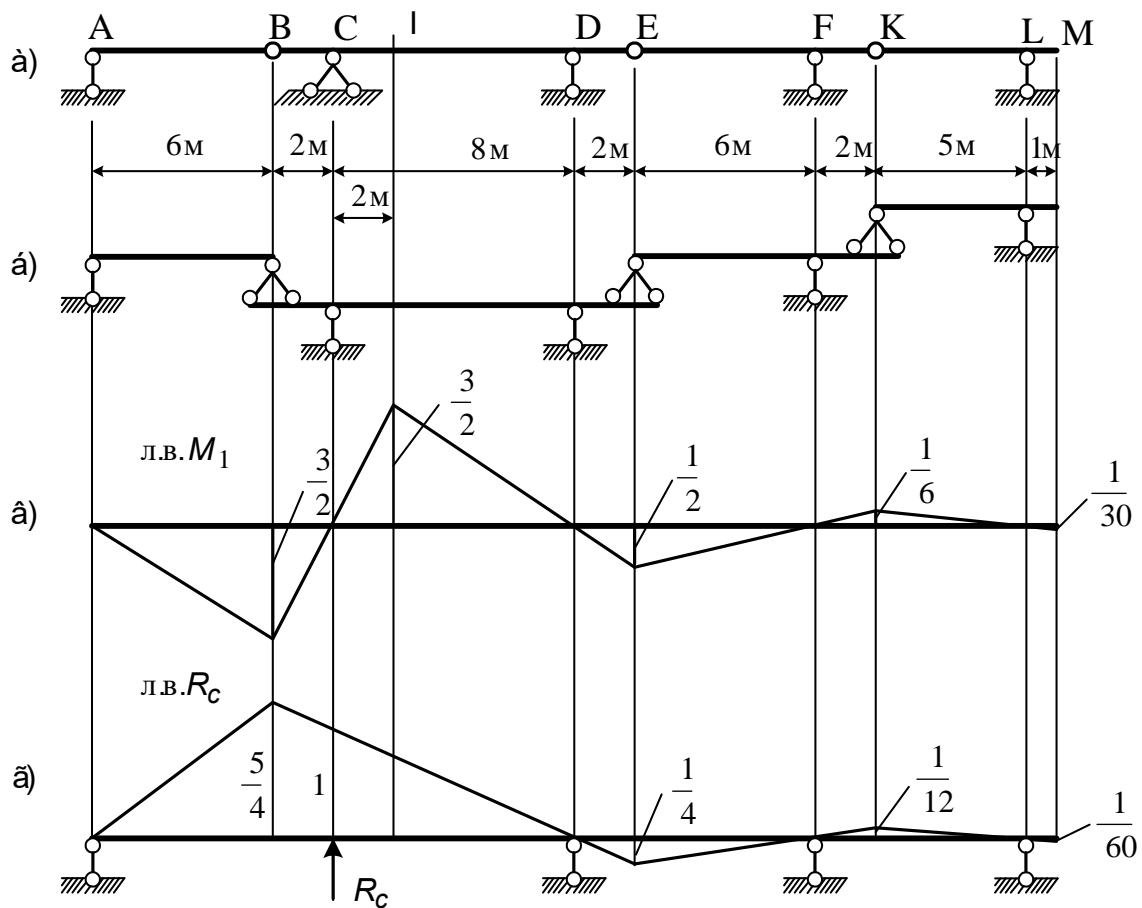


Рис. 2.15. Побудова ліній впливу в перерізах багатопрольотної балки (а) статичним (в) і кінематичним способами (г)

Отже, в точці А ордината лінії впливу  $M_1$  дорівнює нулю. Тому проводимо пряму, що з'єднає крайню ординату лінії впливу  $M_1$  (під шарніром В) із нулем у точці А. Справа на ланку ВЕ спирається балка ЕК, а на балку ЕК – ланка КМ. Нульові ординати лінії впливу  $M_1$  на цих ділянках розташовані в точках F і L. Таким чином, лінія впливу  $M_1$  на ділянках ЕК і КМ являє собою похилі прямі з нульовими ординатами в точках F і L (наземні опори) і переломами в точках Е і К (проміжні шарніри). Для ілюстрації кінематичного методу визначимо форму лінії впливу  $R_c$ . Видалимо опорний стержень С, замінивши його зусиллям. Дамо отриманій системі з одним ступенем свободи можливе переміщення (рис. 2.15, г). Епюра переміщень і буде являти собою лінію впливу  $R_c$  у певному масштабі. Застосовуючи принцип можливих переміщень, можна визначити й ординати побудованої лінії впливу  $R_c$ . Проте вони простіше визначаються при статичному методі побудови л.в. Кінематичний метод звичайно застосовується для перевірки форми ліній впливу, побудованих для складних систем статичним методом.

## 2.2.8. Завантаження лінії впливу нерухомим навантаженням

Після побудови лінії впливу якогось зусилля за її ординатами можна обчислити це зусилля від заданого вертикального навантаження у вигляді декількох зосереджених сил, розподіленого навантаження  $q(x)$ , моментного навантаження  $m(x)$ . Процес визначення зусилля за допомогою лінії впливу називається завантаженням лінії впливу.

### 2.2.8.1. Визначення зусиль від зосереджених сил

Нехай на споруду діє навантаження, що складається з декількох паралельних зосереджених  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , що займають певне положення. Потрібно визначити зусилля, для якого лінія впливу відома, від цього навантаження (рис. 2.16). Для загальності лінія впливу показана у вигляді кривої.

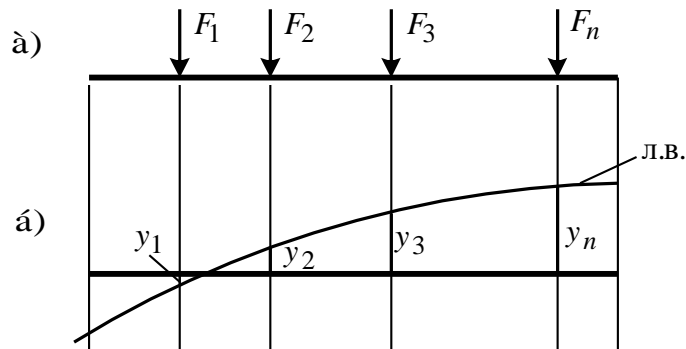


Рис. 2.16. До визначення зусиль за л.в. від зосереджених сил

Якби на споруду діяла тільки сила  $F_1$  і якби остання, крім того, дорівнювала б одиниці, зусилля виразилося б ординатою  $y_1$ . Тому значення  $S_i$  можна визначити відповідно до принципу суперпозиції:

$$S_i = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i. \quad (2.11)$$

Отже, щоб обчислити якийсь фактор (опорну реакцію, згинальний момент, поперечну силу і т. д.) від декількох зосереджених сил, треба на побудованій для цього фактора лінії впливу виміряти ординати над вантажами і знайти алгебраїчну суму добутків величин вантажів на відповідні їм ординати лінії впливу.

Розглянемо приклад. Знайдемо момент у перерізі А консольної балки від заданого навантаження  $F$  по л.в. (рис. 2.17, а).

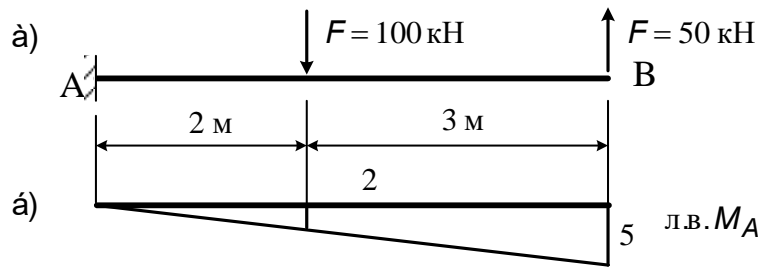


Рис. 2.17. Визначення згинального моменту за л.в.

Спочатку побудуємо л.в.  $M_A$  (рис. 2.17, б). Відповідно до формули (2.11) одержимо

$$M_A = 50 \cdot 5 - 100 \cdot 2 = 50 \text{ кНм.}$$

Тут ураховані знаки для зосереджених сил (зосереджені сили вважаються додатними, якщо вони спрямовані зверху вниз) і ординат лінії впливу (“плюс” – вгорі і “мінус” – внизу).

### 2.2.8.2. Визначення зусиль від розподіленого навантаження

Позначимо інтенсивність навантаження в довільній точці через  $q_x$  (рис. 2.18, а).

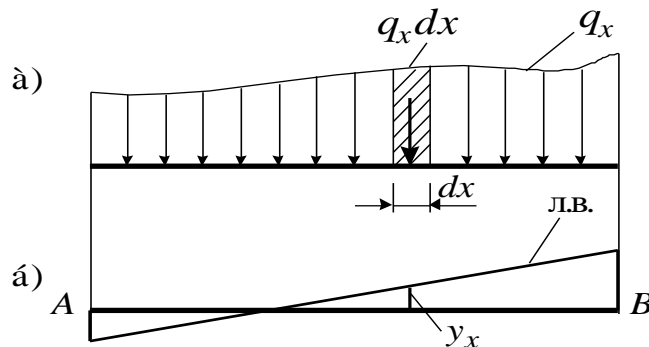


Рис. 2.18. До визначення зусиль за л.в. від розподіленого навантаження

Виділимо із графіка інтенсивностей  $q_x$  нескінченно вузьку смужку, площа якої дорівнює  $q_x dx$ . Прийmemo величину  $q_x dx$  за зосереджене навантаження. За побудованою лінією впливу (рис. 2.18, б) можна визначити зусилля від цього нескінченно малого навантаження:

$$(q_x dx) y_x.$$

Якщо скласти величини цих елементарних навантажень, знайдемо

$$S = \int_A^B q_x y_x dx. \quad (2.12)$$

У випадку рівномірно розподіленого навантаження, коли

$$q_x = q = \text{const} ,$$

$$S = q \int_A^B y_x dx = qw . \quad (2.13)$$

Отримана формула (2.13) дозволяє зробити такий висновок: щоб обчислити якийсь фактор від рівномірно-розподіленого навантаження, необхідно на побудованій для цього фактора лінії впливу визначити площу завантаженої ділянки і помножити її на інтенсивність навантаження.

Може так трапитися, що площа  $w$  складається з ділянок, які мають різні знаки. Під величиною  $w$  в усіх випадках розуміється алгебраїчна сума її ділянок. Звернемо увагу ще на одну обставину, що випливає з формули (2.13): форма лінії впливу не відіграє ніякої ролі, важлива лише її площа.

Розглянемо приклад. Для балки, показаної на рис. 2.19, а, знайдемо згинальний момент у перерізі I –  $M_I$ .

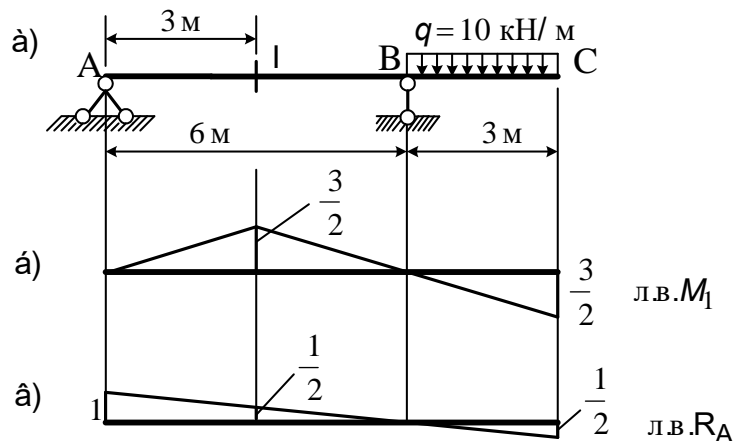


Рис. 2.19. До визначення зусиль від рівномірно розподіленого навантаження

Лінії впливу шуканих зусиль побудовані на рис. 2.19, б, в. Відповідно до (2.13) одержуємо:

$$M_I = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = -\frac{90}{4} \text{ кНм};$$

$$R_A = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{30}{4} \text{ кН}.$$

### 2.2.8.3. Визначення зусиль від зосередженого моменту

Завантажимо довільну лінію впливу парою сил (див. рис. 2.20, а):

$$F_1 = -\frac{1}{a}, \quad F_2 = \frac{1}{a}.$$

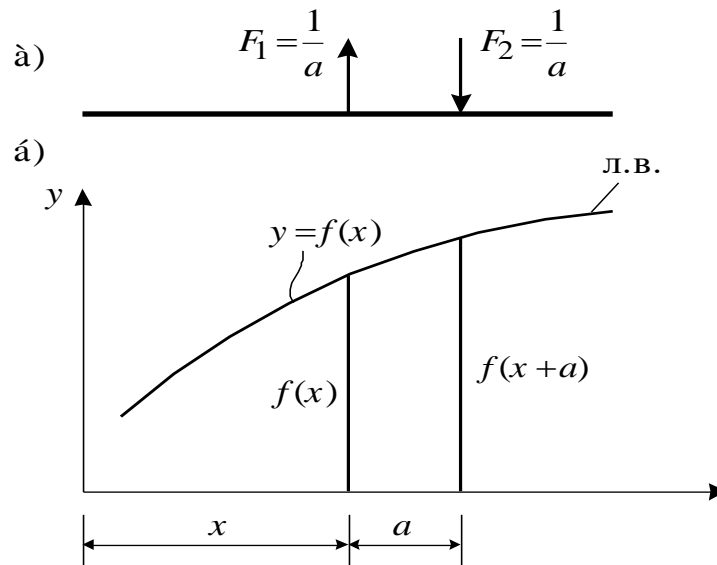


Рис. 2.20. До визначення зусиль за лініями впливу від зосередженого моменту

Момент цієї пари сил дорівнює одиниці (рис. 2.20, б).  
Нехай рівняння лінії впливу має вигляд

$$y = f(x).$$

Сумарне зусилля від обох сил дорівнює

$$S = -\frac{1}{a}f(x) + \frac{1}{a}f(x+a) = \frac{f(x+a) - f(x)}{a}. \quad (2.14)$$

Коли  $a \rightarrow 0$ , формула (2.14) набуває вигляду

$$S = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x). \quad (2.15)$$

Таким чином, похідна від лінії впливу якої завгодно величини за незалежною змінною  $x$  являє собою побудовану у функції від тієї самої змінної лінію впливу, яка виражає вплив рухомої зосередженої пари з моментом, що дорівнює одиниці.

Від довільних моментів зусилля визначається за такою формулою:

$$S = \sum_{i=1}^k m_i y'_i, \quad (2.16)$$

де  $m_i$  – діючі на балку зосереджені моменти;  $y'_i$  – похідна лінії впливу в місці прикладання зосереджених моментів (тангенс нахилу дотичної до горизонталі).

Якщо лінія впливу має вигляд прямої лінії, то формулу (2.16) можна записати в такий спосіб:

$$S = \sum_{i=1}^k (\pm m_i) (\pm \operatorname{tg} \alpha_i). \quad (2.17)$$

Зосереджений момент вважається додатним, якщо він спрямований за годинниковою стрілкою;  $\operatorname{tg} \alpha_i$  додатний, якщо функція  $y = f(x)$  зростаюча, і від'ємний – якщо убутна.

Наведемо приклад визначення зусиль від зосередженого моменту (рис. 2.21, а).

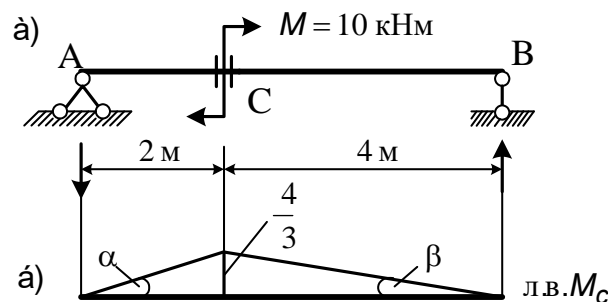


Рис. 2.21. До визначення зусиль по л.в. від зосередженого моменту

Знайдемо згинальні моменти, розташовані нескінченно близько зліва і справа від перерізу С. Лінія впливу  $M_C$  показана на рис. 2.21, б.

$$M_C^{\text{лів}} = -10 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{10}{3} \text{ кНм.}$$

$$M_C^{\text{пр}} = 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \text{ кНм.}$$

Пояснимо знаки згинального моменту і тангенсів кутів нахилу лінії впливу до горизонталі. Згинальний момент додатний, тому що спрямований за годинниковою стрілкою. На ділянці АС функція лінії впливу зростаюча (+), а на ділянці СВ – убутна (-).

### 2.2.9. Завантаження ліній впливу рухомих навантажень

Розглянемо більш складний випадок, коли навантаження являє собою систему зв'язаних вантажів, що переміщуються по споруді. Припустимо спочатку, що система зв'язаних вантажів переміщається по одній прямолінійній ділянці л.в.  $S_i$ , а інші ділянки не завантажені (рис. 2.22).

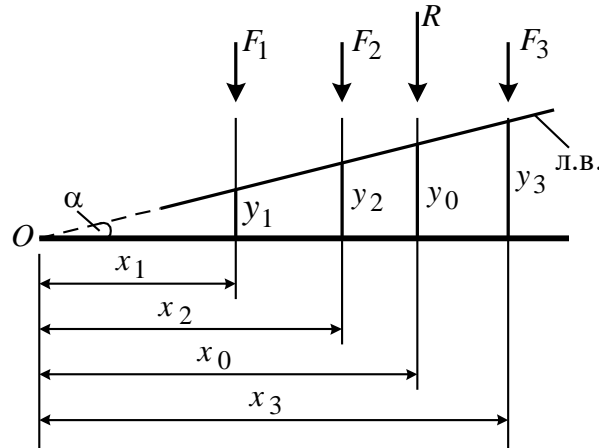


Рис. 2.22. Про одну властивість прямолінійної ділянки лінії впливу

Продовжимо прямолінійну ділянку до перетинання з віссю абсцис. Знайдемо зусилля від системи зосереджених сил (див. (2.11))

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n F_i y_i = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 = \\
 &= F_1 x_1 \operatorname{tg} \alpha + F_2 x_2 \operatorname{tg} \alpha + F_3 x_3 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^n F_i x_i. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Але оскільки сума моментів декількох сил щодо точки O (рис. 2.22) дорівнює моменту їх рівнодіючої  $R$ , то у формулі (2.18) можна замінити

$$\sum_{i=1}^n F_i x_i = R x_0$$

і тоді

$$S = \operatorname{tg} \alpha R x_0 = R y_0. \quad (2.19)$$

Отже, доходимо такого висновку: якщо система зв'язаних вантажів знаходиться на прямолінійній ділянці лінії впливу, то при завантаженні лінії впливу можна замінити ці вантажі рівнодіючою  $R$ .



Випадком, що найчастіше зустрічається, є завантаження трикутної лінії впливу (рис. 2.23).

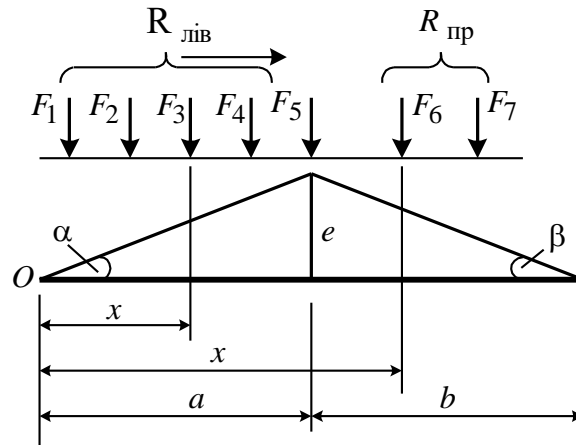


Рис. 2.23. Невигідне завантаження трикутної лінії впливу

Знайдемо зусилля від системи вантажів, показаних на рис. 2.23. Припустимо, що вантаж  $F_5$  знаходиться на нескінченно близькій відстані зліва від вершини л.в.

$$S = \operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^5 F_i x_i + \operatorname{tg} \beta \sum_{i=6}^7 F_i (a - b - x_i). \quad (2.20)$$

Візьмемо першу похідну функції (2.20)

$$\frac{ds}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^5 F_i - \operatorname{tg} \beta \sum_{i=6}^7 F_i. \quad (2.21)$$

Доти, поки жодний вантаж не стоїть над вершиною, похідна (2.21) має визначене значення. Припустимо, що система зв'язаних вантажів (потяг) пересувається зліва направо, тобто у бік зростання  $x$ .

Якщо при якому-небудь положенні потяга виходить, що

$$\frac{ds}{dx} > 0,$$

то  $S$  – зростаюча функція, отже, потяг не дійшов до найбільш не вигідного завантаження.

Якщо

$$\frac{ds}{dx} < 0,$$

то функція  $S$  убутна, і, отже, найбільш не вигідне завантаження вже пройдено. Таким чином, шукане положення потяга характеризується тим, що в момент переходу через нього похідна  $\frac{ds}{dx}$  змінює свій знак на

зворотний. Легко переконатися, що критичним може бути тільки таке положення потяга, при якому один із вантажів стоїть під вершиною лінії впливу. При переході будь-якого вантажу через вершину лінії впливу величина похідної  $\frac{ds}{dx}$  раптово змінюється, тому що в правій частині формули (2.21) доданок, що містить цю силу, переводиться з першої суми в другу, або навпаки. Як бачимо, похідна (2.21) не є неперервною. От чому найбільше значення  $S$  не може бути знайдене з умови

$$\frac{ds}{dx} = 0,$$

нульового значення похідної взагалі не буде.

Припустимо, що критичним вантажем є вантаж  $F_5$ . Тоді при розташуванні вантажу зліва від вершини  $\frac{ds}{dx} > 0$ , а при розташуванні

справа від вершини  $-\frac{ds}{dx} < 0$ , тобто

$$\operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^5 F_i - \operatorname{tg} \beta \sum_{i=6}^7 F_i > 0; \quad (2.22)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^4 F_i - \operatorname{tg} \beta \sum_{i=5}^7 F_i < 0.$$

Замінюючи в системі нерівностей (2.22)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{a}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{b}$ ;  
 $R_{\text{лів}} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ ,  $R_{\text{пр}} = F_6 + F_7$ , одержимо

$$\frac{R_{\text{лів}} + F_{\text{кр}}}{a} > \frac{R_{\text{пр}}}{b}; \quad (2.23)$$

$$\frac{R_{\text{лів}}}{a} < \frac{F_{\text{кр}} + R_{\text{пр}}}{b}.$$

Ця система нерівностей є аналітичною ознакою критичного вантажу. Розв'язок, що задовольняє умові (2.23), буде мати реальний зміст тільки в тому випадку, якщо при установленні потяга в знайдене критичне положення жодний із його вантажів не зійде зі споруди. Якщо ж це відбудеться, то аналіз доведеться зробити знову, з огляду лише на ті вантажі, що розташовані на споруді (у межах лінії впливу).

Для лінії впливу з вершиною на початку довжини завантаження найбільш не вигідне завантаження визначається за формулою

$$F_1 \ell > a_k (F_2 + F_3 + \dots + \dots), \quad (2.24)$$

де  $F_1$  – перший вантаж (найважчий), поставлений над вершиною лінії впливу, кН (тс);

$F_2, F_3, \dots$  – інші вантажі на лінії впливу, кН (тс);

$\ell$  – довжина завантаження лінії впливу, м;

$a_k$  – відстань між першим і другим вантажем, м.

Після визначення не вигідного положення навантаження  $S_{\max}$  можна обчислити за формулами (2.18), (2.20). Далі можна дію рухомого навантаження замінити деяким умовним навантаженням, рівномірно розподіленим по всій довжині лінії впливу. Воно називається еквівалентним навантаженням, що обчислюється при найбільш не вигідному положенні рухомого складу за формулою

$$g_{\text{екв}} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{w_k}, \quad (2.25)$$

де  $F_i$  – навантаження від потяга на рейці (кН, тс);

$y_i$  – ордината лінії впливу під  $i$ -м вантажем;

$w_k$  – площа лінії впливу, що завантажується, м<sup>2</sup>.

## РОЗДІЛ 3

### СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ ПЛОСКІ ФЕРМИ

Фермою (про ці конструкції ми згадували в п. 1.2 і 1.5.2) будемо називати геометрично незмінну систему, складену зі стержнів, шарнірно зв'язаних між собою кінцями. При вузловій передачі навантаження кожний стержень ферми відчуває поздовжні зусилля, тобто осьове розтягання або стискання. Коли стержень працює винятково на поздовжні сили, матеріал може бути використаний більш вигідно, і витрата його зменшується. Цим досягається подвійна економія, тому що зменшуючи власну вагу конструкції, ми заощаджуємо на матеріалі не тільки безпосередньо, але і побічно, завдяки зменшенню постійного навантаження.

#### 3.1. Класифікація ферм

Класифікацію ферм проведемо за такими ознаками: за призначенням ферми; за типом обпирання; за характером обрису зовнішнього контуру; за типом решітки.

Залежно від призначення розрізняють ферми прогонових будівель мостів (рис. 3.1, а), кроквяні ферми (рис. 3.1, б), ферми каркасів промислових цехів (рис. 3.1, в), кранові ферми (рис. 3.1, г) та ін.

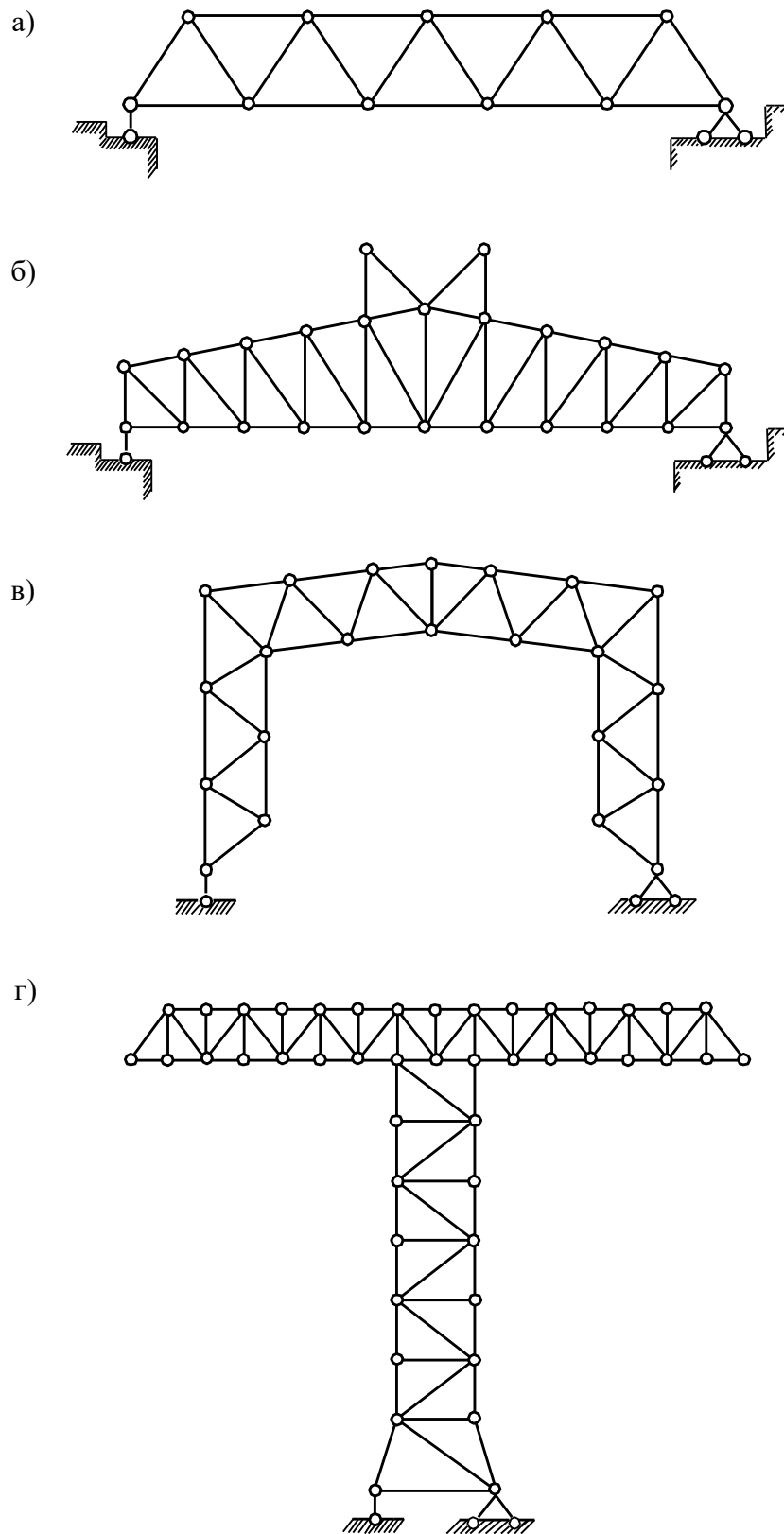


Рис. 3.1. Типи ферм залежно від призначення: а – ферма прогонової будівлі моста; б – кроквяна ферма з надбудовою для ліхтаря; в – ферма каркаса промислового цеху; г – ферма підйомного крана

За типом обпирання ферми можуть бути балковими (рис. 3.2, а), арковими (рис. 3.2, б); консольними (рис. 3.2, в); консольно-балковими (рис. 3.2, г).

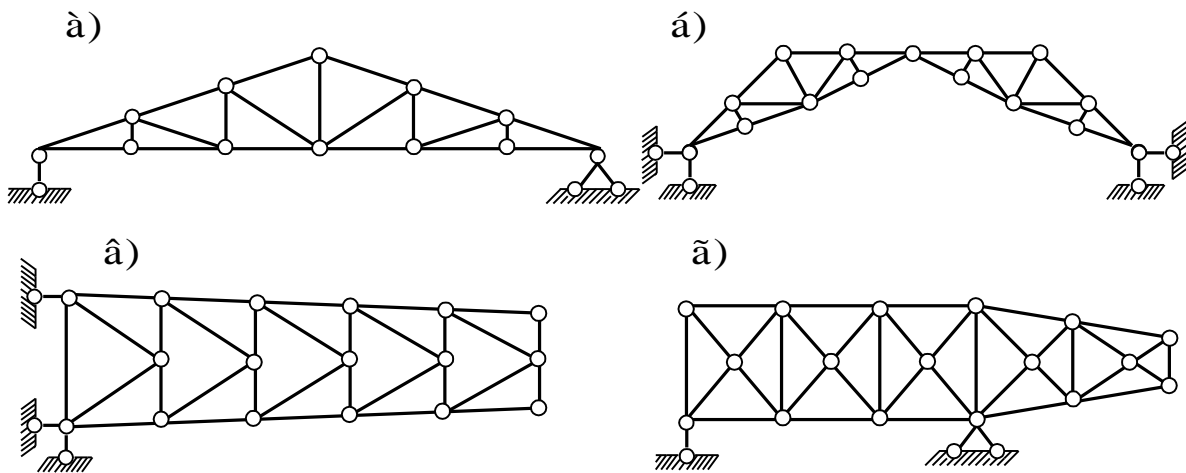


Рис. 3.2. Класифікація ферм за типом обпирання: а – балкова ферма; б – аркова ферма; в – консольна ферма; г – консольно-балкова ферма

За характером обрисів розрізняють ферми з паралельними поясами (рис. 3.1, а) і ламаним або полігональним розташуванням поясів (рис. 3.1, б) і ферми трикутного обрисів (рис. 3.2, а).

За типом решітки ферми діляться на ферми з трикутною решіткою (рис. 3.1, а); ферми з розкосою решіткою (рис. 3.1, б, 3.2, а); ферми з напіврозкосою решіткою (рис. 3.2, в); ферми з ромбічною решіткою (рис. 3.2, г); ферми зі складовою решіткою (складовою решіткою називають звичайно решітку, яка складається з простої основної решітки розкосого або трикутного типу і додаткових елементів – шпренгелів) (рис. 3.3).

Задача збільшення висоти ферми може бути раціонально розв’язана при введенні до складу кожної панелі додаткових двохопорних фермочок – шпренгелів, що спираються на вузли основної ферми. Стержні таких фермочок працюють лише на місцеве навантаження, тобто на навантаження, прикладене в межах їхнього прогону. Вертикальне місцеве навантаження, що діє на шпренгель, передається у вузли основної ферми, яка є для шпренгеля опорами (рис. 3.3).

На рис. 3.3, а, б зображені одноярусні шпренгелі, що передають місцеве навантаження, прикладене до нижнього (верхнього) пояса у вузли нижнього (верхнього) пояса. На рис. 3.3, в, г зображені двоярусні шпренгелі, які місцеве навантаження, прикладене до нижнього (верхнього) пояса, передають у вузли верхнього (нижнього) пояса ферми.

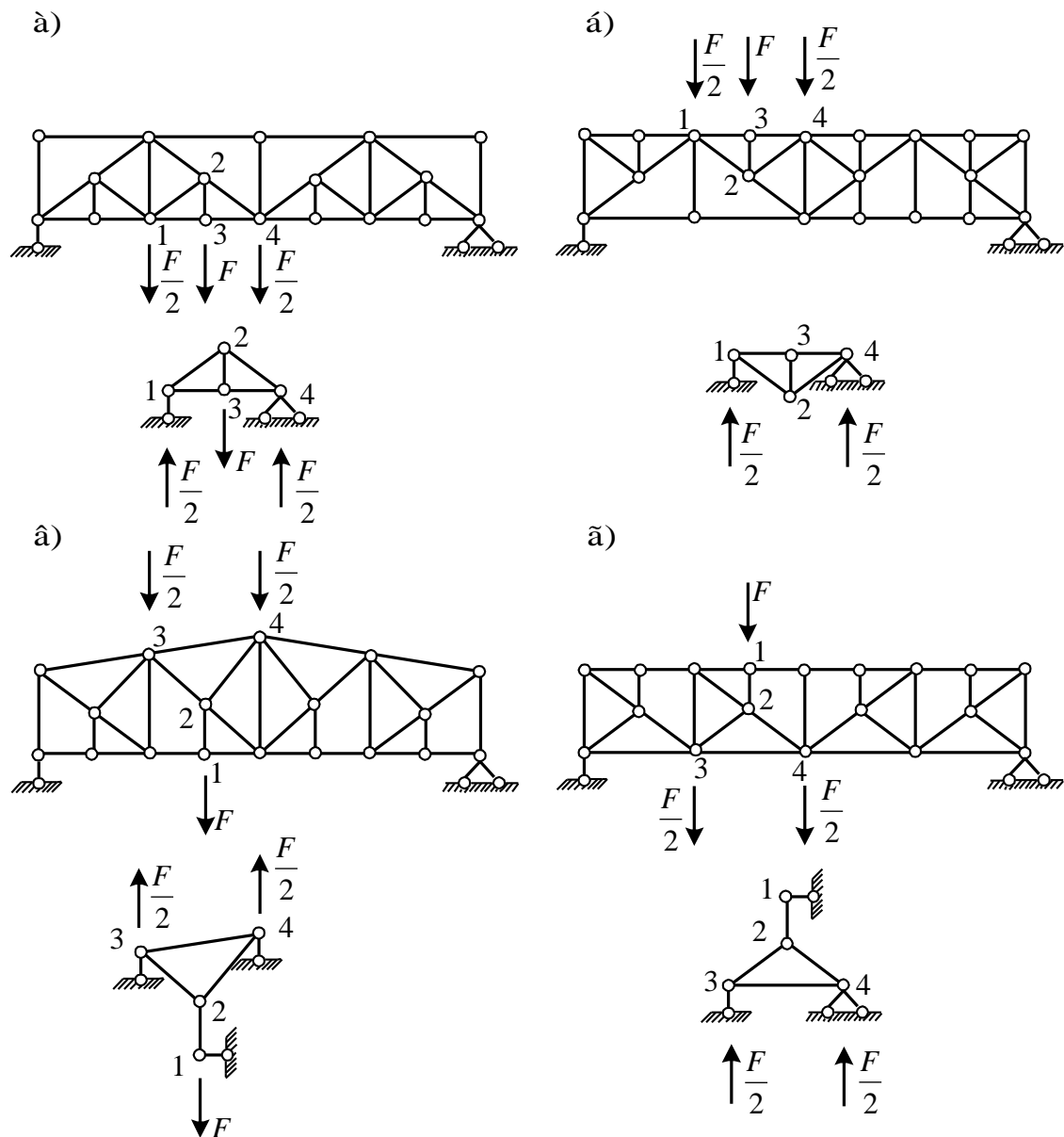


Рис. 3.3. Ферми зі складовою решіткою: а, б – ферми з одноярусними шпренгелями; в, г – ферми з двоюрисними шпренгелями

### 3.2. Визначення зусиль у стержнях ферм

Якщо ферма геометрично незмінна і не має зайвих зв'язків, то вона статично визначна (див. п. 1.5.2), тобто усі її зусилля можуть бути визначені з рівнянь статики. Як відомо, ці рівняння можуть складатися різними способами – у формі рівнянь моментів або рівнянь проекцій. Загальний спосіб визначення зусиль у статично визначній фермі полягає в тому, щоб шляхом розрізування її на ті або інші частини одержати стільки незалежних одно від одного рівнянь статики, скільки невідомих зусиль містить аналізована ферма. Вся теорія визначення зусиль у фермах

зводиться до вироблення таких правил проведення розтинів і перерізів, що забезпечили б системі рівнянь найбільшу простоту. Різноманітні методи, що фігурують у теорії ферм, являють собою ні що інше, як різноманітні методи упорядкування рівнянь статики.

### 3.2.1. Метод вирізання вузлів

Одним із найпростіших методів одержання рівнянь, які містять мінімальну кількість невідомих, є проведення таких розтинів, із котрих кожний відтинає від ферми по одному вузлу (рис. 3.4, а, б).

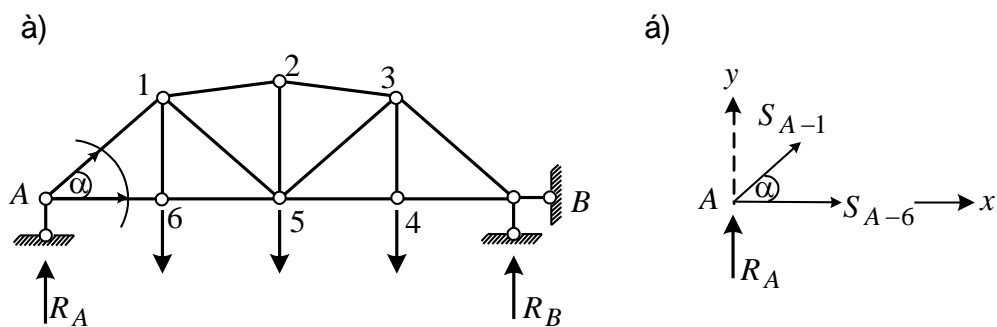


Рис. 3.4. До визначення зусиль у фермах методом вирізання вузлів

Для аналітичного розв'язання задачі потрібно задатися додатним напрямком зусиль. Припустимо, що обидва вони спрямовані від вузла, тобто розтягнуті (рис. 3.4, б).

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0: \quad R_A + S_{A-1} \sin \alpha = 0, \quad S_{A-1} = -R_A / \sin \alpha;$$

$$\sum X = 0: \quad S_{A-6} + S_{A-1} \cos \alpha = 0, \quad S_{A-6} = R_A / \operatorname{tg} \alpha.$$

Виділяючи за допомогою таких розтинів усі вузли ферми, одержимо саме таку кількість рівнянь, яка необхідна для визначення зусиль у всіх стержнях ферми. Таким чином, визначення зусиль у фермі методом вирізання вузлів являє собою багатократне повторення однієї і тієї самої нескладної операції. Істотну роль відіграє вибір належної послідовності переходу від вузла до вузла; у будь-якій стадії розрахунку варто вирізувати новий вузол, у якому залишилося лише два невідомих зусилля. З аналітичної точки зору, така операція являє собою ні що інше, як розв'язання двох рівнянь із двома невідомими, потім підстановку знайдених значень у такі два рівняння, що містять, крім цих уже відомих, ще два нових і т. д. Така ланцюгова залежність між невідомими відбивається на точності результатів розрахунку.

При вирізанні вузлів часто зустрічаються деякі прості випадки, розв'язання яких може бути отримане разом і назавжди в загальному вигляді. Це ненавантажений двостержневий вузол (рис. 3.5, а),

ненавантажений тристержневий вузол, у якому осі двох стержнів спрямовані по одній прямій (рис. 3.5, б); тристержневий вузол з одиночним стержнем і з навантаженням, що діє по напрямку останнього (рис. 3.5, в); тристержневий вузол з одиночним стержнем при довільному напрямку навантаження (рис. 3.5, г); ненавантажений чотиристержневий вузол, у якому осі стержнів спрямовані за двома прямими (рис. 3.5, д).

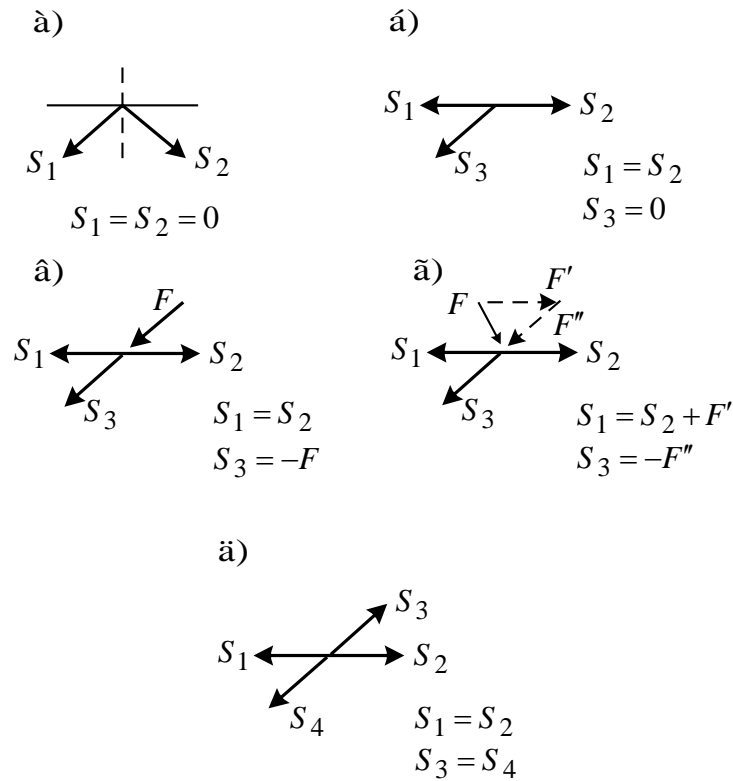


Рис. 3.5. Окремі випадки рівноваги вузлів

### 3.2.2. Метод перерізів (метод моментної точки)

Розглянемо ферму (рис. 3.6).

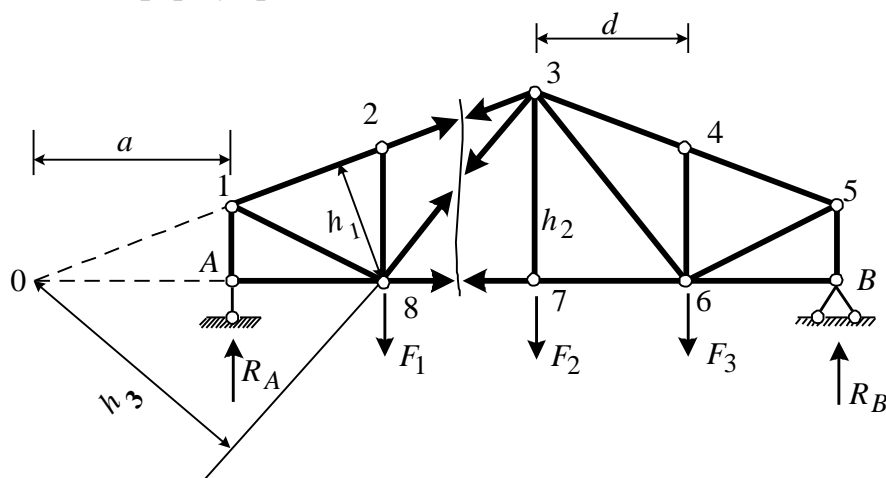


Рис. 3.6. До визначення зусиль у стержнях ферм методом перерізів



Розсічемо ферму на дві частини, проводячи розтин так, щоб у нього потрапило не більш трьох стержнів. Стержні, що потрапили в переріз, заміняємо зусиллями. Спрямовуємо зусилля до перерізу (від вузлів). Визначаємо точки попарного взаємного перетинання зусиль  $S_{2-3}$ ,  $S_{8-3}$ ,  $S_{8-7}$ . Це точки 8, 0, 3. Складаємо три рівняння статки у формі рівняння моментів щодо цих точок:

$$\begin{aligned} \sum M_8^{\text{лів}} = 0: & \quad R_A d + S_{2-3} h_1 = 0; \\ \sum M_0^{\text{лів}} = 0: & \quad R_A a - F_1(d + a) + S_{8-3} h_3 = 0; \\ \sum M_3^{\text{лів}} = 0: & \quad R_A 2d - F_1 d - S_{8-7} h_2 = 0. \end{aligned}$$

При такому методі складання рівнянь кожне з них буде містити тільки одну невідому. Такий шлях менше піддається неточностям, ніж викладений раніше в п. 3.2.1. Крім того, він може мати перевагу в тому випадку, коли потрібно визначити зусилля тільки в одному стержні або в невеличкій групі стержнів, до яких при користуванні способом вирізання вузлів довелося б добиратися здалеку. У розтині може бути і більш трьох стержнів із невідомими зусиллями, якщо всі невідомі, крім однієї, перетинаються в одній точці (рис. 3.7).

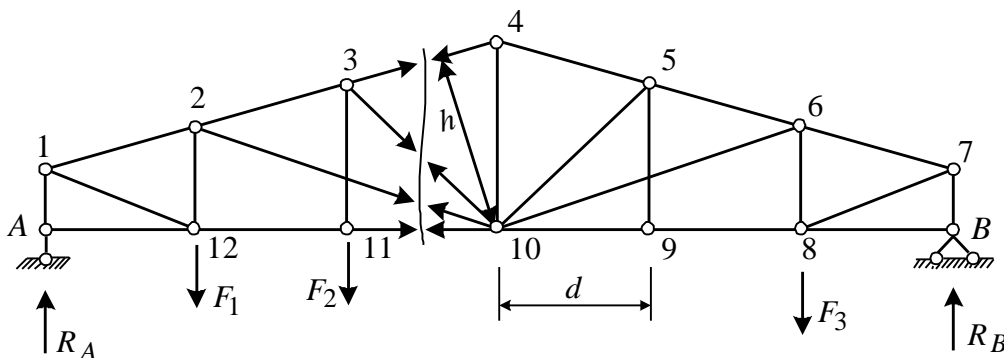


Рис. 3.7. До визначення зусиль у стержнях ферм методом перерізів (стержень 3-4)

Наприклад, для знаходження зусилля  $S_{3-4}$  необхідно скласти рівняння моментів лівих або правих сил (вибирається та частина ферми, що містить меншу кількість сил) відносно моментної точки “10”:

$$\sum M_{10}^{\text{пр}} = 0: \quad R_B 3d - F_3 2d + S_{3-4} h = 0.$$

Не обов'язково проводити розтин через три стержні, його можна проводити через будь-яку кількість стержнів, аби в числі їх було не більш трьох стержнів, що мають невідомі зусилля і не перетинаються в одній точці.

Розглянемо ще один окремий випадок, коли з трьох пересічених стержнів два паралельні один одному (рис. 3.8).

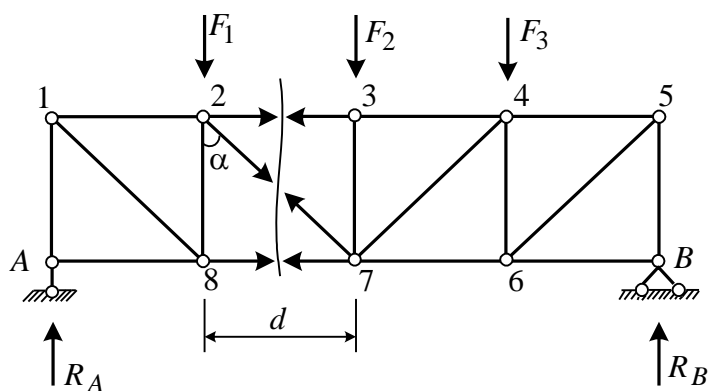


Рис. 3.8. До визначення зусиль у стержнях методом проєкцій

Знайдемо зусилля в стержні  $S_{2-7}$ . Два з трьох пересічених стержнів паралельні один одному – перетинаються в нескінченності.

Складемо рівняння у формі проєкцій на вертикальну вісь:

$$\sum F_y^{\text{лів}} = 0: \quad R_A - F_1 - S_{2-7} \cos \alpha = 0.$$

### 3.2.3. Метод заміни зв'язків

Розглянемо ферму, показану на рис. 3.9, а.

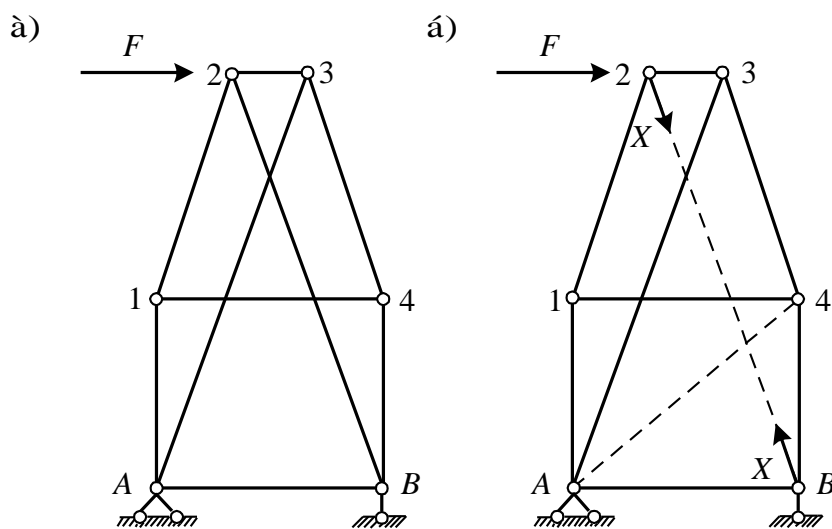


Рис. 3.9. Визначення зусиль способом заміни стержнів: а – задана ферма; б – перетворена ферма

Спробуємо перетворити дану ферму, видаливши один із її стержнів, і вставити замість нього інший стержень на новому місці. Ця операція являє собою найбільш цікаву частину розрахунку, тому що її можна зробити різноманітними способами, серед котрих треба вибрати достатньо вдалий. Замінена (перетворена) ферма повинна вибиратися так, щоб вона явно була геометрично незмінною і в той же час піддавалася простому розрахунку.

Видалимо стержень 2-В і поставимо його в інше місце, наприклад, А-4. Завантажимо перетворену ферму двома взаємно протилежними силами  $X$ , прикладеними по кінцях заміненого стержня 2-В, і зовнішнім навантаженням  $F$ . Отримана в такий спосіб перетворена ферма показана на рис. 3.9, б.

Визначимо зусилля в стержнях перетвореної ферми. Для того щоб зусилля у всіх стержнях перетвореної ферми співпали з їхніми зусиллями в заданій фермі, необхідно, щоб у вузлах В і 2 були прикладені сили, кожна з яких дорівнює дійсному зусиллю стержня 2-В. Величина  $X$  може бути знайдена з умови, що зусилля в стержні А-4 (рис. 3.9, б) дорівнює нулю:

$$S_1 X + S_F = 0,$$

звідси 
$$X = -\frac{S_F}{S_1},$$

де  $S_F$  – зусилля в стержні А-4 від заданого зовнішнього навантаження;

$S_1$  – зусилля в стержні А-4 від  $X = 1$ .

Оскільки перетворена ферма явно геометрично незмінна, то величини  $S_F$  і  $S_1$  повинні мати цілком визначені, скінченні значення. Більш того, величина  $S_1$  служить характеристикою заданої ферми. Якщо  $S_1 \neq 0$ , то задана ферма також геометрично незмінна, а якщо  $S_1 = 0$ , то вона миттєво змінювана. Таким методом ми можемо зробити кінематичний аналіз заданої ферми.

Якщо знайти значення  $X$ , можна визначити всі зусилля вже звичайним шляхом, послідовно вирізаючи вузли або проводячи перерізи.

У більш складних випадках доводиться зробити дві заміни стержнів або навіть більше.

### 3.3. Лінії впливу зусиль у фермах

При побудові ліній впливу у фермах одиничний вантаж переміщається або по верхньому (ізда зверху), або по нижньому поясу (ізда понизу). Для побудови ліній впливу статичним способом так само, як і при аналітичному розрахунку, розглядається рівновага вузлів і частин ферми. При використанні способу перерізів записуємо рівняння рівноваги відсіченої частини ферми при положенні рухомого вантажу зліва від розсіченої панелі і справа. Рівняння рівноваги варто записати для тієї частини ферми, де вони простіші. У результаті одержуємо рівняння лівої і правої гілок лінії впливу. Кожна гілка справедлива до відповідної межі розсіченої панелі. Межами розсіченої панелі називаються найближчі від проведеного перерізу вузли того пояса, по якому рухається одиничний

вантаж. У межах розсіченої панелі між гілками проводимо пряму лінію. Ліва і права гілки лінії впливу перетинаються під моментною точкою.

Якщо для побудови лінії впливу будемо використовувати спосіб вирізання вузлів, розглядаємо рівновагу вирізаного вузла при положенні вантажу в цьому вузлі і поза ним. Отримані ординати лінії впливу з'єднуємо прямими лініями. Проілюструємо сказане для різноманітних типів ферм.

### 3.3.1. Лінії впливу зусиль у балкових фермах

Розглянемо балкову ферму (рис. 3.10, а) і побудуємо лінії впливу  $S_{2-3}$ ,  $S_{2-7}$ ,  $S_{3-7}$ ,  $S_{5-B}$ ,  $S_{4-6}$ .

**Лінія впливу зусилля  $S_{2-3}$ .** Проводимо переріз I через три стержні. Моментна точка "7". Розсічена панель 8-7.

Вантаж справа від розсіченої панелі (7-8).

$$\sum M_7^{\text{лів}} = 0: \quad R_A 2d + S_{2-3} h_1 = 0;$$

$$S_{2-3} = -R_A \frac{2d}{h_1}.$$

Вантаж зліва від розсіченої панелі (8-A).

$$\sum M_7^{\text{пр}} = 0: \quad R_B 2d + S_{2-3} h_1 = 0;$$

$$S_{2-3} = -R_B \frac{2d}{h_1}.$$

Отримані формули зусиль у стержні 2-3 при положенні вантажу  $F=1$  зліва і справа від розсіченої панелі показують, що шукана лінія впливу виражається через лінії впливу опорних реакцій  $R_A$  і  $R_B$  з

поправочним множником  $\left(-\frac{2d}{h_1}\right)$  (рис. 3.10, б).

**Лінія впливу зусилля  $S_{3-7}$ .** Для побудови лінії впливу застосовуємо метод вирізання вузлів. Розглядаємо рівновагу вузла (рис. 3.10, ж). Спроекувавши всі сили, що діють у вузлі "3" на вертикаль, знайдемо, що

$$S_{3-7} = -2S_{3-2} \sin \alpha.$$

Звідси випливає, що лінію впливу зусилля  $S_{3-7}$  можна одержати, перемноживши кожен ординату л.в.  $S_{3-2}$  на  $(-2\sin \alpha)$  (рис. 3.10, в).

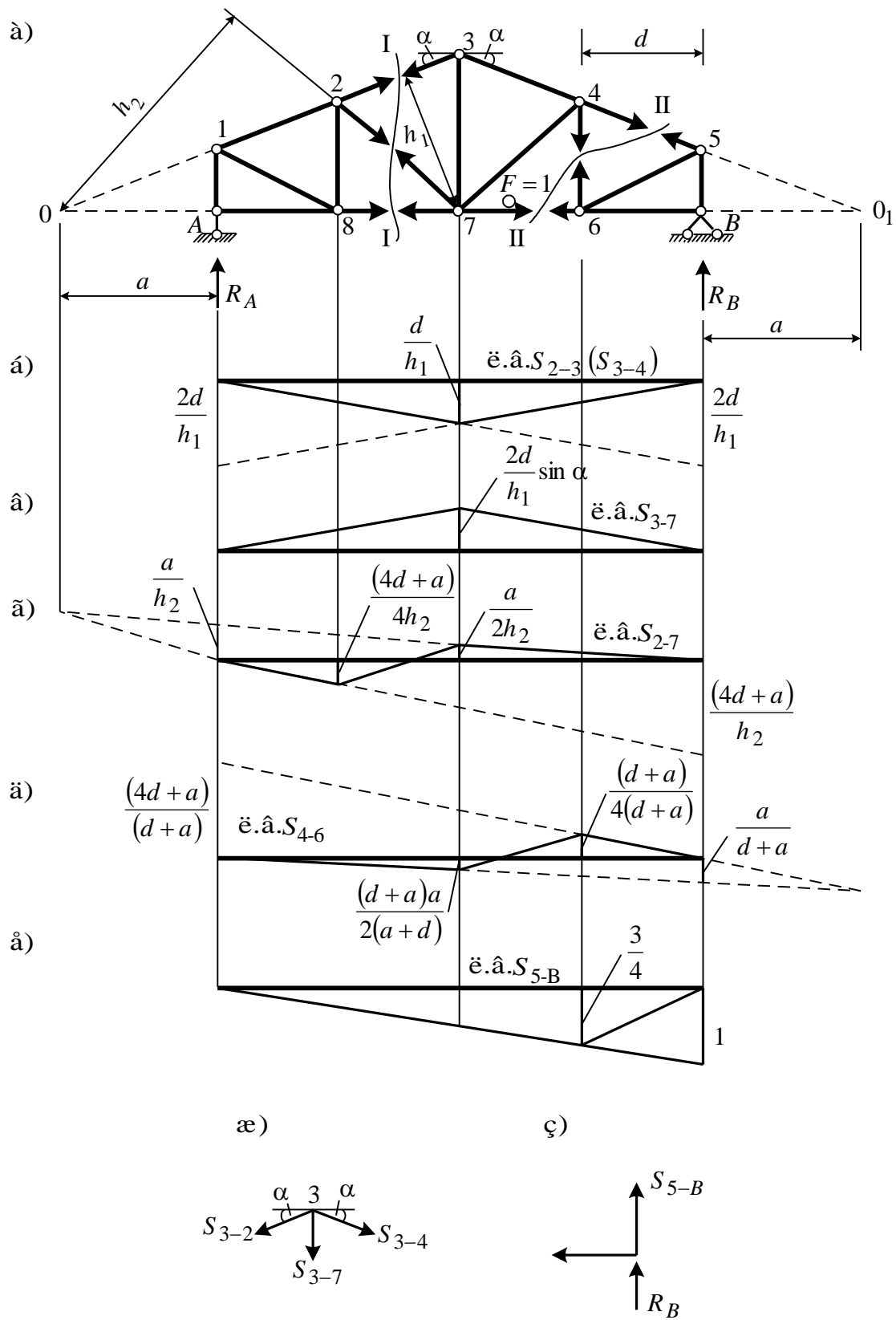


Рис. 3.10. Схема балкової ферми (а) і лінії впливу  $S_{2-3}$  (б);  $S_{3-7}$  (в);  $S_{2-7}$  (г);  $S_{4-6}$  (д);  $S_{5-B}$  (е)

**Лінія впливу зусилля**  $S_{2-7}$ . Використовуємо переріз I (рис. 3.10, а).  
Моментна точка 0. Розсічена панель 8-7.

Вантаж на ділянці 7-В (справа від розсіченої панелі).

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: \quad R_A a - S_{2-7} h_2 = 0;$$

$$S_{2-7} = R_A \frac{a}{h_2}.$$

Вантаж на ділянці 8-А (зліва від розсіченої панелі).

$$\sum M_0^{\text{пр}} = 0: \quad R_B (4d + a) + S_{2-7} h_2 = 0;$$

$$S_{2-7} = -R_B \frac{4d + a}{h_2}.$$

Побудований графік показаний на рис. 3.10, г.

**Лінія впливу зусилля**  $S_{4-6}$ . Для побудови лінії впливу використовуємо метод перерізів. Проводимо переріз II-II (рис. 3.10, а). Розсічена панель при їзді понизу 7-6. Моментна точка  $O_1$ .

Вантаж на ділянці 6-В.

$$\sum M_{O_1}^{\text{лів}} = 0: \quad R_A (4d + a) - S_{4-6} (d + a) = 0;$$

$$S_{4-6} = R_A \frac{(4d + a)}{d + a}.$$

Вантаж на ділянці 7-А.

$$\sum M_{O_1}^{\text{пр}} = 0: \quad R_B a + S_{4-6} (d + a) = 0;$$

$$S_{4-6} = -R_B \frac{a}{d + a}.$$

Графік зусилля  $S_{11-6}$  показаний на рис. 3.10, д.

**Лінія впливу зусилля**  $S_{5-B}$ . Вирізуємо вузол В (рис. 3.10, з). Розглядаємо два положення вантажу.

Вантаж  $F=1$  поза вузлом (ділянка 6-А):

$$S_{5-B} = -R_B.$$

Вантаж  $F=1$  у вузлі:

$$S_{5-B} = 0.$$

Побудована лінія впливу показана на рис. 3.10, е.

Варто звернути увагу на таку обставину. При побудові л.в.  $S_{3-7}$  розглядалося одне положення вантажу – поза вузлом, тому що за умовою задачі «їзда» здійснюється понизу.

### 3.3.2. Лінії впливу в стержнях консольних ферм

Зазначимо одне правило побудови лінії впливу в консольних фермах: при використанні методу перерізів при упорядкуванні рівнянь рівноваги варто розглядати консольну частину ферми при будь-якому розташуванні вантажу відносно розсіченої панелі. Проілюструємо це на прикладі (рис. 3.11, а).

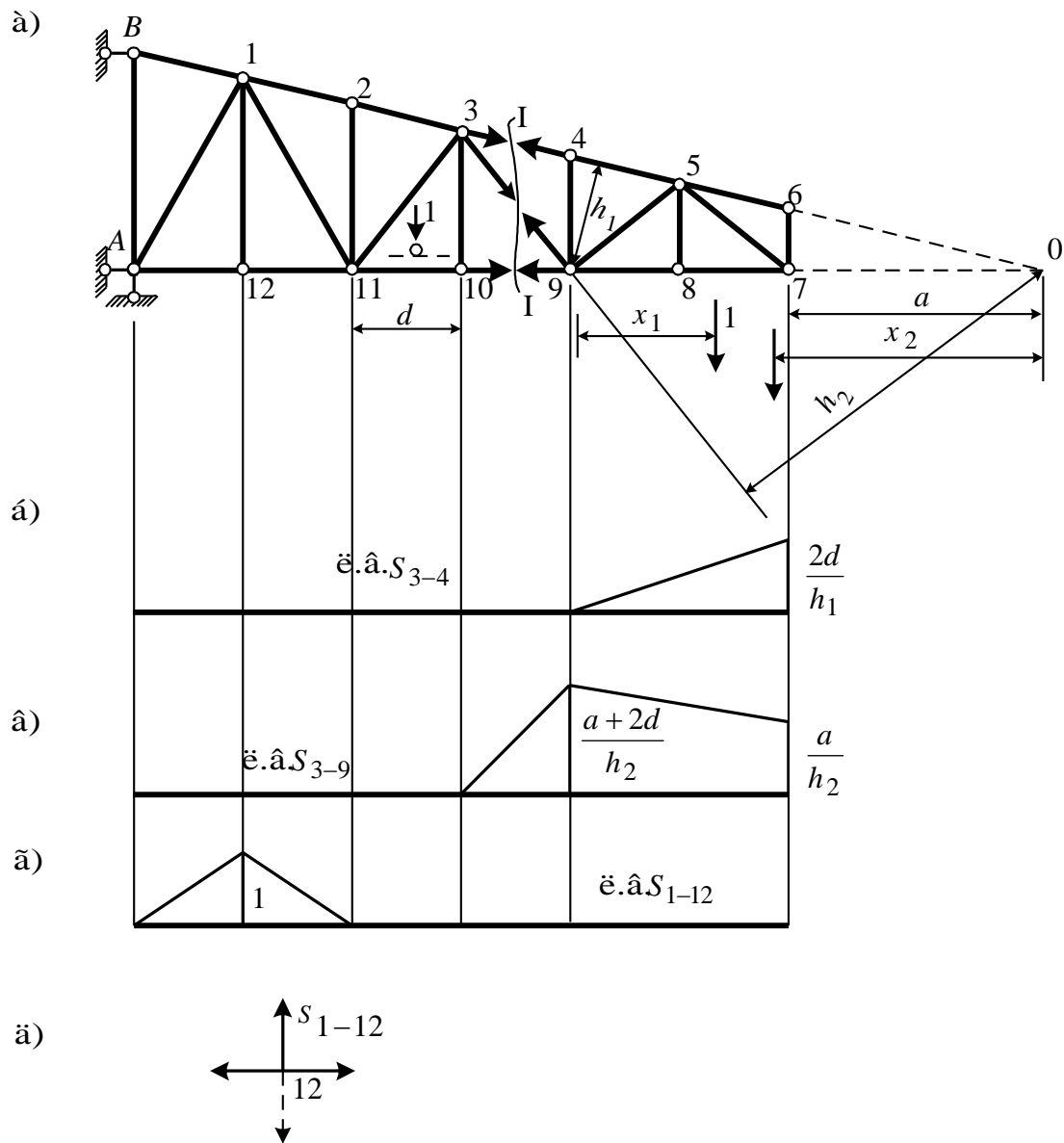


Рис. 3.11. Схема консольної ферми (а) і л.в.  $S_{3-4}$  (б), л. в.  $S_{3-9}$  (в), л.в.  $S_{1-12}$  (г)

**Лінія впливу зусилля**  $S_{3-4}$ . Для побудови лінії впливу скористаємося перерізом I-I. Моментна точка 9. Розсічена панель 10-9.

Вантаж на ділянці 10-А.

$$\sum M_9^{\text{пп}} = 0: \quad S_{3-4} h_1 = 0;$$

$$S_{3-4} = 0.$$

Вантаж на ділянці 9-7.

$$\sum M_9^{\text{пп}} = 0: \quad 1 \cdot x_1 - S_{3-4} h_1 = 0;$$

$$S_{3-4} = \frac{x_1}{h_1}.$$

Тепер неважко побудувати графік зусилля (рис. 3.11, б).

**Лінія впливу зусилля**  $S_{3-9}$ . Моментна точка 0. Розсічена панель 10-9.

Вантаж на ділянці 10-А (зліва від розсіченої панелі).

$$\sum M_0^{\text{пп}} = 0: \quad S_{3-9} h_2 = 0;$$

$$S_{3-9} = 0.$$

Вантаж на ділянці 9-7.

$$\sum M_0^{\text{пп}} = 0: \quad 1 \cdot x_2 - S_{3-9} h_2 = 0;$$

$$S_{3-9} = \frac{x_2}{h_2}.$$

Підставляючи в останню формулу  $x_2 = a$  і  $x_2 = (a + 2d)$ , побудуємо лінію впливу на ділянці 9-7. З'єднуючи ординату  $\frac{a + 2d}{h_2}$  з нульовою ординатою в точці 10, одержимо лінію впливу  $S_{3-9}$  (рис. 3.11, в).

**Лінія впливу зусилля**  $S_{1-12}$ . Цей графік побудуємо за допомогою методу визначення зусиль, що викладений у п. 3.2.1. Це метод вирізання вузлів. Розглянемо рівновагу вузла 12 (рис. 3.11, д). Вантаж  $F=1$  поза вузлом (точка А і ділянка 11-7):

$$S_{1-12} = 0.$$

Вантаж  $F=1$  у вузлі:

$$S_{1-12} = 1.$$

Графік зміни зусилля  $S_{1-12}$  показаний на рис. 3.11, г.



### 3.3.3. Лінії впливу в стержнях консольно-балкових ферм

Розглянемо консольно-балкову ферму (рис. 3.12, а) і проілюструємо особливості побудови ліній впливу, пов'язаних з конструкцією ферми.

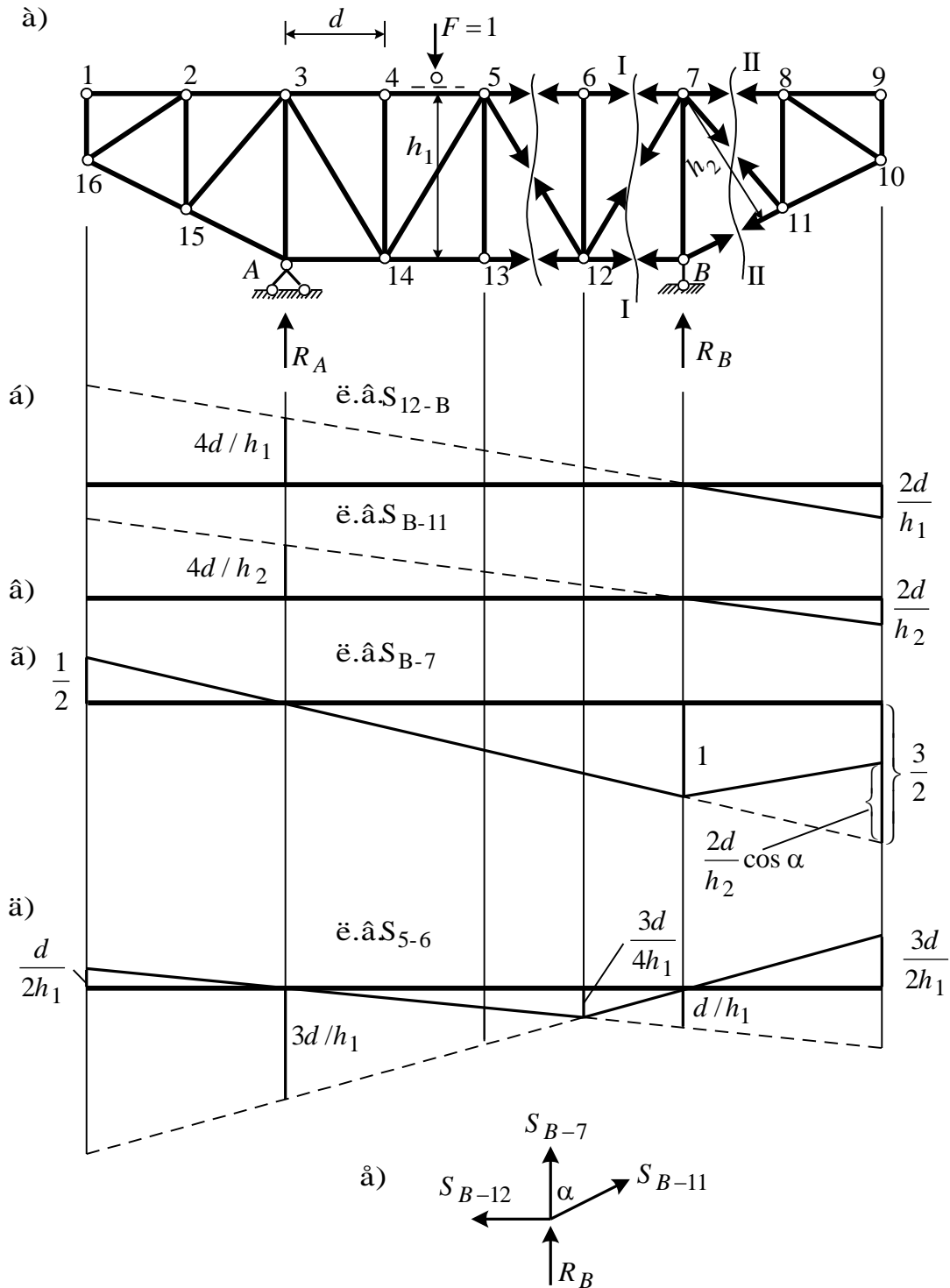


Рис. 3.12. Консольно-балкова ферма (а) і лінії впливу зусиль у стержнях 12-В (б); В-10 (в); В-7 (г); 5-6 (д)

**Лінія впливу зусилля**  $S_{12-B}$ . Моментна точка 7. Розсічена панель 6-7.

Вантаж  $F=1$  справа від розсіченої панелі (на ділянці 7-9).

$$\sum M_7^{\text{лів}} = 0: \quad R_A 4d - S_{12-B} h_1 = 0; \quad S_{12-B} = R_A \frac{4d}{h_1}.$$

Вантаж  $F=1$  зліва від розсіченої панелі.

$$\sum M_7^{\text{пр}} = 0: \quad S_{12-B} h_1 = 0; \quad S_{12-B} = 0.$$

Побудована лінія впливу показана на рис. 3.12, б.

**Лінія впливу зусилля**  $S_{B-11}$ . Моментна точка 7. Розсічена панель 7-8.

Вантаж  $F=1$  на ділянці (8-9).

$$\sum M_7^{\text{лів}} = 0: \quad R_A 4d - S_{B-11} h_2 = 0; \quad S_{B-11} = \frac{4d}{h_2} R_A.$$

Вантаж  $F=1$  на ділянці (7-1).

$$\sum M_7^{\text{пр}} = 0: \quad S_{B-11} h_2 = 0; \quad S_{B-11} = 0.$$

Лінія впливу зусилля  $S_{B-11}$  показана на рис. 3.12, в.

**Лінія впливу зусилля**  $S_{B-7}$ . Для побудови цієї лінії впливу застосуємо метод вирізання вузлів (див. п. 3.2.1). Вирізаємо вузол В (рис. 3.12, е).

Розглянемо рівновагу цього вузла:

$$\sum F_y = 0: \quad R_B + S_{B-7} + S_{B-11} \cos \alpha = 0;$$

$$S_{B-7} = -R_B - S_{B-11} \cos \alpha.$$

Шукана лінія впливу, як очевидно з отриманого виразу, дорівнює алгебраїчній сумі лінії впливу зусиль  $S_{B-11} \cos \alpha$  (рис. 3.12, в) і лінії впливу  $R_B$ .

Лінія впливу  $S_{B-7}$  показана на рис. 3.12, г.

**Лінія впливу зусилля**  $S_{5-6}$ . Моментна точка 12, розсічена панель 5-6.

Вантаж на ділянці 6-9.

$$\sum M_{12}^{\text{лів}} = 0: \quad R_A 3d + S_{5-6} h_1 = 0; \quad S_{5-6} = -R_A \frac{3d}{h_1}.$$

Вантаж на ділянці 6-1.

$$\sum M_{12}^{\text{пр}} = 0: \quad R_B d + S_{5-6} h_1 = 0; \quad S_{5-6} = -R_B \frac{d}{h_1}.$$

Лінія впливу зусилля  $S_{5-6}$  зображена на рис. 3.12, д.

### 3.3.4. Лінії впливу в стержнях шпренгельних ферм

Методика і порядок побудови ліній впливу зусиль у шпренгельних фермах практично такі самі, як і для ферм із простою решіткою. Проте у випадку ускладнень одержання простих рівнянь слід дотримуватися таких рекомендацій: задану ферму необхідно уявити у вигляді основної ферми і шпренгеля; лінії впливу зусиль у стержнях основної ферми будуються, розглядаючи тільки основну ферму; лінії впливу зусиль у стержнях шпренгеля утворюються розглядом окремо шпренгеля; лінії впливу в стержнях, що одночасно входять і в основну ферму, і у шпренгель, утворюються як сума ліній впливу в основному стержні і шпренгелі.

#### 3.3.4.1. Лінії впливу в стержнях ферм з одноярусними шпренгелями

Розглянемо ферму з одноярусними шпренгелями (рис. 3.13, а). Побудуємо лінію впливу в стержні, що одночасно належить і основній фермі, і шпренгелю. Це, наприклад, стержень 12-7. Відповідно до визначення

$$\text{л.в. } S_{12-7} = \text{л.в. } S_{2-7} + \text{л.в. } S_{12-7}^{\text{III}}.$$

Лінія впливу  $S_{2-7}$  побудована раніше (див. рис. 3.10, г, рис. 3.13, б). Основна ферма наведена там же (рис. 3.10, а). Для побудови лінії впливу  $S_{12-7}$  в шпренгелі розглянемо його (рис. 3.13, в). Як було зазначено раніше, шпренгель працює на місцеве навантаження. Тому, якщо вантаж  $F=1$  знаходиться у вузлі 8 і лівіше його, а також у вузлі 7 і правіше, то всі елементи шпренгеля нульові (тобто зусилля в цих елементах дорівнюють нулю). Звідси випливає, що точки 8 і 7 – нульові ординати лінії впливу  $S_{7-12}$ . Залишається тепер установити вантаж  $F=1$  у вузол 11 і знайти зусилля  $S_{7-12}$ . Для цього доведеться вирізати вузол 7 (рис. 3.13, г) і з рівняння рівноваги знайти  $S_{7-12}$ :

$$\frac{1}{2} + S_{7-12}^{\text{III}} \sin \alpha = 0; \quad S_{7-12}^{\text{III}} = \frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Тепер необхідно скласти обидва графіки. У результаті одержимо шукану лінію впливу (рис. 3.13, д).

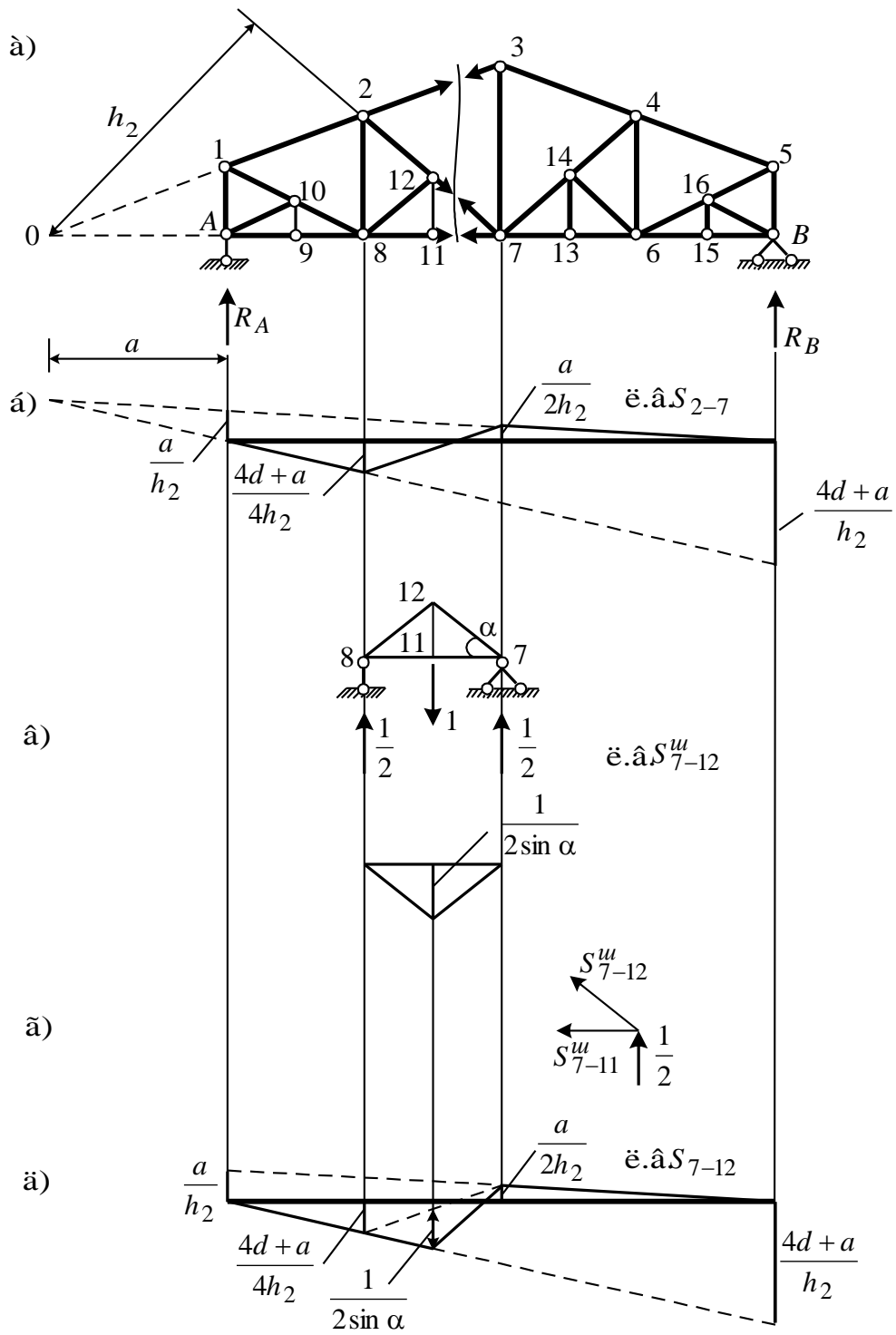


Рис. 3.13. Ферма з однаюрними шпренгелями (а) і лінії впливу л.в.  $S_{2-7}$  (б), л. в.  $S_{7-12}$  (д)

### 3.3.4.2. Лінії впливу зусиль у стійках ферм із двоярусними шпренгелями

Побудова ліній впливу зусиль в основних стійках, що знаходяться між двоярусними шпренгелями, має особливості: спочатку будують лінії впливу в основній фермі при їзді вантажу зверху і понизу, потім установлюють вантаж у вузлах вантажного пояса, і при кожному положенні вантажу аналізують роботу двоярусного шпренгеля. При положенні вантажу в основних вузлах шпренгелі не працюють, і тоді справедливі ординати лінії впливу, побудованої при їзді вантажу по вантажному поясу. При положенні вантажу в додатковому вузлі двоярусний шпренгель передає навантаження на протилежний пояс, і тоді справедливі ординати лінії впливу, побудованої при прямованні вантажу по протилежному поясу.

Розглянемо ферму з двоярусними шпренгелями (рис. 3.14, а). Основна ферма без шпренгелів показана на рис. 3.10, а.

**Лінія впливу зусилля  $S_{2-8}$ .**

Проводимо переріз I-I (рис. 3.14, а). Розсічені панелі: при їзді понизу 8-7; при їзді поверху 1-2; моментна точка О.

Їзда понизу. Вантаж на ділянці 7-В (справа від розсіченої панелі).

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: R_A a + S_{2-8}(a + d) = 0; \quad S_{2-8} = -R_A \frac{a}{(a + d)}.$$

Вантаж на ділянці 8-А (зліва від розсіченої панелі).

$$\sum M_0^{\text{пр}} = 0: R_B (4d + a) - S_{2-8}(a + d) = 0; \quad S_{2-8} = R_B \frac{(4d + a)}{(d + a)}.$$

Лінія впливу показана на рис. 3.14, б.

Їзда поверху. Розсічена панель 1-2. Вантаж справа від розсіченої панелі (ділянка 2-5):

$$S_{2-8} = -R_A \frac{a}{(a + d)}.$$

Вантаж зліва від розсіченої панелі (у точці 1):

$$S_{2-8} = R_B \frac{(4d + a)}{(d + a)}.$$

Лінія впливу  $S_{2-8}$  при їзді поверху показана на рис. 3.14, в.

Для побудови лінії впливу  $S_{2-8}$  в заданій фермі (зі шпренгелями) поставимо вантаж у кожний вузол вантажного пояса: якщо вантаж розташований у точках А, 8, 7, 6, В, шпренгелі не працюють, і, отже, справедливі ординати при їзді “понизу”, якщо вантаж розташований у вузлах 9, 11, 13, 15, працює шпренгель і, отже, справедливі ординати при їзді поверху. Графік лінії впливу  $S_{2-8}$  в заданій фермі показаний на рис. 3.14, г.

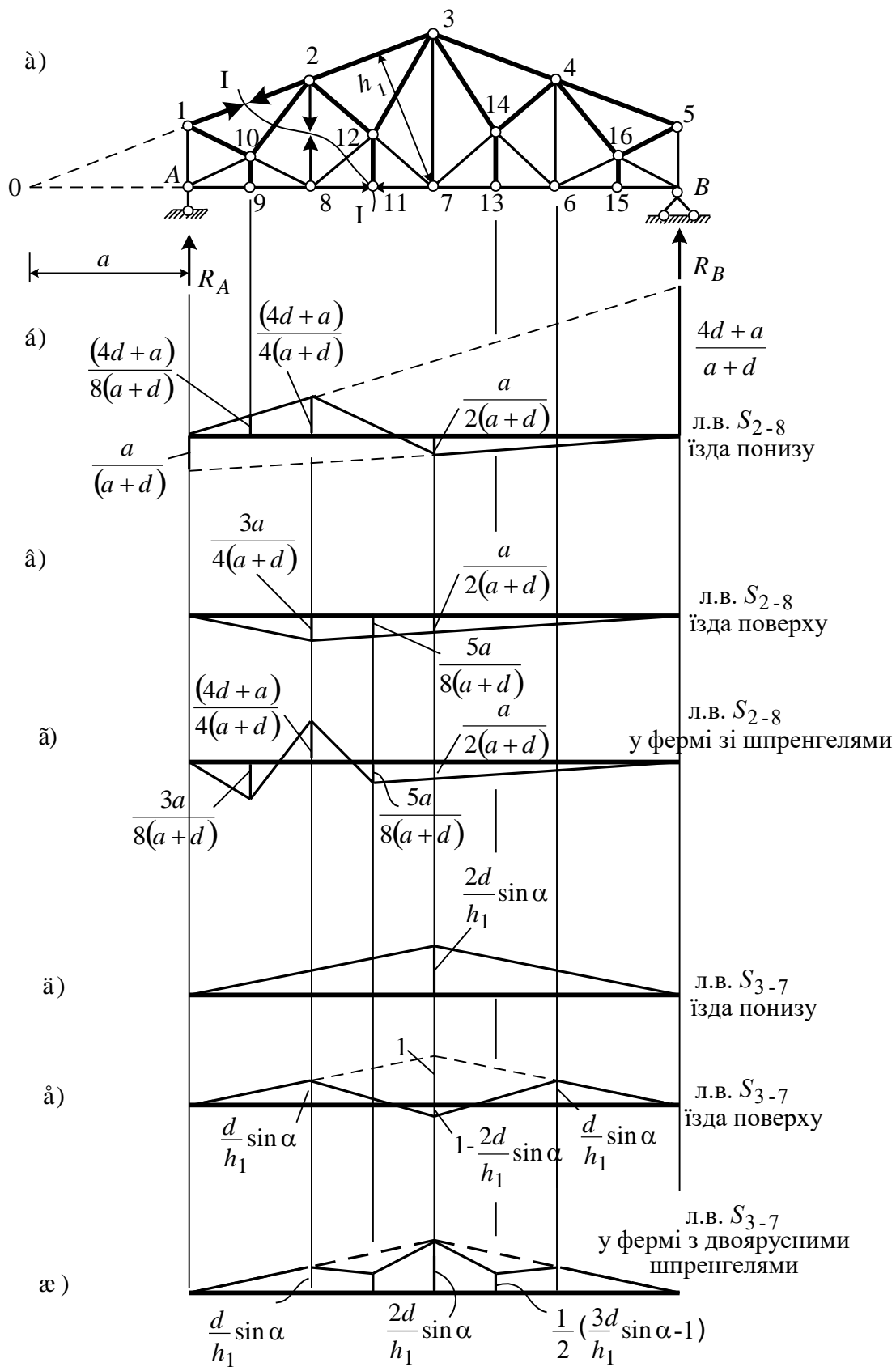


Рис. 3.14. Ферма з двоярусними шпренгелями (а) і лінії впливу (б), (в), (г), (д), (е), (ж)

**Лінія впливу зусилля  $S_{3-7}$ .** Для побудови графіка застосовуємо метод вирізання вузлів. При їзді понизу графік цього зусилля побудований у п. 3.3.1, рис. 3.10, в (рис. 3.14, д).

При їзді поверху отримане в п. 3.3.1 рівняння лінії впливу

$$S_{3-7} = -2S_{3-2} \sin \alpha$$

буде справедливим при розташуванні вантажу поза вузлами (1-2 і 4-5). Якщо вантаж знаходиться у вузлі "3", то

$$S_{3-7} = -2S_{3-2} \sin \alpha - 1.$$

Відповідний графік при їзді поверху показаний на рис. 3.14, е. Остаточний графік – на рис. 3.14, ж.

### 3.3.5. Приклад розрахунку ферми на нерухоме навантаження аналітично і за лініями впливу

#### 3.3.5.1. Визначення зусиль у стержнях ферм аналітичним методом

Для заданої ферми (рис. 3.15) потрібно визначити зусилля в стержнях 17-8, 3-15, 15-22, 21-22, 7-8, 24-9 від нерухомого навантаження; побудувати лінії впливу для цих же стержнів; визначити зусилля за лініями впливу і порівняти з результатом аналітичного розрахунку.

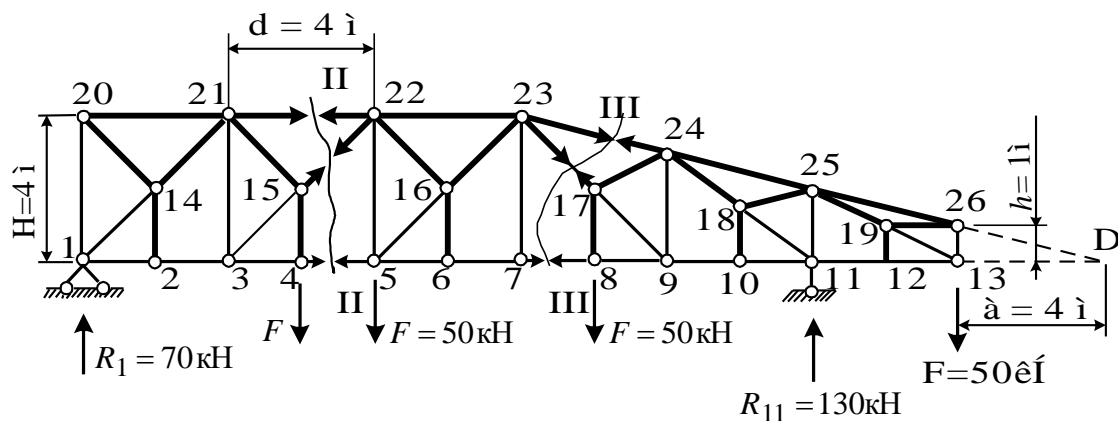


Рис. 3.15. Схема заданої ферми

З заданої ферми виділимо основну ферму (рис. 3.16, а) і шпренгелі (рис. 3.16, б, в). У даному випадку вантажним поясом є нижній, а спираються шпренгелі на основні вузли верхнього пояса. Тому в основній фермі навантаження, прикладене у вузлах 4 і 8, передане на вузли 21, 22, 23, 24.

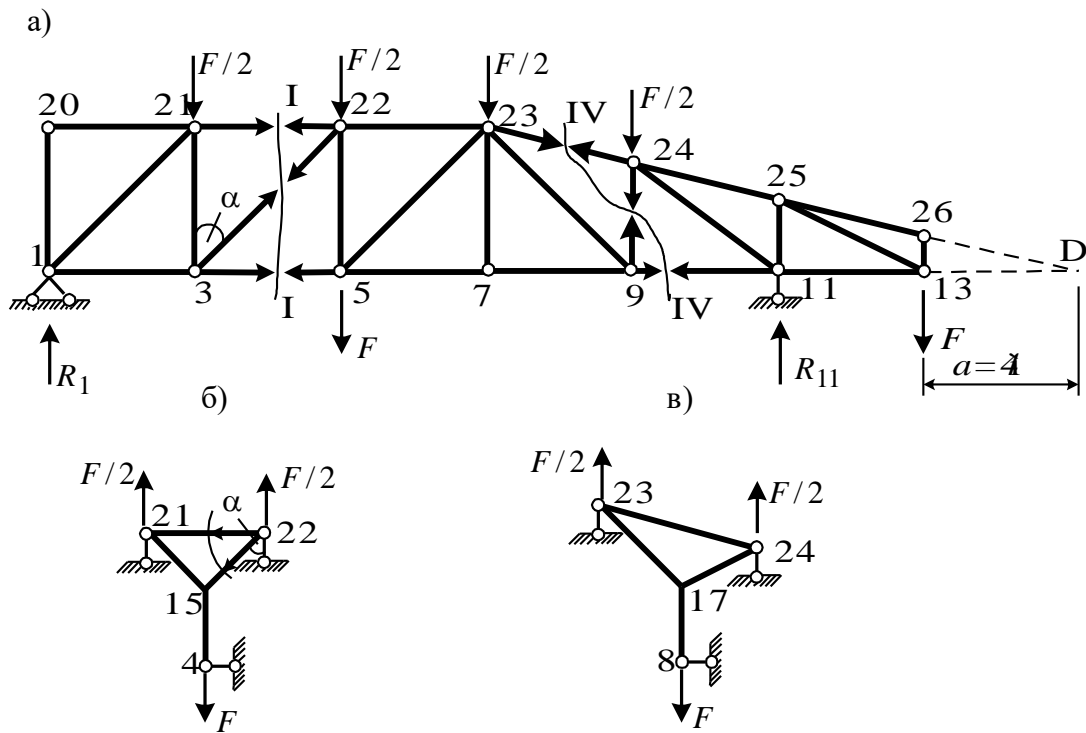


Рис. 3.16. Основна ферма (а) і навантажені шпренгелі (б) і (в)

**Зусилля в стержні 17-8.** Стержень є елементом шпренгеля (рис. 3.16, в). У даному випадку можна розглянути рівновагу вузла 8. Складаючи рівняння проєкцій сил на вертикальну вісь, одержимо

$$S_{8-17} = F = 50 \text{ кН.}$$

**Зусилля в стержні 3-15.** Стержень 3-15 є елементом основної ферми 3-22. Тому розглянемо основну ферму. Розрізаємо її перерізом I-I (див. рис. 3.16, а). Складемо рівняння проєкцій на вертикальну вісь для лівої частини ферми:

$$\sum Y_{\text{лів}} = 0: \quad R_1 - \frac{F}{2} + S_{3-22} \cos \alpha = 0,$$

звідки

$$S_{3-22} = \frac{-R_1 + F/2}{\cos \alpha} = \frac{-70 + 50/2}{0,707} = -63,65 \text{ кН.}$$

**Зусилля в стержні 15-22.** Стержень належить до основної ферми і шпренгеля. Зусилля в ньому визначимо методом перерізів. Переріз II-II на заданій фермі показаний на рис. 3.15.

Складемо рівняння проєкції:

$$\sum Y_{\text{лів}} = 0: \quad R_1 - F + S_{15-22} \cos \alpha = 0,$$



звідки

$$S_{15-22} = \frac{-R_1 + F}{\cos \alpha} = \frac{-70 + 50}{0,707} = -28,29 \text{ кН.}$$

Зусилля в цьому стержні можна підрахувати і як суму зусиль, отриманих окремо в основній фермі (елемент 3-22, рис. 3.16, а) і окремо в шпренгелі (елемент 15-22, рис. 3.16, а).

Зусилля в основній фермі визначене раніше (див. переріз I-I на основній фермі, рис. 3.16, а):  $S_{3-22} = -63,65 \text{ кН}$ . Для визначення зусилля в шпренгелі розглянемо рівновагу вузла 22 двоярусного шпренгеля (рис. 3.16, б):

$$\sum Y = 0: \quad \frac{F}{2} - S_{15-22}^{\text{III}} \cos \alpha = 0;$$

$$S_{15-22}^{\text{III}} = \frac{F}{2 \cos \alpha} = \frac{50}{2 \cdot 0,707} = 35,36 \text{ кН};$$

$$S_{15-22} = S_{3-22} + S_{15-22}^{\text{III}} = -63,65 + 35,36 = -28,29 \text{ кН.}$$

**Зусилля в стержні 21-22.** Стержень 21-22 входить і в основну ферму, і у шпренгель. Знайдемо зусилля в цьому стержні як елементі основної ферми (рис. 3.16, а, переріз 1-1):

$$\sum M_3^{\text{ЛІВ}} = 0: \quad R_1 d + S_{21-22} H = 0,$$

звідси

$$S_{21-22} = -\frac{R_1 d}{H} = -70 \text{ кН.}$$

Тепер визначимо зусилля в цьому ж стержні, як елементі шпренгеля (див. рис. 3.16, б):

$$\sum X = 0 \quad S_{21-22}^{\text{III}} + S_{15-22}^{\text{III}} \sin \alpha = 0:$$

$$S_{21-22}^{\text{III}} = -S_{15-22}^{\text{III}} \sin \alpha = -35,36 \cdot 0,707 = -25 \text{ кН.}$$

Сумарне зусилля

$$S_{21-22} = S_{21-22}^{\text{Ф}} + S_{21-22}^{\text{III}} = -70 - 25 = -95 \text{ кН.}$$

**Зусилля в стержні 7-8.** Цей стержень входить тільки в основну ферму. Зусилля в ньому можна визначити, розглядаючи або задану ферму (рис. 3.15), або основну (стержень 7-9, рис. 3.16, а). Розрізаємо задану

ферму перерізом III-III (див. рис. 3.15). Складемо рівняння моментів щодо точки 23:

$$\sum M_{23}^{\text{прав}} = 0: \quad F \cdot 3d - R_{11} \cdot 2d + F \frac{d}{2} + S_{7-8}H = 0;$$

$$S_{7-8} = \frac{-F \cdot 3d + R_{11} \cdot 2d - F \frac{d}{2}}{H} = \frac{-50 \cdot 12 + 130 \cdot 8 - 50 \cdot 2}{4} = 85 \text{ кН.}$$

**Зусилля в стержні 24-9.** Зусилля в цьому стержні визначимо, розглядаючи основну ферму (переріз IV-IV на рис. 3.16, а), тому що він належить тільки основній фермі. Розсікти ж задану ферму, розсікаючи тільки три стержні, не є можливим (див. рис. 3.15).

Складемо рівняння моментів відносно точки D перетинання поясів (рис. 3.15 і рис. 3.16, а):

$$\sum M_D^{\text{прав}} = 0: \quad S_{24-9}(2d + a) + \frac{F}{2}(2d + a) + Fa - R_{11}(a + d) = 0;$$

$$S_{24-9} = \frac{R_{11}(a + d) - Fa - \frac{F}{2}(2d + a)}{(2d + a)} = \frac{130 \cdot 8 - 50 \cdot 4 - 25 \cdot 12}{12} = 45 \text{ кН.}$$

### 3.3.5.2. Визначення зусиль у стержнях ферм за лініями впливу

**Лінія впливу зусилля  $S_{8-17}$ .** Стержень 8-17 є елементом шпренгеля і працює тільки при русі вантажу в межах панелі 7-8-9. Розглянемо рівновагу вузла 8 (рис. 3.17, а). При положенні вантажу  $F=1$  у вузлі 8

$$\sum Y = 0; \quad S_{8-17} - 1 = 0; \quad S_{8-17} = 1.$$

Вантаж  $F=1$  знаходиться поза вузлом (ділянки: 9-13, 7-1):

$$\sum Y = 0: \quad S_{8-17} = 0.$$

Знайдені ординати лінії впливу з'єднуємо прямими лініями (рис. 3.17, в).

Знайдемо зусилля  $S_{8-17}$  за побудованою лінією впливу. У вузлі 8 діє сила  $F=50$  кН (див. рис. 3.15). Відповідно до формули (2.11)

$$S_{8-17} = 50 \cdot 1 = 50 \text{ кН.}$$

**Лінія впливу зусилля  $S_{3-15}$ .** Стержень 3-15 є елементом основної ферми. Складемо рівняння проєкцій на вертикальну вісь. Межами розсіченої панелі є вузли 3 і 5 (рис. 3.17, б). Вантаж знаходиться ліворуч від вузла 3. Розглянемо праву частину ферми:

$$\sum Y^{\text{прав}} = 0: \quad R_{11} - S_{3-22} \cos \alpha = 0; \quad S_{3-22} = \frac{1}{\cos \alpha} R_{11} = 1,41 R_{11}.$$

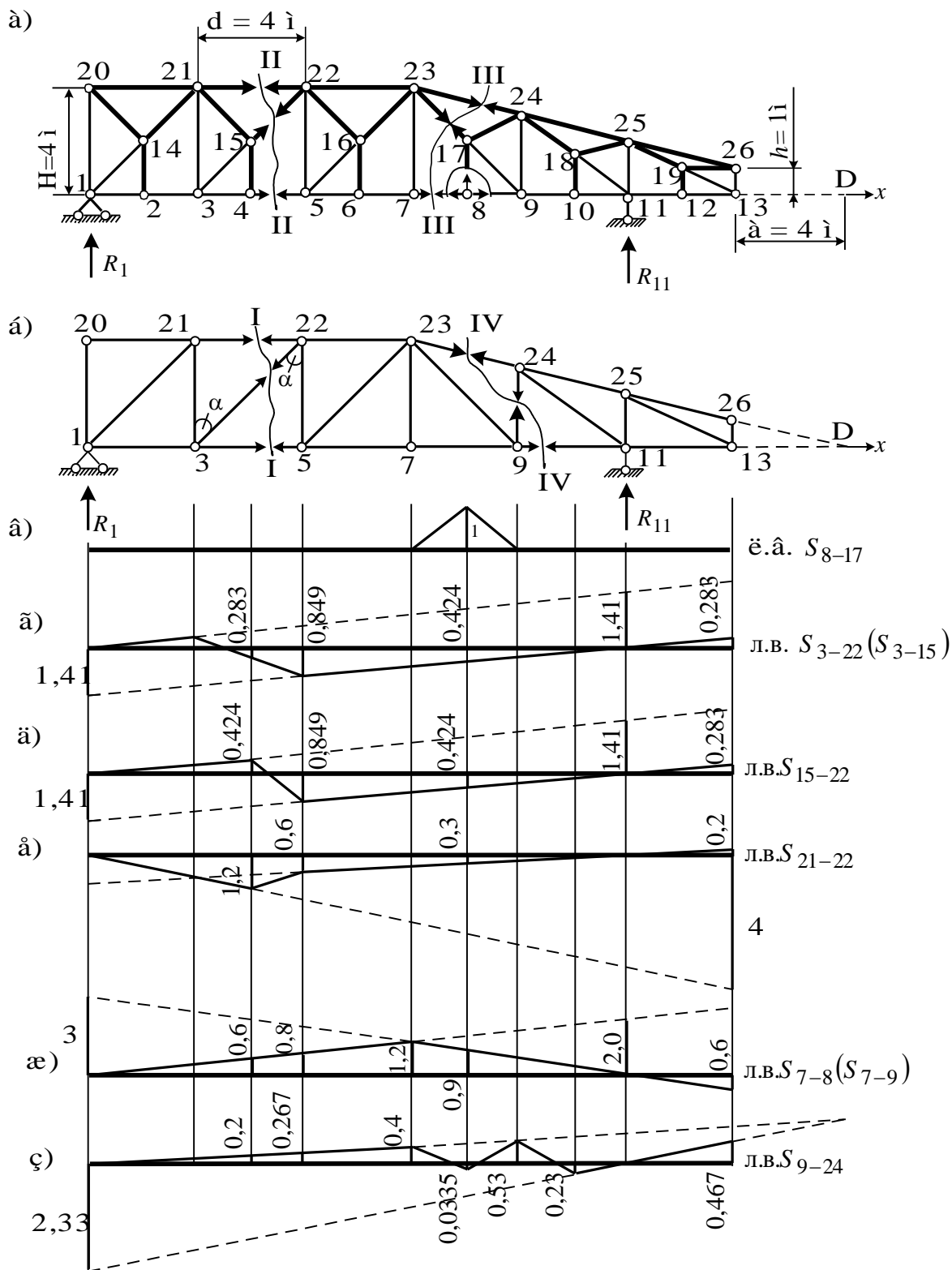


Рис. 3.17. Лінії впливу в стержнях ферм: а – задана шпренгельна ферма; б – основна ферма; в, г, д, е, ж, з – лінії впливу

Вантаж знаходиться справа від вузла 5. Розглянемо ліву частину ферми:

$$\sum Y^{\text{лів}} = 0: R_1 + S_{3-22} \cos \alpha = 0, \quad S_{3-22} = -1,41R_1.$$

У цьому випадку гілки лінії впливу паралельні (див. рис. 3.17, г).

Визначимо зусилля  $S_{3-22}$  ( $S_{3-15}$ ) за лінією впливу від нерухомого навантаження (рис. 3.15), кН,

$$S_{3-22} = 50(-0,283 - 0,849 - 0,424 + 0,283) = -63,65,$$

що збігається зі значенням, отриманим аналітично.

**Лінія впливу зусилля  $S_{15-22}$ .** Ця лінія впливу може бути побудована як сума ліній впливу в основному стержні 3-22 і у шпренгелі 15-22 (рис. 3.17, д). Але в даному випадку можна розсікти задану ферму перерізом II-II (рис. 3.17, а). Тут межами розсіченої панелі є вузли 4 і 5. Записуючи рівняння лівої й правої гілок лінії впливу, переконуємося, що вони збігаються з рівняннями для лінії впливу  $S_{3-22}$ . Розходження буде тільки в тому, що ліва пряма буде справедливо до вузла 4 (рис. 3.17, а).

Зусилля  $S_{15-22}$  за лінією впливу від нерухомого навантаження, кН,

$$S_{15-22} = 50(0,424 - 0,849 - 0,424 + 0,283) = -28,30$$

збігається з аналітичним рішенням ( $S_{15-22} = -28,29$  кН).

**Лінія впливу зусилля  $S_{21-22}$ .** Для її побудови виберемо метод перерізів (переріз II-II на заданій фермі, рис. 3.17, а). Запишемо рівняння моментів щодо точки 3. Через те що стержень 21-22 належить і до основної ферми і до шпренгеля, межами розсіченої панелі є вузли 4 і 5.

Вантаж  $F=1$  знаходиться зліва від вузла 4 (на ділянці 4-1):

$$\sum M_3^{\text{прав}} = R_{11} 4d + S_{21-22} H = 0, \quad S_{21-22} = -4R_{11}.$$

Вантаж  $F=1$  знаходиться справа від вузла 5 (на ділянці 5-13):

$$\sum M_3^{\text{лів}} = R_1 d + S_{21-22} H = 0, \quad S_{21-22} = -R_1.$$

Гілки лінії впливу перетинаються під моментною точкою 3 (рис. 3.17, е).

Зусилля  $S_{21-22}$  за лінією впливу дорівнює, кН,

$$S_{21-22} = 50(-1,2 - 0,6 - 0,3 + 0,2) = -95,$$

що збігається з аналітичним рішенням (див. п. 3.3.5.1).

**Лінія впливу зусилля  $S_{7-8}$ .** Проведемо переріз III-III на заданій фермі (див. рис. 3.17, а). Запишемо рівняння моментів відносно точки 23.

Через те що стержень відноситься до основної ферми, межами розсіченої панелі будуть вузли 7 і 9.

Вантаж знаходиться зліва від вузла 7 (на ділянці 7-1):

$$\sum M_{23}^{\text{прав}} = R_{11} 2d - S_{7-8} H = 0, \quad S_{7-8} = 2R_{11}.$$

Вантаж знаходиться справа від вузла 9 (на ділянці 9-13):

$$\sum M_{23}^{\text{лів}} = R_1 3d - S_{7-8} H = 0, \quad N_{7-8} = 3R_1.$$

Вид лінії впливу  $S_{7-8}$  показаний на рис. 3.17, ж.

Зусилля  $S_{7-8}$  за лінією впливу дорівнює, кН,

$$N_{7-8} = 50(0,6 + 0,8 + 0,9 - 0,6) = 85,$$

що збігається з аналітичним рішенням (п. 3.3.5.1).

**Лінія впливу зусилля  $S_{9-24}$**  (рис. 3.17, з). Спочатку побудуємо її в основній фермі при їзді вантажу поверху і понизу. Для цього проведемо переріз IV-IV (див. рис. 3.17, б) і запишемо рівняння моментів щодо точки D. Рівняння будуть однаковими і при їзді поверху, і при їзді понизу. Але при їзді поверху ліва гілка справедлива до вузла 23, права – до вузла 24. При їзді понизу – ліва до вузла 9, права – до вузла 11.

Вантаж знаходиться зліва від розсіченої панелі:

$$\sum M_D^{\text{прав}} = R_{11}(a + d) - S_{9-24}(2d + a) = 0,$$

звідси  $S_{9-24} = 0,667R_{11}.$

Вантаж знаходиться справа від розсіченої панелі:

$$\sum M_D^{\text{лів}} = R_1(6d + a) + S_{9-24}(2d + a) = 0,$$

звідси  $S_{9-24} = -2,333R_1.$

Гілки лінії впливу проведені пунктирними лініями. Вони перетинаються над точкою D. Тепер установимо вантаж у вузлах панелей заданої ферми. Якщо вантаж знаходиться в основних вузлах, тобто 7, 9, 11, шпренгелі не працюють. Тоді справедливі ординати лінії впливу, побудованої при їзді понизу. При положенні вантажу в додаткових вузлах – 8, 10 – працюють шпренгелі та навантажують вузли верхнього пояса. У цьому випадку будуть справедливі ординати лінії впливу, побудовані при їзді поверху.

Зусилля  $S_{9-24}$  за лінією впливу, кН,

$$S_{9-24} = 50(0,2 + 0,267 - 0,0335 + 0,467) = 45,02.$$

Аналітичне рішення, отримане в п. 3.3.5.1, дорівнює

$$S_{9-24} = 45 \text{ кН.}$$

## РОЗДІЛ 4

### РОЗПІРНІ СИСТЕМИ

На відміну від систем балкового типу, у розпирних системах при вертикальному навантаженні виникають горизонтальні опорні реакції, що називаються розпором. До цих систем належать тришарнірні арки й рами, аркові ферми, комбіновані системи, в яких диски балок або ферм утримуються ланцюгом (тросом).

#### 4.1. Розрахунок тришарнірної арки на нерухоме навантаження

Тришарнірна арка являє собою статично визначну систему. Вона складається з двох напіварок АС і ВС (рис. 4.1), шарнірно пов'язаних з опорами А, В і між собою. Опорні шарніри називаються п'ятковими, а середній – ключовим. Різновидом тришарнірної арки є тришарнірна арка з затягуванням (рис. 4.2). Системи, що включають у себе в якості складової частини тришарнірну арку, зображені на рис. 4.3, 4.4, 4.5.

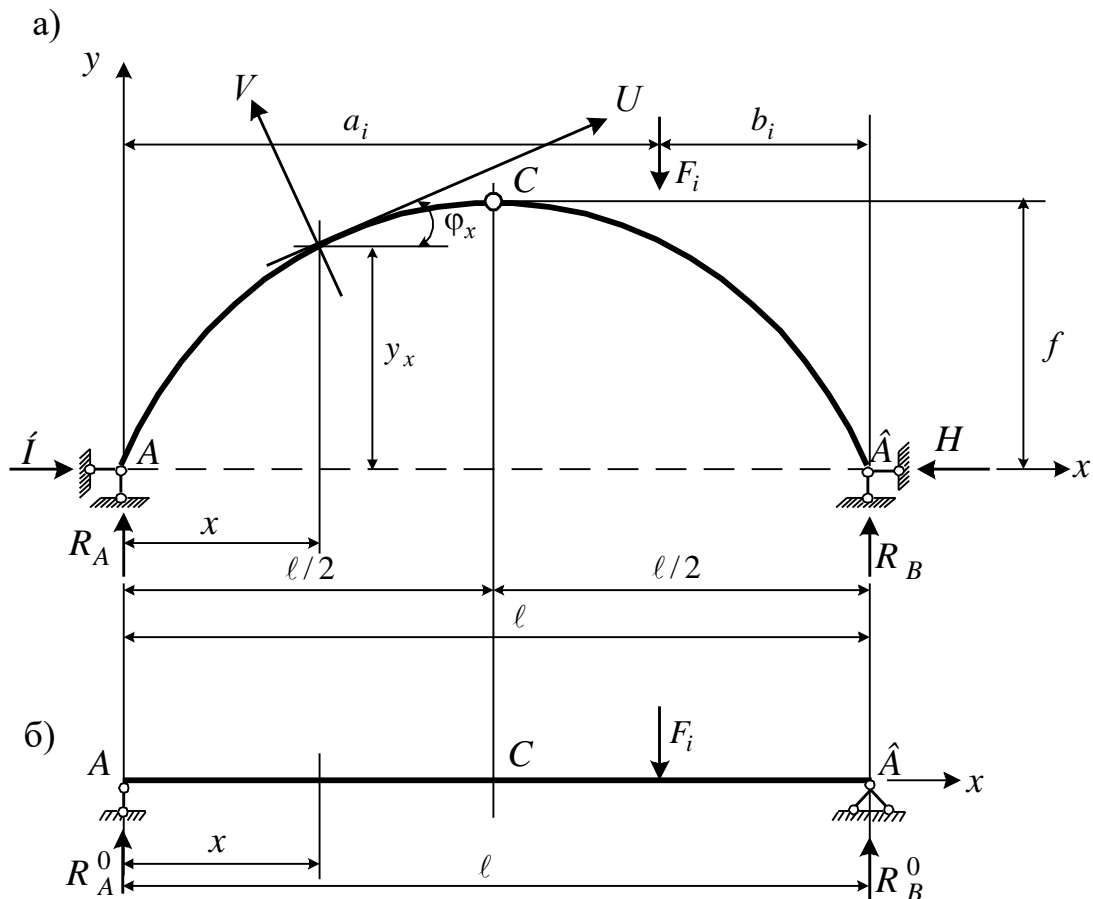


Рис. 4.1. Розрахункова схема тришарнірної арки

Для аналітичного розв'язання задачі обмежимося випадком вертикального навантаження. Для визначення вертикальних опорних реакцій  $R_A$  і  $R_B$  складемо рівняння рівноваги вигляду

$$\sum M_A = 0 \text{ і } \sum M_B = 0.$$

У результаті одержимо

$$R_A = R_A^0 = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i b_i, \quad R_B = R_B^0 = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i a_i. \quad (4.1)$$

У цих формулах:  $\ell$  – прогон арки;  $F_i$  – зосереджена сила, прикладена в довільному перерізі арки;  $a_i, b_i$  – відповідно відстань від зосереджених сил до лівої  $A$  та правої  $B$  опор арки;  $i=1, 2, \dots, n$  – число зосереджених сил. Розподілене навантаження, якщо таке є, приводиться до рівнодіючої:  $F_i = qc_i$ , де  $c_i$  – протяжність розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$ . Формули (4.1) показують, що реакції  $R_A$  і  $R_B$  нічим не відрізняються від тих вертикальних реакцій, що утворилися б від заданого навантаження, якби тришарнірна система була замінена простою балкою, обпертою в точках  $A$  і  $B$  при відсутності середнього шарніра (рис. 4.1, б). Зусилля, отримані в цій балці, надалі будемо називати балковими.

З рівняння рівноваги  $\sum M_C^{\text{лів}} = 0$  (або  $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$ ) знайдемо горизонтальні опорні реакції  $H$ . При вертикальному навантаженні горизонтальні опорні реакції на лівій  $A$  та правій  $B$  опорах балки рівні між собою і спрямовані в протилежні боки:

$$H_A = H_B = H = \frac{M_C^0}{f}, \quad (4.2)$$

де  $M_C^0$  – згинальний момент від заданих  $F_i$  сил у перерізі  $C$  простої балки – балковий згинальний момент.

У довільному перерізі  $x$  арки згинальний момент, поперечна і поздовжня сили відповідно рівні:

$$M_x = M_x^0 - Hy_x; \quad (4.3)$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \quad (4.4)$$

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x). \quad (4.5)$$

Аналіз формул (4.3) – (4.5) показує, що згинальний момент і поперечна сила в арці менші, ніж у балці з таким самим прогоном і навантаженням (рис. 4.1, б). Причиною цього є розпір  $H$ . Зменшення згинальних моментів і поперечних сил досягається ціною появи нового зусилля  $N$  (4.5), відсутнього в балці.

Нагадаємо, що поперечна сила (4.4) у перерізі криволінійного бруса дорівнює проекції всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на вісь  $V$  (рис. 4.1, а), а поздовжня сила (4.5) – проекція всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на вісь  $U$  (рис. 4.1, а).

У формулах (4.3) – (4.5) позначено:  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$  – балкові (рис. 4.1, б) згинальний момент і поперечна сила в перерізі  $x$ ;  $\varphi_x$  – кут між дотичною, проведеною до осі арки в перерізі  $x$  (вісь  $U$  на рис. 4.1, а), і горизонталлю;

$$\sin \varphi_x = \frac{\operatorname{tg} \varphi_x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}} ; \quad (4.6)$$

$$\cos \varphi_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}} ; \quad (4.7)$$

$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dy}{dx}$  – похідна функції  $y$ , що описує вісь арки; наприклад, якщо вісь арки обкреслена за квадратною параболою

$$y = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - x) x ,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x) ;$$

якщо рівняння осі арки являє собою коло

$$y = \sqrt{(2R - x)x} ,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{R - x}{\sqrt{(2R - x)x}} .$$

## 4.2. Особливості розрахунку тришарнірної арки з затягуванням

У тришарнірній арці з затягуванням (рис. 4.2, а), тобто з додатковим стержнем, що стягує обидві половини арки, розпір виникає й погашається усередині самої споруди, не передаючись на опори. Така конструкція поєднує легкість опор простої балки з ефективністю тришарнірної арки (під ефективністю розуміється відзначений раніше факт зменшення згинальних моментів і поперечних сил в арці порівняно з балкою).



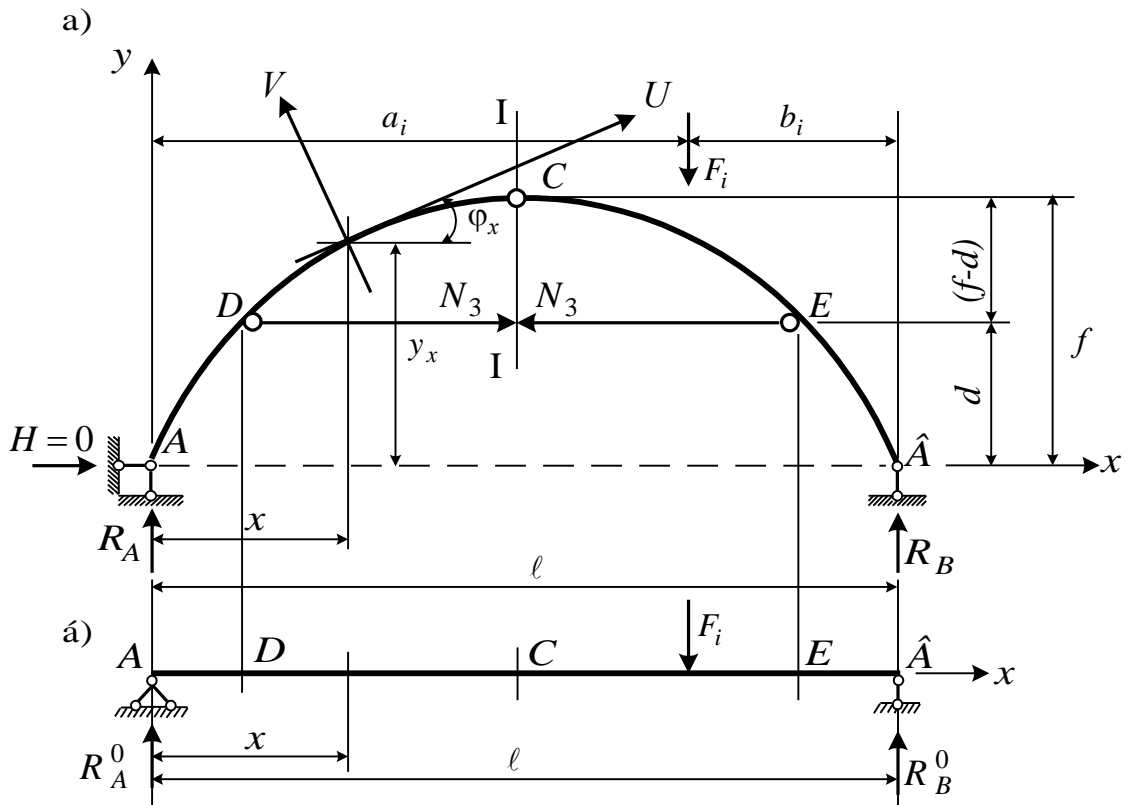


Рис. 4.2. Розрахункова схема тришарнірної арки з затягуванням

Зусилля в затягуванні одержимо, узявши суму моментів лівих або правих сил щодо шарніра  $C$ . Для цього випадку на рис. 4.2, а показаний переріз I-I, проведений через шарнір  $C$  і затягування:

$$N_3 = \frac{M_C^0}{(f - d)}, \quad (4.8)$$

де  $d$  – відстань від лінії, що з'єднує опори  $A$  і  $B$ , до затягування;  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$ ,  $N_x^0$  – балкові зусилля (рис. 4.2, б). Згинальний момент, поперечна і поздовжня сили в перерізах визначаються за нижченаведеними і отриманими з них формулами залежно від розташування перерізу.

Переріз на ділянках  $AD$  і  $BE$  (див. рис. 4.2, а):

$$M_x = M_x^0; \quad (4.9)$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x; \quad (4.10)$$

$$N_x = -Q_x^0 \sin \varphi_x. \quad (4.11)$$

Переріз на ділянці  $DCE$  (рис. 4.2, а):

$$M_x = M_x^0 - N_3(y_x - d); \quad (4.12)$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - N_3 \sin \varphi_x; \quad (4.13)$$

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi_x + N_3 \cos \varphi_x). \quad (4.14)$$

### 4.3. Розрахунок систем, що включають тришарнірну арку

Розглянемо системи, що включають у себе в якості складової частини тришарнірні арки. На рис. 4.3, а показана система, складена з вертикальних стійок і аркової частини, жорстко з ними пов'язаної.

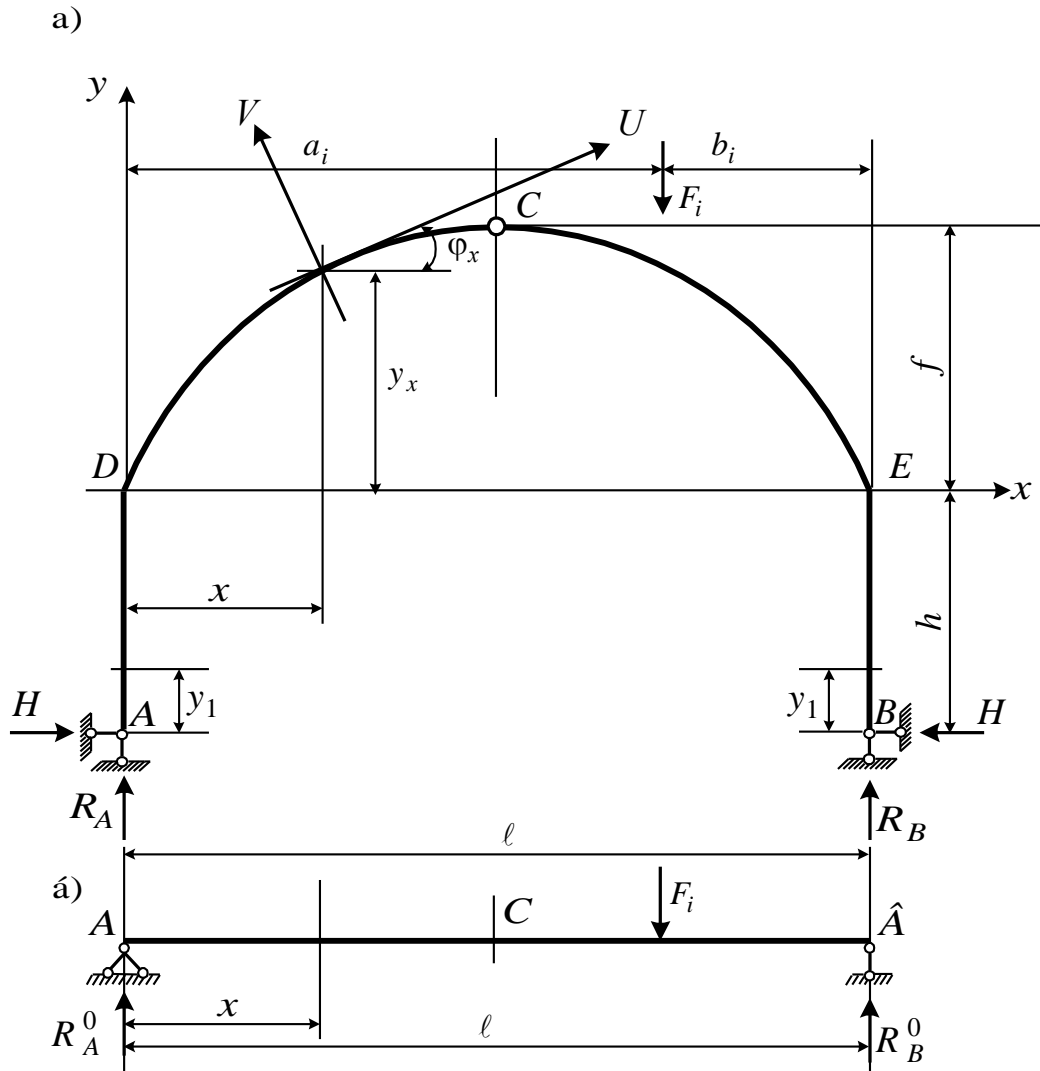


Рис. 4.3. Розрахункова схема тришарнірної системи

Вертикальні опорні реакції в такій споруді визначаються за формулами (4.1), тобто як у простій балці (рис. 4.3, б). Горизонтальні опорні реакції знаходяться таким чином:

$$H = \frac{M_C^0}{f + h}, \quad (4.15)$$

де  $h$  – висота стійки.

Формула (4.15) отримана з рівнянь рівноваги:  $\sum M_C^{\text{лів}} = 0$  або  $\sum M_C^{\text{пр}} = 0$ . Згинальний момент, поперечна і поздовжня сили в довільному перерізі аркової частини визначаються з залежностей, аналогічних (4.3) – (4.5), тобто

$$\begin{aligned}
 M_x &= M_x^0 - H(y_x + h); \\
 Q_x &= Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \\
 N_x &= -(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x).
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Визначимо внутрішні сили у вертикальних елементах.

На ділянці  $AD$  ( $x_1 = 0, 0 \leq y_1 \leq h$ ) (місцева система координат у точці  $A$ )

$$M_y = -Hy_1; \tag{4.17}$$

$$Q_y = -H; \tag{4.18}$$

$$N_y = -R_A. \tag{4.19}$$

На ділянці  $BE$  ( $x_1 = \ell, 0 \leq y_1 \leq h$ )

$$M_y = Hy_1; \quad Q_y = H; \quad N_y = -R_B. \tag{4.20}$$

Правила знаків для згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил при розгляді вертикальних елементів системи прийняті такими: якщо сумарний момент усіх сил, розташованих зліва від перерізу, спрямований за годинниковою стрілкою, то він вважається додатним (для правих сил додатний момент спрямований проти годинникової стрілки); поперечна сила вважається додатною, якщо зліва від перерізу вона спрямована нагору, а справа – униз; поздовжня сила додатна, якщо вона спрямована від перерізу. Поняття “низ”, “верх”, “зліва”, “справа” залежать від спостерігача. Тому умовимося “дивитися” на вертикальні елементи справа-наліво. Тепер стануть зрозумілими знаки  $M_y, Q_y, N_y$  у формулах (4.17) – (4.20).

На закінчення цього підрозділу розглянемо систему, показану на рис. 4.4, а.

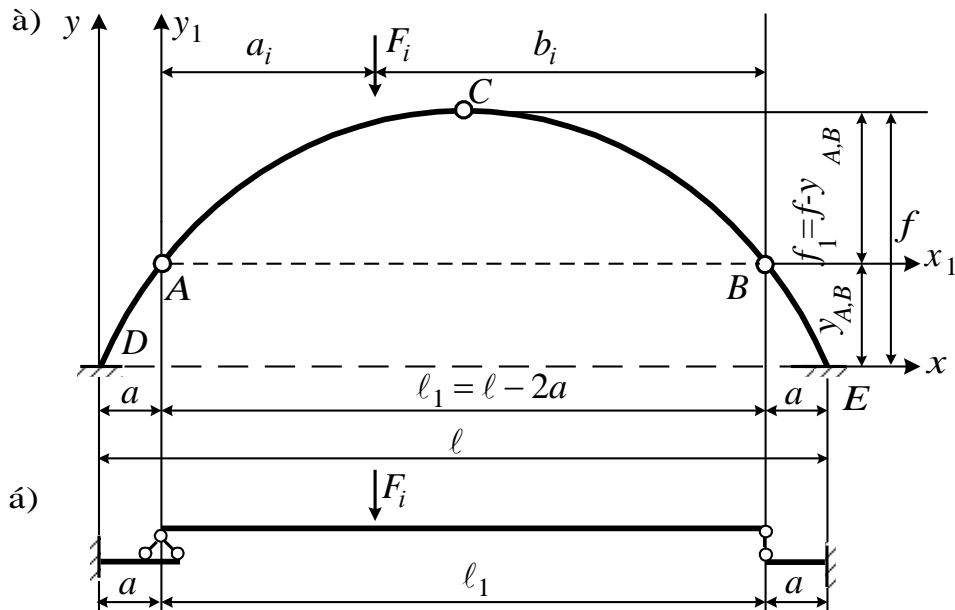


Рис. 4.4. Розрахункова схема тришарнірної системи

Система складається з тришарнірної арки  $ACB$ , що спирається на консолях  $DA$  і  $EB$ . Схема взаємодії елементів системи показана на рис. 4.5.

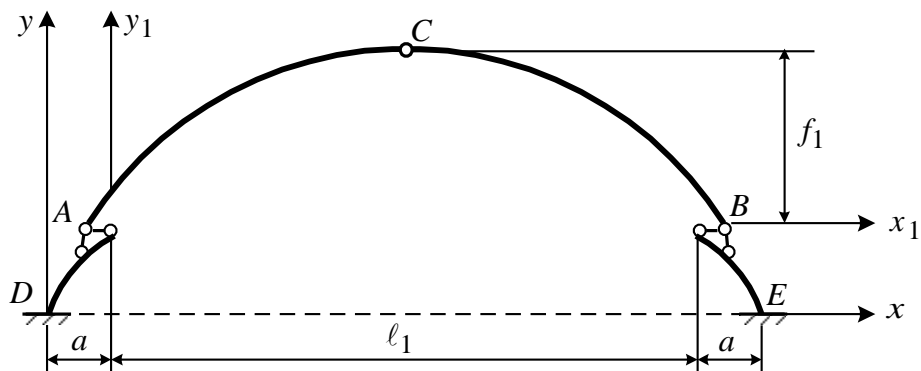


Рис. 4.5. Схема взаємодії елементів тришарнірної системи

Розрахунок цієї тришарнірної системи виконується в такій послідовності. Спочатку розглядається тришарнірна арка  $ABC$  (рис. 4.5). Розрахунок цієї частини системи виконується за формулами (4.1) – (4.5) з заміною  $l$  на  $l_1$  і  $f$  на  $f_1$ . Ординати точок  $A$  і  $B$  визначаються з рівняння, що описує вісь арки при  $x = a$ .

На другому етапі розрахунку розглядаються консольні частини системи (рис. 4.6).

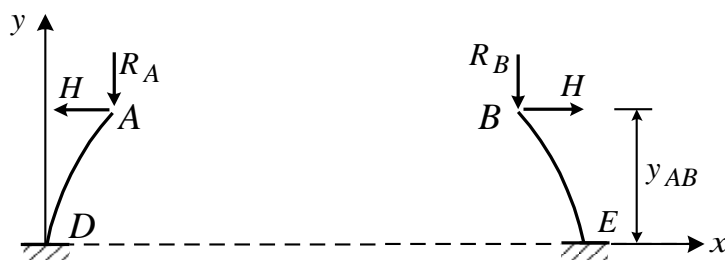


Рис. 4.6. Розрахункові схеми консолей тришарнірної системи

Згинальні моменти, поздовжні та поперечні сили в перерізах консолей знаходяться з залежностей (4.3) – (4.5). При цьому балкові значення функцій  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$  приймаються з розрахунку консольних балок (рис. 4.4, б), до яких, крім  $R_A$  і  $R_B$ , може бути також прикладене й інше навантаження, якщо за умовою задачі ці частини тришарнірної системи навантажені.

#### 4.4. Розрахунок тришарнірних рам на нерухоме навантаження

Розглянемо тришарнірну раму (рис. 4.7). Обмежимося, як і раніше при розрахунку тришарнірних арок, вертикальним навантаженням.

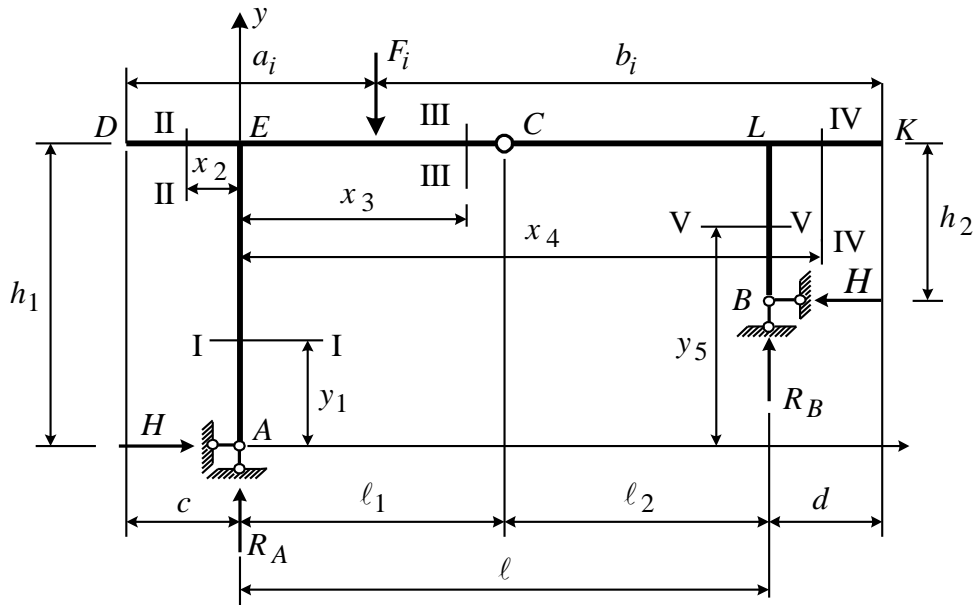


Рис. 4.7. Розрахункова схема тришарнірної рами з опорами, розташованими на різних рівнях

Визначимо спочатку опорні реакції. Для цього складемо систему двох рівнянь:

$$\sum M_C^{\text{лів}} = 0: \quad R_A \ell_1 - \sum_{i=1}^n F_i (\ell_1 + c - a_i) - H h_1 = 0; \quad (4.21)$$

$$\sum M_B = 0: \quad R_A \ell - \sum_{i=1}^m F_i (\ell + c - a_i) - H(h_1 - h_2) = 0.$$

Замінімо перші два члени в цих рівняннях через  $M_{C, \text{лів}}^0$  і  $M_B^0$ . У результаті одержимо

$$M_{C, \text{лів}}^0 - H h_1 = 0, \quad (4.22)$$

$$M_B^0 - H(h_1 - h_2) = 0.$$

Розв'язавши систему (4.22), знайдемо

$$M_{C, \text{лів}}^0 = M_B^0 \frac{h_1}{(h_1 - h_2)}; \quad (4.23)$$

$$H = \frac{M_{C, \text{лів}}^0}{h_1} = M_B^0 \frac{1}{(h_1 - h_2)}. \quad (4.24)$$

З рівняння (4.23) можна визначити вертикальну опорну реакцію  $R_A$ , а з рівняння (4.24) – горизонтальну реакцію  $H$  – розпір.

Аналогічно, узявши суму моментів правих сил щодо шарнірів  $C$  і  $A$ , одержимо систему двох рівнянь із невідомими  $R_B$  і  $H$ . Розв'язавши цю систему, знайдемо

$$M_{c, \text{прав}}^0 = -M_A^0 \frac{h_2}{(h_1 - h_2)}; \quad (4.25)$$

$$H = \frac{M_{c, \text{прав}}^0}{h_2} = -M_A^0 \frac{1}{(h_1 - h_2)}. \quad (4.26)$$

Рівняння (4.25) служить для визначення опорної реакції  $R_B$ , а рівняння (4.26) – для перевірки правильності знайденого значення опорної реакції  $H$  за (4.24). Щоб переконатися в тому, що правильно знайдені вертикальні опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$ , необхідно всі сили, у тому числі й опорні реакції, що діють на тришарнірну раму, спроектувати на вертикальну вісь  $Y$  і одержати рівність  $\sum F_x = 0$ . У розглянутій тришарнірній системі вертикальні опорні реакції не дорівнюють балковим вертикальним реакціям  $R_A^0$  і  $R_B^0$ . Це пов'язано з тим, що опори рами  $A$  і  $B$  розташовані на різних рівнях, і для знаходження реакцій доводиться розв'язувати систему рівнянь (4.22), в яку у ролі невідомої входить і горизонтальна реакція  $H$ . Тепер, коли реакції знайдені, перейдемо до визначення внутрішніх сил у перерізах рами.

Ділянка  $AE$  ( $x = 0, 0 \leq y_1 \leq h_1$ ):

$$M_{y_1} = -Hy_1; \quad Q_y = -H; \quad N_y = -R_A.$$

Ділянка  $DE$  ( $y = h_1, 0 \geq x_2 \geq -c$ ):

$$M_{x_2} = -\sum_{i=1}^n F_i (c + x_2 - a_i); \quad Q_{x_2} = -\sum_{i=1}^n F_i; \quad N_x = 0; \quad a_i \leq (c + x_2).$$

Тут  $n$  – число зосереджених сил, розташованих зліва від перерізу II-II;  $a_i$  – відстань від точки  $D$  до зосередженої сили  $F_i$ .

Ділянка  $ECL$  ( $y = h_1, \ell \geq x_3 \geq 0$ ):

$$M_{x_3} = R_A \cdot x_3 - \sum_{i=1}^p F_i (x_3 + c - a_i) - Hh_1;$$

$$Q_{x_3} = R_A - \sum_{i=1}^p F_i; \quad N_{x_3} = -H.$$

Тут  $p$  – число зосереджених сил, розташованих зліва від перерізу III-III.

Ділянка  $LK$  ( $y = h_1, \ell \leq x_4 \leq (\ell + d)$ ):

$$M_x = -\sum_{i=1}^r F_i (\ell + d - x_4 - b_i);$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^r F_i; \quad N_x = 0; \quad b_i \geq (\ell + d - x_4).$$

У цих формулах  $r$  – число зосереджених сил, розташованих справа від перерізу IV-IV (рис. 4.7).

Ділянка  $BL$  ( $x = \ell, h_1 \geq y_5 \geq (h_1 - h_2)$ ):

$$M_{y5} = Hy_5; \quad Q_y = H; \quad N_y = -R_B.$$

Зупинимося на окремому випадку конструкції тришарнірної рами, коли  $h_1 = h_2 = h$  (рис. 4.8).

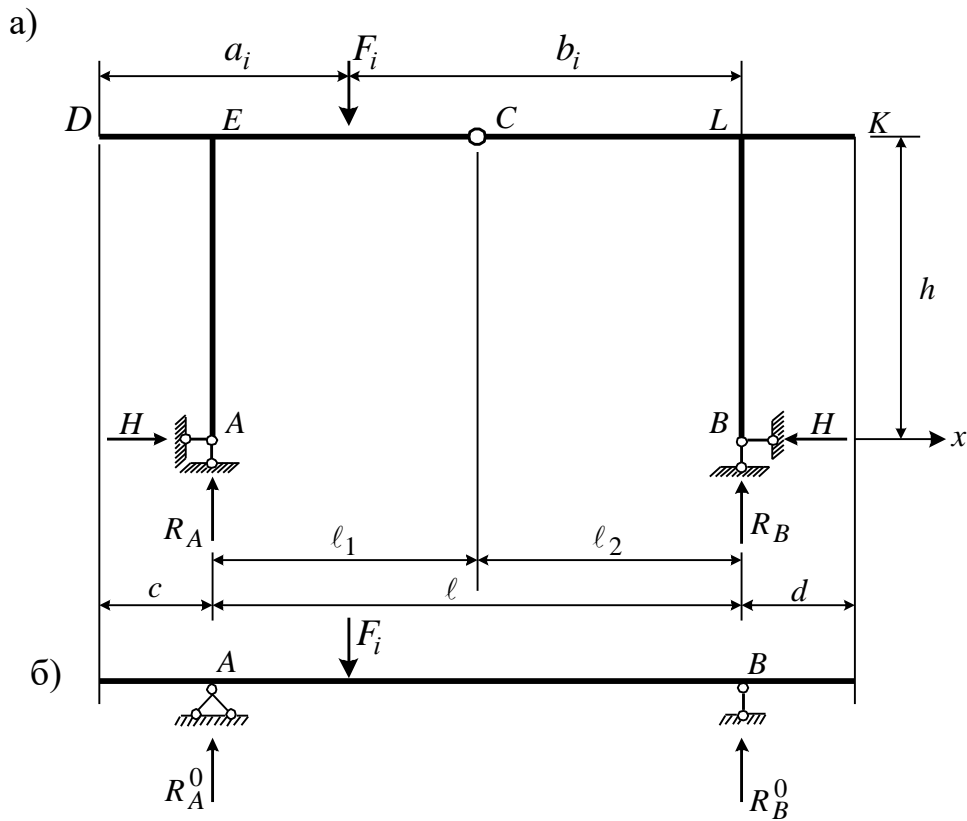


Рис. 4.8. Розрахункова схема тришарнірної рами з опорами, розташованими на одному рівні

Тут, оскільки опори  $A$  і  $B$  розташовані на одному рівні, опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$  знаходяться за формулами, аналогічними (4.1), тобто з розрахунку балки, показаної на рис. 4.8, б.

Для визначення горизонтальної опорної реакції  $H$  достатньо першого рівняння типу (4.22):

$$H = \frac{M_c^0}{h}. \quad (4.27)$$

Внутрішні силові фактори на ділянках  $AE$ ,  $DE$ ,  $ECL$ ,  $LK$ ,  $BL$  (рис. 4.8, а) визначаються за формулами, аналогічними для рами, показаної на рис. 4.7.

Наприкінці цього підрозділу розглянемо тришарнірну раму з похилими стійками (рис. 4.9, а).

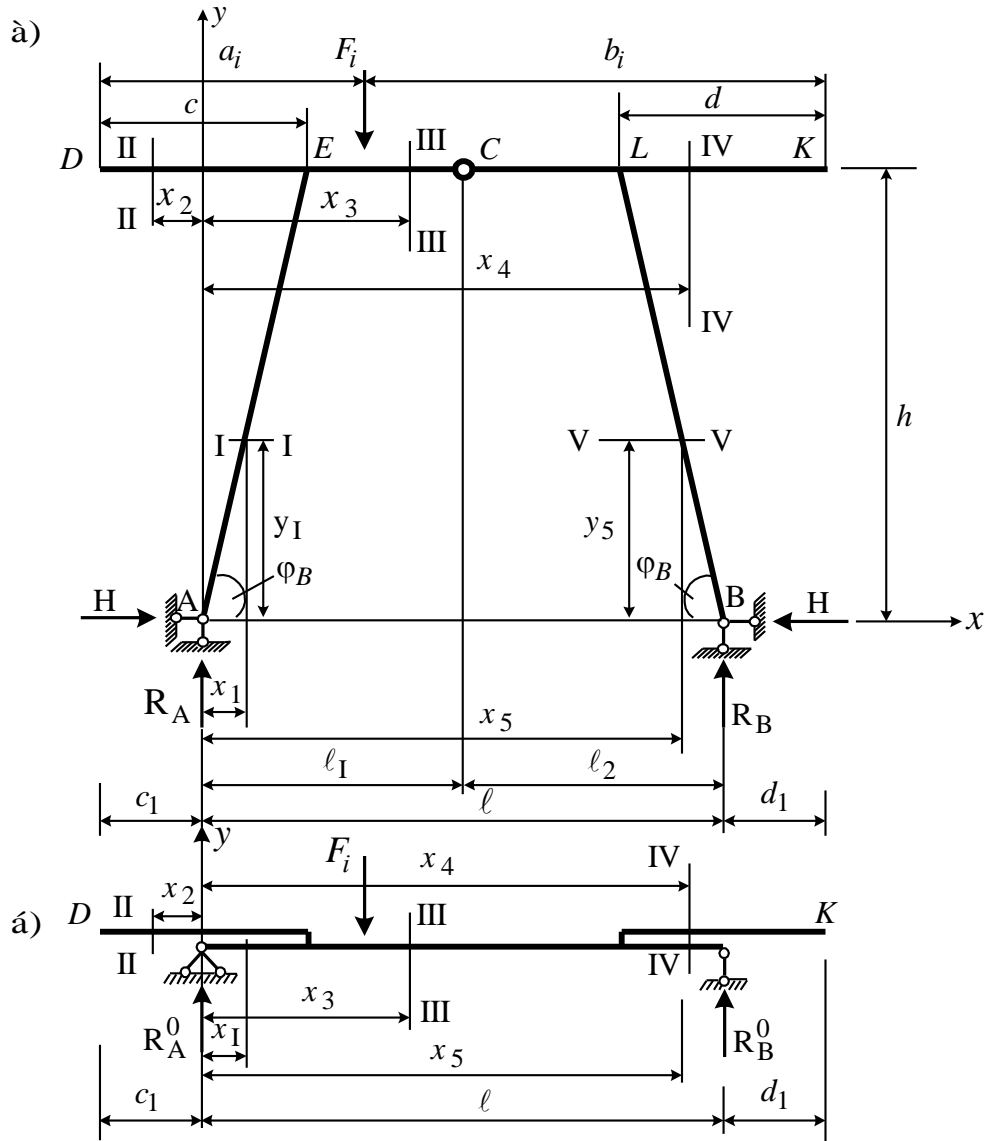


Рис. 4.9. Розрахункова схема тришарнірної рами з похилими стійками

Для визначення вертикальних опорних реакцій  $R_A$  і  $R_B$  скористаємося формулами (4.1), а розпір  $H$  знайдемо за формулою (4.27). При цьому балковий згинальний момент  $M_C^0$  у перерізі  $C$  одержимо з розрахунку балки, показаної на рис. 4.9, б. Внутрішні сили в перерізах рами знаходимо для кожної ділянки.

Ділянка  $AE$  ( $(c - c_1) \geq x_1 \geq 0$ ,  $h \leq y_1 \leq 0$ ):

$$M_{x_1} = R_A x_1 - H y_1; \quad Q_{x_1} = R_A \cos \varphi_A - H \sin \varphi_A;$$

$$N_{x_1} = -R \sin \varphi_A - H \cos \varphi_A.$$



Ділянка  $DE$  ( $y = h, (c - c_1) \geq x_2 \geq 0, -c_1 \leq x_2 \leq 0$ ):

$$M_{x_2} = M_{x_2}^0; \quad Q_{x_2} = Q_{x_2}^0; \quad N_{x_2} = 0.$$

Ділянка  $ECL$  ( $y = h, (c - c_1) \leq x_3 \leq (\ell + d_1 - d)$ ):

$$M_{x_3} = M_{x_3}^0 - Hh; \quad Q_{x_3} = Q_{x_3}^0; \quad N_{x_3} = -H.$$

Ділянка  $LK$  ( $y = h, (\ell + d_1) \geq x_4 \geq (\ell + d_1 - d)$ ):

$$M_{x_4} = M_{x_4}^0; \quad Q_{x_4} = Q_{x_4}^0; \quad N_{x_4} = 0.$$

Ділянка  $BL$  ( $h \geq y_5 \geq 0, \ell \geq x_5 \geq (\ell + d_1 - d)$ ):

$$M_{x_5} = R_B x_5 - H y_5; \quad Q_{x_5} = -R_B \cos \varphi_B + H \sin \varphi_B; \\ N_{x_5} = -(R_B \sin \varphi_B + H \cos \varphi_B).$$

#### 4.5. Розрахунок тришарнірної арки на рухоме навантаження

Як відомо (див. п. 2.2), у задачах розрахунку за недеформованою схемою статично визначних систем на рухоме навантаження загальним і універсальним є метод ліній впливу. При побудові ліній впливу в тришарнірній арці використовуємо раніше отримані формули (4.2) – (4.5). Тоді лінія впливу розпору  $H$  дорівнює лінії впливу балкового згинального моменту в перерізі  $C$ , всі ординати якої зменшені на постійне число  $\left| \frac{1}{f} \right|$ ,

тобто

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_c^0 \left( \frac{1}{f} \right). \quad (4.28)$$

Аналогічно, лінії впливу згинального моменту в перерізі являють собою суму двох ліній впливу: лінії впливу згинального балкового моменту в перерізі  $x$  і лінії впливу розпору  $H$ , всі ординати якої помножені на постійне число  $(-y_x)$ :

$$\text{л.в. } M_x = \text{л.в. } M_x^0 + \text{ë.â. } H(-y_x). \quad (4.29)$$

Для побудови лінії впливу  $Q_x$  і  $N_x$  використовуємо такі рівності:

$$\text{л.в. } Q_x = \text{л.в. } Q_x^0 \cos \varphi_x + \text{ë.â. } H(-\sin \varphi_x); \quad (4.30)$$

$$\text{л.в. } N_x = \text{л.в. } Q_x^0(-\sin \varphi_x) + \text{ë.â. } H(-\cos \varphi_x). \quad (4.31)$$

На рис. 4.10 показані лінії впливу  $H$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $N_x$  і процес їхньої побудови.

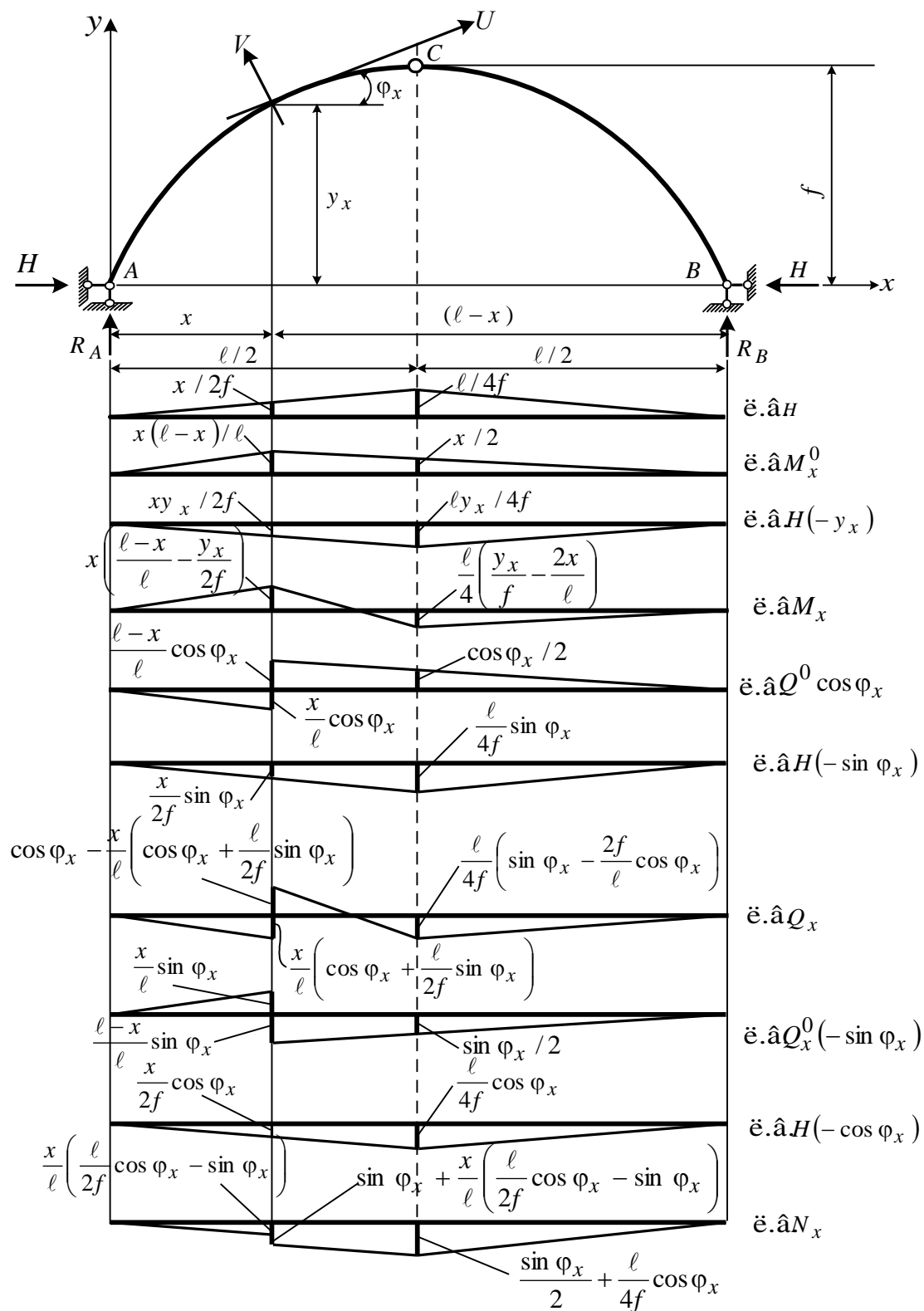


Рис. 4.10. Лінії впливу в перерізі тришарнірної арки

Величина уступу (стрибка) на л.в.  $Q_x$  у перерізі  $x$  дорівнює  $\cos \varphi_x$ , а на л.в.  $N_x - \sin \varphi_x$ . Звернемо увагу на особливості побудови ліній впливу в перерізах тришарнірної арки з затягуванням (п. 4.2, рис. 4.2) і систем, що включають тришарнірну арку (п. 4.3, рис. 4.3, 4.4). Лінія впливу зусилля в затягуванні будується за формулою (4.8). Якщо переріз проведений на ділянках  $AD$  і  $BE$ , то лінії впливу  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $N_x$  будуються відповідно до формул (4.9) – (4.11). Якщо ж переріз належить ділянці  $DCE$ , то основою для побудови ліній впливу є формули (4.12) – (4.14). У тришарнірній системі, показаній на рис. 4.3, лінія впливу розпору будується за рівнянням (4.15). Для перерізу, розташованого на ділянці  $DCE$ , застосовуються формули (4.3) – (4.5) для ферми на рис. 4.2 та формули (4.16) для ферми на рис. 4.3. Для перерізів на ділянках  $AD$  і  $BE$  – відповідно (4.17) – (4.19) и (4.20). Для системи, зображеної на рис. 4.4, лінія впливу в перерізі, розташованому на ділянці  $ACB$ , будується, як і в звичайній тришарнірній арці з прогоном  $\ell_1$  і стрілою підйому  $f_1$  (див. п. 4.2 і рис. 4.10). Якщо ж переріз проведений у межах консольної частини, то спочатку будується лінія впливу для консольної частини, а потім поширюється на частину  $ACB$  системи. Наприклад, побудуємо лінії впливу  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $N_x$  у перерізі  $x$ , проведеному на ділянці  $DA$  (рис. 4.11).

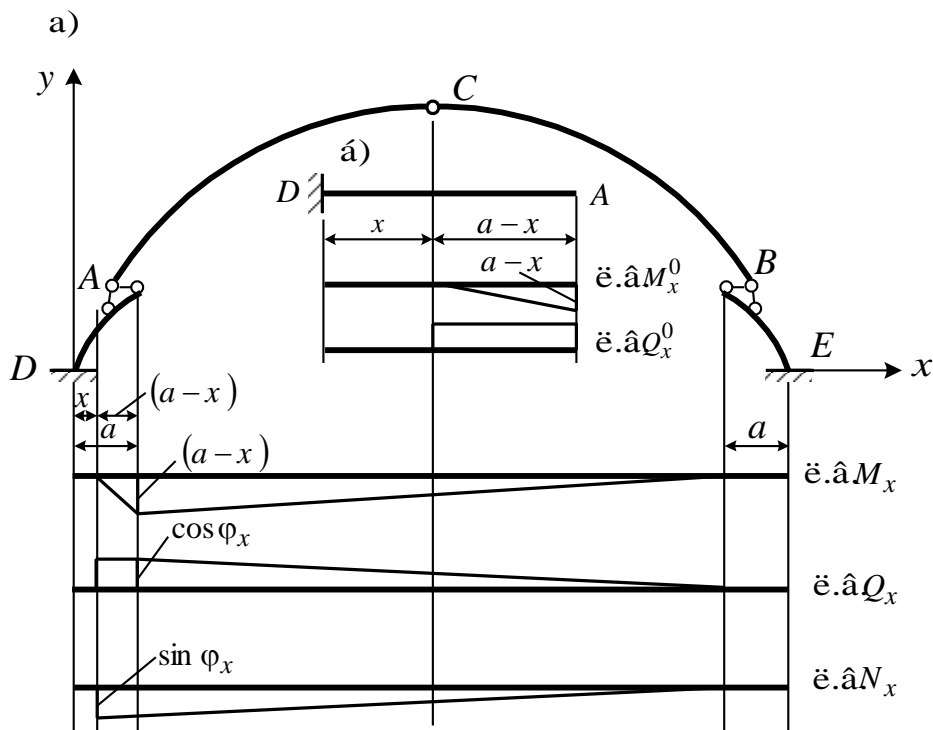


Рис. 4.11. Лінії впливу в перерізі консольної частини тришарнірної системи

Відповідно до формул (4.3) – (4.5) при  $H = 0$  маємо

$$\text{л.в. } M_x = \text{л.в. } M_x^0;$$

$$\text{л.в. } Q_x = \text{л.в. } Q_x^0 \cos \varphi_x; \quad (4.32)$$

$$\text{л.в. } N_x = \text{л.в. } Q_x^0 (-\sin \varphi_x).$$

Тепер залишилося побудувати балкові лінії впливу  $M_x^0$  і  $Q_x^0$  (рис. 4.11, б), скоригувати їх відповідно до виразів (4.32) і поширити на ділянку  $ADB$  (рис. 4.11, а).

#### 4.6. Розрахунок тришарнірних рам на рухоме навантаження

Побудуємо спочатку лінії впливу в тришарнірній рамі, опори якої розташовані на різних рівнях (рис. 4.12, а, рис. 4.7). Почнемо з лінії впливу опорної реакції  $R_A$ .

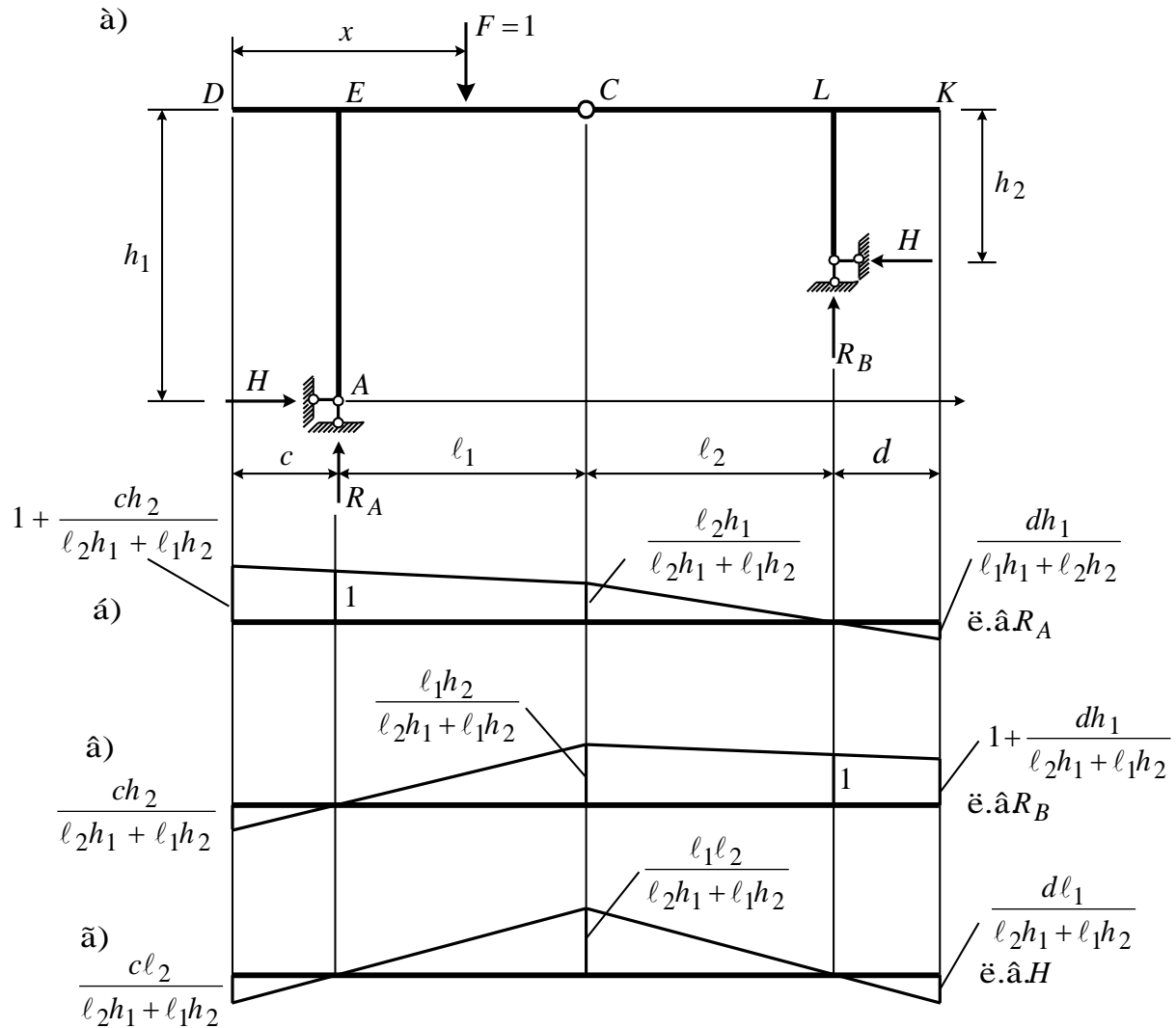


Рис. 4.12. Лінії впливу опорних реакцій у тришарнірній рамі

Припустимо, що одиничний вантаж переміщається по ділянці  $DC$   $0 \leq x \leq (\ell_1 + c)$ . Скористаємося отриманою раніше формулою (4.23). Маємо:

$$R_A \ell_1 - (\ell_1 + c - x) = [R_A \ell + (\ell + c - x)] \frac{h_1}{h_1 - h_2}.$$

Звідси знайдемо

$$R_A = \frac{-(\ell + c - x)h_1 + (\ell_1 + c - x)(h_1 - h_2)}{\ell_1(h_1 - h_2) - \ell h_1}. \quad (4.33)$$

Таким чином, ми одержали рівняння лінії впливу  $R_A$  на ділянці  $DC$ .

Припустимо тепер, що вантаж розташований на ділянці  $CK$   $(\ell_1 + c) \leq x \leq (\ell + c + d)$ . Використовуючи ту саму формулу (4.33), знайдемо

$$R_A = -\frac{(\ell + c - x)h_1}{\ell_1(h_1 - h_2) - \ell h_1}. \quad (4.34)$$

Аналогічно, скориставшись (4.25), одержимо рівняння для лінії впливу  $R_B$ .

Вантаж  $F=1$  на ділянці  $KC$   $(\ell_1 + c) \leq x \leq (\ell + c + d)$ :

$$R_B = \frac{(x - c)h_2 + (x - c - \ell_1)(h_1 - h_2)}{\ell_2(h_1 - h_2) + \ell h_2}. \quad (4.35)$$

Вантаж  $F=1$  на ділянці  $CD$   $0 \leq x \leq (\ell_1 + c)$ :

$$R_B = \frac{(x - c)h_2}{\ell_2(h_1 - h_2) + \ell h_2}. \quad (4.36)$$

Лінії впливу  $R_A$  і  $R_B$  показані на рис. 4.12, б, в.

Побудуємо лінію впливу розпору  $H$ . Вантаж на ділянці  $CK$ . Складаємо рівняння рівноваги  $\sum M_C^{\text{лів}} = 0$ :

$$R_A \ell_1 - H h_1 = 0,$$

звідки

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } R_A \frac{\ell_1}{h_1}. \quad (4.37)$$

Отже, лінія впливу розпору  $H$  на ділянці  $CK$  буде такою самою, як і лінія впливу  $R_A$  на цій ділянці, всі ординати якої помножені на постійне число  $\frac{\ell_1}{h_1}$ .

Вантаж на ділянці  $CD$ . Тепер складаємо рівняння  $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$ :

$$R_B \ell_2 - H h_2 = 0,$$

звідки

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } R_B \frac{\ell_2}{h_2}. \quad (4.38)$$

Міркуючи так само, як і в попередньому випадку, бачимо, що лінія впливу розпору  $H$  на ділянці  $CD$  буде такою самою, як лінія впливу  $R_B$ , всі ординати якої помножені на  $\frac{\ell_2}{h_2}$ .

Лінія впливу  $H$  показана на рис. 4.12, г. Лінії впливу згинального моменту, поздовжньої та поперечної сили на ділянці  $ECL$  будуються через лінії впливу  $R_A$ ,  $R_B$  і  $H$ . Для побудови ліній впливу в перерізах ділянок  $DE$ ,  $LK$ ,  $AE$ ,  $BL$  варто скористатися отриманими раніше формулами (п. 4.4).

Якщо опори тришарнірної рами розташовані на одному рівні, то побудова ліній впливу зусиль у її перерізах значно спрощується. Покажемо це на прикладі тришарнірної рами, зображеної на рис. 4.13, а.

Лінія впливу розпору будується відповідно до формули (4.27), рис. 4.13, б:

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_c^0 \frac{1}{h}.$$

Лінії впливу  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $N_x$  на ділянці  $ECL$  описуються такими рівняннями (рис. 4.13, в – ж):

$$\text{л.в. } M_x = \text{л.в. } M_x^0 - \hat{e} \cdot \hat{a} \cdot H(h);$$

$$\text{л.в. } Q_x = \text{л.в. } Q_x^0;$$

$$\text{л.в. } N_x = \text{л.в. } H(-1).$$

Лінії впливу  $M_y$ ,  $Q_y$ ,  $N_y$  у перерізі  $y$  на ділянці  $AE$  будуються таким чином:

$$\text{л.в. } M_y = \text{л.в. } H(-y);$$

$$\text{л.в. } Q_y = \text{л.в. } H(-1);$$

$$\text{л.в. } N_y = \text{л.в. } R_A(1).$$

Указані лінії – на рис. 4.13, ж, з, і.

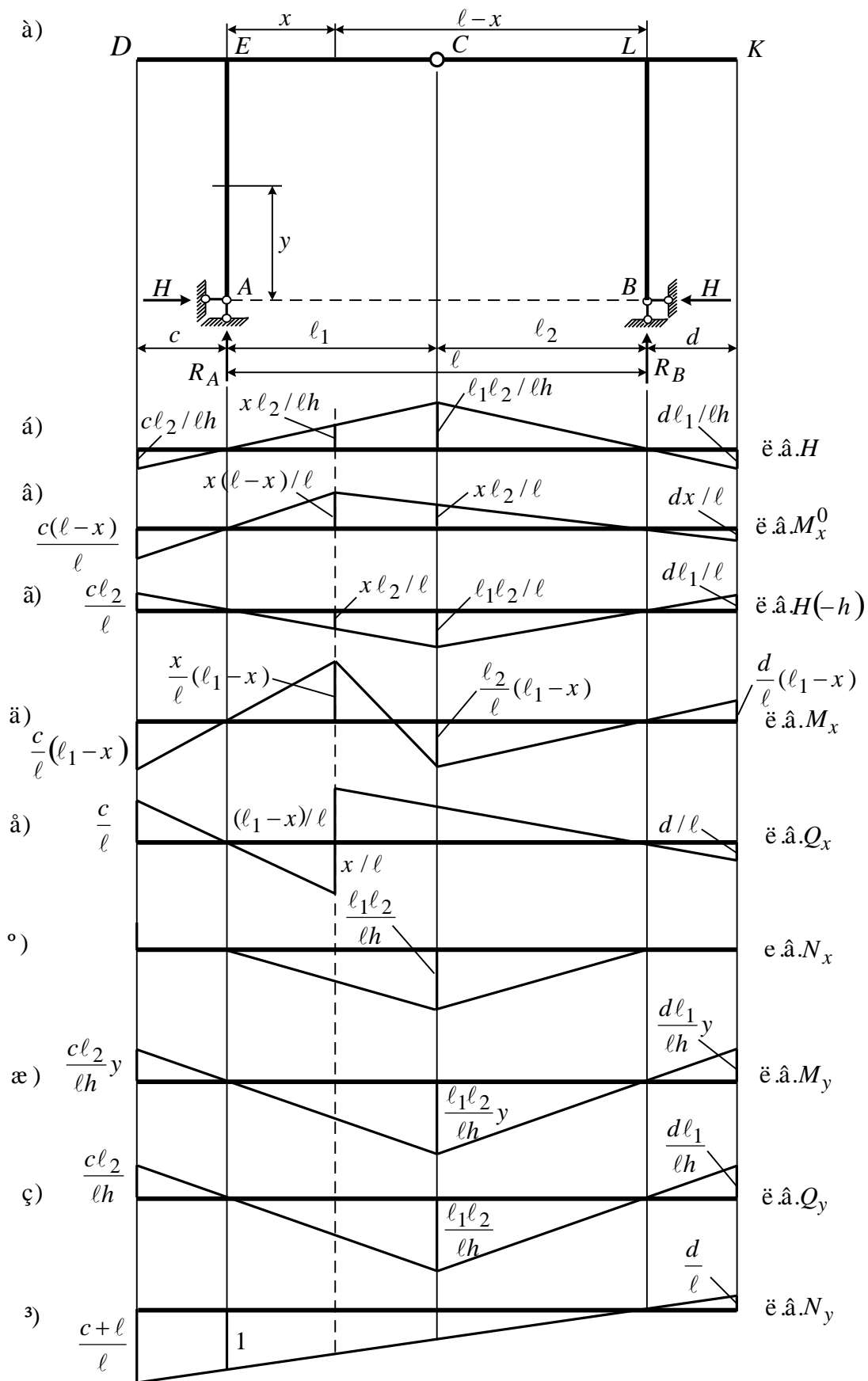


Рис. 4.13. Лінії впливу в перерізах тришарнірної рами з опорами на одному рівні

## 4.7. Розрахунок аркових ферм

Тришарнірна арка, в якій обидві піварки  $AC$  і  $CB$  являють собою ферми, називається тришарнірною арковою фермою. Розрахунок тришарнірних аркових ферм провадиться на основі описаних прийомів розрахунку тришарнірної арки з суцільною стінкою (див. п. 4.1). При цьому використовуються також способи розрахунку звичайних ферм на рухоме і нерухоме навантаження.

### 4.7.1. Розрахунок аркових ферм на нерухоме навантаження

Вертикальні опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$  в арковій фермі дорівнюють балковим опорним реакціям  $R_A^0$  та  $R_B^0$  (рис. 4.14, а, б).

Горизонтальні опорні реакції визначаються за формулою (4.2), отриманою при розрахунку тришарнірних арок, із заміною в ній  $f$  на  $h$  або за формулою (4.27) для тришарнірних рам:

$$H = \frac{M_C^0}{h}.$$

Покажемо тепер, як визначити зусилля в стержнях аркової ферми, наприклад, 7-8, 16-8, 16-15.

**Зусилля в стержні 7-8.** Проводимо переріз I-I (рис. 4.14, а). Визначаємо моментну точку, тобто точку, де перетинаються стержні 16-8 і 16-15. Це точка 16. Довжину перпендикуляра, опущеного з точки 16 на напрямок стержня 7-8, позначимо через  $h_1$ . Складемо рівняння рівноваги  $\sum M_{16}^{\text{прав}} = 0$ . У результаті одержуємо

$$R_A \cdot 4d - Hh - F_1 3d - F_2 d - S_{16-8} h_2 + F_3 d = 0.$$

Звідси визначаємо невідоме зусилля  $S_{7-8}$ .

**Зусилля в стержні 16-8.** Моментна точка  $C$ . Довжина перпендикуляра, опущеного з точки  $C$  на напрямок стержня 16-8, дорівнює  $h_2$  (рис. 4.14, а).

Рівняння рівноваги

$$\sum M_C^{\text{лів}} = 0:$$

$$R_A \cdot 4d - Hh - F_1 3d - F_2 d - S_{16-8} h_2 + F_3 d = 0.$$

Звідси знаходимо  $S_{16-8}$ .

**Зусилля в стержні 16-15.** Моментна точка 8. Відстань від стержня до моментної точки 8 –  $h_3$ .



Рівняння рівноваги  $\sum M_8^{\text{пр}} = 0$ :

$$R_B \cdot 2d - Hh - S_{16-15} \cdot h_3 = 0.$$

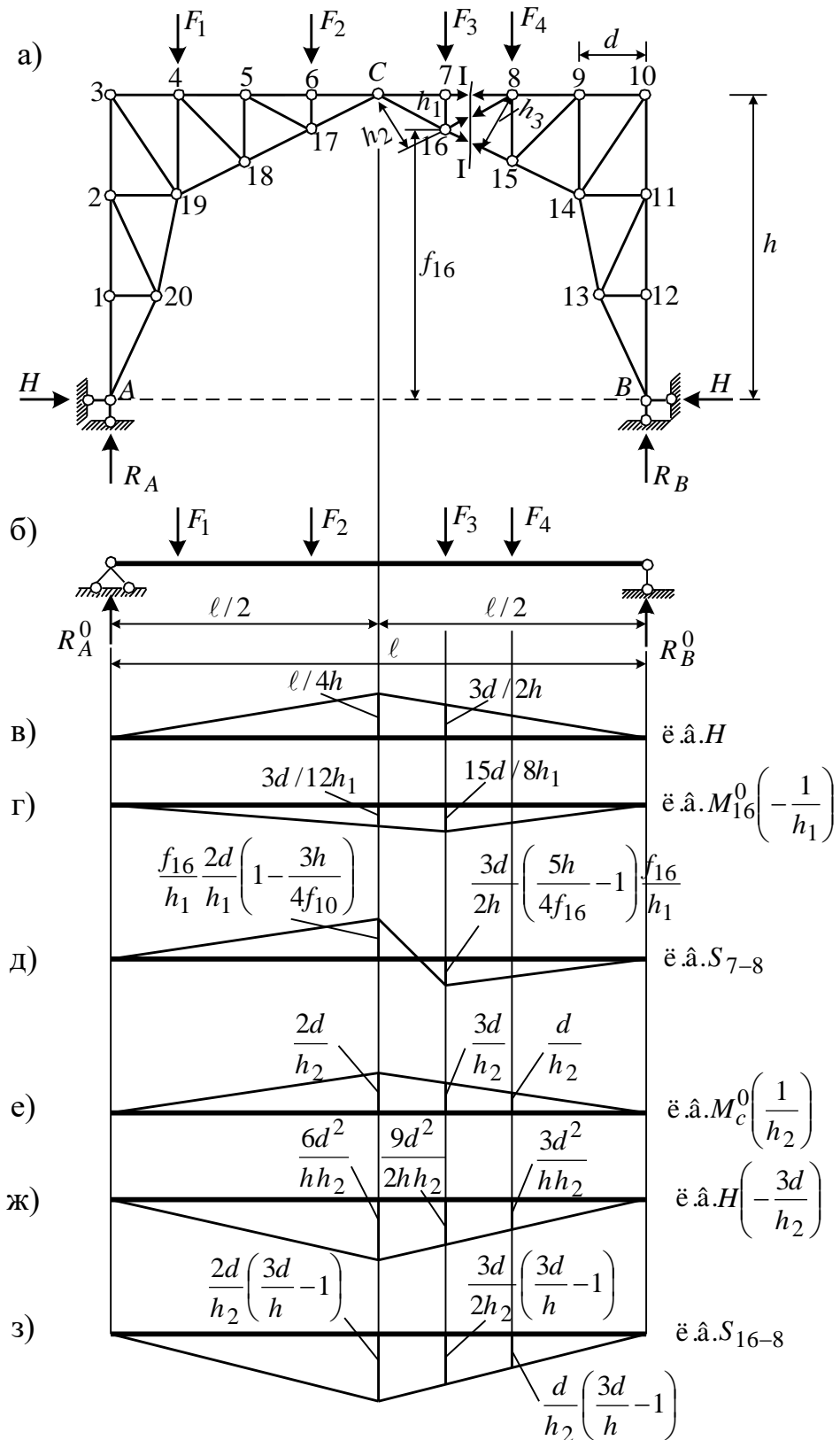


Рис. 4.14. Розрахункова схема аркової ферми та лінії впливу зусиль

З цього рівняння і визначається зусилля  $S_{16-15}$ . Як і раніше, звернемо увагу на те, що в отриманих формулах розпір  $H$  значно зменшує зусилля в стержнях аркової ферми порівняно з зусиллями в балкових фермах. Це дозволяє одержати економію матеріалу і збільшити той граничний прогін, що може бути перекритий балковою фермою.

#### 4.7.2. Розрахунок аркових ферм на рухоме навантаження

Почнемо з побудови лінії впливу розпору  $H$ . Скористаємося формулою (4.27):

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_c^0 \frac{1}{h}.$$

Лінія впливу показана на рис. 4.14, в.

**Лінія впливу зусилля в стержні 7-8.** Скористаємося перерізом I-I (рис. 4.14, а). Знайдемо моментну точку. Це точка 16. Розсічена панель 7-8. Розглянемо два положення одиничного вантажу.

Вантаж на ділянці 8-10.

Візьмемо суму моментів лівих сил щодо точки 16:

$$R_A \cdot 5d - Hf_{16} + S_{7-8}h = 0.$$

Вантаж на ділянці 7-3.

Тепер запишемо рівняння моментів правих сил щодо точки 16.

Маємо

$$R_B \cdot 3d - Hf_{16} + S_{7-8}h_1 = 0.$$

Замінімо в отриманих рівняннях

$$R_A \cdot 5d = R_B \cdot 3d = M_{16}^0.$$

Тоді рівняння шуканої лінії впливу набуває вигляду

$$\text{л.в. } S_{7-8} = - \text{л.в. } M_{16}^0 \left( \frac{1}{h_1} \right) + \text{л.в. } H \frac{f_{16}}{h_1}.$$

Побудова цієї лінії впливу показана на рис. 4.14, г, д.

**Лінія впливу в стержні 16-8.** Для знаходження зусилля в стержні 16-8 від одиничного навантаження скористаємося також перерізом I-I (рис. 4.14, а). Моментною точкою в цьому випадку буде точка С. При перебуванні вантажу зліва і справа від розсіченої панелі 7-8 рівняння лінії впливу  $S_{16-8}$  будуть мати такий вигляд:

– вантаж на ділянці (8-10) (справа від розрахункової панелі):

$$S_{16-8} = R_A \frac{4d}{h_2} - H \frac{3d}{h_2};$$

– вантаж на ділянці (7-3) (зліва від розрахункової панелі):

$$S_{16-8} = R_B \frac{4d}{h_2} - H \frac{3d}{h_2}.$$

Замінімо в отриманих рівняннях

$$R_A \cdot 4d = R_B \cdot 4d = M_c^0$$

і тоді (див. рис. 4.14, е, є, ж).

$$\text{л.в. } S_{16-8} = \text{л.в. } M_c^0 \left( \frac{1}{h_2} \right) - \text{л.в. } H \frac{3d}{h_2}$$

#### 4.8. Розрахунок комбінованих систем

Розглянемо комбіновану систему, що складається з шарнірного ланцюга і двох балкових ферм, сполучених шарніром (рис. 4.15, а). Система, яка показана на цьому рисунку, геометрично незмінна і статично визначна. Дійсно, якби проїзна частина (ферми  $AC$  і  $CB$ ) не була підкріплена ланцюгом, то вона володіла б одним ступенем свободи. Але до проїзної частини приєднується за допомогою вертикальних елементів (підвісок) трос, прикріплений до нерухомих опор  $D$  і  $E$ . Таким чином, трос позбавляє ферми проїзної частини відзначеного вище ступеня свободи, тобто робить ферму геометрично незмінною. Через те що підвіски вертикальні, зусилля в усіх елементах ланцюга (троса) мають ту саму горизонтальну проекцію. Будемо називати її, як і в аркових системах, розпором і позначати буквою  $H$ .

На розрахунок, що буде викладений нижче, необхідно дивитися як на наближений, тому що подовження троса враховуватися не буде. Зазначимо, що для статично визначної висячої системи, яка тут розглядається, розрахунок за деформованою схемою (з урахуванням подовження троса) не має істотного значення. Це пояснюється такою обставиною. Згинальний момент, як буде показано далі, у довільному перерізі балки жорсткості дорівнює

$$M_x = M_x^0 - Hf_1 = M_x^0 - M_C^0 \frac{f_1}{f},$$

де  $f_1$  – відстань від горизонталі (вісь  $x$ ) до троса в перерізі, який розглядається (рис. 4.15, а);  $f$  – стріла провисання троса в перерізі  $C$ .

Коли трос подовжується, то  $f_1$  і  $f$  одночасно збільшуються, тому згинальний момент змінюється мало. Деформація троса, викликана навантаженням, має особливе значення для статично невизначних висячих мостів, де подовження троса значно впливає на згинальний момент у балці.

При розрахунку обмежимося, як і раніше, випадком вертикального навантаження.

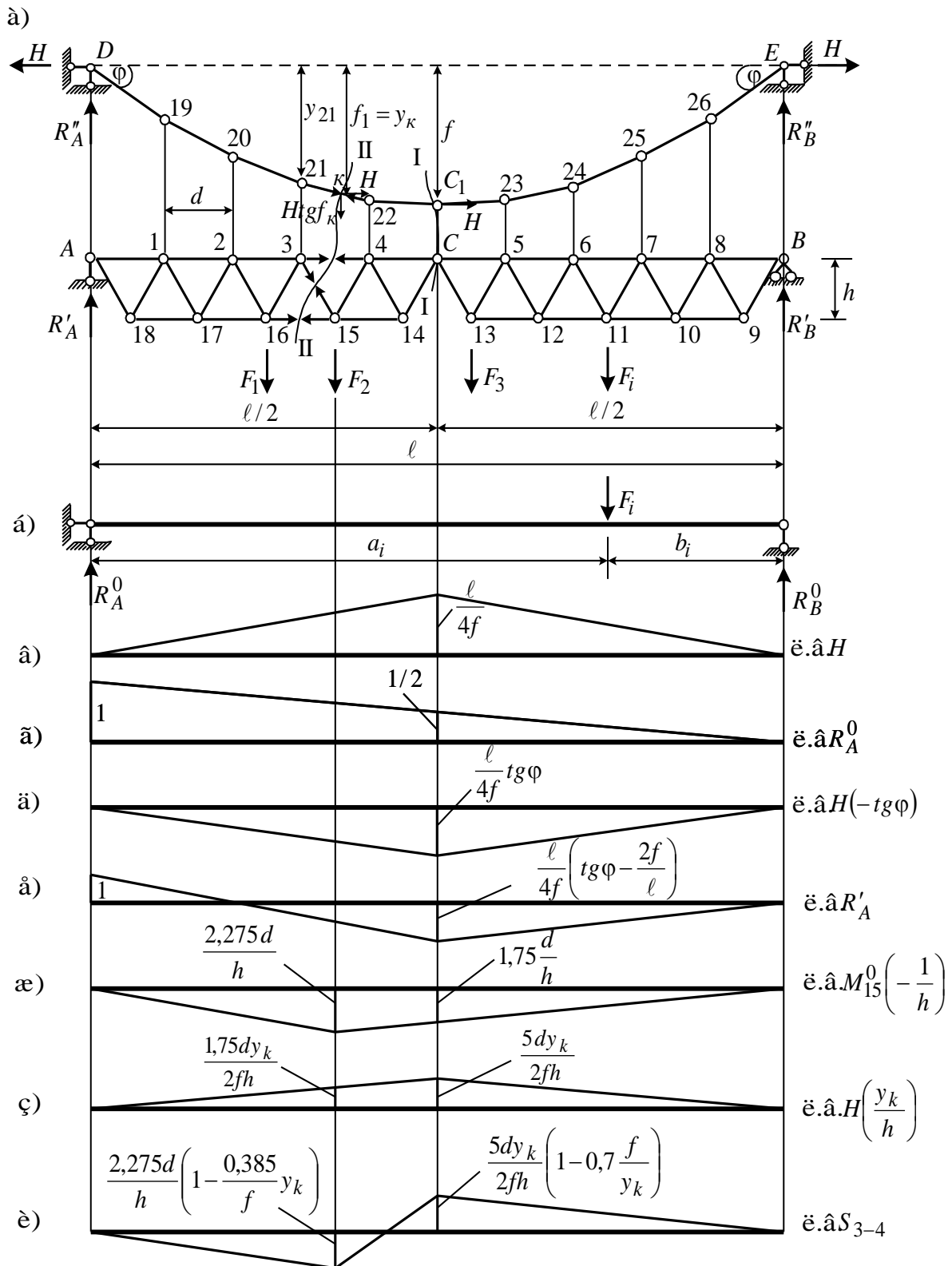


Рис. 4.15. Розрахункова схема комбінованої системи та лінії впливу

#### 4.8.1. Розрахунок комбінованих систем на нерухоме навантаження

Знайдемо вертикальні опорні реакції. Для їхнього визначення складемо рівняння у формі моментів усіх сил, що діють на систему відносно шарнірів  $D$  і  $E$ . В результаті одержимо

$$R_A^0 = R'_A + R''_A = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i b_i, \quad (4.39)$$

$$R_B^0 = R'_B + R''_B = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i a_i,$$

де  $R_A^0$ ,  $R_B^0$  – вертикальні реакції, що виникли б на опорах  $A$  і  $B$ , якби вся система, що розглядається, була замінена балкою  $AB$  (рис. 4.15, б);

$$R''_A = H \operatorname{tg} \varphi; \quad R''_B = H \operatorname{tg} \varphi; \quad (4.40)$$

$$R'_A = R_A^0 - H \operatorname{tg} \varphi; \quad R'_B = R_B^0 - H \operatorname{tg} \varphi.$$

Для визначення горизонтального складового зусилля (розпору) у тросі  $H$  скористаємося рівнянням

$$\sum M_{\text{лів}}^c = 0$$

(переріз I-I на рис. 4.15, а).

У результаті одержимо формулу аналогічну (4.2), тобто

$$H = \frac{M_C^0}{f}, \quad (4.41)$$

де  $f$  – стріла провисання троса (рис. 4.15, а);  $M_C^0$  – балковий згинальний момент у перерізі  $C$  балки  $AB$  (рис. 4.15, б).

Знайдемо зусилля в підвісці 20-2. Виріжемо вузол 20 і розглянемо його рівновагу (рис. 4.16).

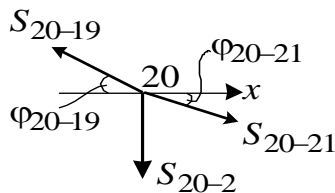


Рис. 4.16. Схема зусиль, що діють на вузол 20

Спроекуємо всі сили, що діють на вузол, на вісь  $x$  і врахуємо, що зусилля в елементах троса мають ту саму горизонтальну проекцію  $H$ . Одержимо

$$S_{20-19} \cos \varphi_{20-19} = S_{20-21} \cos \varphi_{20-21} = H.$$

Звідси знайдемо

$$S_{20-19} = \frac{H}{\cos \varphi_{20-19}}, \quad S_{20-21} = \frac{H}{\cos \varphi_{20-21}}. \quad (4.42)$$

Тепер спроекуємо всі сили на вертикальну вісь  $y$ :

$$S_{20-2} - S_{20-19} \sin \varphi_{20-19} + S_{20-21} \sin \varphi_{20-21} = 0.$$

З урахуванням (4.42), знайдемо зусилля в підвісці

$$S_{20-2} = H(\operatorname{tg} \varphi_{20-19} - \operatorname{tg} \varphi_{20-21}).$$

Цю формулу поширимо на  $n$ -й вузол:

$$S_n = H(\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1}), \quad (4.43)$$

де  $\alpha_n, \alpha_{n+1}$  – кути нахилу троса відповідно зліва і справа від підвіски.

Тепер залишилося знайти зусилля в стержнях проїзної частини. Розглянемо стержні 3-4, 3-15, 16-15 (рис. 4.15, а).

**Зусилля в стержні 3-4.** Проведемо переріз II-II (див. рис. 4.15, а). Зусилля в тросі розкладемо на горизонтальну  $H$  і вертикальну складову  $H \operatorname{tg} \varphi_k$ . Точка  $k$  на тросі – це вертикальна проекція точки 15, тобто моментної точки, в якій перетинаються стержні 3-15 і 16-15. Складемо рівняння моментів усіх сил, розташованих зліва (справа) від перерізу:

$$M_{15}^0 - H y_k + S_{3-4} h = 0,$$

де  $M_{15}^0$  – балковий згинальний момент у перерізі 15 балки  $AB$  (рис. 4.15, б).

З цього рівняння знайдемо зусилля  $S_{3-4}$ .

**Зусилля в стержні 3-15.** Скористаємося способом проекцій усіх сил, розташованих зліва від перерізу. У результаті одержимо

$$Q_{\text{лів}}^0 - H \operatorname{tg} \varphi - S_{3-15} \sin \alpha = 0,$$

де  $Q_{\text{лів}}^0 = R_A^0 - \sum_{i=1}^m F_i$ ;  $m$  – число зосереджених сил, розташованих зліва від перерізу I-I (рис. 4.15, б) у балці  $AB$ .

**Зусилля в стержні 16-15.** Складемо рівняння моментів лівих (правих) сил відносно точки 3:

$$M_3^0 - H y_{21} - S_{16-15} h = 0.$$

Звідси ми і визначимо невідоме зусилля в стержні проїзної частини  $S_{16-15}$ . Аналогічно знаходяться зусилля в усіх інших стержнях ферми.

На закінчення цього пункту зазначимо, що, якщо функції проїзної частини системи виконує суцільна балка (із середнім шарніром  $C$ ), то згинальний момент і поперечна сила в будь-якому її перерізі визначаються за формулами

$$M_x = M_x^0 - H y_x, \quad (4.44)$$

$$Q_x = Q_x^0 - H \operatorname{tg} \varphi_x. \quad (4.45)$$

#### 4.8.2. Розрахунок комбінованих систем на рухоме навантаження

Лінія впливу горизонтальної складової зусилля в тросі (розпорі  $H$ ). На підставі формули (4.41) маємо

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{f}.$$

Лінія впливу розпору  $H$  показана на рис. 4.15, в.

Лінія впливу опорної реакції  $R'_A$ . З формули (4.40) бачимо, що лінія впливу  $R'_A$  дорівнює алгебраїчній сумі двох ліній впливу (рис. 4.15, г, д):

$$\text{л.в. } R'_A = \text{л.в. } R_A^0 + \text{л.в. } H(-\operatorname{tg} \varphi).$$

Звертає на себе увагу значне розвантаження балкової ферми, обумовлене впливом розпору  $H$ . Лінія впливу має від'ємну ділянку (рис. 4.15, е): навантаження, розташоване на цій ділянці, викликає реакцію  $R'_A$ , спрямовану вниз, причому лівий кінець балкової ферми намагається відірватися від опори.

Лінія впливу зусилля в стержні 3-4. Відповідно до приведеної раніше формули

$$\text{л.в. } S_{3-4} = \text{л.в. } M_{15}^0 \left( -\frac{1}{h} \right) + \text{л.в. } H \frac{y_k}{h}.$$

Процес побудови цієї лінії впливу й остаточного графіка показаний на рис. 4.15, ж, з, и.

## РОЗДІЛ 5

### ТЕОРІЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Переміщенням даної точки споруди називається зміна її координати, викликана деформацією споруди, тобто відносним подовженням (укороченням) або скривленням його стержнів. Деформації споруди залежать від згинальних і крутних моментів, поздовжніх і поперечних сил, що виникають у перерізах елементів споруди від заданого зовнішнього навантаження, температури, зсуву опорних або інших зв'язків. Тому визначенню переміщень звичайно передуює визначення зусиль і побудова відповідних епюр.

Загальний метод визначення переміщень, що тут буде викладений, застосовний до лінійно-деформованих систем, тобто до таких систем, що виконані з ідеально пружного матеріалу; мають ідеально гладкі, позбавлені тертя шарнірні з'єднання; геометричну незмінюваність; допускають малі переміщення (наприклад, допустимі переміщення в мостових фермах складають 1/500 - 1/1000 прогону); підпорядковуються принципу незалежності дії сил. До лінійно-деформованої не можна в загальному випадку віднести комбіновану систему, розглянуту в розд. 4. Проте, якщо зафіксувати повний розпір  $H$ , то і ця система реагує лінійно на будь-яке поперечне навантаження.

Загальні методи визначення переміщень базуються на роботі сил, прикладених до пружної системи. В основу визначення переміщень покладений принцип можливих переміщень для деформованої системи, викладений у курсі теоретичної механіки і в п. 5.4.

#### 5.1. Дійсна робота зовнішніх сил

Будемо розрізняти дійсні та можливі переміщення. Поняття можливих переміщень дамо далі. Зараз зазначимо, що під дійсним переміщенням  $\Delta_{FF}$  (рис. 5.1, а) будемо розуміти переміщення, викликане силою  $F$ , що змінюється від нуля до остаточного значення відповідно до рис. 5.1, б.

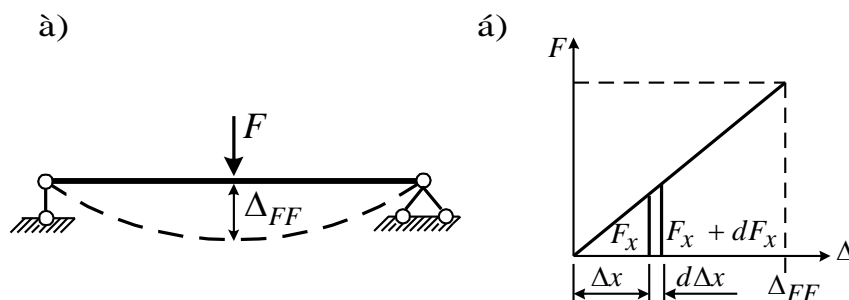


Рис. 5.1. До виведення формули для дійсної роботи зовнішніх сил



Через те що сила  $F$  змінюється за лінійним законом, можемо записати

$$\Delta_{FF} = kF, \quad (5.1)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Елементарна робота зовнішньої сили  $F$  буде дорівнювати (див. рис. 5.1, б)

$$dW_x = F_x d\Delta_x. \quad (5.2)$$

Повна робота

$$W_F = \int_0^F F_x d\Delta_x. \quad (5.3)$$

Відповідно до (5.1),  $\Delta_x = kF_x$  та  $d\Delta_x = k dF_x$ .

Після підстановки цих рівностей у (5.3), знайдемо

$$W_F = \int_0^F F_x k dF_x = k \frac{F^2}{2} = F \frac{\Delta_{FF}}{2}. \quad (5.4)$$

Дійсна робота зовнішньої сили  $F$  дорівнює половині добутку сили на переміщення точки її прикладання щодо напрямку сили (теорема Клапейрона).

З'ясуємо, як виражається робота (5.4) у випадку статичної (рис. 5.1, б) дії декількох сил (рис. 5.2).

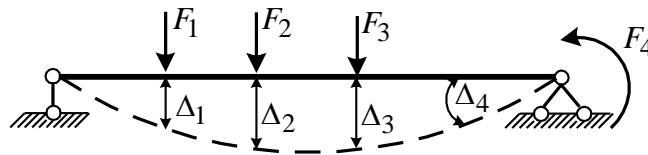


Рис. 5.2. До поширення теореми Клапейрона на випадок дії декількох сил

Показані на рис. 5.2 переміщення є сумарними, тобто

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14};$$

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{24};$$

$$\Delta_3 = \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} + \Delta_{34};$$

$$\Delta_4 = \Delta_{41} + \Delta_{42} + \Delta_{43} + \Delta_{44}.$$

Тепер уявимо, що всі сили (рис. 5.2) прикладаються до балки одночасно і при цьому наростають від нульового до остаточного значення, зберігаючи між собою ту саму пропорцію. Тоді рівність (5.4) набуває такого вигляду:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i \quad (5.5)$$

і читається так: сумарна робота зовнішніх сил дорівнює півсумі добутків остаточного значення кожної сили на остаточне значення відповідного їй сумарного переміщення.

## 5.2. Дійсна робота внутрішніх сил

Коли пружне тіло навантажується зовнішнім навантаженням, то роботу здійснюють не тільки зовнішні, але також внутрішні сили, що розвиваються в усіх деформованих системах. Внутрішніми силами ми будемо вважати сили протилежного зовнішнім напрямку. Завдяки цьому робота внутрішніх сил завжди від'ємна.

Виділимо із прямолінійного стержня нескінченно малий елемент  $ds$  (рис. 5.3).

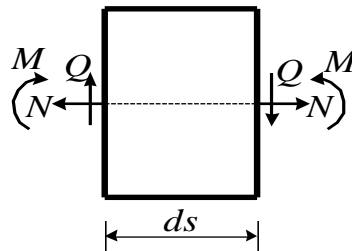


Рис. 5.3. Схема внутрішніх сил, що діють на нескінченно малий елемент  $ds$

До елемента  $ds$  в загальному випадку плоскої задачі прикладені поздовжня сила  $N$ , згинальний момент  $M$  і поперечна сила  $Q$ .

Роботу внутрішніх сил одержимо як суму робіт, зроблених статично зростаючими зусиллями  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  окремо, тобто використовуємо принцип незалежності дії сил, про який йшлося на початку цього розділу.

### 5.2.1. Робота внутрішніх поздовжніх сил

Якщо нормальне зусилля, рівномірно розподілене по перерізу, досягло величини  $N$ , то подовження елемента дорівнює (рис. 5.4)

$$\frac{Nds}{EA} \quad (5.6)$$

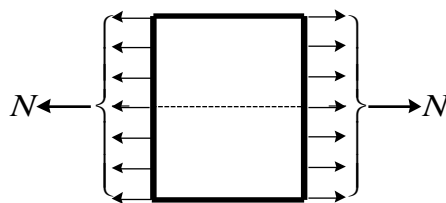


Рис. 5.4. До виведення формули роботи внутрішніх поздовжніх сил

Через те що в процесі, який розглядається, сила поступово зростає від нуля до значення  $N$ , елементарна робота внутрішніх сил у межах елемента дорівнює

$$-\frac{1}{2}N \frac{Nds}{EA} = -\frac{N^2 ds}{2EA}. \quad (5.7)$$

Щоб одержати повну роботу внутрішніх поздовжніх сил, потрібно проінтегрувати елементарні роботи по довжині стержня і скласти по всіх стержнях споруди, тобто

$$W_N = -\sum \int \frac{N^2 ds}{2EA}. \quad (5.8)$$

Інтеграл, що входить до складу формули (5.8), визначений, хоча і записаний тут без вказаних меж.

### 5.2.2. Робота внутрішніх згинальних моментів

Якщо елемент  $ds$  піддається згинанню, то обидва крайні його перерізи в результаті деформації перестають бути паралельними між собою, вони повертаються один відносно одного на деякий нескінченно малий кут  $d\varphi$  (рис. 5.5).

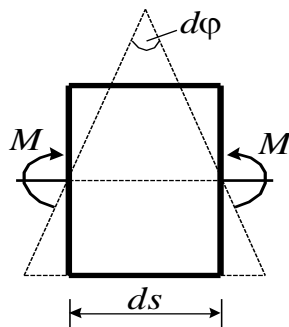


Рис. 5.5. До виведення формули роботи згинальних моментів

З курсу опору матеріалів відомо, що

$$d\varphi = \frac{Mds}{EJ}.$$

Спільна робота обох пар виражається (5.4) добутком

$$-\frac{1}{2}M \frac{Mds}{EJ} = -\frac{M^2 ds}{2EJ}. \quad (5.9)$$

Повна робота внутрішніх згинальних моментів виражається такою формулою:

$$W_M = -\sum \int \frac{M^2 ds}{2EJ}. \quad (5.10)$$

### 5.2.3. Робота внутрішніх тангенціальних сил

Якщо елемент стержня довжиною  $ds$  піддається дії тангенціальних зусиль, що виникають при згинанні, то внутрішні тангенціальні сили також здійснюють роботу (рис. 5.6).

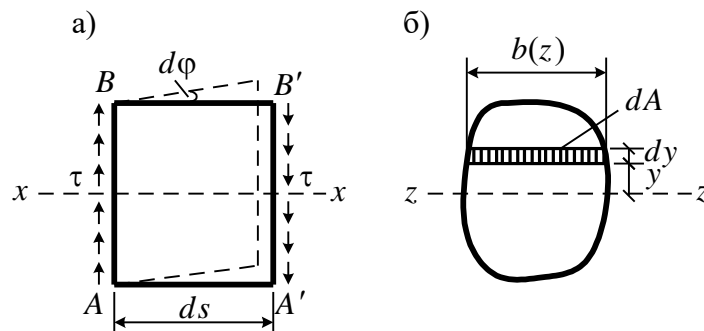


Рис. 5.6. До виведення формули роботи внутрішніх тангенціальних (поперечних) сил

У будь-якій смужці, що паралельна нульовій лінії  $z - z$  і має площу  $dA$ , діє в площині перерізу зсувне напруження

$$\tau = \frac{QS_z}{b(z)J_z}, \quad (5.11)$$

де  $Q$  – рівнодіюча тангенціальних сил у перерізі;  $S_z$  – статичний момент площі, розташованої вище перерізу, в якому визначається дотичне напруження (статичний момент відсіченої площі);  $b(z)$  – ширина перерізу (рис. 5.6, б);  $J_z$  – момент інерції перерізу відносно осі  $z$ , що проходить через центр ваги перерізу.

Взаємний лінійний зсув двох відповідних смужок, узятих на обох торцях  $AB$  і  $A'B'$  елемента  $ds$  (рис. 5.6, а, б), буде

$$\frac{\tau ds}{G},$$

де  $G$  – модуль зсуву, пов'язаний із модулем пружності  $E$  такою залежністю:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Робота сил зсуву вздовж елемента  $ds$  при поступовому зростанні цих сил виражається добутком

$$-\int_A \tau dA \left( \frac{\tau ds}{2G} \right) = -\frac{ds}{2G} \int_A \tau^2 dA = -\frac{Q^2 ds}{2GA} \frac{A}{J_z^2} \int_A \frac{S_z^2}{b(z)^2} dA.$$

Позначимо

$$\mu = \frac{A}{J_z^2} \int \frac{S_z^2}{b(z)^2} dA \quad - \quad (5.12)$$

абстрактне число, що не залежить від зовнішнього навантаження, а залежить лише від форми перерізу. Для прямокутника зі сторонами  $a$  і  $h$   $\mu = 1,2$ ; для кола  $\mu = \frac{32}{27}$ ; для прокатних профілів  $\mu = A / A_s$ , де  $A_s$  – площа вертикальної стінки.

З урахуванням (5.12) повна робота тангенціальних сил стержневої системи дорівнює

$$W_Q = -\sum \int \frac{\mu Q^2 ds}{2GA}. \quad (5.13)$$

Щоб одержати повну роботу всіх внутрішніх сил, складемо роботи (5.8), (5.10) і (5.13):

$$W = -\sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} - \sum \int \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum \int \frac{\mu Q^2 ds}{2GA}. \quad (5.14)$$

Сукупність інтегралів, що знаходяться під знаком кожної з трьох сум, простирається на всі елементи стержневої системи.

Для просторової стержневої системи утворюється аналогічна формула, але містить три моменти (два згинальних і крутний) і дві поперечні сили (рис. 5.7):

$$W = -\sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} - \sum \int \frac{M_z^2 ds}{2EJ_z} - \sum \int \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} - \sum \int \frac{M_x^2 ds}{2GJ_d} - \sum \int \frac{\mu_y Q_y^2 ds}{2GA} - \sum \int \frac{\mu_z Q_z^2 ds}{2GA}. \quad (5.15)$$

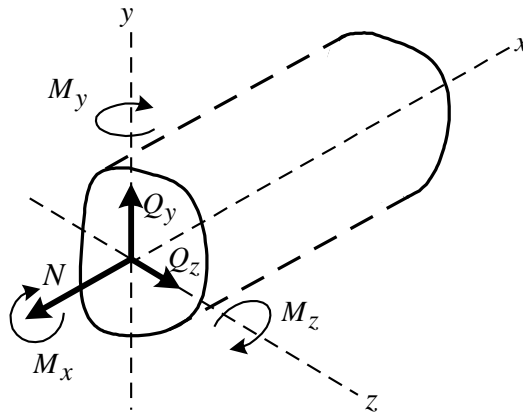


Рис. 5.7. Внутрішні сили в перерізах просторового стержня

У формулі (5.15)  $J_d$  – момент інерції при крутінні;  $\mu_z$  – коефіцієнт форми перерізу відносно осі  $u$ , визначений аналогічно (5.12).

Робота (5.14), (5.15) є квадратичною функцією зовнішніх або внутрішніх сил. Звідси випливає, що робота сил, які викликають деформацію тіла, не підпорядковується принципу незалежності дії сил, тобто спільна робота, зроблена декількома навантаженнями, не дорівнює сумі тих робіт, що могли б бути зроблені кожним навантаженням окремо. Причину цього явища, що, на перший погляд, є несподіваним, легко зрозуміти з простого прикладу (рис. 5.8).

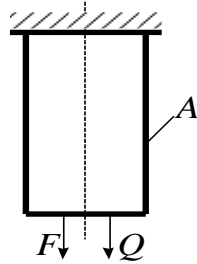


Рис. 5.8. До ілюстрації сумарної роботи зовнішніх сил

Нехай спочатку діє сила  $F$ . Вона викликає переміщення  $\frac{F\ell}{EA}$  і здійснює роботу (див. (5.4), рис. 5.8)

$$W_F = \frac{F^2\ell}{2EA}.$$

Після того як наступила рівновага, подіяла сила  $Q$ . Вона викликає додаткове подовження

$$\frac{Q\ell}{EA},$$

здійснює роботу  $\frac{Q^2\ell}{2EA}$  і втягує в роботу силу  $F$ , яка її й здійснює (залишаючись постійною)

$$F \frac{Q\ell}{EA}.$$

Таким чином, робота сил  $F$  і  $Q$  дорівнює

$$W_{F,Q} = \frac{(F+Q)^2\ell}{2EA} = \frac{F^2\ell}{2EA} + \frac{Q^2\ell}{2EA} + \frac{FQ\ell}{EA}.$$

### 5.3. Можливі переміщення й можлива робота зовнішніх і внутрішніх сил

Під можливими переміщеннями будемо розуміти дуже малі переміщення точок осі споруди, що припускаються наявними зв'язками і не залежать від заданої системи сил.

Розглянемо балку (рис. 5.9). Прикладемо до цієї балки силу  $F$ , що змінюється від нуля до свого кінцевого значення. У результаті своєї дії сила  $F$  викликає переміщення  $\Delta_{FF}$  і здійснює роботу (5.4).

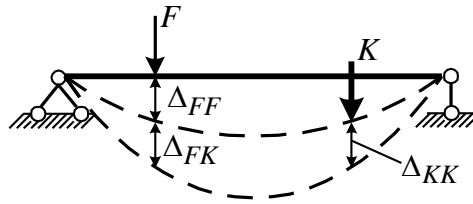


Рис. 5.9. До виведення формул для можливої роботи зовнішніх сил

До балки в деформованому стані (деформований стан розглядається лише для ілюстрації, надалі, з огляду на малі переміщення, не будемо робити різниці між початковими та деформованими станами) прикладаємо силу  $K$ . Сила  $K$ , діючи в такому самому режимі, як і сила  $F$ , здійснює роботу на власних переміщеннях  $\Delta_{KK}$  і втягує в роботу силу  $F$ , викликаючи переміщення  $\Delta_{FK}$ . Через те що переміщення  $\Delta_{FK}$  не залежить від сили  $F$  (сила  $F$  залишилася постійною), робота сили  $F$  буде виражена добутком сили  $F$  на переміщення  $\Delta_{FK}$ :

$$A_F = F\Delta_{FK}. \quad (5.16)$$

Можлива робота внутрішніх сил на переміщеннях, викликаних силою  $K$ , запишеться для плоскої стержневої системи за аналогією з (5.14):

$$A_F = -\sum \int \frac{N_F N_k ds}{EA} - \sum \int \frac{M_F M_k ds}{EJ} - \sum \int \frac{\mu Q_F Q_k ds}{GA}, \quad (5.17)$$

де  $\frac{N_k ds}{EA}$ ,  $\frac{M_k ds}{EJ}$ ,  $\frac{\mu Q_k ds}{GA}$  – переміщення, викликані силою  $K$ ;  $N_F$ ,  $M_F$ ,  $Q_F$  – внутрішні сили, викликані силою  $F$ .

Розглянемо тепер можливу роботу зовнішньої сили  $F$  на температурних переміщеннях і переміщеннях, викликаних зсувом опорних зв'язків (рис. 5.10).

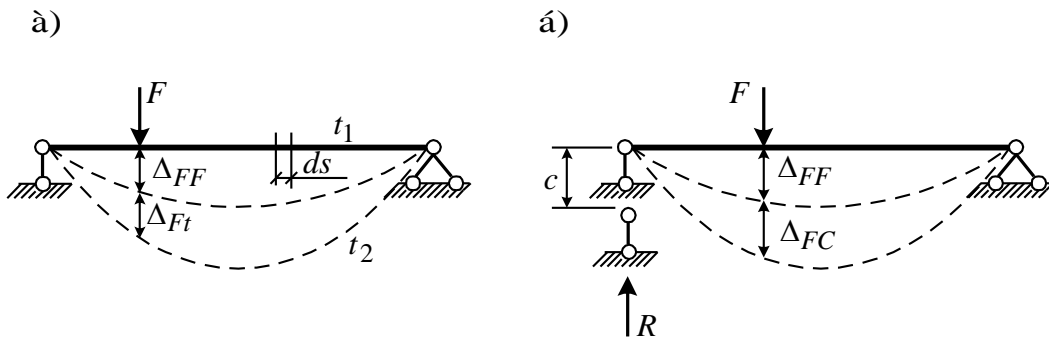


Рис. 5.10. До виведення формули для перебування можливих робіт зовнішніх сил на температурних переміщеннях і переміщеннях опорних зв'язків

Сила  $F$ , змінюючись від нуля до кінцевого значення, викликає переміщення  $\Delta_{FF}$  і здійснює роботу (про це йшлося вище). Тепер, коли сила  $F$  закінчила свою дію, до балки прикладаються температурні впливи (рис. 5.11, а).

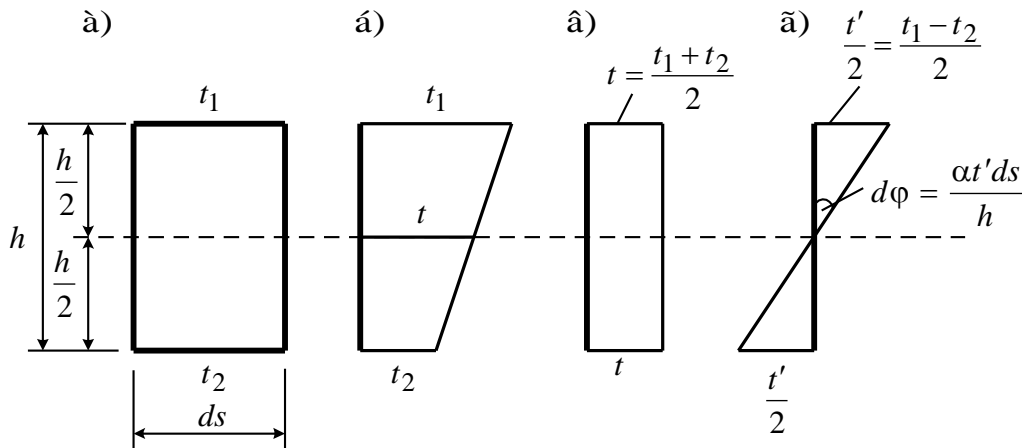


Рис. 5.11. Схема температурних впливів на елемент  $ds$

Епюра температурних впливів на елемент  $ds$  показана на рис. 5.11, б. Прийнято, що по висоті перерізу температура змінюється за лінійним законом. Епюра температурних впливів розкладена на епюру, що характеризує симетричні впливи з осьюовою температурою  $t$  (рис. 5.11, в), і епюру, що характеризує обернено симетричні впливи (скривлення) із температурою  $\frac{t'}{2}$  (рис. 5.11, г).

Симетричні температурні впливи викликають переміщення елемента  $ds$ , що дорівнюють

$$\alpha t ds,$$

де  $\alpha$  – температурний коефіцієнт, що залежить від матеріалу, із якого виготовлена конструкція, а косиметричні температурні впливи



викривляють елемент  $ds$ , викликаючи нахил вертикальних граней на малий кут

$$d\varphi = \frac{\alpha t' ds}{h}.$$

На переміщеннях, викликаних симетричною температурою, працюють поздовжні сили  $N_F$  (поздовжня сила  $N$  виникає в балці, показаній на рис. 5.10, а, якщо обидві її опори шарнірно-нерухомі, тому що балка при температурних впливах, подовжуючись, зустрічає опір опор), а на кутових переміщеннях – згинальні моменти  $M_F$ . Таким чином, повна робота внутрішніх сил стержневої системи на температурних переміщеннях буде

$$A_t = -\sum \int \alpha t N_F ds - \sum \int \frac{\alpha t'}{h} M_F ds. \quad (5.18)$$

Що стосується можливої роботи внутрішніх сил на зсуві опорного зв'язку (рис. 5.10, б), то вона може бути виражена формулою, аналогічною (5.6), тобто

$$A_\Delta = RC, \quad (5.19)$$

де  $R$  – реакція в тому зв'язку, що за умовою задачі переміщується;  $C$  – заданий зсув зв'язку.

#### 5.4. Загальна формула для визначення переміщень

Бажаючи одержати формулу, однаково придатну для всіх видів балок, ферм, рам, арок і т. п., ми повинні виходити з такого закону, що однаковою мірою можна застосувати до всіх названих систем. Таким законом є принцип можливих переміщень:

якщо система знаходиться в рівновазі під дією прикладених до неї зовнішніх сил, то при будь-якому можливому безкінечно малому переміщенні точок цієї системи (нескінченно малій деформації) сума робіт її зовнішніх і внутрішніх сил дорівнює нулю.

Розглянемо, наприклад, раму, що знаходиться під дією заданого навантаження, температури, і, крім того, опора  $B$  цієї рами перемістилася в положення  $B'$ . Потрібно визначити переміщення точки  $C$  в довільному напрямку  $i-i$  (рис. 5.12, а), тобто  $\Delta_{ik}$ . Які б можливі нескінченно малі переміщення ми не дали нашій системі, сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил стану  $j$  на цих переміщеннях буде дорівнювати нулю. Отже, ми можемо скласти відповідне рівняння робіт нескінченною множиною

способів. Проте жодне з цих рівнянь не призведе нас до мети, якщо в нього не ввійде шукане переміщення  $\Delta_{ij}$  (рис. 5.12, а).

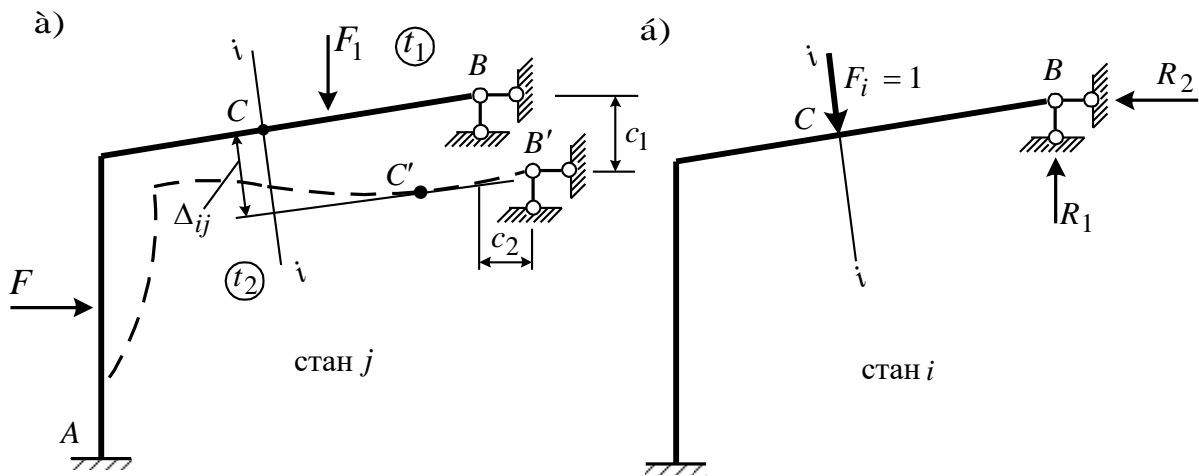


Рис. 5.12. До побудови загальної формули для визначення переміщень

Поступимо так. Запишемо рівняння робіт не для дійсного стану споруди  $j$ , а для уявного, віртуального, спеціально підбраного стану  $i$  (рис. 5.12, б). Воно містить лише одне зовнішнє навантаження, як-от силу, що дорівнює одиниці й прикладена в тій самій точці  $C$  споруди  $i$  по тому напрямку, по якому потрібно розшукати переміщення. Тоді, приймаючи стан  $i$  за дійсний стан, а стан  $j$  за можливий, одержимо

$$1 \cdot \Delta_{ij} + A_F + A_t + \sum RC = 0, \quad (5.20)$$

де  $1 \cdot \Delta_{ij}$  – робота сили  $F_i = 1$ ;  $A_F$  – можлива робота внутрішніх сил стану  $i$  на переміщеннях, викликаних силами стану  $j$  (5.17);  $A_t$  – можлива робота внутрішніх сил стану  $i$  на температурних переміщеннях стану  $j$  (5.18);  $\sum RC$  – можлива робота реакцій стану  $i$  на переміщеннях  $j$  (5.19).

З рівняння (5.20) з урахуванням (5.17), (5.18), (5.19) знайдемо

$$\Delta_{ij} = \sum \int \frac{N_i N_j ds}{EA} + \sum \int \frac{M_i M_j ds}{EJ} + \sum \int \frac{\mu Q_i Q_j ds}{GA} + \sum \int \alpha t N_i ds + \sum \int \frac{dt'}{h} M_i ds - \sum RC. \quad (5.21)$$

Отримана формула (5.21) дає загальне рішення, що годиться для всіх плоских пружних геометрично незмінних стержневих систем. Справедлива вона тільки в тому випадку, коли деформації, викликані окремими

факторами – навантаженням, температурою та переміщеннями опор, достатньо малі, щоб виправдати застосування закону незалежності дії сил.

Перші три доданки в цій формулі представляють переміщення від дії зовнішнього навантаження (інтеграл О. Мора, 1874 р.). Четвертий і п'ятий члени формули (5.21) представляють переміщення від зміни температури  $T$ . Останній член є переміщенням від заданого зсуву зв'язків. Символ  $\sum \int$  у формулі (5.21) означає, що інтегрування провадиться по довжинах усіх стержнів, що складають споруду. В останньому члені формули (5.21) передбачене підсумовування добутків  $RC$ . Техніку обчислення переміщень за формулою (5.21) розглянемо надалі від кожного з трьох впливів.

Коли епюри  $N_j$ ,  $M_j$ ,  $Q_j$ , а також температура та переміщення опорних та інших зв'язків задані (рис. 5.13, а), то для визначення кожного переміщення потрібно підібрати відповідну йому можливу (віртуальну) систему.

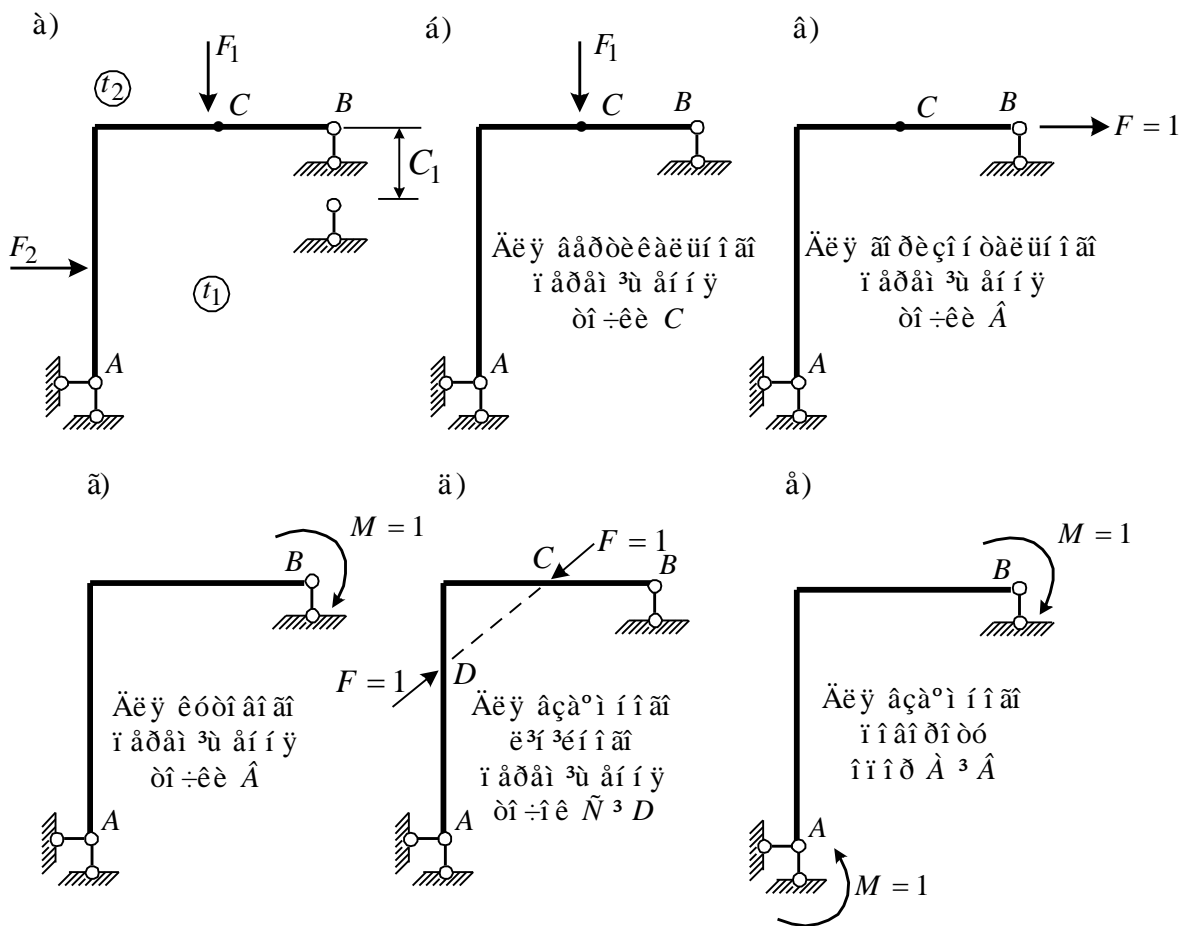


Рис. 5.13. Приклади вибору можливих (віртуальних) станів системи

Якщо необхідно визначити вертикальне переміщення точки  $C$ , то можливий стан рами характеризується тим, що в точці  $C$  вертикально прикладена одинична сила (рис. 5.13, б). При визначенні горизонтального і

кутового переміщень точки  $B$  можливі стани повинні бути такими, як показано на рис. 5.13, в, г. Якщо потрібно визначити взаємні переміщення (наприклад, взаємне лінійне переміщення точок  $C$  і  $D$  або взаємний кут повороту опор  $A$  і  $B$ ), то можливі системи повинні бути подані парами одиничних сил або моментів (рис. 5.13, д, е).

### 5.5. Визначення переміщень від заданого зовнішнього навантаження

Для обчислення переміщень від заданого зовнішнього навантаження використовуємо перші три члени універсальної формули (5.21), замінивши індекси  $j$  на  $F$  і  $i$  на  $k$ :

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{N_k N_F ds}{EA} + \sum \int \frac{M_k M_F ds}{EJ} + \sum \int \frac{\mu Q_k Q_F ds}{GA}, \quad (5.22)$$

де  $N_k$ ,  $M_k$ ,  $Q_k$  – вирази внутрішніх зусиль як функції координати  $s$  довільного перерізу від одиничної узагальненої сили, прикладеної в точці  $K$  в напрямку шуканого переміщення (див. п. 5.4);  $N_F$ ,  $M_F$ ,  $Q_F$  – вирази внутрішніх сил як функції координати  $s$  від заданого зовнішнього навантаження;  $E$  – модуль пружності матеріалу стержня;  $G = E/2(1 + \nu)$  – модуль зсуву (див. п. 5.2.3);  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона (див. також п. 5.2.3);  $A$  – площа поперечного перерізу стержня;  $J$  – момент інерції відносно осі, яка проходить через центр ваги перерізу, тобто нейтральної осі (якщо стержень має велику кривизну  $h/R > 1/5$ , нейтральний шар при чистому згинанні не збігається з центром ваги перерізу, тому використовувати формулу (5.22) у цьому випадку не можна);  $\mu$  – коефіцієнт форми перерізу (див. п. 5.2.3).

При  $EA = \text{const}$ ,  $EJ = \text{const}$ ,  $GA = \text{const}$  по довжині кожного стержня вираз (5.22) набуває вигляду

$$\Delta_{kF} = \sum \frac{1}{EA} \int N_k N_F ds + \sum \frac{1}{EJ} \int M_k M_F ds + \sum \frac{\mu}{GA} \int Q_k Q_F ds. \quad (5.23)$$

Формули (5.22) і (5.23) дозволяють визначити будь-які узагальнені переміщення. При цьому в ролі узагальненої сили приймаються: при обчисленні лінійного переміщення – зосереджена одинична сила  $F = 1$ ; при обчисленні кутового переміщення – зосереджений одиничний момент  $M = 1$ ; при обчисленні взаємного лінійного переміщення двох точок – дві рівні і в протилежні боки спрямовані зосереджені сили по прямій, яка з'єднує точки; при обчисленні взаємного повороту двох перерізів – зосереджені одиничні моменти в обох перерізах, спрямовані в протилежні боки (див. рис. 5.13).

Якщо розглядаються споруди, що працюють переважно на згинання (балки, рами, а часто й арки), то у формулах переміщень (5.22) і (5.23) без істотної похибки можна залишити тільки інтеграл, що залежить від згинальних моментів. Покажемо це. Розглянемо консольну балку (рис. 5.14). Прийmemo  $EJ = \text{const}$ ,  $GA = \text{const}$ .

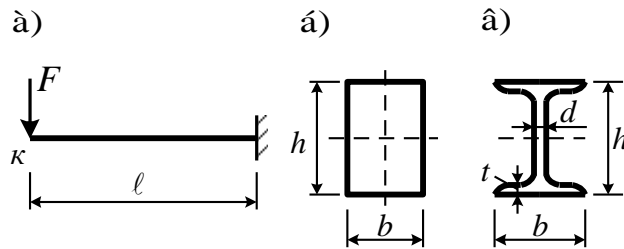


Рис. 5.14. Вплив форми перерізу консольної балки на переміщення її кінця

Визначимо вертикальне переміщення точки  $k$  (рис. 5.14, а). Через те що тут  $N_k = 0$ , формула (5.23) приймає такий вигляд:

$$\Delta_{kF} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell} M_k M_F dx + \frac{\mu}{GA} \int_0^{\ell} Q_k Q_F dx ;$$

$$M_F = -Fx ; M_k = -1 \cdot x ; Q_F = -F ; Q_k = -1 ; G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Після інтегрування та найпростіших перетворень маємо

$$\Delta_{kF} = \frac{F\ell^3}{3EJ} \left[ 1 + \frac{6\mu(1+\nu)J}{A\ell^2} \right]. \quad (5.24)$$

Розглянемо прямокутний переріз із розмірами  $b$  і  $h$  (рис. 5.14, б). Площа перерізу  $A = bh$ , момент інерції  $J = bh^3 / 12$ . Після підстановки  $A$  та  $J$  у вираз (5.24) одержуємо

$$\Delta_{kF} = \frac{F\ell^3}{3EJ} \left[ 1 + \frac{\mu(1+\nu)}{2} \left( \frac{h}{\ell} \right)^2 \right].$$

При коефіцієнті Пуассона  $\nu = 0,3$  і коефіцієнті форми перерізу  $\mu = 1,2$  прогин, викликаний деформацією зсуву (другий член формули) порівняно з прогином, викликаним деформацією згину (перший член формули), складає:

$$\text{при } \frac{h}{\ell} = \frac{1}{5} - 3,12 \% ; \quad \text{при } \frac{h}{\ell} = \frac{1}{10} - 0,78 \% .$$

Таким чином, вплив поперечних сил на згин тим менший, чим менше відношення  $h/\ell$ . При

$$\frac{h}{\ell} < \frac{1}{10}$$

без істотної похибки можна знехтувати деформаціями зсуву.

Тепер розглянемо переріз балки з прокатного профілю (двутавра) (рис. 5.14, в). Прийнемо двотавр № 20 (див. сортамент прокатної сталі, ГОСТ 8239-72). Для нього:  $A = 26,8 \text{ см}^2$ ,  $J_x = 1840 \text{ см}^4$ ;  $h = 20 \text{ см}$ ;  $d = 0,52 \text{ см}$ ;  $t = 0,84 \text{ см}$ .

Нехай  $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{5}$ , тоді  $\ell = 100 \text{ см}$ . Визначимо коефіцієнт форми перерізу

$$\mu = \frac{A}{A_s} = \frac{26,8}{0,52(20 - 1,68)} = 2,813.$$

Підставивши  $\mu$  у формулу (5.24), знайдемо, що прогин, викликаний деформацією зсуву, складає 15,06 % від прогину, викликаного деформацією згину.

При  $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{10}$  вплив деформацій зсуву оцінюється в 3,76 %. При  $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{15}$  – 1,67 %; при  $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{20}$  – 0,94 %. Такий саме результат можна отримати, розглядаючи інші балки, поперечний переріз яких складається з прокатних профілів. Отже, якщо балка, яка розглядається, складається з прокатних профілів, то відношення  $\frac{h}{\ell}$ , коли можна знехтувати деформаціями зсуву, має бути

$$\frac{h}{\ell} \leq \frac{1}{20}.$$

Отже, для елементів, що згинаються,

$$\Delta_{kF} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_k M_F ds. \quad (5.25)$$

При розрахунку споруд, елементи яких працюють на центральне розтягання або стискання (ферма), відсутні деформації згину і зсуву, тобто

$$\Delta_{kF} = \sum \frac{1}{EA} \int N_k N_F ds = \sum_{i=1}^n \frac{N_{k,i} N_{F,i} \ell_i}{E_i A_i}, \quad (5.26)$$

де  $n$  – кількість стержнів ферми.

Обчислення інтегралів, що входять у формулу (5.25), коли одне з зусиль  $M_k$  або  $M_F$  змінюється за лінійним законом, може бути здійснене за правилом Верещагіна “перемножуванням” епюр, тобто

$$\int_A^B M_k M_F ds = \omega y_0, \quad (5.27)$$

де  $\omega$  – площа криволінійної епюри;  $y_0$  – ордината під центром ваги криволінійної епюри, що узята на прямолінійній епюрі.

Якщо обидві епюри прямолінійні, то байдуже, для якої епюри брати площу  $\omega$ , а для якої ординату  $y_0$ . У табл. 5.1 наведені приклади обчислення інтеграла (5.27) для деяких найпростіших епор. Зауважимо, що будь-яку складну епюру завжди можна подати сумою простих фігур (трикутників і парабол) (рис. 5.15).

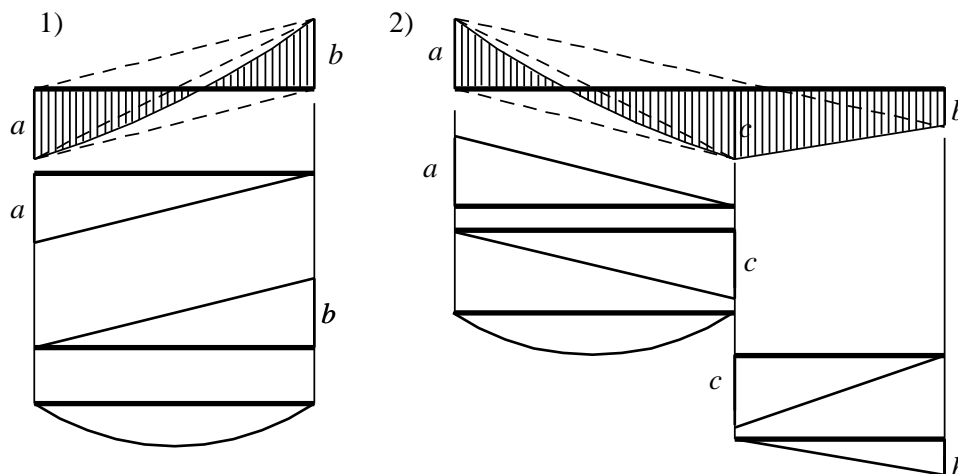


Рис. 5.15. Приклад подання епюри  $M$  як суми простих епор

У загальному випадку більш складних епор зручною для обчислення інтегралу (5.27) є формула Сімпсона

$$\int_A^B M_k M_F ds = \frac{l}{6EJ} \left( M_F^{\text{л}} M_k^{\text{л}} + 4M_F^{\text{с}} M_k^{\text{с}} + M_F^{\text{н}} M_k^{\text{н}} \right),$$

де  $M_F^{\text{л}}, M_F^{\text{н}}, M_F^{\text{с}}, M_k^{\text{л}}, M_k^{\text{н}}, M_k^{\text{с}}$  – ординати вантажної  $M_F$  та одиничної  $M_k$  епор у крайніх та середній точках ділянки;  $l$  – довжина ділянки.

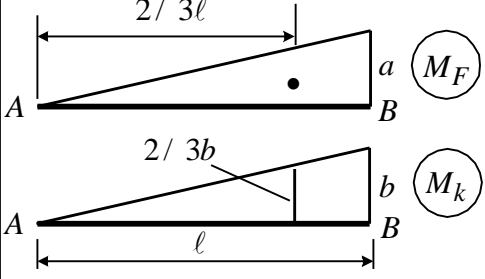
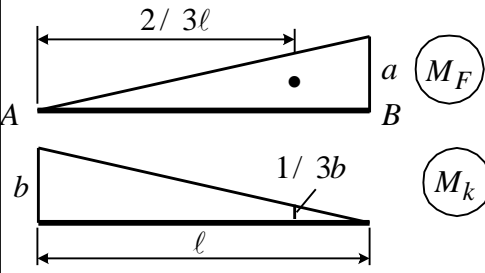
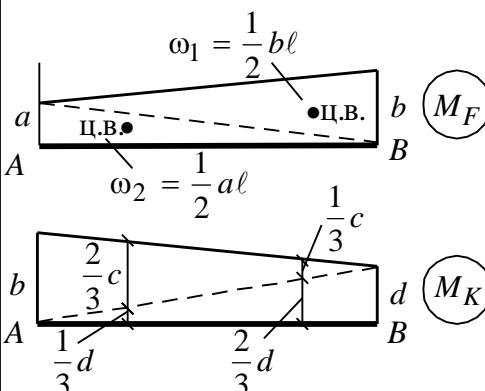
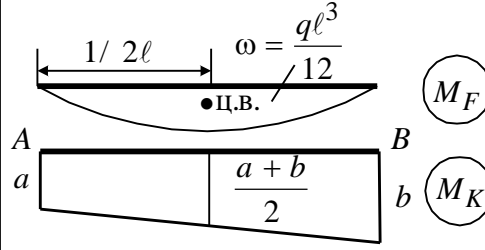
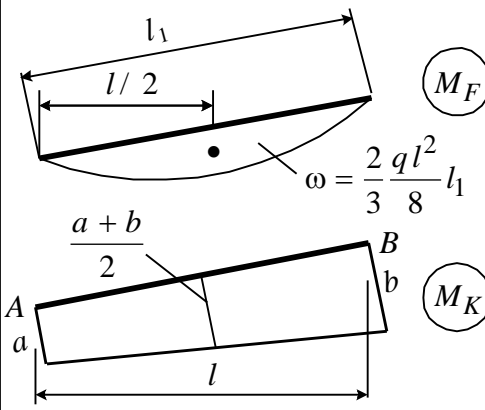
Для криволінійних ділянок стержнів і стержнів із перемінною жорсткістю при обчисленні переміщень необхідно робити інтегрування, попередньо виразивши всі підінтегральні величини у функції від однієї перемінної. Якщо підінтегральна функція важко піддається інтегруванню, інтеграл із достатнім ступенем точності можна обчислити приблизно. З цією метою вісь стержня розбивається на декілька ділянок довжиною  $\Delta S$ , а потім кожна ділянка приймається прямолінійною, і всі перемінні величини в межах ділянки приймаються постійними, що рівнюють середнім їхнім значенням. Тоді (якщо враховувати тільки згинальні моменти)

$$\int \frac{M_k M_F}{EJ} ds = \sum \frac{M_{k(\text{сеп})} M_{F(\text{сеп})}}{EJ_{\text{сеп}}} \Delta S. \quad (5.28)$$

Точність обчислення збільшується за рахунок більшої кількості прийнятих ділянок.

Таблиця 5.1

Приклади обчислення інтегралу (5.27)

Аі р дè $M_F^3 M_k$	Значення інтеграла
	$\int_A^B M_F M_k dx = \frac{abl}{3}$
	$\int_A^B M_F M_k dx = \frac{abl}{6}$
	$\int_A^B M_F M_k dx = \frac{1}{6} [a(2c + d) + b(2d + c)]$
	$\int_A^B M_F M_k dx = \frac{ql^3}{24} (a + b)$
	$\int_A^B M_F M_k dx = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l_1 \frac{1}{2} (a + b) = \frac{ql^2 l_1}{24} (a + b)$



### 5.5.1. Приклад визначення переміщень від заданого зовнішнього навантаження

Для заданої рами (рис. 5.16) потрібно визначити взаємний поворот перерізів  $A$  і  $B$  з урахуванням тільки згинальних деформацій.

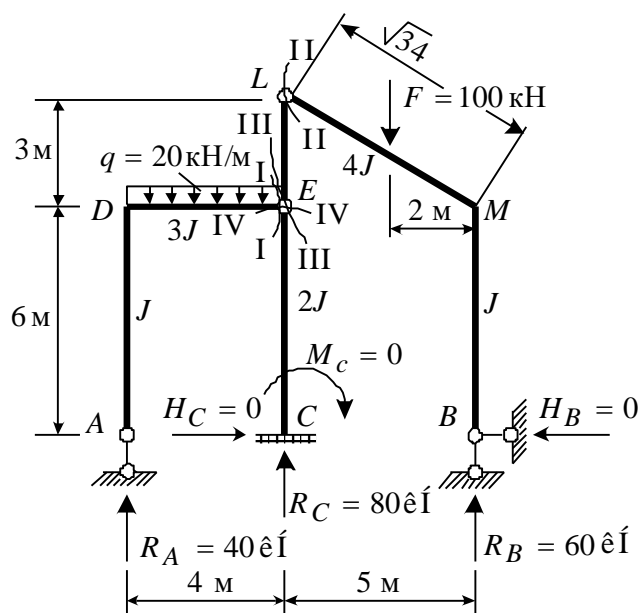


Рис. 5.16. Розрахункова схема рами

Побудуємо спочатку епюру моментів від заданого зовнішнього навантаження. Знайдемо опорні реакції. Для знаходження реакції  $R_A$  складемо рівняння моментів лівих сил відносно шарніра  $E$  (переріз I-I):

$$R_A \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

Звідси  $R_A = 40$  кН.

Для визначення реакцій  $R_B$  і  $H_B$  складемо систему рівнянь правих сил відносно шарнірів  $L$  і  $E$  (переріз II-II і III-III):

$$R_B \cdot 5 - H_B \cdot 9 - 100 \cdot 3 = 0,$$

$$R_B \cdot 5 - H_B \cdot 6 - 100 \cdot 3 = 0.$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо  $H_B = 0$ ;  $R_B = 60$  кН.

Спроекуємо всі сили, що діють на раму, на горизонталь:

$$H_C - H_B = 0.$$

Звідси  $H_C = 0$ .

Складемо рівняння моментів сил, розташованих нижче шарніра  $E$  на стійці  $EC$  (переріз IV-IV). Одержуємо  $M_C = 0$ . Спроекувавши всі сили на вертикаль, знайдемо  $R_C = 80$  кН. Епюра моментів показана на рис. 5.17, а.

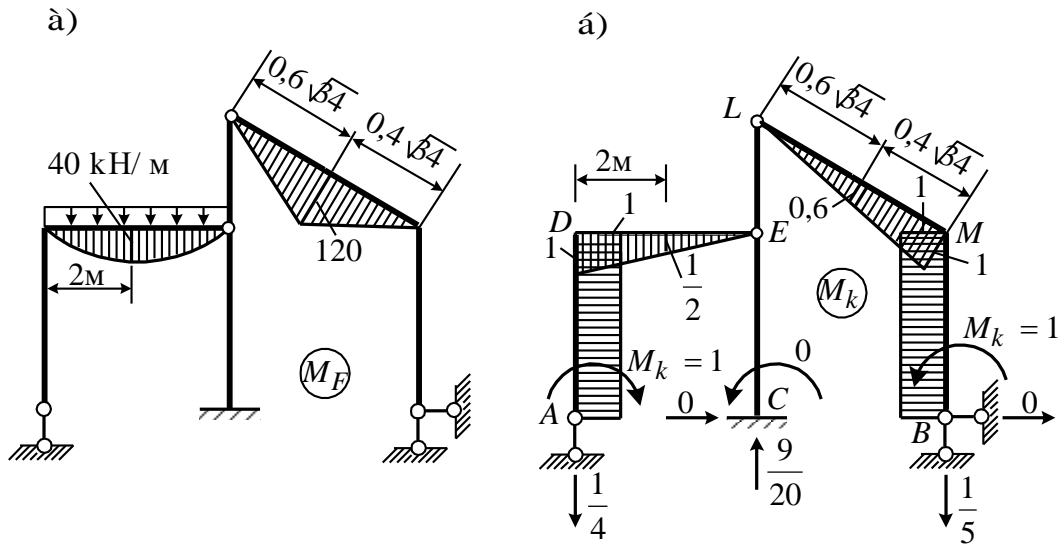


Рис. 5.17. Епюра моментів від зовнішнього навантаження (а) і одинична епюра моментів (б)

Для знаходження взаємного повороту перерізів  $A$  і  $B$  прикладемо до допоміжного стану рами два рівних і в протилежні боки спрямованих одиничних моменти (рис. 5.17, б). Як і раніше, знайдемо опорні реакції та побудуємо одиничну епюру.

Визначимо шукане взаємне переміщення перерізів  $A$  і  $B$ . Ділянки, де є епюри  $M_k$  і  $M_F$ , –  $DE$  і  $LM$  (рис. 5.17, а, б).

$$\Delta_{kF}^{\varphi} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 0,6\sqrt{34} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 0,4 \times \right. \\ \left. \times \sqrt{34} \left( \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{64,43}{EJ} \text{ рад.}$$

Переміщення здійснилося зі знаком “плюс”, отже, перерізи  $A$  і  $B$  повертаються назустріч один одному (за напрямком одиничних моментів, (рис. 5.17, б).

## 5.6. Визначення переміщень від температурних впливів

Для визначення переміщень від зміни температури використовуємо четвертий і п'ятий члени універсальної формули (5.21)

$$\Delta_{kF} = \pm \sum \int \alpha t N_k ds \pm \sum \int \frac{\alpha t'}{h} M_k ds. \quad (5.29)$$

Тут використані позначення величин, прийняті раніше (див. рис. 5.11). Порівняно з загальною формулою тут індекс  $i$  замінений на  $k$ . Значення температурних коефіцієнтів приведені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Коефіцієнти лінійного розширення  $\alpha$  (на  $1^0 \text{ C}$ )

Матеріал	$\alpha$
Алюміній	$255 \cdot 10^{-7}$
Магній	$255 \cdot 10^{-7}$
Мідь	$167 \cdot 10^{-7}$
Бронза й латунь	$(170 - 220) \cdot 10^{-7}$
Бетон	$(100 - 140) \cdot 10^{-7}$
Сталь	$(100 - 130) \cdot 10^{-7}$
Кам'яна кладка	$(40 - 70) \cdot 10^{-7}$
Дерево	$(20 - 50) \cdot 10^{-7}$

Якщо  $\alpha$ ,  $t$ ,  $t'$ ,  $h$  – постійні по довжині стержня, то формула (5.29) приймає такий вигляд:

$$\Delta_{kt} = \pm \sum \alpha t \omega_{Nk} \pm \sum \frac{\alpha t'}{h} \omega_M, \quad (5.30)$$

де  $\omega_N$ ,  $\omega_M$  – площі епюр  $N_k$  і  $M_k$  на ділянках, що розглядаються.

Правила знаків перед першим і другим членами формули (5.30) прийняті такими.

Перед першим членом знак “плюс” приймається в тому випадку, якщо поздовжня сила і температура  $t$  викликають одночасно укорочення або подовження елемента. Якщо температура вкорочує (подовжує) елемент, а поздовжня сила подовжує (укорочує), то перед першим членом формули (5.30) ставиться знак “мінус”.

Перед другим членом формули (5.30) знак “плюс” приймається в тому випадку, якщо температура і згинальний момент викривляють елемент, що розглядається, в один бік. Якщо в різні боки – приймається знак “мінус”.

Таким чином, щоб визначити будь-яке переміщення від заданого температурного впливу, необхідно до споруди прикласти узагальнену одиничну силу в задану точку  $K$  і побудувати одиничні епюри  $N_k$  і  $M_k$ . Далі переміщення визначається за формулами (5.29) або (5.30).

### 5.6.1. Приклад визначення переміщень від температурних впливів

Для заданої рами (рис. 5.18) потрібно визначити горизонтальне переміщення точки  $K$ .

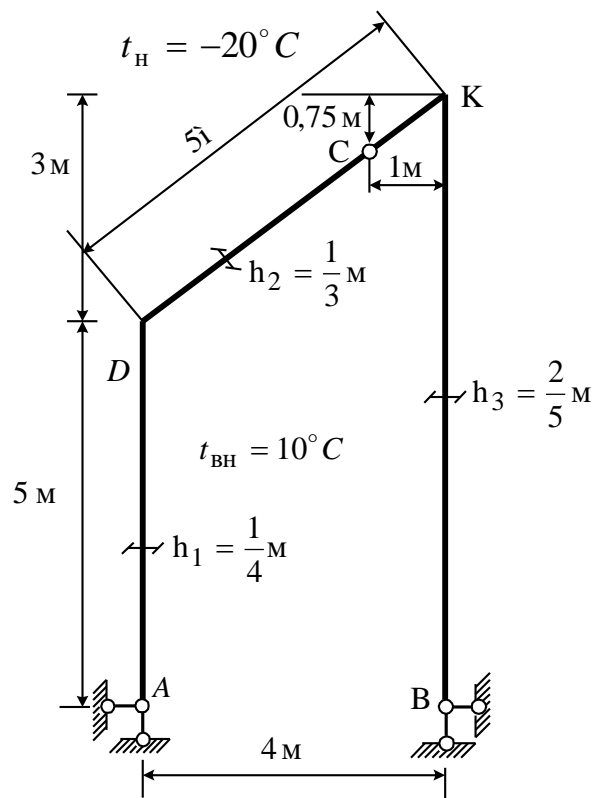


Рис. 5.18. Розрахункова схема рами

Відповідно до викладеного в п. 5.6 порядку визначення переміщень прикладаємо в точці  $K$  горизонтальну одиничну силу (рис. 5.19).

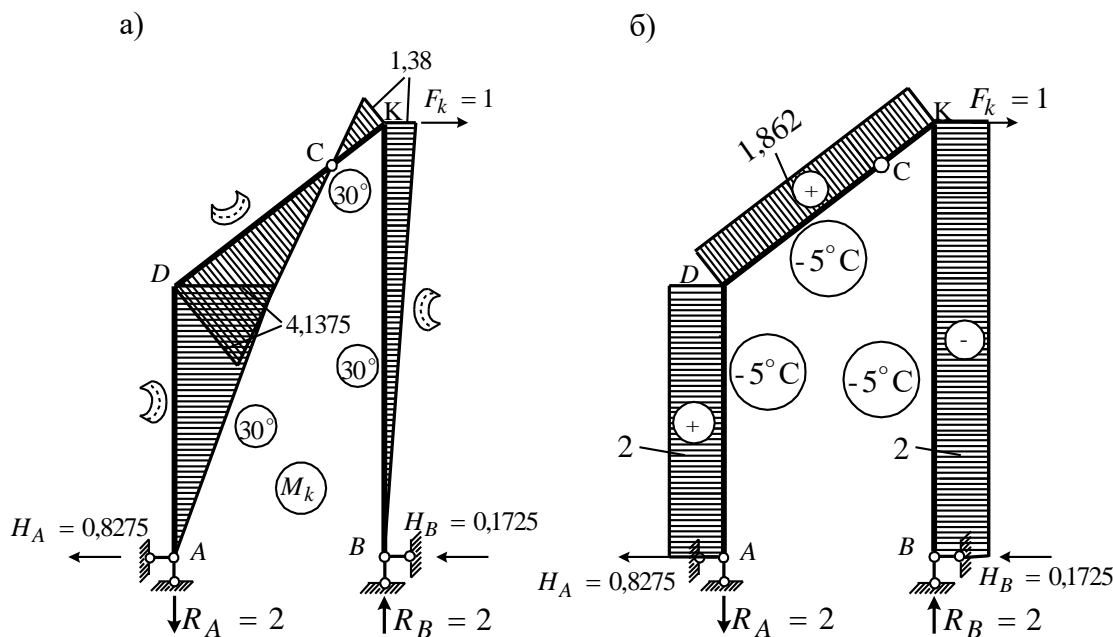


Рис. 5.19. Епюри згинальних моментів  $M_k$  і поздовжніх сил  $N_k$

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 4 - 1 \cdot 8 = 0, \quad R_A = 2;$$

$$\sum F_y = 0: R_A - R_B = 0, \quad R_A = R_B = 2;$$

$$\sum M_C^{\text{лів}} = 0: R_A \cdot 3 - H_A \cdot 7,25 = 0, \quad H_A = 0,8275;$$

$$\sum F_x = 0: H_A + H_B - 1 = 0, \quad H_B = 0,1725.$$

Перевірка:  $\sum M_C^{\text{пр}} = 0: R_B \cdot 1 - H_B \cdot 7,25 - 1 \cdot 0,75 = 0.$

Епюри моментів і поздовжніх сил побудовані на рис. 5.19, а, б.

Визначимо температуру по осі елементів, що складають раму, і модуль різниці внутрішньої та зовнішньої температур

$$t = \frac{10 - 20}{2} = -5^\circ \text{C}, \quad t = |10 + 20| = |30|^\circ \text{C}.$$

За формулою (5.29) обчислюємо шукане переміщення. Знаки перед першим членом формули (5.29): на ділянках  $AD$  і  $DK$  – мінус (температура вкорочує елементи  $AD$  і  $DK$ , а поздовжня сила подовжує (рис. 5.19, б), на ділянці  $BK$  – плюс.

Знаки перед другим членом формули (5.29): на ділянках  $AD$  і  $DC$  – плюс (момент і температура викривляють елементи в один бік (рис. 5.19, а), на ділянках  $CK$  і  $KB$  – мінус.

$$\begin{aligned} \Delta_{kt} = & -\alpha \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 - \alpha \cdot 5 \cdot 1,862 \cdot 5 + \alpha \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 + \frac{\alpha \cdot 30}{1/4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,1375 \cdot 5 + \frac{\alpha \cdot 30}{1/3} \times \\ & \times \frac{1}{2} \cdot 4,1375 \cdot 3,75 - \frac{\alpha \cdot 30}{1/3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,38 \cdot 1,25 - \frac{\alpha \cdot 30}{2/5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,38 \cdot 8 = 1381,27\alpha. \end{aligned}$$

Якщо вважати, що рама сталева (за табл. 5.2  $\alpha = 115 \cdot 10^{-7}$ ), то шукане переміщення буде дорівнювати

$$\Delta_{kt} = 1381,27 \cdot 115 \cdot 10^{-7} = 0,016 \text{ м} = 1,6 \text{ см.}$$

### 5.7. Визначення переміщень від заданого зсуву зв'язків

Для знаходження переміщень від заданого зсуву зв'язків використовуємо останній член універсальної формули (5.21)

$$\Delta_{kc} = - \sum_{i=1}^{\gamma} R_{ki} C_i, \quad (5.31)$$

де  $R_{ki}$  – реакція, що виникає від одиничної узагальненої сили, прикладеної в точці  $k$  за напрямком шуканого переміщення в можливому стані (рис. 5.13), в  $i$ -му зв'язку, зсув якого заданий.

Добуток  $R_{ki} C_i$  вважається додатним, якщо напрямок зсуву зв'язку і напрямок зусилля, що в ньому виникає, збігаються.

Для того щоб знайти переміщення якоїсь точки від заданого зсуву зв'язків, необхідно в точці  $K$  за напрямком шуканого переміщення прикласти одиничну силу (момент) і знайти реакції в тих зв'язках системи, що за умовою задачі переміщуються. Далі варто скористатися формулою (5.31).

#### 5.7.1. Приклад визначення переміщень від зсуву опорних зв'язків

Для заданої рами (рис. 5.20, а) потрібно визначити вертикальне переміщення точки  $K$ .

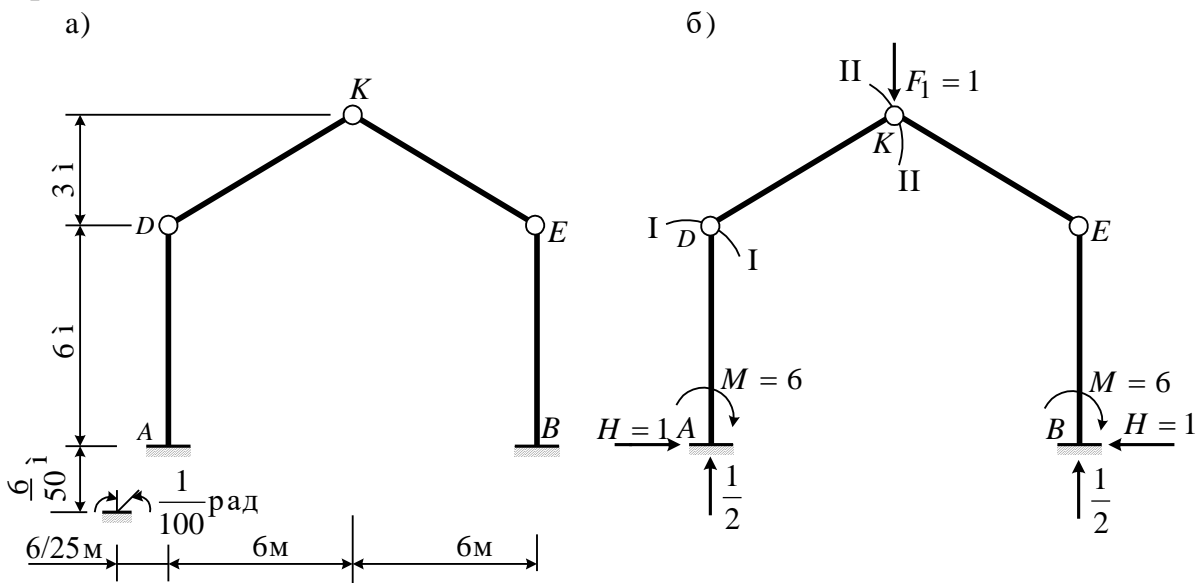


Рис. 5.20. Розрахункова схема рами (а) і реакції в зв'язках, що переміщуються (б)

У точці  $K$  можливого стану рами прикладаємо вертикально одиничну силу і визначаємо опорні реакції (рис. 5.20, б).

Вертикальні реакції рівні між собою, оскільки рама симетрична щодо вертикальної осі, тобто

$$R_A = R_B = 1/2.$$

Складемо рівняння:

$$\sum M_D^{\text{лів}} = 0 \text{ (переріз I-I на рис. 5.20, б):}$$

$$H \cdot 6 - M = 0, \quad H = \frac{M}{6};$$

$$\sum M_K^{\text{лів}} = 0 \text{ (переріз II-II на рис. 5.20, б):}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 + M - H \cdot 9 = 0, \quad \text{або} \quad 3 + M - \frac{M}{6} \cdot 9 = 0;$$

$$M = 6, \quad H = 1.$$

Тепер за (5.31) знайдемо переміщення

$$\Delta_{kc} = -\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{50} - 1 \cdot \frac{6}{25} + 6 \cdot \frac{1}{10}\right) = 24 \text{ см.}$$

## 5.8. Основні енергетичні теореми

При визначенні переміщень пружних систем ми використовували принцип можливих переміщень і пов'язане з ним поняття можливої роботи (див. п. 5.3), не торкаючись багатьох важливих властивостей цих систем. Тепер розглянемо ці властивості.

### 5.8.1. Теорема про взаємність робіт

Уявимо, що лінійно-пружна система (рис. 5.21, а, б) послідовно навантажується спочатку силою  $F_1$  (рис. 5.21, а), а потім силою  $F_2$  (рис. 5.21, б).

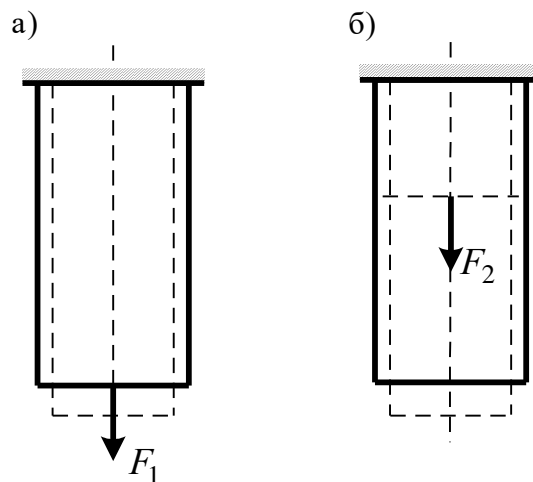


Рис. 5.21. До виведення теореми про взаємність робіт

Роботу цих сил подамо у вигляді суми

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22}, \quad (5.32)$$

де  $A_{11}$  – робота сили  $F_1$  на переміщенні, викликаному цією силою;  $A_{12}$  – робота сили  $F_1$  на переміщенні, викликаному силою  $F_2$ ;  $A_{22}$  – робота сили  $F_2$  на переміщенні, викликаному цією самою силою.

Якщо тепер подати завантаження в оберненій послідовності – спочатку силою  $F_2$ , а потім силою  $F_1$ , то ту саму роботу  $A$  можна записати як

$$A = A_{22} + A_{21} + A_{11}. \quad (5.33)$$

З принципу суперпозиції для переміщень випливає, що  $\Delta_{22}$  і  $\Delta_{11}$  не залежать від послідовності прикладання навантажень  $F_1$  і  $F_2$ . Порівнюючи вирази (5.32) і (5.33), можна зробити висновок, що

$$A_{12} = A_{21}, \quad (5.34)$$

тобто робота сили  $F_1$  на переміщенні, викликаному силою  $F_2$ , дорівнює роботі сили  $F_2$  на переміщенні, викликаному силою  $F_1$ . Дане твердження називається теоремою про взаємність робіт або теоремою Бетті\*. Поширимо отриману рівність на будь-яке завантаження.

Припустимо, що пружна система може мати декілька різноманітних станів, що відповідають різноманітним завантаженням. Пронумеруємо ці стани і порівняємо два:  $i$  та  $k$  (рис. 5.22, а, б).

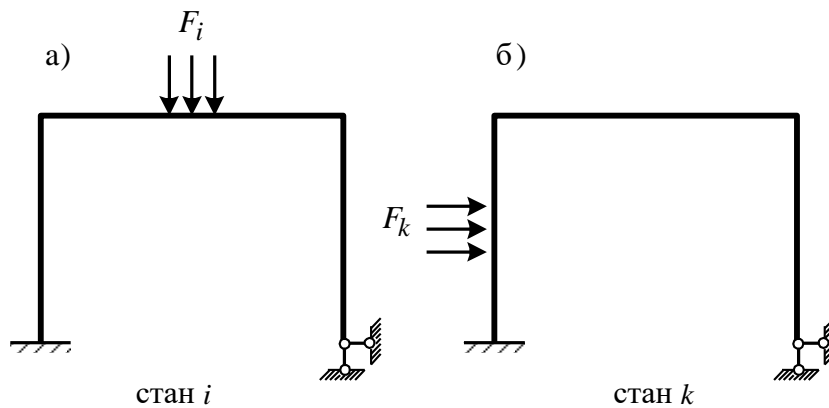


Рис. 5.22. Стан пружної рами

Кожен із цих станів є станом рівноваги. Переміщення (деформації) у цих станах малі і сумісні із зв'язками. Переміщення можна приблизно

\* Бетті Енріко (Betti Enrico) (1823-1892) – італійський математик. Основні праці стосуються алгебри, математичного аналізу, теорії функцій, математичної фізики, механіки.



прийняти за можливі й застосувати принцип можливих переміщень (приблизно, тому що переміщення малі, але не нескінченно малі величини). Тоді можлива робота сил  $i$ -го стану на переміщеннях  $k$ -го стану складається з  $T_{ik}$  – роботи зовнішніх сил і  $V_{ik}$  – роботи внутрішніх сил (див. (5.20)), тобто

$$T_{ik} + V_{ik} = 0. \quad (5.35)$$

Аналогічно з рівноваги  $k$ -го стану випливає

$$T_{ki} + V_{ki} = 0. \quad (5.36)$$

Таким чином,

$$V_{ik} = V_{ki} \quad (5.37)$$

і

$$T_{ik} = T_{ki}.$$

Теорема про взаємність робіт може бути сформульована і так: робота зовнішніх (внутрішніх) сил  $i$ -го стану системи на переміщеннях (деформаціях)  $k$ -го стану дорівнює роботі зовнішніх (внутрішніх) сил  $k$ -го стану тієї самої системи на переміщеннях (деформаціях)  $i$ -го стану.

Істотним моментом є тут окремо рівність робіт зовнішніх або внутрішніх сил (5.37). Сумарна рівність  $A_{ik} = A_{ki}$  (5.34) не є теоремою, а лише записом принципу можливих переміщень.

### 5.8.2. Теорема про взаємність переміщень

З теореми про взаємність робіт випливає ряд більш поодиноких теорем. Перша з них – теорема про взаємність переміщень.

Припустимо, що в обох станах система (рис. 5.23, а, б) завантажена узагальненими силами  $F_1 = 1$  (рис. 5.23, а) і  $F_2 = 1$  (рис. 5.23, б).

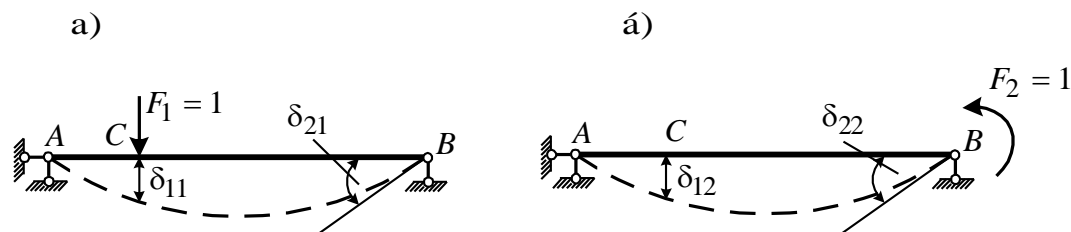


Рис. 5.23. До виведення теореми про взаємність переміщень

Під дією сил  $F_1$  балка одержала переміщення  $\delta_{11}$  (переміщення точки прикладання сили  $F_1 = 1$  за її напрямком) і  $\delta_{21}$  (переміщення точки прикладання сили  $F_2 = 1$ ).

Під дією сили  $F_2 = 1$  переміщення дорівнюють  $\delta_{12}$  і  $\delta_{22}$  (див. рис. 5.23, а, б).

На підставі теореми про взаємність робіт (5.37) маємо

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

і

$$(5.38)$$

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Переміщення по  $i$ -му напрямку від  $k$ -ї одиничної сили дорівнює переміщенню по  $k$ -му напрямку від  $i$ -ї одиничної сили (теорема Максвелла\*).

### 5.8.3. Теорема про взаємність реакцій

З теореми Бетті випливає також теорема про взаємність реакцій, що справедлива для будь-якої лінійно-пружної системи. На рис. 5.24 умовно зобразимо цю систему у вигляді нерозрізної балки.

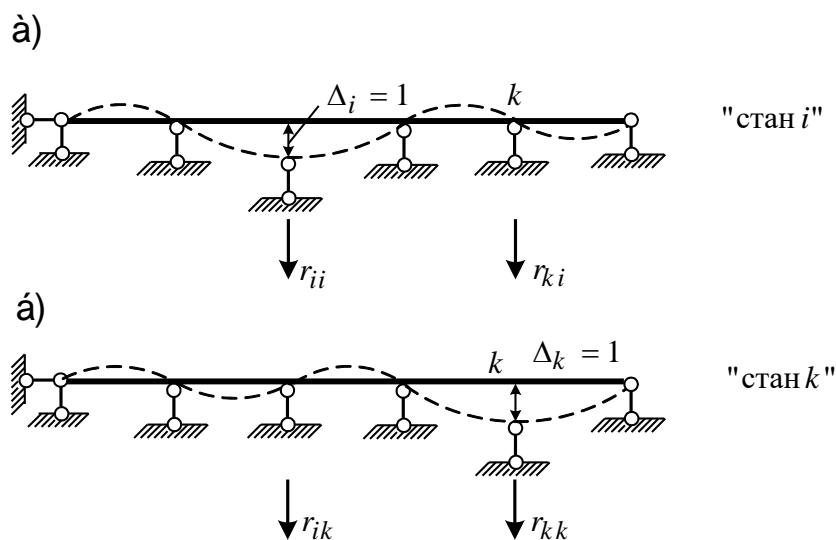


Рис. 5.24. До виведення теореми про взаємність реакцій

Розглянемо два стани системи. У кожному з них активні зовнішні сили відсутні, але задані одиничні переміщення  $i$ -го та  $k$ -го зв'язку (рис. 5.24, а, б).

\* Максвелл Джеймс Клерк (Maxwell James Clerk) (1831-1879) – англійський фізик, творець класичної електродинаміки, один із засновників статистичної фізики.

У загальному випадку статично невизначної системи від зсуву одного зв'язку виникають деформації системи і відповідні реакції в зв'язках, накладених на пружну систему. Ці реакції є зовнішніми зв'язками. Застосуємо теорему про взаємність робіт (5.37):

$$T_{ik} = r_{ki} \cdot 1 = T_{ki} = r_{ik} \cdot 1.$$

Робота інших реакцій дорівнює нулю, тому що дорівнюють нулю відповідні переміщення. У результаті одержуємо

$$r_{ik} = r_{ki}. \quad (5.39)$$

Реакція  $i$ -го зв'язку від одиничного переміщення  $k$ -го зв'язку дорівнює реакції  $k$ -го зв'язку від одиничного переміщення  $i$ -го зв'язку.

#### 5.8.4. Теорема про взаємність реакцій і переміщень

Ще одна теорема про властивості пружної системи утворюється при порівнянні двох станів пружної системи (рис. 5.25).

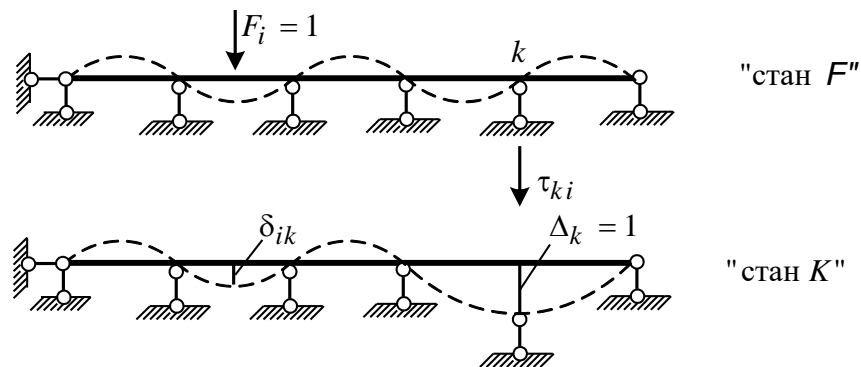


Рис. 5.25. До виведення теореми про взаємність реакцій і переміщень

В одному стані система завантажена силою  $F_i = 1$ , в іншому – задане одиничне переміщення  $k$ -го зв'язку. Робота зовнішніх сил  $K$ -го стану на переміщеннях  $F$  дорівнює нулю, тому що в  $K$ -му стані зовнішніми силами є тільки реакції у зв'язках, а в стані  $i$  зв'язки не зміщуються.

Відповідно до теореми Бетті робота

$$T_{Fk} = 1 \cdot \delta_{ik} + r_{ki} \cdot 1 = 0,$$

звідки

$$r_{ki} = -\delta_{ik}. \quad (5.40)$$

Ця рівність є теоремою про взаємність реакцій і переміщень: реакція  $k$ -го зв'язку від  $i$ -ї одиничної сили чисельно дорівнює й обернена за

знаком переміщенню по  $i$ -му напрямку від одиничного переміщення  $k$ -го зв'язку (теорема Релея\*).

### 5.9. Визначення переміщень за допомогою фіктивних вантажів

Нехай задана епюра згинальних моментів обмежена ламаною лінією, частина якої зображена на рис. 5.26, б, і нехай також задана епюра вертикальних переміщень (рис. 5.26, в).

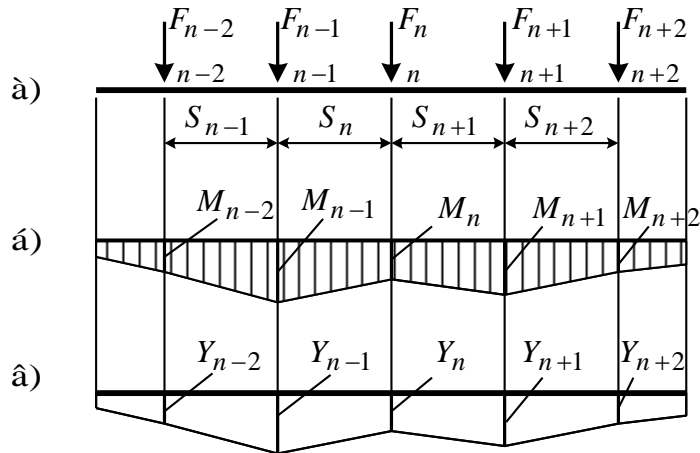


Рис. 5.26. До виведення формули для фіктивних вантажів

Складемо вирази для згинальних моментів і поперечних сил відповідно на ділянках  $S_n$  і  $S_{n+1}$  (рис. 5.27, а, б):

$$M_{x_n} = M_n \frac{x}{S_n} + M_{n-1} \frac{S_n - x_n}{S_n}, \quad (5.41)$$

$$M_{x_{n+1}} = M_{n+1} \frac{x_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{S_{n+1} - x_{n+1}}{S_{n+1}} M_n.$$

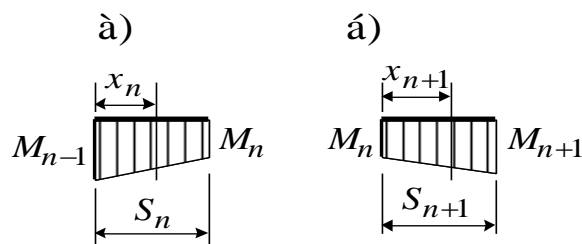


Рис. 5.27. До запису виразу для згинальних моментів і поперечних сил у перерізах  $x_n$  і  $x_{n+1}$

\* Релей Стретт Джон Уільям (Rayleigh John William) (1842-1919) – англійський фізик, один із основоположників теорії коливань, член-кореспондент Петербурзької АН (1896), член Лондонського королівського товариства (1873).

Запишемо вираз для поперечних сил, використовуючи диференціальну залежність між моментом і поперечною силою:

$$Q_{x_n} = \frac{dM_{x_n}}{dx} = \frac{M_n}{S_n} - \frac{M_{n-1}}{S_n}, \quad (5.42)$$

$$Q_{x_{n+1}} = \frac{dM_{x_{n+1}}}{dx} = \frac{M_{n+1}}{S_{n+1}} - \frac{M_n}{S_{n+1}}.$$

Розріжемо балку двома вертикальними перерізами справа й зліва від точки  $n$  (рис. 5.26, а). До торців виділеної частини прикладемо сили  $Q_n$  і  $Q_{n+1}$  (рис. 5.28).

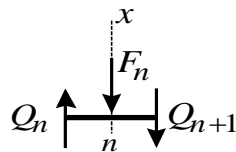


Рис. 5.28. Рівновага виділеного нескінченно малого елемента біля точки  $n$   
(згинальні моменти умовно не показані)

Спроекуємо всі сили, що діють на виділений елемент, на вертикальну вісь:

$$\sum Y = 0, \quad F_n = Q_n - Q_{n+1}. \quad (5.43)$$

Підставивши в цю формулу значення  $Q_n$  і  $Q_{n+1}$ , виражені через моменти (5.42), одержимо

$$F_n = -M_{n-1} \frac{1}{S_n} + M_n \left( \frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_{n+1}} \right) - M_{n+1} \frac{1}{S_{n+1}}. \quad (5.44)$$

Якщо за допомогою останньої формули обчислити всі діючі на балку вантажі  $F_n$ , то побудована еюра згинальних моментів буде точно відповідати заданій (рис. 5.26, б). Замінімо на підставі зовнішньої подібності лінії прогинів (рис. 5.26, в) та еюри  $M$  (рис. 5.26, б) у виразі (5.44) величини  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$  відповідно переміщеннями  $Y_{n-1}$ ,  $Y_n$ ,  $Y_{n+1}$ :

$$U_n = -Y_{n-1} \frac{1}{S_n} + Y_n \left( \frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_{n+1}} \right) - Y_{n+1} \frac{1}{S_{n+1}}. \quad (5.45)$$

Н результаті одержали формулу для визначення фіктивних вантажів  $U_n$ , еюра моментів від яких, віднесена до деякої умовної балки, дає ординати прогинів дійсної споруди, що ми і розшукуємо.

Користуватися формулою (5.45) у цьому вигляді практично не має сенсу, тому що розміри фіктивних вантажів самі залежать від переміщення споруди. Поступимо таким чином. Розглянемо два стани балки (рис. 5.29, а, б).

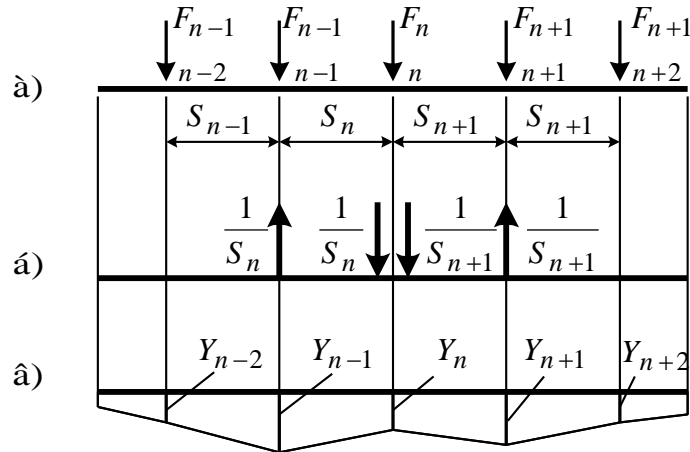


Рис. 5.29. До виведення універсальної формули фіктивного вантажу

Складемо вираз роботи зовнішніх сил другого стану (рис. 5.29, б) на переміщеннях (5.29, в), викликаних силами першого стану (рис. 5.29, а), і висловимо цю роботу через внутрішні сили:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{S_n} Y_{n-1} + \left( \frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_{n+1}} \right) Y_n - \frac{1}{S_{n+1}} Y_{n+1} = \sum \int \frac{\bar{N} N_F}{EA} ds + \sum \int \frac{\bar{M} M_F}{EJ} ds + \\
 + \sum \int \frac{\mu \bar{Q} Q_F}{GA} ds. \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

Порівнюючи з (5.45), бачимо, що ліва частина формули (5.46) дорівнює фіктивному вантажу  $U_n$ . З урахуванням цього запишемо формулу (5.46) так:

$$U_n = \sum \int \frac{\bar{N} N_F}{EA} ds + \sum \int \frac{\bar{M} M_F}{EJ} ds + \sum \int \frac{\mu \bar{Q} Q_F}{GA} ds. \quad (5.47)$$

Формула (5.47) називається універсальною формулою фіктивного вантажу. Тут  $\bar{N}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{Q}$  – вирази внутрішніх зусиль як функції координати

$s$  довільного перерізу від одиничних пар  $\frac{1}{S_n}S_n$  і  $\frac{1}{S_{n+1}}S_{n+1}$ , прикладених у точці  $n$  споруди;  $N_F, M_F, Q_F$  – вирази внутрішніх сил як функції координати  $s$  від заданого зовнішнього навантаження (далі див. п. 5.5).

Для обчислення фіктивних вантажів необхідно в різних точках споруди прикласти одиничні пари, побудувати від них одиничні епюри, потім побудувати епюру моментів від заданого навантаження і зробити обчислення за (5.47). Інтеграли, що входять у формулу (5.47), обчислюються за правилом Верещагіна (див. формулу (5.27) і табл. 5.1).

При визначенні деформацій у балках і рамах формула (5.47) спрощується, набуваючи вигляд одночленної:

$$U_n = \sum \int \frac{\overline{M}M_F}{EJ} ds. \quad (5.48)$$

Для положистих арок варто враховувати й поздовжню силу:

$$U_n = \sum \int \frac{\overline{M}M_F}{EJ} ds + \sum \int \frac{\overline{N}N_F}{EA} ds. \quad (5.49)$$

Вплив поперечних сил враховується лише у виняткових випадках.

Для ферм формула (5.47) набуває такого вигляду:

$$U_n = \sum \int \frac{\overline{N}N_F}{EA} ds = \sum_{i=1}^j \frac{\overline{N}_i N_{F,i} \ell_i}{(EA)_i}, \quad (5.50)$$

де  $\overline{N}_i$  – поздовжнє зусилля в  $i$ -му стержні ферми, викликане одиничними парами;  $N_{F,i}$  – зусилля в  $i$ -му стержні від зовнішнього навантаження;  $\ell_i$  – довжина  $i$ -го стержня,  $j$  – число стержнів ферми.

### **5.9.1. Розгорнута формула фіктивних вантажів, що враховує вплив згинальних моментів і поздовжніх сил**

Виділимо із суцільної системи дві суміжні ділянки, що сходяться в точці  $n$ . Будемо припускати, що епюра  $M_F$  побудована (рис. 5.30, а).

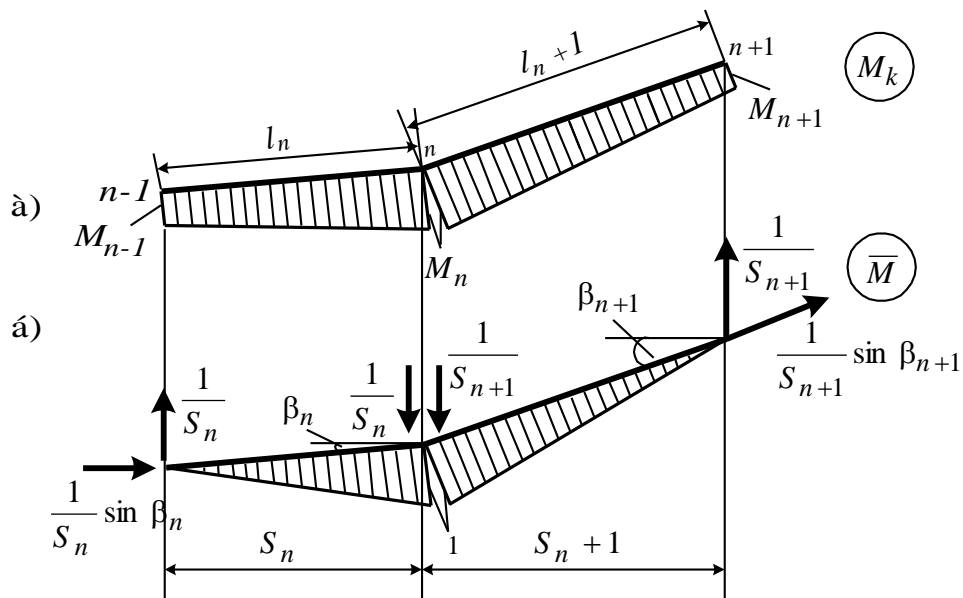


Рис. 5.30. До виведення розгорнутої формули

Прикладемо до системи дві одиничні пари з вертикальними складовими  $\frac{1}{S_n}$  і  $\frac{1}{S_{n+1}}$  і побудуємо від них одиничні епюри (рис. 5.30, б).

Тепер обчислимо інтеграли, що входять у формулу (5.47), способом Верещагіна:

$$\sum \int \frac{\bar{M}M_F}{EJ} ds = \frac{1}{EJ_n} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell_n \left( \frac{2}{3} M_n + \frac{1}{3} M_{n-1} \right) \right] + \frac{1}{EJ_{n+1}} \left[ \frac{1}{2} \ell_{n+1} \left( \frac{2}{3} M_n + \frac{1}{3} M_{n+1} \right) \right];$$

$$\int \sum \frac{\bar{N}N_F}{EA} ds = -\frac{1}{S_n} \sin \beta_n \cdot \ell_n \frac{N_{F,n}}{EA_n} + \frac{1}{S_{n+1}} \sin \beta_{n+1} \cdot \ell_{n+1} \frac{N_{F,n+1}}{EA_{n+1}}.$$

З огляду на те, що  $S_n = \ell_n \cos \beta_n$  і  $S_{n+1} = \ell_{n+1} \cos \beta_{n+1}$ , одержимо

$$U_n = \frac{S_n}{6EJ_n} (M_{n-1} + 2M_n) + \frac{S_{n+1}}{6EJ_{n+1}} (M_{n+1} + 2M_n) - \frac{N_{F,n} \operatorname{tg} \beta_n}{EA_n} + \frac{N_{F,n+1} \operatorname{tg} \beta_{n+1}}{EA_{n+1}}, \quad (5.51)$$

де  $N_{F,n}$ ,  $N_{F,n+1}$  – поздовжні сили відповідно на ділянках  $n$  та  $n+1$ .

Визначення фіктивних вантажів за допомогою отриманої розгорнутої формули (5.51) потребує меншої витрати часу, ніж обчислення їх за



загальною формулою (5.49), тому що не потрібно прикладати складові одиничних пар, будувати від них епюри і робити перемножування. При обчисленні фіктивних вантажів необхідно враховувати знаки моментів  $M_n, M_{n+1}, M_{n-1}$  і знаки поздовжніх сил  $N_{F,n}$  і  $N_{F,n+1}$ . Якщо при цьому виявиться, що обчислений за (5.51) фіктивний вантаж має додатне значення, то його варто спрямовувати вниз (у бік дії середніх складових одиничних пар (рис. 5.30, б)).

### 5.9.2. Побудова фіктивної балки

Нехай задана балка з довільним навантаженням. Диференціальне рівняння вигнутої осі цієї балки, як відомо, має такий вигляд:

$$\frac{d^2(EJy)}{dx^2} = M_x, \quad (5.52)$$

де  $EJ$  – жорсткість балки;  $y$  – прогин балки, тобто вертикальне переміщення осі;  $M_x$  – згинальний момент у перерізі балки. Початок координат помістимо на лівому кінці балки. Вісь  $y$  направимо нагору. Тоді прогин балки, що збігається з віссю  $y$ , буде спрямований нагору.

Тепер уявимо собі фіктивну балку з поки невідомим фіктивним навантаженням  $q_\phi$ . Зв'язок між моментом і навантаженням у фіктивній балці буде таким:

$$\frac{d^2M_\phi}{dx^2} = q_\phi. \quad (5.53)$$

Приймаємо  $q_\phi = M_x$ , тоді

$$\frac{d^2(EJy)}{dx^2} = \frac{d^2M_x}{dx^2}. \quad (5.54)$$

Інтегруємо обидві сторони рівняння (5.54), при цьому домагаємося того, щоб довільні постійні лівої та правої частин були рівні. Тоді

$$\frac{d(EJy)}{dx} = \frac{dM_\phi}{dx}, \quad EJy = M_\phi, \quad (5.55)$$

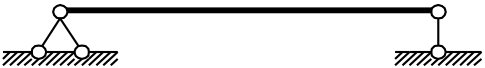

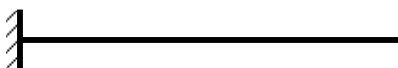


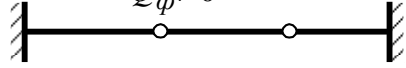
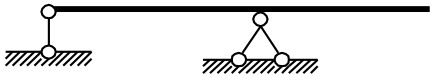
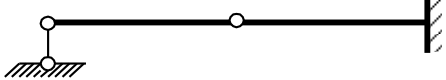
звідки

$$y = \frac{M_\phi}{EJ}, \quad \phi = \frac{Q_\phi}{EJ}. \quad (5.56)$$

Таким чином, одержали зв'язок між фіктивною (умовною) балкою і дійсною спорудою. У табл. 5.3 наведені схеми дійсних і фіктивних балок.

Таблиця 5.3

Дійсні та фіктивні балки

nn	Ä³éñíà áàèèà	Ô³èðèáíà áàèèà
1	$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\phi=0$ $Q_\phi \neq 0$ 
2	$y=0$ $\varphi=0$ 	$M^\phi=0$ $Q_\phi=0$ 
3	$y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\phi \neq 0$ $Q_\phi \neq 0$ 
4	$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\phi=0$ $Q_\phi \neq 0$ 

**5.9.3. Приклади визначення переміщень за допомогою фіктивних вантажів**

Розглянемо спочатку консольну балку постійної жорсткості ( $EJ = const$ ), завантажену на кінці зосередженою силою  $F$  (рис. 5.31, а). Розбиваємо прогін балки на дві рівні ділянки з довжиною  $S = \ell/2$ . Будуємо епюру моментів  $M_F$  (рис. 5.31, б). Обчислюємо фіктивні вантажі за формулою (5.51). Через те що поздовжні сили в перерізі балки дорівнюють нулю, третій і четвертий члени формули (5.51) приймаємо такими, що дорівнюють нулю. Знаходимо фіктивні вантажі в намічених точках 0, 1, 2:

$$W_0 = -\frac{\ell}{12EJ} \left( \frac{F\ell}{2} + 2F\ell \right) = -\frac{5F\ell^2}{24EJ},$$

$$W_1 = -\frac{\ell}{12EJ} \left( F\ell + 2 \frac{F\ell}{2} \right) - \frac{\ell}{12EJ} \left( 0 + 2 \frac{F\ell}{2} \right) = -\frac{F\ell^2}{4EJ}.$$

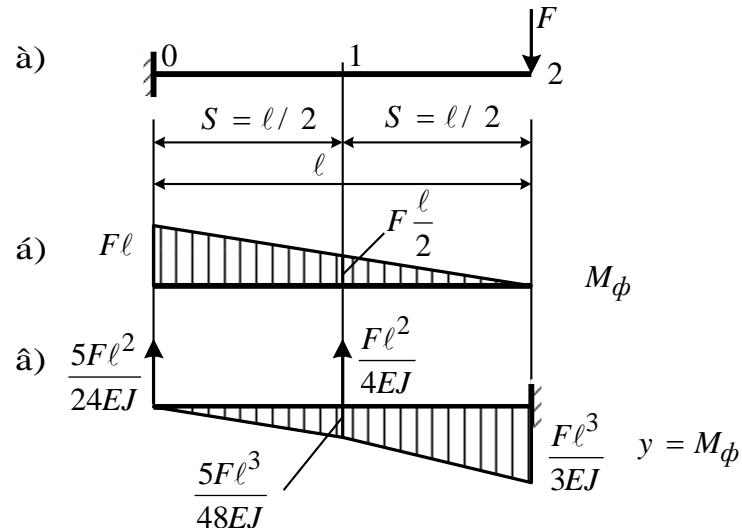


Рис. 5.31. Побудова епюри прогинів консольної балки

Фіктивний вантаж у точці 2 не визначаємо, тому що у фіктивній балці в цій точці буде защемлення (див. табл. 5.3 пункт 2). Фіктивні вантажі від'ємні (згинальні моменти в точках 0, 1 – від'ємні), тому у фіктивній балці (рис. 5.31, в) спрямовуємо їх нагору. Побудована від цих вантажів епюра моментів і буде лінією прогинів заданої балки. Прогини в точках 1 і 2 мають точне значення, між точками 1 і 2 – наближене. Щоб одержати більш точну епюру прогинів, потрібно розбити балку на більшу кількість ділянок.

У ролі другого прикладу розглянемо ферму (рис. 5.32, а). Будемо припускати, що  $EA = const$ , тобто перерізи всіх стержнів однакові.

Ферма навантажена у вузлі 3 силою  $F = 1 \text{ кН}$ . Зусилля від зовнішнього навантаження і від одиничних пар (рис. 5.32, б, в) приведені в табл. 5.4.

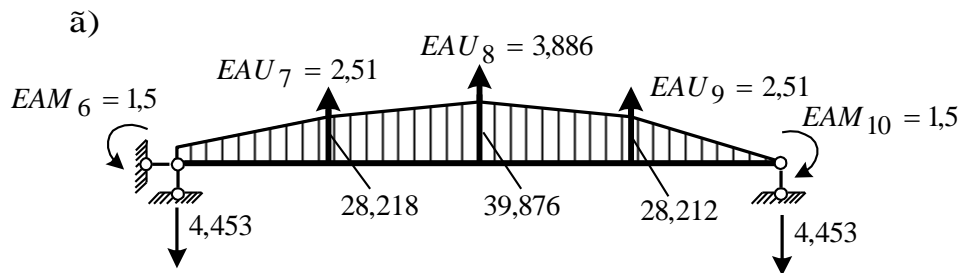
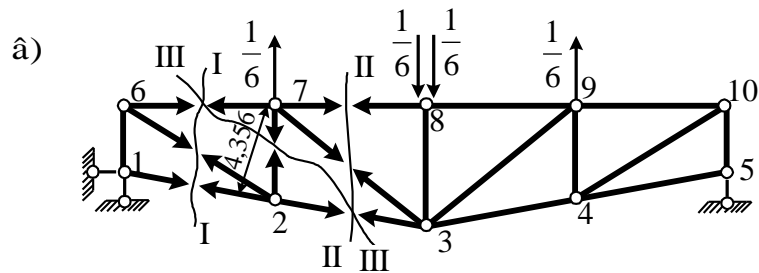
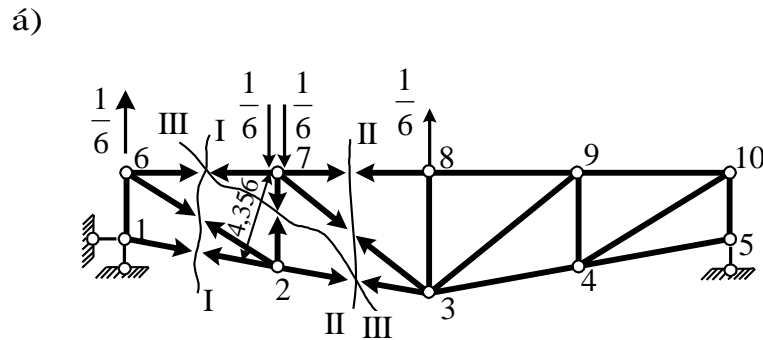
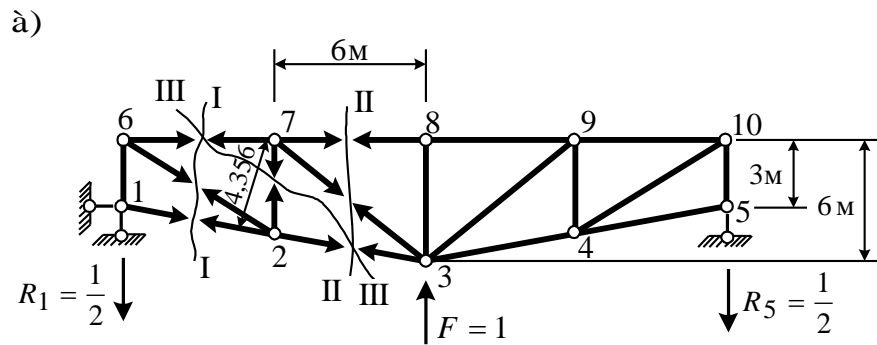


Рис. 5.32. Побудова епюри вертикальних переміщень вузлів вантажного пояса ферми з урахуванням деформацій опорних стійок

Фіктивні вантажі визначаємо за формулою (5.50). Переміщення опорних стійок 1- 6 і 5-10 дорівнюють

$$\Delta l_{1-6} = \Delta l_{5-10} = \frac{N_{F,1-6} l_{1-6}}{EA} = \frac{N_{F,5-10} l_{5-10}}{EA} = \frac{1,5}{EA}.$$

## Визначення фіктивних вантажів

№№ стер- жнів	$\ell_i$ , м	$N_{Fi}$ , кН	Зусилля від одиничних пар				
			Вузол 7		Вузол 8		
			$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i N_{Fi} \ell_i (EA)_i$	$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i N_{Fi} \ell_i (EA)_i$	
1-6	3	0,5	0	0	0	0	
1-2	6,185	0	0	0	0	0	
6-7	6	0,667	-0,222	-0,889	0	0	
6-2	7,5	-0,833	0,278	-1,737	0	0	
7-2	4,5	0,333	-0,111	-0,166	0	0	
7-3	8,485	0,471	-0,314	1,255	0,236	-0,946	
7-8	6,0	1,0	0	0	-0,167	-1,0	
2-3	6,185	-0,687	0,229	-0,973	0	0	
8-9	6,0	1,0	0	0	-0,167	-1,0	
8-3	6,0	0	0,167	0	-0,333	0	
3-9	8,485	-0,471	0	0	0,236	-0,943	
3-4	6,185	-0,687	0	0	0	0	
9-10	6	0,667	0	0	0	0	
9-4	4,5	0,333	0	0	0	0	
4-5	6,185	0	0	0	0	0	
4-10	7,7	-0,833	0	0	0	0	
10-5	3	0,5	0	0	0	0	
				$\sum = -\frac{2,51}{EA}$			$\sum = -\frac{3,386}{EA}$

Знайдені фіктивні вантажі прикладаємо до вузлів 7, 8, 9 ферми, а у вузлах 6 і 10 – опорні моменти відповідно до (5.56). Будуємо епюру моментів в умовній шарнірно-опертій балці (рис. 5.32, г). Ця епюра і буде епюрою прогинів верхнього пояса ферми.

## РОЗДІЛ 6

### МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ СИСТЕМ

Одночасно з розрахунком статично визначних конструкцій розвивалися методи розрахунку статично невизначних систем. У 1857 р. Б. Клапейрон\* запропонував рівняння трьох моментів для розрахунку нерозрізних балок. У 1864 р. Дж. Максвеллом\*\* і в 1874 р. О. Мором\*\*\* була знайдена формула для визначення переміщень у пружних системах за заданими внутрішніми силами (див. п. 5.4), яка виявилася дуже зручною для розрахунку складних статично невизначних систем. До 30-х р. ХХ ст. розрахунок пружних статично невизначних систем досяг досконалої форми. Виявилися три основні методи розрахунків: метод сил, метод переміщень, змішаний метод. У результаті з'явилася можливість відмовитися від поелементного розрахунку будівель і споруд і перейти до розрахунку, в якому система розглядалася як єдине ціле. Це дозволило створювати більш міцні, надійні та довговічні конструкції й обіцяло одержати значний економічний ефект. Однак для реалізації цієї можливості повною мірою потрібні були могутні обчислювальні засоби, у результаті чого з'явилася необхідність автоматизації розрахунків і максимального спрощення вихідних даних. З цього погляду, один з методів, що викладаються в даному розділі, з'явився найбільш плідним. Це метод переміщень. Однак не можна вважати, що інший класичний метод – метод сил – втратив своє значення.

#### 6.1. Метод сил

Статично невизначною стержневою системою ми називаємо (п. 1.5) таку систему, в якій при дії довільного навантаження, температури, зсуву опорних чи інших зв'язків не всі поздовжні, поперечні сили і моменти можуть бути знайдені з рівнянь рівноваги жорсткого тіла чи системи жорстких тіл.

Будемо вважати, що система має зайві зв'язки, якщо з неї можна видалити їхню найбільшу кількість, не порушуючи цим її властивості геометричної незмінюваності та нерухомості. Наявність чи відсутність зайвих зв'язків характеризує систему з кінематичної точки зору (п. 1.5). Одночасно вона характеризує її й у статичному відношенні. Наявність зайвих зв'язків є необхідною і достатньою ознакою статичної невизначності. Статично невизначна система може розглядатися як

---

\* Б. Клапейрон (1799-1864) – видатний французький інженер. Працював з 1820 по 1831 р. у Петербурзькому інституті шляхів сполучення.

\*\* Максвелл Джеймс (1831-1879) – англійський фізик.

\*\*\* О. Мор – видатний німецький вчений, який повторно відкрив формулу для визначення переміщень стержневих систем.



За формулою (1.3), що носить назву формули Чебишева\*, число зайвих зв'язків визначається так:

$$L = C_0 + 2Ш - 3D = 7 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 3.$$

Рама (рис. 6.1) складається з двох дисків (I - II і III - VI). Ці диски з'єднуються між собою одним шарніром ( $Ш=1$ ). Нарешті, рама прикріплена до опорного диска за допомогою семи опорних зв'язків ( $C_0 = 7$ , крайні опори мають чотири зв'язки, середня – три).

### 6.1.2. Основна система й основні невідомі

Розрахунок статично невизначної системи за методом сил починається з вибору так званої основної системи. Основна система утворюється із заданої за допомогою видалення тієї чи іншої кількості зайвих зв'язків. На практиці в більшості випадків відкидаються всі зайві зв'язки, так що при цьому основна система виходить статично визначною. Необхідно звернути увагу на розташування зв'язків, що відкидаються, для того щоб не одержати систему, яка є в тій чи іншій частині або в цілому геометрично змінюваною. Крім того, при виборі основної системи виходять з таких міркувань: епюри згинальних моментів (одичні і вантажні), побудовані в основній системі, повинні мати якнайбільше ділянок з нульовими ординатами; кількість обчислень, пов'язаних з визначенням коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь (про ці рівняння йтиметься нижче), повинна бути мінімальною; система канонічних рівнянь в ідеалі повинна розпадатися на незалежні одне від одного рівняння. Покажемо три можливі варіанти основної системи (рис. 6.2) для заданої рами (рис. 6.1). Оскільки рама тричі статично невизначна, відкидаємо щораз по три зв'язки з заміною їх зусиллями, що виникають у цих зв'язках у заданій системі. У схемі, показаній на рис. 6.2, а, відкинуті горизонтальні опорні зв'язки і замінені невідомими поки реакціями в них  $X_1$  і  $X_3$ . Крім того, уставлений шарнір між середньою стійкою та правим ригелем, тобто відкинуті зв'язки, що перешкоджають взаємному їхньому повороту (реакція  $X_2$ ). У схемі, поданій на рис. 6.2, б, відкинуте защемлення, тобто три зв'язки, що замінені реакціями  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Одержано, таким чином, тришарнірну раму. У схемі, зображеній на рис. 6.2, в, відкинутий вертикальний зв'язок у лівій опорі (реакція цього зв'язку –  $X_1$ ), а також – цілком права опора (реакції  $X_2$  і  $X_3$ ).

---

\* Чебишев П.Л. (1821-1894) – російський математик і механік, академік Петербурзької академії наук.



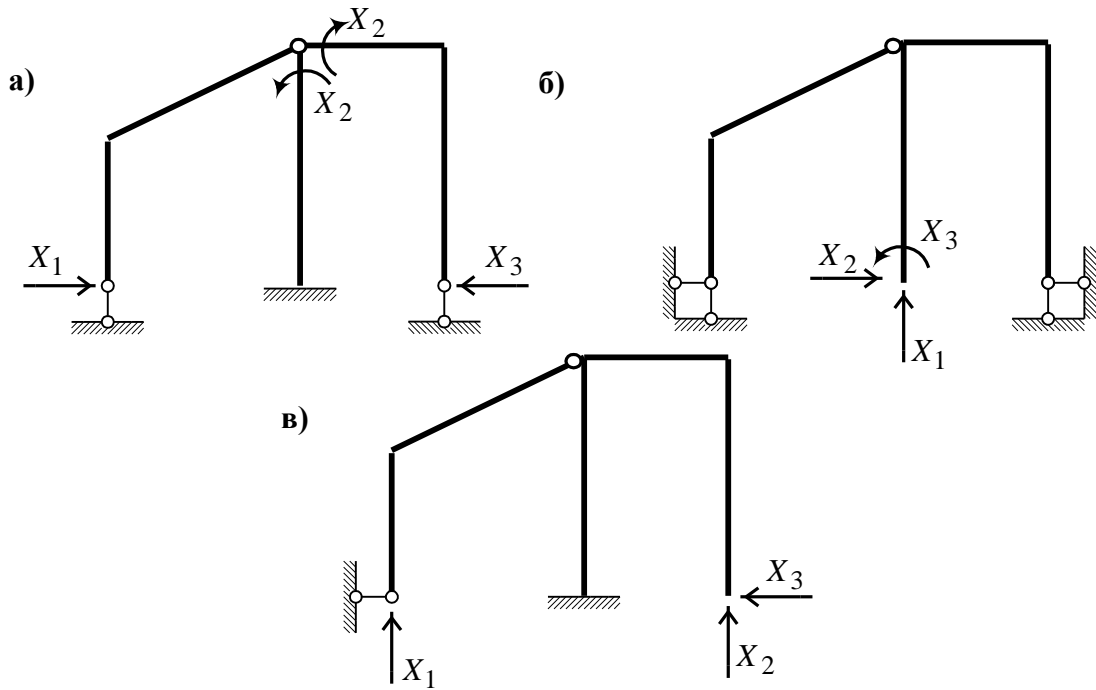


Рис. 6.2. Варіанти основної системи

Побудуємо для розглянутих варіантів основної системи одиничні і вантажні епюри (рис. 6.3 – 6.5), для визначеності задавшись розмірами рами і навантаженням (рис. 6.1).

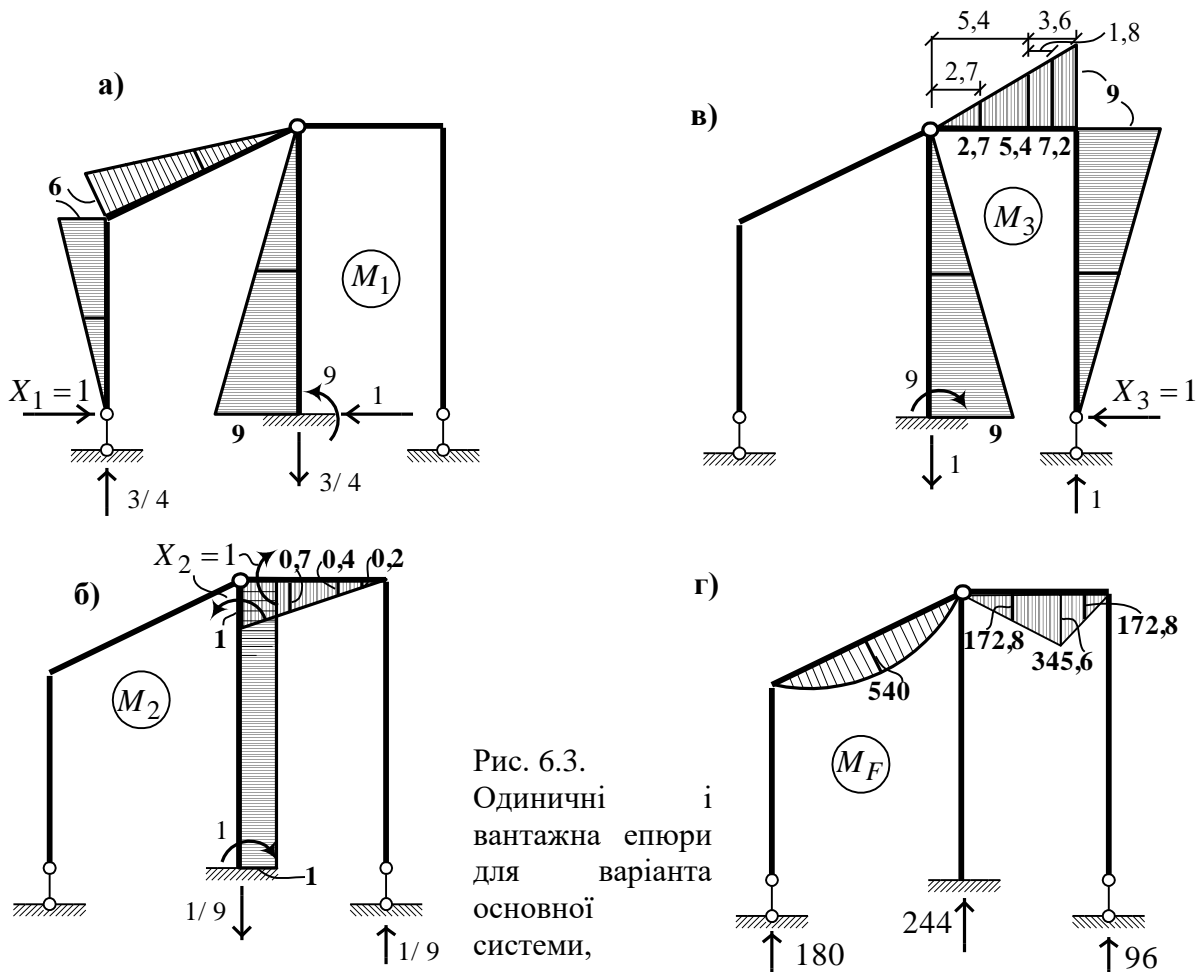


Рис. 6.3. Одиничні і вантажна епюри для варіанта основної системи,

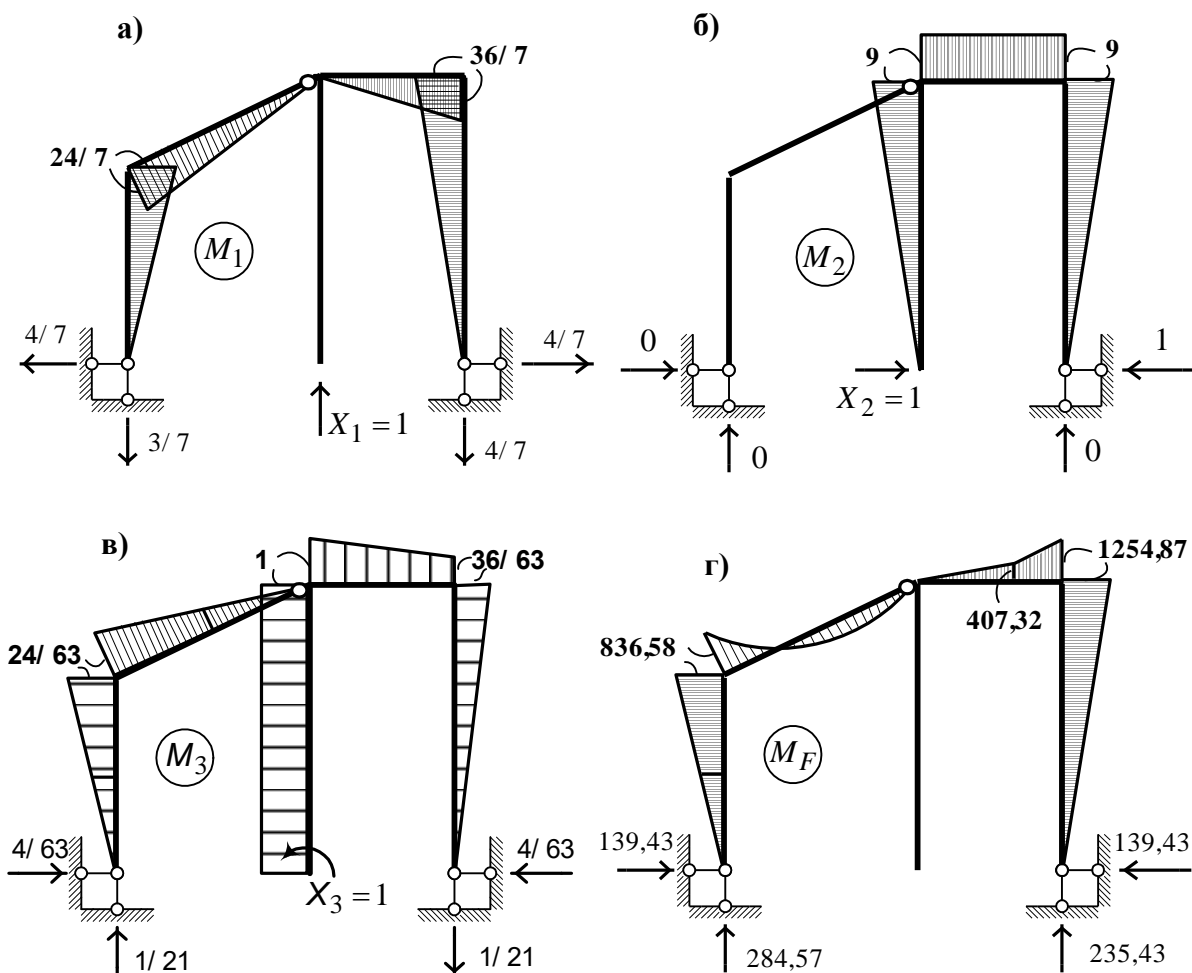


Рис. 6.4. Одичні і вантажні епюри для варіанта основної системи, показаної на рис. 6.2, б

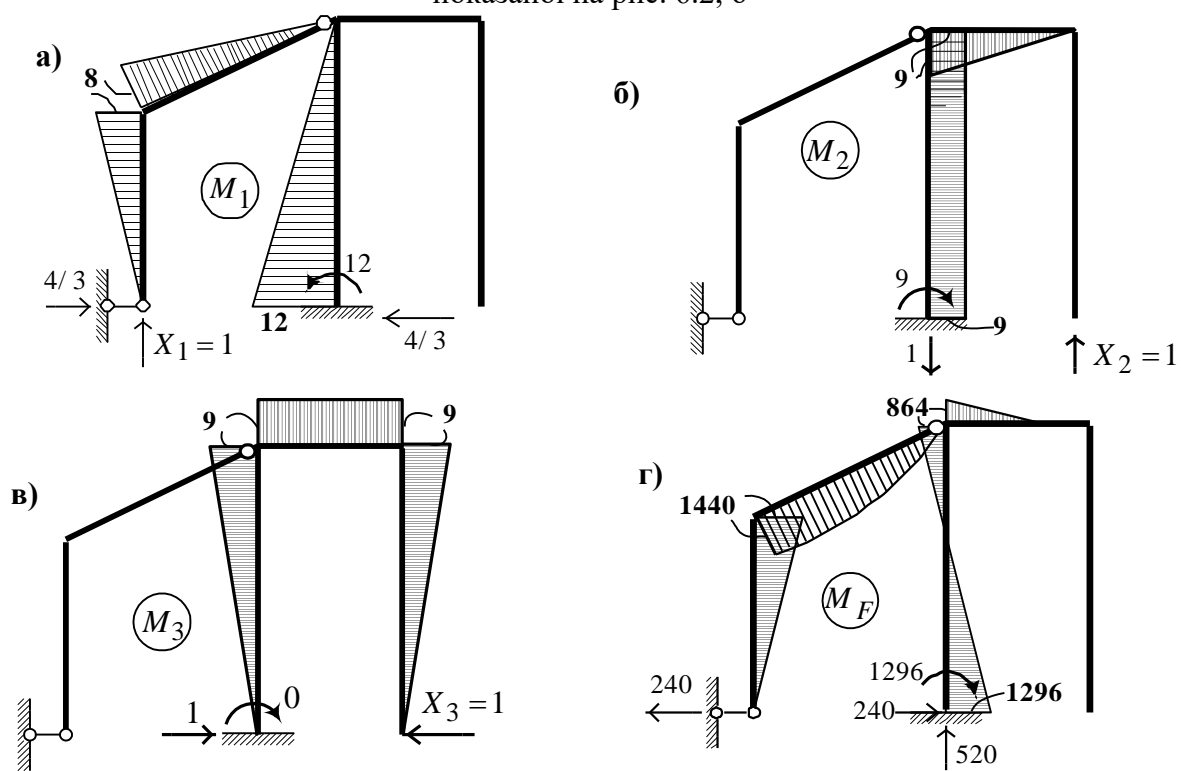


Рис. 6.5. Одичні і вантажні епюри для варіанта основної системи, показаної на рис. 6.2, в

Аналіз епюр (рис. 6.3, 6.4, 6.5) показує, що раціональною буде основна система, наведена на рис. 6.2, а. Тут задовольняється більшість з перерахованих вище вимог. Відповідно системи, показані на рис. 6.2, б і рис. 6.2, в, виходячи з тих самих міркувань, не раціональні.

### 6.1.3. Система канонічних рівнянь

Умови еквівалентності основної (рис. 6.2) і заданої (рис. 6.1) систем записуються у вигляді системи канонічних рівнянь. Кожне рівняння являє собою математичний запис того факту, що переміщення по напрямку відкинутого зв'язку, викликане невідомими реакціями і зовнішнім навантаженням, дорівнює нулю. Запишемо систему рівнянь для  $n$  невідомих ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ):

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \dots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1F} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \dots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2F} &= 0; \\ \dots & \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \dots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

У матричній формі система (6.1) записується так:

$$A \vec{X} = -\vec{H}, \quad (6.2)$$

де  $A$  – матриця податливості,

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Число рівнянь (6.1) дорівнює числу невідомих. У зв'язку з цим матриця  $A$  системи рівнянь (6.2) завжди квадратна. Елементи матриці  $A$  – переміщення в основній системі по напрямку відкинутих зв'язків, викликані реакціями зв'язків, що дорівнюють одиницям ( $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$ ). Елементи матриці-стовпця  $\vec{H}$  (вільні члени рівнянь (6.1)) являють собою переміщення в основній системі по напрямку реакцій відкинутих зв'язків, викликані зовнішнім навантаженням.

### 6.1.4. Визначення коефіцієнтів і вільних членів і перевірки правильності їхнього визначення

Коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь (6.1) при розрахунку згинальних моментів, поздовжніх і поперечних сил можуть бути знайдені

за формулою (5.22). Для споруд, що працюють переважно на згинання, формула набуває одночленного виду (5.25).

Використовуючи цю формулу, запишемо

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds; \quad (6.4)$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_i M_F}{EJ} ds; \quad (6.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Інтеграли, що входять у ці формули, можуть бути обчислені за правилом Верещагіна «перемножування» епюр (див. формулу (5.27)).

Отже, щоб знайти будь-який коефіцієнт системи рівнянь (6.1), необхідно в основній системі методу сил побудувати епюри від одиничних реакцій  $X_i = 1$  і  $X_k = 1$  і їх «перемножити».

Продемонструємо це на прикладі (див. рис. 6.1 і 6.3):

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \sqrt{153} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = \frac{308,22}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EJ} ds = -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 \right] = -\frac{27}{EJ};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{M_1 M_3}{EJ} ds = -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = -\frac{162}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{7}{EJ};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{M_2 M_3}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \right] = \frac{22,5}{EJ};$$

$$\delta_{33} = \sum \int \frac{M_3^2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = \frac{364,5}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1 M_F}{EJ} ds = -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 144}{8} \sqrt{153} \cdot 3 \right] = -\frac{6679,43}{EJ};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_2 M_F}{EJ} ds = & -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 3,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 5,4 \left( \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{241,92}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{3F} = \sum \int \frac{M_3 M_F}{EJ} ds = -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 3,6 \left( \frac{2}{3} \cdot 5,4 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,4 \right] = -\frac{2488,32}{EJ}.$$

#### 6.1.4.1. Перевірка правильності обчислення коефіцієнтів і вільних членів

Завантажимо основну систему одночасно всіма зайвими невідомими і побудуємо від них в основній системі епюру згинальних моментів. Наприклад, для рами, показаної на рис. 6.2, а, отримуємо епюру на рис. 6.6.

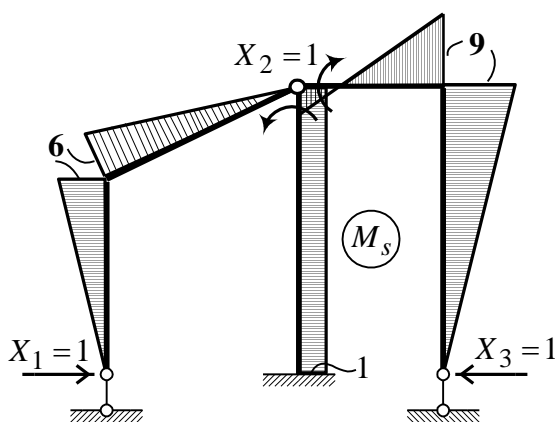


Рис. 6.6. Сумарна епюра моментів

Така епюра називається сумарною одиничною епюрою. Очевидно, для кожного перерізу конструкції, що розраховується,

$$M_s = M_1 + M_2 + \dots + M_n. \quad (6.6)$$

Помножимо сумарну епюру  $M_s$  по черзі на кожну з одиничних епюр:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta_{li} &= \delta_{l1} + \delta_{l2} + \dots + \delta_{ln} = \sum \int \frac{M_1^2}{EJ} ds + \sum \int \frac{M_1 M_2}{EJ} ds + \dots + \sum \int \frac{M_1 M_n}{EJ} ds = \\ &= \sum \int M_1 (M_1 + M_2 + \dots + M_n) \frac{ds}{EJ} = \sum \int \frac{M_1 M_s}{EJ} ds = \delta_{1s}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \delta_{21} + \delta_{22} + \dots + \delta_{2n} &= \delta_{2s}; \\ \dots & \\ \delta_{n1} + \delta_{n2} + \dots + \delta_{nn} &= \delta_{ns}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Отже, сума коефіцієнтів при невідомих  $i$ -го рівняння повинна дорівнювати значенню

$$\delta_{is} = \sum \int \frac{M_i M_s}{EJ} ds . \quad (6.9)$$

Таким чином, перевірка обчислених значень одиничних переміщень, що входять в  $i$ -те канонічне рівняння, полягає в порівнянні їхньої суми з величиною  $\delta_{is}$ . Така перевірка називається порядко;вою.

Візьмемо суму доданків  $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \dots, \delta_{ns}$  і позначимо її через  $\sum \delta$ :

$$\sum \delta = \sum \int M_s (M_1 + M_2 + \dots + M_n) \frac{ds}{EJ} = \sum \int \frac{M_s M_s}{EJ} ds = \delta_{ss} . \quad (6.10)$$

Перевірка коефіцієнтів за допомогою останньої формули називається універсальною і полягає в наступному: алгебраїчним додаванням визначається сума всіх знайдених коефіцієнтів (одиничних переміщень), що входять у систему канонічних рівнянь. Потім обчислюється інтеграл

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{M_s^2}{EJ} ds$$

і перевіряється умова (6.10).

Покажемо це на прикладі (рис. 6.6):

$$\begin{aligned} \delta_{ss} = \sum \int \frac{M_s^2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} & \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \sqrt{153} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 9 \left( \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \left( \frac{2}{3} \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = \frac{346,72}{EJ} . \end{aligned}$$

Тепер обчислюємо

$$\begin{aligned} \sum \delta &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2\delta_{12} + 2\delta_{13} + 2\delta_{23} = \\ &= \frac{1}{EJ} [308,22 + 7 + 364,5 - 2 \cdot 27 - 2 \cdot 162 + 2 \cdot 22,5] = \frac{346,72}{EJ} . \end{aligned}$$

Порівнюючи ці результати, бачимо, що рівність дотримується. Отже, коефіцієнти системи рівнянь (6.1) знайдені правильно. У випадку відмінності результатів для пошуку помилки рекомендується зробити порядко;ві перевірки (6.9).

Для вантажних коефіцієнтів перевірка зводиться до такого.

Обчислюється значення

$$\Delta_{sF} = \sum \int \frac{M_s M_F}{EJ} ds , \quad (6.11)$$

де  $M_F$  – згинальні моменти від заданого навантаження в основній системі (рис. 6.3, г, 6.4, г, 6.5, г).

Далі перевіряється умова

$$\sum \Delta = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF} = \Delta_{sF} . \quad (6.12)$$

Виконаємо таку перевірку на прикладі (рис. 6.3, г і 6.6):

$$\Delta_{sF} = \sum \int \frac{M_s M_F}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 144}{8} \sqrt{153} \cdot 3 - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 3,6 \left( \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,6 \cdot 5,4 \left( -\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = -\frac{8925,83}{EJ} .$$

Обчислюємо (6.12)

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \Delta_{3F} = -(6679,43 - 241,92 + 2488,32) = -\frac{8925,83}{EJ} .$$

Порівнюючи результати, бачимо, що вони збігаються. Отже, вільні члени системи канонічних рівнянь (6.1) знайдені правильно.

### 6.1.5. Розв'язання системи канонічних рівнянь

Для розв'язання системи лінійних рівнянь методу сил можна застосовувати різні методи (метод виключення Гауса, схему Жордана, метод квадратного кореня й ін.). Оскільки матриця  $A$  (6.3) коефіцієнтів цих рівнянь симетрична, ефективним тут буде метод квадратного кореня. Покажемо застосування цього методу для системи з трьох рівнянь. У цьому методі матриця коефіцієнтів  $A$  перетвориться до двох трикутних матриць:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

де

$$\alpha_{11} = \sqrt{\delta_{11}}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\delta_{12}}{\sqrt{\delta_{11}}}; \quad \alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{\delta_{13}}{\sqrt{\delta_{11}}}; \\ \alpha_{22} = \sqrt{\delta_{22} - \alpha_{12}^2}; \quad \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{\delta_{23} - \alpha_{12}\alpha_{13}}{\alpha_{22}}; \quad \alpha_{33} = \sqrt{\delta_{33} - \alpha_{13}^2 - \alpha_{23}^2} .$$

Тепер розв'язуємо допоміжну систему

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}y_1 &= -\Delta_{1F}; \\
\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 &= -\Delta_{2F}; \\
\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3 &= -\Delta_{3F}
\end{aligned}
\tag{6.14}$$

і знаходимо  $y_1, y_2, y_3$ .

Потім знайдемо  $X_1, X_2, X_3$  з такої системи рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.
\tag{6.15}$$

Для розглянутого в цьому пункті прикладу одержуємо такі значення допоміжних і основних невідомих:

$$y_1 = 380,464; \quad y_2 = 159,421; \quad y_3 = 331,091;$$

$$X_1 = 35,66 \text{ кН}; \quad X_2 = 37,56 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_3 = 20,36 \text{ кН}.$$

Якщо система рівнянь (6.15), а отже, і (6.1), розв'язана правильно, то повинна виконуватися така умова:

$$X_1\delta_{1s} + X_2\delta_{2s} + \dots + X_n\delta_{ns} + \Delta_{sF} = 0.
\tag{6.16}$$

Перевіримо цю умову для системи канонічних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{aligned}
&35,66(308,22 - 27 - 162) + 37,56(-27 + 7 + 22,5) + \\
&+ 20,36(-162 + 22,5 + 364,5) + (-6679,43 + 241,92 - 2488,32) = 0,45.
\end{aligned}$$

Похибка складає  $5,04 \cdot 10^{-3} \%$ .

### 6.1.6. Побудова епюр $M, Q, N$

#### *у заданій статично невизначній системі та їх перевірки*

Побудова епюри моментів здійснюється у відповідності з такою формулою:

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + \dots + M_nX_n + M_F.
\tag{6.17}$$

«Виправлені» епюри  $M_1X_1, M_2X_2, M_3X_3$  й остаточна епюра для розглянутого прикладу показані на рис. 6.7. Епюра  $M_F$  наведена на рис. 6.3, г. Ординати епюр обчислені на границях і в середині ділянок (див. рис. 6.1).

Якщо епюра моментів у заданій статично невизначній системі побудована правильно, то повинна виконуватися така умова:

$$\sum \int \frac{MM_s}{EJ} ds = 0.
\tag{6.18}$$



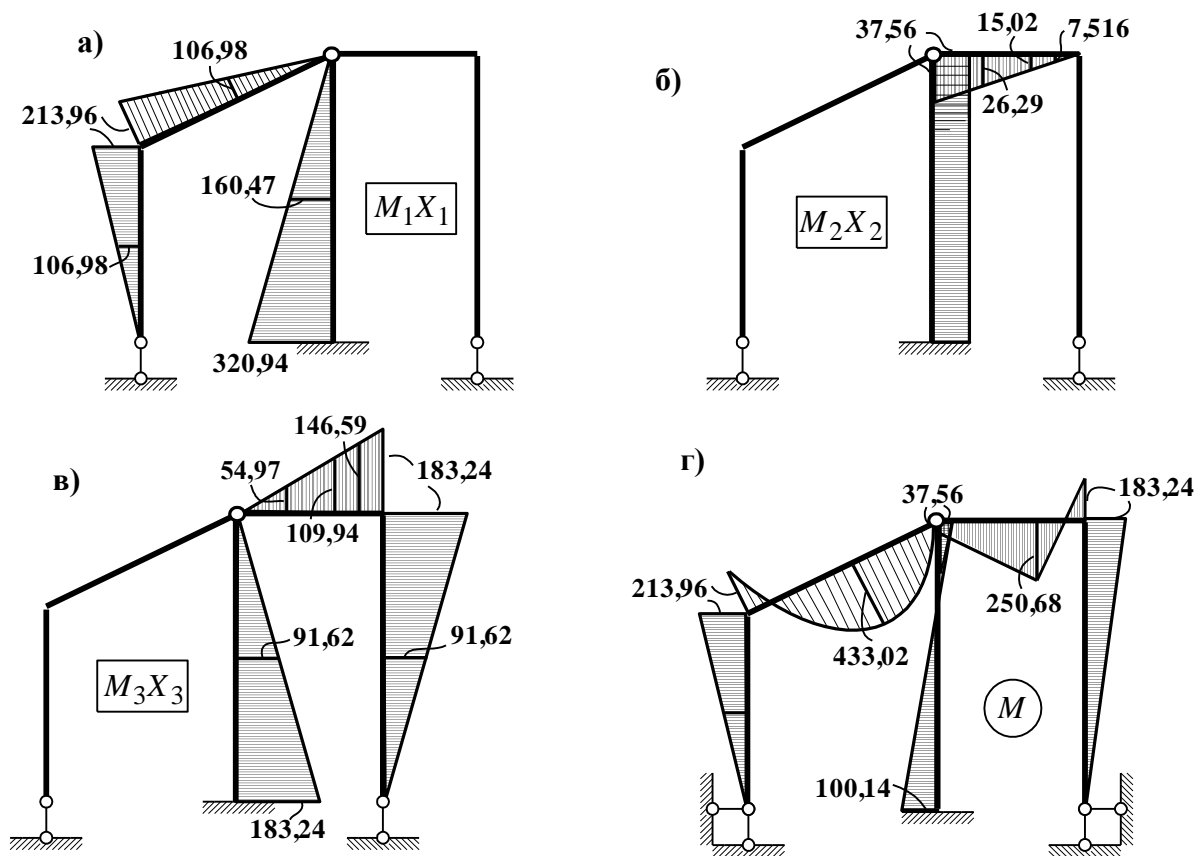


Рис. 6.7. «Виправлені» епюри (а), (б), (в) і епюра моментів (г) у заданій статично невизначній системі

Умова (6.18) свідчить про те, що сума переміщень у заданій системі по напрямку відкинутих зв'язків, що мають місце при утворенні основної системи, дорівнює нулю. Якщо в рівняння (6.18) підставити вирази для  $M_s$  (6.6) і  $M$  (6.17) і зробити найпростіші перетворення, то одержимо умову (6.16). Отже, перевірка (6.16) свідчить про правильність розв'язання поставленої задачі в цілому, а не тільки системи рівнянь (6.1). Надалі помилка може бути допущена при побудові епюри  $M$  (6.17). Тому ще раз рекомендується переконатися у виконанні умови (6.18). У нашому випадку

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{MM_s}{EJ} ds = & \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 213,96 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \sqrt{153} \cdot \frac{2}{3} \cdot 213,96 - \frac{1}{2} \cdot \frac{30 \cdot 144}{8} \sqrt{153} \cdot 3 + \right. \\ & + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 9 \left( \frac{1}{2} \cdot 37,56 - \frac{1}{2} \cdot 100,14 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 183,24 \cdot 3,6 \left( \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 250,68 \cdot 3,6 \left( \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \\ & \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 250,68 \cdot 5,4 \left( -\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 37,56 \cdot 5,4 \left( \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 5 \right) + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 183,24 \right] = \frac{0,052}{EJ} . \end{aligned}$$

Похибка складає, як і раніше (див. перевірку умови (6.16)),  $\approx 5 \cdot 10^{-3} \%$ .

Епюру поперечних сил у статично невизначній системі будемо за епюрою моментів з використанням диференціальної залежності

$$\frac{dM}{dx} = Q,$$

чи

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n}. \quad (6.19)$$

Кожен елемент рами довжиною  $\ell_n$  (стійки, похилий і горизонтальний ригелі) розглядається як балка на двох опорах, завантажена кінцевими моментами і зовнішнім навантаженням (якщо зовнішнє навантаження на елементі відсутнє, то  $Q^0 = 0$ ). У формулі (6.19)  $M_n$  і  $M_{n-1}$  – відповідно правий і лівий кінцеві моменти розглянутого елемента. Для вертикальних елементів (стійок) поняття «правий» і «лівий» залежать від спостерігача. У формулу (6.19)  $M_n$  і  $M_{n-1}$  підставляються зі своїми знаками.

Продемонструємо сказане на прикладі. Використовуючи епюру моментів (рис. 6.7, г) і схему заданої рами (рис. 6.1), побудуємо епюру  $Q$  (рис. 6.8).

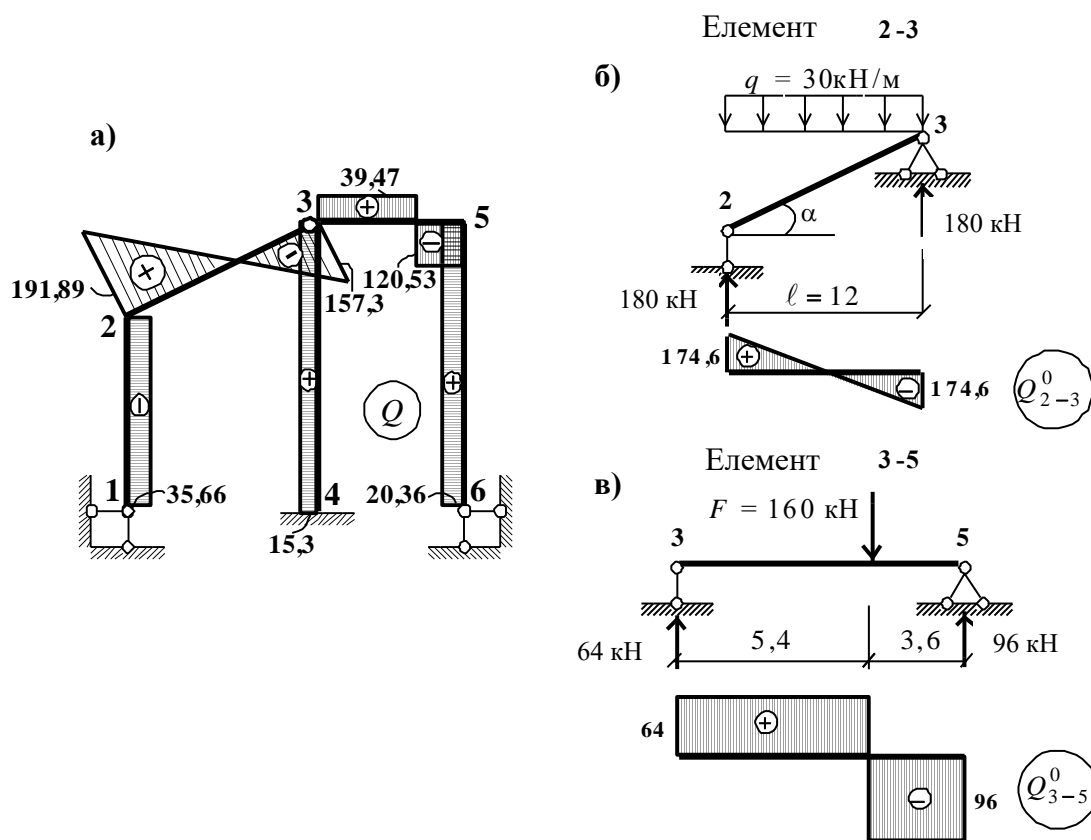


Рис. 6.8. Епюра поперечних сил у статично невизначній системі (а) і схеми елементів (б), (в)

Елемент 1-2 (рис. 6.8, а і 6.7, г):

$$Q_1 = Q_2 = \frac{-213,96 - 0}{6} = -35,66 \text{ кН.}$$

Елемент 2-3 (рис. 6.8, б і 6.7, г):

$$\cos \alpha = \frac{12}{\sqrt{153}} = 0,970; \quad \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{153}} = 0,242;$$

$$Q_2 = 174,6 + \frac{0 + 213,96}{\sqrt{153}} = 191,89 \text{ кН;}$$

$$Q_3 = -174,6 + \frac{0 + 213,96}{\sqrt{153}} = -157,3 \text{ кН.}$$

Елемент 3-4 (рис. 6.8, а і 6.7, г):

$$Q_3 = Q_4 = \frac{37,56 + 100,14}{9} = 15,3 \text{ кН.}$$

Елемент 3-5 (рис. 6.8, в і 6.7, г):

$$Q_3 = 64 + \frac{-183,24 - 37,56}{9} = 39,47 \text{ кН;}$$

$$Q_5 = -96 + \frac{-183,24 - 37,56}{9} = -120,53 \text{ кН.}$$

Елемент 5-6 (рис. 6.8, а і 6.7, г):

$$Q_5 = Q_6 = \frac{183,24 - 0}{9} = 20,36 \text{ кН.}$$

Епюру поздовжніх сил будемо способом вирізання вузлів епюри  $Q$  (рис. 6.8, а і 6.9).

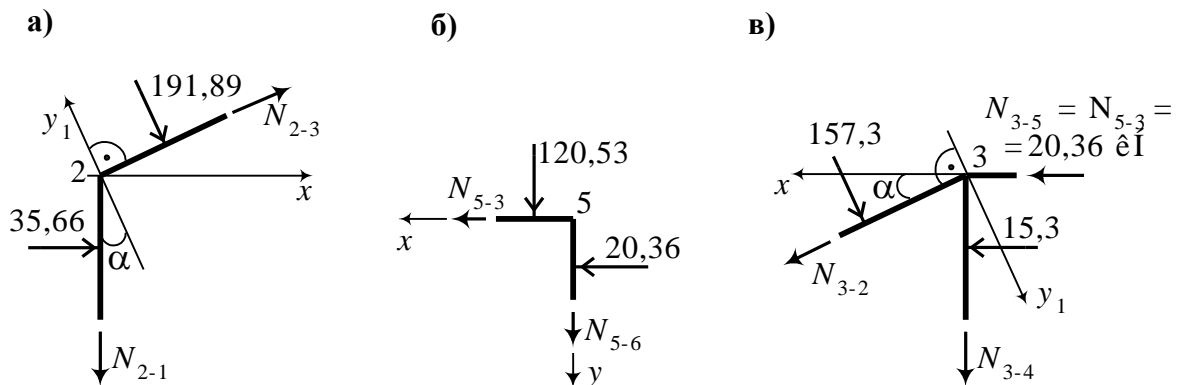


Рис. 6.9. Схеми вузлів рами і діючих на них зусиль

Вузол 2 (рис. 6.9, а):

$$\sum Y_1 = 0: N_{2-1} \cos \alpha + 191,89 + 35,66 \sin \alpha = 0;$$

$$N_{2-1} = \frac{-191,89 - 35,66 \cdot 0,242}{0,97} = -206,72 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0: N_{2-3} \cos \alpha + 35,66 + 191,89 \sin \alpha = 0;$$

$$N_{2-3} = \frac{-35,66 - 191,89 \cdot 0,242}{0,97} = -84,64 \text{ кН}.$$

Вузол 5 (рис. 6.9, б):

$$\sum X = 0: N_{5-3} + 20,36 = 0; N_{5-3} = -20,36 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: 120,53 + N_{5-6} = 0; N_{5-6} = -120,53 \text{ кН}.$$

Вузол 3 (рис. 6.9, в):

$$\sum Y_1 = 0: N_{3-4} \cos \alpha + 157,3 + 39,47 \cos \alpha - 15,3 \sin \alpha - 20,36 \sin \alpha = 0;$$

$$N_{3-4} = \frac{-157,3 - 39,47 \cdot 0,97 + 15,3 \cdot 0,242 + 20,36 \cdot 0,242}{0,97} = -192,74 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0: N_{3-2} \cos \alpha + 20,36 + 15,3 - 157,3 \sin \alpha = 0;$$

$$N_{3-2} = \frac{-20,36 - 15,3 + 157,3 \cdot 0,242}{0,97} = 2,48 \text{ кН}.$$

Епюра поздовжніх сил показана на рис. 6.10.

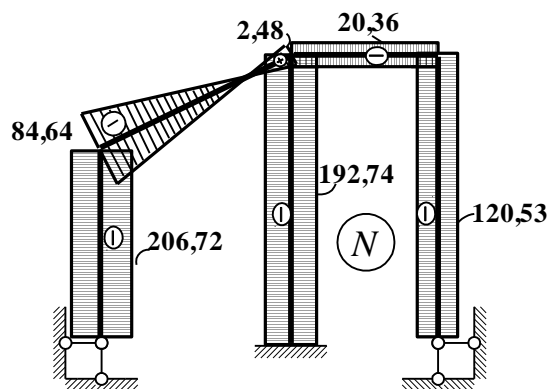


Рис. 6.10. Епюра поздовжніх сил у статично невизначній системі

Перевіримо правильність побудови епюр  $Q$  і  $N$ . Для цього відсікаємо раму від опорних закріплень і розглядаємо її рівновагу під дією зовнішнього навантаження й опорних реакцій (рис. 6.11). Величини і напрямки опорних реакцій приймаємо з епюр  $Q$  (рис. 6.8, а) і  $N$  (рис. 6.10).

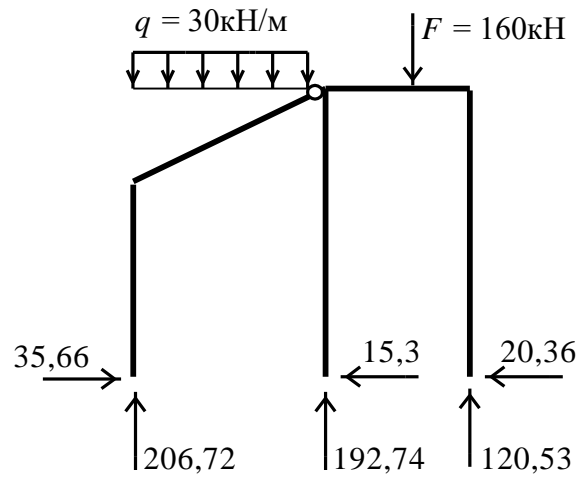


Рис. 6.11. Перевірка умов рівноваги рами

Складаємо умови рівноваги:

$$\sum X = 0: 35,66 - 15,3 - 20,36 = 0;$$

$$\sum Y = 0: 30 \cdot 12 + 160 - 206,72 - 192,74 - 120,53 = 0,01 \approx 0.$$

### 6.1.7. Розрахунок на температурні впливи

У цьому випадку канонічні рівняння записуються в такий спосіб:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1t} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2t} &= 0; \\ \dots & \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_n \delta_{nn} + \Delta_{nt} &= 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Чи в матричній формі

$$A \vec{X} = -\vec{T}, \quad (6.21)$$

де

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \Delta_{1t} \\ \Delta_{2t} \\ \dots \\ \Delta_{nt} \end{pmatrix}.$$

Відмінність цієї основної системи від системи (6.1) полягає в тому, що замість вільних членів  $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{nF}$  (див. (6.3)) тут стоять члени  $\Delta_{1t}, \Delta_{2t}, \dots, \Delta_{nt}$ , які являють собою температурні переміщення в основній системі (див. п. 5.6, (5.29)):

$$\Delta_{it} = \sum \int N_i \alpha t ds + \sum \int \frac{M_i \alpha t'}{h} ds ; \quad (6.22)$$

$$i = 1, 2, \dots, n .$$

Геометричний зміст систем (6.20) і (6.1) однаковий. Обидві виражають ту думку, що сумарні переміщення по напрямку відкинутих зв'язків дорівнюють нулю.

Після визначення коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь (6.20) виконується її розв'язання (див. п. 6.1.5), тобто знаходяться невідомі  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Епюра моментів від температурних впливів будується так:

$$M_t = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_n X_n . \quad (6.23)$$

Умова, яка свідчить про те, що епюра моментів побудована правильно, має такий вигляд:

$$\sum \int \frac{M_t M_s}{EJ} ds + \sum \int N_s \alpha t ds + \sum \int \frac{M_s \alpha t'}{h} ds = 0 . \quad (6.24)$$

Варто звернути увагу на рівняння (6.24). Еквівалентна система методу сил знаходиться під дією невідомих  $X_1, X_2, \dots, X_n$  і температури. Тому шукане переміщення визначається як сума переміщень від силових (перший член формули) і температурних впливів (другий і третій члени формули).

Побудова епюр поперечних і поздовжніх сил і їхня перевірка робляться так само, як це викладено в п. 6.1.6.

Розглянемо найпростіший приклад (рис. 6.12, а). Для заданої рами потрібно побудувати епюру моментів.

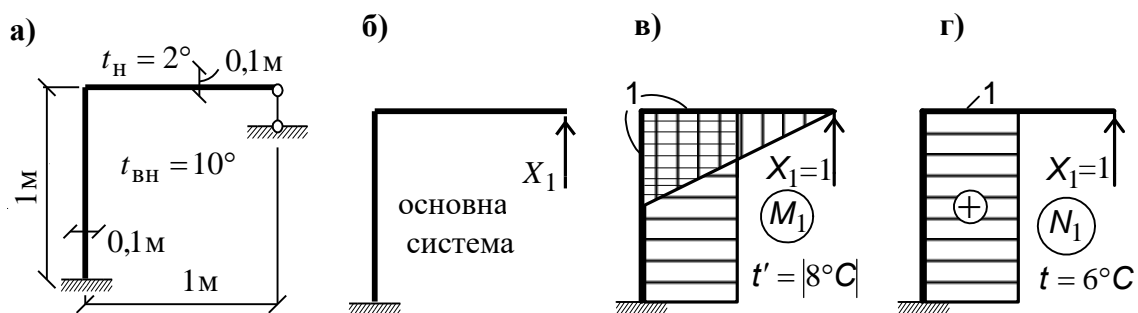


Рис. 6.12. До прикладу розрахунку рами на температурні впливи

Основна система показана на рис. 6.12, б, одиничні епюри – на рис. 6.12, в, г.

Канонічне рівняння має такий вигляд:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0 .$$

Переміщення  $\delta_{11}$  знайдемо, використовуючи (6.4):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[ 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{4}{3EJ}.$$

Для визначення вільного члена залуцаємо (5.29):

$$\Delta_{1t} = \alpha \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{\alpha \cdot 8}{1/10} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{\alpha \cdot 8}{1/10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 126\alpha.$$

З канонічного рівняння знаходимо  $X_1$ :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = -\frac{126\alpha EJ \cdot 3}{4} = -\frac{189\alpha EJ}{2}.$$

Побудуємо епюру моментів за (6.23), див. рис. 6.13.

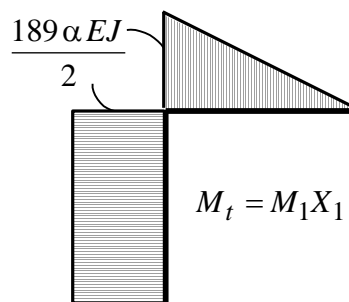


Рис. 6.13. Епюра моментів від температурних впливів

Перевіримо правильність побудови  $M_t$ . Скористаємося умовою (6.24):

$$-\frac{1}{EJ} \left[ \frac{189\alpha EJ}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{189\alpha EJ}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] + 126\alpha = -126\alpha + 126\alpha = 0.$$

Епюра моментів побудована правильно. Тепер можна побудувати епюри  $Q$  і  $N$  (див. п. 6.1.6).

### 6.1.8. Розрахунок на зсув опорних чи інших зв'язків

Система канонічних рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \dots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1c} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \dots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2c} &= 0; \\ \dots & \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \dots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{nc} &= 0. \end{aligned} \tag{6.25}$$

У матричній формі система (6.25) має такий вигляд:

$$A \vec{X} = -\vec{C}, \tag{6.26}$$

де

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} \Delta_{1c} \\ \Delta_{2c} \\ \dots \\ \Delta_{nc} \end{pmatrix}.$$

Відмінність цієї системи від систем (6.1) і (6.20) полягає у вільних членах. Тут  $\Delta_{1c}, \Delta_{2c}, \dots, \Delta_{nc}$  являють собою переміщення в основній системі від зсуву опорних чи інших зв'язків (при виборі основної системи передбачається, що зв'язки, які переміщуються, не відкинуті). Вони, як відомо (див. п. 5.7), визначаються так:

$$\Delta_{ic} = -\sum R \cdot \Delta; \quad (6.27)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

де  $R$  – реакції у зв'язках, що переміщуються,  $\Delta$  – задані переміщення зв'язків.

Визначення коефіцієнтів і вільних членів здійснюється з залученням залежностей (6.4) і (5.31). Епюра моментів може бути побудована за формулою, аналогічною (6.23):

$$M_c = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_n X_n. \quad (6.28)$$

Перевірка правильності побудованої за (6.28) епюри моментів здійснюється за формулою

$$\sum \int \frac{M_c M_s}{EJ} ds - \sum R \cdot c = 0. \quad (6.29)$$

У цій умові, на відміну від (6.18), присутнє переміщення в статично визначній основній системі від заданого зсуву зв'язків. Зрозуміти зміст цього доданка не складно, якщо згадати, що еквівалентна система при розрахунку на зсув зв'язків завантажена невідомими  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (силами) і зсувом зв'язків.

Розглянемо, як і в попередньому випадку, приклад, що ілюструє основні положення розрахунку.

Для рами, показаної на рис. 6.14, а, побудуємо епюру моментів  $M_c$ . Основну систему одержимо із заданої установленням повного шарніра у вузол  $C$  (рис. 6.14, б).

Канонічне рівняння має вигляд

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1c} = 0.$$

Коефіцієнт  $\delta_{11}$  одержуємо, «перемножуючи» епюру  $M_1$  (рис. 6.14, в) на себе:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[ 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{4}{3EJ}.$$

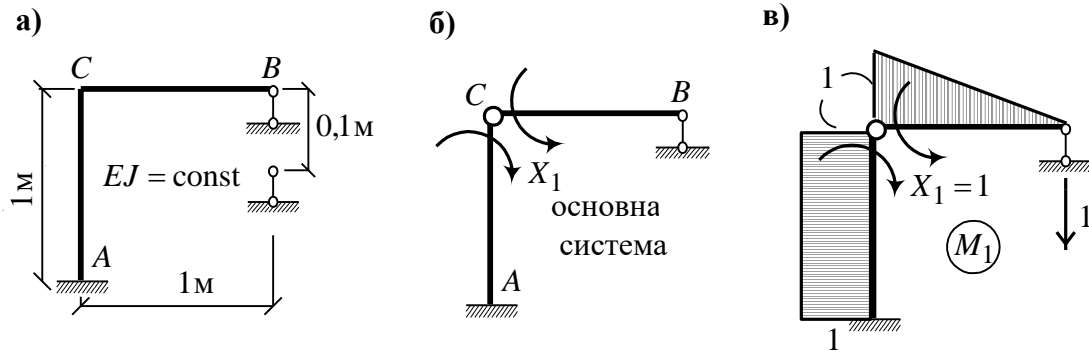


Рис. 6.14. До прикладу розрахунку рами на зсув опорних зв'язків

Вільний член  $\Delta_{1c}$  обчислюємо за формулою (5.31):

$$\Delta_{1c} = - \left( 1 \cdot \frac{1}{10} \right) = - \frac{1}{10}.$$

З канонічного рівняння знайдемо

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = \frac{3EJ}{40}.$$

Епюра моментів відповідно до залежності (6.28) показана на рис. 6.15.

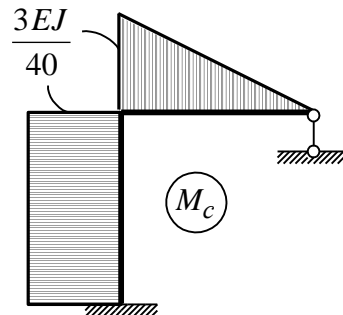


Рис. 6.15. Епюра моментів від зсуву опорного зв'язку B

Переконаємося в тому, що епюра  $M_c$  (рис. 6.15) побудована правильно. Для цього перевіримо умову (6.29):

$$\frac{1}{EJ} \left[ \frac{3EJ}{40} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3EJ}{40} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] - \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0.$$

Умова (6.29) дотримується, отже, епюра моментів побудована правильно.

## 6.2. Метод переміщень

Як відомо, у статично невизначних системах одних умов рівноваги виявляється недостатньо для визначення всіх зусиль у конструкції. Тому рівняння статички розглядаються разом з іншими рівняннями, що виражають умови деформації системи. Для спрощення розрахунок провадиться таким чином, що якісь фактори системи вибираються в якості основних невідомих, тобто всі інші величини в конструкції виражаються через них. У методі сил (див. п. 6.1) у якості таких основних невідомих вибираються внутрішні зусилля. У методі переміщень використовується інший підхід. За основні невідомі приймемо переміщення вузлів системи. Будемо розрізняти два типи розрахункових схем стержневих конструкцій: з розтяжними ( $EA \neq \infty$ ) і нерозтяжними ( $EA = \infty$ ) стержнями. Слід зазначити, що всі стержні, строго кажучи, мають обмежену жорсткість на розтягання-стискання і в загальному випадку при навантаженні змінюють свою довжину. Однак у багатьох випадках внесок поздовжніх і поперечних деформацій у загальні величини переміщень вузлів рами дуже малий порівняно з величинами деформацій згинання, і без істотної похибки можна знехтувати впливом поздовжніх і поперечних сил на деформації стержнів. Розрахункова схема стержневої конструкції з розтяжними стержнями ( $EA \neq \infty$ ) використовується при розрахунку систем, що згинаються, із застосуванням ЕОМ. При використанні ЕОМ число невідомих не настільки істотне, а такі фактори, як точність розв'язку, загальність і простота є вирішальними. Тому розрахункова схема стержневої системи з нерозтяжними стержнями рекомендується для контролю наближених розв'язків і аналізу правомірності прийняття тих чи інших допущень. А для багатоповерхових рам, рам з похилими стійками, аркових систем розрахункова схема з  $EA \neq \infty$  є, як показує практика розрахунку і проектування, єдино правильною.

### 6.2.1. Визначення ступеня кінематичної невизначності (числа невідомих)

Загальне число невідомих незалежних переміщень вузлів рами визначається за формулою

$$n = n_y + n_d, \quad (6.30)$$

де  $n_y$  – число невідомих кутів повороту системи;  $n_d$  – число невідомих лінійних переміщень вузлів.

Значення  $n_y$  дорівнює числу жорстких вузлів (опорні вузли в це число не входять). Жорстким вважається такий вузол, у якому кінці принаймні двох зі стержнів, що сходяться в ньому, жорстко зв'язані між собою (рис. 6.16).

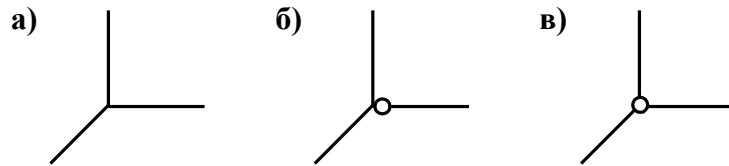


Рис. 6.16. Характерні види з'єднання стержнів у вузлі:  
а, б – жорсткі вузли; в – шарнірний вузол

Може виникнути питання, чому число кутових переміщень дорівнює тільки числу жорстких вузлів. Це пов'язано з тим, що кути повороту шарнірних вузлів є залежними переміщеннями від кутів повороту жорстких вузлів (див. табл. 6.1), а ми, як було зазначено вище, шукаємо незалежні переміщення.

При визначенні числа лінійних невідомих зсувів необхідно замінити схему даної статично невизначної системи її шарнірною схемою шляхом уведення повних шарнірів в усі вузли й опорні закріплення. Переміщення усіх вузлів такої системи не є незалежними, тому що зсув одного з них може викликати зсуви ряду інших вузлів. Число ж незалежних лінійних зсувів вузлів системи дорівнює числу стержнів, які необхідно ввести в шарнірну схему споруди, щоб перетворити її на геометрично незмінну. Іншими словами, число незалежних лінійних зсувів вузлів дорівнює числу ступенів свободи шарнірної схеми заданої рами, тобто

$$n_{\text{л}} = \text{Ш} - 3K, \quad (6.31)$$

де Ш – число всіх простих шарнірів системи (шарнір називається простим, якщо він з'єднує два стержні; шарнір, що з'єднує  $i$  стержнів, еквівалентний  $i - 1$  простим шарнірам).

Визначимо число невідомих у рамі, показаній на рис. 6.17.

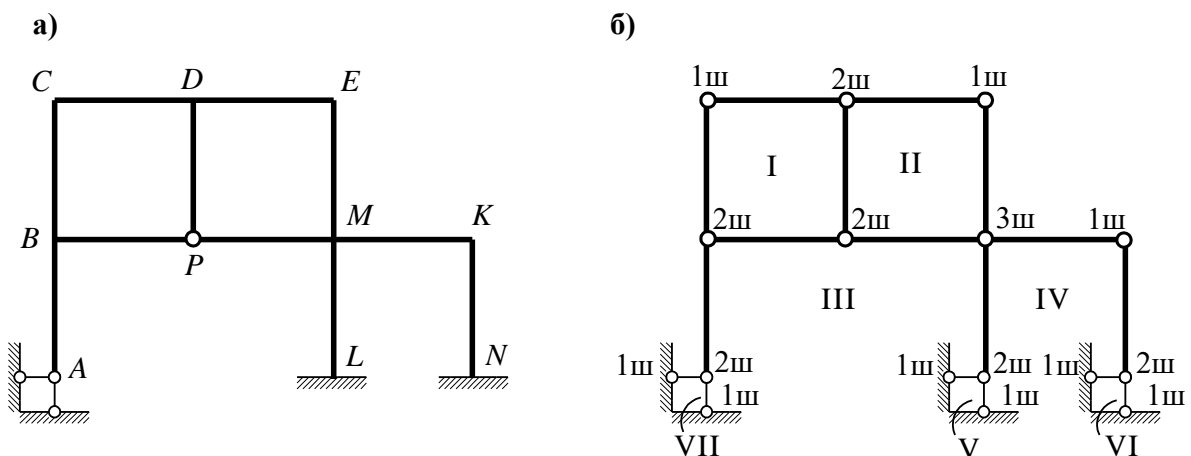


Рис. 6.17. Схема заданої рами (а) та її шарнірна схема (б)

Жорсткими вузлами є  $B, C, D, E, M, K$ , тому

$$n_y = 6.$$

Число лінійних зсувів визначаємо за формулою (6.31):

$$n_{\text{л}} = 24 - 3 \cdot 7 = 3.$$

На рис. 6.17, б римськими цифрами I, II, III, IV, V, VI, VII позначені замкнуті контури рами, а арабськими 1, 2, 3 – число простих шарнірів у даному вузлі. Таким чином, загальне число невідомих дорівнює

$$n = 6 + 3 = 9,$$

з них 6 – кутових переміщень і 3 – лінійних.

Число незалежних лінійних зсувів вузлів можна визначити за змістом, не прибігаючи до формули (6.31). Вважаючи  $EA = \infty$ , ми тим самим виключаємо лінійні переміщення внаслідок роботи стержнів на розтягання-стискання. Отже, для такої розрахункової схеми лінійні переміщення будуть визначатися тільки згинальною деформацією стержнів. Аналіз, у зв'язку зі сказаним, роботи схеми розглянутої рами (рис. 6.17, а) показує, що вузли  $C, D, E$  переміщуються по горизонталі; вузли  $D$  і  $P$  – по вертикалі, а вузли  $B, P, M, K$  – по горизонталі. Таким чином, число незалежних лінійних переміщень дорівнює 3, що відповідає знайденому числу переміщень за формулою (6.31).

Якщо розрахункова схема рами подана з розтяжними елементами, то загальне число невідомих може бути знайдено за формулою

$$n = 3Y_{\text{ж}} + 2Y_{\text{ш}} - C_0, \quad (6.32)$$

де  $Y_{\text{ж}}, Y_{\text{ш}}$  – відповідно число жорстких і шарнірних (з повними шарнірами) вузлів споруди (у ці числа входять і опорні вузли);  $C_0$  – число опорних стержнів.

Для рами, показаної на рис. 6.17, а, число невідомих дорівнює

$$n = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 2 - 8 = 20.$$

Як і раніше, число невідомих  $n$  (6.32) можна визначити за змістом, послідовно закріплюючи усі вузли рами від лінійних і кутових зсувів. Так, вузли  $B, C, D, E, M, K$  мають по три зсуви (один кутовий і два лінійних), а вузол  $P$  – два лінійних зсуви, тобто усього – 20.

Порівняння отриманих результатів показує, що допущення про нерозтяжність знизило ступінь кінематичної невизначеності з 20 до 9. Це істотне спрощення для «ручного» розрахунку. Далі будемо розглядати рами з нерозтяжними стержнями, а до розрахункових схем рам з розтяжними елементами будемо повертатися при розрахунках на ЕОМ.

### 6.2.2. Основна система

При розрахунку статично невизначних систем методом переміщень основна система являє собою набір однопрогонових статично невизначних стержнів. Це досягається шляхом уведення в усі жорсткі вузли заданої системи защемлень (заділок) і устанавлення додаткових стержнів, що перешкоджають лінійним зсувам вузлів. Основна система заданої рами, показаної на рис. 6.17, а, представлена на рис. 6.18, а. У задану систему введено шість зв'язків (вузли  $B, C, D, E, M, K$ ), що перешкоджають повороту вузлів, і три зв'язки (вузли  $P, E, K$ ), що перешкоджають лінійним переміщенням вузлів. Слід зазначити, що введені защемлюючі зв'язки (защемлення, заділки) відрізняються від звичайного абсолютно жорсткого защемлення тим, що чинять перешкоду лише повороту вузла і не позбавляють його лінійної рухливості. Порівняємо основну систему методу переміщень з основною системою методу сил (рис. 6.18, б).

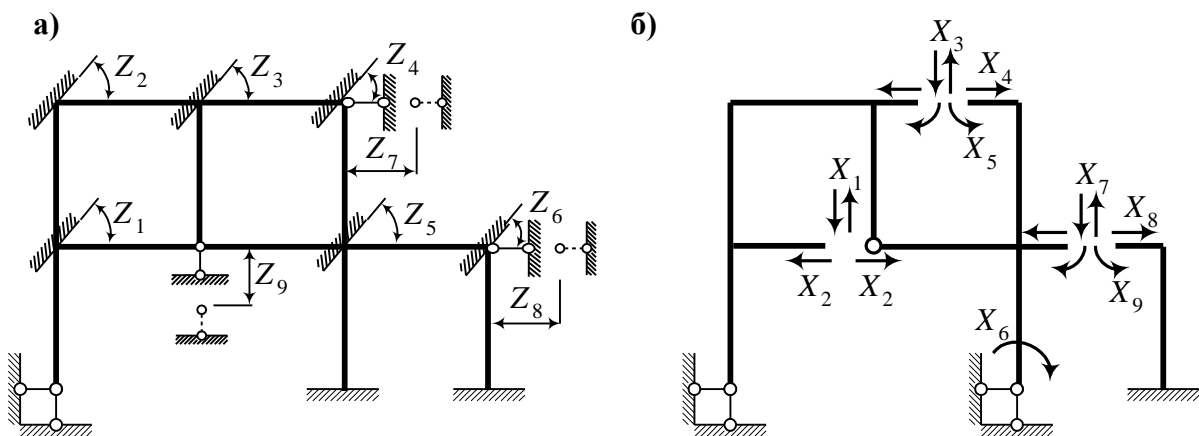


Рис. 6.18. Основні системи методу переміщень (а) і методу сил (б)

Показана на рис. 6.18, а основна система 9 разів кінематично невизначна. Якщо основна система методу сил одержується видаленням зв'язків (рис. 6.18, б), то основна система методу переміщень – уведенням зв'язків. Перехід від заданої системи до основної в методі сил пов'язаний зі знизенням ступеня її статичної невизначності, а перехід до основної системи методу переміщень – з підвищенням ступеня статичної невизначності. За основні невідомі в методі переміщень, як було зазначено раніше, приймаються кутові  $Z_1, \dots, Z_6$  і лінійні  $Z_7, Z_8, Z_9$  переміщення вузлів (рис. 6.18, а).

### 6.2.3. Канонічні рівняння при розрахунку на дію зовнішнього навантаження

Основна система (рис. 6.18, а) відрізняється від заданої (рис. 6.17, а) наявністю додаткових зв'язків, що перешкоджають кутовим і лінійним переміщенням вузлів. В уведених защемленнях виникають реактивні моменти, а в доданих стержнях – реактивні зусилля. Реактивні моменти і реактивні зусилля можна перетворити в нуль, якщо повернути защемлення на кути, дорівнюють дійсним поворотам вузлів, і змістити вузли так, щоб їхні лінійні переміщення дорівнювали переміщенням, що виникають у заданій системі. Математично запис цього факту виражається системою канонічних рівнянь

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \dots + Z_n r_{1n} + R_{1F} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \dots + Z_n r_{2n} + R_{2F} &= 0; \\ \dots & \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \dots + Z_n r_{nn} + R_{nF} &= 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

У матричній формі система (6.33) має такий вигляд:

$$R \vec{Z} + \vec{R}_F = 0, \quad (6.34)$$

де  $R$  – матриця жорсткості системи, чи матриця реакцій;  $\vec{Z}$  – вектор невідомих переміщень;  $R_F$  – вектор вантажних реакцій,

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix}, \quad \vec{R}_F = \begin{pmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ \dots \\ R_{nF} \end{pmatrix}.$$

Кожен коефіцієнт  $r_{ik}$  ( $i=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,n$ ) системи рівнянь (6.34) являє собою реактивний момент (зусилля) у введеному защемленні (у додатковому зв'язку)  $i$  від повороту (лінійного переміщення) зв'язку  $k$  на одиницю. Таким чином, у позначенні реакції  $r_{ik}$  індекс  $i$  указує номер зв'язку, у якому обчислюється реакція, а індекс  $k$  – номер зв'язку, зсув якого викликає цю реакцію ( $i$  – де виникає реакція, а  $k$  – від чого виникає). Вільні члени  $R_{iF}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) системи рівнянь являють собою реакції (реактивні моменти, реактивні зусилля) у  $i$ -х зв'язках, викликані зовнішнім навантаженням.

## 6.2.4. Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

### 6.2.4.1. Загальний спосіб

Розглянемо основну систему методу переміщень у двох одиничних станах « $i$ » і « $k$ » (рис. 6.19).

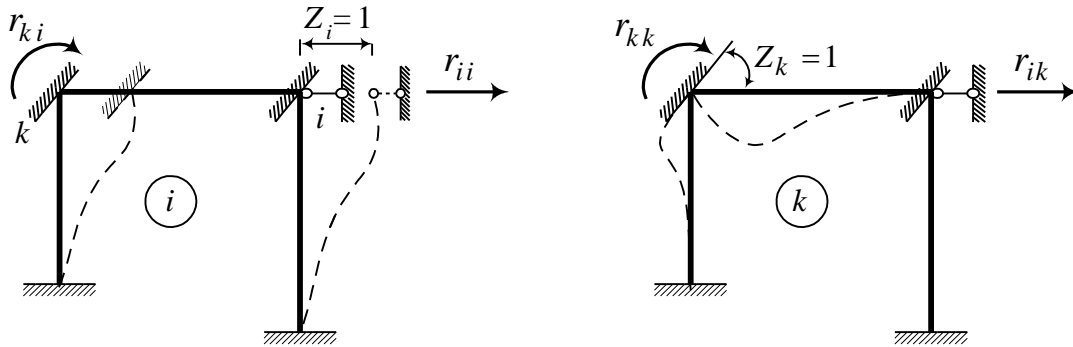


Рис. 6.19. Основна системи методу переміщень у двох одиничних станах

Стан « $i$ » характеризується переміщенням зв'язку  $i$  на одиницю, у результаті чого у зв'язку  $k$  виникає реактивний момент  $r_{ki}$ . У стані « $k$ » повертається зв'язок  $k$  на кут, що дорівнює одиниці, і при цьому у зв'язку  $i$  виникає реакція  $r_{ik}$ . Виразимо роботу зовнішніх сил  $r_{ik}$ ,  $r_{kk}$  стану « $k$ » на переміщеннях стану « $i$ » через роботу внутрішніх сил стану « $k$ » ( $M_k, N_k, Q_k$ ) на переміщеннях, що відповідають стану « $i$ » ( $M_i ds/EJ, N_i ds/EA, \mu Q_i ds/GA$ ). З огляду на те, що на будь-яких можливих нескінченно малих переміщеннях сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил дорівнює нулю (див. п. 5.4), одержимо

$$A_{ki} = r_{ik} \cdot 1 = \sum \int \frac{M_k M_i}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_k N_i}{EA} ds + \sum \int \frac{\mu Q_k Q_i}{GA} ds. \quad (6.35)$$

Звідси, приймаючи до уваги тільки роботу згинальних моментів, знайдемо

$$r_{ik} = \sum \int \frac{M_k M_i}{EJ} ds. \quad (6.36)$$

Отже, щоб знайти будь-який коефіцієнт системи рівнянь (6.33), необхідно в основній системі побудувати одиничні епюри  $M_i$  й  $M_k$  і їх «перемножити» (тобто обчислення інтегралів (6.36) виконати за відомим правилом Верещагіна (див. п. 6.1.4)).

На підставі теореми про взаємність робіт (див. п. 5.8.1) прирівнюємо роботу зовнішніх сил стану « $k$ » на переміщеннях стану « $i$ » до роботи зовнішніх сил стану « $i$ » на переміщеннях стану « $k$ »:

$$A_{ki} = A_{ik} ,$$

отже,

$$r_{ik} = r_{ki} . \quad (6.37)$$

З (6.37) випливає, що коефіцієнти рівнянь (6.33) мають властивість симетрії, тобто матриця  $R$  системи (6.34) є симетричною щодо головної діагоналі.

Для визначення вільних членів системи рівнянь (6.33), тобто реакцій, що виникають від зовнішнього навантаження, розглянемо два інших стани основної системи: вантажний, що характеризується дією зовнішнього навантаження, і одиничний, що характеризується переміщенням зв'язку  $i$  (рис. 6.20).

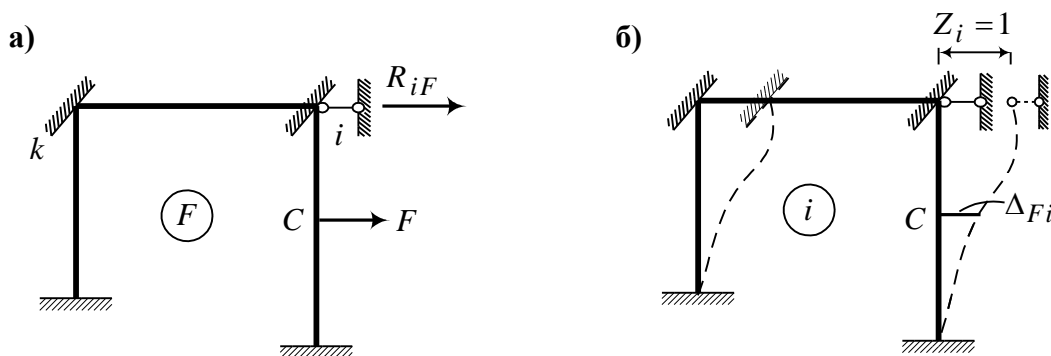


Рис. 6.20. Основна система методу переміщень у двох станах: вантажному (а) і одиничному (б)

Робота зовнішніх сил стану « $F$ » на переміщеннях стану « $i$ » дорівнює

$$A_{Fi} = F \cdot \Delta_{Fi} + R_{iF} \cdot 1. \quad (6.38)$$

На підставі теореми про взаємність робіт маємо

$$A_{Fi} = A_{iF} ,$$

але  $A_{iF} = 0$  (див. рис. 6.20, б, а). Тому з рівняння (6.38) одержуємо

$$R_{iF} = -F \cdot \Delta_{Fi}. \quad (6.39)$$

Тут  $\Delta_{Fi}$  – переміщення точки  $C$  (точки прикладання сили  $F$ ) у статично невизначній системі, викликане одиничним зсувом зв'язку  $i$ . Для визначення цього переміщення необхідно поступити в такий спосіб. У статично визначній системі прикласти в точці  $C$  по напрямку сили  $F$  одиничну  $F=1$  і побудувати від неї епюру  $M_1^*$  (рис. 6.21).



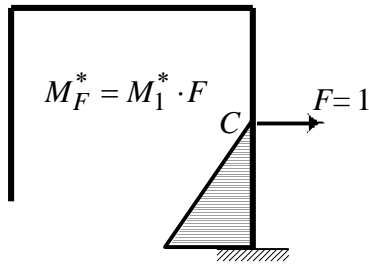


Рис. 6.21. Вантажна епюра в основній системі методу сил

Кожну ординату побудованої епюри  $M_1^*$  помножити на величину сили  $F$ , тобто одержати епюру  $M_F^*$ . Іншими словами,  $M_F^*$  – епюра, побудована від зовнішнього навантаження в будь-якій статично визначній системі, яка може бути отримана з заданої, чи в основній системі методу переміщень усуненням зайвих зв'язків, у тому числі обов'язково і того зв'язку, реакція якого визначається. Тепер шукане переміщення при розрахунку роботи тільки згинальних моментів дорівнює

$$\Delta_{Fi} = \sum \int \frac{M_F^* M_i}{EJ} ds, \quad (6.40)$$

а невідома реакція визначається з (6.39):

$$R_{iF} = -\sum \int \frac{M_F^* M_i}{EJ} ds. \quad (6.41)$$

З виразу (6.41) випливає: для одержання реакції в  $i$ -му зв'язку від заданого навантаження необхідно «перемножити» епюру згинальних моментів у статично визначній системі від навантаження на епюрі згинальних моментів  $M_i$  від одиничного зсуву  $i$ -го зв'язку в основній системі методу переміщень і знак результату змінити на зворотний. Зазначимо, що рівність (6.41) була вперше встановлена проф. А.А. Гвоздевим\*.

Звернемося ще раз до рівняння (6.39). Прийmemo  $F=1$  і у зв'язку з цим заміниmo  $\Delta_{Fi} = \delta_{Fi}$  і  $R_{iF} = r_{iF}$ . У результаті одержимо

$$r_{iF} = -\delta_{Fi}. \quad (6.42)$$

Рівність (6.42) по суті виражає взаємність реакцій і переміщень (див. п. 5.8.4). Вона була встановлена Релеєм. Таким чином, епюру переміщень  $\delta_{Fi}$ , викликаних переміщенням зв'язку  $Z_i = 1$ , можна розглядати як лінію впливу реакції в цьому зв'язку (зі зворотним знаком).

\* Гвоздев А.А. (1897-1967) – видатний російський вчений, автор чисельних робіт з будівельної механіки, теорії пластичності і повзучості бетону, в області розрахунку залізобетонних конструкцій за граничними станами, які одержали всесвітнє визнання. Глава російської школи залізобетону.

### 6.2.4.2. Статичний спосіб

Основна система методу переміщень, як було показано вище (див. рис. 6.18, а), складена з однопрогонових статично невизначених стержнів. Задача визначення внутрішніх сил у таких стержнях може бути розв'язана кожним з відомих методів, наприклад методом сил. Результати таких розрахунків зведені в таблицю, яка називається таблицею стандартних розв'язків (табл. 6.1). У цій таблиці наведені чисельні розв'язки з урахуванням згинальних деформацій стержнів для характерних випадків закріплення, зсуву опор, зовнішнього навантаження і температурних впливів. Перш ніж перейти до визначення реактивних моментів і реактивних зусиль, зазначимо таке. Усі коефіцієнти, а також вільні члени рівнянь (6.33), (6.34) розділені на дві групи: коефіцієнти, що представляють реактивні моменти у введених защемленнях; коефіцієнти, що представляють реактивні зусилля у введених стержнях. Коефіцієнти і вільні члени, що представляють реактивні моменти в защемленнях, визначаються вирізанням вузлів і складанням рівнянь вигляду  $\sum M_y = 0$ . Коефіцієнти і вільні члени, що представляють реактивні зусилля у введених стержнях, можна визначити за допомогою розрізів, які відокремлюють частину чи всю раму від опор, і складанням рівнянь рівноваги сил, діючих на відсічену частину:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Розглянемо приклад визначення реактивних зусиль. Реактивне зусилля будемо вважати додатним, якщо напрямок його дії збігається з прийнятим напрямком повороту чи лінійного зсуву вузла.

Нехай задана рама, показана на рис. 6.22, а. Її основна система подана на рис. 6.22, б.

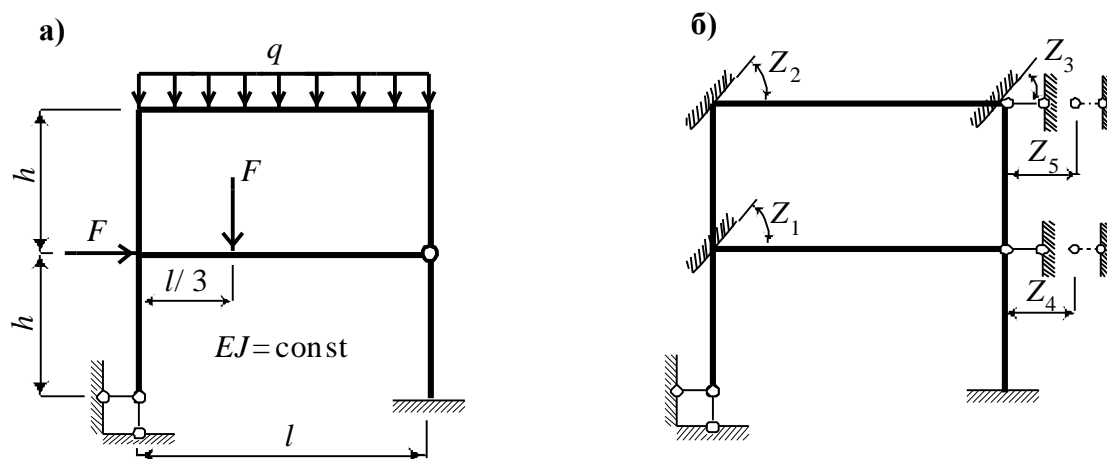
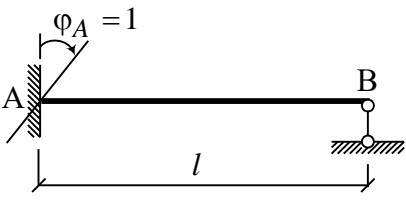
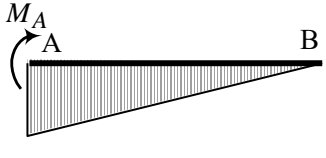
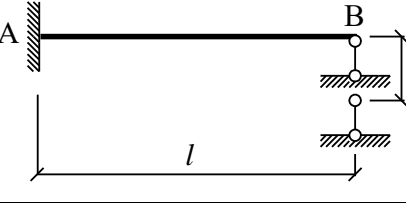
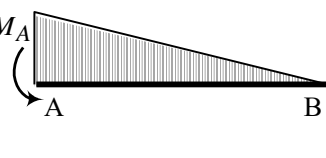
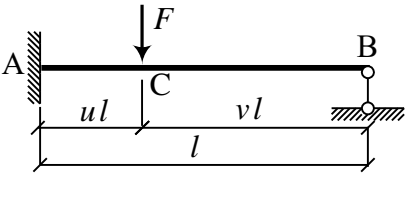
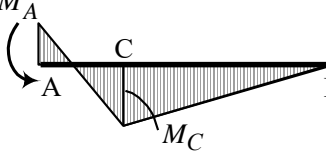
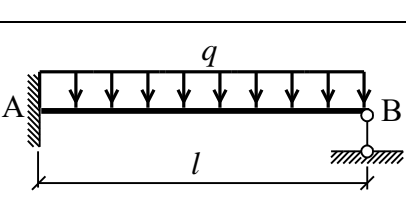
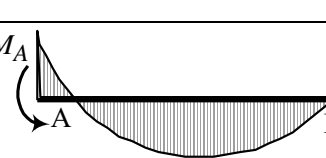
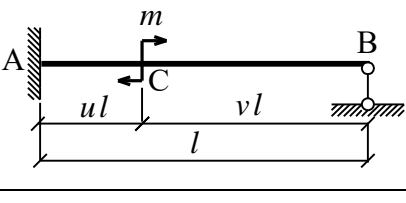
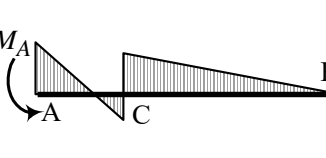
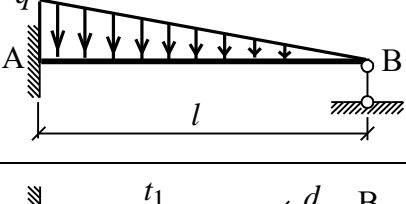
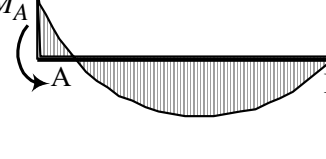
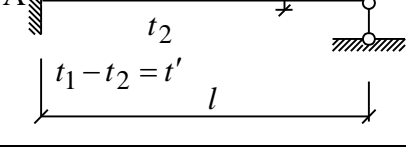
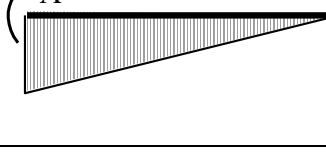
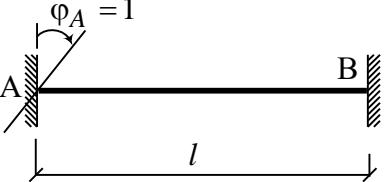
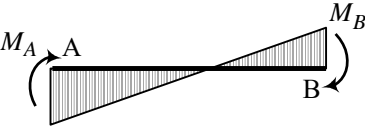
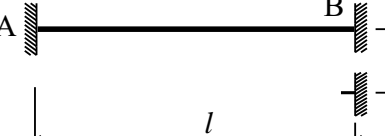

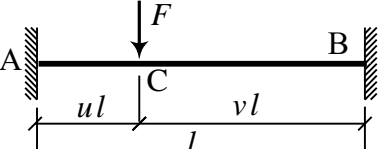
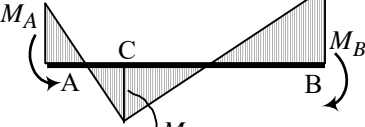
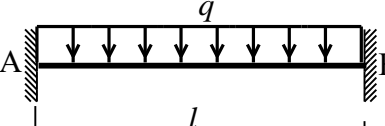

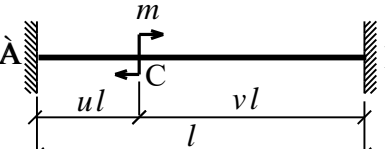
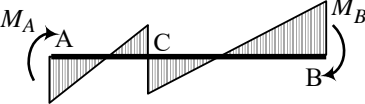
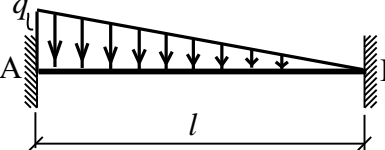
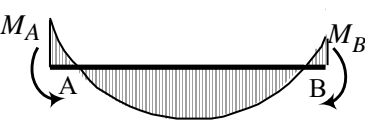
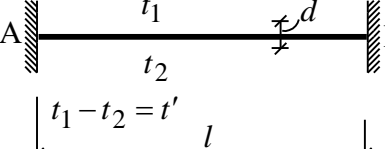



Рис. 6.22. Задана рама (а) та її основна система (б)

Таблиця стандартних розв'язків

№	Схеми стержнів і впливів на них	Епюри моментів	Формули
1	2	3	4
1			$M_A = \frac{3EJ}{l}$
2			$M_A = -\frac{3EJ}{l^2}$
3			$M_A = -\frac{Fl}{2}v(1-v^2)$ $M_C = \frac{Fl}{2}u^2v(3-u)$
4			$M_A = -\frac{ql^2}{8}$
5			$M_A = -\frac{m}{2}(3v^2 - 1)$
6			$M_A = -\frac{ql^2}{15}$
7			$M_A = \frac{3EJ\alpha t'}{2d}$

1	2	3	4
8			$M_A = \frac{4EJ}{l}$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$
9			$M_A = M_B = -\frac{6EJ}{l^2}$
10			$M_A = -u v^2 F l$ $M_B = u^2 v F l$ $M_C = 2u^2 v^2 F l$
11			$M_A = -M_B = -\frac{q l^2}{12}$
12			$M_A = m v (3u - 1)$ $M_B = m u (3v - 1)$
13			$M_A = -\frac{q l^2}{20}$ $M_B = \frac{q l^2}{30}$
14			$M_A = -M_B = \frac{EJ\alpha t'}{d}$

Покажемо, як визначаються коефіцієнти  $r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}$  і вільні члени  $R_{1F}, R_{2F}, R_{3F}, R_{4F}$ . Побудуємо епюри  $M_1$  і  $M_F$  (рис. 6.23). Епюра  $M_1$  побудована від повороту на одиницю защемлення у вузлі 1 за годинниковою стрілкою. Ординати епюри в кожнім стержні отримані за допомогою таблиці стандартних розв'язків (табл. 6.1, схеми 1 і 8). Для побудови епюри  $M_F$  використані схеми 3 і 11 тієї самої таблиці. Виходячи з правила, сформульованого вище, реактивні моменти направляємо за годинниковою стрілкою (у бік повороту вузлів).

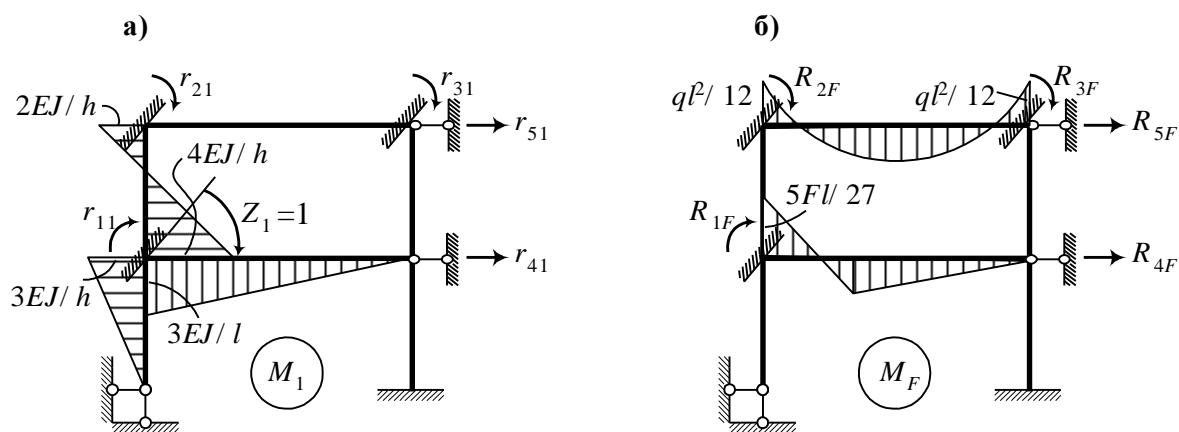


Рис. 6.23. Епюри  $M_1$  і  $M_F$

Вирізаємо відповідні вузли і з рівнянь рівноваги одержуємо значення реактивних моментів (рис. 6.24).

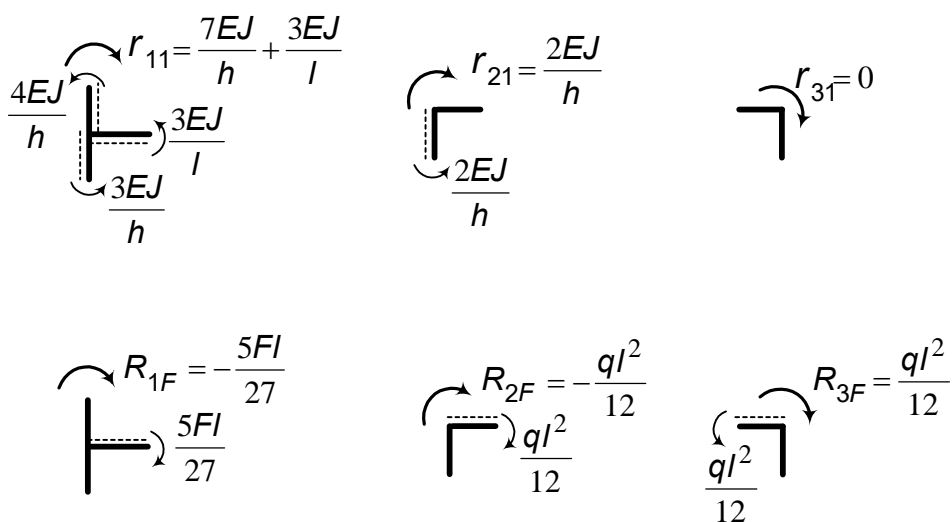


Рис. 6.24. До визначення реактивних моментів

Визначимо тепер реактивні зусилля (рис. 6.25).

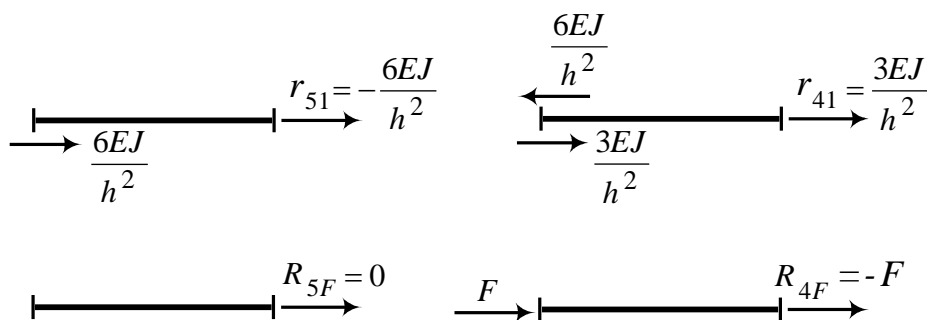


Рис. 6.25. До визначення реактивних зусиль

### 6.2.5. Перевірки правильності визначення реактивних зусиль і моментів

Для перевірки правильності знайдених реактивних зусиль з різними індексами скористаємося рівністю (6.37). Наприклад, перевіримо правильність обчислення реактивного зусилля  $r_{41}$ . З (6.37) випливає  $r_{41} = r_{14}$ . Побудуємо епюру  $M_4$  (рис. 6.26).

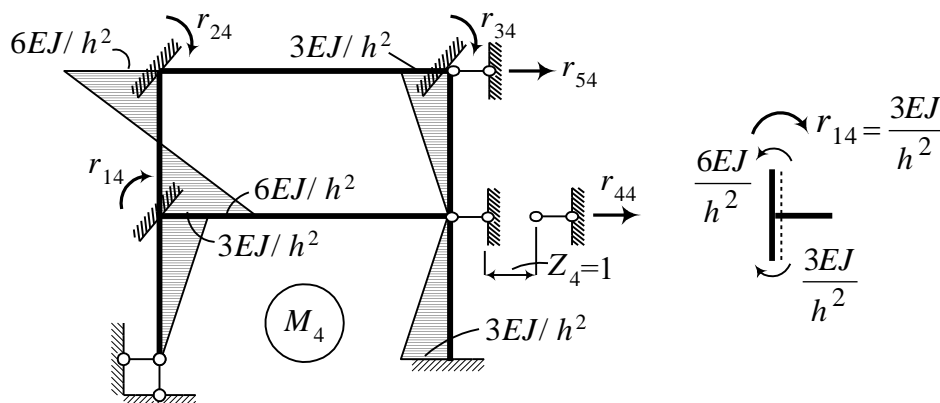


Рис. 6.26. Епюра  $M_4$

Як бачимо, рівність  $r_{41} = r_{14}$  витримується, отже, реактивний момент  $r_{14}$  знайдений правильно.

Для перевірки правильності реактивних зусиль з однаковими індексами ( $i=k$ ) і реактивних зусиль, викликаних зовнішнім навантаженням, скористаємося залежностями (6.36) і (6.41). Визначимо

$r_{11}$ :

$$r_{11} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \frac{3EJ}{l} \cdot l \frac{2}{3} \frac{3EJ}{l} + \frac{1}{2} \frac{3EJ}{h} \cdot h \frac{2}{3} \frac{3EJ}{h} + \frac{1}{2} \frac{4EJ}{h} \cdot h \left( \frac{2}{3} \frac{4EJ}{h} - \frac{1}{3} \frac{2EJ}{h} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{2EJ}{h} \cdot h \left( \frac{2}{3} \frac{2EJ}{h} - \frac{1}{3} \frac{4EJ}{h} \right) = \frac{3EJ}{l} + \frac{7EJ}{h}.$$

Цей результат відповідає знайденому статичним способом значенню (див. рис. 6.24).

Знайдемо реактивне зусилля  $R_{4F}$ . Для цього побудуємо епюру  $M_F^*$  в основній системі методу сил (рис. 6.27, б):

$$R_{4F} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \frac{6EJ}{h^2} h \left( \frac{2}{3} \frac{Fl}{3} - \frac{1}{3} \left( Fh - \frac{Fl}{3} \right) \right) + \frac{1}{2} \frac{6EJ}{h^2} h \left( \frac{2}{3} \left( Fh - \frac{Fl}{3} \right) - \frac{1}{3} \frac{Fl}{3} \right) \right] = F.$$

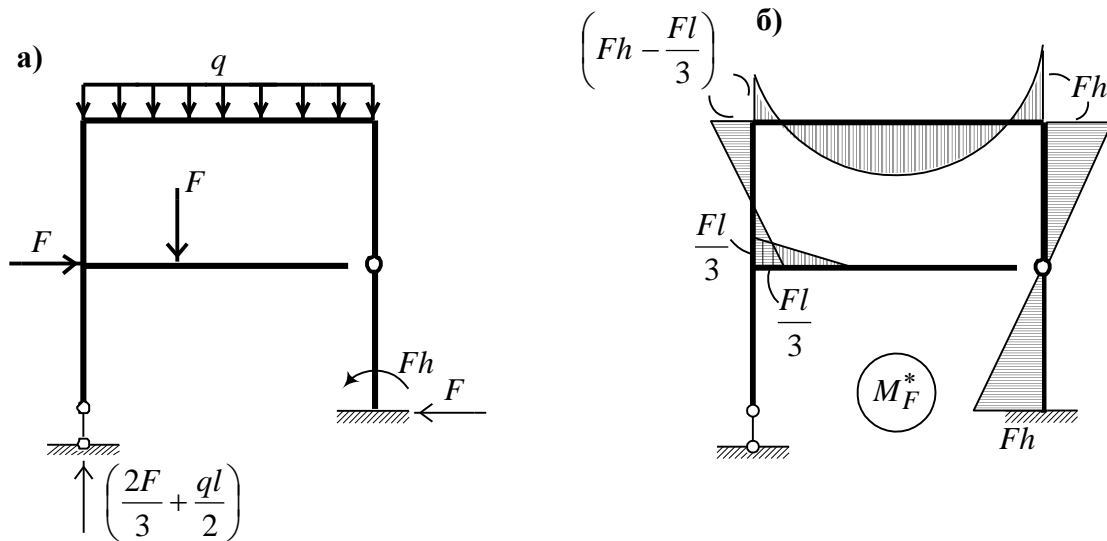


Рис. 6.27. Еквівалентна система методу сил (а) і епюра моментів  $M_F^*$  (б)

Знак цього результату відповідно до (6.41) слід змінити на зворотний. Тоді одержимо

$$R_{4F} = -F,$$

що також відповідає зусиллю, знайденому статичним способом (див. рис. 6.25). Після того як знайдені і перевірені коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь (6.33) чи (6.34), виконуємо її розв'язання.

### 6.2.6. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі

У п. 6.1.5 розв'язання системи канонічних рівнянь методу сил було виконано методом квадратного кореня. Тут викладемо інший метод, матричний.

Система рівнянь (6.34) має єдиний розв'язок, якщо матриця  $R$  не вироджена, тобто  $\det R \neq 0$ . У цьому випадку матриця  $R$  має зворотну матрицю, і розв'язок системи записується так:

$$\vec{Z} = R^{-1} \vec{R}_F. \quad (6.43)$$

Щоб знайти зворотну матрицю  $R^{-1}$ , треба побудувати допоміжну матрицю  $C$ , складену з алгебраїчних доповнень  $r_{ij}$  матриці  $R$ , транспонувати її і помножити на число  $1/\det R$ , тобто

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} C^T. \quad (6.44)$$

Кожен елемент допоміжної матриці  $C_{ij}$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (6.45)$$

Мінором  $M_{ij}$  називається визначник  $n - 1$  порядку, отриманий з визначника  $[R]$  викреслюванням  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця.

Для системи порядку  $n = 3$  матриця  $R$  має вигляд (див. (6.34))

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Допоміжна матриця

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо елементи допоміжної матриці. Для визначення  $C_{11}$  в матриці  $R$  викреслюємо перший рядок і перший стовець. Тоді відповідно до (6.45) маємо

$$C_{11} = r_{22} r_{33} - r_{32}^2. \quad (6.46)$$

Аналогічно знаходимо інші елементи матриці  $C$ :

$$\begin{aligned} C_{12} &= C_{21} = -(r_{21} r_{33} - r_{31} r_{23}); \\ C_{13} &= C_{31} = r_{21} r_{32} - r_{31} r_{22}; \\ C_{22} &= r_{11} r_{33} - r_{31}^2; \\ C_{23} &= C_{32} = -(r_{11} r_{32} - r_{31} r_{12}); \\ C_{33} &= r_{11} r_{22} - r_{12}^2. \end{aligned} \quad (6.47)$$



Транспонована матриця

$$C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = C.$$

Тепер

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{1}{\det R} (c_{11} R_{1F} + c_{12} R_{2F} + c_{13} R_{3F}); \\ Z_2 &= -\frac{1}{\det R} (c_{21} R_{1F} + c_{22} R_{2F} + c_{23} R_{3F}); \\ Z_3 &= -\frac{1}{\det R} (c_{31} R_{1F} + c_{32} R_{2F} + c_{33} R_{3F}). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Для системи більш високого порядку розв'язок може бути знайдений аналогічно.

### 6.2.7. Побудова епюр $M, Q, N$ у заданій системі

Після того як система канонічних рівнянь (6.33), (6.34) методу переміщень розв'язана і знайдені значення невідомих кутів повороту і лінійних переміщень вузлів, можна перейти до побудови остаточної епюри моментів одержується підсумовуванням ординат епюри  $M_F$ , побудованої в основній системі, з ординатами одиничних епюр, помножених на значення невідомих:

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_F. \quad (6.49)$$

Правильність побудови остаточної епюри  $M$  може бути перевірена за допомогою прийомів, що застосовувалися в методі сил (див. п. 6.1.6), зокрема за формулою (6.18):

$$\sum \int \frac{M M_s}{EJ} ds = 0,$$

де  $M$  – остаточної епюра моментів (6.49),  $M_s$  – сумарна одинична епюра, побудована в основній системі методу сил.

Велике значення має статична перевірка рівноваги моментів у вузлах, тому що у всіх епюр, що підсумовуються, вузли не урівноважені (див., наприклад, рис. 6.26). Невиконання умови рівноваги вузлів ( $\sum M = 0$ ) в остаточної епюрі буде свідчити про неправильне визначення значень невідомих.

Епюру поперечних сил можна побудувати за епюрою  $M$  за отриманою раніше формулою (6.19):

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

Нагадаємо, що  $M_n$  і  $M_{n-1}$  – відповідно правий і лівий опорні моменти розглянутого елемента;  $l_n$  – прогін розглянутого елемента;  $Q^0$  – поперечна сила у потрібному перерізі елемента як балки на двох опорах.

За епюрою поперечних сил способом вирізання вузлів може бути побудована еюра поздовжніх сил  $N$  (див. п. 6.1.6). Перевірка еюр  $Q$  і  $N$  здійснюється звичайним шляхом. При цьому велике значення має статична перевірка рівноваги окремих частин рами.

### 6.2.8. Розрахунок на температурні впливи

Зміна температурного режиму в статично невизначних системах, як правило, призводить до появи в них внутрішніх зусиль і напружень (див. п. 6.1.7).

Система канонічних рівнянь при температурних впливах відрізняється від системи (6.34) вектором-стовпцем вільних членів і має такий вигляд:

$$R \vec{Z} + \vec{R}_t = 0. \quad (6.50)$$

Тут елементи вектора-стовпця  $\vec{R}_t$  являють собою реакції введених зв'язків в основній системі від симетричних і обернено симетричних температурних впливів:

$$\vec{R}_t = \begin{pmatrix} R_{1t} + R'_{1t} \\ R_{2t} + R'_{2t} \\ \dots \\ R_{nt} + R'_{nt} \end{pmatrix}. \quad (6.51)$$

Визначимо реакції для рами, показаної на рис. 6.28, а.

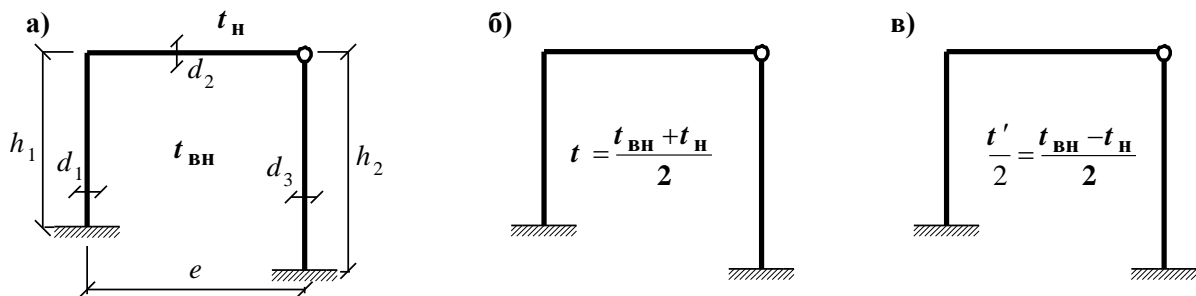


Рис. 6.28. Схеми рами (а), симетричні (б) і обернено симетричні (в) температурні впливи

Спочатку знайдемо подовження стержнів рами від симетричного температурного впливу (рис. 6.28, б) в основній системі (рис. 6.29, а). Будемо вважати  $t_{\text{вн}} > 0$ ,  $t_{\text{н}} > 0$ ,  $t_{\text{н}} > t_{\text{вн}}$ . Після цього, користуючись таблицею стандартних розв'язків (табл. 6.1), побудуємо епюру  $M_t$  і знайдемо  $R_{1t}$  і  $R_{2t}$  (рис. 6.29, б).

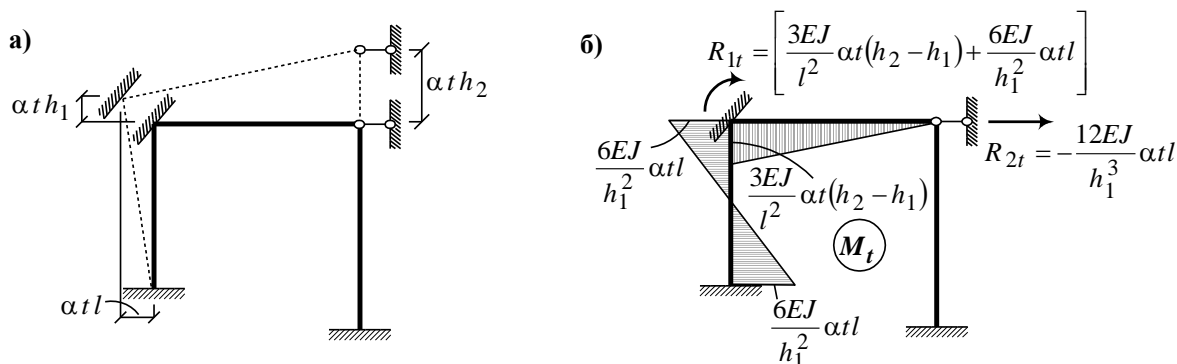


Рис. 6.29. Схема переміщень вузлів рами від температурних впливів  $t$  і епюра  $M_t$

Для визначення реакцій від обернено симетричного температурного впливу (рис. 6.28, в) за допомогою табл. 6.1 (схеми 7 і 14) побудуємо епюру  $M'_t$  (рис. 6.30).

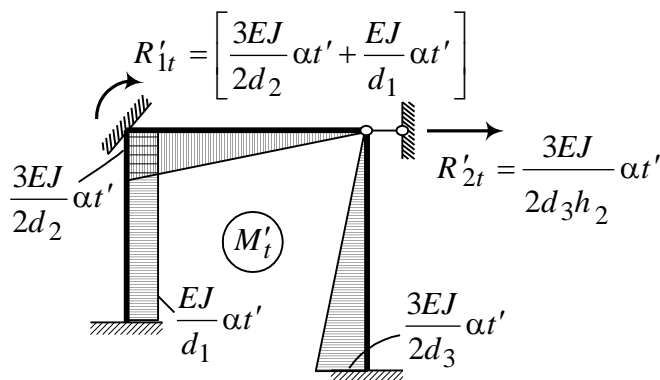


Рис. 6.30. Епюра  $M'_t$

Остаточна епюра моментів у заданій системі може бути побудована за формулою

$$M_T = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_t + M'_t . \quad (6.52)$$

Правильність побудови остаточної епюри  $M_T$  від температурних впливів підтверджується такими правилами: повинна бути дотримана рівність нулю переміщень по напрямку відкинутих зв'язків у будь-якій

основній системі методу сил (див. формулу (6.24)); усі вузли остаточної епюри моментів повинні бути урівноваженими.

Епюра поперечних сил будується за епюрою моментів (див. формулу (6.19) при  $Q^0 = 0$ ), а епюра поздовжніх сил – за епюрою поперечних сил способом вирізання вузлів.

### 6.2.8.1. Приклад розрахунку рами на температурні впливи

Задана система показана на рис. 6.31, а. Невідомими є два кутові переміщення  $Z_1$  і  $Z_2$ . Основна система показана на рис. 6.31, б. На рис. 6.31, в, г наведені одиничні епюри  $M_1$  і  $M_2$ . Температурні впливи розкладаємо на симетричні й обернено-симетричні і будуємо епюри  $M_t$  (рис. 6.31, д) і  $M'_t$  (рис. 6.31, е). Для побудови епюри  $M_t$  використана схема переміщень вузлів рами від симетричних температурних впливів, що показана на рис. 6.31, б.

Система канонічних рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} 5EJ & 2EJ \\ 2EJ & \frac{31EJ}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2295\alpha EJ}{8} - 100\alpha EJ \\ \frac{3795\alpha EJ}{16} - 325\alpha EJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи рівнянь є

$$Z_1 = -46,731\alpha; \quad Z_2 = 23,39\alpha.$$

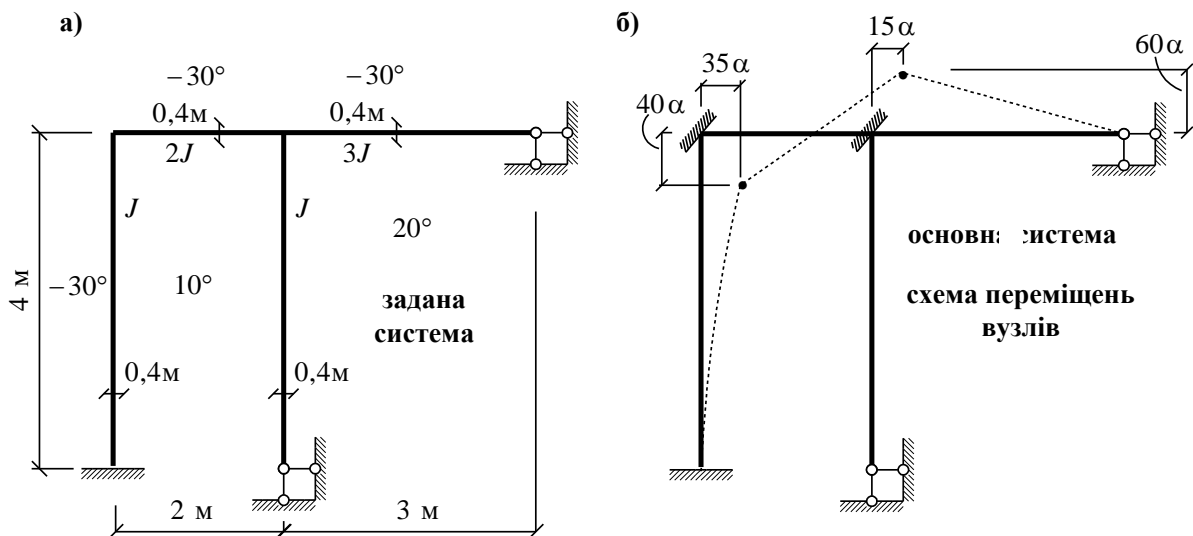


Рис. 6.31. До розрахунку рами на температурні впливи (див. також с. 186)

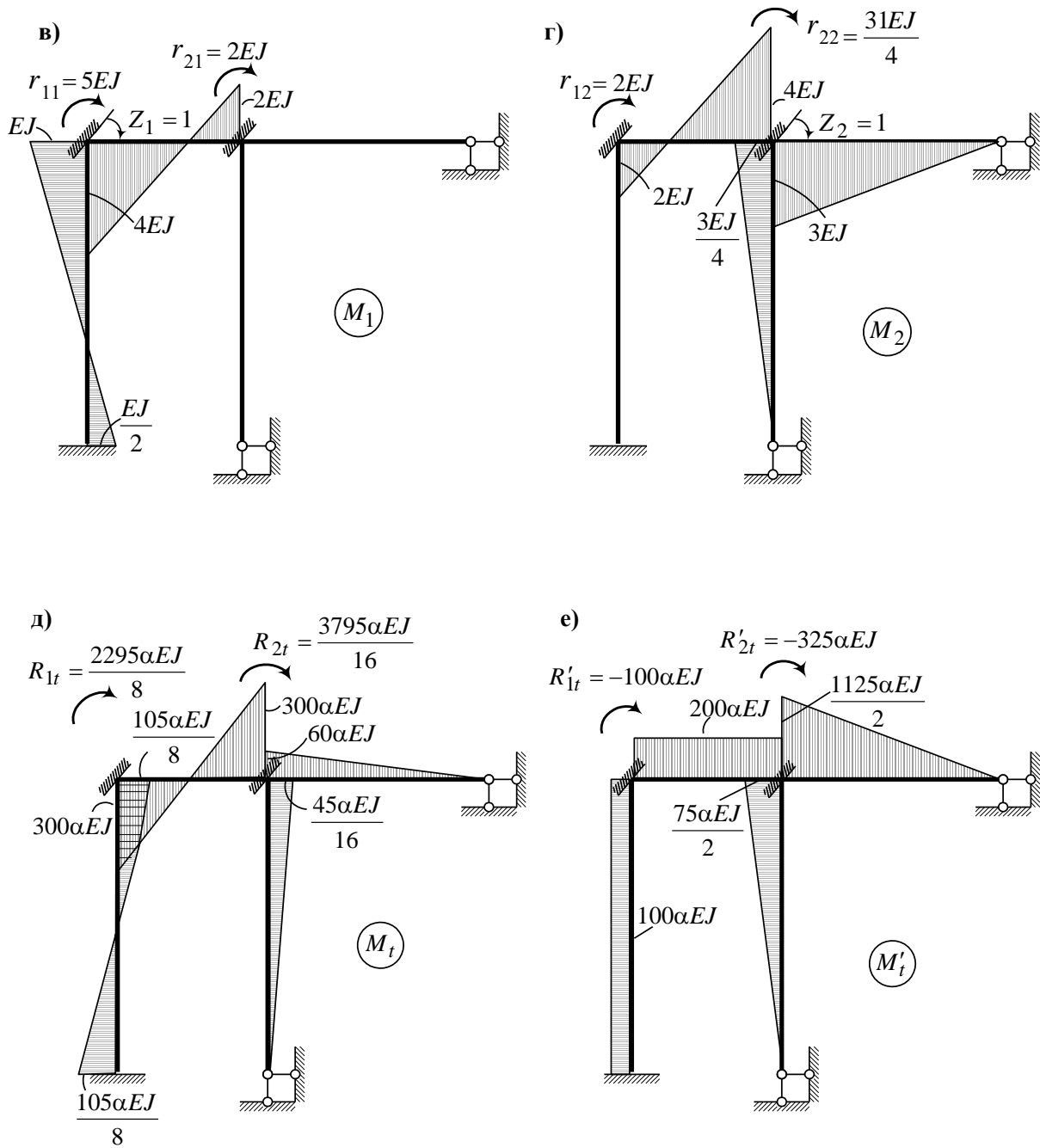


Рис. 6.31. Закінчення

Остаточна еюра будеється відповідно до залежності (6.52). Еюри « $M_1Z_1$ » і « $M_2Z_2$ » показані на рис. 6.32.

Щоб переконатися в правильності еюри  $M_T$  (рис. 6.33, а), необхідно дотриматися умови (6.24). На рис. 6.33, б, в, г показані основна система методу сил і одиничні еюри  $M_4$  і  $N_4$ .

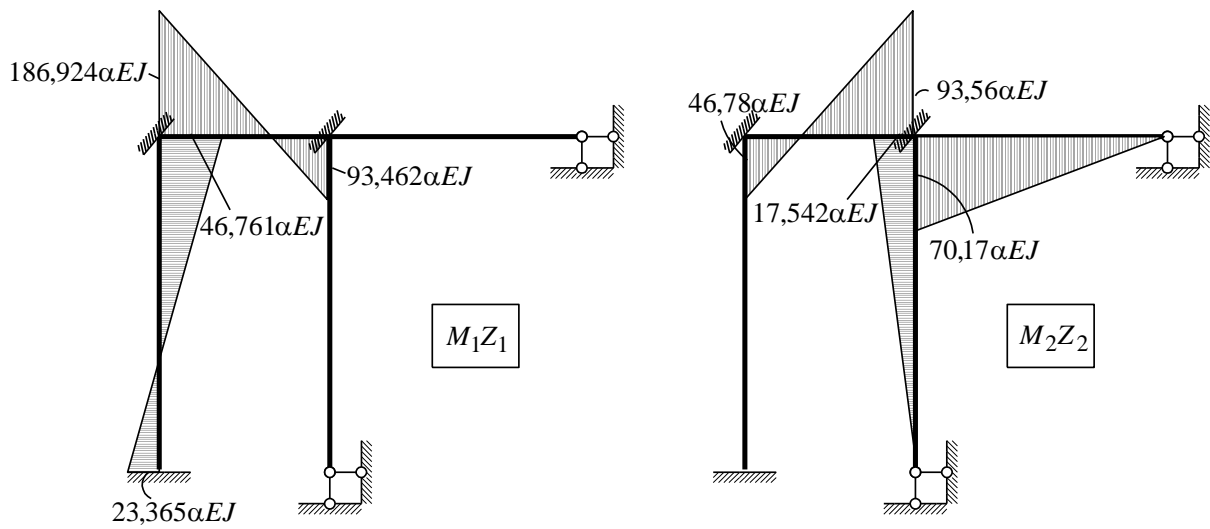


Рис. 6.32. До розрахунку рами на температурні впливи, епюри  $M_1Z_1$  и  $M_2Z_2$

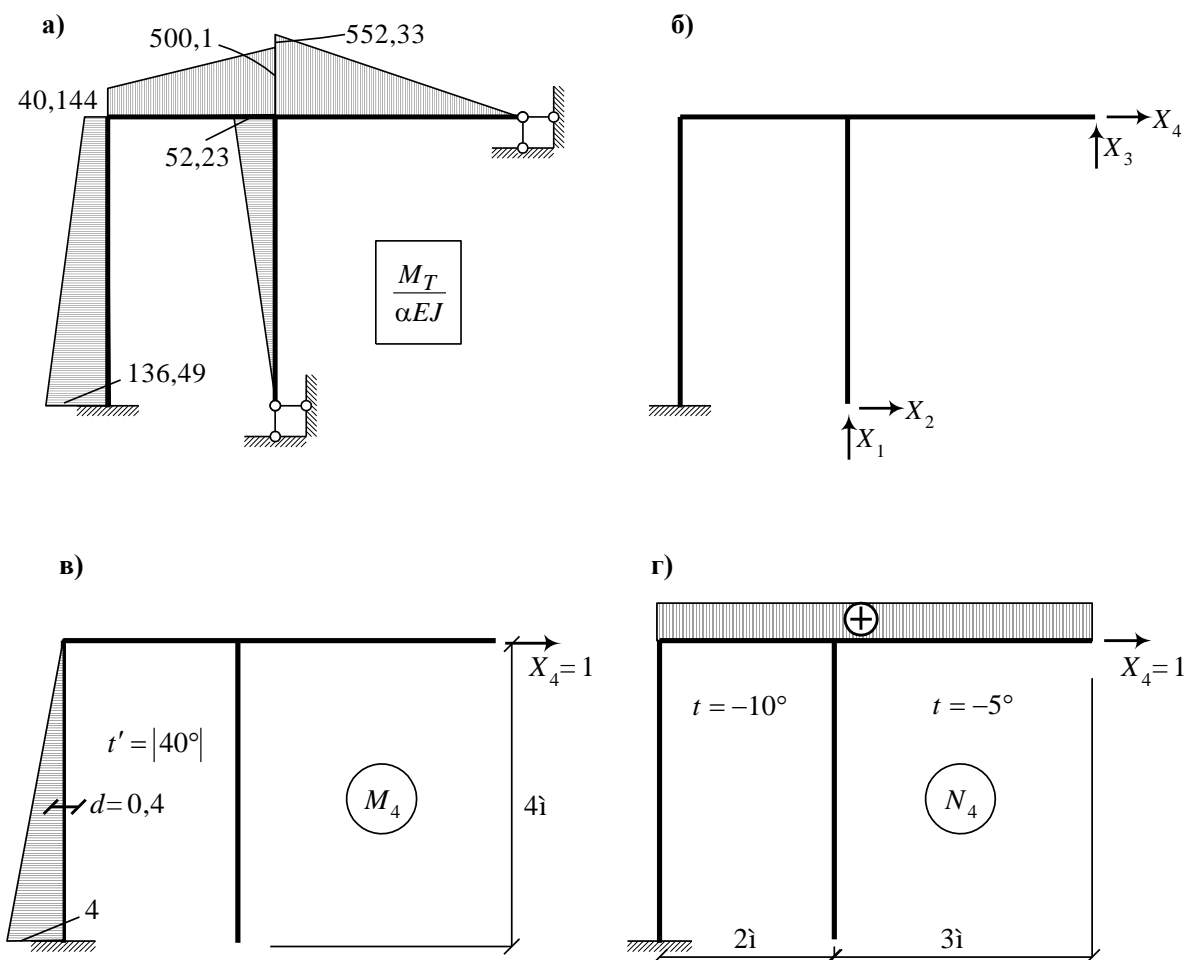


Рис. 6.33. До розрахунку рами на температурні впливи

Виконаємо перевірку (6.24):

$$\sum \int \frac{M_4 M_T}{EJ} ds = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \left( \frac{2}{3} \cdot 136,49 + \frac{1}{3} \cdot 40,144 \right) \alpha = 834,997 \alpha;$$

$$\Delta_{4t} = \pm \sum \alpha t \omega_{N_4} \pm \sum \frac{\alpha t'}{d} \omega_{M_4} = -\alpha \cdot 10 \cdot 2 - \alpha \cdot 5 \cdot 3 - \frac{\alpha \cdot 40}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = -835 \alpha;$$

$$\sum \int \frac{M_4 M_T}{EJ} ds + \Delta_{4t} = 834,997 \alpha - 835 \alpha \approx 0.$$

Таким чином, ми переконалися, що переміщення по напрямку відкинутого зв'язку  $X_4$  в основній системі методу сил відсутнє, що відповідає граничній умові в заданій системі (рис. 6.31, а). Аналогічну перевірку можна виконати щодо інших відкинутих зв'язків (або всіх разом, або по одній). Ми тут обмежимося однією перевіркою. Побудуємо тепер остаточні епюри  $Q_T$  і  $N_T$  (рис. 6.34, а, б). Звернемо увагу на те, що на рис. 6.34 показаний процес визначення поперечних і поздовжніх сил.

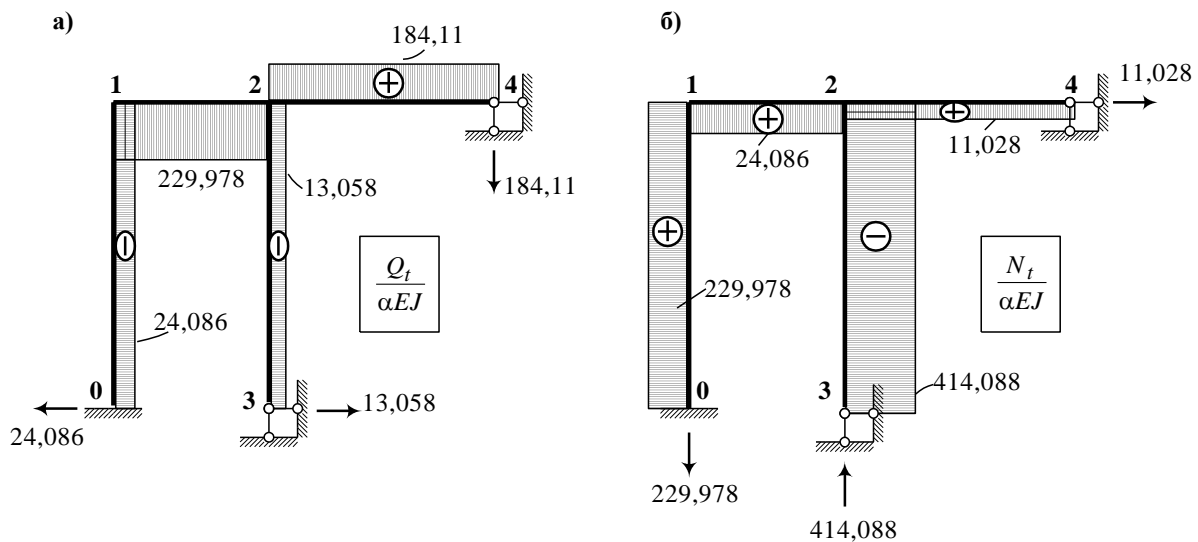


Рис. 6.34. До розрахунку рами на температурні впливи (див. також с. 189)

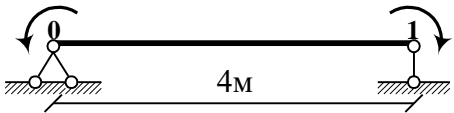
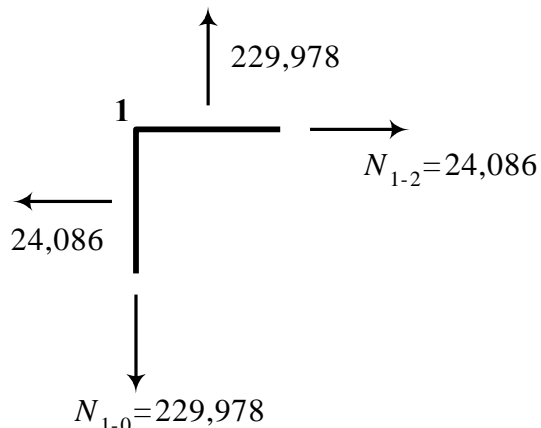
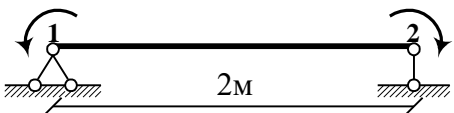
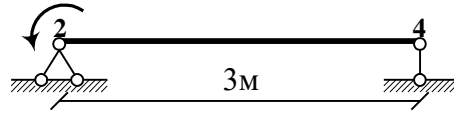
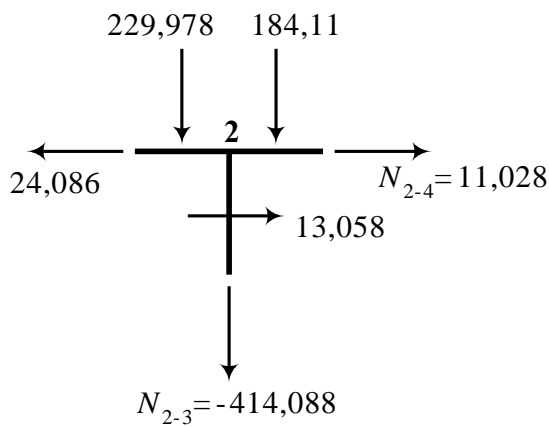
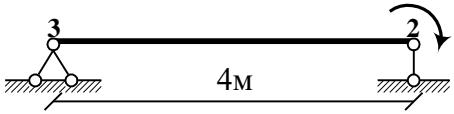
Визначення $Q_T$	Визначення $N_T$
<p>Елемент 0 - 1 повернутий на <math>90^\circ</math></p> <p><math>M_0 = 136,49</math>      <math>M_1 = 40,144</math></p>  <p><math>Q_{0,1} = \frac{-40,144 + 136,49}{4} = 24,086</math></p>	<p>Вузол 1</p> 
<p>Елемент 1 - 2</p> <p><math>M_1 = 40,144</math>      <math>M_2 = 500,1</math></p>  <p><math>Q_{1,2} = \frac{-500,1 + 40,144}{2} = -229,978</math></p>	
<p>Елемент 2 - 4</p> <p><math>M_2 = 552,33</math></p>  <p><math>Q_{2,3} = \frac{0 + 552,33}{3} = 184,11</math></p>	<p>Вузол 2</p> 
<p>Елемент 2 - 3 повернутий на <math>90^\circ</math></p> <p><math>M_2 = 52,23</math></p>  <p><math>Q_{3,2} = \frac{-52,23 - 0}{4} = -13,058</math></p>	

Рис. 6.34. Закінчення



### 6.2.9. Розрахунок на зсув опорних зв'язків

Зсув опорних чи інших зв'язків у статично невизначних системах викликає відмінні від нуля зусилля. Це було показано в п. 6.1.8. Система канонічних рівнянь у методі переміщень, що викладається тут, у випадку зсуву опорних чи інших зв'язків має вигляд

$$R \vec{Z} + \vec{R}_\Delta = 0. \quad (6.53)$$

Тут  $\vec{R}_\Delta$  – вектор реакцій у введених зв'язках в основній системі від заданого зсуву. Як і раніше, покажемо, як знайти ці реакції в загальному вигляді, а потім розглянемо конкретний приклад.

На рис. 6.35 показана рама, у якої одна з опор переміщається.

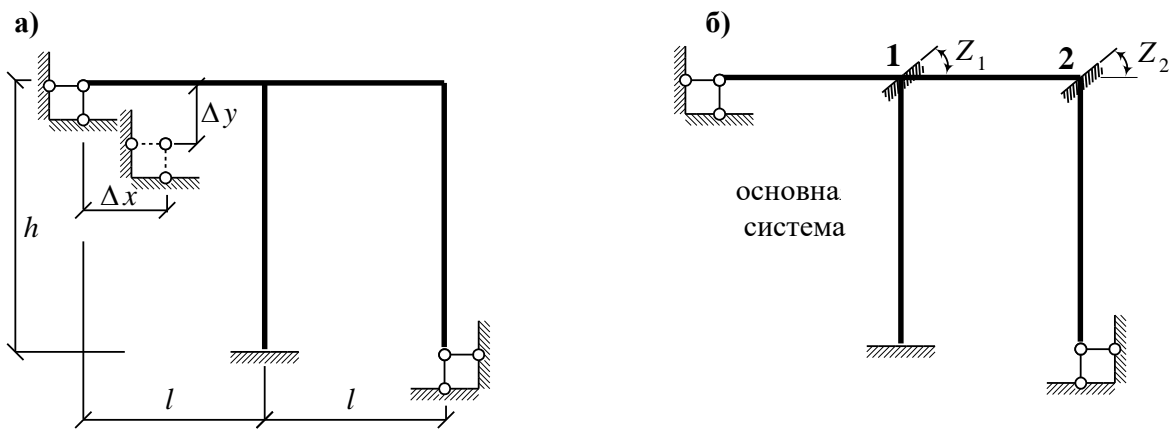


Рис. 6.35. До розрахунку рам на зсув опорних зв'язків

Визначимо реактивні моменти у введених зацмеленнях **1** і **2** від заданого зсуву опори. За допомогою таблиці стандартних розв'язків (табл. 6.1) побудуємо епюру  $M_\Delta$  (рис. 6.36).

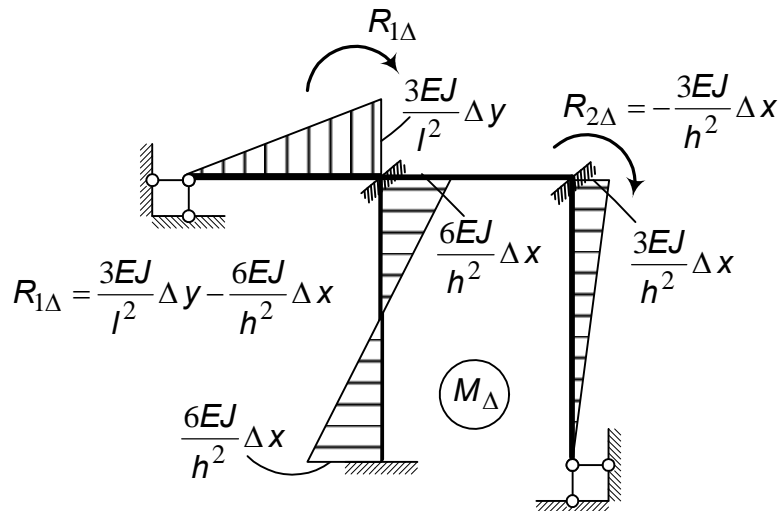


Рис. 6.36. Епюра  $M_\Delta$

Значення реактивних моментів показані на рис. 6.36. Після обчислення елементів матриці  $R$  (6.34) і  $R_{\Delta}$  (рис. 6.36) виконується розв'язання системи рівнянь (6.53) і знаходяться невідомі  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .

Епюра моментів у заданій статично невизначній системі може бути побудована за формулою

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_{\Delta}. \quad (6.54)$$

Якщо епюра моментів побудована правильно, то повинні виконуватися такі умови:

а) рівність нулю переміщень в основній системі методу сил по напрямку реакцій відкинутих зв'язків (6.29);

б) рівновага вузлів епюри моментів.

Епюра поперечних сил будується за формулою (6.19) при  $Q^0 = 0$ .

### 6.2.9.1. Приклад розрахунку рами на зсув опорних зв'язків

Рама, яку необхідно розрахувати на заданий зсув опорних зв'язків, показана на рис. 6.37, а. Число основних невідомих дорівнює двом (одне кутове й одне лінійне переміщення). Основна система методу переміщень показана на рис. 6.37, б. Далі відповідно до порядку, викладеного у п. 6.2.9, будуюмо одиничні епюри (рис. 6.37, в, г) і епюру від заданого зсуву  $M_{\Delta}$  (рис. 6.37, д). На цих самих рисунках наведені значення реакцій.

Система канонічних рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} 6EJ & \frac{2EJ}{3} \\ \frac{2EJ}{3} & \frac{16EJ}{9} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{EJ}{10} \\ -\frac{EJ}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком цієї системи рівнянь є

$$Z_1 = -\frac{5}{230}, \quad Z_2 = \frac{21}{460}.$$

Остаточну епюру моментів будуюмо відповідно до рівняння (6.54). Процес побудови епюри  $M_c$  показаний на рис. 6.37, е і 6.38, а, б. Перевірку правильності побудованої епюри моментів здійснюємо за (6.29) (основна система методу сил і епюра  $M_1^*$  показані на рис. 6.38, в, г):

$$\sum \int \frac{M_c M_1^*}{EJ} ds = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \frac{2}{3} 15,22 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \left( \frac{2}{3} 121,74 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{3} 26,09 \cdot 10^{-3} \right) = 150,005 \cdot 10^{-3}$$

$$\sum R \cdot c = -\frac{1}{3} \frac{15}{100} + 1 \cdot \frac{2}{10} = 150 \cdot 10^{-3}.$$

Умова (6.29) виконується: переміщення по напрямку відкинутого зв'язку дорівнює нулю, як у заданій системі (рис. 6.37, а).

Аналогічно визначається переміщення по напрямку інших відкинутих зв'язків (рис. 6.38, в). Надаємо можливість допитливому студенту самому переконатися в справедливості умови (6.29) або стосовно до кожного зв'язку окремо, або всіх зв'язків відразу.

Епюри поперечних і поздовжніх сил показані на рис. 6.38, д, е. Процес обчислення поперечних і поздовжніх сил для кожного елемента рами і вузла наведений на рис. 6.39.

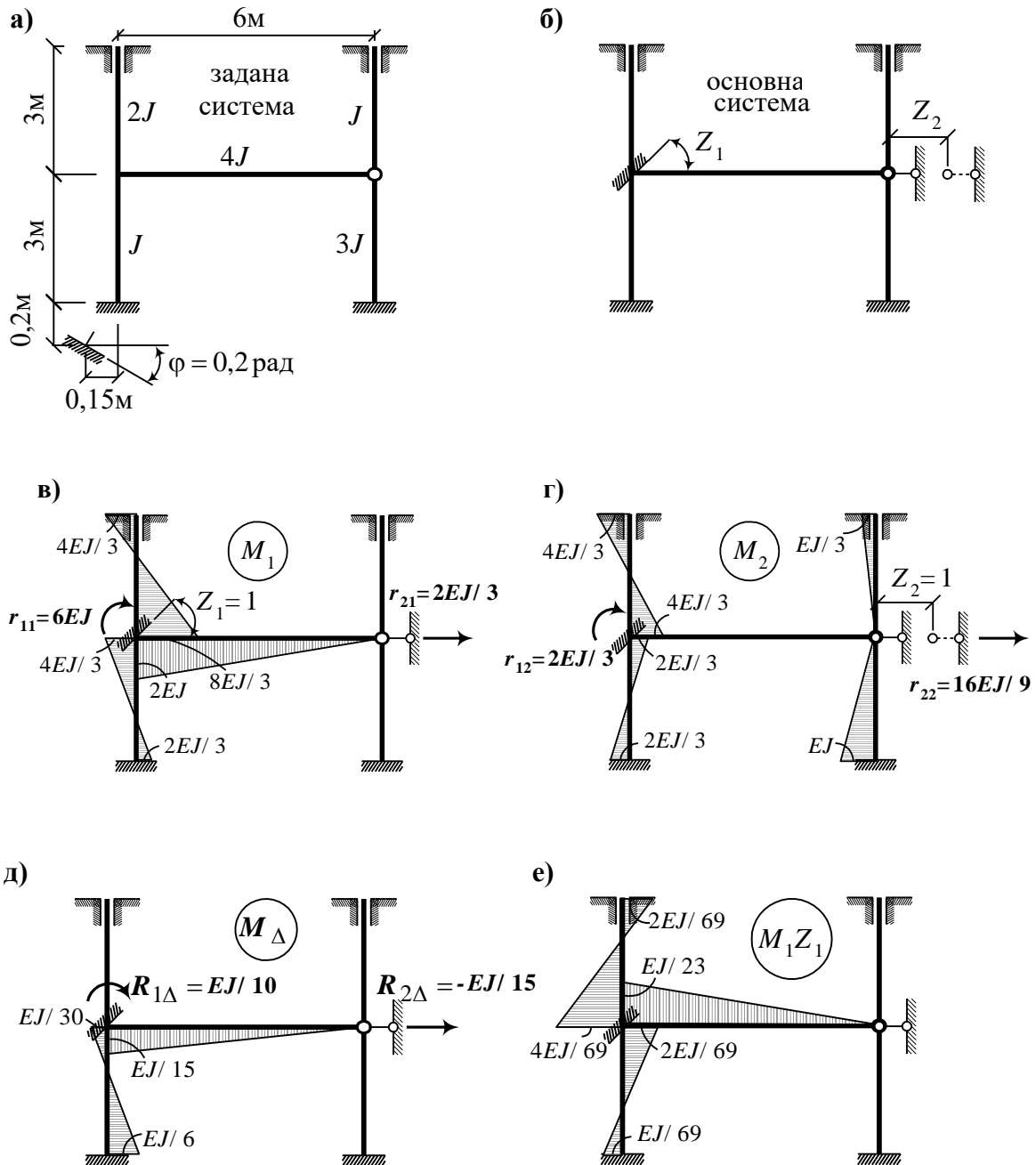


Рис. 6.37. До розрахунку рами на зсув опорних зв'язків: а - задана система; б - основна система; в - епюра  $M_1$ ; г - епюра  $M_2$ ; д - епюра  $M_\Delta$ ; е - епюра  $M_1Z_1$

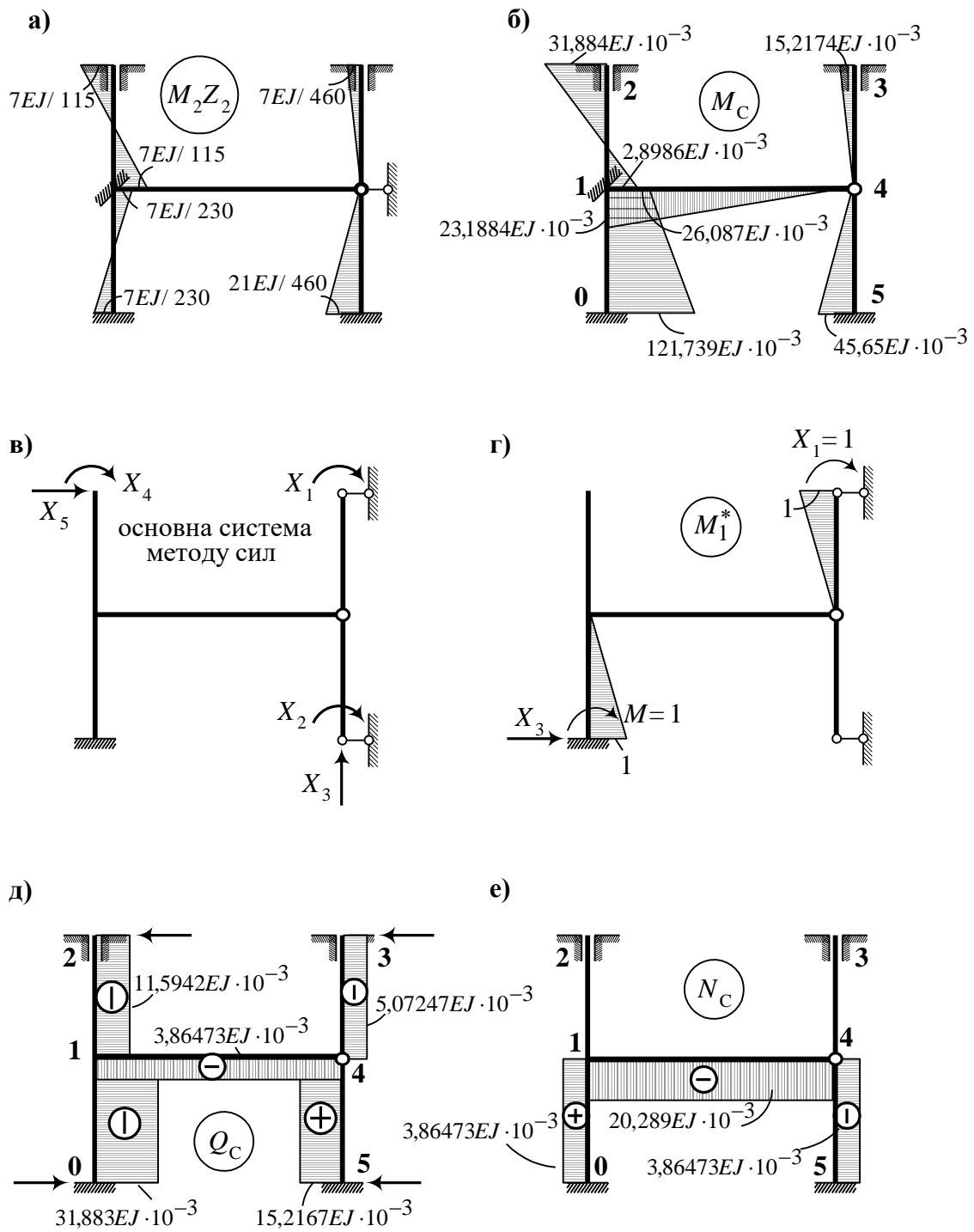


Рис. 6.38. До розрахунку рами на зсув опорних зв'язків:  
 а - епюра  $M_2Z_2$ ; б - епюра  $M_2$ ; в - основна система методу сил; г - епюра  $M_1^*$ ;  
 д - епюра  $Q_x$ ; е - епюра  $N_C$

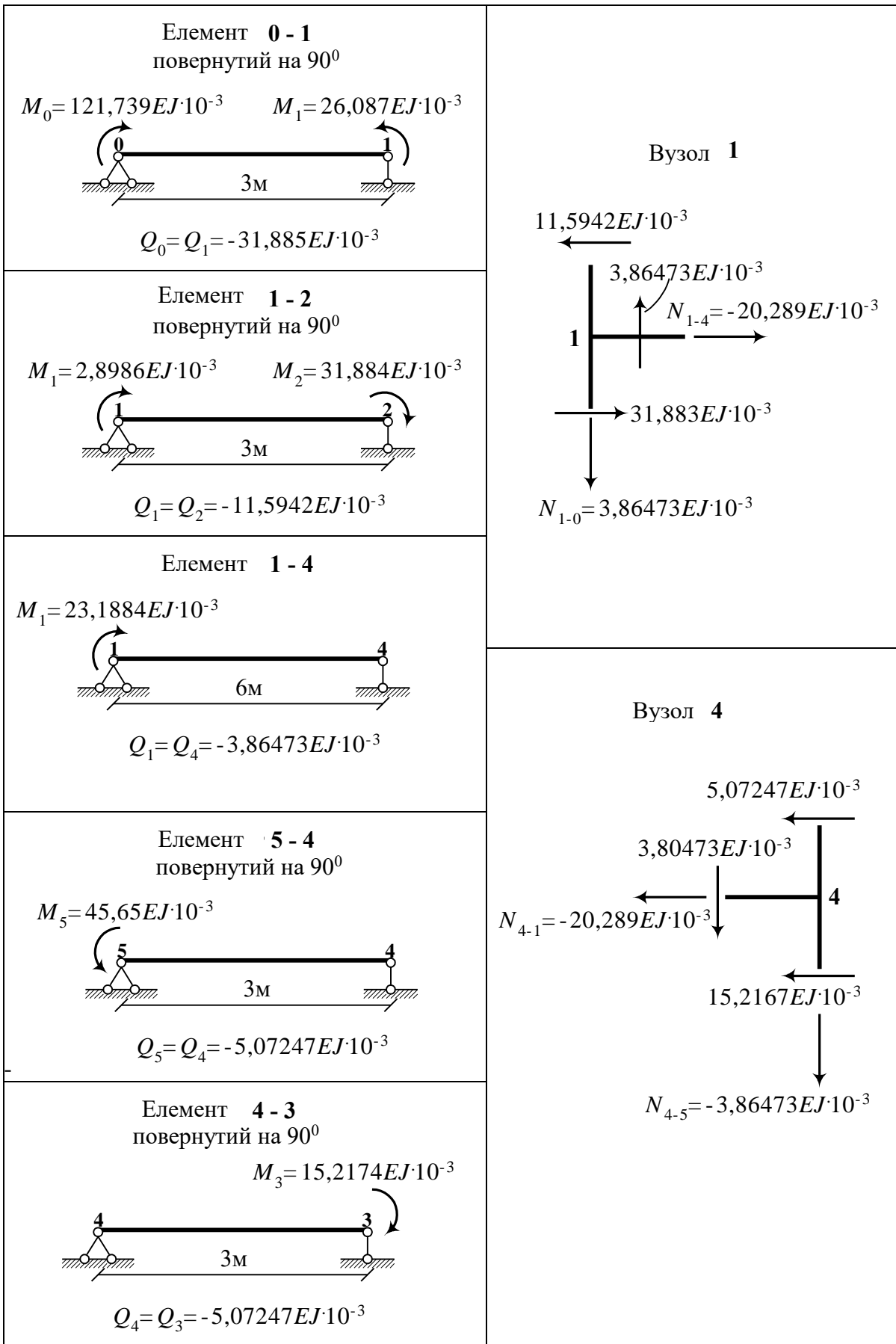


Рис. 6.39. До розрахунку рами на зсув опорних зв'язків

### 6.3. Змішаний метод

Сутність змішаного методу може бути пояснена простим прикладом (рис. 6.40, а).

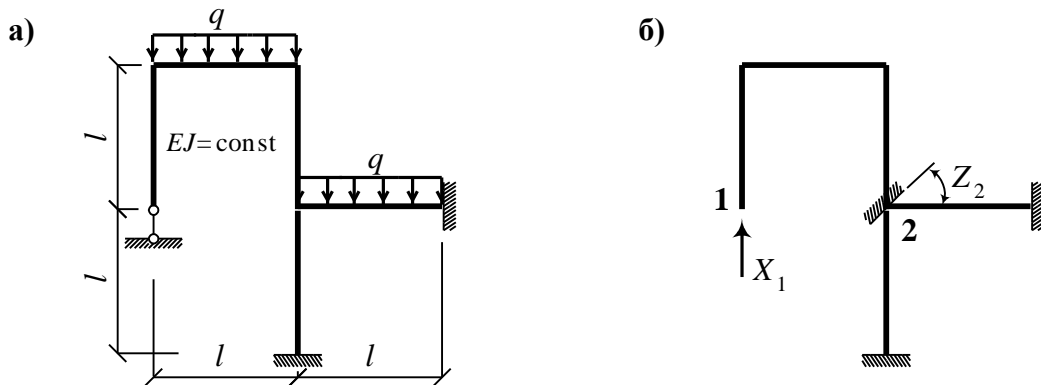


Рис. 6.40. До розрахунку рам змішаним методом:  
а – задана система; б – основна система

Розрахунок цієї рами методом сил (див. п. 6.1) вимагає складання чотирьох рівнянь, методом переміщень – також чотирьох рівнянь. Замість того, щоб утворити основну систему за одним з цих методів, створимо її за змішаним принципом, а саме: одночасно відкинемо зв'язки в одній частині рами і введемо додаткові зв'язки в іншій частині (рис. 6.40, б). Тоді система канонічних рівнянь набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta'_{12} Z_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ r'_{21} X_1 + r_{22} Z_2 + R_{2F} &= 0. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Перше рівняння виражає ту думку, що сумарне переміщення по напрямку  $X_1$ , викликане усіма факторами, дорівнює нулю. Друге рівняння являє собою запис тієї умови, що реактивний момент у защемленні **2** дорівнює нулю.

У матричній формі система (6.55) записується так:

$$D \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_{1F} \\ \bar{R}_{2F} \end{pmatrix} = 0, \quad (6.56)$$

де матриця жорсткості-податливості  $D$  дорівнює

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta'_{12} \\ r'_{12} & r_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.57)$$

У рівняннях (6.55), (6.57)  $\delta'_{12}$  – переміщення, викликане поворотом защемлення на кут  $Z_2 = 1$ ;  $r'_{21}$  – реактивний момент, викликаний силою  $X_1 = 1$ .

На підставі теореми про взаємність реакцій і переміщень (див. формулу (6.42), у якій індекс  $F$  замінений на індекс  $K$ ) маємо співвідношення

$$r_{ik} = -\delta_{ki} , \quad (6.58)$$

яке пов'язує  $\delta'_{12}$  і  $r'_{21}$ .

Покажемо на прикладі (рис. 6.40, а) визначення коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь (6.55). Для цього в основній системі (рис. 6.40, б) побудуємо одиничні (рис. 6.41, а, б) і вантажну епюри (рис. 6.41, в).

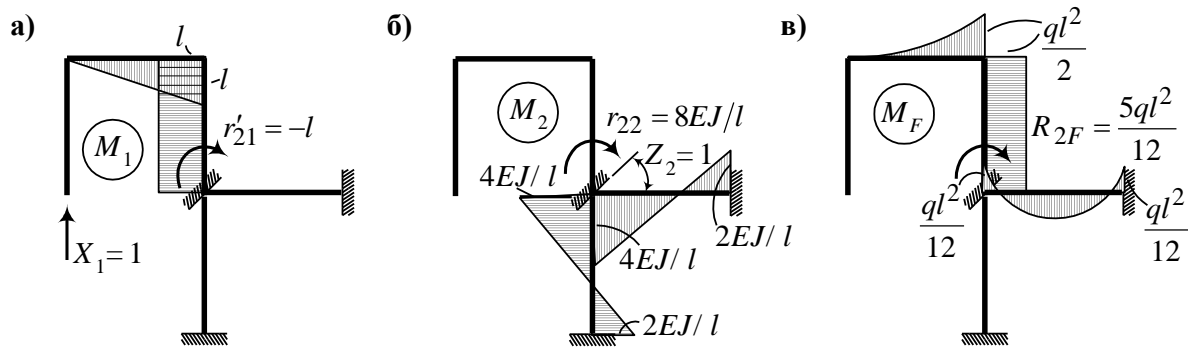


Рис. 6.41. Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь змішаного методу

Коефіцієнт  $\delta_{11}$  знайдемо, «перемноживши» епюру  $M_1$  на себе:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1}{EJ} ds = \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l + l \cdot l \cdot l \right) \frac{1}{EJ} = \frac{4l^3}{3EJ} .$$

З вирізання вузла в стані  $X_1 = 1$  за епюрою  $M_1$  знайдемо, що реакція  $r'_{21} = -l$ . Отже, у даному випадку

$$\delta'_{12} = l ,$$

що ілюструє загальну залежність (6.58).

Вантажні коефіцієнти знайдемо з використанням епюри  $M_F$  (рис. 6.41, в):  $\Delta_{1F}$  – «перемноженням» епюр  $M_1$  і  $M_F$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1 M_F}{EJ} ds = -\frac{5ql^4}{8EJ} ,$$

а  $R_{2F}$  шляхом вирізання вузла 2 у вантажному стані (рис. 6.41, в).

Послідовно виключаючи невідомі із системи рівнянь (6.55), знайдемо

$$Z_2 = \frac{ql^3}{168EJ} , \quad X_1 = \frac{13ql}{28} .$$

Остаточна еюра моментів будується на підставі принципу суперпозиції за формулою

$$M = M_1 X_1 + M_2 Z_2 + M_F.$$

Вигляд остаточної еюри  $M$  зображений на рис. 6.42.

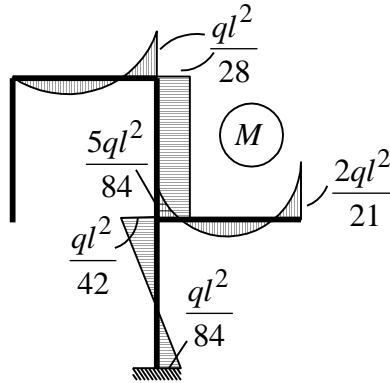


Рис. 6.42. Остаточна еюра моментів

Таким чином, ми бачили, що коефіцієнти рівнянь змішаного методу (6.55) мають різний механічний зміст:  $\delta_{ik}$  і  $\Delta_{iF}$  – це переміщення, а  $r_{ik}$  і  $R_{iF}$  – реакції. У загальному випадку вони утворюють чотири блоки матриці  $D$  і вантажного вектора рівняння (6.56):

$$D = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xz} \\ R_{zx} & R_{zz} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_F \\ \bar{R}_F \end{bmatrix}. \quad (6.59)$$

Елементи блоків  $A_{xx}$  і  $R_{zz}$  визначаються так само, як у методах сил і переміщень. Тому вони можуть бути виражені через внутрішні сили за допомогою інтегралів (6.4) і (6.36). Елементи блоків  $A_{xz}$  і  $R_{zx}$ , симетрично розташовані щодо головної діагоналі, будуть чисельно завжди рівними, але протилежними за знаком. Самі ж блоки будуть являти собою взаємно-транспоновані матриці:

$$A_{xz} = -R_{xz}^T.$$

Матриця  $D$  в цілому симетрична.

У кінці підрозділу зазначимо, що змішаний метод порівняно з методами сил і переміщень дозволяє зменшити число невідомих, а отже, і зменшити число лінійних алгебраїчних рівнянь.



## 6.4. Особливості розрахунку симетричних систем на несиметричні впливи

У ряді задач для прискорення розрахунку симетричних систем буває зручно розкласти зовнішні впливи на симетричні й антисиметричні складові. При цьому може виявитися, що до однієї частини впливу, наприклад симетричної, простіше застосовувати один метод розрахунку (як правило, це метод переміщень чи змішаний метод), а на антисиметричний вплив розрахунок простіше зробити іншим методом (наприклад, методом сил). Зазначений підхід називають комбінованим прийомом розрахунку. Пояснимо сказане на прикладі системи, зображеної на рис. 6.43.

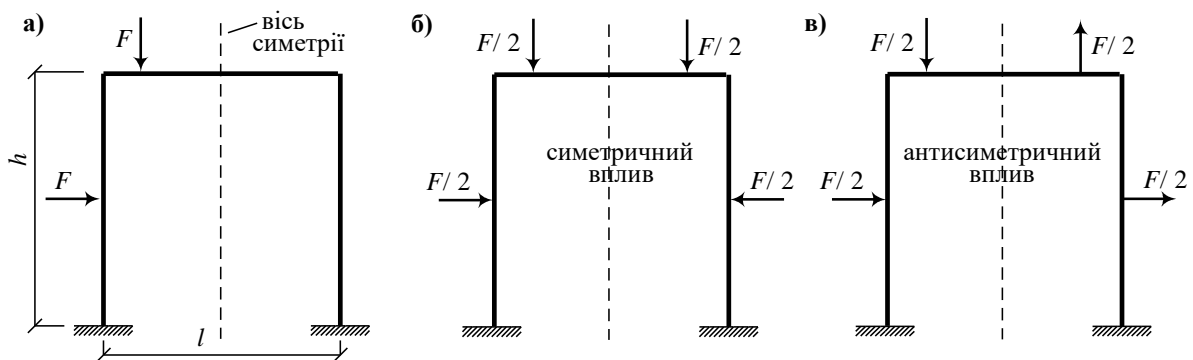


Рис. 6.43. До розрахунку симетричної рами на несиметричний вплив

На рис. 6.44, а показані невідомі методу переміщень, а на рис. 6.44, б – невідомі методу сил. Як видно з рис. 6.44, основна система методу сил отримана шляхом розрізу заданої рами по осі симетрії і введення двох абсолютно жорстких консолей. Уведення таких консолей дає значну можливість варіювати вибір основних невідомих. Для ілюстрації цього розташуємо невідомі  $X_3$  на кінці консолей.

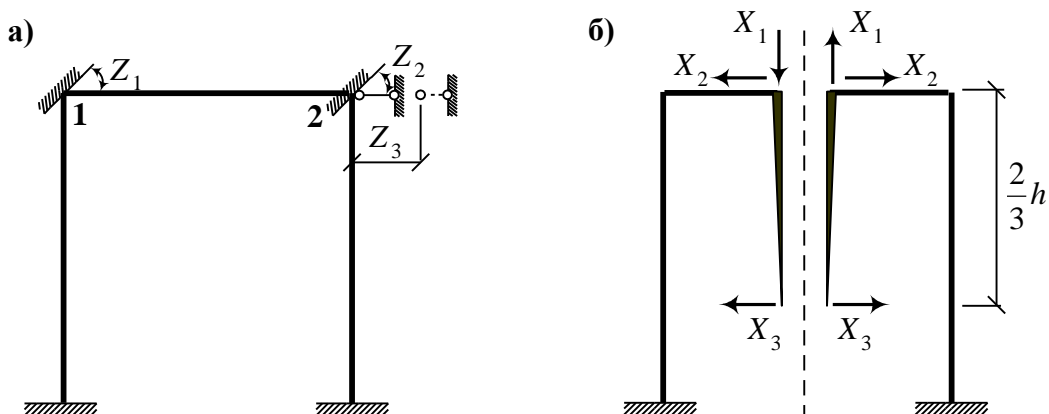


Рис. 6.44. Основні системи й основні невідомі

Побудуємо спочатку одиничні і вантажну епюри в основній системі методу переміщень (рис. 6.45).

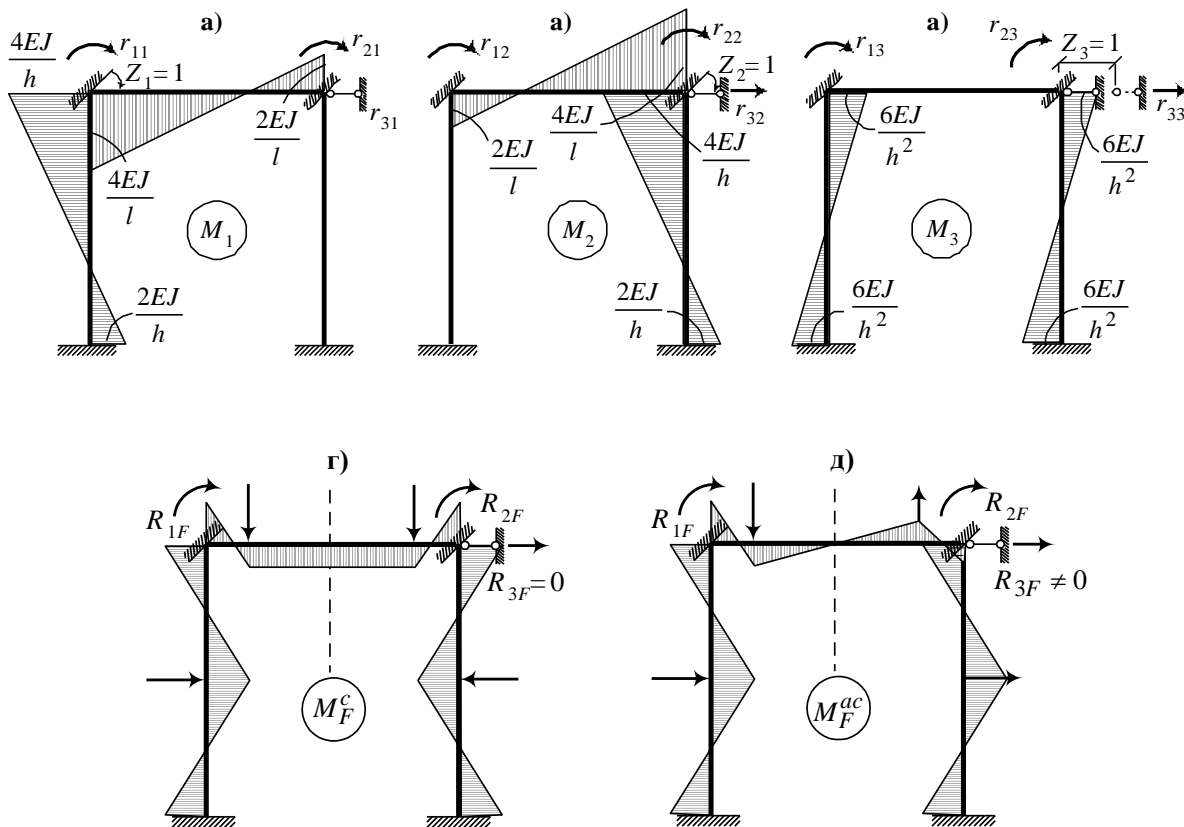


Рис. 6.45. До розрахунку симетричної рами методом переміщень

Коефіцієнти системи рівнянь (6.34) будуть такими (див. рис. 6.45, а-д):

$$r_{11} = r_{22} = 4EJ \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{l} \right); \quad r_{33} = \frac{24EJ}{h^3}; \quad r_{12} = r_{21} = \frac{2EJ}{l};$$

$$r_{13} = r_{31} = r_{32} = r_{23} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

При симетричному навантаженні  $R_{1F} = -R_{2F}$ ,  $R_{3F} = 0$ . При несиметричному навантаженні  $R_{3F} \neq 0$ .

Аналіз розв'язку (6.48) при симетричному навантаженні показує, що  $Z_1 = -Z_2$ ,  $Z_3 = 0$ , тобто при дії симетричного навантаження деформації будуть симетричними, отже, переміщення вузлів **1** і **2** дорівнюють нулю, а їхні кути повороту рівні і взаємно протилежні. Таким чином, число невідомих при прийнятих умовах навантаження вдалося скоротити до одиниці.

Розглянемо тепер метод сил. В основній системі (рис. 6.44, б) побудуємо, як і раніше, одиничні і вантажну епюри (рис. 6.46). Немає потреби будувати епюри протягом консолей. Для останніх ми прийняли

$J = \infty$ , тому незалежно від виду епюри всі інтеграли на цій ділянці будуть дорівнювати нулю.

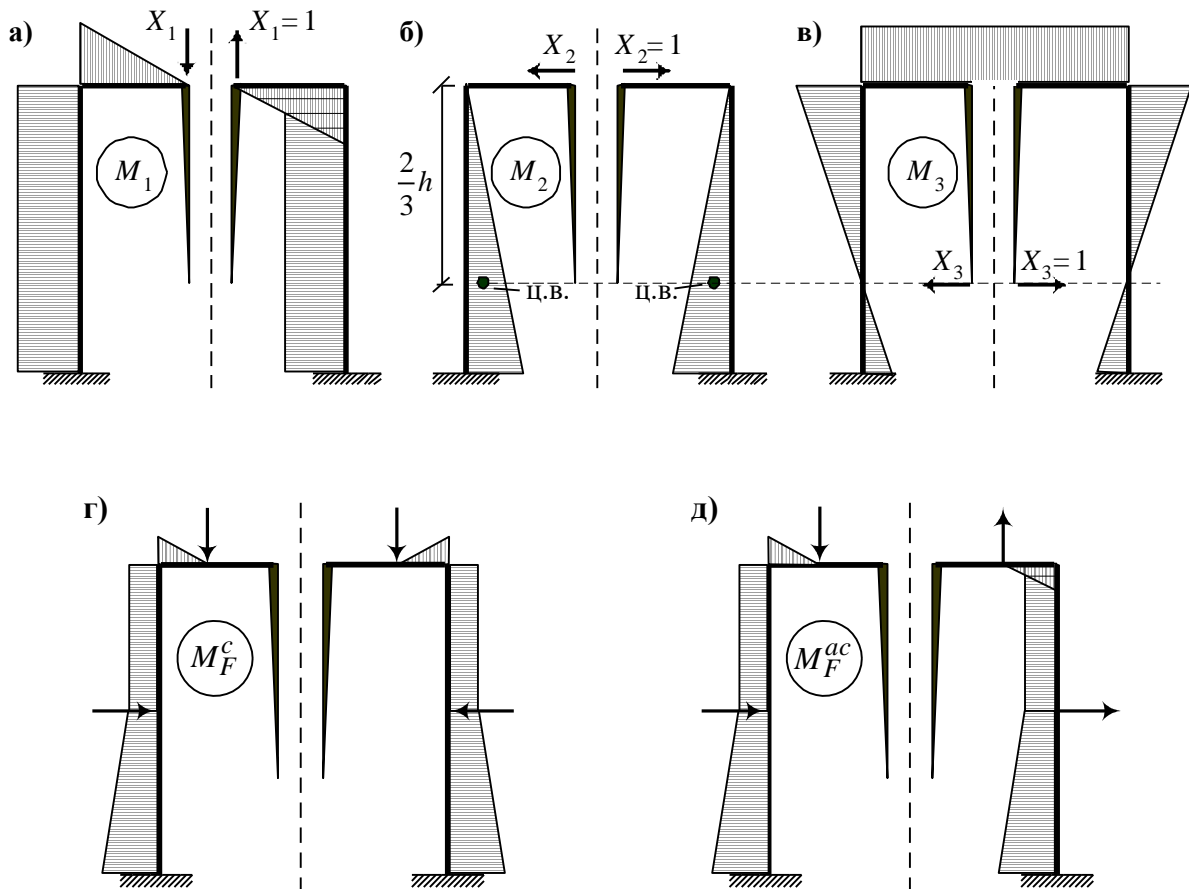


Рис. 6.46. До розрахунку симетричної рами методом сил

У силу того, що епюри  $M_1$  і  $M_2$  взаємно ортогональні ( $M_1$  – антисиметрична,  $M_2$  – симетрична),  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ . Обидві епюри  $M_2$  і  $M_3$  симетричні, однак  $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ , тому що довжина жорстких консолей прийнята рівною  $\frac{2}{3}h$ , що збігається з центром ваги епюри  $M_2$ . Таким чином, система рівнянь (6.2) методу сил розпадається на три незалежні одне від одного рівняння:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0;$$

$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2F} = 0;$$

$$X_3 \delta_{33} + \Delta_{3F} = 0.$$

У тому випадку, коли рама навантажена тільки симетричним навантаженням, виходить  $\Delta_{1F} = 0$ , звідки  $X_1 = 0$ . У тому випадку, коли рама навантажена антисиметричним навантаженням, маємо  $\Delta_{2F} = 0$ ,  $\Delta_{3F} = 0$ , звідки  $X_2 = X_3 = 0$ .

Іншими словами, коли на симетричну споруду діє симетричне навантаження, то обернено симетричні невідомі ( $X_1$ ) обертаються на нуль; навпаки, коли діє антисиметричне навантаження, то симетричні невідомі ( $X_2, X_3$ ) обертаються на нуль.

На закінчення цього підрозділу зазначимо, що на підставі проведеного аналізу розрахунків рам при симетричному впливі варто робити методом переміщень, а при антисиметричному – методом сил.

## 6.5. Метод переміщень у матричній формі

### 6.5.1. Загальні положення й передумови

Прийmemo, як і в класичному методі переміщень (п. 6.2), такі гіпотези: деформації розтягання - стискання та зсуву малі порівняно з деформаціями згинання й ними можна знехтувати, тобто вважати, що переміщення вузлів відбуваються тільки за рахунок згинання стержнів; переміщення системи малі, тому нехтуємо зближенням кінців стержнів при згинанні, тобто довжина стержня залишається рівною довжині хорди, що з'єднує його кінці після скривлення; у шарнірно - стержневих системах (фермах) деформації розтягання - стискання враховуються як єдині.

Розглянемо раму (рис. 6.47).

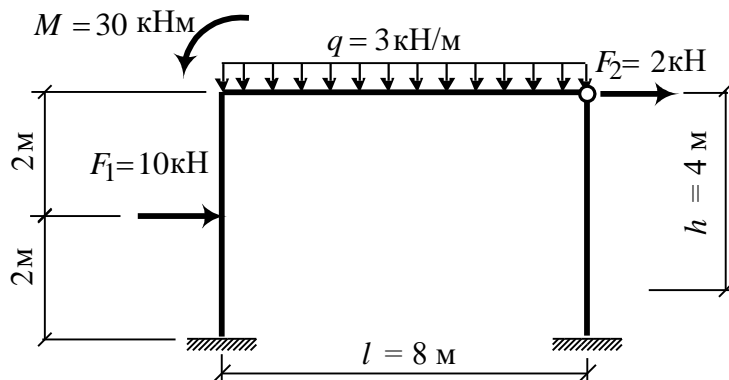


Рис. 6.47. Схема заданої рами

У рамі буде дві невідомі – поворот жорсткого вузла  $Z_1$  та лінійне переміщення обох вузлів по горизонталі  $Z_2$  (рис. 6.48, а).

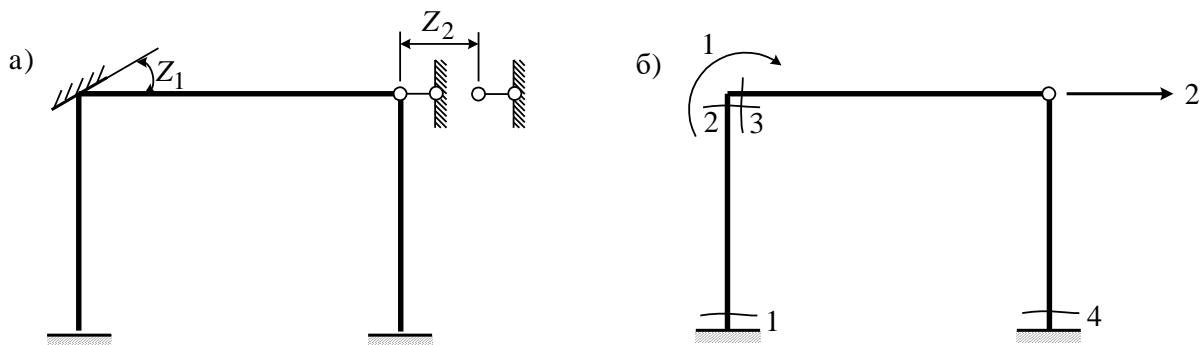


Рис. 6.48. Основна система методу переміщень (а); напрямки переміщень, перерізи з невідомими зусиллями (моментами)  $S_1 - S_4$  (б)

На рис. 6.48, б зв'язки, що закріплюють вузли від можливих переміщень, умовно не показані.

Побудуємо вантажну епюру методу переміщень (рис. 6.49).

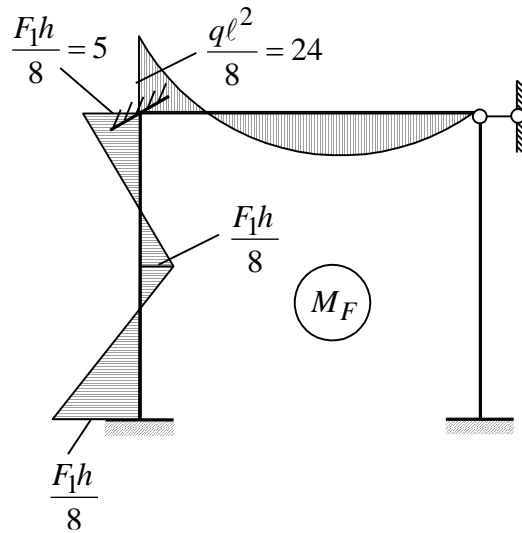


Рис. 6.49. Вантажна епюра  $M_F$

Вирізуємо жорсткий вузол і знаходимо сумарний момент у жорсткому вузлі (рис. 6.50).

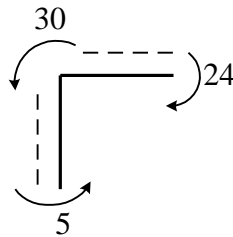


Рис. 6.50. До визначення сумарного моменту в жорсткому вузлі

Сумарний момент у жорсткому вузлі дорівнює

$$P_1 = 24 - 5 - 30 = -11 \text{ кНм.}$$

Щоб знайти сумарну силу в напрямку  $Z_2$ , розглянемо рівновагу ригеля, відділеного від рами двома розтинами (рис. 6.51).

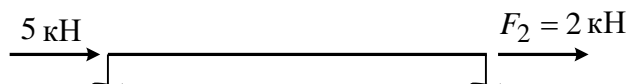


Рис. 6.51. До визначення сумарної сили в напрямку  $Z_2$

Тоді сумарна сила в напрямку  $Z_2$  дорівнює

$$P_2 = 2 + 5 = 7 \text{ кН.}$$

Тепер вектор зовнішніх сил буде мати вигляд

$$P = \begin{vmatrix} -11 & 7 \end{vmatrix}^T. \quad (6.60)$$

Розрахункова схема рами, відповідна до вектора (6.60), показана на рис. 6.52.

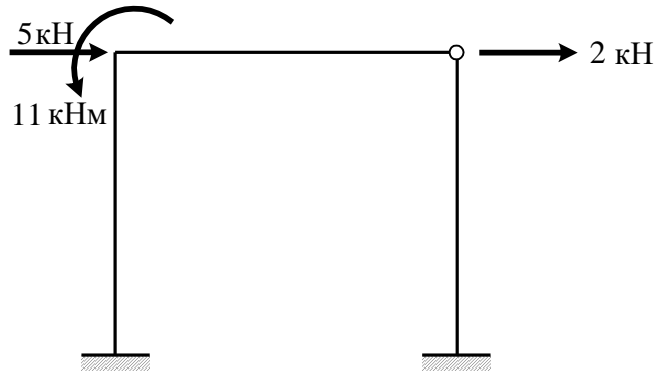


Рис. 6.52. Розрахункова схема рами

Зазначимо, що вертикальні реакції від рівномірно розподіленого навантаження не дають складових у вектор (6.60).

Щоб записати вектор вантажної епюри (рис. 6.49), установимо правило знаків. Умовимося додатними моментами вважати моменти, що обертають елемент за годинниковою стрілкою (рис. 6.53).

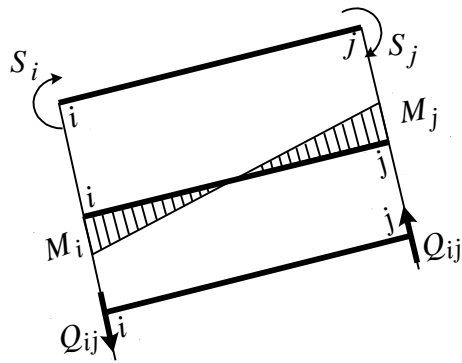


Рис. 6.53. Правило знаків

У цьому випадку в стержні виникає від'ємна поперечна сила  $Q_{ij}$ , що обертає елемент проти годинникової стрілки (рис. 6.53):

$$Q_{ij} = \frac{-M_j - M_i}{l} = -\frac{M_i + M_j}{l}.$$

Вектор вантажної епюри (рис. 6.49) запишеться в такий спосіб:

$$S_0 = \begin{vmatrix} -5 & 5 & -24 & 0 \end{vmatrix}^T. \quad (6.61)$$

## 6.5.2. Рівняння рівноваги. Статична матриця

Напрямок зовнішніх сил відповідає напрямку, обраному в розрахунковій схемі (рис. 6.52), напрямок внутрішніх сил отриманий відповідно до правила знаків (рис. 6.53).

Додатні моменти обертають стержні за годинниковою стрілкою, отже, відповідно до третього закону Ньютона моменти  $S_2$  й  $S_3$  обертають вузол проти годинникової стрілки (рис. 6.54, а).

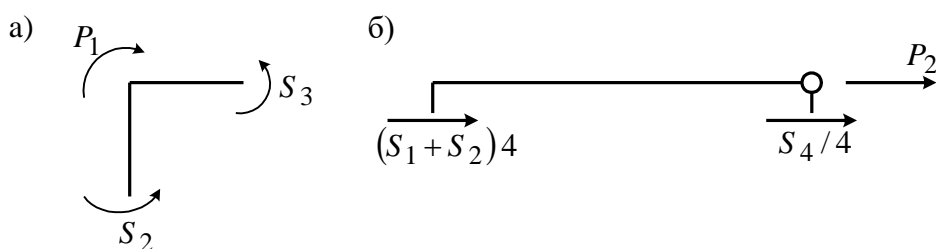


Рис. 6.54. До складання рівнянь рівноваги

Поперечні сили в стержнях завжди від'ємні, тому вузли рами вони обертають проти годинникової стрілки (рис. 6.54, б).

Рівняння рівноваги жорсткого вузла і верхньої частини рами (рис. 6.48) мають вигляд

$$\begin{aligned} P_1 &= S_2 + S_3, \\ P_2 &= -S_1/4 - S_2/4 - S_4/4. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Запишемо систему рівнянь (6.62) у матричній формі:

$$P = A \cdot S, \quad (6.63)$$

де

$$P = (P_1 \quad P_2)^T, \quad S = (S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4)^T, \quad (6.64)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

Покажемо, що запис рівнянь (6.62) у матричній формі відповідає дійсності:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix},$$

звідси

$$P_1 = 0 \cdot S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4,$$

$$P_2 = -\frac{S_1}{4} - \frac{S_2}{4} + 0 - \frac{S_4}{4}.$$

Статична матриця  $A$  (6.65) має розмір  $m \cdot n$ , де  $m$  – число рядків, що дорівнює числу можливих переміщень вузлів;  $n$  – число стовпців, що дорівнює числу внутрішніх зусиль. При  $m > n$  система змінювана ( $W = m - n > 0$ ).

При  $m = n$  система незмінювана й статично визначна, якщо  $\det A \neq 0$  (при  $\det A = 0$  система миттєво змінювана).

При  $m < n$  система незмінювана й статично невизначна (число зайвих зв'язків  $L = n - m$ ).

### 6.5.3. Принцип подвійності статичних і геометричних рівнянь

Для доведення цього принципу використовуємо принцип можливих переміщень Лагранжа, відповідно до якого для системи, що перебуває в рівновазі, сумарна робота зовнішніх і внутрішніх сил на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

Робота зовнішніх сил  $P = AS$  на можливих переміщеннях  $\delta Z$  визначається виразом

$$V_P = P^T \delta Z = (AS)^T \delta Z = A^T S^T \delta Z. \quad (6.66)$$

Робота внутрішніх сил  $S$  на можливих деформаціях  $\delta e = \delta(BZ) = B\delta Z$  запишеться як

$$V_S = -S^T \delta e = -S^T B \delta Z. \quad (6.67)$$

Тут знак мінус показує, що робота внутрішніх сил завжди від'ємна, тому що внутрішні сили перешкоджають деформаціям. Відповідно до принципу можливих переміщень

$$V_P + V_S = 0. \quad (6.68)$$

Підставляємо (6.66), (6.67) в (6.68). У результаті маємо

$$S^T A^T \delta Z = S^T B \delta Z.$$

Ця рівність можлива за умови

$$B = A^T. \quad (6.69)$$

Відповідно до доведеного принципу рівняння нерозривності деформацій для будь-якої пружної системи можуть бути отримані з рівнянь рівноваги простою заміною рядків стовпцями матриці коефіцієнтів рівнянь рівноваги (6.65) й навпаки:



$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (6.70)$$

Матриця деформацій (6.70) виражає деформації  $e_i$  елементів стержневої системи через переміщення  $Z_k$  її вузлів. Її розмір  $m \cdot n$ , де  $m$  – число рядків, що дорівнює числу деформацій  $e_i$  і числу невідомих зусиль  $S_i$ ,  $n$  – число стовпців, що дорівнює числу можливих вузлових переміщень  $Z_k$ ,

$$e = BZ = A^T Z, \quad (6.71)$$

де  $e = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)^T$  – вектор деформацій елементів;

$Z = (Z_1 \ Z_2)^T$  – вектор переміщень вузлів.

#### 6.5.4. Фізичні рівняння. Матриця жорсткості системи

Встановимо зв'язок між зусиллями і деформаціями системи. Для  $n$ -го елемента системи цей зв'язок на підставі закону Гука можна подати як

$$S_n = k_n e_n, \quad (6.72)$$

де  $S_n$  й  $e_n$  – вектори зусиль і деформацій в елементі,  $k_n$  – матриця жорсткості елемента.

Покажемо, як одержується матриця жорсткості типових стержневих елементів на площині:

а) шарнірно-стержневий елемент (рис. 6.55).

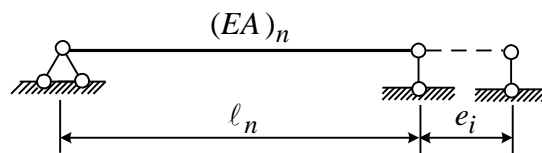


Рис. 6.55. Шарнірно-стержневий елемент

Відповідно до закону Гука для осьового розтягання-стискання подовження елемента пов'язане з осьовою силою формулами

$$e_i = \frac{S_i \ell_n}{(EA)_n} \quad \text{або} \quad S_i = \left( \frac{EA}{\ell} \right)_n e_i$$

і, отже,

$$k_n = \left( \frac{EA}{\ell} \right)_n ; \quad (6.73)$$

б) комбінований балковий елемент із защемленням і шарніром по кінцях (рис. 6.56).

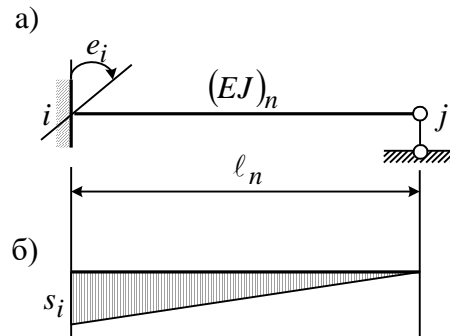


Рис. 6.56. Комбінований балковий елемент (а), епюра моментів від повороту защемлення (б)

Як відомо, ордината епюри моментів дорівнює  $S_i = 3 \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_n e_i$ , і матриця жорсткості елемента має вигляд

$$k_n = 3 \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_n ; \quad (6.74)$$

в) балковий елемент із двома защемленнями по кінцях (рис. 6.57).

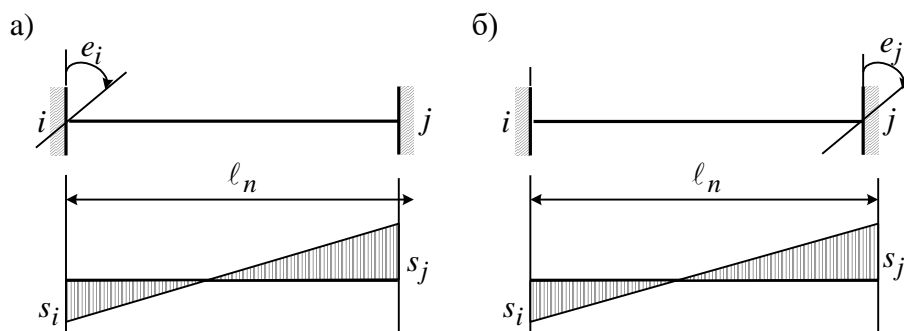


Рис. 6.57. Балковий елемент із двома защемленнями по кінцях

Опорні моменти  $S_i$  й  $S_j$  при повороті перерізу  $i$  на  $e_i$  й перерізу  $j$  на  $e_j$  можна одержати підсумовуванням епюр моментів, отриманих при повороті спочатку вузла  $i$  на  $e_i$  (рис. 6.57, а), потім вузла  $j$  на кут  $e_j$  (рис. 6.57, б):

$$S_i = \left(\frac{4EJ}{\ell}\right)_n e_i + \left(\frac{2EJ}{\ell}\right)_n e_j,$$

$$S_j = \left(\frac{2EJ}{\ell}\right)_n e_i + \left(\frac{4EJ}{\ell}\right)_n e_j.$$

Тоді складові формули (6.72)

$$S_n = k_n e_n$$

будуть:

$$S_n = (S_i \ S_j)^T - \text{вектор зусиль елемента "n"};$$

$$e_n = (e_i \ e_j)^T - \text{вектор деформацій елемента "n"};$$

$$k_n = \left(\frac{EJ}{\ell}\right)_n \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \text{матриця жорсткості елемента.} \quad (6.75)$$

Для всіх елементів системи, що містить  $m$  шуканих внутрішніх зусиль, зв'язок між зусиллями й деформаціями запишемо як

$$S = k_n e, \quad (6.76)$$

де  $S = [S_1, S_2 \dots S_m]^T$  – вектор зусиль у системі;

$e = [e_1, e_2 \dots e_n]^T$  – вектор деформацій системи;

$k$  – матриця жорсткості всіх елементів системи,

$$k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & & k_e \end{pmatrix}. \quad (6.77)$$

Матриця  $k$  – квадратна, симетрична щодо головної діагоналі, порядок її дорівнює  $m$  – числу шуканих зусиль,  $e$  – кількість елементів. Для розглянутої рами (рис. 6.47, 6.48) матриці жорсткості окремих стержнів мають вигляд

$$k_{1,2} = \frac{EJ}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = \frac{EJ}{4},$$

$$k_3 = \frac{4EJ}{8} \cdot 3 = 6i; \quad k_4 = \frac{EJ}{4} \cdot 3 = 3i,$$

а матриця жорсткості всіх елементів буде такою:

$$k = i \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 6.5.5. Розв'язувальна система рівнянь

Запишемо ще раз три групи рівнянь, що відбивають три сторони завдання розрахунку пружних систем: статичну, геометричну й фізичну.

1. Рівняння рівноваги (6.63)

$$P = A \cdot S.$$

2. Рівняння нерозривності деформацій (6.71)

$$e = BZ = A^T Z.$$

3. Узагальнений закон Гука для всієї системи (6.76)

$$S = ke.$$

Якщо матриця  $A$  (6.64) квадратна й  $\det A \neq 0$ , то задана система статично визначна, і можна знайти внутрішні зусилля

$$S = A^{-1} P.$$

Після цього розв'язання задачі можна завершити. Якщо матриця  $A$  (6.65) прямокутна, то при  $n > m$  система статично невизначна й, крім рівнянь рівноваги (6.63) необхідно розглянути геометричні (6.71) і фізичні (6.76) рівняння. У системі (6.63), (6.71), (6.76) невідомими є вектори зусиль  $S$ , деформацій  $e$ , переміщень  $Z$ . Для перевірки міцності й жорсткості необхідно й достатньо знати зусилля й переміщення. Тому вектор "e" виключимо, підставивши (6.71) в (6.76):

$$S = KA^T Z. \quad (6.78)$$

Формула (6.78) дозволяє знайти зусилля  $S$  по відомих переміщеннях  $Z$ . Підставляючи (6.78) в (6.63), одержимо

$$P = AkA^T Z = K Z, \quad (6.79)$$

де  $K = AkA^T$  називається матрицею жорсткості всієї конструкції. Вона встановлює зв'язок між зовнішніми вузловими силами й переміщеннями вузлів. Матриця  $K$  – квадратна, симетрична, має порядок  $m$ , де  $m$  – число можливих переміщень вузлів. Розв'язання рівняння (6.79) дає

$$Z = K^{-1}P, \quad (6.80)$$

де  $K^{-1}$  – зворотна матриця, що завжди існує для геометрично незмінних систем. Рішення (6.80) має формальний сенс, тому що отримання зворотної матриці досить трудомістка процедура. Тому на практиці й у всіх обчислювальних комплексах вектор  $Z$  одержують безпосереднім розв'язанням системи розв'язувальних рівнянь (6.79). Після визначення вектора  $Z$  зусилля визначаються за (6.78). У методі переміщень необхідною й достатньою перевіркою правильності розв'язання є статична перевірка, тобто перевірка рівноваги вузлів системи. Матричний аналог статичної перевірки – рівняння рівноваги (6.63), тобто отриманий вектор  $S$  треба помножити ліворуч на статичну матрицю  $A$  й порівняти результат з вектором вузлових сил.

При розрахунку на позавузлове навантаження до розрахункових зусиль треба додати зусилля від позавузлового навантаження  $S_0$  (6.61):

$$S_{0k} = k A^T Z + S_0. \quad (6.81)$$

Матричне рівняння (6.79) еквівалентне системі канонічних рівнянь методу переміщень: кожний елемент  $k_{ij}$  матриці жорсткості  $k$  (6.77) дорівнює коефіцієнту  $r_{ij}$ , що є реактивним зусиллям у зв'язку по напрямку переміщення  $Z_i$  від переміщення  $Z_j = 1$ . Порівняємо формулу (6.81) з розв'язувальною формулою класичного методу переміщень

$$M_{ек} = \sum M_i Z_i + M_P. \quad (6.82)$$

Очевидно, що формули (6.81) і (6.82) еквівалентні з точністю до позначень, якщо під  $S$  розуміти згинальні моменти в рамах. Крім того, очевидно, що матриця  $k A^T$  в (6.81) має сенс матриці одиничних зусиль.

Наприкінці цього підрозділу викладемо порядок розрахунку за ММП (матричний метод переміщень).

1. Вибираємо основну систему методу переміщень (рис. 6.48, а). Будуємо розрахункову схему (рис. 6.52), визначаючи напрямки невідомих переміщень  $Z$  (рис. 6.48) і шуканих зусиль  $S$  (рис. 6.54).

2. У випадку позавузлого навантаження будуємо епюру  $M_F$  (рис. 6.49), приводимо навантаження до вузлових і будуємо вектори  $P$  (6.60),  $S_0$  (6.61).

3. Будуємо статичну матрицю  $A$  (6.65) і матрицю жорсткості всіх елементів (6.77).

4. Виконуємо матричні операції  $k A^T$ ,  $K = A k A^T$ .

5. Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги (6.79), знаходимо вектор  $Z$ .

6. Визначаємо внутрішні зусилля (6.78).

7. Виконуємо матричну перевірку  $AS = P$  (6.63).

8. Остаточне значення зусиль визначаємо за формулою (6.81).

9. За знайденими зусиллями будуємо відповідні епюри.

*Приклад.* Розрахувати раму, наведену на рис. 6.47. Вектор зовнішніх сил – (6.60), рис. 6.52. Вектор вантажний епюри – (6.61), рис. 6.49. Статична матриця – (6.65). Матриця жорсткості (див. п. 6.5.5)

$$k = i \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad i = \frac{EJ}{4}.$$

Виконуємо матричні операції

$$k A^T = i \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & -0,25 \\ 1 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix},$$

$$K = A k A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0 & -0,25 \end{pmatrix} \times i \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 10 & -1,5 \\ -1,5 & 0,9375 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо рівняння

$$KZ = P,$$

або

$$10Z_1 - 1,5Z_2 = -11/i$$

$$-1,5Z_1 + 0,9375Z_2 = 7/i.$$

Звідси  $Z_1 = 0,0263/i$ ,  $Z_2 = 7,5088/i$ .

Визначаємо внутрішні зусилля

$$S = K A^T Z = i \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0263 \\ 7,5088 \end{pmatrix} \frac{1}{i} = \begin{pmatrix} -11,2106 \\ -11,158 \\ 0,1578 \\ -5,6316 \end{pmatrix}.$$

Здійснюємо матричну перевірку:

$$A S \cong P,$$

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0 & -0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11,2106 \\ -11,1580 \\ 0,1578 \\ -5,6316 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,002 \\ 7,00005 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо практично точно вектор  $P$  (6.60). Остаточні значення зусиль визначаємо за формулою

$$S_{0k} = S + S_0 = (-11,2106 \quad -11,1580 \quad 0,1578 \quad -5,6316)^T + (-5 \quad 5 \quad -24 \quad 0)^T = (-16,21 \quad -6,16 \quad -23,84 \quad -5,63)^T.$$

За знайденими значенням будуємо остаточну епюру.

## 6.6. Загальні положення методу скінченних елементів

Матричний метод переміщень дозволяє скласти розрахунковий алгоритм аж до одержання зусиль у всіх елементах розглянутої системи й доручити всі обчислення ЕОМ. Але для цього спочатку необхідно вручну скласти вихідні матриці  $A$  (6.65),  $k$  (6.77) і вектори  $P$  (6.60),  $S_0$  (6.61).

У методі скінченних елементів (МСЕ) також отримується розв'язувальна система рівнянь  $KZ = P$ , але матриця жорсткості  $K$  обчислюється не за відомою формулою

$$K = A k A^T,$$

а шляхом підсумовування матриць жорсткості окремих елементів  $K_e$ , тобто

$$K = \sum_{e=1}^n K_e,$$

де  $K_e = (A k A^T)$ , а після визначення переміщень  $Z$  зусилля обчислюються поелементно за формулою

$$S_e = (k A^T)_e Z_e,$$

де вектор зусиль  $S_e$ , матриця зусиль  $(k A^T)_e$  і вектор переміщень  $Z_e$  відносяться до елемента. Такий підхід дозволяє один раз одержати матриці

жорсткості типових елементів, довільно розташованих у просторі, скласти алгоритм розрахунку й програму, за якою ЕОМ виконає всю роботу з обчислення елементів матриці  $K_e$ , їх підсумовування, тобто складання ансамблю елементів. Назва методу відбиває його головну ідею – подання конструкції як сукупності окремих скінченних елементів, з'єднаних між собою у вузлах, у яких прикладені зовнішні сили.

На площині типові скінченні елементи можуть бути лише трьох типів:

- шарнірно-стержневий елемент;
- балковий затиснений елемент;
- балковий комбінований елемент.

Будь-яку найскладнішу конструкцію на площині можна подати як сукупність названих елементів. Отже, задача полягає в побудові матриці жорсткості  $K_e$  для трьох типових елементів.

Відзначимо одну принципову особливість. У ММП (матричний метод переміщень) рамних систем, як і в методі переміщень, осьовими деформаціями стержнів нехтують. В основній системі закріплюють вузли від поворотів і вводять зв'язки, що перешкоджають лінійним переміщенням вузлів відповідної шарнірної схеми. У МСЕ цього зробити принципово неможливо, тому що при довільному переміщенні кінців балкового елемента обов'язково виникають осьові деформації. Отже, в основній системі МСЕ слід закріплювати кожний вузол як від кутових, так і від лінійних переміщень, відповідно збільшується число невідомих переміщень. Тому результати розрахунку за ММП і МСЕ в загальному випадку не повинні збігатися, хоча для реальних конструкцій, що складаються із елементів з великою осьовою жорсткістю, повинні бути близькими.

При побудові матриць жорсткості  $K_e = (A kA^T)$  стержневих елементів у МСЕ, як і в ММП, задовольняються рівняння рівноваги (6.63), фізичні рівняння (6.76), рівняння нерозривності (6.71), тому переміщення вузлів системи, знайдені з розв'язувальної системи рівнянь  $KZ = P$ , будуть точно відбивати поле переміщень. Так само визначаються деформації й зусилля в елементах. Отже, МСЕ є точним методом розрахунку стержневих систем, природно, у межах точності гіпотез, що лежать в основі розрахунку стержневих систем.

Такий самий шлях розв'язання в МСЕ для систем із пластин, оболонок, об'ємних елементів. Скінченними елементами для таких систем служать плоскі трикутні, прямокутні, ізопараметричні (із криволінійними краями) елементи, або об'ємні – тетраедри, паралелепіпеди з різним числом вузлових точок.

При обчисленні матриць жорсткості континуальних елементів не вдається одержати точні рішення, тому МСЕ для континуальних систем є



наближеним методом. Підвищення точності розв'язання при розрахунку континуальних систем досягається за рахунок більш дрібного розбиття конструкції на елементи або за рахунок застосування елементів більш високої точності.

Приведемо порівняльну таблицю алгоритмів ММП і МСЕ.

Таблиця 6.2

Порівняння алгоритмів ММП і МСЕ

ММП	МСЕ
1. Будуються вручну вихідні матриці $A$ (6.65), $k$ (6.77), вектори $P$ (6.60), $S_0$ (6.61)	1. Уводяться в машину координати вузлів $X_i, Y_i$ . Задаються елементи за відповідними вузлами і їх жорсткостями $A, E$ , зовнішні впливи (навантаження, температурні, осідання опор)
2. Обчислюється матриця зусиль $k A^T$ , матриця жорсткості $K = A k A^T$ конструкції	2. Машина за стандартним алгоритмом обчислює матриці зусиль $(k A^T)_e$ , матриці жорсткості всіх елементів $K_e = (A k A^T)$ і записує їх на жорсткий диск комп'ютера
3. Розв'язується система рівнянь $KZ = P$ , визначається вектор $Z$	3. Складається матриця жорсткості конструкції $K = \sum_{e=1}^n K_e$
4. Визначаються розрахункові зусилля $S = k A^T Z$	4. Розв'язується система $KZ = P$
5. Додаються зусилля від позавузлового навантаження: $S_{0k} = S + S_0$	5. Визначаються зусилля у всіх елементах $S_e = (k A^T)_e Z_e$
	6. Додаються зусилля від позавузлового навантаження: $S_{e,0k} = S_e + S_{0,e}$

Незважаючи на зовнішню схожість алгоритмів розрахунку, методи відрізняються не тільки способом розрахунку – вручну або на машині. Головна відмінність – у ММП вихідні матриці доводиться будувати вручну для кожної нової конструкції, у МСЕ ж глобальна матриця жорсткості конструкції отримується простим підсумовуванням за певним правилом матриць жорсткості всіх елементів, обчислених за стандартними алгоритмами, закладеними у машині.

### 6.6.1. Підготовка розрахунку. Уведення вихідних даних

Потрібно розрахувати довільну плоску стержневу конструкцію на дію силових навантажень, теплового впливу, осідання опор. Уведемо послідовно всі вузли конструкції за їхніми координатами: вузлами будемо вважати опори, точки перелому стержнів, шарніри, точки східчастої зміни жорсткості, точки прикладення сил або зосереджених моментів. Координати вузлів зчитуються з вузлів растрової сітки або задаються з екрана.

Уведемо елементи за початковим вузлом  $i$  й за кінцевим вузлом  $j$ , попередньо призначаючи його жорсткісні характеристики – модуль пружності  $E$ , площа поперечного перерізу  $A$ , момент інерції  $J$ . Зазначимо, що балкові елементи задаються вузлами  $i, j, k$ , де третій вузол  $k$  визначає площину елемента в просторі. Єдина умова – вузол  $k$  не повинен лежати на лінії  $i-j$ .

Програма відразу визначає його геометричні характеристики:

довжину  $\ell = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\Delta Y}{\ell}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\Delta X}{\ell}$ ,  $\Delta X = X_j - X_i$ ,  $\Delta Y = Y_j - Y_i$ . Тут  $\alpha$  – кут нахилу елемента до обр'ю.

Уводимо вузлові навантаження – сили й зосереджені моменти, а також позавузлове навантаження – рівномірно розподілене навантаження, що діє:

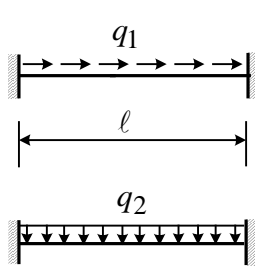
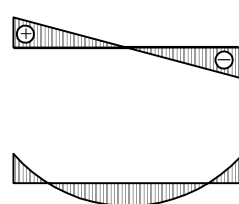
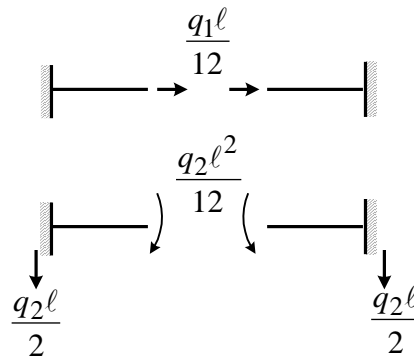
- $q_1$  – уздовж стержня від вузла  $i$  до вузла  $j$ ;
- $q_2$  – у поперечному напрямку в площині елемента;
- $q_3$  – у поперечному напрямку із площини елемента.

### 6.6.2. Силовий вплив

Розрахункова схема елемента, епюра зусиль і вузлове навантаження наведені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3

Епюри зусиль і вузлові навантаження при силових впливах

Розрахункова схема	Епюра $S_0$	Вузлове навантаження
		

### 6.6.3. Тепловий вплив

При зміні температури крайніх волокон стержневого елемента товщиною  $d$  на  $t_1$  й  $t_2 < t_1$  розкладемо, як звичайно, тепловий вплив на дві складові: перепад температур  $\Delta = t_1 - t_2$  і рівномірне нагрівання (охолодження) усіх волокон  $t_{cp} = (t_1 + t_2)/2$ . Від рівномірного нагрівання на  $t_{cp}$  стержень довжиною  $\ell$  повинен був би подовжитися на  $\Delta\ell = \alpha t_{cp} \ell$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення.

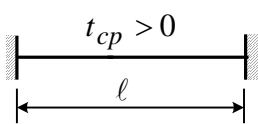
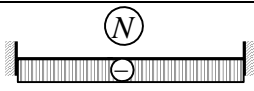
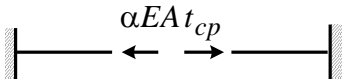
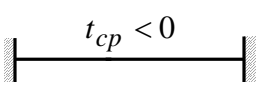
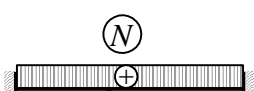
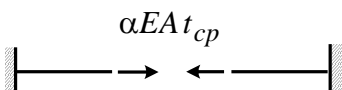
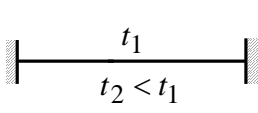

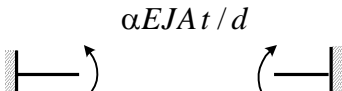
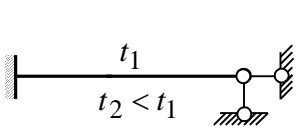
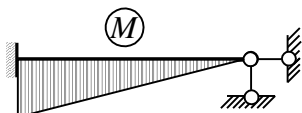
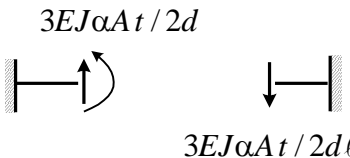
Оскільки в основній системі МСЕ всі вузли закріплені від переміщень, як кутових, так і лінійних, стержень виявиться стиснутим силою  $N$ , укорочення від якої дорівнює  $\Delta\ell$ , тобто

$$N = \frac{EA}{\ell} \Delta\ell = \frac{EA}{\ell} \alpha t_{cp} \ell = \alpha EA t_{cp}.$$

При рівномірному охолодженні, тобто при  $t_{cp} < 0$ , стержень буде розтягнутий такою самою силою  $N = \alpha EA t_{cp}$ . У табл. 6.4 показані розрахункові схеми, а також епюри  $S_0$  поздовжніх сил і вузлові навантаження від рівномірного нагрівання при  $t_{cp} > 0$  й від рівномірного охолодження при  $t_{cp} < 0$ .

Таблиця 6.4

Епюри зусиль і вузлові навантаження при впливі температури

Розрахункова схема	Епюра $S_0$	Вузлове навантаження
а) 		
б) 		
в) 		
г) 		

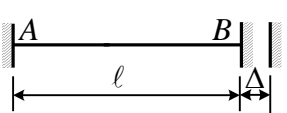
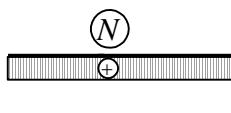
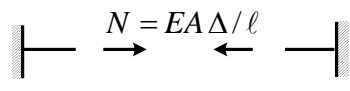
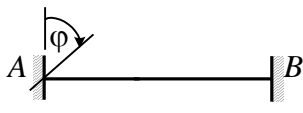
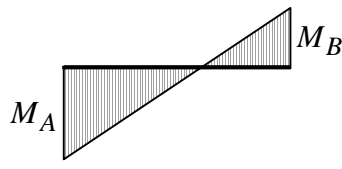
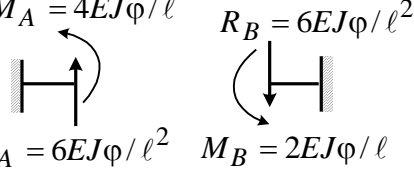
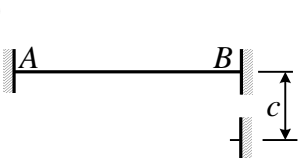
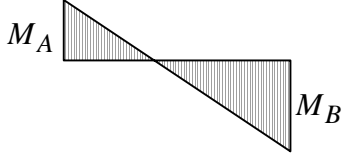
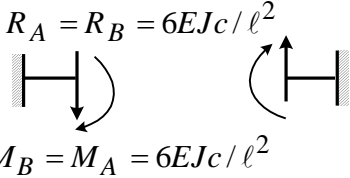
Від перепаду температур  $\Delta t$  у стержнях виникнуть згинальні моменти, при цьому розтягнутими будуть завжди менш нагріті волокна. У табл. 6.4 на схемах в) і г) показані епюри моментів і вузлові навантаження в балковому й комбінованому елементах висотою перерізу  $d$  від перепаду температур  $\Delta t$ .

#### 6.6.4. Осідання опор

При заданому осіданні опор усі елементи, прикріплені до неї, отримують відповідні деформації, у них виникають зусилля, тому що в основній системі МСЕ всі вузли закріплені від переміщень. Так, від заданого лінійного переміщення  $\Delta$  однієї з опор у напрямку осі будь-якого стержня він подовжиться (укоротиться) на таку саму величину  $\Delta$ , що викличе в ньому розтягувальну (стискальну) поздовжню силу  $N = EA \Delta / \ell$  та опорні реакції, що їй відповідають, на кінцях. У табл. 6.5 наведені епюри поздовжніх зусиль  $S_0$  і відповідні вузлові навантаження, що виникають у стержневих елементах будь-якого типу від переміщення однієї з опор уздовж осі стержня на  $\Delta$ .

Таблица 6.5

Епюри зусиль і вузлові навантаження при осіданні опор

Розрахункова схема	Епюра $S_0$	Вузлове навантаження
а) 		
б) 		$M_A = 4EJ\varphi / \ell$ $R_B = 6EJ\varphi / \ell^2$ 
в) 		$R_A = R_B = 6EJc / \ell^2$ 

На схемі б) у табл. 6.5 показані епюри моментів і відповідні вузлові навантаження в балкових елементах при повороті опорного перерізу на кут  $\varphi$  і від лінійного зсуву  $c$  у напрямку нормалі до осі стержня.

### 6.6.5. Матриці жорсткості типових стержневих елементів

Побудова матриць жорсткості  $K_e$  типового елемента є центральною задачею методу скінченних елементів. Ця матриця встановлює зв'язок між вузловими переміщеннями й силами. Використовуємо формулу матричного методу переміщень (6.79)

$$K_e = (A k A^T)_e$$

для окремого елемента, розглянутого як ціла конструкція. Тут матриці  $A$  й  $k$  – статична матриця (див. п. 6.5.2) і матриця жорсткості елемента (див. п. 6.5.4).

Розглянемо виведення матриць жорсткості типових стержневих елементів.

Шарнірно-стержневий елемент (рис. 6.58)

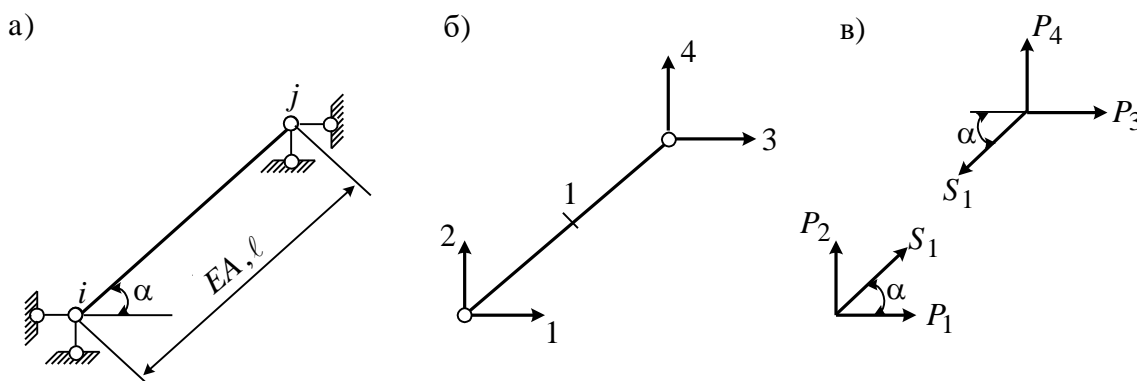


Рис. 6.58. Схеми шарнірно-стержневого елемента

Для шарнірно-стержневого елемента (див. рис. 6.58, а) спочатку побудуємо розрахункову схему (рис. 6.58, б), де стрілками зазначені можливі локальні ступені свободи, пов'язані з переміщеннями  $Z_1 - Z_4$  й відповідними можливими зовнішніми силами  $P_1 - P_4$ . Крім того, в елементі можливо одне осьове зусилля  $S_1$  й відповідна деформація  $\ell_1$ . Розглянувши рівновагу вузлів (рис. 6.58, в), запишемо співвідношення між зовнішніми та внутрішніми силами:

$$P_1 = -S_1 \cos \alpha; \quad P_2 = -S_1 \sin \alpha; \quad P_3 = S_1 \cos \alpha; \quad P_4 = S_1 \sin \alpha. \quad (6.83)$$

Якщо систему (6.83) записати в матричному вигляді  $P = AS$ , то матриця  $A$  елемента буде

$$A = [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha]^T.$$

Матриця жорсткості шарнірно-стержневого елемента  $k$  була отримана раніше в матричному методі переміщень (п. 6.2.4):

$$k = \left( \frac{EA}{\ell} \right). \quad (6.84)$$

Обчислюємо матрицю одиничних зусиль

$$kA^T = \frac{EA}{\ell} [-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha].$$

Нарешті, обчислимо матрицю жорсткості елемента  $K$ :

$$K_{4 \times 4}^e = A \cdot kA^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{44} \end{bmatrix} = [K_{ij}], \quad (6.85)$$

де  $K_{11} = \frac{EA}{\ell} \cos^2 \alpha$  і т. д.

Не вписані елементи матриці (6.85) симетричні щодо головної діагоналі.

#### Балковий затиснений елемент (рис. 6.59)

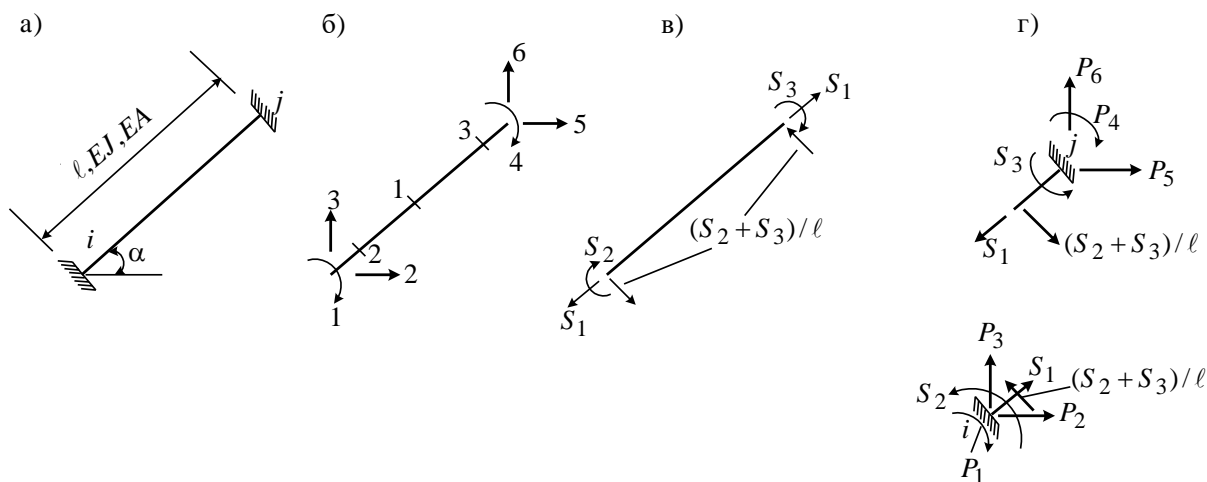


Рис. 6.59. Схеми балкового затисненого елемента

Для балкового затисненого елемента, показаного на рис. 6.59, а, складемо розрахункову схему (рис. 6.59, б), де стрілками показано шість локальних ступенів свободи  $Z_1 - Z_6$  й відповідні їм можливі вузлові сили  $P_1 - P_6$ . Насічками позначені осьова сила  $S_1$  й згинальні моменти по кінцях  $S_2$  і  $S_3$ . На рис. 6.59, в окремо зазначені ці сили, а також виникаючі по кінцях поперечні сили. Розглянемо рівновагу вузлів  $i$  і  $j$  (рис. 6.59, г):

$$\begin{aligned}
& \sum M = 0: P_1 = S_2; \\
\text{Вузол } i & \quad \sum X = 0: P_2 = -S_1 \cos \alpha + \frac{S_2 + S_3}{\ell} \sin \alpha; \\
& \quad \sum Y = 0: P_3 = -S_1 \sin \alpha - \frac{S_2 + S_3}{\ell} \cos \alpha; \\
& \quad \sum M = 0: P_4 = S_3; \\
\text{Вузол } j & \quad \sum X = 0: P_5 = S_1 \cos \alpha - \frac{S_2 + S_3}{\ell} \sin \alpha; \\
& \quad \sum Y = 0: P_6 = S_1 \sin \alpha + \frac{S_2 + S_3}{\ell} \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{6.86}$$

Запишемо тепер матрицю  $A$  як матрицю коефіцієнтів системи рівнянь (6.86):

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline -\cos \alpha & \sin \alpha / \ell & \sin \alpha / \ell \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha / \ell & -\cos \alpha / \ell \\ \hline & & 1 \\ \hline \cos \alpha & -\sin \alpha / \ell & -\sin \alpha / \ell \\ \sin \alpha & \cos \alpha / \ell & \cos \alpha / \ell \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Матриця жорсткості всіх елементів  $k$  для балкового затисненого елемента при урахуванні деформації розтягання-стискання визначиться як комбінація, або сума матриць внутрішньої жорсткості для шарнірного й балкового елементів матричного методу переміщень (6.73) (6.74):

$$k = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline EA / \ell & & \\ \hline & 4EJ / \ell & 2EJ / \ell \\ \hline & 2EJ / \ell & 4EJ / \ell \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Матриця одиничних зусиль обчислюється за формулою  $kA^T$  та має розмір  $3 \times 6$ . Матриця жорсткості  $K = AkA^T$  має розмір  $6 \times 6$ , симетрична щодо головної діагоналі.

### *Балковий комбінований елемент*

Матриці балкового комбінованого елемента (рис. 6.56) отримують цілком так само, як і балкового затисненого (рис. 6.59, а), якщо у вузлі  $j$  поставити шарнір. Тоді ступенів свободи буде 5, шуканих зусиль 2, матриця  $k$  буде мати розмір  $5 \times 5$ .

### Просторовий затиснений елемент

Як відомо, у жорсткому вузлі просторової стержневої системи є 6 ступенів свободи – 3 лінійних переміщення й 3 повороти навколо осей, тому стержень, що з'єднує два вузли, буде мати 12 ступенів свободи. Зусиль у стержні, що підлягають визначенню, усього 6: нормальна сила  $S_1$ , згинаючі моменти по кінцях із площини стержня  $S_2$  й  $S_3$ , згинаючі моменти в площині стержня  $S_4$  і  $S_5$  й крутний момент  $S_6$ . Статична матриця розміром  $12 \times 6$  будується так само, як і для елемента на площині, а матриця жорсткості  $k$  буде

$$k = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline EA / \ell & & & & & \\ \hline & 4EJ_2 / \ell & 2EJ_2 / \ell & & & \\ \hline & 2EJ_2 / \ell & 4EJ_2 / \ell & & & \\ \hline & & & 4EJ_3 / \ell & 2EJ_3 / \ell & \\ \hline & & & 2EJ_3 / \ell & 4EJ_3 / \ell & \\ \hline & & & & & GJ_1 / \ell \\ \hline \end{array}$$

Тут  $J_1$  – момент інерції при крученні,  $J_2$  – момент інерції із площини елемента,  $J_3$  – момент інерції в площині елемента,  $G$  – модуль зсуву.

Формування матриці жорсткості  $k$  просторового стержневого елемента проводиться за тим самим алгоритмом, що й для елемента на площині.

#### 6.6.6. Формування матриці жорсткості конструкції

Раніше було показано (п. 6.5.5), що розв'язувальна система рівнянь матричного методу переміщень  $KZ = P$  є системою канонічних рівнянь методу переміщень, отже, кожний компонент  $K_{ij}$  матриці  $K$  є реакцією в  $i$ -му зв'язку при переміщенні  $j$ -го зв'язку на одиницю. Реакція в будь-якому вузлі по напрямку  $i$ -го зв'язку, очевидно, складається з реакцій, що виникають у всіх елементах, які примикають до вузла, по тому самому напрямку  $i$ . Отже, матриця жорсткості системи  $K$  отримується додаванням матриць жорсткості елементів  $K_e$ , що складають систему



$$K = \sum_{e=1}^m K_e,$$

де  $m$  – число елементів.

Очевидно, матриця  $K$  квадратна, симетрична щодо головної діагоналі, її розмір дорівнює числу ступенів свободи системи. Процедуру додавання простежимо на простому прикладі рис. 6.60, де наочно продемонструємо процес послідовного наповнення матриці  $K$  шляхом вкладення в неї матриць жорсткості елементів  $K_e$ .

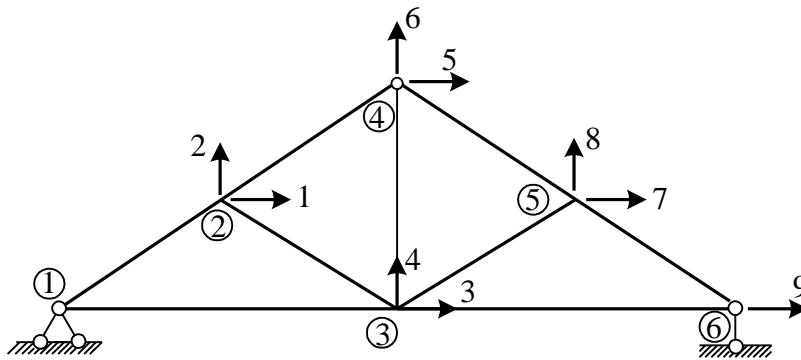


Рис. 6.60. Схема ферми

На рис. 6.60 цифрами в кружках позначені вузли, стрілками й цифрами – глобальні ступені свободи, усього 9. Ферма складається із шарнірних елементів, локальні ступені свободи для трьох елементів показані на рис. 6.61, а, б, в.

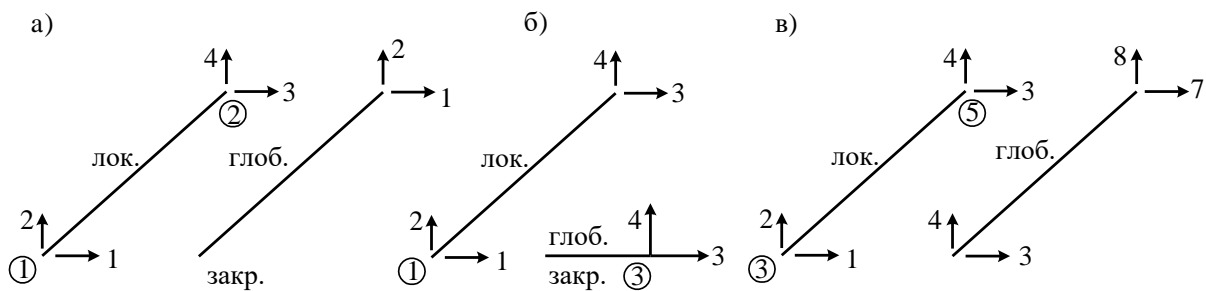


Рис. 6.61. Елементи ферми

Заготовимо матрицю розміром  $9 \times 9$  з усіма компонентами, що дорівнюють нулю (рис. 6.62).

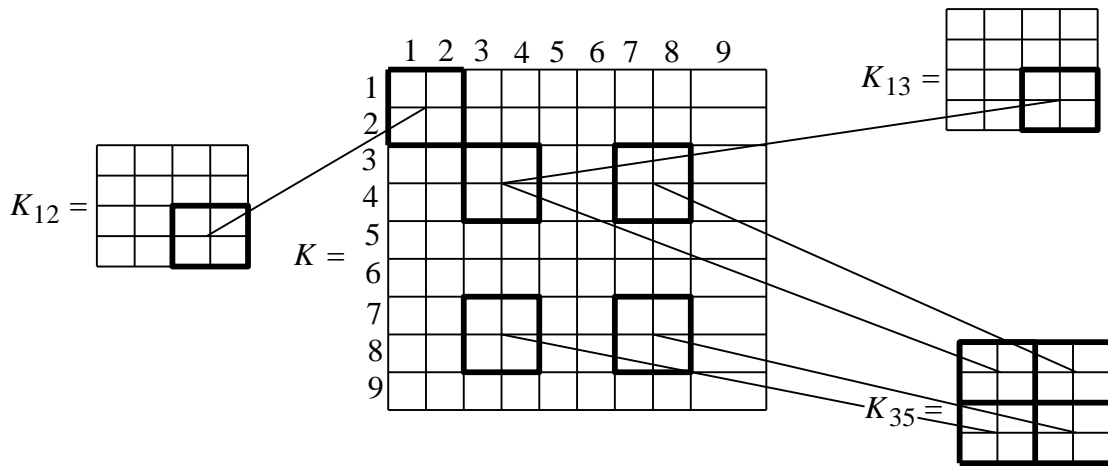


Рис. 6.62. Схема матриці розміром 9x9

Беремо перший елемент 1-2 (рис. 6.61, а). Вузол 1 закріплений, тому компоненти  $K_{12}$  відповідають локальним ступеням свободи 1 і 2 (два перші рядки й стовпця не використовуються). Локальні ступені свободи 3, 4 відповідають глобальним ступеням 1 і 2, тому субматриця 3-4 міститься на перетинанні 1-2 рядків і стовпців матриці  $K$ , як показано на рис. 6.62. Ми вклали в матрицю  $K$  тільки три матриці з дев'яти, але, сподіваємося, головна ідея засвоєна.

### 6.6.7. Визначення переміщень і зусиль в елементах

Після формування матриці жорсткості системи  $K$  розв'язується система лінійних рівнянь  $KZ = P$  і визначається вектор  $Z$ , тобто переміщення всіх вузлів.

Зусилля в конструкції знаходять поелементно за формулою

$$S_e = (kA^T)_e \cdot Z_e. \quad (6.87)$$

Тут матриця одиничних зусиль елемента  $(kA^T)$  була обчислена при формуванні матриці жорсткості елемента  $K_e = (A k A^T)_e$ . Вектор  $Z_e$  – це компоненти вектора  $Z$ , що відповідні локальним ступеням свободи. Наприклад, для елемента 3-6 ферми (рис. 6.62) складові формули (6.87) будуть

$$(kA^T)_{35} = (EA/\ell)_{35} [-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha],$$

$$(Z)_{35} = (Z_3 \ Z_4 \ Z_7 \ Z_8)^T.$$

У результаті множення за формулою (6.87) вектора-рядка на вектор-стовпець одержимо зусилля  $S_{35}$  – одне число, що відповідає осьовій силі в елементі 3-5. Для балкових елементів відповідно до рис. 6.59  $S_1$  – осьове

зусилля,  $S_2$  і  $S_3$  – моменти по кінцях стержня. Для комбінованого елемента  $S_1$  – осьове зусилля,  $S_2$  – момент у закладенні.

Для просторового стержневого елемента згідно з його матрицею жорсткості  $K$  маємо:  $S_1$  – осьове зусилля,  $S_2$  і  $S_3$  – згинаючі моменти із площини стержня,  $S_4$  і  $S_5$  – згинаючі моменти в площині стержня,  $S_6$  – крутний момент (див. п. 6.6.5). Поперечні сили визначаються за формулою  $Q_{ij} = -(M_i + M_j)/\ell$  відповідно до прийнятого знака для згинаючих моментів, коли кінцеві моменти обертають стержень за годинниковою стрілкою (рис. 6.53).

Нарешті, якщо був заданий позавузловий вплив типу розподіленого навантаження, температури або осідання опор, то вантажні епюри додаються до розрахункових за відомою формулою

$$S_{ok} = S + S_0.$$

## РОЗДІЛ 7

### ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ БАЛОК, АРОК, ФЕРМ

В інженерній практиці в якості несучих конструкцій часто використовуються статично невизначені балки, арки, ферми. Особливістю роботи статично невизначених балок, арок і ферм порівняно зі статично визначеними, є те (див. розд. 6), що зусилля в них залежать від жорсткості елементів. У цих системах виникають також зусилля від температури, осідання опор і неточності виготовлення окремих елементів.

#### 7.1. Розрахунок нерозрізних балок на опорах, що пружно зміщаються, на силові впливи

Нерозрізною балкою називається така балка, що перекриває два чи більше прогони і проходить через свої опори, не перериваючись ніде шарнірами чи розрізами. Характерною відмінністю нерозрізної балки від розрізної є те, що навантаження, яке діє в будь-якому її прогоні, згинає балку протягом усіх прогонів, створюючи плавну пружну лінію.

У курсі опору матеріалів розглядалася нерозрізна балка на абсолютно жорстких опорах. Тут ми розглянемо нерозрізні балки на опорах, що пружно зміщаються. Опорою, що пружно зміщається, ми будемо називати таку, переміщення якої пропорційне діючому на неї тиску. Наприклад: довгі колони, на яких лежить нерозрізна балка; поперечні балки проїзної частини металевго моста, на яких лежать поздовжні нерозрізні балки; понтони, що служать опорами наплавного моста; рейка залізничної колії, що

лежить на шпалах, які у свою чергу лежать на більш-менш пружному полотні.

Будемо вважати прогони, а також перерізи нерозрізної балки відомими. Пружні характеристики опор (коефіцієнти податливості)  $C_i$  будемо також вважати відомими. За невідомі приймемо опорні згинальні моменти (рис. 7.1). За основну систему приймемо балку, розділену шарнірами на ряд однопрогонових балок. В основній системі побудуємо епюри згинальних моментів, викликаних одиничними значеннями невідомих  $M_{n-2}, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, M_{n+2}$ , і епюру моментів від зовнішнього навантаження  $M_F$ .

Легко помітити, що перелом пружної лінії на опорі  $n$  викликається тільки моментами  $M_{n-2}, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, M_{n+2}$  і зовнішнім навантаженням, розташованим на прогонах  $l_{n-1}, l_n, l_{n+1}, l_{n+2}$ . Дійсно, кожен з цих факторів викликає в основній системі реакції принаймні в одній з опор  $n-1, n, n+1$ , а подовження чи укорочення останніх, очевидно, викликає взаємний поворот обох перерізів, шарнірно зв'язаних між собою на опорі  $n$ . Моменти і зовнішні навантаження, розташовані більш далеко, не викликають в опорах  $n-1, n, n+1$  ніяких зусиль.

Канонічне рівняння для  $n$ -ї опори (рис. 7.1, а) має вигляд

$$M_{n-2}\delta_{n,n-2} + M_{n-1}\delta_{n,n-1} + M_n\delta_{n,n} + M_{n+1}\delta_{n,n+1} + M_{n+2}\delta_{n,n+2} + \Delta_{nF} = 0. \quad (7.1)$$

Це рівняння називається рівнянням п'яти моментів.

Виразимо в буквенному вигляді коефіцієнти цього рівняння. Візьмемо до уваги згинальні моменти в балці і реакції в опорах (див. п. 6.1.4):

$$\delta_{n,n-2} = \frac{C_{n-1}}{l_{n-1}l_n}; \quad \delta_{n,n-1} = \frac{l_n}{6EJ_n} - \frac{C_{n-1}}{l_n} \left( \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) - \frac{C_n}{l_n} \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right);$$

$$\delta_{n,n} = \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}} + \frac{C_{n-1}}{l_n^2} + C_n \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right)^2 + \frac{C_{n+1}}{l_{n+1}^2}; \quad (7.2)$$

$$\delta_{n,n+1} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} - \frac{C_n}{l_{n+1}} \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) - \frac{C_{n+1}}{l_{n+1}} \left( \frac{1}{l_{n+1}} + \frac{1}{l_{n+2}} \right); \quad \delta_{n,n+2} = \frac{C_{n+1}}{l_{n+1}l_{n+2}};$$

$$\Delta_{nF} = \frac{B_n^\Phi}{EJ_n} + \frac{A_{n+1}^\Phi}{EJ_{n+1}} + \frac{C_{n-1}}{l_n} R_{n-1} - C_n R_n \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \frac{C_{n+1}}{l_{n+1}} R_{n+1},$$

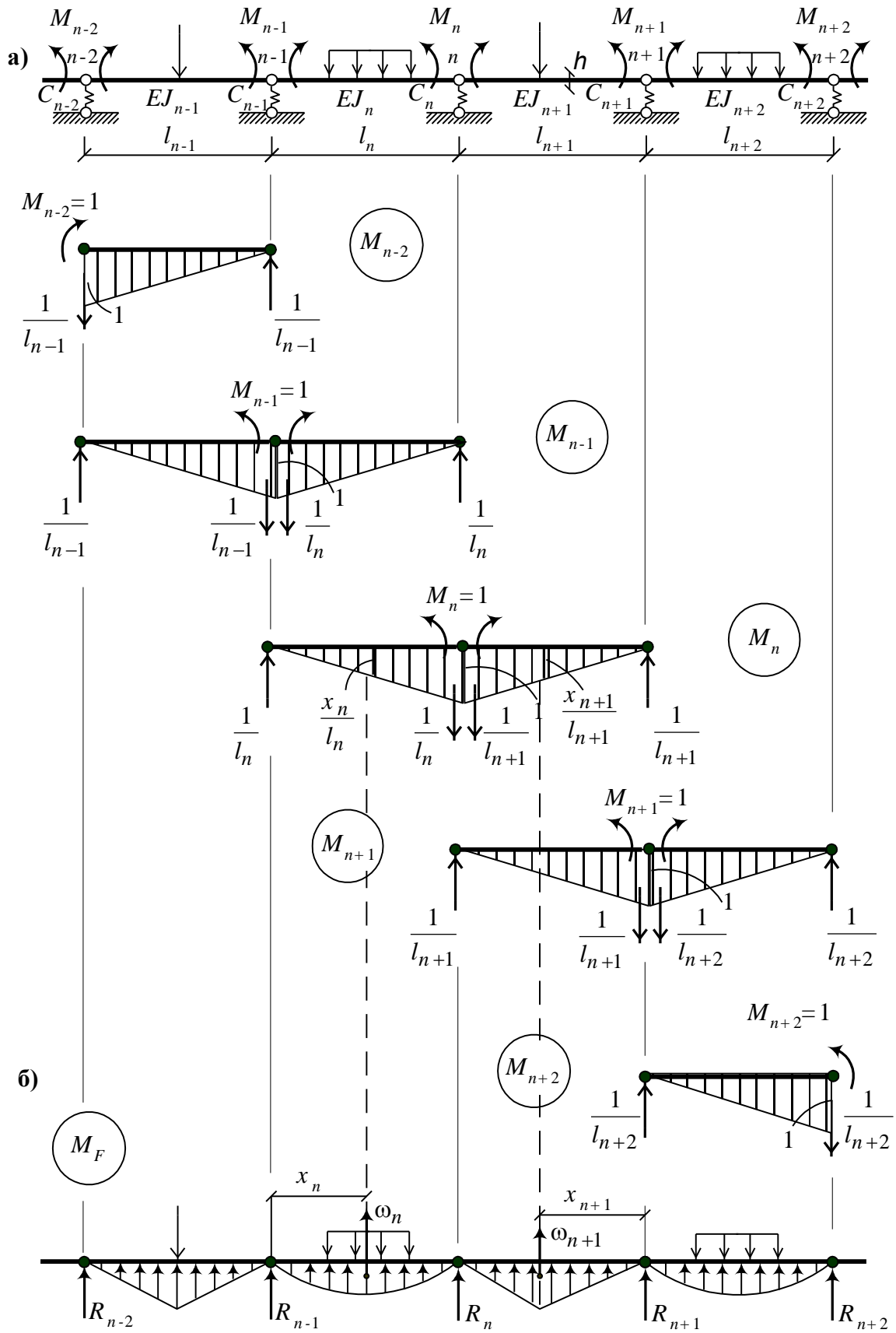


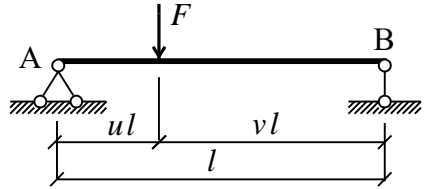
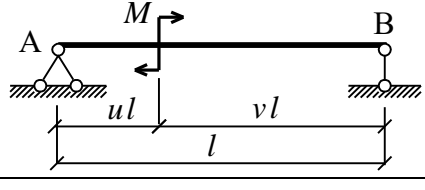
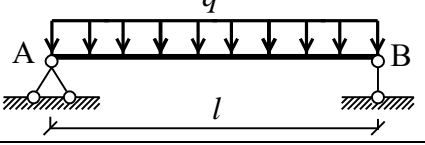
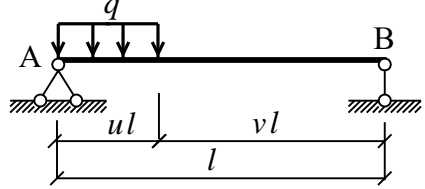
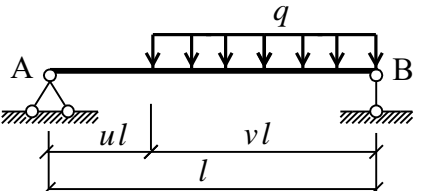
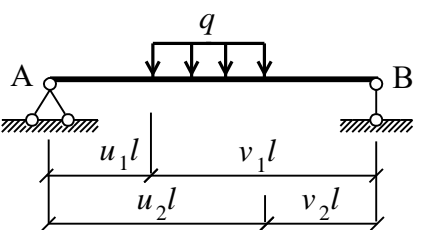
Рис. 7.1. Основна система нерозрізної балки на опорах, що пружно зміщуються (а), одиничні  $M_{n-2}$ ,  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$ ,  $M_{n+2}$  і вантажні  $M_F$  епюри (б)

де  $R_{n-1}, R_n, R_{n+1}$  – реакції опор  $n-1, n, n+1$  (рис. 7.1), викликані в основній системі зовнішнім навантаженням;  $B_n^\Phi$  і  $A_{n+1}^\Phi$  – фіктивні реакції опори  $n$  в  $n$ -му і  $n+1$ -му прогонах.

Щоб знайти фіктивні реакції, необхідно в основній системі від заданого навантаження побудувати епюру моментів. Побудовану епюру моментів слід прийняти за фіктивне навантаження. Направляти фіктивне навантаження треба до осі балки. Від цього навантаження і знаходяться фіктивні реакції. У табл. 7.1 наведені готові формули для визначення фіктивних реакцій.

Таблиця 7.1

Формули для визначення фіктивних опорних реакцій

№ п/п	Схема балки	Фіктивні реакції
1		$A^\Phi = \frac{Fl^2}{6}uv(1+v),$ $B^\Phi = \frac{Fl^2}{6}uv(1+u)$
2		$A^\Phi = -\frac{Ml}{6}(1-3v^2),$ $B^\Phi = \frac{Ml}{6}(1-3u^2)$
3		$A^\Phi = B^\Phi = \frac{ql^3}{24}$
4		$A^\Phi = \frac{ql^3}{24}u^2(2-u)^2,$ $B^\Phi = \frac{ql^3}{24}u^2(2-u^2)$
5		$A^\Phi = \frac{ql^3}{24}v^2(2-v)^2,$ $B^\Phi = \frac{ql^3}{24}v^2(2-v^2)$
6		$A^\Phi = \frac{ql^3}{24} \left[ 1 - u_1^2(2-v_1)^2 - v_2^2(2-v_2^2) \right],$ $B^\Phi = \frac{ql^3}{24} \left[ 1 - u_1^2(2-v_1^2) - v_2^2(2-v_2)^2 \right]$

Число рівнянь (7.1) дорівнює числу невідомих. При цьому перше й останнє рівняння містять по три невідомих моменти, друге і передостаннє – по чотири, всі інші рівняння містять по п'ять невідомих.

Якщо балка має постійний переріз і рівні прогони, а опори – постійний коефіцієнт податливості, то рівняння п'яти моментів набуває вигляду

$$M_{n-2} \frac{C}{l^2} + M_{n-1} \left( \frac{l}{6EJ} - \frac{4C}{l^2} \right) + 2M_n \left( \frac{l}{3EJ} + \frac{3C}{l^2} \right) + M_{n+1} \left( \frac{l}{6EJ} - \frac{4C}{l^2} \right) + M_{n+2} \frac{C}{l^2} + \frac{B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi}{EJ} + \frac{C}{l} (R_{n-1} - 2R_n + R_{n+1}) = 0. \quad (7.3)$$

Помножимо почленно отримане рівняння на  $\frac{6EJ}{l}$  і позначимо

$$\psi = \frac{6EJC}{l^3}. \quad (7.4)$$

У результаті одержимо таке рівняння:

$$M_{n-2} \psi + M_{n-1} (1 - 4\psi) + 2M_n (2 + 3\psi) + M_{n+1} (1 - 4\psi) + M_{n+2} \psi = -\frac{6(B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi)}{l} - \psi l (R_{n-1} - 2R_n + R_{n+1}). \quad (7.5)$$

У випадку  $C_i = 0$  балка перетворюється в нерозрізну балку на жорстких опорах. Коефіцієнти  $\delta_{n,n-2}$  і  $\delta_{n,n+2}$  (7.2) стають рівними нулю, і рівняння п'яти моментів (7.1) переходить у рівняння трьох моментів:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6(B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi). \quad (7.6)$$

Для рівних прогонів  $l_n = l_{n+1} = l$  одержимо з (7.6)

$$l(M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1}) = -6(B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi). \quad (7.7)$$

Якщо опорні моменти знайдені, то можна визначити згинальний момент у перерізі між опорами

$$M_x = M_x^0 + M_n \frac{x}{l_n} + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n}, \quad (7.8)$$

поперечну силу

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (7.9)$$

та опорну реакцію на будь-якій опорі

$$R_n = R_n^0 + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}. \quad (7.10)$$

Прогин на  $n$ -й опорі дорівнює добутку величини реакції (7.10) на коефіцієнт податливості опори.

У формулах (7.8) – (7.10) позначено:  $M_x^0, Q_x^0$  – згинальний момент і поперечна сила в перерізі  $x$  в основній системі;  $R_n^0$  – опорна реакція на  $n$ -й опорі в основній системі від навантаження, прикладеного до  $l_n$  і  $l_{n+1}$  прогонів.

Опорні моменти  $M_{n-1}, M_n, M_{n+1}$  підставляються у формули (7.8) - (7.10) зі своїми знаками.

Розглянемо приклад розрахунку нерозривної балки на опорах, що пружно зміщуються (рис. 7.2, а, б).

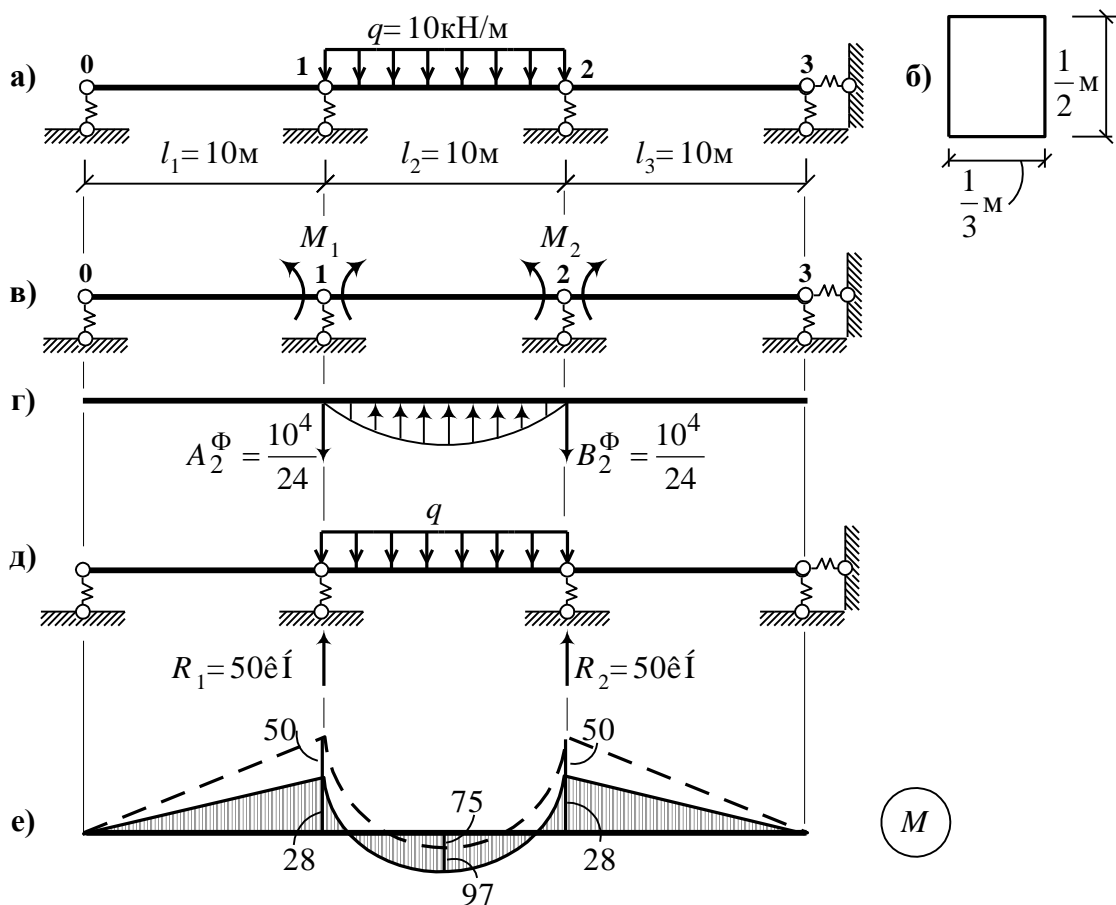


Рис. 7.2. До розрахунку нерозривної балки на опорах, що пружно зміщуються

Вихідні дані: коефіцієнт податливості  $C = 3,2 \cdot 10^{-4}$  м/кН; модуль пружності матеріалу балки  $E = 30 \cdot 10^6$  кН/м<sup>2</sup>; жорсткість балки  $EJ = 30 \cdot 10^6 \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{5}{48} \cdot 10^6$  кН · м<sup>2</sup>; коефіцієнт  $\psi$  (7.4)

$$\psi = \frac{6 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 3,2 \cdot 10^{-4}}{48 \cdot 10^3} \approx 0,2 .$$



Складемо систему рівнянь п'яти моментів (7.5) (основна система показана на рис. 7.2, в; фіктивні реакції – на рис. 7.2, г; реакції опор від заданого навантаження – на рис. 7.2, д):

$$2M_1(2 + 3\psi) + M_2(1 - 4\psi) = -\frac{6 \cdot 10^4}{10} - \psi \cdot 10(-2 \cdot 50 + 50);$$

$$M_1(1 - 4\psi) + 2M_2(2 + 3\psi) = -\frac{6 \cdot 10^4}{10} - \psi \cdot 10(-2 \cdot 50 + 50).$$

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь одержуємо

$$M_2 = M_1 = -\frac{250(1 - 2\psi)[2(2 + 3\psi) - (1 - 4\psi)]}{4(2 + 3\psi)^2 - (1 - 4\psi)^2}.$$

При  $\psi = 0,2$   $M_2 = M_1 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

При  $\psi = 0$  (балка на абсолютно жорстких опорах)

$$M_2 = M_1 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Епюра моментів побудована на рис. 7.2, е. Слід звернути увагу на значний перерозподіл зусиль (моментів) у балці на абсолютно жорстких опорах (рис. 7.2, е, пунктир) порівняно з балкою на опорах, що пружно зміщаються: збільшилися опорні моменти і зменшилися прогонові.

## 7.2. Розрахунок нерозрізних балок на опорах, що пружно зміщаються, на температурні впливи

Припустимо, що нерозрізна балка випробує дію температури. Схема балки в основній системі зображена на рис. 7.3, а.

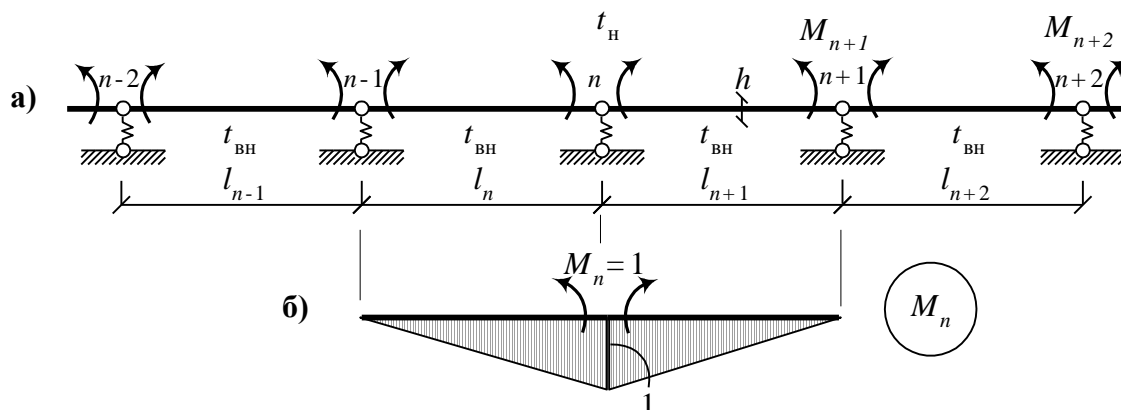


Рис. 7.3. До розрахунку балки на опорах, що пружно зміщаються, на температурні впливи

У цьому випадку рівняння п'яти моментів записується в такий спосіб:

$$M_{n-2}\delta_{n,n-2} + M_{n-1}\delta_{n,n-1} + M_n\delta_{n,n} + M_{n+1}\delta_{n,n+1} + M_{n+2}\delta_{n,n+2} + \Delta_{nt} = 0. \quad (7.11)$$

Відмінність від системи (7.1) полягає в тому, що замість вільного члена  $\Delta_{nF}$  тут стоїть член  $\Delta_{nt}$ , який являє собою температурне переміщення в основній системі (див. п. 5.6):

$$\Delta_{nt} = \sum \int N_n \alpha t ds + \sum \int \frac{M_n \alpha t'}{h} ds. \quad (7.12)$$

Оскільки в розглянутій конструкції поздовжня сила відсутня, то формула (7.12) набуває такого вигляду:

$$\Delta_{nt} = \sum \int \frac{M_n \alpha t'}{h} ds = \sum \frac{\alpha t'}{h} \omega_M. \quad (7.13)$$

Епюра  $M_n$  зображена на рис. 7.3, б. Її площа  $\omega_M$  може бути легко підрахована. Припустимо, що температура викривляє балку опуклістю вниз (тобто розтягнуті волокна в балці від силових впливів  $M_n = 1$  і від дії температури збігаються). Це, як відомо (див. п. 5.6), дозволяє у формулі (7.13) прийняти знак плюс. Крім того, припустимо, що балка має постійну висоту перерізу  $h$ . Тоді

$$\Delta_{nt} = \frac{\alpha t'}{h} \left( \frac{l_n}{2} \right) + \frac{\alpha t'}{h} \left( \frac{l_{n+1}}{2} \right) = \frac{\alpha t'}{2h} (l_n + l_{n+1}). \quad (7.14)$$

При однакових прогонах балки і постійних коефіцієнтах податливості рівняння п'яти моментів запишеться як

$$M_{n-2}\psi + M_{n-1}(1 - 4\psi) + 2M_n(2 + 3\psi) + M_{n+1}(1 - 4\psi) + M_{n+2}\psi = -\frac{6EJ\alpha t'}{h}. \quad (7.15)$$

Склавши систему рівнянь (7.15) і розв'язавши її, знайдемо опорні моменти. Далі можемо визначити моменти в перерізах між опорами:

$$M_x = M_n \frac{x}{l_n} + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n}. \quad (7.16)$$

Після цього можна побудувати епюру поперечних сил:

$$Q_x = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (7.17)$$

і знайти всі опорні реакції за формулою

$$R_n = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}. \quad (7.18)$$

Для прикладу використаємо балку, показану на рис. 7.2. Будемо вважати, що балка зазнає вплив температур  $t_{\text{вн}}$  і  $t_{\text{н}}$ ,  $t' = |t_{\text{вн}} - t_{\text{н}}|$ . Запишемо систему рівнянь п'яти моментів (7.15):

$$2M_1(2 + 3\psi) + M_2(1 - 4\psi) = -\frac{6EJ\alpha t'}{h};$$

$$M_1(1 - 4\psi) + 2M_2(2 + 3\psi) = -\frac{6EJ\alpha t'}{h}.$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо

$$M_1 = M_2 = -\frac{6EJ\alpha t'(3 + 10\psi)}{h[4(2 + 3\psi)^2 - (1 - 4\psi)^2]}.$$

При  $\psi = 0$  (балка на жорстких опорах)

$$M_1 = M_2 = -\frac{6EJ\alpha t'}{5h}.$$

При  $\psi = 0,2$  (за прикладом в п. 7.1)

$$M_1 = M_2 = -\frac{10EJ\alpha t'}{9h}.$$

Як бачимо, у балці на опорах, що пружно зміщаються, опорні моменти зменшилися на 7.5 % (при силовому навантаженні це число дорівнювало 44 %, див. рис. 7.2, е).

### 7.3. Розрахунок нерозрізних балок на опорах, що пружно зміщаються, на змушені зсуви опорних чи інших зв'язків

Змушений зсув опір має для нерозрізних конструкцій серйозне значення. Якщо балка з прямою віссю прикріплюється до погано знівельованих опор, то вона при цьому згинається, й у ній виникає напружений стан. Те саме відбувається тоді, коли під впливом підмиву опор, поганої якості ґрунту і т. п. опорні точки виявляються розташованими не на одній прямій (рис. 7.4, а, в).

Рівняння (7.1) для розглянутого випадку має такий вигляд:

$$M_{n-2}\delta_{n,n-2} + M_{n-1}\delta_{n,n-1} + M_n\delta_{n,n} + M_{n+1}\delta_{n,n+1} + M_{n+2}\delta_{n,n+2} + \Delta_{nc} = 0, \quad (7.19)$$

де  $\Delta_{nc}$  – переміщення по напрямку невідомої  $M_n$ , котре виникає в основній системі під впливом осідання опор. Ця величина визначається, як відомо (див. п. 5.7), так:

$$\Delta_{nc} = -\sum R \Delta. \quad (7.20)$$

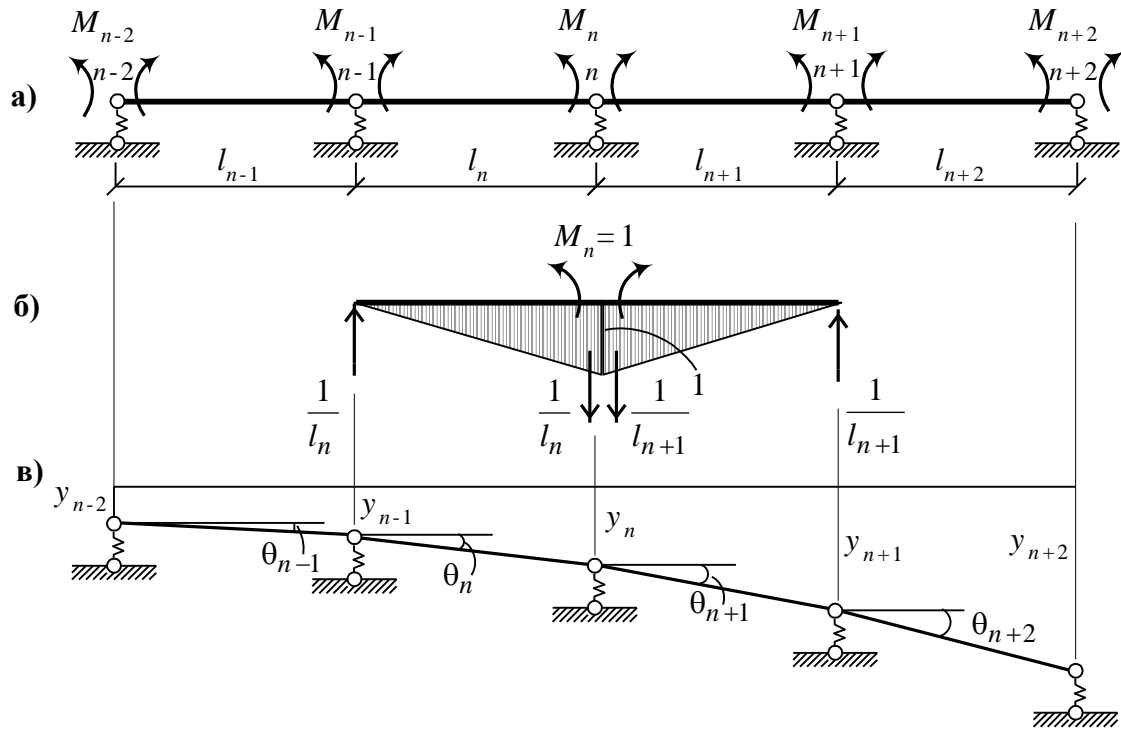


Рис. 7.4. До розрахунку нерозрізних балок на опорах, що пружно зміщуються, на осідання опор

Тут  $R$  – реакції у зв'язках  $n-1, n, n+1$ , викликані  $M_n = 1$  (див. рис. 7.4, б);  $\Delta$  – задані зсуви зв'язків  $y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$  (рис. 7.4, в);

$$\Delta_{nc} = -\left( \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} \right) = -(\text{tg } \theta_n - \text{tg } \theta_{n+1}).$$

Через малість кутів  $\text{tg } \theta_n = \theta_n, \text{tg } \theta_{n+1} = \theta_{n+1}$ .

Тоді

$$\Delta_{nc} = \theta_{n+1} - \theta_n.$$

Кути нахилу прогонів  $l_n$  і  $l_{n+1}$  будемо вважати додатними в тому випадку, коли вони спрямовані за годинниковою стрілкою.

При однакових прогонах і постійних коефіцієнтах податливості рівняння п'яти моментів набуває вигляду

$$\begin{aligned} M_{n-2} \psi + M_{n-1}(1 - \psi) + 2M_n(2 + 3\psi) + M_{n+1}(1 - 4\psi) + M_{n+2} \psi = \\ = -\frac{6EJ}{l}(\theta_{n+1} - \theta_n). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Після визначення опорних моментів побудова епюр  $M$  і  $Q$  може бути зроблена за формулами (7.16) і (7.17), а величини опорних реакцій можуть бути визначені за залежністю (7.18).

За традицією, прийнятою в цьому підрозділі, наведемо приклад. Візьмемо знову балку з прикладу на рис. 7.2. Будемо припускати, що опори, які пружно зміщуються, одержали змушені зсуви (рис. 7.5, в).

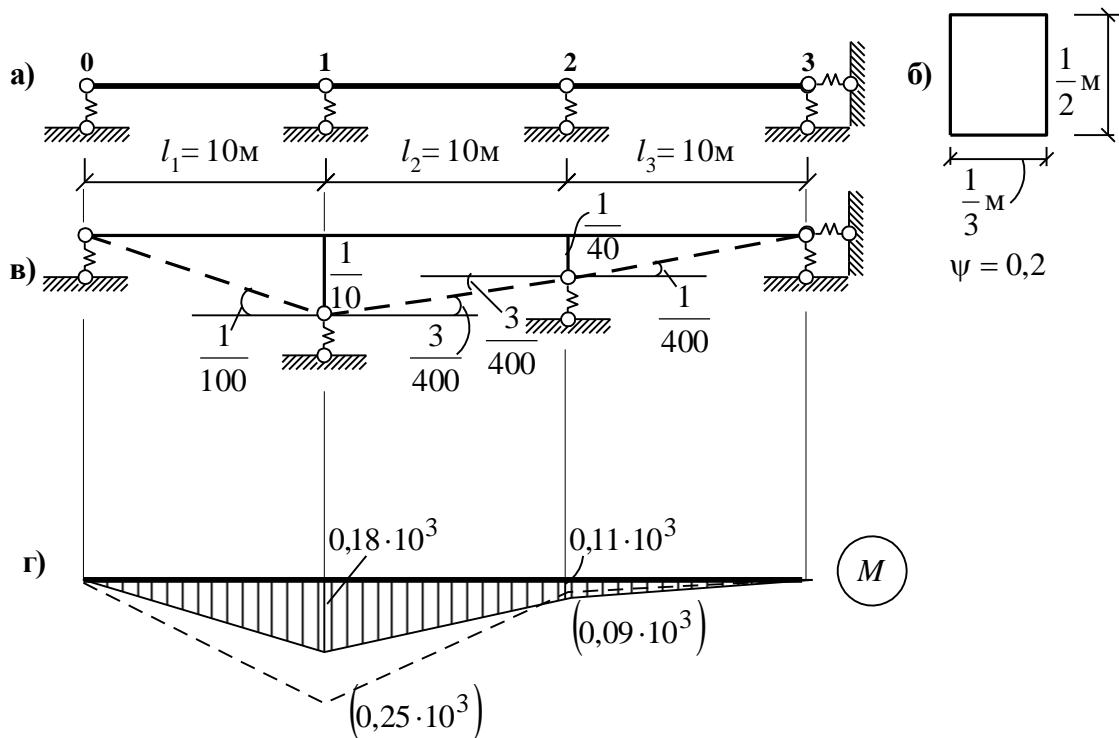


Рис. 7.5. До розрахунку нерозривної балки на опорах, що пружно зміщуються, на задане переміщення зв'язків

Складемо систему рівнянь п'яти моментів:

$$2M_1(2 + 3\psi) + M_2(1 - 4\psi) = -\frac{6EJ}{10} \left( -\frac{3}{400} - \frac{1}{100} \right);$$

$$M_1(1 - 4\psi) + 2M_2(2 + 3\psi) = -\frac{6EJ}{10} \left( -\frac{1}{400} - \frac{3}{400} \right).$$

Розв'язок цієї системи буде таким:

$$M_1 = -\frac{EJ \cdot 10^{-3} [6(1 - 4\psi) - 21(2 + 3\psi)]}{4(2 + 3\psi)^2 - (1 - 4\psi)^2};$$

$$M_2 = \frac{EJ \cdot 10^{-3} [12(2 + 3\psi) - 10.5(1 - 4\psi)]}{4(2 + 3\psi)^2 - (1 - 4\psi)^2}.$$

При  $EJ = \frac{5}{48} \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$  і  $\psi = 0,2$  маємо

$$M_1 = 0,18 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 0,11 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При  $EJ = \frac{5}{48} \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$  і  $\psi = 0$

$$M_1 = 0,25 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 0,09 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На рис. 7.5, г показані епюри моментів (пунктиром – для нерозрізної балки на абсолютно жорстких опорах, у дужках – відповідні ординати).

#### 7.4. Лінії впливу для балки на опорах, що пружно зміщаються

Побудова лінії впливу (л.в.) опорних моментів здійснюється так: вантаж  $F=1$  ставиться послідовно на кожному прогоні на відстані  $ul_n$  від лівої опори і  $vl_n$  – від правої (рис. 7.6; табл. 7.1, схема 1). Для кожної точки розподілу прогону знаходяться фіктивні реакції  $B^\Phi$  і  $A^\Phi$  (табл. 7.1) і реакції  $V$  і  $U$ .

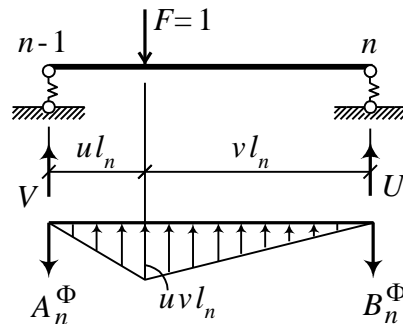


Рис. 7.6. До побудови ліній впливу

Потім щораз розв'язується відповідна система рівнянь п'яти моментів (7.1). У результаті визначаються ординати шуканої лінії впливу. Лінії впливу балки на опорах, що пружно зміщаються, відрізняються від відповідних графіків, що відносяться до балки на жорстких опорах. Ординати лінії впливу балки на опорах, що пружно зміщаються, не дорівнюють нулю на опорах, на відміну від ординат лінії впливу балки на жорстких опорах. Приблизний вигляд лінії впливу опорного згинального моменту показаний на рис. 7.7. Узагалі ж її обрис, а також знаки можуть змінюватися залежно від співвідношення довжин прогонів, від їхніх жорсткостей і коефіцієнтів податливості опор.

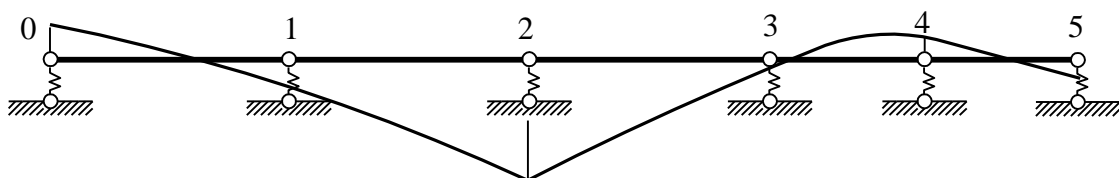


Рис. 7.7. Приблизний вигляд лінії впливу опорного моменту  $M_2$

Коли лінії впливу опорних моментів побудовано, лінії впливу згинальних моментів у перерізі між опорами, лінії впливу поперечних сил і лінії впливу опорних реакцій можуть бути побудовані за тими самими формулами, що і для балки на жорстких опорах:

$$\begin{aligned} \text{Л.В. } M_x &= \text{Л.В. } M_x^0 + \text{Л.В. } M_n \frac{x}{l_n} + \text{Л.В. } M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} ; \\ \text{Л.В. } Q_x &= \text{Л.В. } Q_x^0 + \text{Л.В. } M_n \frac{1}{l_n} - \text{Л.В. } M_{n-1} \frac{1}{l_n} ; \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\text{Л.В. } R_n = \text{Л.В. } R_n^0 + \text{Л.В. } M_{n+1} \frac{1}{l_{n+1}} - \text{Л.В. } M_n \left( \frac{1}{l_{n+1}} + \frac{1}{l_n} \right) + \text{Л.В. } M_{n-1} \frac{1}{l_n} .$$

Лінії впливу  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$ ,  $R_n^0$  в основній системі для прогону  $l_n$  показані на рис. 7.8.

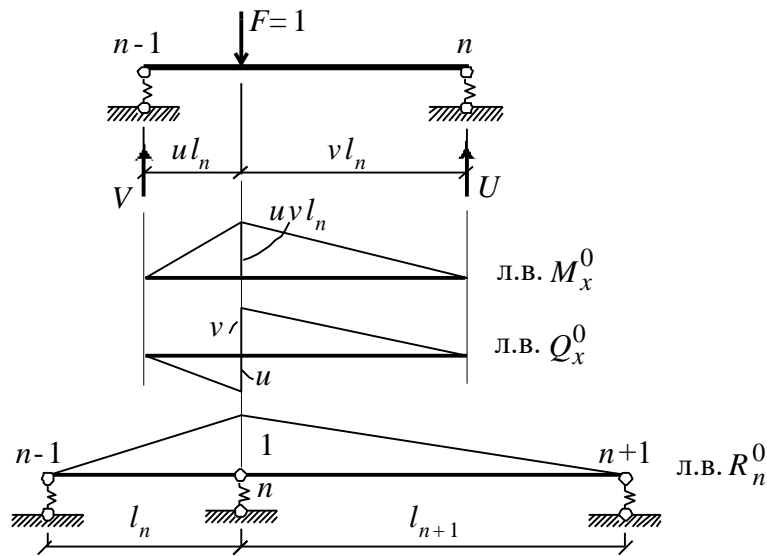


Рис. 7.8. Лінії впливу  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$ ,  $R_n^0$  в основній системі балки на опорах, що пружно зміщуються

Граничним випадком нерозрізної балки на опорах, що пружно зміщуються, є балка, розташована на «вінклерівській» пружній основі (див. курс «Опір матеріалів», розд. «Розрахунок балок на пружній основі»). Таку пружну основу балки можна розглядати як сукупність нескінченної множини не зв'язаних один з одним пружних опорних стержнів, що знаходяться один від одного на відстані  $dx$ . Податливість основи характеризується величиною  $cdx$ , тобто осіданням середовища під впливом рівномірно розподіленого тиску інтенсивності одиниця.

Диференціальне рівняння, що характеризує пружну лінію балки, яка лежить на пружній основі, має вигляд

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\kappa}{EJ} y = q ,$$

де  $\kappa$  – коефіцієнт жорсткості основи (величина, зворотна коефіцієнту податливості),  $q$  – навантаження на балку.

## 7.5. Розрахунок двохарнірних арок

Двошарнірна арка являє собою геометрично незмінну систему, що має вигляд кривого бруса, який спирається на дві шарнірно-нерухомі опори (рис. 7.9, а).

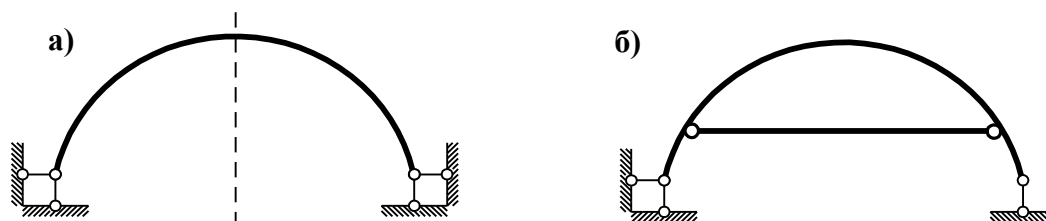


Рис. 7.9. Схеми двохарнірних арок

Різновидом двохарнірної арки є двохарнірна арка з затягуванням (рис. 7.9, б). Затягування відіграє роль горизонтального опорного стержня. У такій системі, на відміну від арки без затягування, при дії вертикального навантаження на опори передаються тільки вертикальні зусилля, а розпір погашається усередині самої споруди (затягуванням).

Арки, показані на рис. 7.9, а, б, статично невизначні. Число зайвих зв'язків знайдемо за формулою (1.4). В обох системах

$$L = 3K - \text{III} = 3 \cdot 3 - 8 = 1.$$

Розрахунок арок виконаємо методом сил. Розглянемо спочатку арку, показану на рис. 7.9, а. Основна система цієї арки й одиничних епюр показані на рис. 7.10.

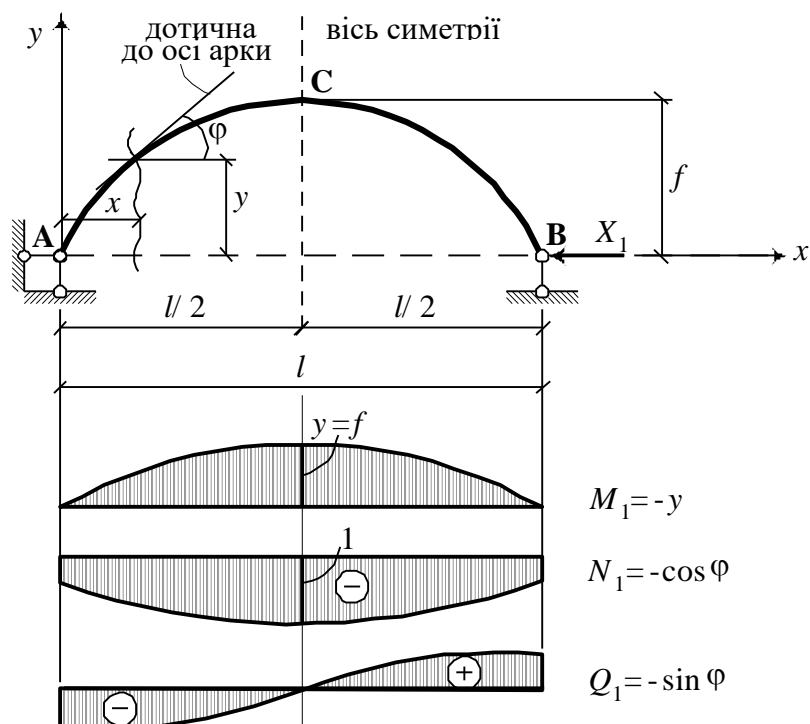


Рис. 7.10. Основна система двохарнірної арки й епюри  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $Q_1$  від зусилля  $X_1 = 1$



Канонічне рівняння методу сил має такий вигляд:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0. \quad (7.23)$$

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{11}$  і вільного члена  $\Delta_{1F}$  скористаємося формулою (5.22):

$$\delta_{11} = \int_A^B y^2 \frac{ds}{EJ} + \int_A^B \cos^2 \varphi \frac{ds}{EA} + \int_A^B \mu \sin^2 \varphi \frac{ds}{GA}. \quad (7.24)$$

Зазначимо, що для прийнятої системи координат (рис. 7.10) на ділянці **CB**  $\sin \varphi$  від'ємний, а на ділянці **AC** – додатний;  $\cos \varphi$  додатний на ділянках **AC** і **CB**.

Перш ніж знайти вільний член рівняння (7.23), згадаємо (див. розд. 4), що аналітичні вирази для моментів, поздовжніх і поперечних сил в основній системі від зовнішнього вертикального навантаження рівні:

$$M_x = M_x^0; \quad N_x = -Q_x^0 \sin \varphi_x; \quad Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x, \quad (7.25)$$

де  $M_x^0, Q_x^0$  – балкові згинальні моменти і поперечні сили.

Користуючись (5.22), одержимо

$$\Delta_{1F} = \int_A^B y M_x^0 \frac{ds}{EJ} + \int_A^B Q_x^0 \sin \varphi_x \cos \varphi_x \frac{ds}{EA} - \int_A^B Q_x^0 \sin \varphi_x \cos \varphi_x \frac{\mu ds}{GA}. \quad (7.26)$$

Обчислення інтегралів, що входять у рівняння (7.24) і (7.26), здійснимо в такий спосіб. Прогін арки розіб'ємо на  $n$ -ну кількість рівних відрізків. У межах кожного відрізка вісь арки вважаємо прямолінійною (рис. 7.11).

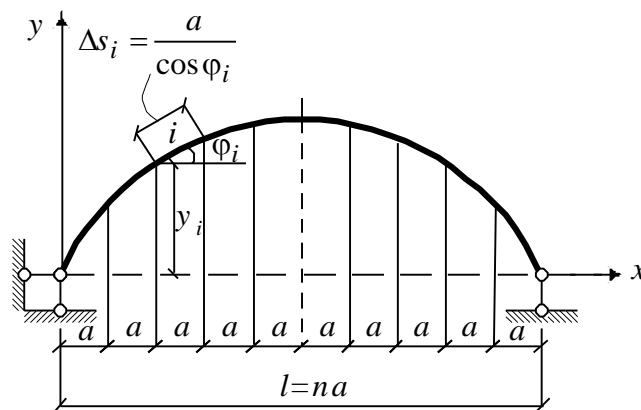


Рис. 7.11. Схема розбиття прогону арки на скінченне число відрізків

Тепер формули для визначення переміщень  $\delta_{11}$  і  $\Delta_{1F}$  набувають такого вигляду:

$$EJ_0\delta_{11} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta s'_i + \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i \frac{J_0}{A_i} \Delta s_i + \sum_{i=1}^n \sin^2 \varphi_i \frac{\mu EJ_0}{GA_i} \Delta s_i; \quad (7.27)$$

$$EJ_0\Delta_{1F} = -\sum_{i=1}^n y_i M_i^0 \Delta s'_i + \sum_{i=1}^n Q_i^0 \sin \varphi_i \cos \varphi_i \frac{J_0}{A_i} \Delta s_i - \\ - \sum_{i=1}^n Q_i^0 \sin \varphi_i \cos \varphi_i \frac{\mu EJ_0}{GA_i} \Delta s_i, \quad (7.28)$$

де  $EJ_0$  – згинальна жорсткість ділянки арки, до якої приводяться жорсткості інших ділянок;  $\Delta s'_i$  – приведена довжина  $i$ -ї ділянки,  $\Delta s'_i = \frac{J_0}{J_i} \Delta s_i$ ;  $E, G$  – відповідно модуль пружності і модуль зсуву матеріалу, з якого виконана арка ( $G = E/2(1 + \nu)$ );  $\mu$  – коефіцієнт форми перерізу (для прямокутного перерізу  $\mu = 1.2$ , для кругового  $\mu = 32/27$ , для прокатних двотаврових профілів можна приблизно прийняти  $\mu = A/A_s$ , де  $A_s$  – площа вертикальної стінки).

Для двохарнірної арки з затягуванням, розташованим на рівні опор **A** і **B**, формула (7.28) залишається без змін, а рівняння (7.27) набуває такого вигляду:

$$EJ_0\delta_{11} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta s'_i + \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i \frac{J_0}{A_i} \Delta s_i + \sum_{i=1}^n \sin^2 \varphi_i \frac{\mu EJ_0}{GA_i} \Delta s_i + \frac{EJ_0}{E_3 A_3} l, \quad (7.29)$$

де  $E_3 A_3$  – відповідно модуль пружності матеріалу затягування і площа поперечного перерізу затягування.

Якщо затягування розташоване не на рівні опор (рис. 7.12), то для визначення переміщень  $\delta_{11}$  і  $\Delta_{1F}$  треба у формулах (7.24), (7.26) змінити межі інтегрування від **E** до **D** (рис. 7.12) і аналітичні вирази для зусиль подати в такий спосіб:

$$\text{при } y > d \quad M_1 = y - d; \quad N_1 = -\cos \varphi_j; \quad Q_1 = -\sin \varphi_j;$$

$$\text{при } y \leq d \quad M_1 = 0; \quad N_1 = 0; \quad Q_1 = 0.$$

З урахуванням сказаного

$$EJ_0\delta_{11} = \sum_{j=1}^m (y_j - d)^2 \Delta s'_j + \sum_{j=1}^m \cos^2 \varphi_j \frac{J_0}{A_j} \Delta s_j + \sum_{j=1}^m \sin^2 \varphi_j \frac{\mu EJ_0}{GA_j} \Delta s_j + \frac{EJ_0}{E_3 A_3} l_3; \\ EJ_0\Delta_{1F} = -\sum_{j=1}^m (y_j - d) M_j^0 \Delta s'_j + \sum_{j=1}^m Q_j^0 \sin \varphi_j \cos \varphi_j \frac{J_0}{A_j} \Delta s_j - \\ - \sum_{j=1}^m Q_j^0 \sin \varphi_j \cos \varphi_j \frac{\mu EJ_0}{GA_j} \Delta s_j, \quad (7.30)$$

де  $m$  – число ділянок, на які розбите затягування.

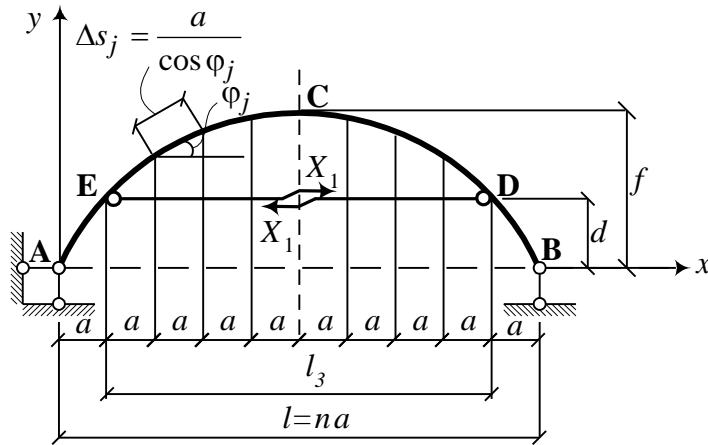


Рис. 7.12. Основна система двошарнірної арки з підвищеним затягуванням

При розрахунку двошарнірної арки на температурні впливи канонічне рівняння має вигляд

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0, \quad (7.31)$$

де  $\Delta_{1t}$  визначається відповідно до формули (5.29) при  $t' = (t_H - t_{BH})/2 = 0$  (при розрахунку арок на температурні впливи враховуємо тільки рівномірне нагрівання чи охолодження арки).

Для арки без затягування

$$\Delta_{1t} = \int_A^B N_1 \alpha \frac{t_{BH} + t_H}{2} dx. \quad (7.32)$$

Будемо вважати величини  $\alpha$  і  $t = (t_H + t_{BH})/2$  постійними уздовж осі балки. З урахуванням того, що  $N_1 = -\cos \varphi$  (рис. 7.10),

$$\Delta_{1t} = -\alpha \frac{t_{BH} + t_H}{2} l. \quad (7.33)$$

В арці з затягуванням на рівні опор **A** і **B**

$$\Delta_{1t} = -\frac{t_{BH} + t_H}{2} l (\alpha - \alpha_3), \quad (7.34)$$

де  $\alpha_3$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу затягування.

Для арки з підвищеним затягуванням у формулі (7.34) слід прийняти  $l = l_3$ .

При розрахунку двошарнірних арок на зсув опорних зв'язків (осідання опор) канонічне рівняння має вигляд

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1c} = 0, \quad (7.35)$$

де  $\Delta_{1c}$  відповідно до формули (5.31) при заданому зсуві зв'язку, показаному на рис. 7.13, дорівнює

$$\Delta_{1c} = C_x. \quad (7.36)$$

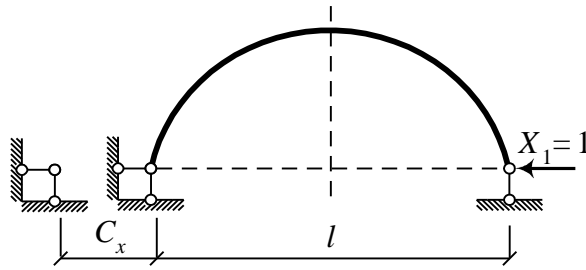


Рис. 7.13. До визначення переміщення  $\Delta_{1c}$

Формула (7.36) залишається справедливою для арки з затягуванням, якщо йдеться про податливість затягування.

Після визначення коефіцієнтів і вільних членів рівнянь (7.23), (7.31), (7.35) знаходяться значення основних невідомих і будуються остаточні епюри.

При дії зовнішнього навантаження в арці без затягування

$$\begin{aligned} M_x &= -X_1 y_x + M_x^0; \\ N_x &= -X_1 \cos \varphi_x - Q_x^0 \sin \varphi_x; \\ Q_x &= -X_1 \sin \varphi_x + Q_x^0 \cos \varphi_x. \end{aligned} \quad (7.37)$$

При дії температури і заданого зсуву зв'язків

$$\begin{aligned} M_x &= X_1 y_x; \\ N_x &= -X_1 \cos \varphi_x; \\ Q_x &= -X_1 \sin \varphi_x. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Слід зазначити, що при обчисленні переміщень  $\delta_{11}$  і  $\Delta_{1F}$  в під'ємистих арках  $\left(\frac{f}{l} > \frac{1}{5}\right)$  можна знехтувати впливом поздовжніх і

поперечних сил. При розрахунку положистих арок  $\left(\frac{f}{l} \leq \frac{1}{5}\right)$  слід

враховувати вплив поздовжніх і поперечних сил. Узагалі ж порівняльний вплив різних членів виразів (7.27), (7.28), (7.30), (7.31) залежить не тільки від обрису аркової кривої і від перерізу арки, але також і від самого навантаження.

### 7.5.1. Приклад розрахунку двохарнійної арки на дію зовнішнього навантаження

Розрахункова схема арки показана на рис. 7.14.

Розрахунок починаємо з вибору основної системи (рис. 7.15, а). Розбиваємо прогін арки на десять рівних частин і в основній системі будуюмо балкові епюри  $M^0$  і  $Q^0$  (рис. 7.15, б).

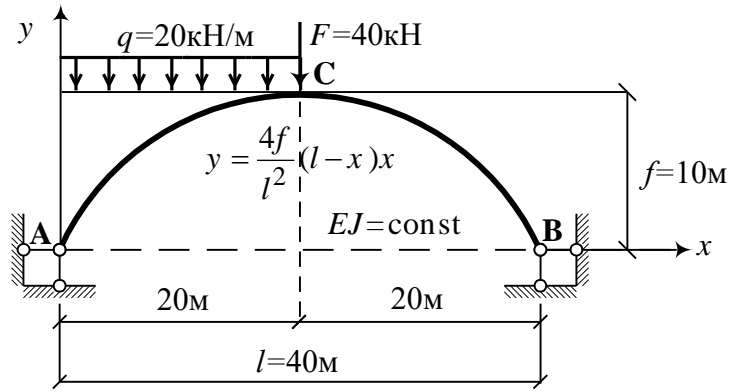


Рис. 7.14. Розрахункова схема двохарнірної арки

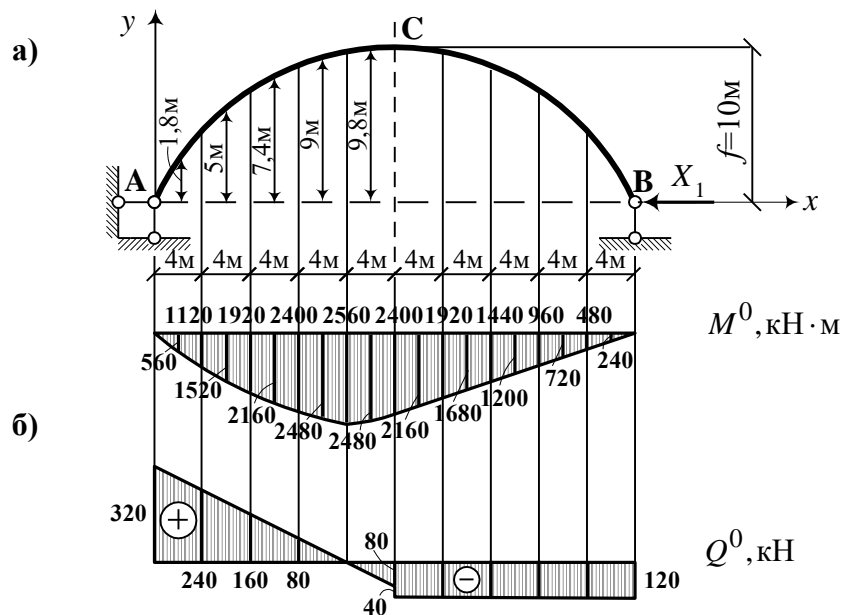


Рис. 7.15. Основна система двохарнірної арки й епюри  $M^0$  і  $Q^0$

Обчислюємо геометричні характеристики осі арки (табл. 7.2).

За формулою (7.27) визначаємо переміщення  $EJ_0\delta_{11}$ . Оскільки для розглянутої в прикладі арки  $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$ , що більше  $\frac{1}{5}$ , не будемо враховувати вплив поздовжніх і поперечних сил:

$$EJ_0\delta_{11} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta s'_i =$$

$$= \left( 1,8^2 \frac{4}{0,709} + 5^2 \frac{4}{0,781} + 7,4^2 \frac{4}{0,855} + 9^2 \frac{4}{0,926} + 9,8^2 \frac{4}{0,98} \right) \cdot 2 = 2288,798 \text{ кНм}^3.$$

За формулою (7.28) знаходимо вільний член рівняння (7.23). Ординати  $y_{cp}$  кожної ділянки показані на рис. 7.15, а, а значення балкових згинальних моментів для тих самих точок – на рис. 7.15, б:

$$\begin{aligned}
 EJ_0 \Delta_{1F} &= - \sum_{i=1}^n y_i M_i^0 \Delta s'_i = \\
 &= - \left( 1,8 \cdot 560 \frac{4}{0,709} + 5 \cdot 1520 \frac{4}{0,781} + 7,4 \cdot 2160 \frac{4}{0,855} + 9 \cdot 2480 \frac{4}{0,926} + \right. \\
 &\quad + 9 \cdot 2480 \frac{4}{0,926} + 9,8 \cdot 2480 \frac{4}{0,98} + 9,8 \cdot 2160 \frac{4}{0,98} + 9 \cdot 1680 \frac{4}{0,926} + \\
 &\quad \left. + 7,4 \cdot 1200 \frac{4}{0,855} + 5 \cdot 720 \frac{4}{0,781} + 1,8 \cdot 240 \frac{4}{0,709} \right) = -529137,14 \text{ кНм}^3.
 \end{aligned}$$

Таблиця 7.2

Геометричні характеристики осі арки

$x_M$	$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x$	$\text{tg } \varphi = \frac{4f}{l^2}(l-2x)$	$\sin \varphi = \frac{\text{tg } \varphi}{(1 + \text{tg}^2 \varphi)^{0,5}}$	$\cos \varphi = \frac{1}{(1 + \text{tg}^2 \varphi)^{0,5}}$	$y_{cp} = \frac{y_{n+1} + y_n}{2}$
0	0	1,0	0,709	0,709	1,8
4	3,6	0,8	0,625	0,781	5,0
8	6,4	0,6	0,513	0,855	7,4
12	8,4	0,4	0,370	0,926	9,0
16	9,6	0,2	0,196	0,980	9,8
20	10,0	0	0	1,0	9,8
24	9,6	-0,2	-0,196	0,980	9,0
28	8,4	-0,4	-0,370	0,926	7,4
32	6,4	-0,6	-0,513	0,855	5,0
36	3,6	-0,8	-0,625	0,781	1,8
40	0	-1,0	-0,709	0,709	

Розв'язуємо канонічне рівняння (7.26) і визначаємо  $X_1$ :

$$X_1 = \frac{529137,14}{2288,798} = 231,186 \text{ кН}.$$

За формулами (7.37) обчислюємо ординати остаточних епюр (рис. 7.16).

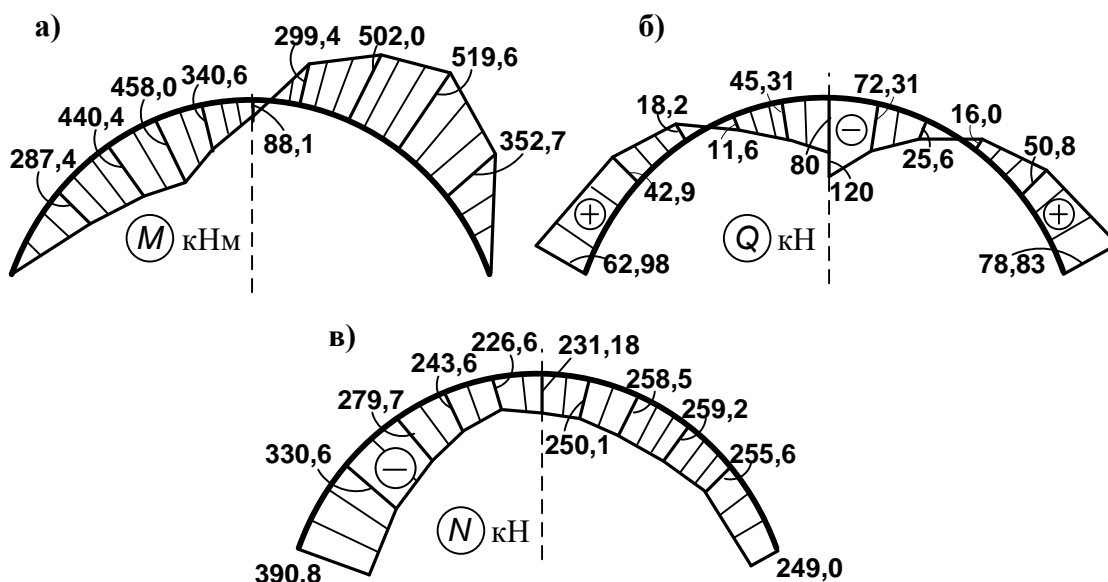


Рис. 7.16. Остаточні епюри моментів, поперечних і поздовжніх сил

### 7.5.2. Лінії впливу в перерізах двошарнірної арки

Побудуємо спочатку лінію впливу розпору  $X_1$ . З рівняння (7.23) маємо

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}}. \quad (7.39)$$

З формули (7.39) випливає, що лінія впливу  $X_1$  являє собою у визначеному масштабі лінію прогинів осі арки  $\delta_{11}$  під дією сили  $X_1 = 1$ . Цю лінію прогинів можна побудувати за допомогою фіктивних вантажів (див. п. 5.9). Заміняємо криволінійну вісь арки ламаною лінією (рис. 7.17, а), розділивши її на досить велику кількість рівних частин.

При побудові лінії  $X_1$  будемо нехтувати поздовжніми деформаціями. Тоді формула фіктивного вантажу має вигляд (див. п. 5.9)

$$w_n = \frac{\Delta s_n}{6EJ_n}(2y_n + y_{n-1}) + \frac{\Delta s_{n+1}}{6EJ_{n+1}}(2y_n + y_{n+1}). \quad (7.40)$$

Визначивши фіктивні вантажі за (7.40) для кожної точки розподілу осі арки, прикладемо ці вантажі до фіктивної арки (балки) і побудуємо від них епюру моментів. Нагадуємо, що фіктивні вантажі направляються у бік епюри згинальних моментів  $M_1$  (рис. 7.17, б). Щоб перейти до лінії впливу, необхідно, відповідно до формули (7.39) кожен ординату  $M^\Phi$  (рис. 7.17, в) розділити на постійне число  $(-1/\delta_{11})$ . Лінія впливу  $X_1$  показана на рис. 7.17, г.

Для побудови лінії впливу  $M_x$  (рис. 7.17, е, д) скористаємося першою формулою (7.37):

$$\text{Л.В. } M_x = \text{Л.В. } M_x^0 - \text{Л.В. } X_1 y_x . \quad (7.41)$$

Лінія впливу балкового згинального моменту показана на рис. 7.17, д, а остаточний графік – на рис. 7.17, е.

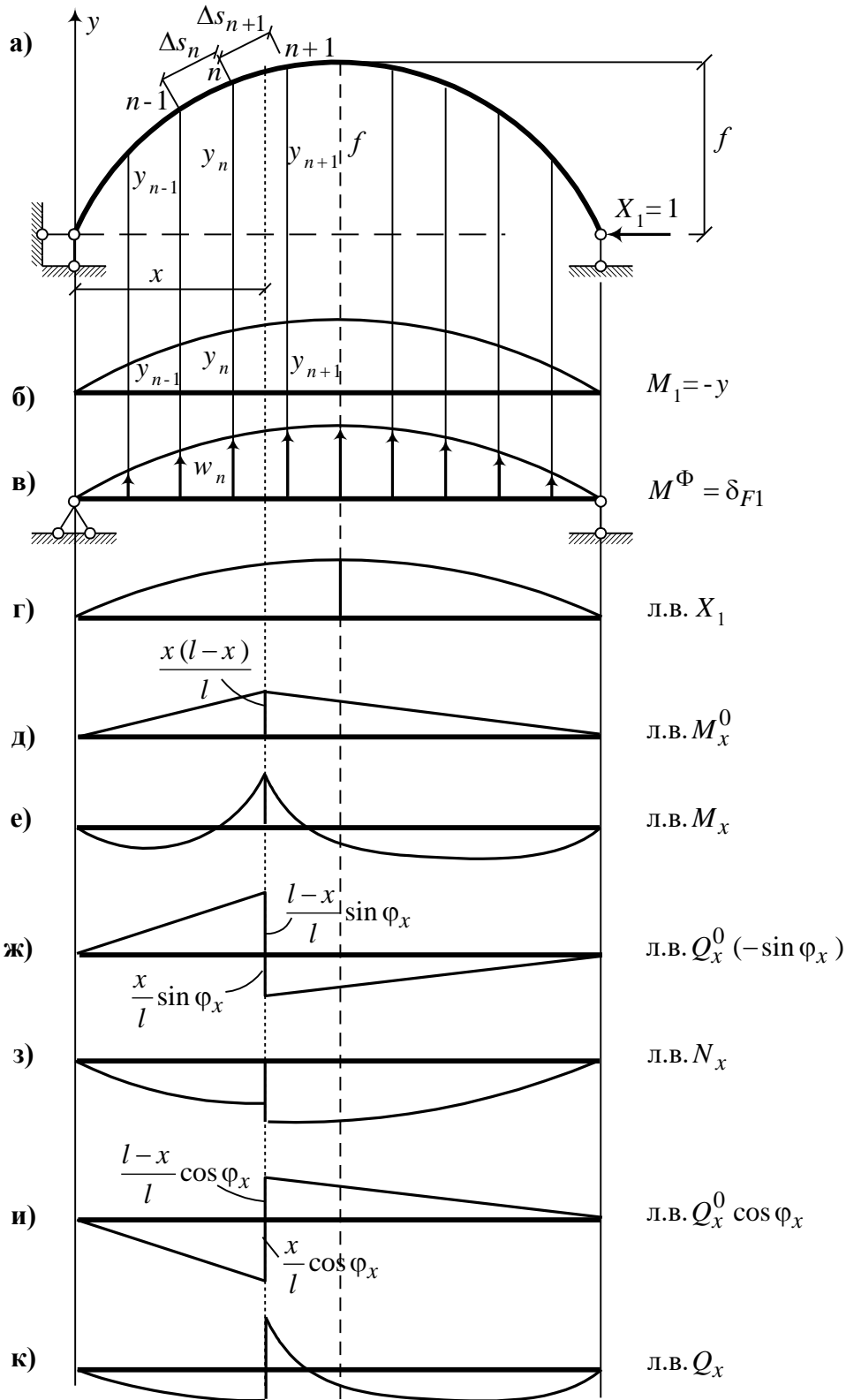


Рис. 7.17. До побудови ліній впливу у двошарнірній арці



Побудову лінії впливу  $N_x$  виконаємо за другою формулою (7.37):

$$\text{л.в. } N_x = -\text{л.в. } Q_x^0 \sin \varphi_x - \text{л.в. } X_1 \cos \varphi_x. \quad (7.42)$$

Пояснення до побудови графіка показане на рис. 7.17, ж, а сам графік на рис. 7.17, з.

Нарешті, лінію впливу поперечної сили побудуємо за третьою формулою (7.37):

$$\text{л.в. } Q_x = -\text{л.в. } Q_x^0 \cos \varphi_x - \text{л.в. } X_1 \sin \varphi_x. \quad (7.43)$$

Лінія впливу  $Q_x$  показана на рис. 7.17, и, к.

Побудовані лінії впливу дозволяють знайти те положення тимчасового навантаження, що викликає в перерізі  $x$  найбільші згинальні моменти, поперечні і поздовжні сили. Це необхідно, у свою чергу, для розрахунку напружено-деформованого стану арки (див. розд. 2).

## 7.6. Розрахунок безшарнірних арок

Арка з затисненими опорами називається безшарнірною. Безшарнірна арка тричі статично невизначна. Розрахунок її, так само як і двошарнірної, будемо робити методом сил. Основну систему виберемо, розітнувши арку по осі симетрії (див. п. 6.4). Частину невідомих винесемо на жорсткі консолі (рис. 7.18, а).

Система канонічних рівнянь буде мати такий вигляд (див. (6.1)):

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1F} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2F} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Для обчислення коефіцієнтів системи (7.44) побудуємо в основній системі одиничні епюри (рис. 7.18, б – к). Оскільки епюри  $M_1$  і  $M_2$ ,  $N_1$  і  $N_2$ ,  $Q_1$  і  $Q_2$ ,  $M_1$  і  $M_3$  взаємно ортогональні, а  $N_3 = 0$  і  $Q_3 = 0$ , переміщення  $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$ . Переміщення  $\delta_{23}$  буде дорівнювати нулю, якщо довжина жорсткої консолі  $y_0$  дорівнює

$$y_0 = \frac{\int_A^B y \frac{ds}{EJ}}{\int_A^B \frac{ds}{EJ}}. \quad (7.45)$$

Тоді система рівнянь (7.44) розділиться на три незалежні одне від одного рівняння

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} &= 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2F} &= 0; \\ X_3 \delta_{33} + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \quad (7.46)$$

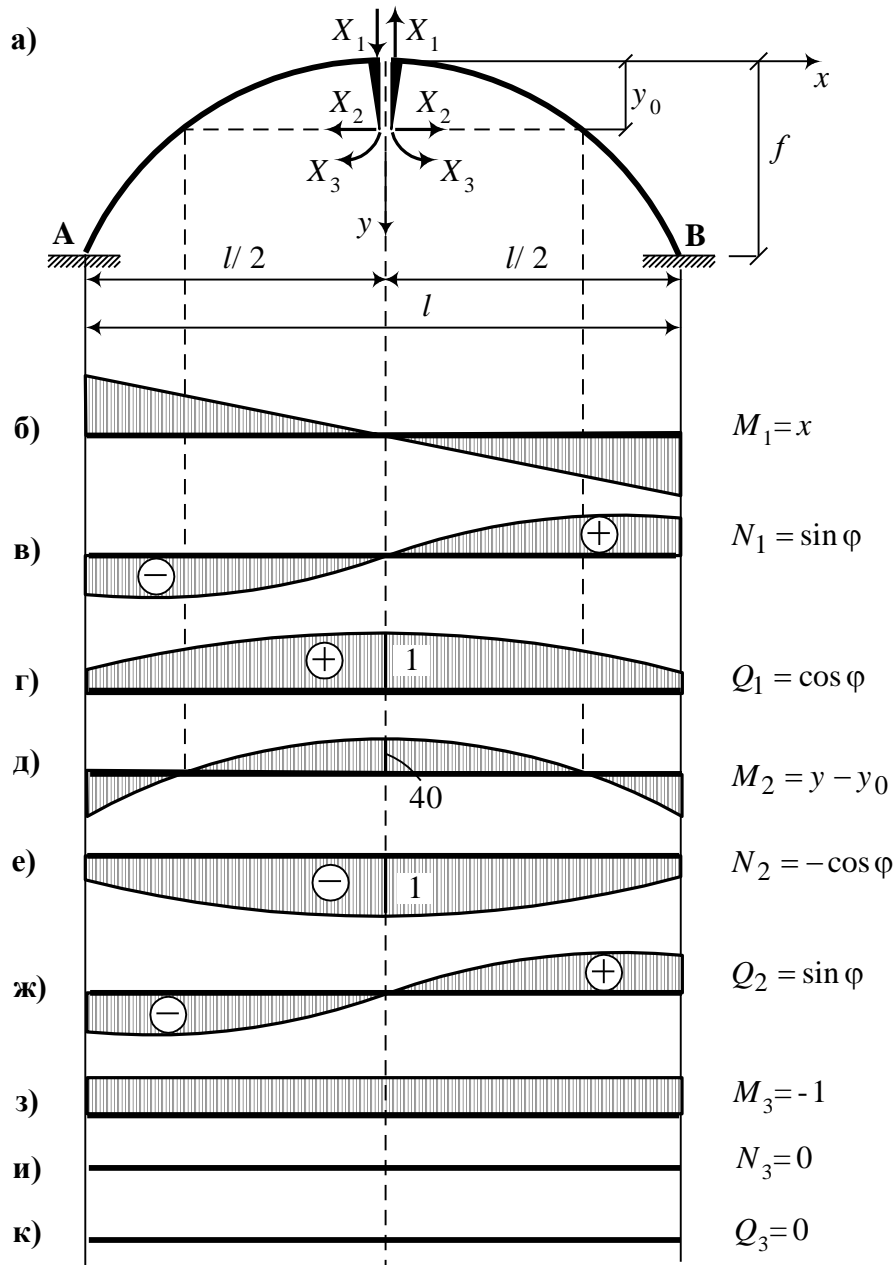


Рис. 7.18. Основна система безшарнірної арки й епюри від одиничних зусиль

На підставі формули (5.22) маємо

$$\delta_{11} = \int_A^B x^2 \frac{ds}{EJ} + \int_A^B \sin^2 \varphi \frac{ds}{EA} + \int_A^B \cos^2 \varphi \frac{\mu ds}{GA}; \quad (7.47)$$

$$\delta_{22} = \int_A^B (y - y_0)^2 \frac{ds}{EJ} + \int_A^B \cos^2 \varphi \frac{ds}{EA} + \int_A^B \sin^2 \varphi \frac{\mu ds}{GA}; \quad (7.48)$$

$$\delta_{33} = \int_A^B \frac{ds}{EJ}; \quad (7.49)$$

$$\Delta_{1F} = \int_A^B x M_x^0 \frac{ds}{EJ} - \int_A^B Q_x^0 \sin^2 \varphi \frac{ds}{EA} + \int_A^B Q_x^0 \cos^2 \varphi \frac{\mu ds}{GA}; \quad (7.50)$$

$$\Delta_{2F} = \int_A^B (y - y_0) M_x^0 \frac{ds}{EJ} + \int_A^B Q_x^0 \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EA} + \int_A^B Q_x^0 \sin \varphi \cos \varphi \frac{\mu ds}{GA}; \quad (7.51)$$

$$\Delta_{3F} = - \int_A^B M_x^0 \frac{ds}{EJ}. \quad (7.52)$$

Обчислення (7.47) – (7.52) зробимо так само, як і в двохарній арці, за допомогою наближеної заміни інтегрування чисельним підсумовуванням (рис. 7.19).

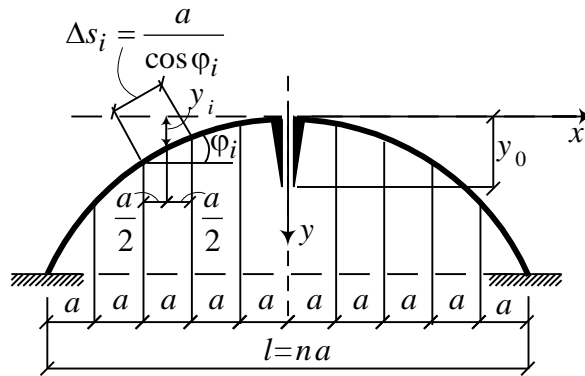


Рис. 7.19. Схема розбиття прогону арки на ділянки

Тоді зазначені формули набудуть такого вигляду:

$$y_0 = \left( \sum_{i=1}^n y_i \Delta s'_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n \Delta s'_i \right); \quad (7.53)$$

$$EJ_0 \delta_{11} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta s'_i + \sum_{i=1}^n \sin^2 \varphi_i \frac{J_0}{A_i} \Delta s_i + \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i \frac{\mu EJ_0}{GA_i} \Delta s_i; \quad (7.54)$$

$$EJ_0 \delta_{22} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 \Delta s'_i + \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i \frac{J_0}{A_i} \Delta s_i + \sum_{i=1}^n \sin^2 \varphi_i \frac{\mu EJ_0}{GA_i} \Delta s_i; \quad (7.55)$$

$$EJ_0 \delta_{33} = \sum_{i=1}^n \Delta s'_i; \quad (7.56)$$

$$EJ_0 \Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n x_i M_i^0 \Delta s'_i - \sum_{i=1}^n Q_i^0 \sin^2 \varphi_i \frac{J_0}{A_i} \Delta s_i + \sum_{i=1}^n Q_i^0 \cos^2 \varphi_i \frac{\mu EJ_0}{GA_i} \Delta s_i; \quad (7.57)$$

$$EJ_0 \Delta_{2F} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0) M_i^0 \Delta s'_i + \sum_{i=1}^n Q_i^0 \sin \varphi_i \cos \varphi_i \frac{J_0}{A_i} \Delta s_i + \sum_{i=1}^n Q_i^0 \sin \varphi_i \cos \varphi_i \frac{\mu EJ_0}{GA_i} \Delta s_i; \quad (7.58)$$

$$EJ_0 \Delta_{3F} = - \sum_{i=1}^n M_i^0 \Delta s'_i. \quad (7.59)$$

При розрахунку безшарнірної арки на температурні впливи система канонічних рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} &= 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2t} &= 0; \\ X_3 \delta_{33} + \Delta_{3t} &= 0. \end{aligned} \quad (7.60)$$

З урахуванням лише рівномірного нагрівання знайдемо

$$\Delta_{1t} = \int_A^B \alpha t \sin \varphi ds = 0; \quad (7.61)$$

$$\Delta_{2t} = -\int_A^B \alpha t \cos \varphi ds = -\alpha t l; \quad (7.62)$$

$$\Delta_{3t} = 0.$$

При розрахунку безшарнірної арки на зсув опорних зв'язків система канонічних рівнянь набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1c} &= 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2c} &= 0; \\ X_3 \delta_{33} + \Delta_{3c} &= 0. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Нехай заданий зсув зв'язків буде таким, як показано на рис. 7.20.

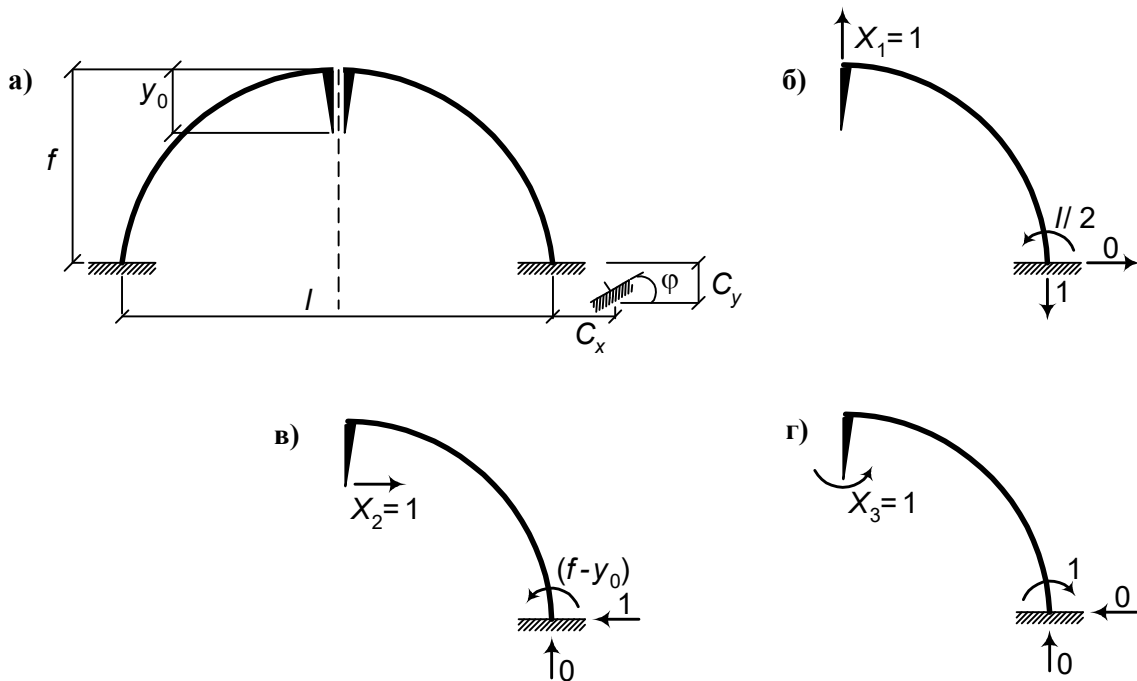


Рис. 7.20. До розрахунку безшарнірної арки на зсув опорних зв'язків

За формулою (5.31) знайдемо

$$\Delta_{1c} = -\left(C_y + \frac{l}{2}\varphi\right); \quad \Delta_{2c} = -[-C_x + (f - y_0)\varphi]; \quad \Delta_{3c} = \varphi. \quad (7.64)$$

Остаточні епюри  $M, Q, N$  будуються за залежностями, наведеними нижче.

Дія зовнішнього навантаження:

$$\begin{aligned} M_x &= xX_1 + (y - y_0)X_2 - X_3 + M_x^0; \\ N_x &= X_1 \sin \varphi_x - X_2 \cos \varphi_x - Q_x^0 \sin \varphi_x; \\ Q_x &= X_1 \cos \varphi_x + X_2 \sin \varphi_x + Q_x^0 \cos \varphi_x. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Температурні впливи:

$$\begin{aligned} M_x &= (y - y_0)X_2; \\ N_x &= -X_2 \cos \varphi_x; \\ Q_x &= X_2 \sin \varphi_x. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Зсуви опорних зв'язків:

$$\begin{aligned} M_x &= xX_1 + (y - y_0)X_2 - X_3; \\ N_x &= X_1 \sin \varphi_x - X_2 \cos \varphi_x; \\ Q_x &= X_1 \cos \varphi_x + X_2 \sin \varphi_x. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Перевірка правильності побудови епюр здійснюється на підставі залежностей, наведених у п. 6.1.

### 7.6.1. Лінії впливу в перерізах безшарнірної арки

Лінії впливу основних невідомих задаються формулами (7.46), у яких коефіцієнти  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$  є величинами постійними, що не залежать від положення рухомого вантажу  $F=1$ . Тому вся справа зводиться до побудови ліній впливу для переміщень  $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \Delta_{3F}$ . Користуючись принципом взаємності переміщень, переставимо індекси і перейдемо до визначення переміщень  $\delta_{F1}, \delta_{F2}, \delta_{F3}$  і ліній впливу:

$$\text{л.в. } X_1 = -\frac{\delta_{F1}}{\delta_{11}}; \quad \text{л.в. } X_2 = -\frac{\delta_{F2}}{\delta_{22}}; \quad \text{л.в. } X_3 = -\frac{\delta_{F3}}{\delta_{33}}. \quad (7.68)$$

Почнемо з побудови лінії впливу зворотно-симетричної невідомої  $X_1$  (рис. 7.21, а, б).

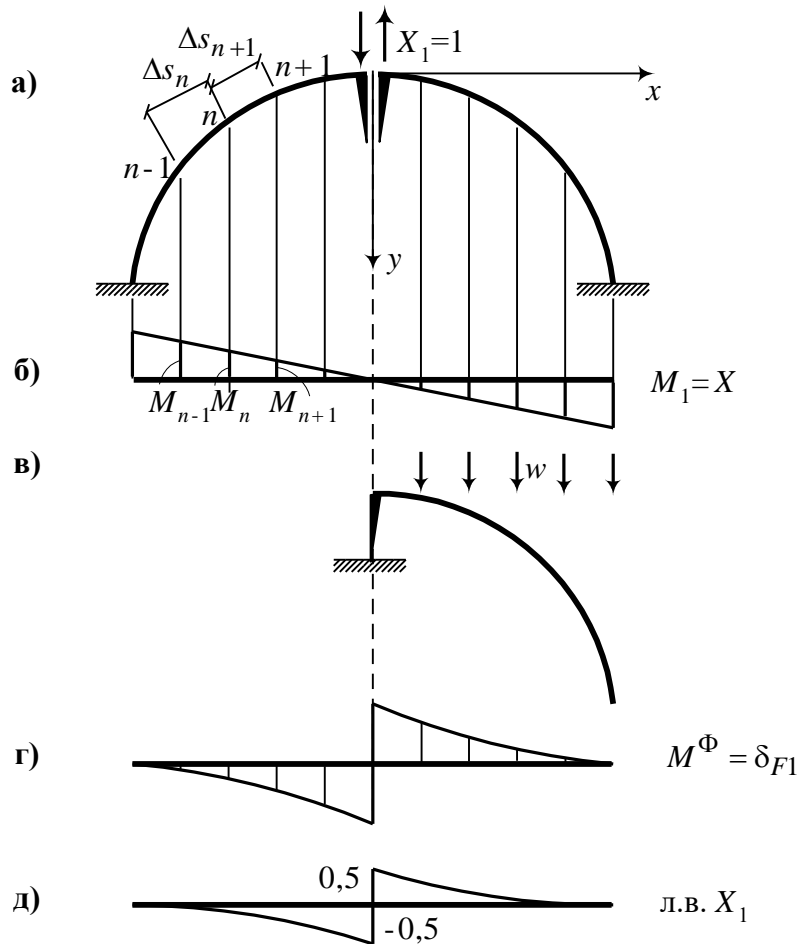


Рис. 7.21. Побудова лінії впливу  $X_1$

Обчислені за формулою (7.40) фіктивні вантажі прикладаємо до фіктивної пів-арки (рис. 7.21, в). Побудована тут еюра моментів являє собою лінію прогинів заданої споруди (рис. 7.21, г). Ординати лінії впливу  $X_1$  визначаються за формулою (7.68) для  $X_1$ . На рис. 7.21, д показана лінія впливу  $X_1$ .

Лінії впливу  $X_2$  і  $X_3$  будуються аналогічно. На рис. 7.22 показаний їхній остаточний вигляд.

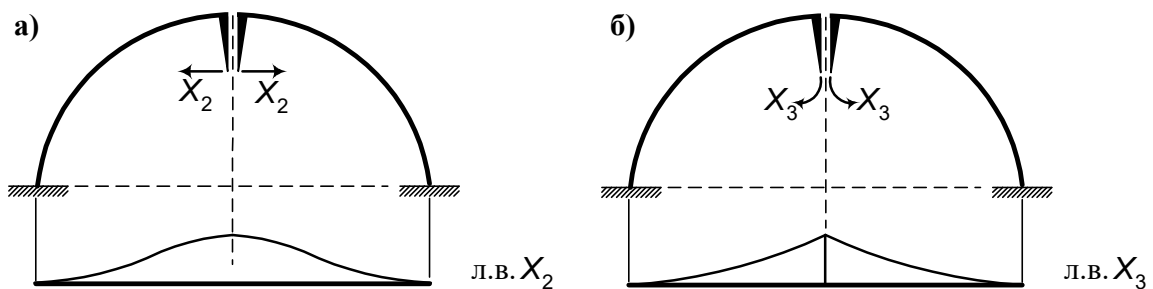


Рис. 7.22. Лінії впливу  $X_2$  і  $X_3$

Маючи у розпорядженні лінії впливу основних невідомих, можна, використовуючи залежності (7.65), побудувати лінії впливу  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $N_x$  у різних перерізах безшарнірної арки.

### 7.7. Розрахунок статично невизначних ферм

Ферми застосовуються як конструктивні елементи різних споруд. Вони в основному сприймають діючі на споруди навантаження. Ті ферми, що застосовуються на практиці, строго кажучи, статично невизначні, тому що не мають ідеальних шарнірних з'єднань у вузлах. Тут ми зупинимось на загальноприйнятому розрахунку ферм як систем з ідеально шарнірними вузлами (див. розд. 3) і будемо розглядати статично невизначні шарнірно-стержневі плоскі ферми, що знаходяться під дією вузлового навантаження. Як приклад використання ферм наведемо залізничний міст (рис. 7.23).

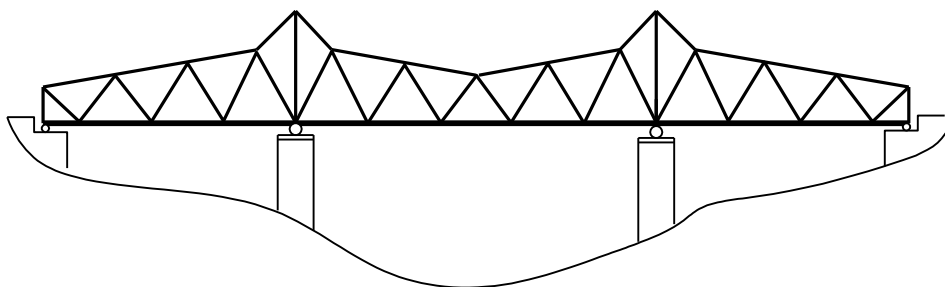


Рис. 7.23. Схема моста, прогонова будівля якого складена зі статично невизначних плоских ферм

Для прогонових будівель залізничних мостів статично невизначна балкова ферма доцільніша за ряд розрізних ферм, тому що має більш плавну пружну лінію і тому не зазнає ударів, що утворюються при переході осей потяга від однієї розрізної ферми на іншу. Крім того, статично невизначна ферма виявляється в цілому більш надійною, тому що аварії окремих її елементів (зайвих зв'язків) не призводять до настільки важких наслідків, як руйнування елементів статично визначних ферм. Звернемо увагу і на недоліки нерозрізних прогонових будівель, що полягають у чутливості до нерівномірного осідання опор. Цим пояснюється той факт, що наприкінці XIX і першій половині XX ст. не наважувалися будувати нерозрізні прогонові будівлі, не маючи достатньої впевненості в надійності роботи основ і фундаментів опор. У даний час фундаменти глибокого закладення дозволяють забезпечити необхідну надійність опор.

Нерозрізними фермами з рівнобіжними поясами перекривають звичайно прогони 80-150 м, а фермами зі збільшеною висотою над проміжними опорами – 100-250 м.

### 7.7.1. Розрахунок на дію зовнішнього навантаження

Розрізняють два види статично невизначних ферм – зовні і внутрішньо статично невизначні. Прикладом зовні статично невизначних ферм є нерозрізні ферми (рис. 7.23 і 7.24).

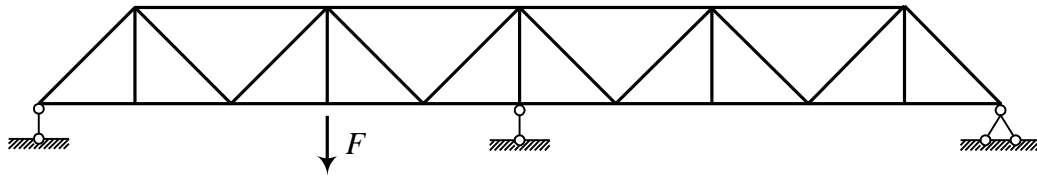


Рис. 7.24. Зовні статично невизначна ферма

До внутрішньо статично невизначних належать різні ферми зі складними решітками (рис. 7.25) і комбіновані системи.

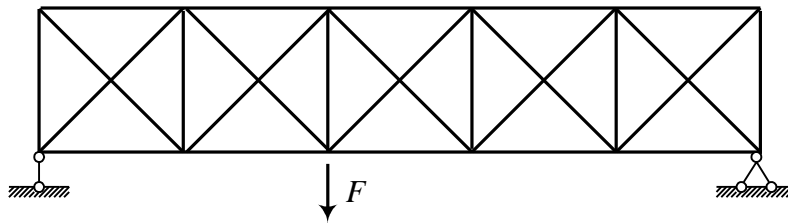


Рис. 7.25. Внутрішньо статично невизначна ферма

Поділ ферм на внутрішньо і зовні статично невизначні системи є умовним прийомом. Одну і ту саму систему можна розглядати як зовні, так і як внутрішньо статично невизначну. Число зайвих зв'язків статично невизначної ферми, як відомо (див. п. 1.5.1), може бути знайдене за такою формулою:

$$L = C_0 + C - 2Y, \quad (7.69)$$

де  $C_0$  – число опорних зв'язків;  $C$  – число стержнів ферми;  $Y$  – число вузлів ферми.

Нагадаємо відомий факт. Для того щоб плоска ферма була статично визначною відносно опорних пристроїв (зовнішня статична визначність), необхідно і досить трьох опорних зв'язків, тобто  $C_0$  для такої ферми дорівнює трьом.

Загальний хід розрахунку статично невизначної ферми при заданих розмірах поперечних перерізів стержнів той самий, що і для рамних систем (див. п. 6.1). Необхідно лише враховувати одну особливість при визначенні переміщень вузлів, яка полягає в тому, що в стержнях ферми виникають тільки поздовжні сили, і тоді в загальній формулі Максвелла-Мора (5.22)



$$\Delta_{KF} = \sum \int \frac{M_K M_F}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_K N_F}{EA} ds + \sum \int \frac{\mu Q_K Q_F}{GA} ds$$

слід утримувати член, що містить поздовжні сили (другий член). Викладемо порядок розрахунку один раз статично невизначної ферми (рис. 7.24). Звільнимо задану ферму від зайвого зв'язку, відкинувши проміжну опору (рис. 7.26). Реакцію цього зв'язку приймемо за зайву невідому  $X_1$ .

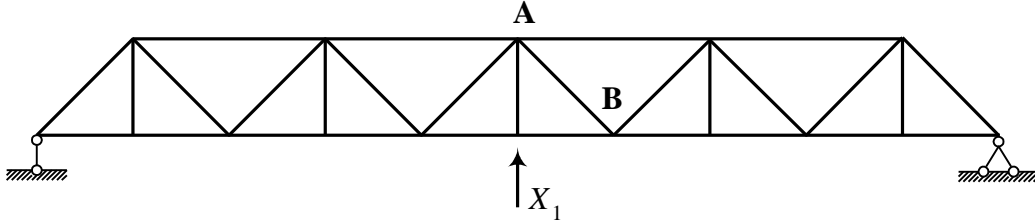


Рис. 7.26. Основна система заданої ферми

Для основної системи складемо канонічне рівняння деформацій. Фізичний зміст цього рівняння полягає в тому, що переміщення точки прикладання сили  $X_1$  по її напрямку від дії  $X_1$  і сили  $F$  дорівнює нулю:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0. \quad (7.70)$$

Тут  $\delta_{11}$  – переміщення у напрямку  $X_1$ , викликане цією силою, що дорівнює одиниці,  $X_1 = 1$ :

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^C \frac{N_{1i}^2 l_i}{EA_i}; \quad (7.71)$$

$\Delta_{1F}$  – переміщення у напрямку  $X_1$  від дії заданого навантаження  $F$ :

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^C \frac{N_{1i} N_{Fi} l_i}{EA_i}, \quad (7.72)$$

$N_{1i}$  – зусилля в  $i$ -му стержні від  $X_1 = 1$ ;  $N_{Fi}$  – зусилля в  $i$ -му стержні ферми від зовнішнього навантаження;  $l_i$  – довжина  $i$ -го стержня;  $C$  – число стержнів ферми;  $E$  – модуль пружності матеріалу, з якого виготовлені стержні.

З рівняння (7.70) з урахуванням (7.71) і (7.72) знаходимо

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1}^C \frac{N_{1i} N_{Fi} l_i}{EA_i}}{\sum_{i=1}^C \frac{N_{1i}^2 l_i}{EA_i}}. \quad (7.73)$$

Для ферм, стержні яких виконані з одного матеріалу, модуль пружності  $E$  можна винести за знак суми і скоротити. З рівняння (7.73) видно, що невідоме  $X_1$  залежить від співвідношень площ перерізів

стержнів, які складають ферму. Якщо ферма внутрішньо статично невизначна, то підсумовування у знаменнику формули (7.73) поширюється і на розсічений стержень.

Визначивши зайве невідоме  $X_1$  за (7.73), знаходимо зусилля в кожному  $i$ -му стержні ферми за формулою

$$N_i = N_{Fi} + N_{li} \cdot X_1. \quad (7.74)$$

Аналогічно здійснюється розрахунок  $n$  разів статично невизначної ферми. Один з варіантів основної системи для ферми, показаної на рис. 7.25, наведений на рис. 7.27.

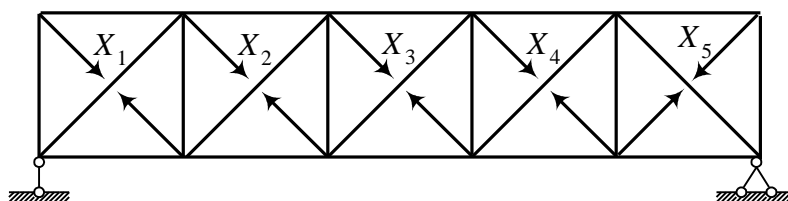


Рис. 7.27. Основна система для ферми на рис. 7.25

Основні невідомі визначають, використовуючи систему канонічних рівнянь (див., наприклад, (6.1)-(6.3), п. 6.5.2). Тут необхідно зазначити наступне. Чим більше зайвих стержнів містить ферма, тим більш важливе значення для спрощення всіх обчислень і побудов має вдалий вибір основної системи, що призводить до обернення на нуль якомога більшої кількості побічних переміщень (див. п. 6.4).

### 7.7.2. Розрахунок на задані температурні впливи

Канонічне рівняння у випадку температурного впливу має такий вигляд (див. п. 6.1.7):

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0. \quad (7.75)$$

Тут  $\delta_{11}$  визначається за формулою (7.71);

$$\Delta_{1t} = \alpha \sum_{i=1}^C N_{li} t_i l_i, \quad (7.76)$$

$\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, з якого виготовлена ферма;  $t_i$  – зміна температури стержня в порівнянні з початковою.

У тому випадку, коли всі стержні нагріті однаково, формула температурного переміщення (7.76) переходить у таку:

$$\Delta_{1t} = \alpha t \sum_{i=1}^C N_{li} l_i. \quad (7.77)$$

Реакція відкинутого зв'язку знаходиться так:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1l}}{\delta_{11}} = -\frac{E\alpha \sum_{i=1}^C N_{li} t_i l_i}{\sum_{i=1}^C \frac{N_{li}^2 l_i}{A_i}} . \quad (7.78)$$

Зусилля в кожному стержні статично невизначної ферми виразиться формулою

$$N_i = N_{li} X_1. \quad (7.79)$$

### 7.7.3. Розрахунок на зсув зв'язків (неточність складання)

Уявимо собі, що стержень **AB** (рис. 7.26) довший, ніж це потрібно за конфігурацією ферми, на величину  $a$ . Запишемо канонічне рівняння методу сил (див. п. 6.1.8):

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1c} = 0. \quad (7.80)$$

Переміщення у напрямку  $X_1$  від заданого впливу (подовження стержня **AB**) визначається так:

$$\Delta_{1c} = -R a ,$$

де  $R$  – зусилля у стержні **AB** від  $X_1 = 1$ . При цьому, якщо зусилля (реакція) у стержні **AB** – розтягальне, то перед добутком  $R a$  ставиться знак плюс, а якщо стискальне – мінус (див. п. 5.7).

Визначивши  $\delta_{11}$  за (7.71), знаходимо  $X_1$  з рівняння (7.80) і зусилля в кожному стержні статично невизначної ферми за (7.79).

### 7.7.4. Розрахунок на рухоме навантаження

Розглянемо, як і раніше, ферму з одним зайвим зв'язком. Оскільки зусилля у стержнях статично невизначної ферми виражаються через зайву невідому  $X_1$  (див. (7.74)), то при розрахунку на рухоме навантаження насамперед побудуємо лінію впливу зайвого невідомого.

Будемо виходити з канонічного рівняння (7.70). Оскільки йдеться про одиничне навантаження  $F = 1$ , замінимо в рівнянні (7.70)  $\Delta_{1F} = \delta_{1F}$  і далі, застосовуючи теорему про взаємність одиничних переміщень, одержимо  $\delta_{1F} = \delta_{F1}$ . З урахуванням цього з рівняння (7.70) знайдемо

$$X_1 = -\frac{\delta_{F1}}{\delta_{11}} . \quad (7.81)$$

Тут  $\delta_{F1}$  – вертикальне переміщення точки прикладення сили  $F = 1$  при даному її положенні, викликане дією нерухомої сили  $X_1 = 1$ .

З (7.81) випливає, що лінія впливу зайвого невідомого  $X_1$  може бути побудована як епюра вертикальних переміщень вузлів ферми  $\delta_{F1}$  діленням усіх її ординат на головне переміщення ( $-\delta_{11}$ ), яке визначається за формулою (7.71).

Для побудови епюри вертикальних переміщень скористаємося методом фіктивних вантажів (див. п. 5.9). Відповідно до цього методу для кожного вузла вантажного поясу ферми визначається фіктивний вантаж за формулою

$$W_j = \sum_{i=1}^C \frac{N_{1i} N_{\lambda i} l_i}{EA_i}, \quad j=1, \dots, K, \quad (7.82)$$

де  $N_{\lambda i}$  – зусилля в  $i$ -му стержні від двох рівних і протилежних за напрямком пар сил, кожної з моментом, що дорівнює одиниці, прикладених до двох сусідніх стержнів вантажного поясу ферми  $j-1, j+1$  (рис. 7.28, б);  $N_{1i}$  – зусилля в  $i$ -му стержні ферми від  $X_1 = 1$ ;  $K$  – число завантажених вузлів (рис. 7.28, а).

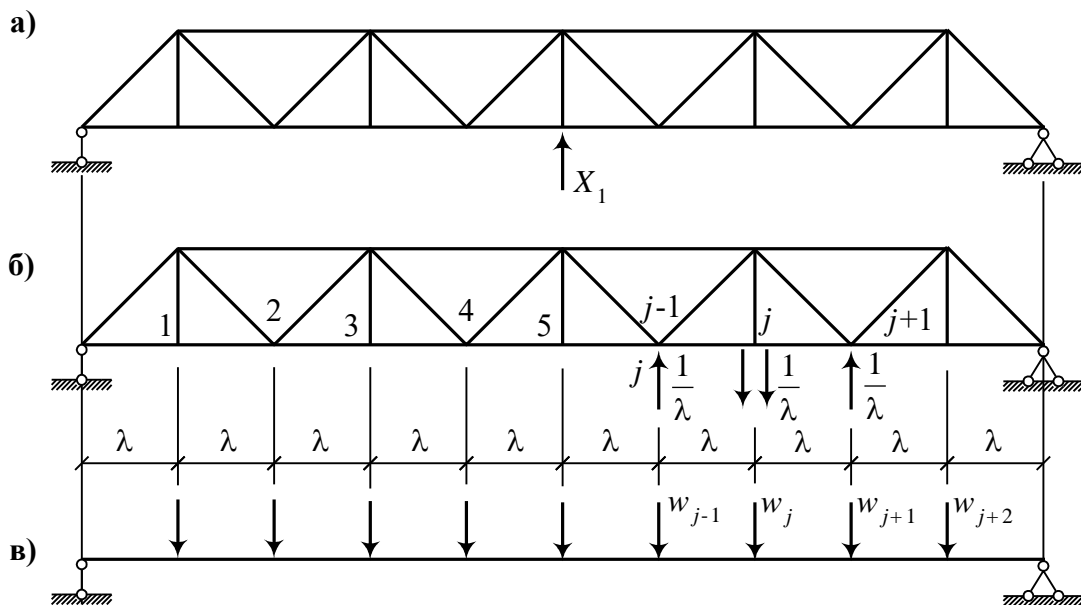


Рис. 7.28. До визначення фіктивних вантажів у вузлах ферми

Знайдені за (7.82) фіктивні вантажі прикладаються до фіктивної балки (рис. 7.28, в; див. п. 5.9).

Побудована епюра згинальних моментів для фіктивної балки при навантаженні фіктивними вантажами і буде епюрою вертикальних переміщень  $\delta_{F1}$ . Зауважимо, що при побудові епюр прогинів у фіктивній балці необхідно пам'ятати про те, що переміщення надпорних вузлів ферми повинні дорівнювати нулю. Для виконання цієї умови у відповідних

перерізах фіктивної балки слід прикласти згинальні моменти, що дорівнюють за величиною і зворотні за знаком деформаціям опорних стійок (див. п. 5.9.3).

Лінію впливу в довільному стержні статично невизначної ферми одержуємо за лінією впливу зайвого невідомого  $X_1$ , користуючись формулою (7.74):

$$\text{л.в. } N_i = \text{л.в. } N_{Fi} + N_{1i} \cdot \text{л.в. } X_1, \quad (7.83)$$

де л.в.  $N_{Fi}$  – лінія впливу в основній системі;  $N_{1i}$  – зусилля в стержні від  $X_1 = 1$ .

### 7.7.5. Приклад розрахунку

Розрахункова схема заданої ферми наведена на рис. 7.29. Ферма має один зайвий зв'язок. Основна система показана на рис. 7.30.

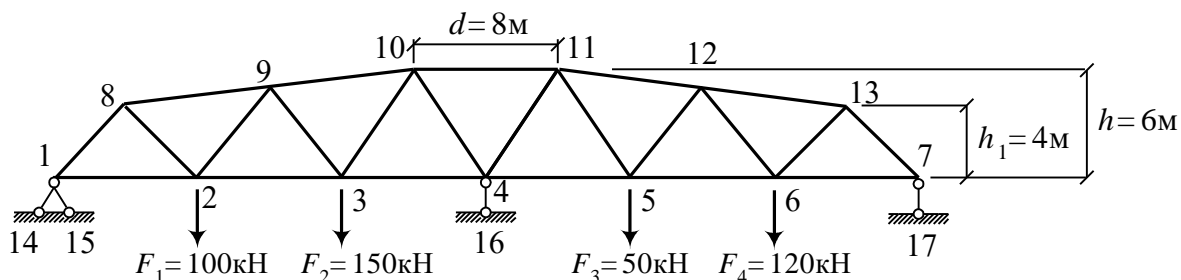


Рис. 7.29. Розрахункова схема ферми

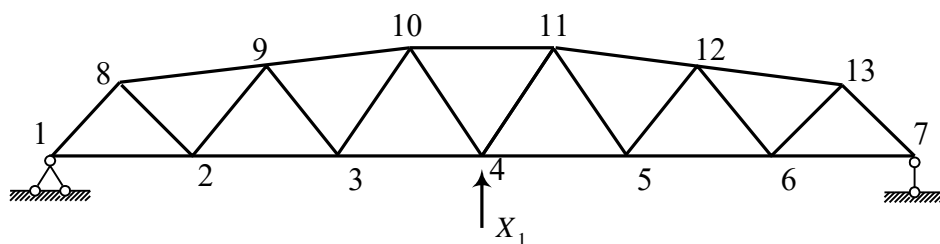


Рис. 7.30. Основна система для ферми на рис. 7.29

Канонічне рівняння має вигляд (7.70). Довжини стержнів наведені в табл. 7.3.

Знайдемо зусилля в кожному стержні ферми в основній системі від сили  $X_1 = 1$  (див. рис. 7.31).

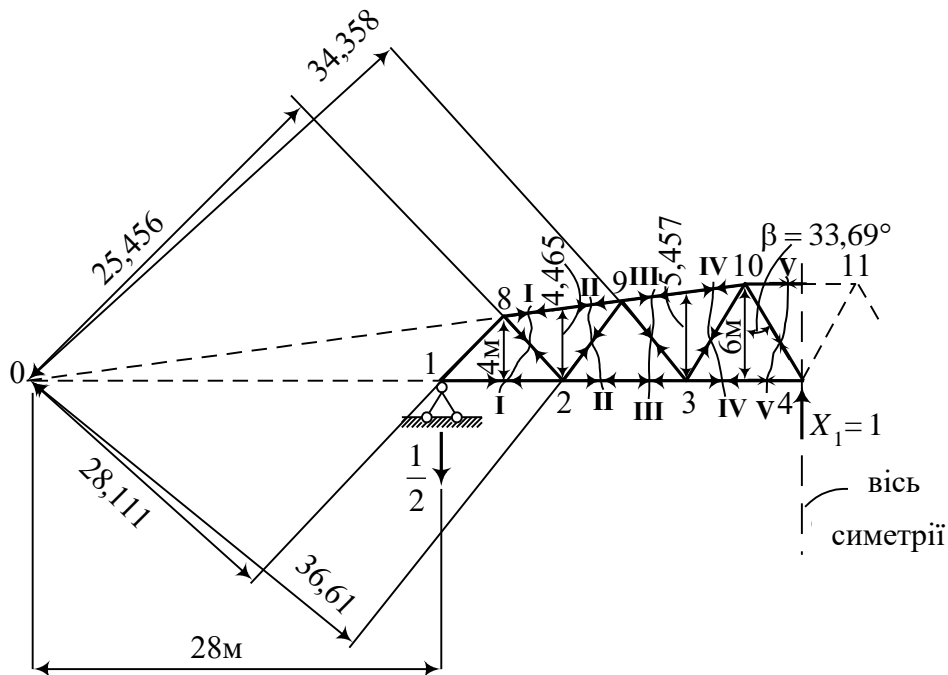


Рис. 7.31. До визначення зусиль від  $X_1 = 1$

Зусилля в стержні 1-8. Виріжемо вузол 1 (рис. 7.32).

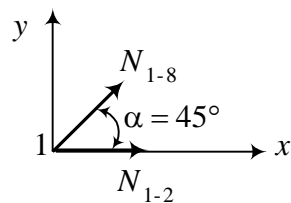


Рис. 7.32. Схема зусиль, що діють у вузлі 1

Спроекуємо всі сили, що діють у вузлі 1, на вертикальну вісь:

$$\sum F_y = 0: \frac{1}{2} - N_{1-8} \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси

$$N_{1-8} = \frac{1}{2 \cdot 0,707} = 0,707.$$

Зусилля в стержні 1-2.

$$\sum M_8^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 4 + N_{1-2} \cdot 4 = 0; \quad N_{1-2} = -0,5.$$

Зусилля в стержні 8-2.

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 28 + N_{8-2} \cdot 25,456 = 0; \quad N_{8-2} = -0,55.$$

Зусилля в стержні 8-9.

$$\sum M_2^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 8 - N_{8-9} \cdot 4,465 = 0; \quad N_{8-9} = 0,896.$$

Зусилля в стержні 9-2.

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 28 - N_{9-2} \cdot 28,111 = 0; \quad N_{9-2} = 0,498.$$

Зусилля в стержні 2-3.

$$\sum M_9^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 12 + N_{2-3} \cdot 5 = 0; \quad N_{2-3} = -1,2.$$

Зусилля в стержні 9-3.

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 28 + N_{9-3} \cdot 34,358 = 0; \quad N_{9-3} = -0,407.$$

Зусилля в стержні 9-10.

$$\sum M_3^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 16 - N_{9-10} \cdot 5,457 = 0; \quad N_{9-10} = 1,465.$$

Зусилля в стержні 3-10.

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 28 - N_{3-10} \cdot 36,610 = 0; \quad N_{3-10} = 0,382.$$

Зусилля в стержні 3-4.

$$\sum M_{10}^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 48 + N_{3-4} \cdot 6 = 0; \quad N_{3-4} = -1,667.$$

Зусилля в стержні 10-11.

$$\sum M_4^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} \cdot 24 - N_{10-11} \cdot 6 = 0; \quad N_{10-11} = 2,0.$$

Зусилля в стержні 10-4.

$$\sum F_y^{\text{лів}} = 0: \frac{1}{2} + N_{10-4} \cdot \cos \beta = 0; \quad N_{10-4} = -0,601.$$

Зусилля в інших стержнях ферми немає потреби визначати, тому що навантаження і ферма симетричні. Знайдені зусилля занесемо в табл. 7.3.

Знайдемо тепер зусилля в стержнях основної системи ферми (рис. 7.30) від зовнішнього навантаження (рис. 7.33).

Зусилля в стержні 1-8. Виріжемо вузол 1 (рис. 7.33). Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_y = 0: \quad 220 + N_{1-8} \sin 45^\circ = 0; \quad N_{1-8} = -311,174 \text{ кН.}$$

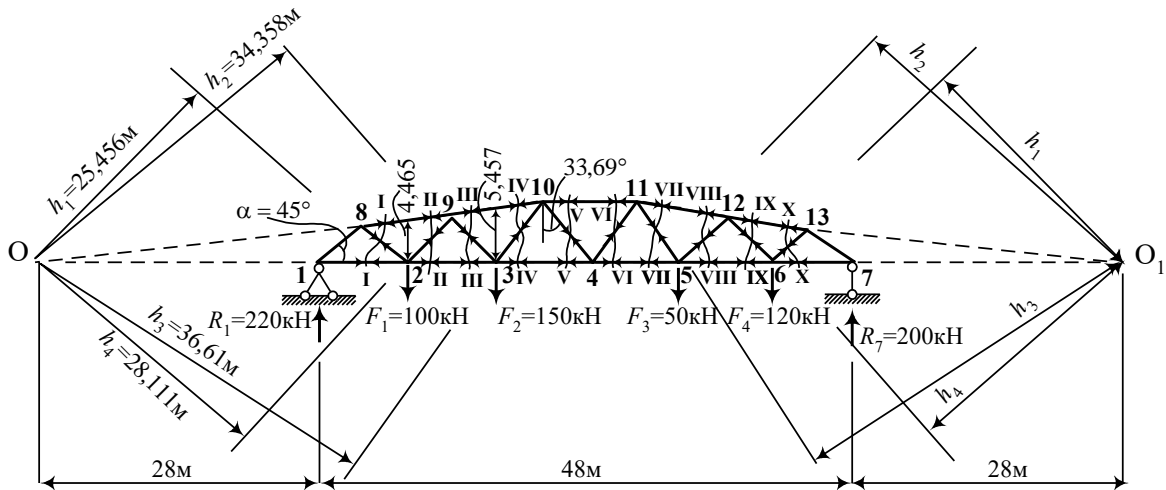


Рис. 7.33. До визначення зусиль від зовнішнього навантаження

Зусилля в стержні 1-2. Перетин I-I:

$$\sum M_8^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 4 - N_{1-2} \cdot 4 = 0; \quad N_{1-2} = 220 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 8-2. Перетин I-I:

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 28 - N_{8-2} \cdot 25,456 = 0; \quad N_{8-2} = 241,986 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 8-9. Перетин I-I:

$$\sum M_2^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 8 + N_{8-9} \cdot 4,465 = 0; \quad N_{8-9} = -394,177 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 9-2. Перетин II-II:

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 28 - 100 \cdot 36 + N_{9-2} \cdot 28,111 = 0; \quad N_{9-2} = -91,067 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 2-3. Перетин II-II:

$$\sum M_9^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 12 - 100 \cdot 4 - N_{2-3} \cdot 5 = 0; \quad N_{2-3} = 448 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 9-10. Перетини III-III, IV-IV:

$$\sum M_3^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 16 - 100 \cdot 8 + N_{9-10} \cdot 5,457 = 0; \quad N_{9-10} = -498,442 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 9-3. Перетин III-III:

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 28 - 100 \cdot 36 - N_{9-3} \cdot 34,358 = 0; \quad N_{9-3} = 74,509 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 3-10. Перетин IV-IV:

$$\sum M_0^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 28 - 100 \cdot 36 - 150 \cdot 44 + N_{3-10} \cdot 36,61 = 0; \quad N_{3-10} = 110,352 \text{ кН}$$

Зусилля в стержні 3-4. Перетин IV-IV:

$$\sum M_{10}^{\text{лів}} = 0: 220 \cdot 20 - 100 \cdot 12 - 150 \cdot 4 - N_{3-4} \cdot 6 = 0; \quad N_{3-4} = 433,333 \text{ кН.}$$



Зусилля в стержні 10-4. Перетин V-V:

$$\sum F_y^{\text{ліб}} = 0: 220 - 100 - 150 - N_{10-4} \cos 33,69^\circ = 0; \quad N_{10-4} = -36,058 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 10-11. Перетин V-V:

$$\sum M_4^{\text{ліб}} = 0: 220 \cdot 24 - 100 \cdot 16 - 150 \cdot 8 + N_{10-11} \cdot 6 = 0; \quad N_{10-11} = -413,333 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 11-4. Перетин VI-VI:

$$\sum F_y^{\text{пр}} = 0: 200 - 50 - 120 - N_{11-4} \cos 33,69^\circ = 0; \quad N_{11-4} = 36,058 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 4-5. Перетин VI-VI:

$$\sum M_{11}^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 20 - 120 \cdot 12 - 50 \cdot 4 - N_{4-5} \cdot 6 = 0; \quad N_{4-5} = 393,333 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 11-5. Перетин VII-VII:

$$\sum M_{01}^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 28 - 120 \cdot 36 - 50 \cdot 44 + N_{11-5} \cdot 36,61 = 0; \quad N_{11-5} = 25,13 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 11-12. Перетин VII-VII:

$$\sum M_5^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 16 - 120 \cdot 8 + N_{11-12} \cdot 5,457 = 0; \quad N_{11-12} = -410,482 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 12-5. Перетин VIII-VIII:

$$\sum M_0^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 28 - 120 \cdot 36 - N_{12-5} \cdot 34,358 = 0; \quad N_{12-5} = 37,255 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 5-6. Перетин VIII-VIII:

$$\sum M_{12}^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 12 - 120 \cdot 4 - N_{5-6} \cdot 5 = 0; \quad N_{5-6} = 384 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 12-6. Перетин IX-IX:

$$\sum M_{01}^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 28 - 120 \cdot 36 + N_{12-6} \cdot 28,111 = 0; \quad N_{12-6} = -45,534 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 12-13. Перетин IX-IX:

$$\sum M_0^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 8 + N_{12-13} \cdot 4,465 = 0; \quad N_{12-13} = -358,343 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 6-13. Перетин X-X:

$$\sum M_{01}^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 28 - N_{6-13} \cdot 25,456 = 0; \quad N_{6-13} = 219,987 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 6-7. Перетин X-X:

$$\sum M_{13}^{\text{пр}} = 0: 200 \cdot 4 - N_{6-7} \cdot 4 = 0; \quad N_{6-7} = 200 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержні 13-7. Виріжемо вузол 7 (рис. 7.33) і розглянемо умову його рівноваги:

$$\sum F_y = 0: 200 + N_{13-7} \sin 45^\circ = 0; \quad N_{13-7} = -282,885 \text{ кН.}$$

Знайдені зусилля занесемо в табл. 7.3.

Таблиця 7.3

Зусилля у стержнях статично невизначної ферми  
і перевірка правильності визначення зусиль

№ стержня	$l_i$ , м	Площа перерізу стержня	$N_{1i}$	$\frac{N_{1i}^2 l_i}{EA_i}$	$N_{Fi}$ , кН	$\frac{N_{Fi} N_{1i} l_i}{EA_i}$	$N_i$ , кН	$\frac{N_i N_{1i} l_i}{EA_i}$
1-8	5,657	2А	0,707	1,414	-311,74	-622,270	-126,059	-252,086
1-2	8,0	2А	-0,5	1,0	220,0	-440,0	89,084	-178,168
8-2	5,657	А	-0,55	1,711	241,986	-752,903	97,979	-304,847
8-9	8,062	2А	0,896	3,236	-394,177	-1423,679	-159,576	-576,353
2-3	8,0	2А	-1,2	5,76	448,0	-2150,40	133,803	-642,254
2-9	6,403	А	0,498	1,588	-91,067	-290,385	39,325	125,395
9-3	6,403	А	-0,407	1,061	74,509	-194,172	-32,056	83,539
9-10	8,062	2А	1,466	8,663	-498,442	-2945,516	-114,598	-677,211
3-10	7,211	А	0,382	1,052	110,352	303,976	210,371	579,488
3-4	8,0	2А	-1,667	11,116	433,333	-2889,464	-3,139	20,931
10-11	8,0	2А	2,0	16,0	-413,333	-3306,664	110,329	882,632
10-4	7,211	А	-0,601	2,603	-36,058	156,269	-193,418	838,237
4-11	7,211	А	-0,601	2,605	36,058	-156,269	-121,302	525,7
4-5	8,0	2А	-1,667	11,116	393,333	-2620,744	-43,139	287,651
11-5	7,211	А	0,382	1,052	25,130	69,223	125,149	344,736
11-12	8,062	2А	1,466	8,663	-410,482	-2425,721	-26,638	-157,416
5-12	6,403	А	-0,407	1,061	37,255	-97,087	-69,310	180,623
5-6	8,0	2А	-1,2	5,76	384,0	-1843,20	69,803	-335,054
12-6	6,403	А	0,498	1,588	-45,334	-144,556	85,108	271,384
12-13	8,062	2А	0,896	3,236	-358,343	-1294,255	-123,742	-446,928
6-13	5,657	А	-0,55	1,711	219,987	-684,457	75,980	-236,4
6-7	8,0	2А	-0,5	1,0	200,0	-400,0	69,085	-138,17
13-7	5,657	2А	0,707	1,414	-282,885	-565,699	-97,770	-195,516
				$\sum_{i=1}^n = \frac{94,412}{EA}$		$\sum_{i=1}^n = -\frac{24719,973}{EA}$		$\sum_{i=1}^n = -\frac{0,087}{EA}$

За формулою (7.73) знаходимо  $X_1$ , кН,

$$X_1 = \frac{24719,973}{94,412} = 261,831.$$

За формулою (7.74) визначаємо зусилля у стержнях статично невизначної ферми (див. табл. 7.3) і здійснюємо перевірку правильності визначення зусиль (остання графа табл. 7.3).

### 7.7.5.1. Визначення зусиль у стержнях ферм за допомогою ліній впливу

Спочатку побудуємо лінію впливу  $X_1$ . У стержнях основної системи ферми знайдемо зусилля від пар сил з моментом, що дорівнює одиниці, прикладених по черзі у вузлах 2, 3, 4 (рис. 7.34, а, б, в).

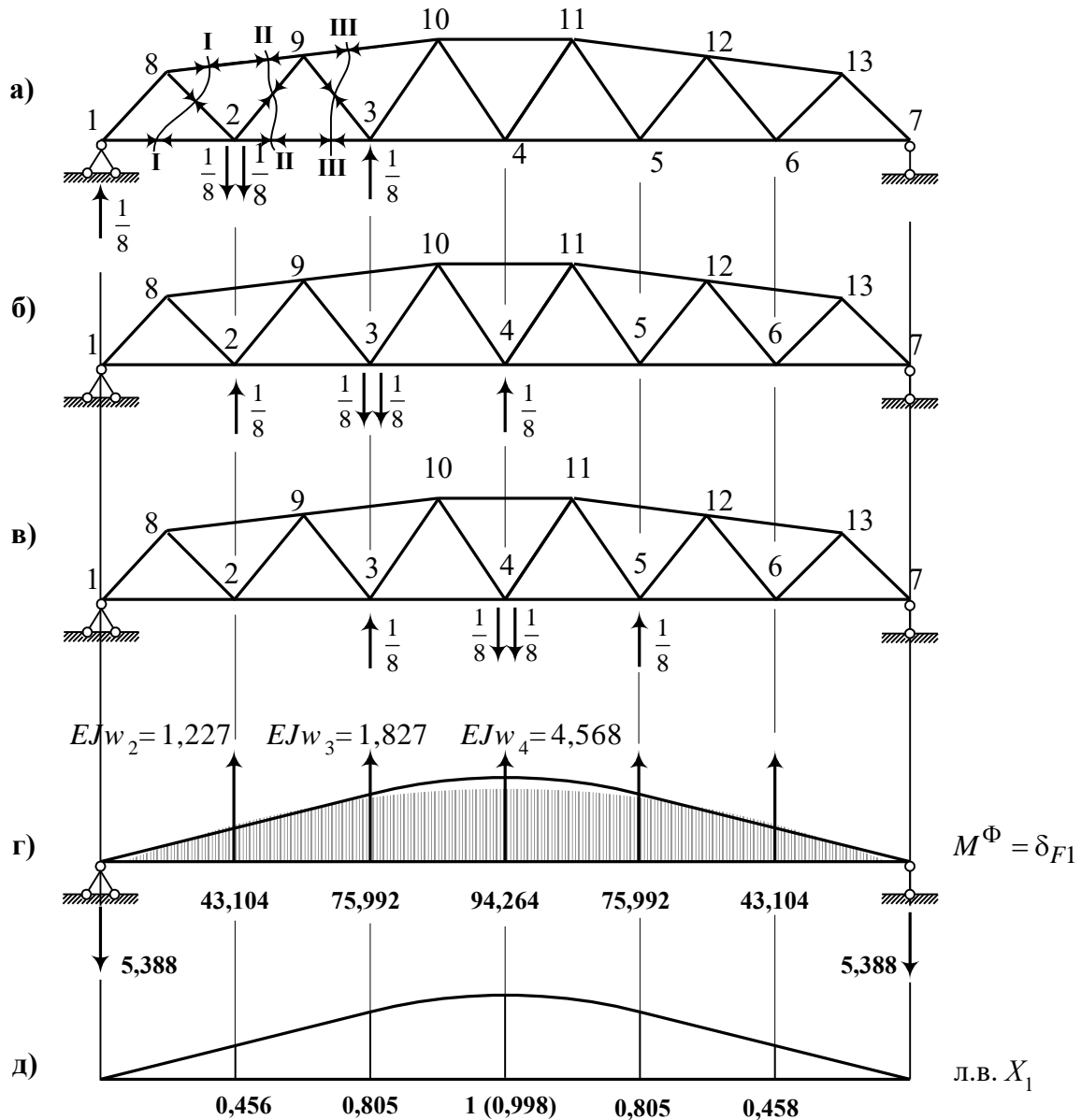


Рис. 7.34. Визначення фіктивних вантажів і побудова лінії впливу  $X_1$

Зусилля у стержнях ферми від одиничних пар наведені в табл. 7.4.

Отримані в табл. 7.4 фіктивні вантажі прикладаємо до шарнірно опертій балки (рис. 7.34, г) і будуємо епюру моментів.

## До визначення фіктивних вантажів

№ стержня	Зусилля від одиничних пар, прикладених у вузлах					
	Вузол 2		Вузол 3		Вузол 4	
	$\bar{N}_{\lambda i}$	$\frac{\bar{N}_{\lambda i} N_{li} l_i}{EA_i}$	$\bar{N}_{\lambda i}$	$\frac{\bar{N}_{\lambda i} N_{li} l_i}{EA_i}$	$\bar{N}_{\lambda i}$	$\frac{\bar{N}_{\lambda i} N_{li} l_i}{EA_i}$
1-8	-0,177	-0,354	0	0	0	0
1-2	0,125	0,25	0	0	0	0
8-2	0,137	-0,426	0	0	0	0
8-9	-0,224	-0,809	0	0	0	0
2-3	0,1	-0,48	0,1	-0,48	0	0
2-9	0,196	0,625	-0,16	-0,51	0	0
9-3	-0,16	0,417	0,131	-0,341	0	0
9-10	0	0	-0,183	-1,081	0	0
3-10	0	0	0,177	0,488	-0,15	-0,413
3-4	0	0	0,083	-0,553	0,083	-0,553
10-11	0	0	0	0	-0,167	-1,336
10-4	0	0	-0,15	0,65	0,15	0,65
4-11	0	0	0	0	0,15	-0,65
4-5	0	0	0	0	0,083	-0,553
11-5	0	0	0	0	-0,15	-0,413
11-12	0	0	0	0	0	0
5-12	0	0	0	0	0	0
5-6	0	0	0	0	0	0
12-6	0	0	0	0	0	0
12-13	0	0	0	0	0	0
6-13	0	0	0	0	0	0
6-7	0	0	0	0	0	0
13-7	0	0	0	0	0	0
		$\sum_{i=1}^n = \frac{1,277}{EA}$		$\sum_{i=1}^n = \frac{1,827}{EA}$		$\sum_{i=1}^n = \frac{4,568}{EA}$

Лінії впливу  $X_1$  будуються відповідно до формули (7.81). Отримана над силою  $X_1$  ордината лінії впливу дорівнює 0,998. Похибка складає 0,2 %. За побудованою лінією впливу знайдемо величину  $X_1$  від заданого навантаження (див. рис. 7.30, а), кН:

$$X_1 = 100 \cdot 0,456 + 150 \cdot 0,805 + 50 \cdot 0,805 + 120 \cdot 0,456 = 261,32.$$

У результаті статичного розрахунку значення  $X_1$  вийшло рівним  $X_1 = 261,831$ . Похибка складає 0,19 %.

Побудуємо тепер лінії впливу зусиль у стержнях заданої статично невизначної ферми. Відповідно до формули (7.83) шукана лінія впливу являє собою суму двох ліній впливу: лінії впливу зусиль в основній системі ферми і лінії впливу  $X_1$  (рис. 7.34, д), усі ординати якої помножені на постійне число – зусилля в основній системі від  $X_1 = 1$ .

Лінія впливу  $N_{1-8}$  (рис. 7.35).

Для побудови лінії впливу  $N_{1-8}^0$  (символ  $N_{1-8}^0$  означає, що лінія впливу будується в основній системі) скористаємося способом вирізання вузлів (рис. 7.36).

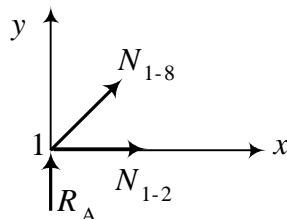


Рис. 7.36. Схема зусиль, що діють на вузол 1

Розглянемо два положення вантажу  $F=1$ : вантаж у вузлі 1,  $R_1=1$ ,  $N_{1-8}=0$ ; вантаж поза вузлом (на ділянці 2-7),  $\sum F_y=0$ ,  $R_1 + N_{1-8}^0 \sin 45^\circ = 0$ ;  $N_{1-8}^0 = -R_1 \frac{1}{0,707}$ . Отже, лінія впливу  $N_{1-8}^0$  на ділянці 2-7 буде такою самою, як і лінія впливу  $R_1$ , усі ординати якої помножені на постійне число  $\left(-\frac{1}{0,707}\right)$  (див. рис. 7.35, б). Тепер лінію впливу  $X_1$  помножимо на 0,707 (див. рис. 7.35, в). Лінія впливу  $N_{1-8}$  у заданій фермі дорівнює сумі побудованих ліній впливу (рис. 7.35, г). Обчислимо за лінією впливу зусилля  $N_{1-8}$  і порівняємо з результатом аналітичного розрахунку (табл. 7.3), кН:

$$N_{1-8} = -100 \cdot 0,856 - 150 \cdot 0,374 + 50 \cdot 0,097 + 120 \cdot 0,086 = -126,53 .$$

Похибка складає 0,37 %.

Лінія впливу  $N_{9-2}$ . Для визначення зусиль від сили  $F=1$  у стержні 9-2 скористаємося перетином II-II (див. рис. 7.33): вантаж на ділянці 1- 2,  $\sum M_0^{\text{пр}} = 0$ ,  $R_7 \cdot 76 - N_{9-2}^0 \cdot 28,111 = 0$ ,  $N_{9-2}^0 = 2,704 R_7$ ; вантаж на ділянці 3-7,  $\sum M_0^{\text{лів}} = 0$ ,  $R_1 \cdot 28 + N_{9-2}^0 \cdot 28,111 = 0$ ,  $N_{9-2}^0 = -0,996 R_1$ . Лінія впливу  $N_{9-2}^0$  показана на рис. 7.35, д. Відповідно до табл. 7.3 ординати лінії впливу  $X_1$  помножимо на 0,498 (див. рис. 7.35, е). Лінія впливу  $N_{9-2}$  показана на рис. 7.35, ж. Знайдемо зусилля  $N_{9-2}$  за побудованою лінією впливу, кН:

$$N_{9-2} = 100 \cdot 0,678 - 150 \cdot 0,263 + 50 \cdot 0,069 + 120 \cdot 0,061 = 39,12 .$$

Похибка складає  $\frac{39,325 - 39,12}{39,325} 100 = 0,52\%$ .

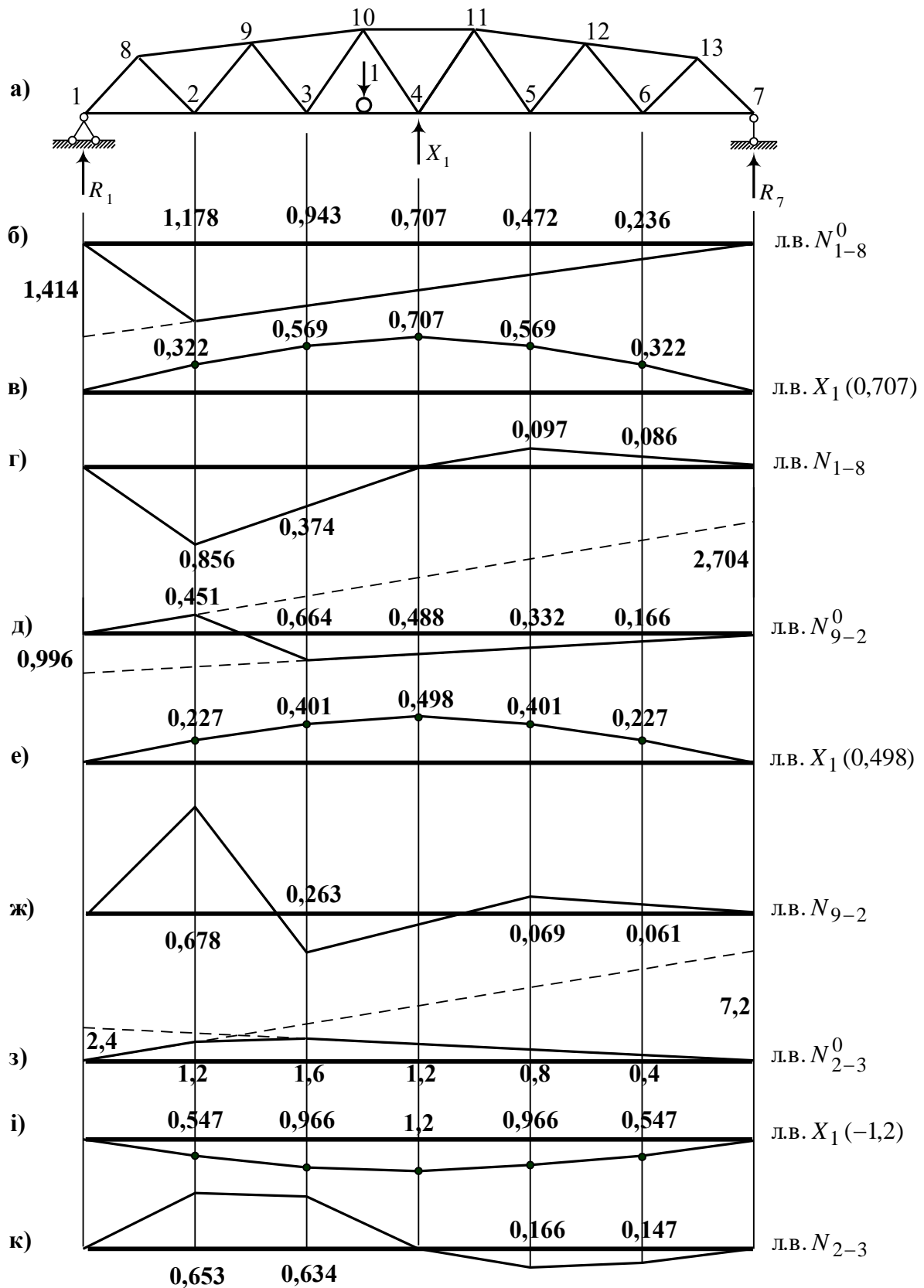


Рис. 7.35. Побудова ліній впливу зусиль у стержнях заданої ферми

Лінія впливу  $N_{2-3}$ . Перетин II-II (рис. 7.33). Вантаж  $F=1$  на ділянці 1-2,  $\sum M_9^{\text{пр}} = 0$ ,  $R_7 \cdot 36 - N_{2-3}^0 \cdot 5 = 0$ ,  $N_{2-3}^0 = 7,2R_7$ . Вантаж  $F=1$  на ділянці 3-7,  $\sum M_9^{\text{лів}} = 0$ ,  $R_1 \cdot 12 - N_{2-3}^0 \cdot 5 = 0$ ,  $N_{2-3}^0 = 2,4R_1$ . Лінія впливу  $N_{2-3}^0$  зображена на рис. 7.35, з. Лінія впливу  $X_1$ , усі ординати якої помножені на 1,2 (див. табл. 7.3), показана на рис. 7.35, і. Сумарна лінія впливу зображена на рис. 7.35, к. Зусилля  $N_{2-3}$  дорівнює, кН

$$N_{2-3} = 100 \cdot 0,653 + 150 \cdot 0,634 - 50 \cdot 0,166 - 120 \cdot 0,147 = 134,46.$$

Похибка складає 0,49 %.

## РОЗДІЛ 8

### ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ

#### 8.1. Загальні положення

Динаміка споруд – це спеціальний розділ будівельної механіки, присвячений методам розрахунку споруд на динамічні навантаження. Динамічні навантаження під час своєї дії надають масам споруди прискорення, викликаючи появу інерційних сил. Якщо дія статичних навантажень визначається їхньою величиною, то при розрахунку на динамічні навантаження поряд з величиною істотну роль відіграє характер навантаження. Особливо в цьому відношенні підступне будь-яке періодичне навантаження. Дія такого навантаження залежить не тільки від величини, але і від частоти. Іноді мале за величиною періодичне навантаження може створити великий динамічний ефект, тобто викликати небезпечні, з погляду несучої здатності й умов експлуатації, напруження і переміщення. Усе це пояснюється здатністю споруди робити пружні коливання різної частоти і відгукуватися на певні частоти, створювані різними джерелами збудження.

Динамічний розрахунок споруд полягає у визначенні внутрішніх сил і переміщень від динамічних навантажень, величина і характер дії яких відомі, або в перевірці системи на резонанс при періодично повторюваному навантаженні певної частоти.

Рух пружної системи, викликаний силою, що періодично змінюється, складається з коливання, що відбувається з частотою збуджуючої сили, і з вільних коливань, амплітуда яких залежить від початкових умов руху. Опір, який би малий він не був, постійно знищує ці вільні коливання, а отже, якщо дія збуджуючої сили на систему тривала, то зрештою вирішальне значення буде мати тільки стаціонарна частина

вимушених коливань. Тому надалі ми обмежимося тільки цією  
стаціо-



нарною частиною руху. При цьому ми будемо користатися уже відомим нам фактом, що частота цих коливань дорівнює частоті збуджуючої сили, а різниця фаз збуджуючої сили і вимушених коливань у випадку нехтовно малого опору дорівнює  $0^\circ$  чи  $180^\circ$ . У наших наступних міркуваннях дуже важливу роль відіграє та обставина, що диференціальне рівняння поперечних коливань лінійне, що дозволяє накладати одне на одне різні частинні розв'язки.

## 8.2. Поперечні коливання прямих брусів

### 8.2.1. Диференціальне рівняння поперечних коливань

Брус з розподіленою масою являє собою систему з нескінченним числом ступенів свободи. Його положення в будь-який момент часу визначається пружною лінією, що при динамічних навантаженнях описується функцією двох перемінних: координати перерізу  $x$  і часу  $t$ , тобто

$$y = f(x, t).$$

Диференціальна залежність між кривизною пружної лінії і згинальним моментом при позитивних прогинах бруса, спрямованих униз, як відомо, має вигляд

$$EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M(x, t). \quad (8.1)$$

Диференціюємо двічі цей вираз по  $x$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -p(x, t), \quad (8.2)$$

де  $p(x, t)$  – діюче на брус поперечне навантаження, спрямоване знизу нагору (позитивний напрямок).

Під час руху бруса розподілене навантаження  $p(x, t)$  в загальному випадку складається з навантажень таких видів: активного заданого навантаження інтенсивністю  $q(x, t)$ ; інерційних сил  $m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , якщо знехтувати поздовжніми зсувами перерізів, їхніми поворотами і зсувами (тут  $m(x) = G/g$  – погонна маса балки,  $G$  – вага балки,  $g$  – прискорення вільного падіння); сил опору руху  $p^*(x, t)$ .

Таким чином,

$$p(x, t) = q(x, t) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(x, t). \quad (8.3)$$

Підставляючи (8.3) у (8.2), одержимо

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(x, t) = -q(x, t). \quad (8.4)$$

Це і є диференціальне рівняння поперечного руху бруса змінного перерізу в загальному вигляді. Воно лінійне зі змінними коефіцієнтами, що не залежать від діючого навантаження. Тому для дослідження руху  $y(x, t)$  може бути застосований принцип незалежності дії сил. Диференціальне рівняння (8.4) досить точно описує поведінку балки при не дуже швидких впливах (не миттєвих) і широко використовується при розв'язанні багатьох динамічних задач.

Будемо надалі розглядати балки з постійною жорсткістю  $EJ = \text{const}$  і рівномірно-розподіленою масою  $m$ . Будемо також розглядати сталі коливання; прийнемо (про це говорилося в п. 8.1)  $p^*(x, t) = 0$ . Тоді диференціальне рівняння (8.4) набуває такого вигляду:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -q(x, t). \quad (8.5)$$

Диференціальне рівняння вільних коливань одержимо з (8.5), приймаючи в ньому  $q(x, t) = 0$ :

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (8.6)$$

### 8.2.2. Вільні коливання бруса

Розв'язок диференціального рівняння (8.6) будемо шукати в такому вигляді:

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \Phi_k(t), \quad (8.7)$$

де  $y_k(x)$  – функція, що залежить тільки від  $x$  ( $k$ -та форма коливань);  $\Phi_k(t)$  – функція, що залежить від часу  $t$ .

Підставимо (8.7) у вихідне рівняння (8.6):

$$EJ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \Phi_k(t) \right] + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \Phi_k(t) \right] = 0.$$

Прирівняємо до нуля однойменні доданки:

$$EJ \frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4} \Phi_k(t) + m \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2} y_k(x) = 0. \quad (8.8)$$

Розділимо це рівняння почленно на добуток функцій  $m \cdot y_k(x) \cdot \Phi_k(t)$ :

$$\frac{EJ \frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4}}{m y_k(x)} = - \frac{\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2}}{\Phi_k(t)}. \quad (8.9)$$

З отриманої рівності видно, що ліва частина не залежить від  $t$ , а права – від  $x$ . Це дозволяє кожну з них прирівняти до постійної величини, що позначимо  $\omega_k^2$ . Після цього одержимо два незалежних одне від одного рівняння (цей процес називається процесом поділу змінних):

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 \Phi_k(t) = 0; \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4} - s_k^4 y_k = 0. \quad (8.11)$$

Тут  $\omega_k$  – частота вільних коливань для  $k$ -ї форми;  $s_k^4$  – характеристичне число,

$$s_k^4 = \frac{m \omega_k^2}{EJ}. \quad (8.12)$$

Розв'язок диференціального рівняння (8.10) має такий вигляд:

$$\Phi_k(t) = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t, \quad (8.13)$$

де  $A_k, B_k$  – довільні постійні, що характеризують початкові умови руху при  $t = 0$ . Як видно з (8.13), вільні коливання  $y(x, t)$  відбуваються за гармонічним законом з частотою  $\omega_k$ . Кожній частоті вільних коливань відповідає головна форма  $y_k(x)$ .

### 8.2.3. Головні форми коливань

Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (8.11). Для цього складемо спочатку характеристичне рівняння

$$r^4 - s_k^4 = 0.$$

Корені цього рівняння

$$r_1 = s_k, \quad r_2 = -s_k, \quad r_3 = i s_k, \quad r_4 = -i s_k.$$

З виду коренів впливає, що загальний розв'язок має бути поданий у такому вигляді:

$$y_k(x) = A \operatorname{ch} sx + B \operatorname{sh} sx + C \cos sx + D \sin sx ,$$

де  $\operatorname{ch} sx$  ,  $\operatorname{sh} sx$  – гіперболічні функції,

$$\operatorname{ch} sx = \frac{e^{sx} + e^{-sx}}{2} , \quad \operatorname{sh} sx = \frac{e^{sx} - e^{-sx}}{2} .$$

Довільні постійні  $A$  ,  $B$  ,  $C$  ,  $D$  виражаться через початкові параметри (при  $x = 0$ ). Тоді загальний розв'язок (8.11) запишеться так:

$$y_k(x) = y_0 A_{sx} + \frac{y'_0}{s_k} B_{sx} - \frac{M_0}{s_k^2 EJ} C_{sx} - \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} D_{sx} , \quad (8.14)$$

де  $y_0$  ,  $y'_0$  ,  $M_0$  ,  $Q_0$  – початкові параметри, відповідно прогин, кут повороту, згинальний момент, поперечна сила на початку координат;  $A_{sx}$  ,  $B_{sx}$  ,  $C_{sx}$  ,  $D_{sx}$  – функції А.М. Крилова:

$$\begin{aligned} A_{sx} &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} sx + \cos sx) , & B_{sx} &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} sx + \sin sx) ; \\ C_{sx} &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} sx - \cos sx) , & D_{sx} &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} sx - \sin sx) . \end{aligned} \quad (8.15)$$

Чисельні значення функцій (8.15) наведені в дод. 1.

Якщо продиференціювати рівняння (8.14) тричі по  $x$  , одержимо відповідно рівняння для визначення кута повороту (8.16), згинального моменту (8.17), поперечної сили (8.18):

$$y'_k(x) = s_k y_0 D_{sx} + y'_0 A_{sx} - \frac{M_0}{s_k EJ} B_{sx} - \frac{Q_0}{s_k^2 EJ} C_{sx} ; \quad (8.16)$$

$$M_k(x) = -s_k^2 y_0 E J C_{sx} - s_k y'_0 E J D_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s_k} B_{sx} ; \quad (8.17)$$

$$Q_k(x) = -s_k^3 y_0 E J B_{sx} - s_k^2 y'_0 E J C_{sx} + s_k M_0 D_{sx} + Q_0 A_{sx} . \quad (8.18)$$

Початкові параметри  $y_0$  ,  $y'_0$  ,  $M_0$  ,  $Q_0$  визначаються з умов закріплення балки (рис. 8.1). Неважко переконатися, що при звичайних закріпленнях лівого кінця бруса два початкових параметри завжди відомі. Інші два невідомі початкових параметри визначаються з умов закріплення бруса на правому кінці при  $x = l$ . Оскільки складені при цьому два рівняння не містять вільних членів (однорідні), то для одержання відмінних від нуля розв'язків необхідно визначник складеної системи двох рівнянь прирівняти до нуля, що і дає рівняння частот у

загальному вигляді. Це рівняння містить нескінченне число коренів  $s_k l$ , що визначають нескінченну кількість частот вільних коливань.

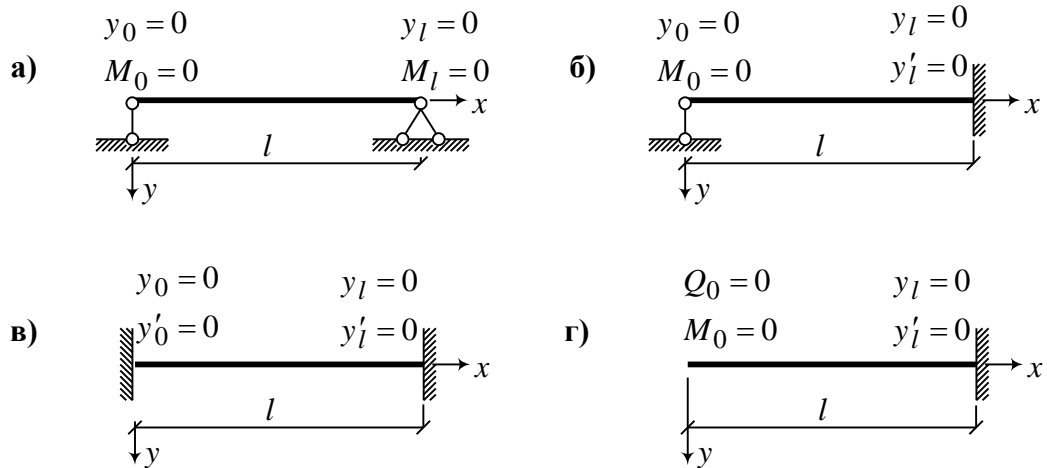


Рис. 8.1. Значення параметрів при різних умовах закріплення кінців балки

Розглянемо як приклад шарнірно обперту балку (рис. 8.1, а). Початкові параметри

$$y_k(0) = 0 \quad \text{і} \quad M_k(0) = 0.$$

Запишемо рівняння (8.14) і (8.17) для протилежного кінця балки:

$$y_k(l) = \frac{y'_0}{s_k} B_{sl} - \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} D_{sl} = 0;$$

$$M_k(l) = -s_k y'_0 EJ D_{sl} + \frac{Q_0}{s_k} B_{sl} = 0.$$

Складаємо визначник отриманої системи рівнянь і прирівнюємо його до нуля:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{B_{sl}}{s_k} & -\frac{D_{sl}}{s_k^3 EJ} \\ -s_k EJ D_{sl} & \frac{B_{sl}}{s_k} \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник і одержуємо рівняння частот:

$$B_{sl}^2 - D_{sl}^2 = 0. \quad (8.19)$$

Підставляємо в рівняння (8.19) функціональні залежності для  $B_{sl}$  і  $D_{sl}$  (у рівняннях (8.15) замінюємо  $x = l$ ):

$$\frac{1}{4} (\text{sh } sl + \sin sl)^2 - \frac{1}{4} (\text{sh } sl - \sin sl)^2 = 0.$$

Після найпростіших перетворень одержуємо

$$\operatorname{sh} sl \cdot \sin sl = 0. \quad (8.20)$$

Щоб була справедлива отримана рівність, досить, щоб один зі співмножників дорівнював нулю, але

$$\operatorname{sh} sl = \frac{e^{sl} - e^{-sl}}{2} \neq 0,$$

отже,

$$\sin sl = 0,$$

а це можливо у випадку, коли

$$sl = k \pi, \text{ де } k = 1, 2, \dots$$

Звідси знайдемо

$$s_k = \frac{k \pi}{l}.$$

З урахуванням виразу (8.12) одержуємо формулу для визначення частот вільних коливань шарнірно обпертої балки:

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

Знайдемо тепер головні форми коливань. Запишемо рівняння (8.14) у такому вигляді:

$$y_k(x) = \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} \left[ \frac{y'_0 s_k^2 EJ}{Q_0} B_{sx} - D_{sx} \right].$$

З рівняння

$$\frac{y'_0}{s_k} B_{sl} - \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} D_{sl} = 0$$

знайдемо

$$\frac{y'_0 s_k^2 EJ}{Q_0} = \frac{D_{sl}}{B_{sl}} = 1.$$

Таким чином,

$$y_k(x) = \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} \sin s_k x. \quad (8.22)$$

Форма коливань (8.22) має вигляд синусоїди з півхвилями (рис. 8.2).

Для балок з іншими граничними умовами (рис. 8.1, б, в, г) задачі визначення частот і форм вільних коливань розв'язуються аналогічно.

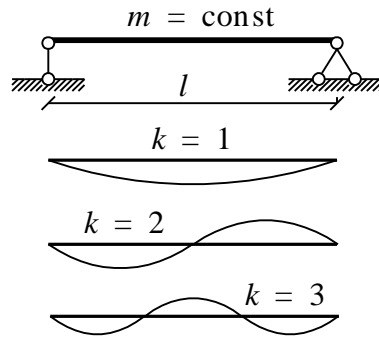


Рис. 8.2. Головні форми коливань шарнірно обпертої балки

### 8.2.4. Вимушені коливання бруса

Припускаємо, що брус завантажений поперечним навантаженням, що змінюється за гармонічним законом

$$q(x, t) = q(x) \sin \theta t, \quad (8.23)$$

де  $\theta$  – частота вимушених коливань,  $q(x)$  – амплітудна функція навантаження, що залежить тільки від  $x$ .

З урахуванням (8.23) диференціальне рівняння (8.5) набуває такого вигляду:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -q(x) \sin \theta t. \quad (8.24)$$

Розв'язок диференціального рівняння (8.24) без правої частини, що визначає вільні коливання бруса, отриманий в п. 8.3.1. Тут ми знайдемо часткові розв'язки (8.24) (із правою частиною), що і будуть давати вимушені коливання при вібраційному навантаженні (8.23). Розв'язок (8.24) будемо шукати у вигляді

$$y(x, t) = y(x) \sin \theta t, \quad (8.25)$$

де  $y(x)$  – невідома амплітудна функція прогинів.

Підставивши (8.25) у вихідне рівняння (8.24), одержимо для амплітудного стану ( $\sin \theta t = \pm 1$ )

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - s^4 y = -\frac{q(x)}{EJ}, \quad (8.26)$$

де

$$s^4 = \frac{m \theta^2}{EJ}. \quad (8.27)$$

На відміну від вільних коливань (8.12), тут  $s$  включає частоту збуджуючої сили (припускаємо, що частота збуджуючої сили знаходиться досить далеко від резонансної зони).

Розв'язок рівняння (8.26) без правої частини можна записати за (8.14), оскільки рівняння (8.26) без правої частини подібно до рівнянь (8.11). Тоді загальний розв'язок (повний інтеграл) рівняння (8.26) при  $q(x) = q_0 = q = \text{const}$  буде мати такий вигляд:

$$y(x) = y_0 A_{sx} + \frac{y'_0}{s} B_{sx} - \frac{M_0}{s^2 EJ} C_{sx} - \frac{Q_0}{s^3 EJ} D_{sx} - \frac{q}{s^4 EJ} (A_{sx} - 1). \quad (8.28)$$

Як і раніше, якщо продиференціювати послідовно (8.28) по  $x$ , знайдемо

$$y'_x = s y_0 D_{sx} + y'_0 A_{sx} - \frac{M_0}{s EJ} B_{sx} - \frac{Q_0}{s^2 EJ} C_{sx} - \frac{q}{s^3 EJ} D_{sx}; \quad (8.29)$$

$$M_x = -s^2 EJ y_0 C_{sx} - s EJ y'_0 D_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx} + \frac{q}{s^2} C_{sx}; \quad (8.30)$$

$$Q_x = -s^3 EJ y_0 B_{sx} - s^2 EJ y'_0 C_{sx} + s M_0 D_{sx} + Q_0 A_{sx} + \frac{q}{s} B_{sx}. \quad (8.31)$$

У рівняннях (8.28) – (8.31), як і раніше (див. також рівняння (8.14), (8.16) – (8.18)),  $y_0, y'_0, M_0, Q_0$  – початкові параметри (у дод. 2 наведені значення зазначених параметрів для однопрогонових балок з різними закріпленнями і різним навантаженням),  $A_{sx}, B_{sx}, C_{sx}, D_{sx}$  – функції Кривола.

Рівняння (8.28) – (8.31) для бруса, завантаженого рівномірно розподіленим навантаженням, зосередженим навантаженням і зосередженим моментом (рис. 8.3), на підставі принципу суперпозиції записуються в такий спосіб:

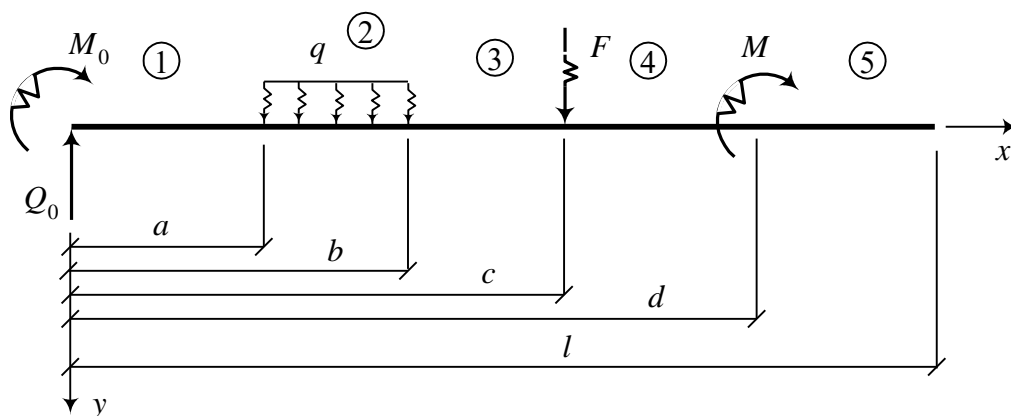


Рис. 8.3. Схема навантаження бруса



$$y(x) = y_0 A_{sx} + \frac{y'_0}{s} B_{sx} - \frac{M_0}{s^2 EJ} C_{sx} - \frac{Q_0}{s^3 EJ} D_{sx} \Big|_1 + \frac{q}{s^4 EJ} (A_{s(x-a)} - 1) \Big|_2 -$$

$$- \frac{q}{s^4 EJ} (A_{s(x-b)} - 1) \Big|_3 + \frac{F}{s^3 EJ} D_{s(x-c)} \Big|_4 - \frac{M}{s^2 EJ} C_{s(x-d)} \Big|_5 ; \quad (8.32)$$

$$y'(x) = s y_0 D_{sx} + y'_0 A_{sx} - \frac{M_0}{s EJ} B_{sx} - \frac{Q_0}{s^2 EJ} C_{sx} \Big|_1 + \frac{q}{s^3 EJ} D_{s(x-a)} \Big|_2 -$$

$$- \frac{q}{s^3 EJ} D_{s(x-b)} \Big|_3 + \frac{F}{s^2 EJ} C_{s(x-b)} \Big|_4 - \frac{M}{s EJ} B_{s(x-d)} \Big|_5 ; \quad (8.33)$$

$$M_x = -s^2 EJ y_0 C_{sx} - s EJ y'_0 D_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx} \Big|_1 - \frac{q}{s^2} C_{s(x-a)} \Big|_2 +$$

$$+ \frac{q}{s^2} C_{s(x-b)} \Big|_3 - \frac{F}{s} B_{s(x-c)} \Big|_4 + M A_{s(x-d)} \Big|_5 ; \quad (8.34)$$

$$Q_x = -s^3 EJ y_0 B_{sx} - s^2 EJ y'_0 C_{sx} + s M_0 D_{sx} + Q_0 A_{sx} \Big|_1 - \frac{q}{s} B_{s(x-a)} \Big|_2 +$$

$$+ \frac{q}{s} B_{s(x-b)} \Big|_3 - F A_{s(x-c)} \Big|_4 + s M D_{s(x-d)} \Big|_5 . \quad (8.35)$$

Розглянемо докладніше порядок складання рівняння (8.32). Оскільки на першій ділянці (рис. 8.3) навантаження відсутнє, то рівняння зігнутої осі для нього виражається розв'язком однорідного рівняння (8.14). Таким чином, для першої ділянки балки рівняння зігнутої осі визначається виразом, розташованим лівіше за символ  $\Big|_1$ . Для того щоб одержати рівняння зігнутої осі на другій ділянці, до рівняння зігнутої осі на першій ділянці додамо член, що враховує вплив рівномірно розподіленого навантаження (8.28), змінивши знак перед ним на протилежний (нагадаємо, що позитивний напрямок навантаження прийнятий знизу нагору). Щоб записати рівняння зігнутої осі на третій ділянці, продовжимо задане рівномірно розподілене навантаження на третю ділянку і введемо компенсуюче навантаження такої самої інтенсивності. На четвертій і п'ятій ділянках додамо члени, що враховують вплив зосередженого навантаження і моменту. Рівняння (8.32) – (8.35) є універсальними. За їх допомогою можна описати зігнуту вісь, кут повороту, згинальний момент і поперечну силу на кожній ділянці, при цьому умови сполучення суміжних ділянок автоматично задовольняються.

### 8.3. Поздовжні коливання прямих стержнів

#### 8.3.1. Диференціальне рівняння поздовжніх коливань

Розглянемо однорідний ідеально прямий стержень (брус) постійного перерізу, що зазнає деформації розтягання-стискання, викликані осьовим поздовжнім впливом на кінці (рис. 8.4).

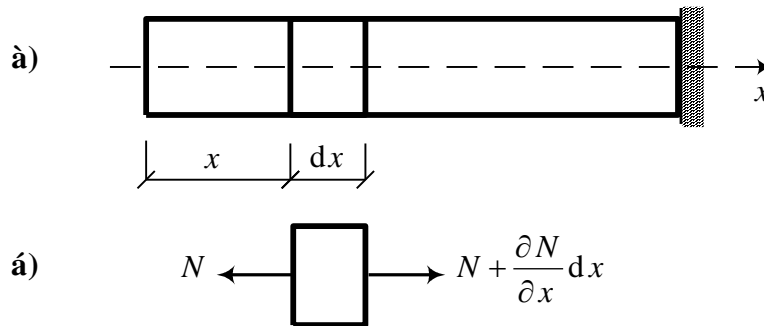


Рис. 8.4. До виведення диференціального рівняння поздовжніх коливань

Позначимо поздовжнє переміщення перерізу з координатою  $x$  через  $u(x, t)$ , а сусіднього з координатою  $x + dx$  відповідно через  $u(x + dx, t)$ . Відносно подовження нескінченно малого елемента між цими перерізами буде

$$\varepsilon = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.36)$$

Відповідне напруження

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.37)$$

Поздовжня сила

$$N = \sigma A = EA \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.38)$$

Рівновага нескінченно малого елемента

$$-N + \left( N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) - m dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (8.39)$$

Звідси

$$\frac{\partial N}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8.40)$$

де  $m$  – маса одиниці довжини стержня.

З урахуванням (8.38) будемо мати диференціальне рівняння позовжніх коливань

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad (8.41)$$

Для стержнів постійного перерізу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad (8.42)$$

де

$$c^2 = \frac{EA}{m} . \quad (8.43)$$

Якщо щільність матеріалу позначити через  $\rho$ , то

$$m = \rho A \cdot l$$

і

$$c^2 = \frac{E}{\rho} . \quad (8.44)$$

Рівняння (8.42) називається хвильовим рівнянням і в математиці належить до так званих рівнянь гіперболічного типу.

### 8.3.2. Два основних види розв'язків

Розглянемо два характерних види розв'язків, що допускає це рівняння.

Насамперед зазначимо, що вираз

$$u = f(x - ct) \quad (8.45)$$

задовольняє рівнянню (8.42). Знайдемо умову, при якій переміщення  $u_1$  перерізу з координатою  $x + dx$  при часі  $t + dt$  дорівнює переміщенню  $u$  перерізу з координатою  $x$  при часі  $t$ . Це дозволить визначити рух позовжньої хвилі переміщень по стержню. Очевидно, що для цього повинна виконуватися рівність

$$dx - c dt = 0 . \quad (8.46)$$

Тут  $dx$  – шлях, пройдений хвилею за час  $dt$ . Отже,

$$\frac{dx}{dt} = c . \quad (8.47)$$

Це означає, що величина  $c$  є швидкістю поширення позовжньої хвилі по стержню, що відповідає закону (8.45). Наприклад, для сталі  $E \cong 2 \cdot 10^5$  МПа ( $2 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>),  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup> і  $c = \sqrt{2 \cdot 10^{11} / 7800} = 5100$  м/с.

Якщо замість  $f(x - ct)$  узяти функцію  $\varphi(x + ct)$ , то і вона задовольняє рівнянню (8.42), тільки для неї швидкість буде від'ємною, тобто спрямованою в інший бік. Функції  $f$  і  $\varphi$  визначають форму хвиль. Вони можуть бути знайдені з умов контакту тіла, що впливає на лівий кінець стержня, і рівності нулю зсуву в заземленні (рис. 8.4).

Як деяку, досить близьку, аналогію нагадаємо поширення ефекту поздовжнього удару локомотива в довгому потязі. Звук від послідовного співударяння вагонів дозволяє відчутно простежити за поздовжнім рухом ударної хвилі. Вивчення поширення хвиль деформації в середовищах дозволяє пояснити багато явищ, що зустрічаються в інженерній практиці. Наприклад, у довгому залізобетонному стержні, що має вільний кінець, поздовжня хвиля стискання, створена ударом, може викликати появу поперечних тріщин. Це пояснюється тим, що поздовжня хвиля стискання відбивається від вільного кінця, як така сама хвиля, але вже розтягання. Ця хвиля і може викликати розрив матеріалу.

Велике значення теорія поширення хвиль деформацій має в сейсмології, акустиці, описі явища удару, у питаннях інженерного використання вибуху і т. д.

Розглянемо тепер другий вид розв'язку рівняння (8.42). Будемо шукати розв'язок у такому вигляді:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) T_k(t), \quad (8.48)$$

де  $u_k(x)$  – функція, що залежить від  $x$ ;  $T_k(t)$  – функція часу.

Підставляючи один член ряду (8.48) у рівняння (8.42), одержимо

$$u_k(x) \frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} T_k(t).$$

Розділивши змінні, будемо мати два незалежних диференціальних рівняння:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 T_k(t) = 0; \quad (8.49)$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 u_k(x) = 0. \quad (8.50)$$

Розв'язок рівняння (8.49)

$$T_k(t) = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t. \quad (8.51)$$

Постійні  $A_k$  і  $B_k$  визначаються з початкових умов руху: при  $t = 0$   $T_k(0) = y_k(0)$ ,  $T_k'(0) = y_k'(0)$ . З урахуванням початкових умов рівняння (8.51) набуває вигляду

$$T_k(t) = \frac{y'_k(0)}{\omega_k} \sin \omega_k t + y_k(0) \cos \omega_k t. \quad (8.52)$$

Розв'язок рівняння (8.50)

$$u_k(x) = C_k \sin \frac{\omega_k}{c} x + D_k \cos \frac{\omega_k}{c} x. \quad (8.53)$$

З виразу (8.53) видно, що для конкретного  $x$  коливання в часі відбуваються за гармонічним законом з частотою  $\omega_k$ . Якщо до  $x$  у (8.53) додати величину  $l_k = 2\pi c/\omega_k$ , то  $u_k(x + l_k) = u_k(x)$ . Отже,  $l_k$  – довжина хвилі поздовжніх коливань  $u_k(x)$ , а  $c$  – швидкість її поширення.

Довільні постійні в (8.53) визначаються з граничних умов на кінцях стержня. Виразимо  $C_k$  і  $D_k$  через початкові параметри  $u_k(0)$  і  $N_k(0)$ . Для цього складемо вирази для поздовжньої сили з урахуванням (8.38):

$$N_k(x) = EA \frac{\partial u_k}{\partial x} = EA \left( C_k \frac{\omega_k}{c} \cos \frac{\omega_k x}{c} - D_k \frac{\omega_k}{c} \sin \frac{\omega_k x}{c} \right). \quad (8.54)$$

Записуємо граничні умови на лівому кінці (на початку координат):

$$\text{при } x = 0 \quad u_k(x) = u_k(0), \quad N_k(x) = N_k(0).$$

Звідси одержуємо

$$D_k = u_k(0), \quad C_k = N_k(0) \left( \frac{c}{\omega_k} \right) \frac{1}{EA}. \quad (8.55)$$

З урахуванням знайдених довільних постійних  $C_k$  і  $D_k$  маємо

$$u_k(x) = \frac{N_k(0)}{EA} \left( \frac{c}{\omega_k} \right) \sin \frac{\omega_k x}{c} + u_k(0) \cos \frac{\omega_k x}{c}; \quad (8.56)$$

$$N_k(x) = N_k(0) \cos \frac{\omega_k x}{c} - EA u_k(0) \frac{\omega_k}{c} \sin \frac{\omega_k x}{c}. \quad (8.57)$$

Один з параметрів  $u_k(0)$  чи  $N_k(0)$  завжди відомий, а другий параметр визначається з граничних умов на правому кінці стержня (при  $x = l$ ).

Визначимо частоти і головні форми власних поздовжніх коливань консольного стержня (рис. 8.5).

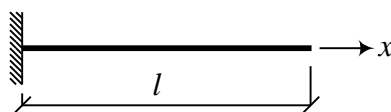


Рис. 8.5. До визначення частот і форм позовжніх коливань

При  $x = 0$   $u_k(0) = 0$ . Тоді рівняння (8.56) і (8.57) запишуться в такий спосіб:

$$u_k(x) = \frac{N_k(0)}{EA} \left( \frac{c}{\omega_k} \right) \sin \frac{\omega_k x}{c};$$

$$N_k(x) = N_k(0) \cos \frac{\omega_k x}{c}.$$

При  $x = l$   $N_k(l) = 0$ ,

$$N_k(l) = N_k(0) \cos \frac{\omega_k l}{c} = 0,$$

$N_k(0) \neq 0$ , отже,  $\cos \frac{\omega_k l}{c} = 0$ . А це можливо тоді, коли

$$\frac{\omega_k l}{c} = \frac{k \pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

З урахуванням (8.43)

$$\omega_k = \frac{k \pi}{2l} \sqrt{\frac{EA}{m}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.58)$$

Форма коливань визначається рівнянням (8.53) з урахуванням того, що  $D_k = u_k(0) = 0$ :

$$u_k(x) = A_k \sin \frac{k \pi x}{2l}. \quad (8.59)$$

Таким чином, рівняння (8.58) і (8.59) визначають спектр частот і форм власних позовжніх коливань розглянутої континуальної моделі стержня. На відміну від дискретних систем, що володіють обмеженим числом ступенів свободи, цей спектр нескінченний.

### 8.3.3. Вимушені позовжні коливання

Припускаємо, як і раніше, що брус завантажений позовжнім навантаженням, що змінюється за гармонічним законом:

$$F(x, t) = F_x \sin \theta t. \quad (8.60)$$

Розв'язок диференціального рівняння (8.42) будемо шукати в такому вигляді:

$$u(x, t) = u(x) \sin \theta t. \quad (8.61)$$

Підставимо (8.61) у (8.42). У результаті одержимо

$$-u(x)\theta^2 \sin \theta t = c^2 \sin \theta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

або

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \left(\frac{\theta}{c}\right)^2 u(x) = 0. \quad (8.62)$$

Це рівняння збігається з рівнянням (8.50), якщо в ньому замінити  $\omega_k$  на  $\theta$ , що дозволяє на основі (8.56) і (8.57) записати готові вирази

$$u(x) = \frac{N(0)}{EA} \left(\frac{c}{\theta}\right) \sin \frac{\theta x}{c} + u(0) \cos \frac{\theta x}{c}; \quad (8.63)$$

$$N(x) = N(0) \cos \frac{\theta x}{c} - EA u(0) \left(\frac{\theta}{c}\right) \sin \frac{\theta x}{c}. \quad (8.64)$$

У тих випадках, коли на стержень діють поздовжні навантаження в проміжних точках між кінцями чи де-небудь заданий вимушений зсув  $\Delta u \sin \theta t$ , вирази (8.63) і (8.64) справедливі тільки для першої ділянки.

Як приклад розглянемо розрахунок консольного стержня, завантаженого на кінці поздовжньою силою, що змінюється за законом синуса (рис. 8.6).

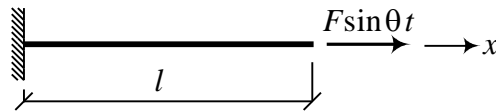


Рис. 8.6. До розрахунку стержня, що зазнає вимушених поздовжніх коливань

Визначимо початкові параметри.

При  $x = 0$   $u(x) = 0$ . З рівняння (8.63) одержуємо  $u(0) = 0$ .

При  $x = l$   $N(l) = F$ .

Використовуємо рівняння (8.64):

$$N(0) \cos \frac{\theta l}{c} = F.$$

Звідси

$$N_0 = \frac{F}{\cos \frac{\theta l}{c}}.$$

Маємо остаточно

$$u(x) = \frac{F}{EA} \left( \frac{c}{\theta} \right) \frac{\sin \frac{\theta x}{c}}{\cos \frac{\theta l}{c}} ;$$

$$N(x) = F \frac{\cos \frac{\theta x}{c}}{\cos \frac{\theta l}{c}} .$$

На закінчення цього пункту зауважимо, що ми розглянули поперечні і поздовжні коливання бруса і вивели два диференціальних рівняння (8.5) і (8.42). Таким чином, ми припустили, що брус виконує або тільки поздовжні, або тільки поперечні коливання. У дійсності можливість цих двох рухів може наступити одночасно. Ми не будемо давати тут диференціальних рівнянь зв'язаних поздовжніх і поперечних коливань, тому що цей зв'язок настільки слабкий, що практично для прямих стержнів обидва види коливань завжди можна розглядати окремо. Для рамних конструкцій окреме обчислення поздовжніх і поперечних коливань, власне кажучи, уже неможливе, тому що при фактичних формах власних коливань елементи виконують як поперечні, так і поздовжні рухи, причому величина тих і інших переміщень одного порядку. Наближено, однак, можна нехтувати згинаючою дією поздовжньої сили і враховувати тільки стискання, що викликає її.

#### 8.4. Вплив постійної осьової сили на поперечні коливання бруса

Розглянемо брус з поперечним навантаженням, додатково стиснутий чи розтягнутий постійними силами  $N$ , прикладеними по кінцях. Силу  $N$ , що розтягує, будемо приймати зі знаком плюс, а стискальну – зі знаком мінус. Виходимо з диференціального рівняння (8.1). У розглянутому в цьому підрозділі випадку згинальний момент дорівнює

$$M = M^0 \mp Ny , \quad (8.65)$$

де  $M^0$  – згинальний момент від поперечних навантажень. Верхній знак відноситься до розтягнуто-зігнутого бруса, а нижній – до стиснуто-зігнутого.

Наслідуючи викладенням, наведеним у п. 8.2.1, одержимо диференціальні рівняння вимушених і вільних коливань бруса з постійною осьовою силою  $N$ :

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mp N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -q(x, t); \quad (8.66)$$



$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mp N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (8.67)$$

Після поділу змінних (див. п. 8.2.1) дійдемо до двох незалежних одне від одного диференціальних рівнянь. Диференціальне рівняння функції  $\Phi_k(t)$ , що залежить від часу, збігається з (8.10), а диференціальне рівняння головної форми коливань має вигляд

$$\frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4} \mp \frac{N}{EJ} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2} - s_k^4 y_k = 0, \quad (8.68)$$

де  $s_k^4$  має значення таке саме, як і в (8.12).

Перш ніж одержати загальний розв'язок рівняння (8.68), складемо його характеристичне рівняння:

$$r^4 \mp \frac{N}{EJ} r^2 - s_k^4 = 0. \quad (8.69)$$

Корені цього рівняння дорівнюють

$$r_{12} = \pm a_k, \quad r_{34} = \pm b_k i,$$

де

$$a_k = \sqrt{\pm \frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + s_k^4}}, \quad b_k = \sqrt{\mp \frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + s_k^4}}. \quad (8.70)$$

Зазначимо, що

$$a_k^2 - b_k^2 = \pm \frac{N}{EJ}, \quad a_k^2 + b_k^2 = 2 \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + s_k^4}.$$

Відповідно до коренів характеристичного рівняння розв'язок (8.68) буде мати вигляд

$$y_k(x) = y_k(0)I_x + y'_k(0)J_x - \frac{M_k(0)}{EJ}K_x - \frac{Q_k(0)}{EJ}L_x, \quad (8.71)$$

де

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} (b_k^2 \operatorname{ch} a_k x + a_k^2 \operatorname{cos} b_k x); \\ J_x &= \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} \left( \frac{b_k^2}{a_k} \operatorname{sh} a_k x + \frac{a_k^2}{b_k} \sin b_k x \right); \\ K_x &= \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} (\operatorname{ch} a_k x - \operatorname{cos} b_k x); \\ L_x &= \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} \left( \frac{1}{a_k} \operatorname{sh} a_k x - \frac{1}{b_k} \sin b_k x \right). \end{aligned} \quad (8.72)$$

Як і в п. 8.2.3, продиференціювавши рівняння (8.71) по  $x$ , одержимо рівняння для визначення кута повороту, згинального моменту, поперечної сили. Нагадаємо, що згинальний момент і поперечна сила пов'язані з пружною лінією такими залежностями:

$$y_k''(x) = -\frac{M_k(x)}{EJ}, \quad y_k'''(x) = -\frac{Q_k(x)}{EJ}.$$

Визначимо тепер частоти і головні форми вільних коливань балок, показаних на рис. 8.7.

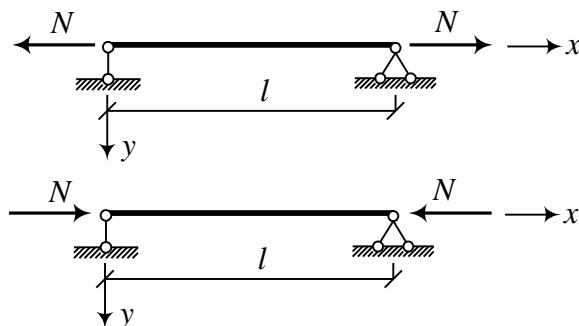


Рис. 8.7. До визначення частот і форм вільних коливань шарнірно обпертих балок, завантажених по кінцях постійними осьовими силами

Початкові параметри:

$$\text{при } x = 0 \quad y_k(0) = 0, \quad M_k(0) = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad y_k(l) = 0, \quad M_k(l) = 0.$$

Далі записуємо рівняння прогину і згинального моменту для протилежного кінця балки ( $x = l$ ), складаємо визначник отриманої системи рівнянь і прирівнюємо його до нуля. Частотне рівняння має вигляд

$$\text{sh } a_k l \cdot \sin b_k l = 0.$$

Далі, слідуючи міркуванням, наведеним у п. 8.2.3, одержуємо

$$\omega_k = \omega_k^0 \sqrt{1 \pm \frac{N}{F_{\text{кр}}}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.73)$$

де (див. (8.21))

$$\omega_k^0 = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

$F_{\text{кр}}$  – Ейлерова критична сила,

$$F_{\text{кр}} = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}.$$

З рівності (8.73) можна зробити такі висновки: сила, що розтягує (верхній знак), збільшує частоту вільних коливань, а стискальна – зменшує; частота коливань зменшується при зростанні поздовжньої сили, при  $N \rightarrow F_{кр}$  частота коливань дорівнює нулю.

Рівняння (8.73) цікаве можливістю більш широкого практичного застосування. З цього рівняння випливає, що, спостерігаючи поперечні коливання стержня, можна судити про ступінь його стійкості.

Головна форма коливань визначається звичайним способом (див. рис. 8.2) і тут вона має вигляд синусоїди з півхвилями.

Задача про вимушені коливання, викликані поперечним навантаженням, що змінюється за гармонічним законом, вирішується відповідно до п. 8.2.4.

Загальний розв'язок рівняння (8.66) має такий вигляд:

$$y_x = y_0 I_x + y'_0 J_x - \frac{M_0}{EJ} K_x - \frac{Q_0}{EJ} L_x - \frac{q}{s^4 EJ} (I_x - 1). \quad (8.74)$$

## 8.5. Розрахунок нерозрізних балок на вібраційні впливи

### 8.5.1. Загальні теореми

Розкриття статичної невизначності систем при динамічному розрахунку може бути проведено різними способами. Тут ми розглянемо застосування двох основних методів: методу сил і методу переміщень. Будемо далі під динамічним переміщенням розуміти переміщення, що змінюється в часі за законом

$$\Delta_{km}(t) = \Delta_{km} \sin \theta t. \quad (8.75)$$

При цьому

$$\frac{d^2 \Delta_{km}(t)}{dt^2} = -\theta^2 \Delta_{km} \sin \theta t = -\theta^2 \Delta_{km}(t). \quad (8.76)$$

Розглянемо яку-небудь систему в деякий момент часу, що знаходиться під різними вібраційними навантаженнями з однаковою частотою у двох станах « $k$ » і « $m$ » (рис. 8.8).

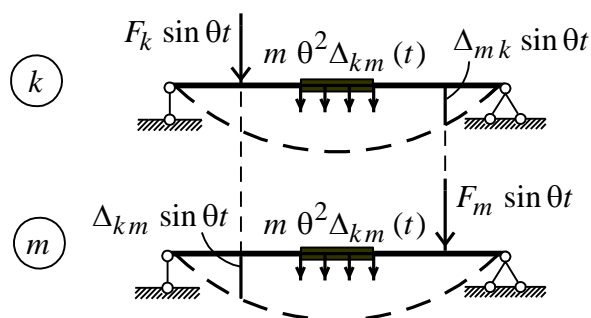


Рис. 8.8. Загальні теореми про роботу і переміщення при вібраційному навантаженні

Візьмемо для досліджень принцип можливих переміщень. Розглянемо роботу сил стану « $k$ » на переміщеннях стану « $m$ », а потім навпаки. Під час коливань на систему діють сили інерції мас, що змінюються за законом  $\sin \theta t$  :

$$\sum F_k \sin \theta t \Delta_{km}(t) + \sum \int (m \theta^2 \Delta_{mk}(t) ds) \Delta_{km}(t) = \sum \int M_k(t) \frac{M_m(t)}{EJ} ds ; \quad (8.77)$$

$$\sum F_m \sin \theta t \Delta_{mk}(t) + \sum \int (m \theta^2 \Delta_{km}(t) ds) \Delta_{mk}(t) = \sum \int M_m(t) \frac{M_k(t)}{EJ} ds . \quad (8.78)$$

У виразах (8.77) і (8.78) враховані тільки згинальні моменти. За рівністю правих частин написаних виразів одержуємо рівняння взаємності робіт вібраційних навантажень:

$$\sum (F_k \sin \theta t) \Delta_{km}(t) = \sum (F_m \sin \theta t) \Delta_{mk}(t) . \quad (8.79)$$

Якщо в кожному стані буде по одній силі, причому

$$F_k \sin \theta t = F_m \sin \theta t ,$$

то

$$\Delta_{km}(t) = \Delta_{mk}(t) , \quad (8.80)$$

або

$$\Delta_{km} \sin \theta t = \Delta_{mk} \sin \theta t . \quad (8.81)$$

Аналогічно можна установити при одиничних амплітудних значеннях діючих сил рівності, що зустрічалися раніше (див. п. 5.8):

$$\delta_{km} \sin \theta t = \delta_{mk} \sin \theta t ;$$

$$r_{km} \sin \theta t = r_{mk} \sin \theta t ; \quad (8.82)$$

$$\delta_{km} \sin \theta t = -r_{mk} \sin \theta t .$$

Розглянемо тепер роботу одиничної статичної сили  $F_k = 1$  у стані « $k$ » на дійсних динамічних переміщеннях стану « $m$ », викликаних динамічним навантаженням  $F_m(t)$  (див. (8.23), рис. 8.9):

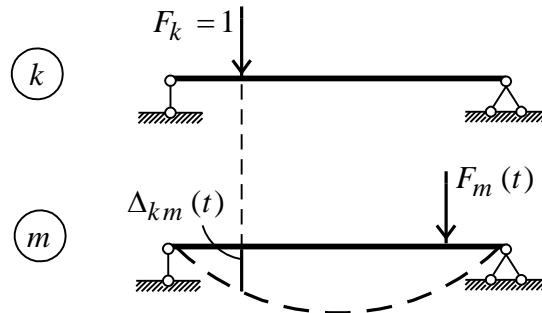


Рис. 8.9. Робота одиничної статичної сили  $F_k$  на динамічних переміщеннях

$$1 \cdot \Delta_{km}(t) = \sum \int M_k(t) \frac{M_m(t)}{EJ} ds, \quad (8.83)$$

де  $M_k$  – вираз згинальних моментів від одиничної сили  $F_k = 1$ ;  $M_m(t)$  – вираз згинальних моментів від динамічного навантаження (8.30).

### 8.5.2. Розрахунок нерозрізних балок, завантажених одночасно на декількох прогонах, методом сил

Розглянемо нерозрізні балки на абсолютно жорстких опорах, що знаходяться під дією гармонічних сил, що змінюються з частотою  $\theta$ , і мають постійний поперечний переріз  $EJ = \text{const}$  (рис. 8.10, а).

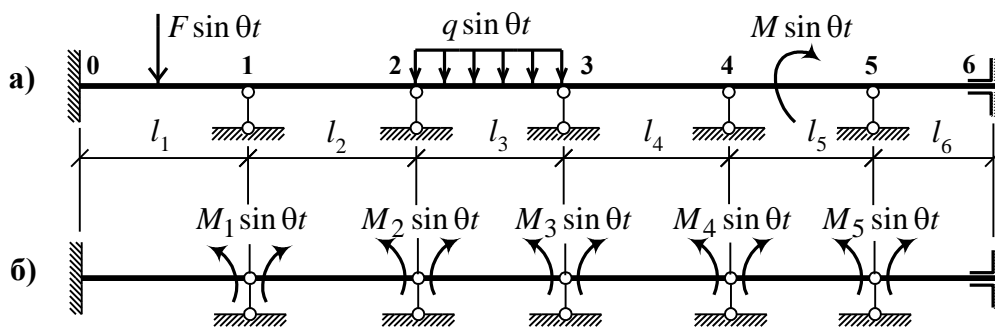


Рис. 8.10. Схеми нерозрізної балки (а) і основної системи (б)

Основна система (рис. 8.10, б) утворюється постановкою необхідного числа шарнірів над опорами. Якщо нерозрізна балка на одному чи обох кінцях має защемлення, то для скорочення числа невідомих можна основну систему утворити постановкою шарнірів тільки над проміжними опорами (рис. 8.10, б). Оскільки невідомі ліворуч  $M_{n-1}$  і праворуч  $M_{n+1}$  (рис. 8.11) не будуть викликати згинання прогонів  $l_n$  і  $l_{n+1}$ , то вони і не будуть давати переміщень у напрямку моменту  $M_n$ .

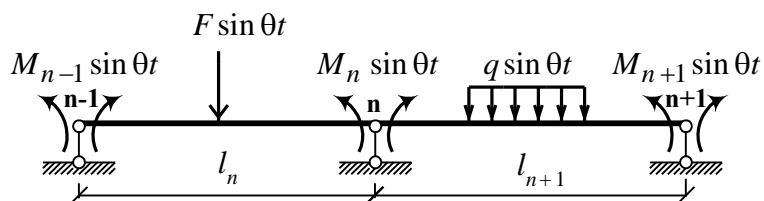


Рис. 8.11. Схема двох суміжних прогонів нерозрізної балки в основній системі

Оскільки основна система методу сил складається зі стандартних елементів, то визначення початкових параметрів  $y_0, y'_0, M_0, Q_0$ , що входять у рівняння (8.28) – (8.31), не викликає великих труднощів. У дод. 2 наведені значення зазначених параметрів для стандартних елементів.

Загальне канонічне рівняння динамічних переміщень у напрямку моментів  $M_n$  (рис. 8.11) буде мати вигляд

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{nn}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{nF} = 0. \quad (8.84)$$

Це рівняння трьох моментів динаміки споруд цілком відповідає відомому рівнянню трьох моментів статки споруд (див. п. 7.1), причому останнє можна розглядати як окремий випадок першого: при статичному навантаженні  $\theta = 0$ ,  $sl = 0$ . Число рівнянь (8.84) дорівнює числу невідомих.

Визначимо коефіцієнти і вільні члени рівняння (8.84) (рис. 8.12).

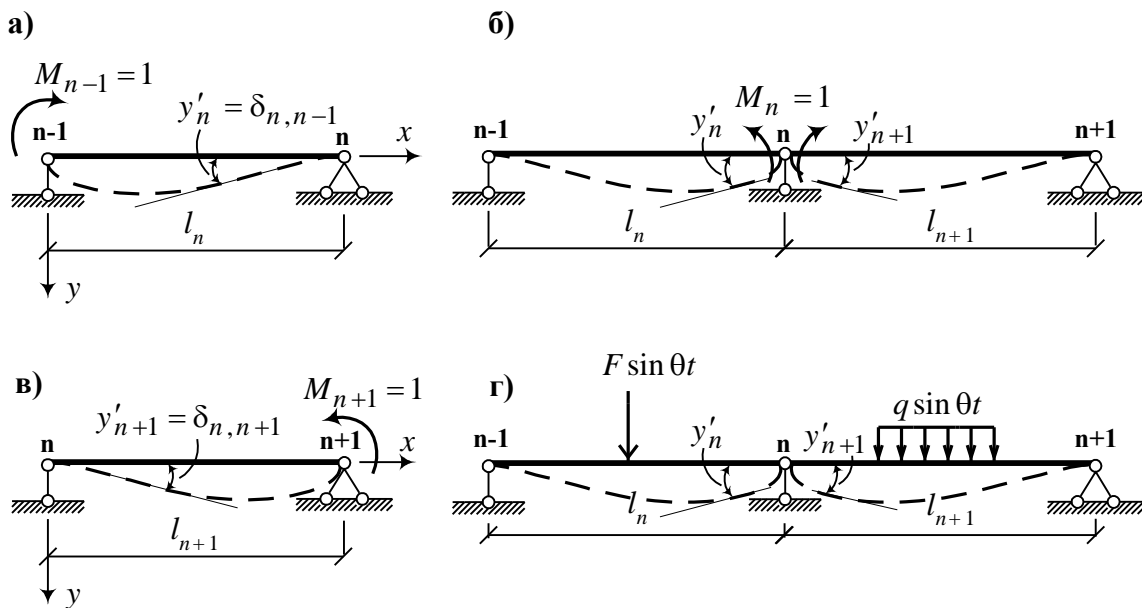


Рис. 8.12. До визначення коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь (8.84)

Тут  $\delta_{n,n-1}$  – амплітудне значення кута повороту лівого прогону на  $n$ -й опорі, викликане  $M_{n-1} = 1$  (рис. 8.12, а). Шуканий кут повороту визначається за таблицею стандартних розв’язків. Для зручності обчислень прогін  $l_n$  розвертаємо на  $180^\circ$  у горизонтальній площині так, щоб кут повороту виявився на початку координат. Тоді відповідно до схеми 2 дод. 2 маємо

$$\delta_{n,n-1} = y'_n = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_n}}{B_{sl_n}^2 - D_{sl_n}^2}. \quad (8.85)$$

Аналогічно визначаємо амплітудне значення взаємного кута повороту перерізів лівого і правого прогонів на опорі  $n$  від  $M_n = 1$  (рис. 8.12, б). Відповідно до схеми 1 дод. 2 одержуємо

$$\delta_{nn} = y'_{n+1} + y'_n = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_{n+1}} C_{sl_{n+1}} - A_{sl_{n+1}} D_{sl_{n+1}}}{B_{sl_{n+1}}^2 - D_{sl_{n+1}}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_n} C_{sl_n} - A_{sl_n} D_{sl_n}}{B_{sl_n}^2 - D_{sl_n}^2}. \quad (8.86)$$

Амплітудне значення кута повороту правого прогону (рис.8.12, в) на опорі  $n$  від  $M_{n+1} = 1$  визначається в такий спосіб (див. дод. 2, схема 2):

$$\delta_{n,n+1} = y'_{n+1} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_{n+1}}}{B_{sl_{n+1}}^2 - D_{sl_{n+1}}^2}. \quad (8.87)$$

У формулах (8.85) – (8.87)  $A_{sl_n}$ ,  $A_{sl_{n+1}}$ ,  $B_{sl_n}$ ,  $B_{sl_{n+1}}$ ,  $C_{sl_n}$ ,  $C_{sl_{n+1}}$ ,  $D_{sl_n}$ ,  $D_{sl_{n+1}}$  – функції впливу (функції Крилова), які визначаються за дод. 1 залежно від значень  $sl_n$  і  $sl_{n+1}$ .

Визначення амплітудного значення кута повороту  $\Delta_{nF}$  на опорі  $n$  від зовнішнього навантаження пов'язано з розглядом заданого вібраційного навантаження в кожному конкретному випадку. Геометрично  $\Delta_{nF}$  визначається як сума кутів повороту на опорі двох суміжних балок (рис. 8.12, г):

$$\Delta_{nF} = y'_n + y'_{n+1}.$$

Формули для кутів повороту  $y'_n$  і  $y'_{n+1}$  від заданого вібраційного навантаження наведені в дод. 2. Тут, як і раніше, при обчисленні  $y'_n$  можна проліт  $l_n$  повернути на  $180^\circ$  в горизонтальній площині і визначити  $y'_n$  як початковий параметр.

Після розв'язання системи рівнянь (8.84) і визначення опорних моментів кожен прогін нерозрізної балки розглядається під дією навантаження і знайдених опорних моментів.

Прогин, кут повороту, згинальний момент і поперечна сила в будь-якому перерізі прогону визначаються рівняннями (8.28) – (8.31).

Канонічні рівняння вільних коливань одержимо, приймаючи в (8.54) вільні члени такими, що дорівнюють нулю, тобто

$$\delta_{n,n-1} M_{n-1} + \delta_{nn} M_n + \delta_{n,n+1} M_{n+1} = 0. \quad (8.88)$$

У цих рівняннях частоти діючих навантажень замінюються частотами вільних коливань  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Рівняння (8.88) однорідні, а тому в загальному випадку потрібно визначник системи цих рівнянь прирівняти до нуля, після розкриття визначника одержати рівняння частот вільних коливань:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.89)$$

### 8.5.2.1. Приклад розрахунку нерозрвної балки методом сил

Розрахункова схема заданої балки показана на рис. 8.13, а; основна система – на рис. 8.13, б;  $s = 0,5 \text{ м}^{-1}$ ,  $EJ = \text{const}$ .

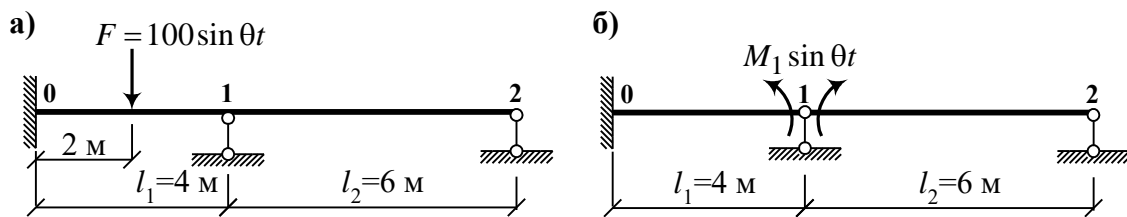


Рис. 8.13. Розрахункова схема заданої балки (а) і основна система (б)

Канонічне рівняння методу сил має вигляд

$$M_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

За допомогою таблиці стандартних рішень (дод. 2) запишемо формули для визначення  $\delta_{11}$  (схема 1 і схема б) і  $\Delta_{1F}$  (схема 12):

$$\delta_{11} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2}{A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{F}{s^2 EJ} \frac{C_{sl_1} D_{sa} - D_{sl_1} C_{sa}}{A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}}.$$

Визначаємо функції впливу за дод. 1:

$$s l_1 = 0,5 \cdot 4 = 2:$$

$$A_{sl_1} = 1,67302; \quad B_{sl_1} = 2,26808; \quad C_{sl_1} = 2,08917; \quad D_{sl_1} = 1,35878;$$

$$s a = 0,5 \cdot 2 = 1:$$

$$A_{sa} = 1,04169; \quad B_{sa} = 1,00833; \quad C_{sa} = 0,50139; \quad D_{sa} = 0,16686;$$

$$s l_2 = 0,5 \cdot 6 = 3:$$

$$A_{sl_2} = 4,53883; \quad B_{sl_2} = 5,07949; \quad C_{sl_2} = 5,52882; \quad D_{sl_2} = 4,93837.$$



За наведеними вище формулами знаходимо амплітудне значення взаємного кута повороту перерізів лівого і правого прогонів на опорі 1 від  $M_1 = 1$  і зовнішнього навантаження:

$$\delta_{11} = \frac{4,530693}{sEJ}, \quad \Delta_{1F} = \frac{26,957557}{sEJ}.$$

З канонічного рівняння визначаємо  $M_1$ , кН·м:

$$M_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -5,94998554 \cong -5,945.$$

Проведемо подальші розрахунки. Побудуємо епюру моментів. Розрахункові схеми прогонів показані на рис. 8.14, а, б.

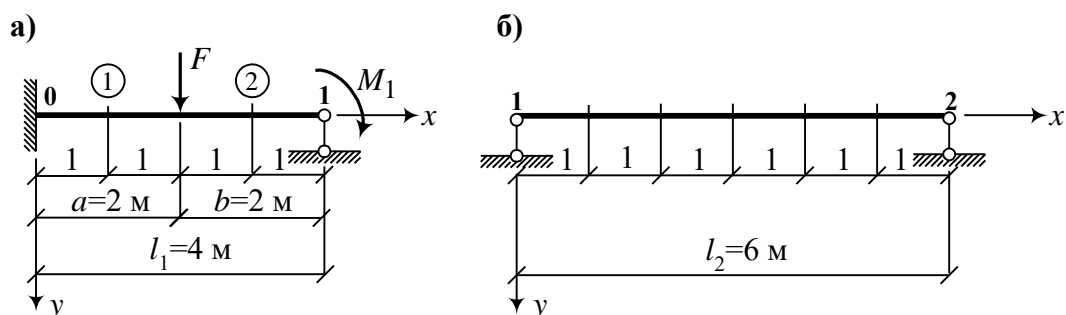


Рис. 8.14. Розрахункові схеми прогонів

Відповідно до рівняння (8.34) для першого прогону маємо

$$M_x = M_0 A_{sx} + \frac{Q}{s} B_{sx} \Big|_1 - \frac{F}{s} B_{s(x-2)} \Big|_2.$$

Початкові параметри визначаємо за формулами дод. 2 (схеми 10 і 12):

$$M_0 = \frac{F}{s} \frac{B_{sl_1} D_{sb} - B_{sb} D_{sl_1}}{B_{sl_1} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sl_1}} - M_1 \frac{D_{sl_1}}{A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}};$$

$$Q_0 = F \frac{B_{sb} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sb}}{B_{sl_1} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sl_1}} + s M_1 \frac{C_{sl_1}}{A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}}.$$

Функції впливу  $B_{sb} = B_{sa} = 1,00833$ ,  $D_{sb} = D_{sa} = 0,16686$ , тому що в нашому випадку  $sa = sb$ .

Після обчислень одержуємо  $M_0$ , кН·м,  $Q_0$ , кН:

$$M_0 = -77,097537 \cong -77,1;$$

$$Q_0 = 71,5765 \cong 71,6.$$

Перевіримо правильність обчислення початкових параметрів  $M_0$  і  $Q_0$ . Використовуємо умову: при  $x = l_1$   $M_l = -M_1$ . За рівнянням для

$M_x$  (8.34) знайдемо  $M_1$ , кН·м:

$$M_1 = -77,1 \cdot 1,67277 + \frac{71,6}{0,5} 2,26808 - \frac{100}{0,5} 1,00833 = -5,945.$$

Цей результат відповідає значенню обчисленого раніше моменту  $M_1$ .

Визначимо тепер величини згинальних моментів у різних перерізах прогону  $l_1$ .

При  $x = 1$  м:  $sx = 0,5 \cdot 1 = 0,5$ ;

$$A_{sx} = 1,00261; \quad B_{sx} = 0,50026; \quad C_{sx} = 0,12502; \quad D_{sx} = 0,02084;$$

$$M_x = -5,66 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При  $x = 2$  м:  $sx = 0,5 \cdot 2 = 1,0$ ;

$$A_{sx} = 1,04169; \quad B_{sx} = 1,00833; \quad C_{sx} = 0,50139; \quad D_{sx} = 0,16686;$$

$$M_x = 64,079 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При  $x = 3$  м:  $sx = 0,5 \cdot 3 = 1,5$ ;

$$A_{sx} = 1,21157; \quad B_{sx} = 1,56338; \quad C_{sx} = 0,14083; \quad D_{sx} = 0,56589;$$

$$s(x-2) = 0,5(3-2) = 0,5; \quad B_{s(x-2)} = 0,50026;$$

$$M_x = 30,412 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Розглянемо другий прогін нерозрізної балки (рис. 8.14, б). Згинальний момент у будь-якому перерізі прогону на підставі загального рівняння (8.34) дорівнює

$$M_x = -sEJy'_0D_{sx} + M_0A_{sx} + \frac{Q_0}{s}B_{sx}.$$

Визначимо початкові параметри  $y'_0$  і  $Q_0$ , що входять у це рівняння. За дод. 2 (схема 1) маємо

$$Q_0 = sM_1 \frac{A_{sl_2}B_{sl_2} - C_{sl_2}D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2};$$

$$y'_0 = \frac{M_1}{sEJ} \frac{B_{sl_2}C_{sl_2} - A_{sl_2}D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2}.$$

Значення функцій впливу  $A_{sl_2}$ ,  $B_{sl_2}$ ,  $C_{sl_2}$ ,  $D_{sl_2}$  визначені нами раніше, при обчисленні  $M_1$  (див. с. 292).

Після обчислення за наведеними формулами одержуємо

$$Q_0 = -8,9402429 \cong -8,94 \text{ кН};$$

$$y'_0 = -\frac{23,860043}{sEJ} \cong -\frac{23,86}{sEJ}.$$

Перевіримо правильність обчислення початкових параметрів. Для цього за рівнянням для  $M_x$  (8.34) визначимо згинальний момент на опорі 2 ( $x = l_2$ ), де він повинний дорівнювати нулю. Переконаємося в цьому:

$$M_{l_2} = 23,86 D_{sl_2} - 5,945 A_{sl_2} - \frac{8,94}{0,5} B_{sl_2}.$$

Функції  $D_{sl_2}$ ,  $A_{sl_2}$  і  $B_{sl_2}$  знайдені раніше і дорівнюють

$$D_{sl_2} = 4,93837; A_{sl_2} = 4,55883; B_{sl_2} = 5,07949.$$

Підставивши значення цих функцій у рівняння для визначення  $M_{l_2}$ , одержимо  $M_{l_2} = 0$ . Отже, початкові параметри  $y'_0$  і  $Q_0$  визначені правильно.

Визначимо тепер величини згинальних моментів у різних перерізах другого прогону.

При  $x = 1\text{м}$ :  $sx = 0,5 \cdot 1 = 0,5$ ;  $M_x = -14,413 \text{кН} \cdot \text{м}$ .

При  $x = 2\text{м}$ :  $sx = 0,5 \cdot 2 = 1,0$ ;  $M_x = -20,246 \text{кН} \cdot \text{м}$ .

При  $x = 3\text{м}$ :  $sx = 0,5 \cdot 3 = 1,5$ ;  $M_x = -21,66 \text{кН} \cdot \text{м}$ .

При  $x = 4\text{м}$ :  $sx = 0,5 \cdot 4 = 2,0$ ;  $M_x = -18,098 \text{кН} \cdot \text{м}$ .

При  $x = 5\text{м}$ :  $sx = 0,5 \cdot 5 = 2,5$ ;  $A_{sx} = 2,66557$ ;  $B_{sx} = 3,32433$ ;

$$C_{sx} = 3,46671; D_{sx} = 2,72586; M_x = -10,26 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

За результатами обчислень побудуємо епюру згинальних моментів (рис. 8.15, а).

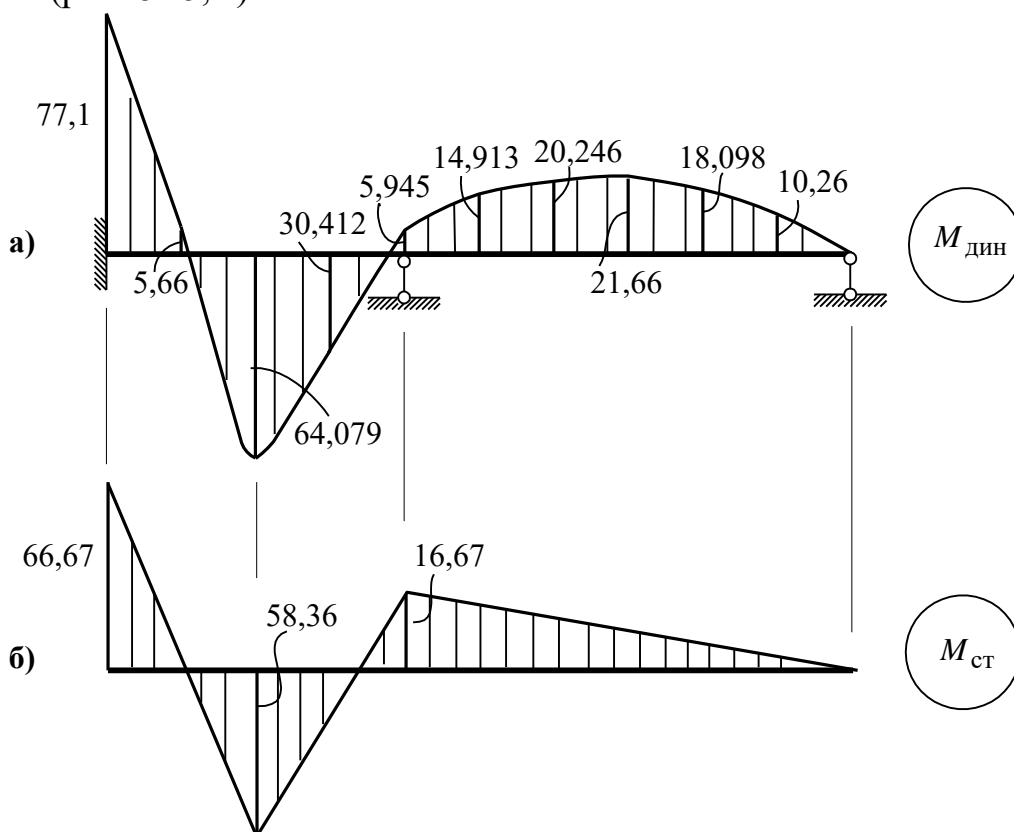


Рис. 8.15. Епюри моментів від вібраційного (а) і статичного (б) навантажень

Для порівняння на рис. 8.15, б показана еюра від статичної дії навантаження.

Знайдемо динамічні коефіцієнти:

$$\text{опора 0: } \mu = \frac{77,1}{66,67} = 1,16;$$

$$\text{середина першого прогону: } \mu = \frac{64,079}{58,36} = 1,10;$$

$$\text{опора 1: } \mu = \frac{5,95}{16,67} = 0,356;$$

$$\text{середина другого прогону: } \mu = \frac{21,66}{8,33} = 2,60.$$

З отриманих значень видно, що динамічні коефіцієнти різні і залежать як від положення навантаження на балці, так і від положення перерізу. Усе це вказує на те, що статичний розрахунок з наступним його виправленням шляхом множення на єдиний динамічний коефіцієнт не відповідає розрахунку на динамічні впливи.

Складемо тепер рівняння для визначення частот вільних коливань. Слідуючи (8.29), покладемо в канонічному рівнянні вільний член  $\Delta_{1F} = 0$ . Тоді одержимо частотне рівняння

$$(B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2})(A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}) + (B_{sl_2} - D_{sl_2})(B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}) = 0.$$

У це рівняння входить невідоме  $s_k$ , пов'язане з частотою вільних коливань рівністю (8.12):

$$s_k^4 = \frac{m \omega_k^2}{EJ}.$$

Корені рівняння частот варто визначати на ЕОМ за допомогою спеціально складеної програми, у якій реалізований, наприклад, метод половинного ділення. Найменшому кореню відповідає перша основна частота вільних коливань балки. При  $k = 1$

$$\omega_1 = s_1^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

$$\text{Для заданої балки } \omega_1 = (0,5922673)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Відношення частоти вимушених коливань  $\theta$  до основної частоти власних коливань дорівнює

$$\frac{\theta}{\omega_1} = \frac{0,5}{0,5922673} = 0,84.$$

### 8.5.3. Розрахунок нерозрізних балок, завантажених на одному прогоні

Як було зазначено раніше, рівняння трьох (і п'яти) моментів у динаміці споруд (8.84) мають зовнішню форму таку саму, як і в статичі споруд (п. 7.1). Тому є очевидним, що і для балки, яка коливається, відношення амплітуд опорних моментів для двох суміжних опор незавантаженого прольоту не залежить від амплітуд сил і їхнього розташування на завантажених прогонах.

Позначимо відношення правого опорного моменту до лівого через

$$K_n = \frac{M_n}{M_{n+1}},$$

назвемо це відношення лівим моментним відношенням, а відношення лівого опорного моменту до правого

$$K'_n = \frac{M_{n-1}}{M_n}$$

правим моментним відношенням.

Використовуючи рівняння (8.84), одержимо формули для визначення цих відношень через амплітудні переміщення:

$$K_{n+1} = -\frac{1}{\delta_{n,n-1}} \left( \delta_{nn} + \frac{\delta_{n,n-1}}{K_n} \right); \quad (8.90)$$

$$K'_n = -\frac{1}{\delta_{n,n-1}} \left( \delta_{nn} + \frac{\delta_{n,n+1}}{K'_{n+1}} \right), \quad (8.91)$$

де  $\delta_{n,n-1}$ ,  $\delta_{nn}$ ,  $\delta_{n,n+1}$  визначаються відповідно за (8.85), (8.86), (8.87).

Величини  $K_1$  на першому прогоні і  $K'_n$  на останньому прогоні залежать від умов закріплення балки на лівому і правому кінцях. Якщо балка ліворуч шарнірно обперта, то

$$K_1 = \infty, \quad K_2 = -\frac{\delta_{11}}{\delta_{12}}, \quad K_3 = -\frac{1}{\delta_{23}} \left( \delta_{22} + \frac{\delta_{21}}{K_2} \right) \quad \text{і т. д.} \quad (8.92)$$

При затисненому лівому кінці балки

$$K_1 = -\frac{\delta_{00}}{\delta_{01}} = -\frac{B_{sl_1} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sl_1}}{D_{sl_1}}. \quad (8.93)$$

Аналогічно для останнього прогону (наприклад, балка має чотири прогони, тобто  $m = 4$ ):

– при шарнірному обпиранні правого кінця балки

$$K'_4 = \infty, \quad K'_3 = -\frac{\delta_{33}}{\delta_{32}}, \quad K'_2 = -\frac{1}{\delta_{21}} \left( \delta_{22} + \frac{\delta_{23}}{K'_3} \right) \text{ і т. д.}; \quad (8.94)$$

– при защемленні правого кінця

$$K'_4 = -\frac{\delta_{44}}{\delta_{43}} = -\frac{B_{sl4} C_{sl4} - A_{sl4} D_{sl4}}{D_{sl4}}. \quad (8.95)$$

Розглядаючи тепер завантажений прогін разом із прогонами, розташованими від нього ліворуч і праворуч, і складаючи для  $n-1$  і  $n$  опор рівняння трьох моментів (8.84), знайдемо

$$M_{n-1} = \frac{\Delta_{n-1,F} K'_n + \Delta_{nF}}{\delta_{n-1,n} (K_n K'_n - 1)}; \quad (8.96)$$

$$M_n = \frac{\Delta_{nF} K_n + \Delta_{n-1,F}}{\delta_{n-1,n} (K_n K'_n - 1)}, \quad (8.97)$$

де  $\Delta_{n-1,F}$ ,  $\Delta_{nF}$  – амплітудні значення кутів повороту прогону  $l_n$  на опорах  $n-1$  і  $n$  від вібраційного навантаження. Ці переміщення визначаються як кути повороту на початку координат однопрогонової балки від заданого навантаження за дод. 2. Наприклад, для завантаженого зосередженою силою прогону (рис. 8.16) за схемою 4 дод. 2 знайдемо спочатку  $\Delta_{n-1,F}$ , а потім, розвернувши прогін на  $180^\circ$  у горизонтальній площині, –  $\Delta_{nF}$ :

$$\Delta_{n-1,F} = \frac{F}{s^2 EJ} \frac{B_{sb} D_{sl_n} - D_{sb} B_{sl_n}}{B_{sl_n}^2 - D_{sl_n}^2}; \quad (8.98)$$

$$\Delta_{nF} = \frac{F}{s^2 EJ} \frac{B_{sa} D_{sl_n} - D_{sa} B_{sl_n}}{B_{sl_n}^2 - D_{sl_n}^2}. \quad (8.99)$$

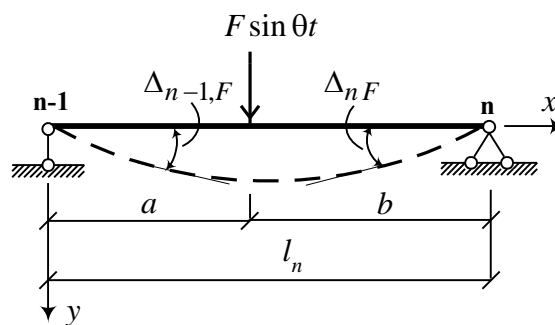


Рис. 8.16. Схема прогону  $l_n$ , завантаженого зосередженою вібраційною силою

Після визначення опорних моментів на завантаженому прогоні (8.96), (8.97) моменти на інших опорах знаходяться за допомогою коефіцієнтів за залежностями:

– ліворуч від завантаженого прогону

$$M_{n-2} = \frac{M_{n-1}}{K_{n-1}}, \quad M_{n-3} = \frac{M_{n-2}}{K_{n-2}}, \dots; \quad (8.100)$$

– праворуч від завантаженого прогону

$$M_{n+1} = \frac{M_n}{K'_{n+1}}, \quad M_{n+2} = \frac{M_{n+1}}{K'_{n+2}}, \dots \quad (8.101)$$

Далі, як було зазначено вище (див. п. 8.5.2), кожен прогін нерозрізної балки розглядається окремо. При цьому на завантажений прогін діють зовнішнє вібраційне навантаження і знайдені опорні моменти, а незавантажені між опорами прогони знаходяться тільки під дією опорних моментів. Епюри згинальних моментів і поперечних сил будуються за допомогою рівнянь (8.30) і (8.31).

### 8.5.3.1. Приклад розрахунку нерозрізної балки, завантаженої на одному прольоті

Розрахункова схема балки показана на рис. 8.17, а, основна система – на рис. 8.17, б. Жорсткість балки постійна,  $EJ = \text{const}$ . Характеристичне число  $s = 0,5 \text{ м}^{-1}$ .

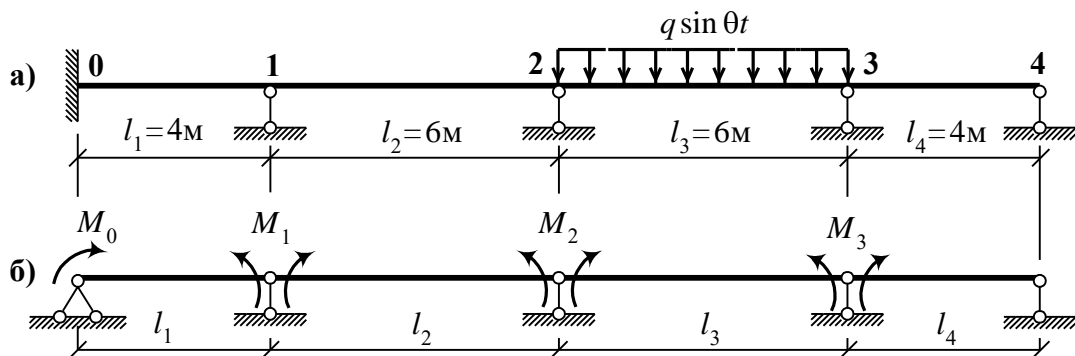


Рис. 8.17. Розрахункова схема заданої балки (а) та її основна система (б)

За виразами (8.85), (8.86), (8.87) визначимо амплітудні значення кутів повороту перерізів балки на опорах в основній системі. Попередньо знайдемо функції впливу (за дод. 1) для кожного прогону залежно від  $sl_n$ .

Для першого і четвертого прогонів:  $sl_1 = sl_4 = 0,5 \cdot 4 = 2,0$ ;

$$A_{sl_1} = 1,6730; \quad B_{sl_1} = 2,2681; \quad C_{sl_1} = 2,0892; \quad D_{sl_1} = 1,3588.$$

Для другого і третього прогонів:  $sl_2 = sl_3 = 0,5 \cdot 6 = 3,0$ ;

$$A_{sl_2} = 4,5388; B_{sl_2} = 5,0795; C_{sl_2} = 5,5288; D_{sl_2} = 4,9384.$$

Тепер знайдемо

$$\delta_{00} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_1} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sl_1}}{B_{sl_1}^2 - D_{sl_1}^2} = \frac{0,747}{sEJ};$$

$$\delta_{10} = \delta_{01} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_1}}{B_{sl_1}^2 - D_{sl_1}^2} = \frac{0,412}{sEJ};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_1} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sl_1}}{B_{sl_1}^2 - D_{sl_1}^2} = \frac{4,761}{sEJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2} = \frac{3,497}{sEJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_3} C_{sl_3} - A_{sl_3} D_{sl_3}}{B_{sl_3}^2 - D_{sl_3}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2} = \frac{8,028}{sEJ};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_3}}{B_{sl_3}^2 - D_{sl_3}^2} = \frac{3,497}{sEJ};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_4} C_{sl_4} - A_{sl_4} D_{sl_4}}{B_{sl_4}^2 - D_{sl_4}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_3} C_{sl_3} - A_{sl_3} D_{sl_3}}{B_{sl_3}^2 - D_{sl_3}^2} = \frac{4,761}{sEJ};$$

$$\delta_{34} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_4}}{B_{sl_4}^2 - D_{sl_4}^2} = \frac{0,412}{sEJ}.$$

Знайдемо моментні відношення. Лівий кінець балки затиснений, отже, ліве моментне відношення першого прогону за (8.93)

$$K_1 = -\frac{0,747}{0,412} = -1,813.$$

Інші моментні відношення визначимо за (8.90):

$$K_2 = -\frac{1}{\delta_{12}} \left( \delta_{11} + \frac{\delta_{10}}{K_1} \right) = -1,296;$$

$$K_3 = -\frac{1}{\delta_{23}} \left( \delta_{22} + \frac{\delta_{21}}{K_2} \right) = -1,524;$$



$$K_4 = -\frac{1}{\delta_{34}} \left( \delta_{33} + \frac{\delta_{23}}{K_3} \right) = -5,987.$$

Правий кінець балки шарнірно обіпертий, отже, праве моментне відношення останнього прогону

$$K'_4 = \infty.$$

Інші праві фокусні відношення визначаємо за (8.91):

$$K'_3 = -\frac{\delta_{33}}{\delta_{32}} = -1,361;$$

$$K'_2 = -\frac{1}{\delta_{21}} \left( \delta_{22} + \frac{\delta_{23}}{K'_3} \right) = -1,561;$$

$$K'_1 = -\frac{1}{\delta_{10}} \left( \delta_{11} + \frac{\delta_{12}}{K'_2} \right) = -6,119.$$

Визначимо опорні моменти завантаженого прогону. Попередньо обчислимо кути повороту завантаженого прогону на опорах **2** і **3** за дод. 2, схема 3:

$$\Delta_{2F} = \Delta_{3F} = \frac{q}{s^3 EJ} \frac{C_{sl3} D_{sl3} - (A_{sl3} - 1) B_{sl3}}{B_{sl3}^2 - D_{sl3}^2} = \frac{6,605 q}{s^3 EJ}.$$

За залежностями (8.96), (8.97) обчислимо

$$M_2 = \frac{\Delta_{2F} K'_3 + \Delta_{3F}}{\delta_{23} (K_3 K'_3 - 1)} = -2,539 q;$$

$$M_3 = \frac{\Delta_{3F} K_3 + \Delta_{2F}}{\delta_{23} (K_3 K'_3 - 1)} = -3,686 q.$$

Моменти на інших опорах знайдемо за (8.100), (8.101):

$$M_1 = \frac{M_2}{K_2} = 1,959 q, \quad M_0 = \frac{M_1}{K_1} = -1,081 q, \quad M_4 = \frac{M_3}{K'_3} = 0.$$

Для побудови епюри моментів від вібраційного навантаження розглянемо кожен прогін окремо (рис. 8.18).

Тепер для кожного прогону знаходимо початкові параметри  $y'_0$  і  $Q_0$  (дод. 1), складаємо рівняння (8.28) – (8.31), визначаємо необхідні функції впливу і робимо обчислення (див. п. 8.5.2.1).

Так, наприклад, еюра згинальних моментів показана на рис. 8.19.

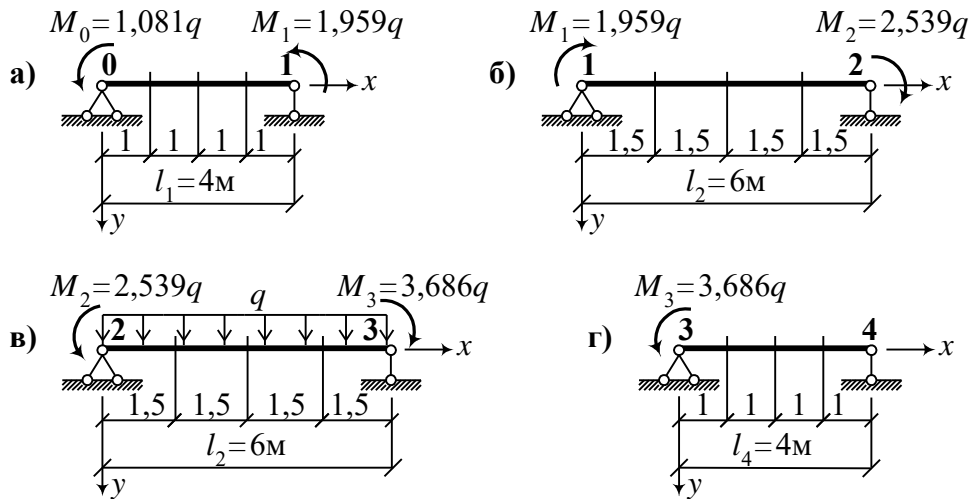


Рис. 8.18. Розрахункові схеми прогонів

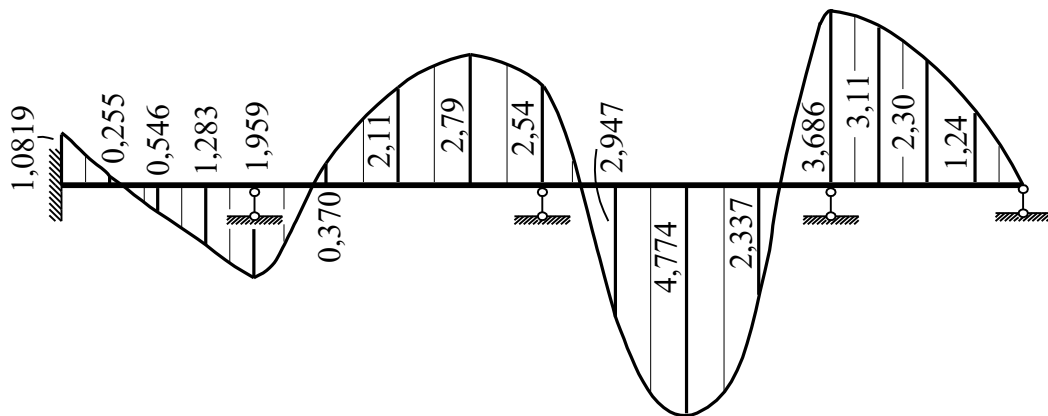


Рис. 8.19. Еюра згинальних моментів

Наведений у п. 8.5.3 метод розрахунку нерозрізних балок особливо зручний для побудови ліній впливу. Для цього одиничний вантаж слід по черзі поставити в кожен прогін нерозрізної балки, визначити опорні моменти за формулами (8.96), (8.97) і через моментні відношення – інші опорні моменти. Для побудови ліній впливу  $M_x$ ,  $Q_x$  і  $R_n$  треба залучити формули (див. п. 7.1)

$$M_x = M_x^0 + M_n \frac{x}{l_n} + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} ;$$

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} ;$$

$$R_n = R_n^0 + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} ,$$

де  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$  і  $R_n^0$  – згинальний момент, поперечна сила й опорна реакція на  $n$ -й опорі в основній системі нерозрізної балки.

У табл. 8.1 наведені ординати ліній впливу, а на рис. 8.20 – лінії впливу.

Таблиця 8.1

Ординати ліній впливу опорних моментів

№ прогону	Абсциса вантажу, м	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	Середина другого прогону		$R_2$
						$M_x$	$Q_x$	
I	$x=1$	-0,657	-0,045	0,029	-0,021	-0,059	0,014	-0,032
	$x=2$	-0,740	-0,117	0,075	-0,055	-0,154	0,035	-0,084
	$x=3$	-0,444	-0,130	0,083	-0,061	-0,170	0,039	-0,092
II	$x=1$	0,359	-0,652	-0,195	0,143	0,416	-0,097	0,225
	$x=2$	0,526	-0,019	-0,417	0,307	0,965	-0,238	0,504
	$x=3$	0,593	-1,075	0,567	0,417	1,524	-0,406 0,594	0,753
	$x=4$	0,469	-0,850	-0,569	0,418	1,029	0,400	0,915
	$x=5$	0,244	-0,443	-0,382	0,281	0,494	0,192	0,982
III	$x=1$	-0,182	0,329	-0,427	-0,389	-0,355	-0,139	1,032
	$x=2$	-0,275	0,499	-0,647	-0,752	-0,583	-0,211	1,003
	$x=3$	-0,280	0,508	-0,659	-0,956	-0,548	-0,215	0,856
	$x=4$	-0,212	0,385	-0,499	-0,911	-0,415	-0,163	0,595
	$x=5$	-0,104	0,188	-0,243	-0,585	-0,203	-0,079	0,278
IV	$x=1$	0,058	-0,105	0,135	-0,207	0,113	0,044	-0,152
	$x=2$	0,068	-0,123	0,160	-0,244	0,132	0,052	-0,179
	$x=3$	0,044	-0,079	0,102	-0,156	0,085	0,033	-0,115

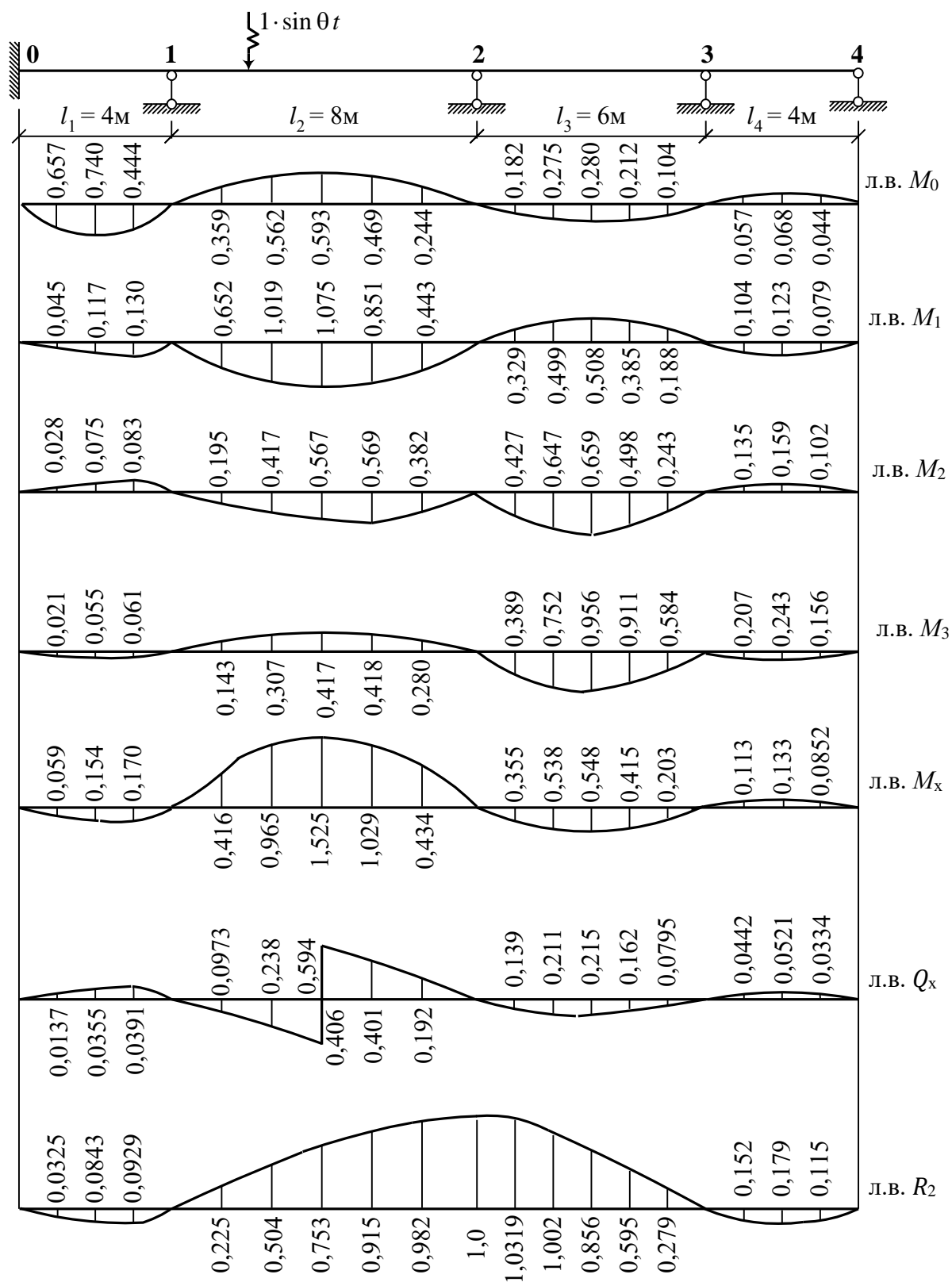


Рис. 8.20. Лінії впливу опорних моментів і  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $R_2$

Наведені на рис. 8.20 лінії впливу побудовані у припущенні, що маса вантажу мала порівняно з масою балки.

### 8.5.4. Розрахунок нерозрізних балок методом переміщень

Розглянемо нерозрізну балку, що знаходиться під дією вібраційного навантаження (рис. 8.21, а).

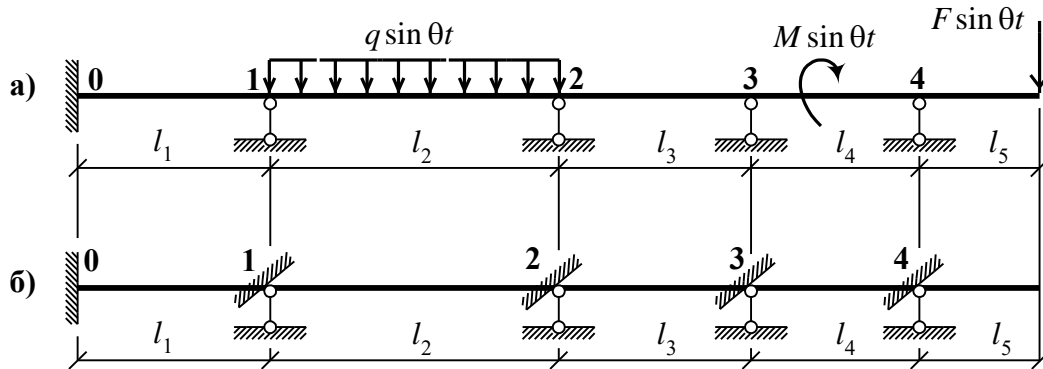


Рис. 8.21. Розрахункова схема (а) та основна система (б) нерозрізної балки

Основну систему одержимо способом уведення зв'язків, що перешкоджають кутовим переміщенням проміжних опор балки (рис. 8.21, б). Загальне канонічне рівняння вібраційних реактивних моментів для  $n$ -го зв'язку має вигляд

$$Z_{n-1} r_{n,n-1} + Z_n r_{nn} + Z_{n+1} r_{n,n+1} + R_{nF} = 0. \quad (8.102)$$

Основна система методу переміщень, як і методу сил, складається зі стандартних елементів, для яких у дод. 2 наведені розв'язки. На підставі цих розв'язків знайдемо коефіцієнти і вільний член рівняння (8.102).

У цьому рівнянні  $r_{n,n-1}$  – реактивний момент у зв'язку  $n$  від одиничного вібраційного зсуву зв'язку  $n - 1$  (рис. 8.22, а).

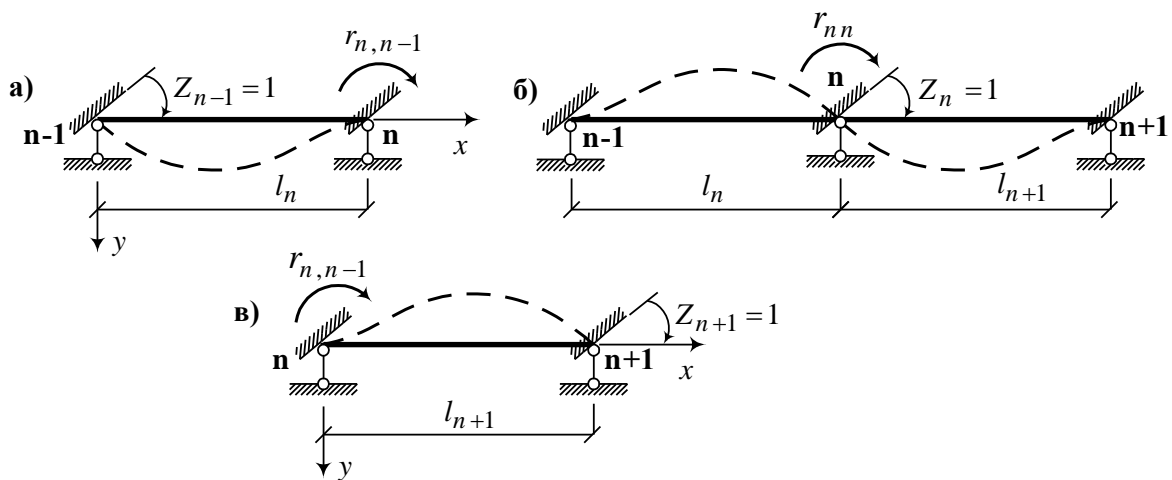


Рис. 8.22. До визначення коефіцієнтів канонічного рівняння

Розвернемо прогін  $l_n$  на  $180^\circ$  у горизонтальній площині і скористаємося дод. 2 (схема 15):

$$r_{n,n-1} = sEJ \frac{D_{sl_n}}{B_{sl_n} D_{sl_n} - C_{sl_n}^2} . \quad (8.103)$$

Амплітудне значення реактивного моменту у зв'язку  $n$  від повороту цього ж зв'язку на кут  $Z_n = 1$  (рис. 8.22, б) дорівнює (див. дод. 1, схема 14)

$$r_{nn} = sEJ \frac{A_{sl_{n+1}} D_{sl_{n+1}} - B_{sl_{n+1}} C_{sl_{n+1}}}{B_{sl_{n+1}} D_{sl_{n+1}} - C_{sl_{n+1}}^2} + sEJ \frac{A_{sl_n} D_{sl_n} - B_{sl_n} C_{sl_n}}{B_{sl_n} D_{sl_n} - C_{sl_n}^2} . \quad (8.104)$$

Тепер визначимо амплітудні значення реактивного моменту у зв'язку  $n$  від повороту зв'язку  $n+1$  на кут  $Z_{n+1} = 1$  (рис. 8.22, в). За дод. 2 (схема 15) маємо

$$r_{n,n+1} = -sEJ \frac{D_{sl_{n+1}}}{B_{sl_{n+1}} D_{sl_{n+1}} - C_{sl_{n+1}}^2} . \quad (8.105)$$

Амплітудне значення реактивного моменту у зв'язку  $n$  від зовнішнього вібраційного навантаження визначається в кожному конкретному випадку за допомогою дод. 2.

Після розв'язання системи рівнянь (8.102) і визначення реактивних зусиль в уведених зв'язках визначаються параметри напружено-деформованого стану балки та частоти вільних коливань (див. п. 8.2.4).

#### 8.5.4.1. Приклад розрахунку нерозрізної балки

Розрахункову схему заданої балки приймемо такою, як і в п. 8.5.2.1 (див. рис. 8.13).

Основна система цієї балки показана на рис. 8.23, а.

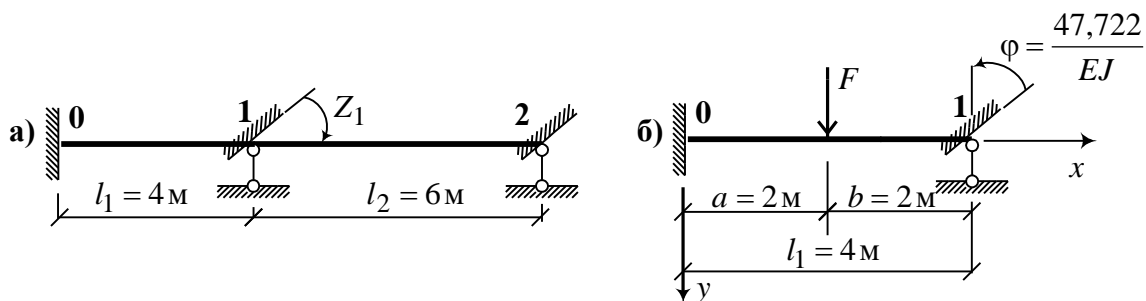


Рис. 8.23. Основна система нерозрізної балки (а) і розрахункова схема першого прогону (б)

Канонічне рівняння методу переміщень має такий вигляд:

$$Z_1 r_{11} + R_{1F} = 0.$$

Визначимо коефіцієнт і вільний член цього рівняння.

З дод. 2 (схема 18 і схема 14) одержимо

$$r_{11} = sEJ \frac{D_{sl_2}^2 - B_{sl_2}^2}{A_{sl_2} D_{sl_2} - B_{sl_2} C_{sl_2}} + sEJ \frac{A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}}{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} = 2,170 sEJ.$$

З того самого дод. 2, але використовуючи схему 24, маємо

$$R_{1F} = \frac{F D_{sl_1} C_{sa} - D_{sa} C_{sl_1}}{s B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} = 51,782.$$

Розв'язуємо канонічне рівняння і знаходимо

$$Z_1 = -\frac{R_{1F}}{r_{11}} = -\frac{47,722}{EJ}.$$

Тепер розглядаємо окремо перший прогін нерозрізної балки в основній системі. Розрахункова схема цього прогону показана на рис. 8.23, б.

Знайдемо початкові параметри  $Q_0$ , кН, і  $M_0$ , кН·м, за допомогою дод. 2 (схема 24 і схема 15):

$$M_0 = \varphi sEJ \frac{D_{sl_1}}{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} + \frac{F D_{sl_1} C_{sb} - D_{sb} C_{sl_1}}{s B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} = -77,1;$$

$$Q_0 = -\varphi s^2 EJ \frac{C_{sl_1}}{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} + F \frac{B_{sl_1} D_{sb} - C_{sl_1} C_{sb}}{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} = 71,6.$$

Знайдені значення згинального моменту і поперечної сили на початку координат відповідають  $Q_0$  і  $M_0$ , знайденим при розрахунку балки методом сил (див. рис. 8.15).

Тепер переконаємося в тому, що й опорні моменти  $M_1$  збігаються. Рівняння для згинального моменту в будь-якому перерізі прогону буде таким (див. (8.34)):

$$M_x = M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx} \Big|_1 - \frac{F}{s} B_{s(x-2)} \Big|_2.$$

При  $x = l_1$  одержимо  $M_{l_1} = -5,95$  кН·м, що відповідає раніше отриманому результату (див. рис. 8.15, а).

### 8.5.5. Розрахунок статично невизначних рам методом переміщень

Розглянемо статично невизначну раму, що знаходиться під дією вібраційного навантаження (рис. 8.24, а).

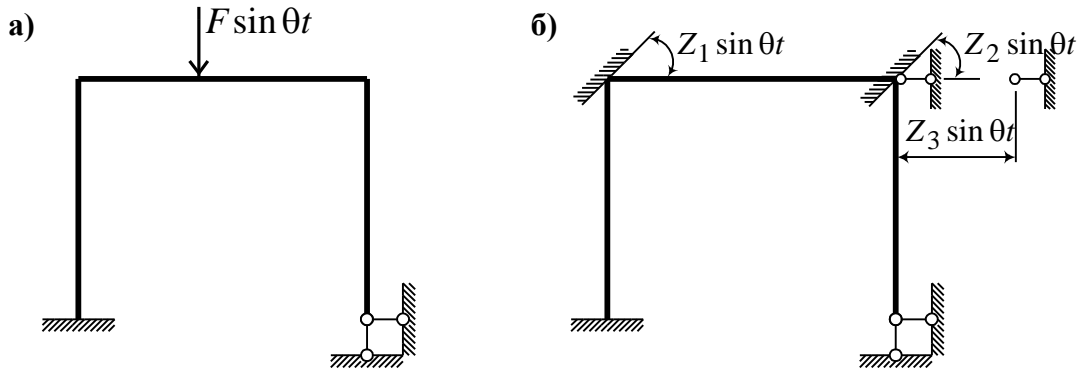


Рис. 8.24. Розрахункова схема статично невизначної рами (а) та основна система (б)

Перш ніж обґрунтувати застосовану тут методику розрахунку, зазначимо наступне. У той час, як ригель зображеної рами коливається вниз, у стійках виникають як згинальні моменти, так і стискальні сили, що будуть збільшувати прогин стійок і одночасно викликати їхнє стискання. Для спрощення розрахунку будемо нехтувати згинаючою дією поздовжньої сили і зважати в необхідних випадках на стискання, що його викликає (див. п. 8.4). Основну систему одержимо шляхом уведення зв'язків, що перешкоджають кутовим і лінійним переміщенням вузлів рами (рис. 8.24, б). Канонічне рівняння, що включає як невідомі кутові і лінійні переміщення введених зв'язків, має такий вигляд:

$$Z_1 r_{k1} + Z_2 r_{k2} + \dots + Z_n r_{kn} + R_{kF} = 0. \quad (8.106)$$

За цим рівнянням при  $k = 1, 2, \dots, n$  одержимо  $n$  канонічних рівнянь (число рівнянь дорівнює числу невідомих).

У рівнянні (8.106)  $r_{km}$  – амплітудне значення реакції у зв'язку  $k$  від одиничного вібраційного стискання зв'язку  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ );  $R_{kF}$  – амплітудна реакція того самого зв'язку від заданого вібраційного навантаження. Формули для визначення амплітудних значень реакцій  $r_{km}$  і  $R_{kF}$  наведені в дод. 2.

Після розв'язання системи рівнянь (8.106) кожен елемент рами розглядається як однопрогонова балка, завантажена зовнішнім навантаженням і знайденими реакціями введених зв'язків. Величини напружено-деформованого стану визначаються за рівняннями (8.28) – (8.31) або за рівняннями типу (8.74).



Канонічні рівняння вільних коливань мають такий вигляд:

$$Z_1 r_{k1} + Z_2 r_{k2} + \dots + Z_n r_{kn} = 0. \quad (8.107)$$

Далі складаємо визначник цієї системи рівнянь і прирівнюємо його до нуля:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.108)$$

Після розкриття визначника одержуємо рівняння частот вільних коливань.

### 8.5.5.1. Приклад розрахунку рами на вібраційні впливи

Розрахункова схема заданої рами показана на рис. 8.25, а.

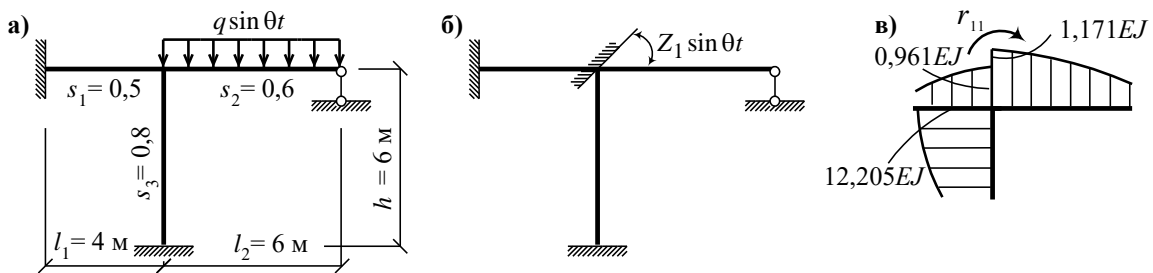


Рис. 8.25. Розрахункова схема рами (а), основна система (б), схема реактивних моментів у вузлі (в)

Основна система заданої рами наведена на рис. 8.25, б.

Канонічне рівняння методу переміщень має такий вигляд:

$$Z_1 r_{11} + R_{1F} = 0.$$

Для визначення амплітудного значення реактивного моменту  $r_{11}$  скористаємося дод. 2:

$$r_{11} = s_2 EJ \frac{D_{s_2 l_2}^2 - B_{s_2 l_2}^2}{A_{s_2 l_2} D_{s_2 l_2} - B_{s_2 l_2} C_{s_2 l_2}} + s_1 EJ \frac{A_{s_1 l_1} D_{s_1 l_1} - B_{s_1 l_1} C_{s_1 l_1}}{B_{s_1 l_1} D_{s_1 l_1} - C_{s_1 l_1}^2} + s_3 EJ \frac{A_{s_3 h} D_{s_3 h} - B_{s_3 h} C_{s_3 h}}{B_{s_3 h} D_{s_3 h} - C_{s_3 h}^2}.$$

Перший член цього рівняння являє собою амплітудне значення реактивного моменту в защемленні елемента рами з прогоном  $l_2$  при

повороті цього защемлення на кут  $Z_1 = 1$  (дод. 2, схема 18). Другий член – амплітудне значення реактивного моменту у введеному защемленні елемента рами з прогоном  $l_1$  (дод. 2, схема 14). Тут елемент рами повернутий на  $180^\circ$  у горизонтальній площині. Третій член – амплітудне значення реактивного моменту у введеному защемленні стійки рами з висотою  $h$  (дод. 2, схема 14).

За дод. 1 знайдемо функції впливу:

$$s_1 l_1 = 0,5 \cdot 4 = 2;$$

$$A_{s_1 l_1} = 1,67277; B_{s_1 l_1} = 2,26808; C_{s_1 l_1} = 2,08917; D_{s_1 l_1} = 1,35878;$$

$$s_2 l_2 = 0,6 \cdot 6 = 3,6;$$

$$A_{s_2 l_2} = 8,70801; B_{s_2 l_2} = 8,92147; C_{s_2 l_2} = 9,60477; D_{s_2 l_2} = 9,36399;$$

$$s_3 h = 0,8 \cdot 6 = 4,8;$$

$$A_{s_3 h} = 30,42341; B_{s_3 h} = 29,87746; C_{s_3 h} = 30,33591; D_{s_3 h} = 30,87362.$$

За допомогою рис. 8.25, в знаходимо

$$r_{11} = 11,995 EJ.$$

Для визначення амплітудного значення реактивного моменту в защемленні від зовнішнього навантаження скористаємося схемою 13 дод. 2:

$$R_{1F} = \frac{q}{s_2} \frac{B_{s_2 l_2} (A_{s_2 l_2} - 1) - D_{s_2 l_2} C_{s_2 l_2}}{B_{s_2 l_2} C_{s_2 l_2} - A_{s_2 l_2} D_{s_2 l_2}} = -14,182 q.$$

Розв'язуємо канонічне рівняння і визначаємо

$$Z_1 = -\frac{R_{1F}}{r_{11}} = \frac{1,182}{EJ} \cdot q.$$

Далі розглянемо елемент рами з прогоном  $l_1$ . Розрахункова схема цього елемента показана на рис. 8.26, а.

Запишемо рівняння для визначення згинального моменту в довільному перерізі першого прогону (див. (8.34)):

$$M_x = -s EJ y'_0 D_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx}.$$

Початкові параметри знайдемо, скориставшись дод. 2 (схема 14):

$$Q_0 = -\varphi s^2 EJ \frac{B_{s_1 l_1}^2 - A_{s_1 l_1} C_{s_1 l_1}}{B_{s_1 l_1} D_{s_1 l_1} - C_{s_1 l_1}^2} = 0,380 q;$$

$$M_0 = -\varphi s EJ \frac{A_{s_1 l_1} D_{s_1 l_1} - B_{s_1 l_1} C_{s_1 l_1}}{B_{s_1 l_1} D_{s_1 l_1} - C_{s_1 l_1}^2} = -1,136 q.$$

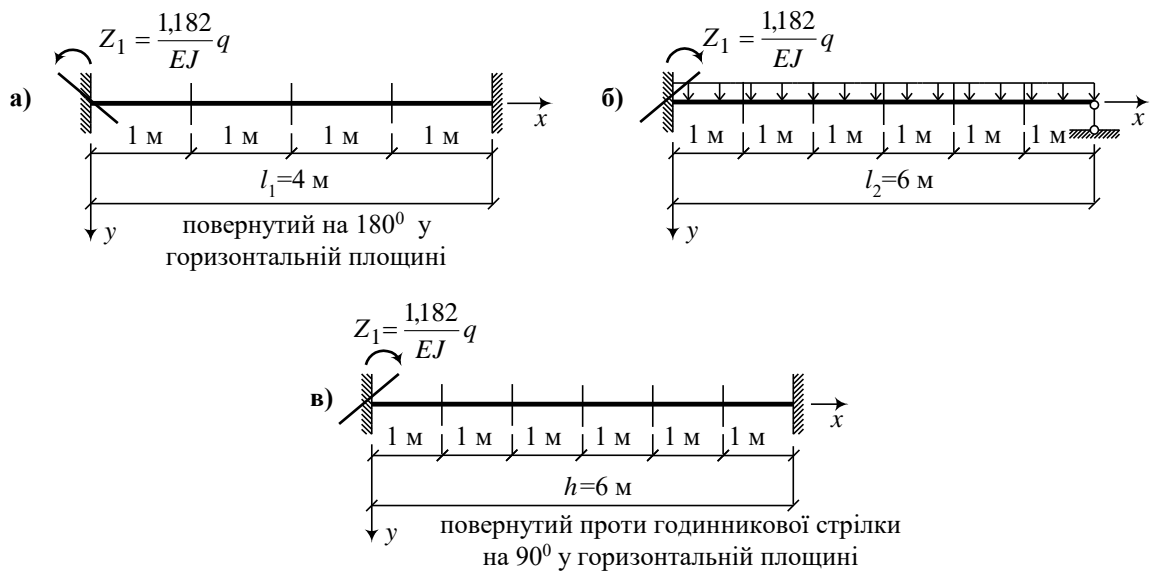


Рис. 8.26. Розрахункова схема елементів рами

З дод. 1 виписуємо значення функцій впливу:

$$\begin{aligned}
 sx = 0,5 \cdot 1 = 0,5; & \quad D_{sx} = 0,020835; \quad A_{sx} = 1,002605; \quad B_{sx} = 0,50265; \\
 sx = 0,5 \cdot 2 = 1,0; & \quad D_{sx} = 0,16685; \quad A_{sx} = 1,04169; \quad B_{sx} = 1,008335; \\
 sx = 0,5 \cdot 3 = 1,5; & \quad D_{sx} = 0,565895; \quad A_{sx} = 1,211575; \quad B_{sx} = 1,563385; \\
 sx = 0,5 \cdot 4 = 2,0; & \quad D_{sx} = 1,35878; \quad A_{sx} = 1,673025; \quad B_{sx} = 2,26808.
 \end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у різних перерізах прогону:

$$\begin{aligned}
 x = 1\text{ м} \quad M_x = -0,746 q; & \quad x = 3\text{ м} \quad M_x = 0,146 q; \\
 x = 2\text{ м} \quad M_x = -0,318 q; & \quad x = 4\text{ м} \quad M_x = 0,626 q.
 \end{aligned}$$

Аналогічно визначаються згинальні моменти в перерізах інших елементів рами (див. рис. 8.26, б, в).

За результатами обчислень побудуємо епюру моментів (рис. 8.27). Неважко переконатися в тім, що вузол 1 знаходиться в рівновазі.

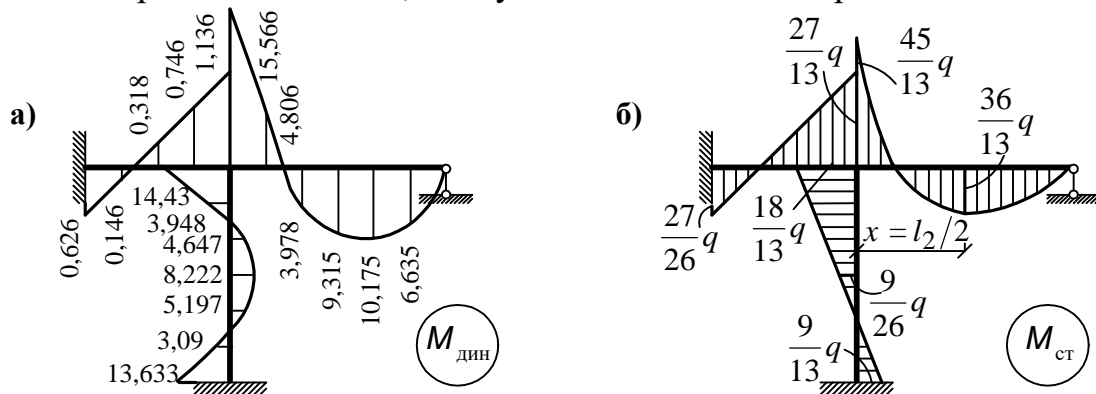


Рис. 8.27. Епюра амплітуд від вібраційного навантаження (а) та епюра згинальних моментів від статичного навантаження (б)

## ВИСНОВОК

Розвиток будівельної механіки відбувається, з одного боку, шляхом розроблення усе більш досконалих обчислювальних методів, орієнтованих на застосування ЕОМ, з іншого – шляхом уточнення розрахункових схем і вихідних гіпотез, покладених в основу розрахунку.

Використання чисельних методів і ЕОМ призвело до бурхливого розвитку будівельної механіки. Кількісні можливості ЕОМ перейшли в якісні: із будівельної механіки стержневих систем розвинулася фундаментальна будівельна механіка з єдиним підходом до стержневих, тонкостінних просторових конструкцій і масивних тіл. Ця обставина знайшла відображення у розд. 6 «Методи розрахунку статично невизначених систем».

Що стосується розвитку будівельної механіки, пов'язаного з уточненням розрахункових схем і вихідних гіпотез, то тут насамперед звернемо увагу на такі актуальні проблеми, що чекають свого вирішення.

У класичних розділах будівельної механіки розглядаються майже винятково задачі, що описуються лінійними рівняннями. Зокрема, для зв'язку між внутрішніми силами і деформаціями використовується лінійний закон Гука. Проте більшість будівельних матеріалів підпорядковуються закону Гука лише в початкових стадіях своєї роботи, тобто при малих напруженнях і деформаціях. Для вивчення умов, при яких можливе руйнування матеріалу і всієї конструкції, потрібний перехід від закону Гука до більш загальних нелінійних залежностей зусиль від деформацій, що визначаються з експерименту.

Велике значення для роботи конструкцій має повзучість матеріалу. Теорія повзучості, на відміну від теорії пластичності, виходить не з функціонального зв'язку між деформаціями і напруженнями, а зі зв'язку, що виражається диференціальними або інтегральними співвідношеннями в часі. Хоча основний вид рівняння повзучості був даний ще в 1874 р., застосування теорії повзучості до розрахунку конструкцій почалося лише в середині ХІХ ст. Необхідність урахування повзучості в розрахунках будівельних, особливо залізобетонних конструкцій, визнана усіма. Досить зазначити, що напруження в арматурі залізобетонних конструкцій може у процесі повзучості збільшитися в 2-2,5 рази, а переміщення – в 3-4 рази.

Новим словом у будівельній механіці є теорія надійності будівельних конструкцій, що враховує випадкові відхилення розрахункових величин від їхніх середніх значень. При цьому детерміновані величини і залежності замінюються випадковими, причому широко використовуються методи теорії ймовірностей.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології: Підручник / За заг. ред. В.А. Баженова. – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
2. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
3. Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
5. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.
6. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Гос. изд-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. – 516 с.
7. Снитко Н.К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1980. – 413 с.
8. Клейн Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): Учеб. пособие для студентов вузов / Г.К. Клейн, Н.Н. Леонтьев, М.Г. Ванюшенков и др.; под ред. Г.К. Клейна. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1980. – 384 с.
9. Сеницын С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем. – М.: Изд. АСВ, 2002. – 320 с.
10. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
11. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 414 с.

## ДОДАТОК 1

Чисельні значення функцій  $A_{sx}$ ,  $B_{sx}$ ,  $C_{sx}$ ,  $D_{sx}$

$s \cdot x$	$A_{sx}$	$B_{sx}$	$C_{sx}$	$D_{sx}$
1	2	3	4	5
0	1,0	0	0	0
0,01	1,0	0,01	0,00005	0
0,02	1,0	0,02	0,00020	0
0,03	1,0	0,03	0,00045	0
0,04	1,0	0,04	0,00080	0,00001
0,05	1,0	0,05	0,00125	0,00002
0,06	1,0	0,06	0,00180	0,00004
0,07	1,0	0,07	0,00245	0,00006
0,08	1,0	0,08	0,00320	0,00009
0,09	1,0	0,09	0,00405	0,00012
0,1	1,0	0,10	0,00500	0,00017
0,2	1,00007	0,20000	0,02000	0,00133
0,3	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,4	1,00106	0,40008	0,07999	0,01062
0,5	1,00261	0,50026	0,12502	0,02084
0,6	1,00539	0,60064	0,18006	0,03606
0,7	1,01001	0,70190	0,24516	0,05718
0,8	1,01702	0,80273	0,32036	0,08537
0,9	1,02735	0,90492	0,40574	0,12159
1,0	1,04169	1,00833	0,50139	0,16686
1,1	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,2	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,3	1,11920	1,33097	0,85170	0,36691
1,4	1,16043	1,44487	0,99046	0,45942
1,5	1,21157	1,56338	0,14083	0,56589
$1/2\pi$	1,25409	1,650015	1,25409	0,65015
1,6	1,27413	1,68757	1,30333	0,63800
1,7	1,39974	1,81864	1,47832	0,82698
1,8	1,44013	1,95801	1,66823	0,98416
1,9	1,54722	2,10723	1,87551	1,16093
2,0	1,67302	2,26808	2,08917	1,35878
2,1	1,82973	2,44253	2,32458	1,57937
2,2	1,98970	2,63280	2,57820	1,82430
2,3	2,18547	2,84133	2,85175	2,09562
2,4	2,40978	3,07085	3,14717	2,39537
2,5	2,66557	3,32433	3,46671	2,72586

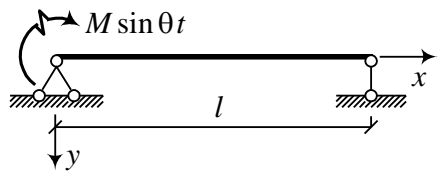
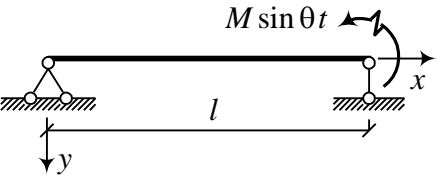
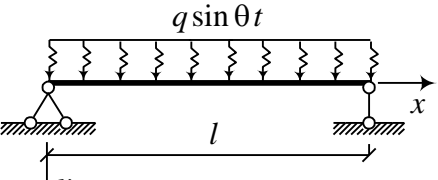
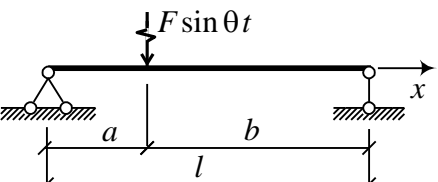
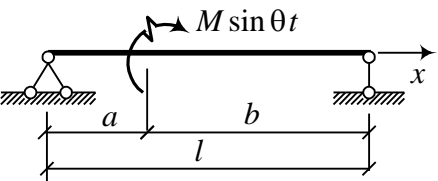
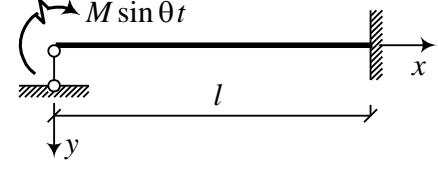
1	2	3	4	5
2,6	2,95606	3,60511	3,81295	3,08961
2,7	3,08470	3,91682	4,18872	3,48944
2,8	3,65520	4,26346	4,59747	3,92846
2,9	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
3,0	4,53883	5,07949	5,52882	4,93837
3,1	5,06118	5,55901	6,06032	5,51743
$\pi$	5,29597	5,77437	6,29597	5,77437
3,2	5,66418	6,09375	6,64247	6,15212
3,3	6,29364	6,69006	7,28112	6,84781
3,4	7,01592	7,35491	7,98277	7,61045
3,5	7,81818	8,09592	8,75464	8,44670
3,6	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,7	9,69345	9,84072	10,54205	10,37056
3,8	10,78540	10,86377	11,57637	11,47563
3,9	11,99271	12,00167	12,71864	12,68943
4,0	13,32739	13,26656	13,98093	14,02336
4,1	14,80180	14,67179	15,37662	15,49007
4,2	16,43020	16,23204	16,92046	17,10362
4,3	18,27794	11,96347	18,62874	18,87964
4,4	20,21212	19,88365	20,51945	20,83545
4,5	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,6	24,81751	24,37172	24,92966	25,36541
4,7	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
$3/2\pi$	27,83169	27,32720	27,83169	28,32720
4,8	30,42341	29,87746	30,33591	30,87362
4,9	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181
5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,58106
5,1	41,19599	40,54105	40,81801	41,46686
5,2	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,3	50,36263	49,66682	49,80826	50,49909
5,4	55,67008	54,96409	55,03539	55,73685
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,6	67,9953	67,29004	66,21974	67,92131
5,7	75,13504	74,44067	74,30033	73,99136
5,8	83,01840	82,34183	82,13288	82,80663
5,9	91,72379	91,07172	90,79631	91,44562
6,0	101,33790	100,71687	100,37773	100,99629
6,1	111,95664	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
$2\pi$	134,37338	133,87245	133,37338	133,87245

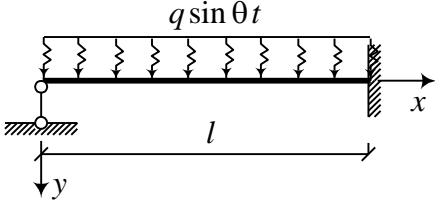
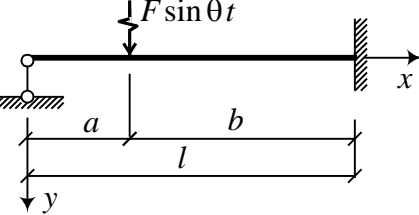
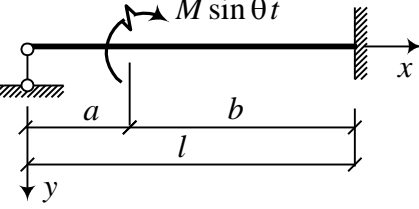
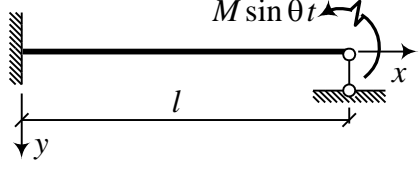
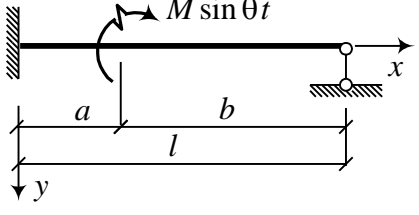
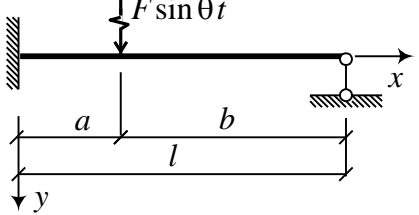
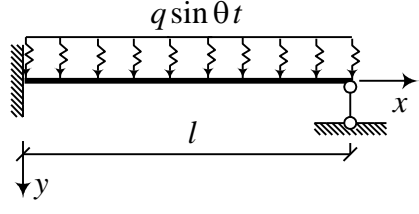
1	2	3	4	5
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,6	184,24925	183,92922	183,29902	183,61768
6,7	203,55895	208,30357	202,64457	202,89872
6,8	224,89590	224,70860	224,02740	224,21449
6,9	248,47679	248,35764	247,66106	247,77920
7,0	274,53547	274,48655	273,78157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	335,16205	335,25434	334,55370	334,46067
7,3	370,33819	370,50003	369,81211	369,64954
7,4	409,21553	409,44531	408,77698	408,54660
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,6	499,67473	500,03281	499,42347	499,06489
7,7	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
7,8	610,17757	610,64966	610,12361	609,65112
$5/2\pi$	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
7,9	674,29767	674,81986	674,34367	673,82102
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473
8,1	823,49532	823,95189	823,73886	823,28200
8,2	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714
8,3	1005,75247	1006,41912	1006,18385	1005,51695
8,4	1111,50710	1112,19393	1112,02639	1111,33933
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,99326	1228,29291
8,6	1357,57558	1358,28205	1358,25430	1357,54765
8,7	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,39658
8,8	1658,15549	1658,85342	1658,96658	1658,26850
8,9	1832,56070	1833,42607	1833,42614	1832,74284
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56489
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66360
9,2	2437,79487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56701	2735,00094	2734,44255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,59505	3022,08297
$3\pi$	3097,41192	3097,91193	3098,41197	3097,91193
9,5	3339,43414	3339,89411	3340,43031	3359,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,7	4078,92063	4079,26590	4079,88299	4079,53766
9,8	4508,47103	4508,25298	4508,90146	4508,61946
9,9	4982,14802	4982,35202	4983,03721	4982,32136
10,0	5506,19696	5506,34442	5507,03599	5506,88844

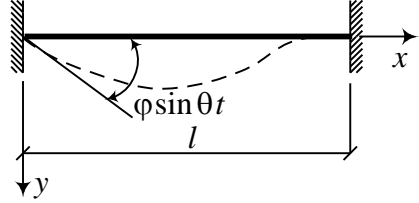
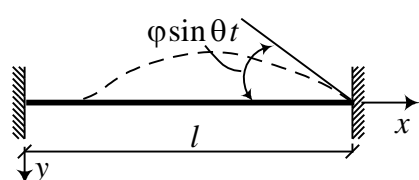
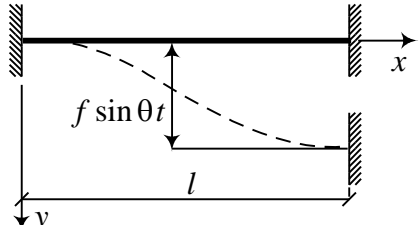
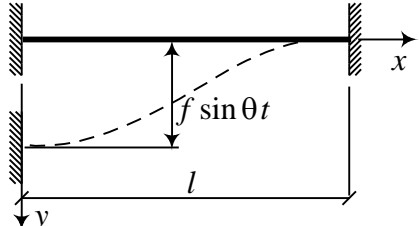
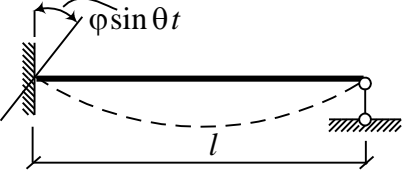
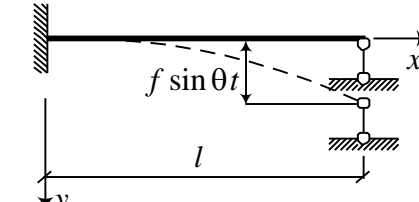
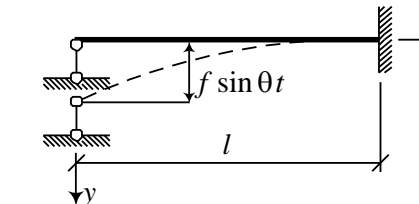


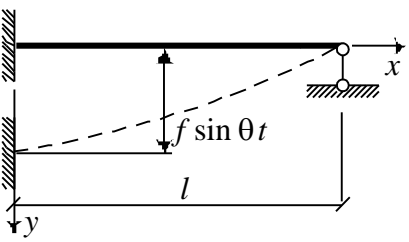
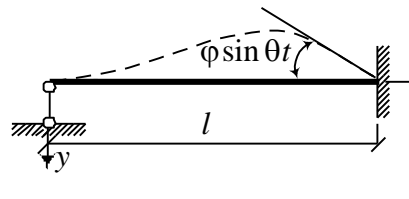
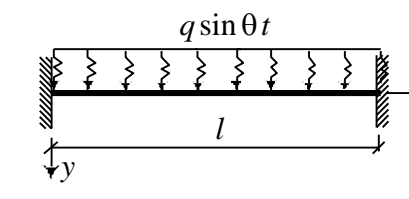
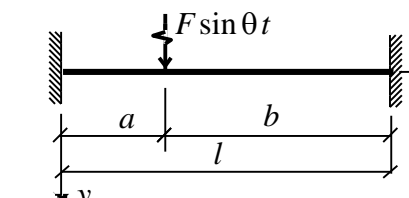
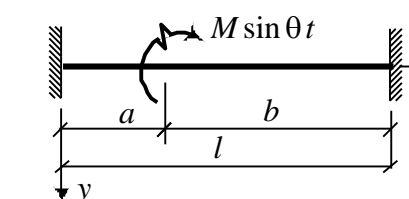
## ДОДАТОК 2

Значення початкових параметрів для однопрогонових балок

№	Схема навантаження	Значення параметрів
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1		$Q_0 = -Ms \frac{A_{sl}B_{sl} - C_{sl}D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y'_0 = \frac{M}{sEJ} \frac{B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
2		$Q_0 = Ms \frac{B_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y'_0 = \frac{M}{sEJ} \frac{D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
3		$Q_0 = \frac{q}{s} \frac{B_{sl}C_{sl} - (A_{sl} - 1)D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y'_0 = \frac{q}{s^3EJ} \frac{C_{sl}D_{sl} - (A_{sl} - 1)B_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
4		$Q_0 = F \frac{B_{sb}B_{sl} - D_{sb}D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y'_0 = \frac{F}{s^2EJ} \frac{B_{sb}D_{sl} - D_{sb}B_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
5		$Q_0 = Ms \frac{C_{sb}D_{sl} - A_{sb}B_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y'_0 = \frac{C_{sb}B_{sl} - A_{sb}D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
6		$Q_0 = Ms \frac{B_{sl}^2 - A_{sl}C_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y'_0 = \frac{M}{sEJ} \frac{B_{sl}D_{sl} - C_{sl}^2}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$

1	2	3
7		$Q_0 = \frac{q A_{sl}(A_{sl} - 1) - B_{sl}D_{sl}}{s A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y'_0 = \frac{q C_{sl}(A_{sl} - 1) - D_{sl}^2}{s^3 EJ A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
8		$Q_0 = F \frac{D_{sb}A_{sl} - C_{sb}B_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y'_0 = \frac{F D_{sb}C_{sl} - C_{sb}D_{sl}}{s^2 EJ A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
9		$Q_0 = Ms \frac{B_{sb}B_{sl} - C_{sb}A_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y'_0 = \frac{M B_{sb}D_{sl} - C_{sb}C_{sl}}{s EJ A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
10		$Q_0 = -Ms \frac{C_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $M_0 = M \frac{D_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
11		$Q_0 = Ms \frac{C_{sb}A_{sl} - A_{sb}C_{sl}}{B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$ $M_0 = -M \frac{C_{sb}B_{sl} - A_{sb}D_{sl}}{B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$
12		$Q_0 = F \frac{B_{sb}C_{sl} - D_{sb}A_{sl}}{B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$ $M_0 = \frac{F D_{sb}B_{sl} - B_{sb}D_{sl}}{s B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$
13		$Q_0 = \frac{q C_{sl}^2 - A_{sl}(A_{sl} - 1)}{s B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$ $M_0 = \frac{q B_{sl}(A_{sl} - 1) - D_{sl}C_{sl}}{s^2 B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$

1	2	3
14		$Q_0 = \varphi s^2 EJ \frac{B_{sl}^2 - A_{sl} C_{sl}}{D_{sl} B_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = \varphi s EJ \frac{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}{D_{sl} B_{sl} - C_{sl}^2}$
15		$Q_0 = \varphi s^2 EJ \frac{C_{sl}}{D_{sl} B_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = -\varphi s EJ \frac{D_{sl}}{D_{sl} B_{sl} - C_{sl}^2}$
16		$Q_0 = -f s^3 EJ \frac{B_{sl}}{D_{sl} B_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = f s^2 EJ \frac{C_{sl}}{D_{sl} B_{sl} - C_{sl}^2}$
17		$Q_0 = f s^3 EJ \frac{A_{sl} B_{sl} - C_{sl} D_{sl}}{D_{sl} B_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = f s^2 EJ \frac{D_{sl}^2 - A_{sl} C_{sl}}{D_{sl} B_{sl} - C_{sl}^2}$
18		$Q_0 = \varphi s^2 EJ \frac{A_{sl} B_{sl} - C_{sl} D_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$ $M_0 = \varphi s EJ \frac{D_{sl}^2 - B_{sl}^2}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$
19		$Q_0 = f s^3 EJ \frac{A_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$ $M_0 = f s^2 EJ \frac{B_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$
20		$Q_0 = f s^3 EJ \frac{A_{sl}^2 - D_{sl} B_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$ $y'_0 = f s \frac{A_{sl} C_{sl} - D_{sl}^2}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$

1	2	3
21		$Q_0 = f s^3 EJ \frac{A_{sl}^2 - C_{sl}^2}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$ $M_0 = f s^2 EJ \frac{C_{sl} D_{sl} - A_{sl} B_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$
22		$Q_0 = \varphi s^3 EJ \frac{B_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$ $y'_0 = \varphi \frac{D_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$
23		$Q_0 = \frac{q}{s} \frac{(A_{sl} - 1) B_{sl} + C_{sl} D_{sl}}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = \frac{q}{s^2} \frac{D_{sl}^2 - C_{sl} (A_{sl} - 1)}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$
24		$Q_0 = F \frac{D_{sb} B_{sl} - C_{sb} C_{sl}}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = \frac{F}{s} \frac{C_{sb} D_{sl} - D_{sb} C_{sl}}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$
25		$Q_0 = M s \frac{B_{sb} C_{sl} - C_{sb} B_{sl}}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = M \frac{C_{sb} C_{sl} - B_{sb} D_{sl}}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$