



**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

А.В. Попов, Р.В. Вовк

**МЕХАНІКА
І МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
нефізичних спеціальностей вищих навчальних закладів*

Харків 2011

УДК 53 (076.5)

ББК 22.2+22.36

П 58

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як
навчальний посібник для студентів нефізичних спеціальностей
вищих навчальних закладів
(№ 1/11-900 від 02.02.11 р.).*

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. О.М. Єрмолаєв
(ХНУ ім. В.Н. Каразіна),

д-р фіз.-мат. наук, член-кор. НАН України О.М. Омелянчук
(ФТІНТ НАНУ)

П58 Попов А.В., Вовк Р.В. Механіка і молекулярна
фізика. Навч. посібник. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. –
224 с., табл. 3, рис. 104, бібліогр.: 24 назв.
ISBN 978-966-2033-57-1

У навчальному посібнику викладені розділи загального курсу фізики: “Механіка”, “Коливання і хвилі”, “Молекулярна фізика і термодинаміка” відповідно до навчальних програм для технічних вищих навчальних закладів. Особлива увага приділена формулюванню основних законів і виявленню фізичного змісту величин, що до них входять.

УДК 53 (076.5)

ББК 22.2+22.36

ISBN 978-966-2033-57-1

© Українська державна академія
залізничного транспорту, 2011.

Навчальний посібник

Попов Анатолій Васильович,
Вовк Руслан Володимирович

МЕХАНІКА І МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

Відповідальний за випуск Попов А.В.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 13.10.09 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.
Умовн.-друк. арк. 7,0. Тираж 300. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

А.В. Попов, Р.В. Вовк

Механіка
і молекулярна фізика

Навчальний посібник

Харків 2011

**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

А.В.Попов, Р.В.Вовк

**Механіка
і молекулярна фізика**

Харків 2011

**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

А.В.Попов, Р.В.Вовк

**Механіка
і молекулярна фізика**

Навчальний посібник

Харків 2011

УДК 53 (076.5)

Попов А.В., Вовк Р.В. Механіка і молекулярна фізика. Навч. посібник. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 224 с.

У навчальному посібнику викладені розділи загального курсу фізики: “Механіка”, “Коливання і хвилі”, “Молекулярна фізика і термодинаміка” у відповідності до навчальних програм для технічних вищих навчальних закладів. Особлива увага приділена формулюванню основних законів і виявленню фізичного змісту величин, що до них входять.

Для студентів технічних вищих навчальних закладів.

Іл. 104, табл. 3, бібліогр.: 24 назв.

Рецензенти: проф. О.М.Єрмолаєв (ХНУ ім. В.Н.Каразіна),
член-кор. НАН України О.М.Омельянчук
(ФТІНТ НАНУ)

© Українська державна академія
залізничного транспорту, 2011

З М І С Т

Передмова	7
-----------------	---

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Розділ 1. Кінематика	8
§ 1.1. Рух матеріальної точки	9
§ 1.2. Одновимірний рух	11
§ 1.3. Векторні величини у фізиці	15
§ 1.4. Швидкість і прискорення матеріальної точки при русі вздовж криволінійної траєкторії	18
Розділ 2. Динаміка	24
§ 2.1. Визначення маси, імпульсу і сили	24
§ 2.2. Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку	25
§ 2.3. Принцип відносності Галілея	27
§ 2.4. Закон збереження імпульсу	29
§ 2.5. Центр мас системи матеріальних точок. Теорема про рух центра мас	31
Розділ 3. Робота й енергія	36
§ 3.1. Робота постійної сили	36
§ 3.2. Скалярний добуток векторів	37
§ 3.3. Робота змінної сили	37
§ 3.4. Кінетична енергія. Теорема про зв'язок роботи й енергії	39
§ 3.5. Консервативні і неконсервативні сили	40
§ 3.6. Потенціальна енергія. Закон збереження енергії в механіці	41
§ 3.7. Зв'язок сили з потенціальною енергією	44
§ 3.8. Потенціальна енергія тіла в однорідному полі тяжіння	47
§ 3.9. Потенціальна енергія пружно-деформованих пружини й однорідного стрижня	47
§ 3.10. Умови руху і рівноваги механічної системи	49

Розділ 4. Обертальний рух	52
§ 4.1. Обертання матеріальної точки по колу	52
§ 4.2. Векторний добуток векторів	56
§ 4.3. Момент сили і момент імпульсу відносно нерухомого центра	58
§ 4.4. Рівняння моментів	59
§ 4.5. Основне рівняння динаміки обертального руху. Закон збереження моменту імпульсу	59
§ 4.6. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Момент інерції	61
§ 4.7. Вільні осі і головні моменти інерції твердих тіл. Теорема Штейнера	63
§ 4.8. Кінетична енергія і робота при обертальному русі твердого тіла	66
§ 4.9. Гіроскопи	70
Розділ 5. Рух рідини	74
§ 5.1. Тиск рідини	74
§ 5.2. Рух ідеальної рідини. Рівняння нерозривності	76
§ 5.3. Рівняння Бернуллі	77
§ 5.4. В'язкість рідин і газів	81
§ 5.5. Методи вимірювання в'язкості рідин	83
§ 5.6. Ламінарна і турбулентна течія рідини	87

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Розділ 6. Гармонічні коливання	89
§ 6.1. Амплітуда, фаза, період і частота гармонічних коливань	90
§ 6.2. Фізичний маятник	94
§ 6.3. Математичний маятник	95
§ 6.4. Енергія гармонічного осцилятора	97
§ 6.5. Додавання коливань одного напрямку з однаковими періодами	98
§ 6.6. Додавання коливань з близькими частотами. Биття	100

§ 6.7.	Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу	102
§ 6.8.	Згасаючі коливання	104
§ 6.9.	Вимушені коливання. Резонанс	107
Розділ 7.	Хвилі у пружному середовищі	115
§ 7.1.	Механізм утворення хвиль у пружному середовищі. Рівняння плоскої і сферичної хвиль	116
§ 7.2.	Хвильове рівняння	121
§ 7.3.	Швидкість пружної хвилі	122
§ 7.4.	Енергія пружної хвилі. Вектор Умова	125
§ 7.5.	Стоячі хвилі	128
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА		
Розділ 8.	Молекулярно-кінетична теорія газів	133
§ 8.1.	Рівняння стану ідеального газу. Температура	135
§ 8.2.	Поняття про ймовірність. Основна задача статистичної фізики	141
§ 8.3.	Швидкості газових молекул. Дослід Штерна	146
§ 8.4.	Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями. Середня, середня квадратична і найімовірніша швидкості молекул	148
§ 8.5.	Закон рівномірного розподілу енергії за степенями вільності молекул	152
§ 8.6.	Розподіл Больцмана. Барометрична формула	153
Розділ 9.	Перший початок термодинаміки	158
§ 9.1.	Діаграми стану термодинамічної системи. Види процесів	159
§ 9.2.	Внутрішня енергія ідеального газу і кількість теплоти	161
§ 9.3.	Перший початок термодинаміки	162
§ 9.4.	Теплоємність газів	164
§ 9.5.	Ізобарний процес. Рівняння Майєра	167

§ 9.6.	Робота при ізотермічному розширенні ідеального газу	168
§ 9.7.	Адіабатний процес. Рівняння Пуассона	169
Розділ 10.	Процеси перенесення у газах	173
§ 10.1.	Частота зіткнень і довжина вільного пробігу молекул ідеального газу	174
§ 10.2.	Дифузія в газах	176
§ 10.3.	Теплопровідність газів	179
§ 10.4.	В'язкість газів	183
Розділ 11.	Другий початок термодинаміки	188
§ 11.1	Оборотні, необоротні і кругові процеси	189
§ 11.2	Принцип роботи теплової машини	191
§ 11.3	Цикл Карно	192
§ 11.4	Ентропія	198
§ 11.5	Властивості ентропії	200
§ 11.6	Ентропія і ймовірність	203
§ 11.7	Другий початок термодинаміки	205
Розділ 12.	Реальні гази, рідини, тверди тіла	208
§ 12.1	Рівняння Ван-дер-Ваальса	208
§ 12.2	Ізотерми реального газу. Критичний стан речовини	210
§ 12.3	Рідкий стан речовини	214
§ 12.4	Крісталічні й аморфні тверди тіла	217
§ 12.5	Теплоємність твердих тіл	219
Бібліографічний список		221
Предметний покажчик		223

ПЕРЕДМОВА

В основу даного навчального посібника покладено конспект лекцій, які автори протягом довгих років читали студентам ряду харківських вузів. При написанні цього посібника ми мали за доцільне викласти питання навчальної програми коротко, але достатньо повно.

Спроба написати навчальний посібник за загальним курсом фізики у цьому світі не нова. Підручників та навчальних посібників на цю тему написано немало. Здається, навіщо писати нові? Можна перевидати 2-3 хороших старих та вчитися за ними. Але життя йде вперед, все змінюється, як і наш погляд на речі, подібно до того, як змінюється мода. Стиль викладання того ж самого матеріалу в різні часи був різний і це добре відчуваєш, коли береш у руки будь-який підручник.

Сучасна тенденція – писати стисло, доступно, на рівні популяризації, “без води”. Жодному автору, мабуть, зробити це у повній мірі не вдалось. Тому будь-яка спроба викласти той самий матеріал зі своєї точки зору, тим паче з урахуванням досвіду роботи з учнями, є корисною.

Поява даного посібника може бути виправдана ще й тим, що студенти технічних вузів протягом усього навчального року зустрічаються з необхідністю виконувати лабораторні роботи, тематика яких на лекціях ще не розглядалась. Даний посібник, якщо судити з досвіду викладання, допоможе студентам розібратися в цих питаннях самостійно.

У посібнику збережено лекційний стиль викладання, отже, всі визначення, записані у вигляді формул, супроводжуються словесними формулюваннями, виділеними курсивом. У кінці кожного розділу наведений перелік питань для самоперевірки. Наведені визначення деяких математичних величин, наприклад визначення скалярного та векторного добутків векторів, основні поняття теорії ймовірностей. Це дозволяє уникнути звернення до спеціальної математичної літератури. Наприкінці посібника наведено список книг та підручників за тематикою, що розглядається. Користування книгою полегшує предметний покажчик.

Автори висловлюють щире подяку рецензентам – професорам О.М.Єрмолаєву та О.М.Омельянчуку за корисні

зауваження, які вони надали при рецензуванні посібника і які були нами враховані під час остаточного його редагування.

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

РОЗДІЛ 1

КІНЕМАТИКА

Фізика – наука про природу, про найзагальніші і найпростіші закони руху матерії. Слово *physis* в перекладі з грецької означає природа. Фізика як наука зародилася в Стародавній Греції і включала все, що людині було відомо про природні явища, зокрема і астрономію як науку про рух небесних тіл. Фізика була тоді наукою описовою, ґрунтувалася на спостереженнях і не користувалася експериментом як критерієм істинності висновків. Проведенням експериментів людство відкрило нову епоху в своєму розвитку. Це відбулося в XVII столітті нашої ери, зумовило бурхливий розвиток знань про природу і дозволило відкрити закони, яким підкоряються природні явища. Сформульовані мовою математики, вони встановлюють кількісні зв'язки між фізичними характеристиками явищ.

Накопичення знань про природу привело до виникнення таких природних наук, як хімія, біологія, геофізика, астрофізика та ін. В їх основі лежать закони, відкриті фізикою. Розвиток техніки також зумовлений успіхами фізики, оскільки тільки знання глибинних закономірностей природних явищ дає можливість створювати ефективно діючі механізми, прилади зв'язку, транспортні засоби, комп'ютери, лазери та інші атрибути високих технологій.

Курс фізики, що викладається в академії, покликаний дати той мінімум знань про явища природи, який дозволяє людині, що дістала вищу технічну освіту, орієнтуватися в потоці інформації, який витікає з різних джерел і часто стосується його професійної діяльності.

Фізика як наука умовно ділиться на декілька зв'язаних між собою розділів, що розглядають різні природні явища. Це – *механіка, молекулярна фізика, електромагнетизм, оптика, фізика атома і ядра*. Логіка розвитку науки припускає вивчення їх у вказаній послідовності.

Матерією, про яку йшлося у визначенні фізики як науки, називають всі існуючі в природі тіла і різні поля – поле тяжіння, електромагнітне поле і поле внутрішньоядерних сил. Матерія знаходиться в безперервному русі. Простішою його формою є переміщення тіл один щодо одного, тобто *механічний рух*. Ця форма руху вивчається в механіці. Даний розділ присвячений *кінематиці* – розділу механіки, в якому розглядається рух матеріальних тіл, не торкаючись причин, що його викликають.

§ 1.1. Рух матеріальної точки

Найбільш простим об'єктом, рух якого вивчає класична механіка, є матеріальна точка. *Матеріальною точкою в механіці називається тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати*. Планети, що обертаються навколо Сонця, можна вважати матеріальними точками, оскільки розміри планет, наскільки великі вони б не були, все ж таки дуже малі у порівнянні з їх відстанями від Сонця. Снаряд, випущений з гармати, також може бути прийнятий за матеріальну точку.

Механіка точки є основою для вивчення механіки взагалі, оскільки довільне тіло можна розбити на малі пов'язані один з одним макроскопічні частинки, кожен з яких можна вважати матеріальною точкою. Зокрема, *абсолютно твердим тілом називають сукупність матеріальних точок, відстані між якими при русі тіла залишаються незмінними*. При

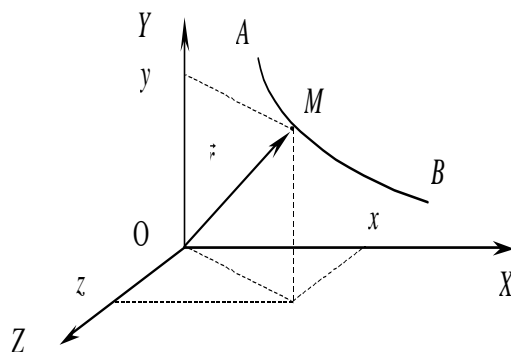


Рис. 1.1

поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії. Тому часто надалі, поки не йдеться про обертання (розд. 4), рухому матеріальну точку ми називатимемо тілом.

Тіло, відносно якого визначається положення інших тіл, називається тілом відліку. Як тіло відліку найчастіше використовують Землю, з якою пов'язують прямокутну декартову систему координат (рис. 1.1). Відрізки x, y, z , що відсікаються на осях координат перпендикулярними до них площинами, що проходять через точку M , називаються *координатами точки M* .

Рух точки повністю описаний, якщо відоме її положення у будь-який момент часу щодо вибраної системи координат. Число незалежних координат, що визначають положення тіла в просторі, називається *числом його степенів вільності*. Положення матеріальної точки задається трьома координатами, тому вона має *три* степені вільності. Тверде тіло як протягний об'єкт має *шість* степенів вільності – три координати його центра мас і три кути його повороту навколо кожної з координатних осей.

Щоб описати рух матеріальної точки, необхідно знайти функції:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Траєкторією називається сукупність послідовних положень точки, тобто лінія, яку вона описує в просторі при своєму русі (на рис. 1.1 – це лінія AB). Система рівнянь (1.1) задає траєкторію точки в параметричному вигляді, де як параметр виступає час t .

Задача механіки полягає у знаходженні функцій (1.1). Для формулювання законів, за допомогою яких можуть бути знайдені ці функції, потрібно ввести поняття *швидкості, прискорення, маси, імпульсу і сили*. У кінематиці вводяться поняття швидкості і

прискорення. Визначимо їх спочатку для точки, що рухається вздовж однієї з координатних осей, коли її положення в просторі характеризується однією координатою, а потім узагальнимо на випадок трьох координат.

§ 1.2. Одновимірний рух

Розглянемо рух матеріальної точки вздовж прямої лінії, яку виберемо як координатну вісь

X (рис. 1.2). Координатою x точки M називається її відстань від початку координат (точки O). Залежність

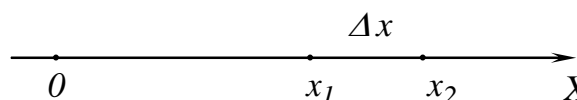


Рис. 1.2

координати від часу виражається функцією $x = x(t)$. Нехай у момент часу t матеріальна точка мала координату $x_1 = x(t)$, а через проміжок часу Δt – координату $x_2 = x(t + \Delta t)$, так що їх різниця

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t + \Delta t) - x(t)$$

є шлях, який вона пройшла за час Δt . Відношення пройденого шляху до часу

$$v_{cp} \stackrel{def}{=} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (1.2)$$

називається *середньою швидкістю* матеріальної точки за час Δt . (Значок *def* тут і далі вказує на те, що дана величина вводиться “за визначенням”. По-англійськи "definition" – визначення).

Спрямуємо Δt до нуля. Відношення $\Delta x / \Delta t$ спрямовується до межі, що називається *миттєвою швидкістю* матеріальної точки:

$$v = \stackrel{def}{\lim}_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t). \quad (1.3)$$

Миттєва швидкість точки дорівнює похідній $x'(t)$ її координати. Вона показує швидкість зміни координати в даний момент часу. Швидкість у системі СІ вимірюється в *метрах за секунду*:

$$[v] = \text{м/с}.$$

Для знаходження координати x за відомою швидкістю слід проінтегрувати за часом рівність (1.3). Оскільки $dx = v(t)dt$,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt, \quad (1.4)$$

де x_0 – координата точки у момент часу $t = 0$.

Похідна швидкості $v(t)$ за часом називається *прискоренням* матеріальної точки:

$$a = \stackrel{def}{\frac{dv}{dt}} = v'(t) = x''(t). \quad (1.5)$$

Прискорення показує швидкість зміни швидкості точки в даний момент часу і вимірюється в *метрах в секунду за секунду*:

$$[a] = \text{м} / \text{с}^2.$$

Якщо відоме прискорення матеріальної точки $a(t)$, її швидкість $v(t)$ знаходять інтегруванням співвідношення (1.5):

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt, \quad (1.6)$$

де v_0 – швидкість точки у момент часу $t = 0$. Підставивши (1.6) в (1.4), можна знайти її координату $x(t)$. Таким чином, задачу

визначення функції $x = x(t)$ можна розв'язати, якщо відоме прискорення матеріальної точки $a(t)$ і задані початкові умови: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Покажемо це на прикладах.

Приклад 1. Матеріальна точка рухається з постійним прискоренням $a = const$ (рівноприскорений рух). Знайти залежність координати точки від часу за умови, що в початковий момент часу її координата $x(0) = x_0$, а швидкість $v(0) = v_0$.

Розв'язання. Щоб знайти залежність $x = x(t)$, скористаємося рівнянням (1.4). Невідому функцію $v(t)$ знайдемо за формулою (1.6). Тоді при $a = const$ маємо

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt = v_0 + at. \quad (а)$$

Підставляючи в рівняння (1.4), одержимо шукану залежність:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) dt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (б)$$

Оскільки $s = x - x_0$ – пройдений шлях, вона набуває вигляду

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (в)$$

При рівноприскореному русі ($a = const$) середнє значення швидкості, згідно з (а) і (в):

$$v_{cp} = \frac{s}{t} = v_0 + \frac{at}{2} = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Розглядаючи це рівняння спільно з рівнянням (а) $v - v_0 = at$ і виключивши t , одержимо формулу, що зв'язує кінцеву і початкову швидкості руху, прискорення і пройдений шлях:

$$v^2 - v_0^2 = 2as. \quad (\Gamma)$$

Рівняння (а), (в) і (г) відомі зі шкільного курсу фізики.

Приклад 2. Матеріальна точка кинута горизонтально на висоті h з швидкістю v_0 у полі тяжіння Землі (рис. 1.3). Знайти рівняння траєкторії точки.

Розв'язання. Рух точки відбувається в площині. Виберемо осі координат X і Y , як показано на рис. 1.3. Оскільки сила тяжіння спрямована вертикально вниз, прискорення точки вздовж осі X дорівнює нулю і рух уздовж цієї осі рівномірний ($a_x = 0$). За формулою (1.6) знайдемо $v_x = v_0 = \text{const}$, а з рівняння (1.4) при $x_0 = 0$ одержимо

$$x(t) = v_0 t. \quad (\text{а})$$

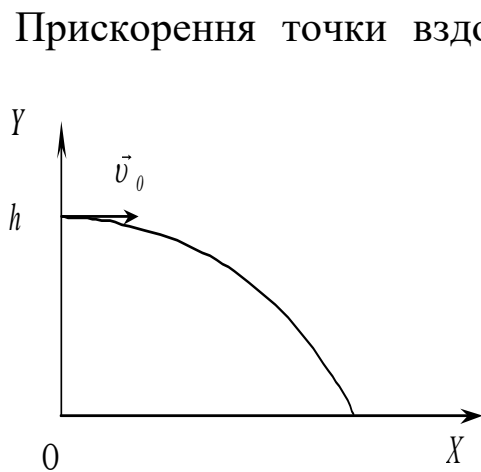


Рис. 1.3

Прискорення точки вздовж осі Y дорівнює прискоренню вільного падіння g , взятому зі знаком “мінус”, оскільки проекція вектора \vec{g} на цю вісь негативна (див. § 1.3): $a_y = -g$. Замінивши x на y у формулі (б) прикладу 1 і враховуючи, що $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$, $a = a_y$, знайдемо

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}. \quad (\text{б})$$

Рівняння (а) і (б) задають траєкторію точки в параметричному вигляді. Виразивши t з рівняння (а) і підставивши його в рівняння (б), одержимо рівняння цієї траєкторії в явному вигляді. Оскільки $t = x/v_0$, маємо

$$y(x) = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad (\text{В})$$

Це рівняння параболи з вершиною в точці $(0, h)$ і гілками, спрямованими вниз (рис. 1.3). В однорідному полі тяжіння матеріальна точка рухається по параболі.

§ 1.3. Векторні величини у фізиці

Рух матеріальної точки найчастіше відбувається по траєкторії, що не є прямою лінією. У цьому випадку швидкість точки змінюється і за модулем і за напрямком і розглядається як вектор. *Фізичні величини, що характеризуються не тільки числовим значенням, але і напрямком у просторі, називаються векторними.* Крім швидкості векторними є також *переміщення, сила, прискорення* і ряд інших величин. Приналежність якої-небудь величини до векторних встановлюється врешті-решт дослідним шляхом згідно з ознакою, чи підкоряється вона правилу складання векторів.

Як приклад розглянемо переміщення тіла спочатку з точки A у точку B , а потім у точку C (рис. 1.4). Результуюче переміщення зобразиться відрізком \overline{AC} . Позначаючи кожне з переміщень векторами \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , приходимо до висновку, що

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) і рис. 1.4 встановлюють *правило додавання векторів: щоб одержати суму векторів \vec{a} і \vec{b} , потрібно сумістити початок вектора \vec{b} з кінцем вектора \vec{a} і з'єднати початок вектора \vec{a} з кінцем вектора \vec{b} напрямленим відрізком \vec{c} , який і буде рівний сумі векторів \vec{a} і \vec{b} .*

Вектори \vec{a} і \vec{b} називаються *складовими* векторами, вектор \vec{c} – *геометричною сумою* або *результуючим* вектором.

Очевидно, що від перестановки доданків сума векторів не мінється:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} . \quad (1.8)$$

Щоб утворити суму n векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ..., використовують

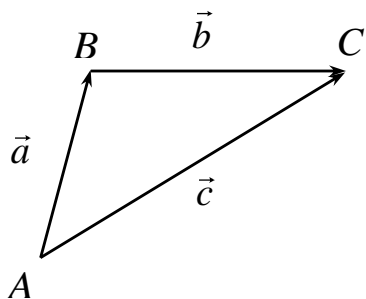


Рис. 1.4

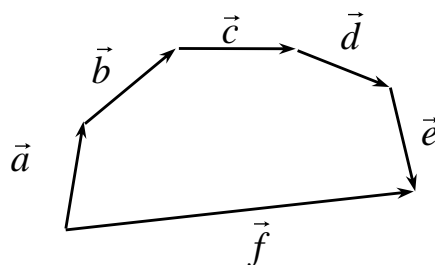


Рис. 1.5

правило багатокутника: вектори слід розташувати так, щоб початок кожного наступного складового вектора збігся з кінцем попереднього. Сума векторів – вектор, проведений з початку першого до кінця останнього з них (рис. 1.5).

Різницю векторів \vec{a} і \vec{b} можна знайти, відклавши обидва вектори \vec{a} і \vec{b} із загального початку і з'єднавши кінець вектора \vec{b} з кінцем вектора \vec{a} , який і буде вектором $\vec{a} - \vec{b}$ (рис. 1.6).

Діагональ паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , дає їх суму (правило паралелограма). Інша діагональ цього паралелограма буде їх різницею (рис. 1.7).

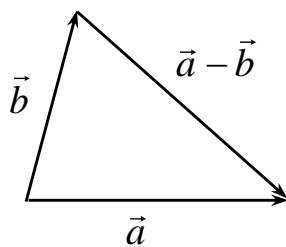


Рис. 1.6

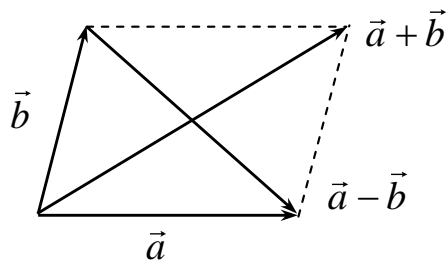


Рис. 1.7

Крім додавання і віднімання, вектори можна множити на *скаляр*, тобто величину, що характеризується тільки своїм числовим значенням. Помноживши вектор \vec{a} на число α , одержимо вектор \vec{b} , що паралельний початковому, але має довжину, в α раз відмінну від довжини вектора \vec{a} :

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}. \quad (1.9)$$

Модуль (або довжину) вектора позначають тією ж буквою, але без стрілки:

$$|\vec{a}| = a.$$

Вектори одиничної довжини – орти, що задають напрямки осей X , Y і Z декартової системи координат, позначаються відповідно буквами \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} (рис. 1.8). Користуючись правилом додавання векторів (1.7) і правилом множення на скаляр (1.9), вектор \vec{a} можна подати у вигляді суми

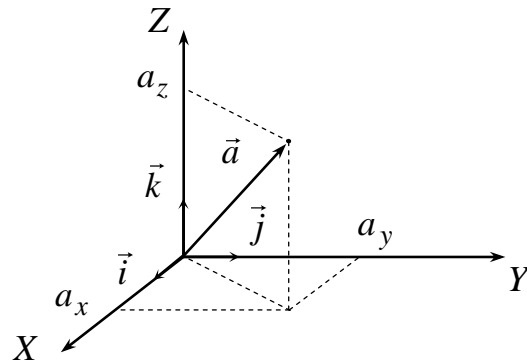


Рис. 1.8

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.10)$$

де a_x , a_y , a_z – його проекції на координатні осі, що називаються *складовими* або *компонентами* вектора \vec{a} .

Довжина вектора \vec{a} дорівнює діагоналі прямокутного паралелепіпеда. За теоремою Піфагора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.11)$$

Якщо два вектори рівні між собою, то їх проекції також рівні між собою, і навпаки, тобто якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Проекції геометричної суми декількох векторів рівні алгебраїчній сумі проекцій складових векторів: якщо $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, то

$$a_x = b_x + c_x, \quad a_y = b_y + c_y, \quad a_z = b_z + c_z.$$

Розрізняють два види прямокутних декартових координат – *праву* і *ліву*. Спрямуємо великий, вказівний і середній пальці відповідно за осями X , Y і Z . Тоді ліва рука вкаже співвідношення осей у лівій системі, а права – в правій (рис. 1.9). Надалі ми користуватимемося тільки правою системою координат.

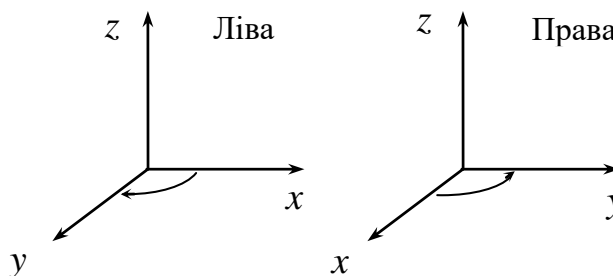


Рис. 1.9

§ 1.4. Швидкість і прискорення матеріальної точки при русі вздовж криволінійної траєкторії

Положення якої-небудь точки в просторі можна визначити вектором \vec{OM} , проведеним з початку декартової системи координат в цю точку (див. рис. 1.1). Вектор \vec{OM} називається радіусом-вектором точки M і позначається \vec{r} :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.12)$$

Нехай частинка рухається вздовж плоскої кривої, зображеної на рис. 1.10,а. Її положення в момент часу t

визначається радіусом-вектором $\vec{r}(t)$, а в момент часу $t + \Delta t$ – радіусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r}(t + \Delta t)$. Приріст радіуса-вектора

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad (1.13)$$

називається *переміщенням* частинки за час Δt . Межа відношення переміщення $\Delta \vec{r}$ до Δt при $\Delta t \rightarrow 0$ називається *миттєвою швидкістю* частинки у момент часу t :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t). \quad (1.14)$$

Вектор \vec{v} спрямований по дотичній до траєкторії в кожній її точці.

Нехай у момент t частинка знаходилася в точці M , а через час Δt – у точці M_1 (рис. 1.10,а). Швидкість у точці M позначимо вектором \vec{v} , а в точці M_1 – вектором \vec{v}_1 . Приріст швидкості за час Δt (рис. 1.10,б):

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t).$$

Межа відношення $\Delta \vec{v}$ до Δt при $\Delta t \rightarrow 0$ називається *прискоренням* частинки:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t). \quad (1.15)$$

Вектор прискорення \vec{a} паралельний вектору $\Delta\vec{v}$. Розкладемо вектор \vec{a} (рис. 1.10,б) на дві компоненти: \vec{a}_τ , паралельну вектору

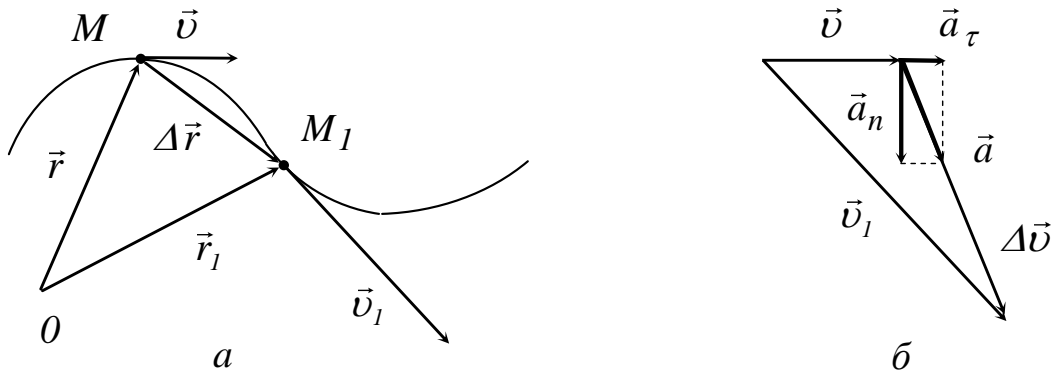


Рис. 1.10

\vec{v} , і \vec{a}_n – перпендикулярну йому:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Компонента \vec{a}_τ називається *тангенціальним прискоренням* частинки і показує швидкість зміни модуля її швидкості v :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad v = |\vec{v}|. \quad (1.16)$$

Компонента \vec{a}_n показує зміну швидкості частинки за напрямком і називається *нормальним прискоренням*, тобто спрямованим по нормалі до вектора швидкості \vec{v} . Можна показати, що нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.17)$$

де R – *радіус кривизни* траєкторії в якій-небудь її точці, v – швидкість частинки в цій точці.

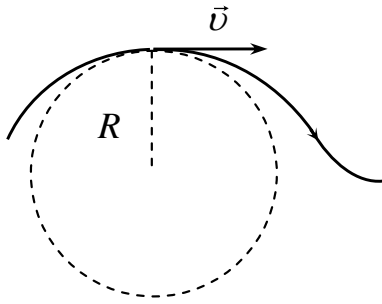


Рис. 1.11

Радіус кривизни R дорівнює радіусу кола, дотичного до траєкторії в даній точці (рис. 1.11). Оскільки радіус такого кола змінюється при переході від однієї точки до іншої, він називається *миттєвим радіусом кривизни* траєкторії.

Приклад 3. Камінь кинутий горизонтально зі швидкістю v_0 у полі тяжіння Землі. Знайти радіус кривизни траєкторії каменя через час t після початку руху.

Розв'язання. Камінь можна вважати матеріальною точкою, рух якої в полі тяжіння Землі відбувається по параболі (див. приклад 2). У момент часу t камінь досягає точки M , а його швидкість \vec{v} складає з горизонтом кут α (рис. 1.12). Вектор прискорення, з яким рухається камінь, спрямований вертикально вниз, а його модуль дорівнює прискоренню вільного падіння g . Розкладемо вектор \vec{g} на тангенціальну \vec{a}_τ і нормальну складову \vec{a}_n (рис. 1.12,б).

Радіус кривизни траєкторії каменя в точці M , згідно з рівнянням (1.17):

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{g \cos \alpha}. \quad (a)$$

Косинус кута α знайдемо з трикутника, створеного вектором швидкості \vec{v} і його проєкціями v_x і v_y (рис. 1.12,а): $\cos \alpha = v_x / v$. Підставляючи його в рівняння (а) і враховуючи, що $v_x = v_0$, $v_y = -gt$ (див. (1.6)), а $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, одержимо

$$R = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{g v_0}. \quad (6)$$

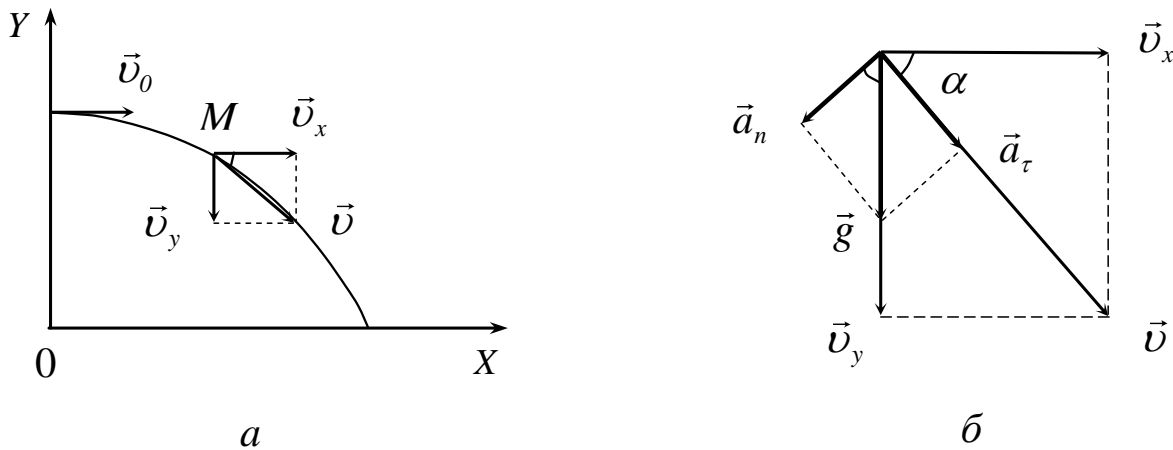


Рис. 1.12

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення фізики як науки. Що вона вивчає і яка її роль у ряду інших природничих наук?
2. Що називається механічним рухом? Який спосіб опису механічного руху вам відомий?
3. Дайте визначення матеріальної точки як основного об'єкта, рух якого вивчає механіка.
4. Що називається твердим тілом? Що таке число степенів вільності тіла?
5. Дайте визначення траєкторії руху матеріальної точки і назвіть способи її задання.
6. Сформулюйте основну задачу механіки. Перерахуйте фізичні величини, які необхідно знати для її вирішення.

7. Дайте визначення середньої і миттєвої швидкості матеріальної точки.
8. Нарисуйте графіки залежності шляху і швидкості від часу при рівномірному русі матеріальної точки.
9. Що називається прискоренням матеріальної точки і яке його фізичне значення?
10. Виведіть формули для координати і швидкості матеріальної точки при її рівноприскореному русі. Зобразіть графіки цих залежностей.
11. Виведіть формулу $v^2 - v_0^2 = 2as$, яка справедлива при рівноприскореному русі.
12. Що називається вектором? Який критерій приналежності даної величини до векторних величин? Наведіть приклади векторних величин.
13. Сформулюйте правило додавання, правило віднімання векторів.
14. Що називається проекціями вектора на координатні осі? Як формулюються правила додавання і віднімання для проекцій векторів?
15. Що називається модулем вектора і як його виразити через проекції вектора на координатні осі?
16. Що таке права і ліва декартові системи координат?
17. Дайте визначення швидкості і прискорення частинки при її русі по криволінійній траєкторії.
18. Що називається тангенціальним і нормальним прискоренням частинки?
19. Дайте визначення миттєвого радіуса кривизни траєкторії частинки в даній точці. Наведіть формулу для його знаходження.

РОЗДІЛ 2

ДИНАМІКА

Динаміка – розділ механіки, що вивчає рух тіл під дією прикладених сил. Закони механіки, які дозволяють вирішити її основну задачу – знаходження траєкторії точки, сформульовані в XVII столітті Ісааком Ньютоном. Ці закони складають основу механіки як науки. Для їх формулювання разом з швидкістю і прискоренням вводяться ще поняття маси, імпульсу і сили.

§ 2.1. Визначення маси, імпульсу і сили

Маса є мірою інертності тіла. Вона визначається порівнянням з еталонною масою. Одиниця маси у системі СІ є кілограм (кг). Еталоном маси в 1 кг служить маса дистильованої води об'ємом 1 дм³ при температурі 4°C, оскільки при цій температурі її густина максимальна. Масу тіла m можна визначити, вимірюючи його швидкість v і швидкість v_0 тіла еталонної маси m_0 , з якими ці тіла рухатимуться відштовхнувшись один від одного за допомогою стиснутої пружини (рис. 2.1). Тоді

$$m = m_0 \overset{def}{\frac{v_0}{v}}. \quad (2.1)$$

Ця маса називається *інертною масою* тіла. Сила, з якою тіло притягується до Землі, пропорційна його *гравітаційній масі* m_g . Інертні і гравітаційні маси прийнято вважати рівними, оскільки



Рис. 2.1

дослідним шляхом встановлено, що їх відмінність, навіть якщо вона й існує, не перевищує 10^{-8} відносних одиниць.

Тому на практиці масу тіла визначають зважуванням на вагах важелів, на одній з шальок яких знаходиться тіло еталонної маси.

Імпульсом тіла (матеріальної точки) \vec{p} називається добуток його маси m на швидкість \vec{v} :

$$\vec{p} \stackrel{def}{=} m \vec{v}. \quad (2.2)$$

Одиниця вимірювання імпульсу:

$$[p] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}.$$

Сила є мірою дії одного тіла на інше. *Сила визначається швидкістю зміни імпульсу тіла в часі: $\vec{F} \stackrel{def}{=} \frac{d\vec{p}}{dt}$. Якщо $m = \text{const}$, силу можна знайти, вимірюючи прискорення тіла \vec{a} :*

$$\vec{F} = m \vec{a}. \quad (2.3)$$

У системі СІ одиниця сили – *ньютон* (Н):

$$[F] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2.$$

1 Н – сила, що надає тілу масою в 1 кг прискорення в $1 \text{ м} / \text{с}^2$.

Із співвідношення (2.3) випливає, що прискорення тіла обернено пропорційне до його маси $a = F/m$, тобто маса тіла є мірою його інертності.

§ 2.2. Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку

Наведемо формулювання законів Ньютона, що лежать в основі класичної механіки.

Перший закон. Якщо на тіло не діють сили або сума цих сил рівна нулю, то тіло знаходиться в стані спокою або рухається з постійною швидкістю:

$$\vec{a} = 0, \quad \text{якщо} \quad \vec{F}_{\text{д\`a}} = 0. \quad (2.4)$$

Другий закон. Швидкість зміни імпульсу тіла в часі рівна результуючій прикладених до тіла сил:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{д\acute{a}с}}. \quad (2.5)$$

Для тіла постійної маси швидкість зміни імпульсу збігається з добутком маси на прискорення:

$$m \vec{a} = \vec{F}_{\text{д\acute{a}с}}. \quad (2.5a)$$

Третій закон. Якщо два тіла взаємодіють один з одним, то сила, що діє на перше тіло з боку другого, рівна по модулю і протилежна по напрямку силі, що діє на друге тіло з боку першого (рис. 2.2):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.6)$$

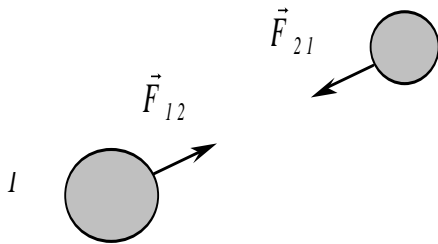


Рис. 2.2

Закони Ньютона виконуються в інерціальних системах відліку.

Системою відліку називається сукупність системи координат, пов'язаної з тілом відліку, і годинника, що знаходиться в стані спокою відносно нього.

Інерціальною називається система відліку, в якій тіло, на яке не діють ніякі сили або сума їх рівна нулю, знаходиться у спокої відносно неї або рухається з постійною швидкістю. Така система відліку не має прискорення. Перший закон, що називається також законом інерції, був сформульований Галілео Галілеєм.

Система відліку, що рухається з прискоренням, називається неінерціальною. Зокрема неінерціальною є будь-яка система відліку, що обертається. У неінерціальних системах на тіло діють

додаткові сили, що називаються *силами інерції*, не пов'язані із взаємодією тіл.

Закони Ньютона припускають *адитивність маси* і *векторний характер складання сил*. Це означає, що маса тіла, складеного з декількох тіл, рівна сумі мас кожного з цих тіл, а діюча на тіло результуюча сила є векторною сумою прикладених до нього сил.

Закони Ньютона не виводяться з яких-небудь загальних принципів. Критерієм їх справедливості служить дослід. Розрахунки, засновані на законах Ньютона, узгоджуються з експериментом. Проте закони класичної механіки мають межі застосовності. У мікросвіті діють закони *квантової механіки*, створеної на початку ХХ століття, згідно з якими не можна одночасно задати точні значення координат і імпульсів мікрочастинок, як це робиться в класичній механіці. Тому не можна говорити і про траєкторію руху мікрочастинок.

Теорія відносності, створена на початку минулого століття Альбертом Ейнштейном, обмежує застосовність класичної механіки Ньютона випадком швидкостей v , багато менших швидкості світла c ($v \ll c$). Більшість інших розділів фізики використовує рівняння класичної механіки, тобто область її застосовності дуже широка. Прикладами можуть служити небесна механіка, що вивчає рух планет сонячної системи, гідро- і аеродинаміка, теорія пружності, теорія коливань та ін.

§ 2.3. Принцип відносності Галілея

Розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K' , одна з яких – система K' – рухається щодо системи K з постійною швидкістю V , спрямованою вздовж осі X (рис. 2.3). Положення точки M у системі відліку K визначається радіусом-вектором \vec{r} , а в системі відліку K' – радіусом-вектором \vec{r}' . Зв'язок між ними дається рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overline{OO'}, \quad (2.7)$$

яке в компонентах має вигляд:

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt', \\ y &= y', \\ z &= z', \end{aligned} \quad (2.8)$$

оскільки відстань $OO' = Vt'$, а час в класичній механіці абсолютний, тобто

$$t = t'. \quad (2.8a)$$

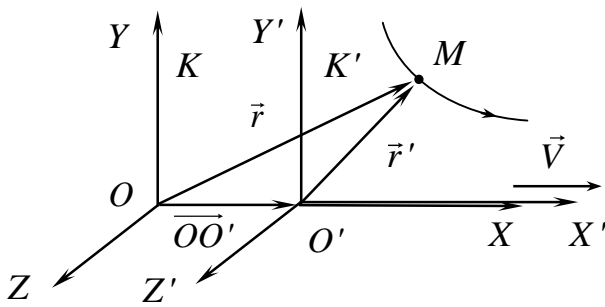


Рис. 2.3

Рівняння (2.8) и (2.8a), що зв'язують координати точки M і час в інерціальних системах відліку K і K' , називаються *перетворенням координат Галілея*.

Продиференціюємо ці рівняння по t і врахуємо, що, наприклад, $\frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} = v_x'$, оскільки $\frac{dt'}{dt} = 1$.

Тоді одержимо:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x' + V, \\ v_y &= v_y', \\ v_z &= v_z', \end{aligned}$$

або у векторному вигляді:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}. \quad (2.9)$$

Це рівняння виражає закон додавання швидкостей у класичній механіці: швидкість тіла \vec{v} у системі відліку K рівна сумі швидкості тіла \vec{v}' у системі K' і швидкості \vec{V} , з якою система відліку K' рухається щодо системи K .

Класична механіка не накладає ніяких обмежень на числове значення швидкості тіла v . У релятивістській механіці (теорії відносності) закон додавання швидкостей змінюється так, що числове значення сумарної швидкості тіла в рівнянні (2.9) не може перевищити швидкість світла c , рівну 300 тис. км/с. Це означає, що ніяке матеріальне тіло не може рухатися зі швидкістю, більшою за швидкість світла.

Продиференціювавши рівняння (2.9) за часом (з урахуванням того, що $t = t'$ і $\vec{V} = \text{const}$), одержимо $\vec{a} = \vec{a}'$, тобто прискорення тіла в обох системах відліку однакове. Оскільки сили, діючі на тіло, не залежать від вибору системи відліку, то $\vec{F}_{\text{д}a\zeta} = \vec{F}'_{\text{д}a\zeta}$, і рівняння (2.5а) (другий закон Ньютона) в системі K' зберігає свій вигляд:

$$m \vec{a}' = \vec{F}'_{\text{д}a\zeta}. \quad (2.10)$$

Рівняння, що виражають закони Ньютона, мають один і той же вигляд в будь-якій інерціальній системі відліку, тобто вони інваріантні щодо перетворення координат Галілея. Це твердження носить назву *принципу відносності Галілея*. Дослідним його підтвердженням служить те, що ніякий експеримент, поставлений в якій-небудь інерціальній системі відліку, не дозволяє визначити швидкість, з якою вона рухається, тобто всі інерціальні системи відліку рівноправні одна перед одною.

§ 2.4. Закон збереження імпульсу

Із законів Ньютона випливає закон збереження імпульсу для замкнутої системи тіл. *Замкнутою* називають систему тіл, на

які не діють зовнішні сили. Тіла системи можуть взаємодіяти тільки між собою.

Розглянемо замкнуту систему, що складається з двох тіл A і B (рис. 2.4). Згідно з третім законом Ньютона, сили їх взаємодії

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \quad (2.11)$$

За другим законом Ньютона, $\vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$, $\vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$, тому $\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt}$, тобто $\frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = 0$, звідки випливає, що $\vec{p}_A + \vec{p}_B = const$.

Для системи n тіл:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = const. \quad (2.12)$$

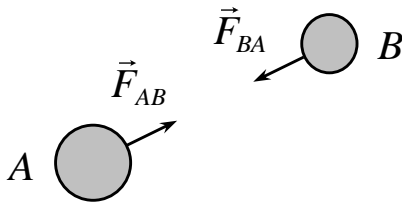


Рис. 2.4

Це рівняння виражає закон збереження імпульсу: сумарний імпульс замкнутої системи тіл не змінюється з часом.

Векторне рівняння (2.12) розпадається на три незалежні рівняння для компонент імпульсу за осями координат:

$$\sum_{i=1}^n p_{xi} = const, \quad \sum_{i=1}^n p_{yi} = const, \quad \sum_{i=1}^n p_{zi} = const.$$

Якщо вздовж якого-небудь напрямку на систему тіл не діють зовнішні сили, то проекція її сумарного імпульсу на цей напрямок залишається постійною. Це дозволяє використовувати закон збереження імпульсу при розв'язанні задач механіки.

Як показує дослід, закон збереження імпульсу виконується

при будь-яких взаємодіях тіл усередині замкнутої системи. Так, зіткнення тіл може бути пружним або непружним або може існувати взаємодія тіл за посередництва полів, тобто на відстані.

Закон збереження імпульсу є одним з фундаментальних законів фізики. Та обставина, що для добутку $m\vec{v}$ маси матеріальної точки на її швидкість виконується "закон збереження", робить доцільним дати йому спеціальну назву – імпульсу \vec{p} .

§ 2.5. Центр мас системи матеріальних точок.

Теорема про рух центра мас

Сукупність матеріальних точок або тіл, які за умовою задачі можна розглядати як матеріальні точки, називається *механічною системою* або *системою матеріальних точок*. Нехай усі вони рухаються відносно деякої системи відліку K . Рух кожної окремої точки може бути дуже складним, оскільки, окрім зовнішніх сил, на неї діють ще і сили з боку решти матеріальних точок. Можна, проте, простим способом описати рух усієї системи в цілому, якщо ввести поняття *центра мас*.

Позначимо \vec{r}_i радіус-вектор точки масою m_i , а \vec{r}_c – радіус-вектор центру мас системи. За визначенням

$$\vec{r}_c \stackrel{def}{=} \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.13)$$

Якщо початок системи відліку K помістити в точку C , то $\vec{r}_c = 0$ і з (2.13) одержимо рівняння для знаходження координат центра мас:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0. \quad (2.14)$$

Знайдемо положення центра мас системи, що складається з двох тіл (матеріальних точок) масами m_1 і m_2 , віддалених одна від одної на відстань l (вважаємо $m_1 > m_2$). Вісь X спрямуємо вздовж прямої, що сполучає ці точки (рис. 2.5). Тоді рівняння (2.14) $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$ у проекції на вісь X набуває вигляду

$$-m_1 x_c + m_2 (l - x_c) = 0,$$

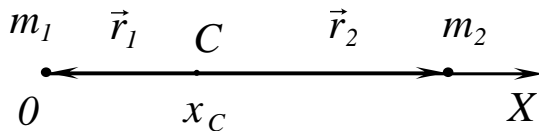


Рис. 2.5

звідки відстань від тіла більшої маси m_1 до центра мас C :

$$x_c = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Відстань від точки C до тіла меншої маси m_2 :

$$l - x_c = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Відношення цих відстаней обернено пропорційне до відношення мас: $\frac{x_c}{l - x_c} = \frac{m_2}{m_1}$. Таким чином, центр мас лежить між точками m_1 і m_2 на прямій, що їх сполучає, ближче до тіла більшої маси m_1 .

З визначення випливає, що центр мас сукупності матеріальних точок не може виявитися поза сферою, що включає в собі всі ці точки.

Тверде тіло можна представити у вигляді сукупності матеріальних точок, відстані між якими незмінні. В однорідному полі тяжіння до центра мас тіла прикладена рівнодіюча паралельних сил, що діють на кожен з цих точок. Тому центр мас є в той же час

центром тяжіння тіла. Якщо зовнішнє поле не однорідне, то центр мас і центр тяжіння не збігаються.

Центр мас тіла називають ще *центром інерції*, оскільки прикладена до центра мас сила породжує рух тіла у напрямку її дії з прискоренням, що визначається другим законом Ньютона $\vec{a} = \vec{F}/m$, тобто маса тіла виступає в ролі інертної маси матеріальної точки, що просторово збігається з його центром мас.

Центр мас тіла, що має яку-небудь симетрію, розташований у центрі симетрії або на осі симетрії. У тіл неправильної форми положення центра мас можна знайти експериментально. Для цього тіло потрібно підвісити по черзі за три різні точки і провести через них вертикальні прями. Ці лінії перетнуться в центрі мас тіла.

Продиференціювавши рівність (2.13) за часом, одержимо швидкість руху центра мас:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.15)$$

Ця швидкість рівна сумі імпульсів усіх точок системи, поділеної на її повну масу. Сумарний імпульс складових механічної системи тіл, як випливає з рівняння (2.15), рівний добутку маси системи на швидкість її центра мас:

$$\vec{p}_{\text{н\o}} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot \vec{v}_{\text{н}}, \quad (2.16)$$

тобто центр мас рухається як матеріальна точка, маса якої рівна масі всій системи.

Доведемо, що центр мас є носієм всього імпульсу системи. Для простоти розглянемо систему двох тіл (точкових мас m_1 і m_2), зображену на рис. 2.6. Сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 прикладені до тіл ззовні, а сили \vec{F}_{12} і \vec{F}_{21} – внутрішні сили їх взаємодії.

Запишемо рівняння руху кожного з тіл:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}.$$

Додамо їх і врахуємо, що за третім законом Ньютона $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, так що сума внутрішніх сил перетворюється в нуль.

Тоді

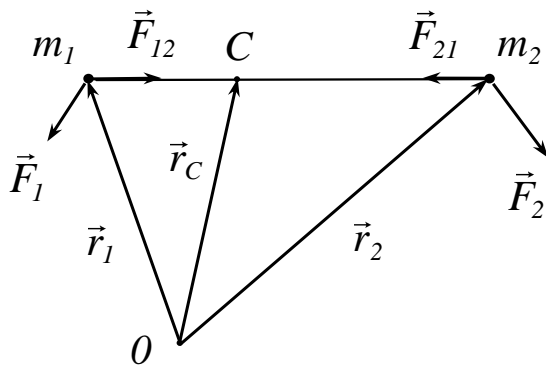


Рис. 2.6

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (2.17)$$

Використовуючи визначення центра мас (2.13), ліву частину подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{dt^2} &= \\ &= (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = (m_1 + m_2) \vec{a}_c, \end{aligned}$$

де \vec{a}_c – прискорення центра мас.

Позначивши суму мас тіл через m ($m = m_1 + m_2$), а суму зовнішніх сил через $\vec{F}_{\vec{n}\hat{o}i}$ ($\vec{F}_{\vec{n}\hat{o}i} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$), з (2.17) одержимо

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\vec{n}\hat{o}i}. \quad (2.18)$$

Це рівняння руху матеріальної точки масою m під дією сили $\vec{F}_{\vec{n}\hat{o}i}$. Таким чином, *центр мас системи матеріальних точок рухається як одна матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса системи і на яку діє сила, рівна сумі зовнішніх сил, прикладених до кожної з матеріальних точок.* Це твердження складає формулювання *теорему про рух центра мас.*

За відсутності зовнішніх сил або рівності нулю їх геометричної суми центр мас рухається рівномірно і прямолінійно або залишається у спокої. У цьому випадку рівняння (2.16) виражає закон збереження імпульсу.

З принципу незалежності дії сил випливає, що теорему про рух центра мас можна застосувати до руху вздовж кожної з координатних осей. Математичним виразом цього служить еквівалентність векторного рівняння (2.18) трьом скалярним рівнянням для проекцій тих же векторів на координатні осі X , Y і Z :

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = F_x^{\vec{n}\hat{o}i}, \quad m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = F_y^{\vec{n}\hat{o}i}, \quad m \frac{d^2 z_c}{dt^2} = F_z^{\vec{n}\hat{o}i}. \quad (2.19)$$

Досліджуючи рух центра мас уздовж якого-небудь напрямку, наприклад уздовж осі X , ми можемо розглядати цей рух так, ніби руху у напрямку двох інших осей не відбувалося.

Рівняння (2.19) виражають ту форму, в якій закон збереження імпульсу застосовується на практиці при розв'язанні задач механіки, оскільки в земних умовах ми ніде не зустрічаємо замкнутої системи тіл, що відповідає наведеному вище її визначенню.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення маси, імпульсу і сили. Що таке інертна і гравітаційна маси?
2. Наведіть формулювання першого закону Ньютона і дайте визначення інерціальної системи відліку.
3. Сформулюйте другий і третій закони Ньютона і поясніть, чому вони не виконуються в неінерціальних системах відліку.
4. Позначте межі застосовності класичної механіки, встановлені у ХХ столітті квантовою механікою і теорією відносності.
5. Запишіть формули перетворення координат Галілея й отримайте закон додавання швидкостей у класичній механіці.
6. Сформулюйте принцип відносності Галілея.

7. Що називається замкнутою системою тіл? Чи реалізуються такі системи в земних умовах?
8. Сформулюйте закон збереження імпульсу.
9. Дайте визначення центра мас системи матеріальних точок.
10. Як знайти положення центра мас і центра тяжіння тіла довільної форми? Чи завжди вони збігаються і як це обґрунтувати?

РОЗДІЛ 3

РОБОТА Й ЕНЕРГІЯ

Уявлення про роботу, як і про сили, запозичене з нашого повсякденного досвіду, має у фізиці цілком певний сенс. Роботу вимірюють добутком сили, що діє на тіло у напрямку його переміщення, на модуль цього переміщення. Енергію вимірюють роботою, яку може виконати тіло.

У механіці вводяться поняття *кінетичної* і *потенціальної* енергії. Їх сума за певних умов є постійною величиною, тобто зберігається в процесі руху тіл. Принцип збереження механічної енергії часто дає можливість обійтися без застосування законів Ньютона і провести простим і швидким способом аналіз руху механічної системи. Викладенню цих і пов'язаних з ними питань присвячений цей розділ.

§ 3.1. Робота постійної сили

Нехай тіло, на яке діє постійна сила \vec{F} , рухаючись по прямій, проходить шлях s (рис. 3.1). *Роботою цієї сили називається добуток модуля сили на переміщення s точки її прикладання і на косинус кута α між напрямком сили і напрямком переміщення:*

$$A = F s \cos \alpha \quad (\vec{F} = \text{const}). \quad (3.1)$$

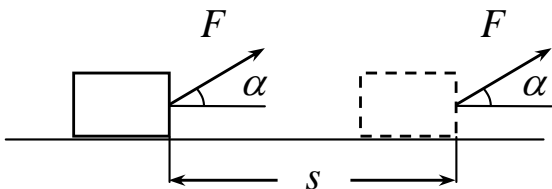


Рис. 3.1

Одиницею вимірювання роботи в системі СІ служить *джоуль* (Дж). Це робота сили в 1 Н на шляху в 1 м (при $\alpha = 0$):

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}.$$

Праву частину формули (3.1) можна записати у вигляді *скалярного добутку* вектора сили \vec{F} і вектора переміщення \vec{s} :

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (3.2)$$

§ 3.2. Скалярний добуток векторів

Разом з операціями додавання, віднімання і множення вектора на скаляр, розглянутими в розд. 1, можна ввести операцію множення двох векторів. Можна визначити дві різні дії множення векторів: множення *скалярне* і множення *векторне*. Зупинимось спочатку на першому з них, а друге введемо нижче, в розд. 4.

Скалярним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається добуток модулів обох векторів, помножений на косинус кута між ними.

Позначатимемо скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} точкою між ними. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (3.3)$$

Вживаються й інші позначення скалярного добутку:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \vec{a}\vec{b} \equiv (\vec{a}, \vec{b}).$$

В результаті скалярного множення векторів виходить *скаляр*, тобто число, що і пояснює назву скалярного добутку.

§ 3.3. Робота змінної сили

Якщо траєкторія рухомого тіла (матеріальної точки) не є прямою, а діюча на нього сила не постійна, то для обчислення роботи розіб'ємо весь шлях на прямолінійні відрізки $\Delta \vec{s}_i$ досить малої довжини, щоб діючу на тіло на кожному з цих відрізків силу можна було вважати постійною (рис. 3.2). Роботу, яка виконується при переміщенні тіла з точки 1 в точку 2, подамо у вигляді суми робіт на кожному з відрізків:

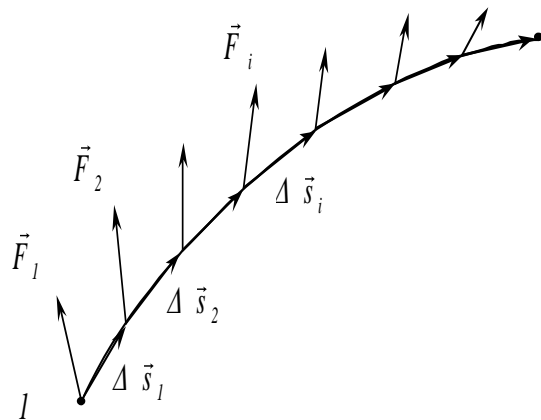


Рис. 3.2

$$A_{12} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i, \Delta \vec{s}_i).$$

Виконуючи все більш дрібне розбиття, тобто спрямовуючи N до нескінченності, приходимо до інтеграла, обчислюваного вздовж траєкторії руху тіла:

$$A_{12} = \int_{L_{12}} (\vec{F}, d\vec{s}). \quad (3.4)$$

Такий інтеграл називається *криволінійним*, оскільки значення підінтегральної функції беруться в точках кривої (позначеної через L_{12}), вздовж якої рухається тіло. Обчислення криволінійних інтегралів часто можна звести до обчислення певних інтегралів, що видно з такого прикладу.

Приклад 1. Камінь масою m кинули з точки 1 на висоті h зі швидкістю, спрямованої горизонтально (рис. 3.3). У точці 2 він торкається Землі. Яку роботу виконує сила тяжіння за час польоту каменя?

Розв'язання. Роботу сили тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$ знайдемо, обчисливши інтеграл (3.4). Скалярний добуток можна представити у вигляді

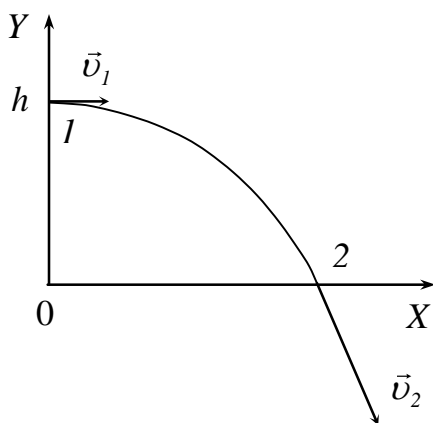


Рис. 3.3

$$(\vec{F}, d\vec{s}) = mg ds \cos \alpha = -mg dy,$$

де знак "мінус" показує, що проекція вектора $d\vec{s}$ на вісь Y негативна. Криволінійний інтеграл зводиться до певного інтеграла по y в межах від h до 0 :

$$A_{12} = \int_{L_{12}} (\vec{F}, d\vec{s}) = -mg \int_h^0 dy = mgh.$$

Робота сили тяжіння залежить тільки від висоти h , на яку тіло підняте над поверхнею Землі.

§ 3.4. Кінетична енергія. Теорема про зв'язок роботи й енергії

Кінетична енергія тіла вимірюється роботою, яку завдяки інерції може виконати рухоме тіло при його гальмуванні до повної зупинки.

Кінетична енергія дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості:

$$W_{\hat{e}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.5)$$

Одиниця вимірювання кінетичної енергії – джоуль (Дж) – збігається з одиницею вимірювання роботи.

Покажемо, як зв'язані ці величини між собою. Згідно зі співвідношенням (3.4), робота, виконувана результуючою силою:

$$A_{12} = \int_{L_{12}} (\vec{F}_{\hat{\Delta}\hat{\zeta}}, d\vec{s}) = \int_{L_{12}} (m \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v} dt) = m \int_{L_{12}} (\vec{v}, d\vec{v}), \quad (3.6)$$

оскільки, за другим законом Ньютона, $\vec{F}_{\hat{\Delta}\hat{\zeta}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, а $d\vec{s} = \vec{v} dt$.

Нехай v – модуль вектора \vec{v} . Тоді $\vec{v}^2 = v^2$ й диференціал від обох частин цієї рівності $\vec{v} d\vec{v} = v dv$. Після підстановки в (3.6) одержимо

$$A_{12} = m \int_{L_{12}} v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.7)$$

Ми довели теорему про зв'язок роботи й енергії: *робота, що виконується діючою на тіло результуючою силою, дорівнює приросту його кінетичної енергії:*

$$A_{12} = \int_{L_{12}} (\vec{F}_{\hat{\Delta}\hat{\zeta}}, d\vec{s}) = W_{\hat{e}2} - W_{\hat{e}1}, \quad (3.8)$$

де $W_{\hat{e}1}$ і $W_{\hat{e}2}$ – кінетична енергія тіла відповідно в початковій і кінцевій точках шляху.

Застосування цієї теореми проілюструємо на такому прикладі.

Приклад 2. Камінь кинули з точки 1 на висоті h з швидкістю, спрямованою горизонтально (рис. 3.3). Чому дорівнює швидкість каменя в точці 2 у момент падіння його на Землю?

Розв'язання. Якщо нехтувати опором повітря, сила тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$ – єдина сила, діюча на камінь. Скористаємося рівнянням (3.7), підставивши в його ліву частину роботу сили тяжіння mgh , знайдену вище (див. приклад 1):

$$mgh = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

звідки

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}.$$

Перевага використання поняття енергії при розв'язанні задач такого типу полягає у відсутності необхідності знаходити швидкість тіла як функцію часу.

§ 3.5. Консервативні і неконсервативні сили

У механіці разом з кінетичною енергією вводиться поняття *потенціальної енергії*. Тіло може володіти потенціальною енергією, якщо на нього діють консервативні сили.

Вище було показано (див. приклад 1), що при переміщенні тіла робота сили тяжіння визначається тільки висотою над рівнем Землі початкової і кінцевої точок його шляху і не залежить від форми його траєкторії. Окрім сили тяжіння тією ж властивістю володіють і інші фундаментальні сили природи – *електромагнітні, ядерні і слабкі*.

Дамо тепер таке визначення: *якщо робота сили, яка діє на тіло, не залежить від форми траєкторії його руху, а визначається тільки координатами початку і кінця шляху, то ця сила називається консервативною*.

Зокрема, якщо тіло, що рухається в полі консервативної

сили по замкнутій траєкторії, повертається в початкову точку, то повна робота цієї сили на всьому шляху дорівнює нулю.

До *неконсервативних сил* відносяться сили тертя і так звані *гіроскопічні сили* – сила Лоренца, що діє на рухомий заряд в магнітному полі, і сила Коріоліса, що виникає в системах відліку, які обертаються. Обидві ці сили спрямовані перпендикулярно вектору швидкості тіла і не виконують роботи. Робота ж сил тертя завжди негативна.

§ 3.6. Потенціальна енергія. Закон збереження енергії в механіці

Використовуючи поняття консервативної сили, можна дати визначення потенціальній енергії.

Яке-небудь положення O тіла в просторі умовно приймається за нульове. Тоді робота, яку виконують консервативні сили при переміщенні тіла з даного положення I в нульове, називається потенціальною енергією тіла в даному положенні:

$$W_p \stackrel{def}{=} A_{I0}. \quad (3.9)$$

Потенціальна енергія є запасена енергія, яка може бути перетворена в роботу, кінетичну енергію або інші види енергії, що не розглядаються в механіці, наприклад у внутрішню (теплову) енергію.

З визначення випливає, що:

1) потенціальна енергія за незмінних зовнішніх умов залежить тільки від координат тіла (матеріальної точки):

$$W_p = W_p(x, y, z);$$

2) потенціальна енергія визначається не однозначно, а з точністю до постійного доданка, оскільки залежить від вибору нульового положення. Фізичне значення має різниця потенціальних енергій тіла в яких-небудь двох точках простору;

3) робота консервативних сил при переміщенні тіла з однієї точки простору в іншу дорівнює зниженню його потенціальної енергії:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p. \quad (3.10)$$

Покажемо це. Нехай потенціальна енергія визначена щодо точки O (рис. 3.4). Оскільки робота не залежить від форми шляху, робота A_{12} при переміщенні тіла з точки 1 в точку 2 по короткому шляху дорівнює роботі переміщення тіла по шляху, що проходить через точку O :

$$A_{12} = A_{10} + A_{02}.$$

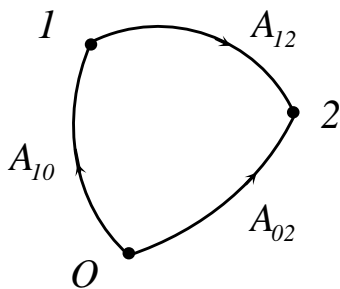


Рис. 3.4

Але $A_{10} = W_{p1}$, а $A_{02} = -A_{20} = -W_{p2}$, звідки і випливає рівність (3.10).

Роботу консервативних сил можна виразити і через зміну кінетичної енергії тіла. За теоремою про зв'язок роботи й енергії (3.7) ця робота дорівнює приросту кінетичної енергії тіла: $A_{12} = W_{\hat{e}2} - W_{\hat{e}1}$. Таким чином,

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = W_{\hat{e}2} - W_{\hat{e}1}, \quad (3.11)$$

звідки випливає, що

$$W_{\hat{e}1} + W_{p1} = W_{\hat{e}2} + W_{p2}. \quad (3.12)$$

Сума кінетичної і потенціальної енергій тіла називається його *повною механічною енергією*:

$$W = W_{\hat{e}} + W_p. \quad (3.13)$$

Рівняння (3.12) виражає *закон збереження енергії в механіці*:

$$W = W_{\hat{e}} + W_p = \text{const}. \quad (3.14)$$

Якщо на тіло діють тільки консервативні сили, то його повна механічна енергія залишається постійною: можуть відбуватися лише перетворення потенціальної енергії в кінетичну і назад, але повний запас енергії тіла змінитися не може.

Замкнутою системою називається сукупність тіл, на які не діють зовнішні сили. Якщо між тілами такої системи діють тільки консервативні сили, то вона називається консервативною. Повна механічна енергія замкнутої консервативної системи тіл зберігається в часі.

Якщо разом з консервативними силами на тіло діє і сила тертя, то, як випливає з рівняння (3.11), під час переходу тіла з положення 1 в положення 2 частина його потенціальної енергії піде на здійснення роботи подолання сили тертя:

$$W_{p1} - W_{p2} = W_{\dot{e}2} - W_{\dot{e}1} + |A_{\delta\delta}|,$$

або

$$W_{\dot{e}2} + W_{p2} = W_{\dot{e}1} + W_{p1} - |A_{\delta\delta}|,$$

тобто повна механічна енергія тіла зменшується на величину цієї роботи, яка перетворюється на тепло:

$$W_1 - W_2 = |A_{\delta\delta}|.$$

Розглянемо застосування законів збереження на такому прикладі.

Приклад 3. Дві кулі масами m_1 і m_2 здійснюють центральний абсолютно пружний удар. Швидкість першої кулі v_1 , друга куля знаходиться в стані спокою ($v_2 = 0$). Знайти швидкості куль u_1 і u_2 після удару (рис. 3.5).

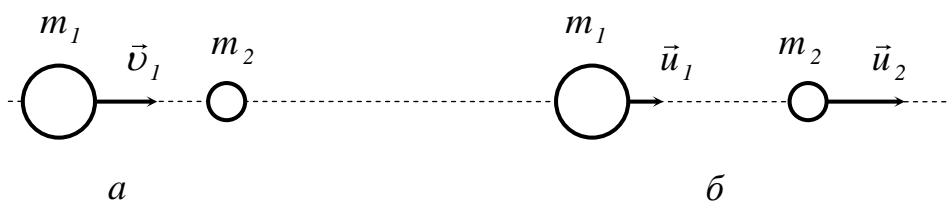


Рис. 3.5

Розв'язання. *Центральним* називається удар, при якому швидкості куль до і після зіткнення спрямовані вздовж прямої, що з'єднує їх центри. *Абсолютно пружним* є удар, в результаті якого не відбувається втрати механічної енергії, оскільки деформації, що виникають при ударі, є пружними. У цьому випадку кінетична енергія куль до їх зіткнення рівна кінетичній енергії після зіткнення:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (\text{а})$$

За законом збереження імпульсу, проектуючи вектори швидкостей на горизонтальну вісь, маємо:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (\text{б})$$

Рівняння (а) і (б) складають систему, з якої можна знайти дві невідомі величини – швидкості u_1 і u_2 . Перепишемо їх у вигляді:

$$\begin{aligned} m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2 u_2^2, \\ m_1(v_1 - u_1) &= m_2 u_2. \end{aligned}$$

Розділивши перше рівняння на друге, одержимо

$$v_1 + u_1 = u_2.$$

Розв'язуючи це рівняння спільно з рівнянням (б), знайдемо

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (\text{в})$$

Якщо маса першої кулі більша маси другої ($m_1 > m_2$), то вона рухатиметься в початковому напрямку. Якщо її маса менша ($m_1 < m_2$), то вона відскочить у протилежному напрямку. При рівності мас ($m_1 = m_2$) перша куля зупиниться, а друга піде вперед зі швидкістю першої. Взагалі при центральному ударі двох однакових абсолютно пружних куль вони обмінюються швидкостями.

§ 3.7. Зв'язок сили з потенціальною енергією

Взаємодію тіл можна описувати або за допомогою сил, або за допомогою потенціальної енергії W_p як функції координат цих тіл. Знайдемо силу, що діє на тіло, якщо відома його потенціальна енергія. Нехай W_p залежить тільки від однієї координати: $W_p = W_p(x)$. Робота, що виконується консервативною силою $F(x)$ при переміщенні тіла на нескінченно малу відстань dx :

$$dA = F(x)dx.$$

Згідно з рівнянням (3.10), цю роботу можна виразити через зміну потенціальної енергії тіла:

$$dA = -dW_p(x).$$

Прирівнюючи праві частини, одержимо

$$F(x) = -\frac{dW_p}{dx}. \quad (3.15)$$

Сила, діюча на тіло, рівна взятій із зворотним знаком похідній його потенціальної енергії по координаті.

У загальному випадку потенціальна енергія залежить від трьох координат: $W_p = W_p(x, y, z)$. Тоді формула (3.15) набуває вигляду

$$\vec{F}(x, y, z) = -\text{grad } W_p(x, y, z), \quad (3.16)$$

де

$$\text{grad } W_p(x, y, z) = \frac{\partial W_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z} \vec{k} \quad (3.17)$$

– *градієнт* функції W_p – вектор, компонентами якого є частинні похідні $\frac{\partial W_p}{\partial x}$, $\frac{\partial W_p}{\partial y}$, $\frac{\partial W_p}{\partial z}$ по координатах. Градієнт спрямований

у бік найрізкішого зростання функції $W_p(x, y, z)$ і
перпендикулярний *еквіпотенціальній* *поверхні*
 $W_p(x, y, z) = \text{const}$ в кожній її точці.

Приклад 4. Потенціальна енергія тіла масою m в полі тяжіння Землі $W_p(r) = -G \frac{mM}{r}$, де M – маса Землі, r – відстань тіла від її центра, G – гравітаційна постійна. Знайти силу, діючу на тіло.

Розв'язання. Помістимо початок декартової системи координат в центр Землі. Тоді положення тіла визначається радіусом-вектором $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, модуль якого $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Згідно з рівнянням (3.16), сила виражається через градієнт потенціальної енергії. Компонента сили вздовж осі X :

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{\partial W_p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -G \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -G \frac{mM \cdot x}{r^3}.$$

Аналогічно знаходимо її компоненти вздовж осей Y і Z :

$$F_y = -G \frac{mM \cdot y}{r^3}, \quad F_z = -G \frac{mM \cdot z}{r^3}.$$

Тоді вектор сили $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -G \frac{mM \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

У кожній точці простору сила, діюча на тіло, є силою тяжіння, оскільки вона спрямована у бік, протилежний напрямку радіуса-вектора \vec{r} . Вона зменшується обернено пропорційно до квадрата відстані тіла від центра Землі. Одержана формула виражає закон *всесвітнього тяжіння*, сформульований Ісааком Ньютоном у 1687 році.

§ 3.8. Потенціальна енергія тіла в однорідному полі тяжіння

На будь-яке тіло, що знаходиться в гравітаційному полі, діє сила тяжіння, що є консервативною силою, тому воно має потенціальну енергію.

Знайдемо потенціальну енергію $W_p(h)$ тіла масою m , піднятого над Землею на висоту h . Якщо висота h мала у порівнянні з радіусом Землі, силу тяжіння mg можна вважати сталою. Згідно з рівнянням (3.9), потенціальна енергія тіла дорівнює роботі, яку виконує сила тяжіння при переміщенні його з висоти h на поверхню Землі, яку ми виберемо як нульове положення. Ця робота (див. приклад 1) дорівнює добутку сили тяжіння на висоту: $A = mgh$. Отже,

$$W_p(h) = mgh. \quad (3.18)$$

§ 3.9. Потенціальна енергія пружно-деформованих пружини й однорідного стрижня

Сила пружності, що виникає в тілі при його деформації, зумовлена взаємодією атомів, з яких складається тіло. Існує деяка рівноважна відстань між атомами, при збільшенні або зменшенні якої з'являються сили, що перешкоджають цьому. Ці сили мають електромагнітне походження і є консервативними. Отже, пружно-деформоване тіло володіє потенціальною енергією.

За законом Гука, при деформації пружини в ній виникає сила пружності, пропорційна величині деформації:

$$F_{np} = -kx, \quad (3.19)$$

де k – жорсткість пружини, x – її деформація (рис. 3.6). Знак “мінус” показує, що при розтягуванні ($x > 0$) пружина тягне вліво, а при стисненні ($x < 0$) – тисне вправо.

Розтягуючи пружину, ми виконуємо роботу, яка йде на збільшення її потенціальної енергії. Згідно з рівнянням (3.10),

$$A = W_p(0) - W_p(x) = \int_0^x F_{np} dx = -k \int_0^x x dx = -\frac{kx^2}{2}$$

Потенціальну енергію недеформованої пружини приймемо рівною нулю: $W_p(0) = 0$. Тоді

$$W_p(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.20)$$

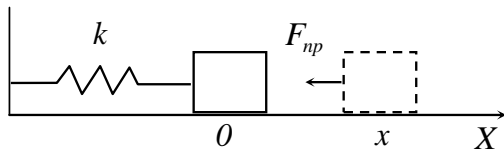


Рис. 3.6

Цю формулу можна подати у вигляді, не залежнму від пружних властивостей конкретної пружини. Розглянемо однорідний стрижень довжиною l і площею поперечного перерізу S , лівий кінець якого закріплений

(рис. 3.7). Під дією сили, прикладеної до правого кінця, довжина стрижня збільшується на Δl . Закон Гука у цьому випадку має вид

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (3.21)$$

де $\sigma = F_{i\delta} / S$ – механічна напруга, що виникає в стрижні; $\varepsilon = \Delta l / l$ – його відносне подовження; E – модуль Юнга, що

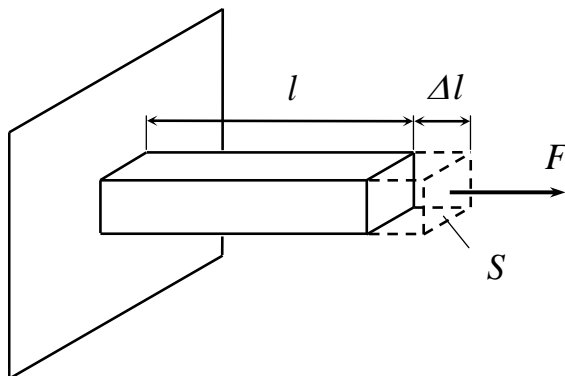


Рис. 3.7

характеризує пружні властивості матеріалу, з якого виготовлений стрижень.

Порівнюючи формули (3.19) і (3.21), бачимо, що $x = \Delta l$,

$$F_{i\delta} = S(\Delta l / l)E = k \Delta l, \text{ звідки}$$

$$k = \frac{SE}{l}. \text{ Підставляючи } k \text{ і } x$$

у формулу (3.20), одержимо

$$W_p = \frac{\varepsilon^2 E}{2} V, \quad (3.22)$$

де $V = Sl$ – об'єм стрижня.

§ 3.10. Умови руху і рівноваги механічної системи

Закон збереження механічної енергії

$$W = W_{\dot{\epsilon}} + W_p = \text{const} \quad (3.23)$$

визначає область простору, в якій тіло може знаходитися при заданому значенні його повної енергії W . Оскільки кінетична енергія $W_{\dot{\epsilon}}$ не може бути негативною, з рівняння (3.23) випливає, що завжди $W \geq W_p$.

Розглянемо рух уздовж осі X матеріальної точки, потенціальна енергія якої W_p залежить тільки від її координати x . Графік функції $W_p(x)$ зображений на рис. 3.8. Енергія матеріальної точки W така, що пряма $W_p = W$ перетинає графік у точках A , B і C , координати яких x_A , x_B і x_C відповідно. Як видно з графіка, x_A , x_B не може знаходитися в областях I і III. Вона може рухатися або в області II, або в області IV. Переходу з області II в область IV перешкоджає “потенціальний бар'єр” BDC .

В області II частинка знаходиться в ”потенціальній ямі” і рухається між точками x_A і x_B , що називаються *точками повороту*, оскільки в цих точках матеріальна точка зупиняється ($W = W_p$, $W_{\dot{\epsilon}} = 0$) і починає рухатися у зворотному напрямку.

Якщо нерухому частинку помістити в точку M , яка відповідає локальному мінімуму потенціальної енергії, то без дії ззовні частинка не може почати рухатися, тобто знаходитиметься в

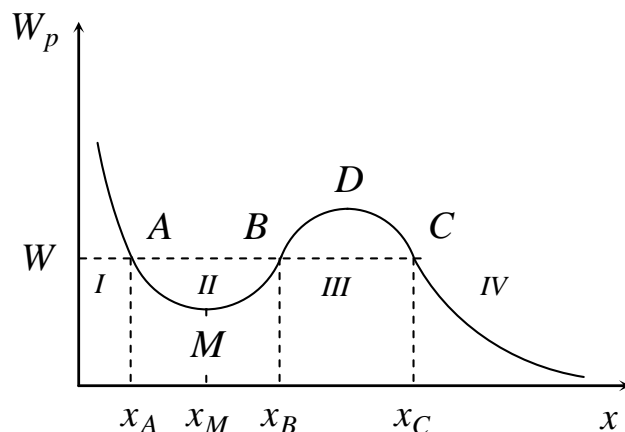


Рис. 3.8

рівновазі. Рівновага в точці M *стійка*, оскільки відхилення частинки вправо або вліво приводить до появи повертаючої сили, спрямованої до положення рівноваги.

У положенні рівноваги сила, що діє на частинку, згідно з (3.15), дорівнює нулю:

$$F(x_M) = - \left(\frac{dW_p}{dx} \right)_{x=x_M} = 0.$$

Така ж буде і сила в точці D , що відповідає локальному максимуму потенціальної енергії. Проте рівновага в точці D *нестійка*, оскільки при відхиленні від цієї точки виникають сили, що прагнуть ще далі відвести частинку від цього положення. Отже, *в полі консервативних сил тіло знаходиться в стані рівноваги, якщо воно нерухоме, а його потенціальна енергія має мінімум.*

Рух частинки в області IV не обмежений у просторі. Якщо частинка рухається вліво, то, досягнувши точки x_C , вона поверне назад і “підє на нескінченність”.

За допомогою діаграм потенціальної енергії, подібних до приведених на рис. 3.8, можна проводити аналіз руху механічних систем.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення роботи сталої сили і вкажіть одиницю її вимірювання.
2. Що називається скалярним добутком векторів?
3. Запишіть вираз для роботи змінної сили і поясніть, що таке криволінійний інтеграл.
4. Дайте визначення кінетичної енергії матеріальної точки і поясніть її фізичне значення.
5. Сформулюйте і наведіть доведення теореми про зв'язок роботи й енергії.

6. Які сили називаються консервативними? Наведіть приклади консервативних сил, які зустрічаються нам у повсякденному житті.
7. Що таке неконсервативні сили?
8. Дайте визначення потенціальної енергії тіла і перерахуйте її властивості.
9. Що називається повною механічною енергією тіла? Наведіть формулювання закону збереження енергії в механіці.
10. Виведіть формулу, що пов'язує силу з потенціальною енергією. Яке фізичне значення градієнта скалярної функції?
11. Запишіть формулу потенціальної енергії тіла в однорідному полі тяжіння.
12. Сформулюйте закон Гука і вкажіть, у чому суть цього закону.
13. Виведіть формулу потенціальної енергії пружно-деформованої пружини.
14. Сформулюйте загальні умови руху і рівноваги механічної системи.

РОЗДІЛ 4

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ

Тверде тіло можна представити у вигляді сукупності матеріальних точок, відстані між якими при русі тіла як цілого залишаються незмінними. Положення тіла в просторі задається трьома координатами його центра мас і трьома кутами повороту тіла навколо осей X , Y і Z декартової системи координат. Таким чином, тверде тіло має в загальному випадку шість степенів вільності.

Рух твердого тіла в більшості випадків, що мають практичний інтерес, є плоскопаралельним. *Плоскопаралельним називається рух, при якому траєкторії всіх точок тіла лежать у паралельних площинах.* Плоскопаралельний рух може бути поданий сукупністю двох видів руху – *поступального*, при якому будь-яка лінія, подумки проведена всередині тіла і пов'язана з ним, переміщається паралельно самій собі, і *обертального*, при якому всі точки тіла описують кола з центрами на деякій осі. Розкладання руху на два види – поступальний та обертальний – значно спрощує його опис. Закони поступального руху, сформульовані в розд. 2, можна узагальнити для обертального руху. Цим питанням і присвячений даний розділ.

§ 4.1. Обертання матеріальної точки по колу

Розглянемо обертання матеріальної точки M по колу радіуса r (рис. 4.1). У момент часу $t = 0$ вона знаходилась в точці A . Радіус-вектор \vec{r} , проведений з початку координат до точки M , за час t повернувся на кут φ . З рисунка видно, що координати точки:

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad (4.1a)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi. \quad (4.1б)$$

Модуль радіуса-вектора $r = |\vec{r}|$ і кут φ , який він складає з

віссю X , називають *полярними координатами* точки, а співвідношення (4.1) дають зв'язок декартових координат x і y з полярними. У нашому випадку $r = const$ і положення точки M на колі визначається тільки однією полярною координатою – кутом φ .

Кутова швидкість ω , з якою обертається радіус-вектор точки, дорівнює похідній φ за часом:

$$\omega \stackrel{def}{=} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4.2)$$

Вона вимірюється в *радіанах за секунду*:

$$[\omega] = \text{рад} / \text{с}.$$

(1 радіан – центральний кут, довжина стягуючої дуги якого дорівнює радіусу).

Кутове прискорення ε , з яким обертається радіус-вектор, дорівнює похідній його кутової швидкості за часом:

$$\varepsilon \stackrel{def}{=} \frac{d\omega}{dt}. \quad (4.3)$$

Одиниця вимірювання кутового прискорення – *радіан за секунду за секунду*:

$$[\varepsilon] = \text{рад} / \text{с}^2.$$

Кут повороту φ можна знайти, якщо відома кутова швидкість ω :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega dt, \quad (4.4)$$

а кутову швидкість ω – за відомим кутовим прискоренням ε :

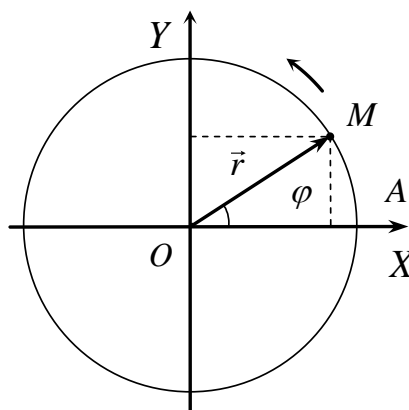


Рис. 4.1

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon dt, \quad (4.5)$$

де φ_0 й ω_0 – константи інтегрування, рівні відповідно куту повороту і куту швидкості в момент часу $t=0$.

За аналогією з поступальним рухом визначимо *середню кутову швидкість* і *середнє кутове прискорення*:

$$\omega_{cp} \stackrel{def}{=} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_{cp} \stackrel{def}{=} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (4.7)$$

де $\Delta\varphi$ й $\Delta\omega$ – відповідно збільшення кута φ і кутової швидкості ω за проміжок часу Δt .

Обертання точки по колу є рівномірним, якщо її швидкість змінюється лише по напрямку, залишаючись сталою за модулем. У цьому випадку тангенціальна складова прискорення (див. розд. 1) $a_\tau = dv/dt = 0$, а нормальна $a_n = v^2/r$. Вона називається *доцентровим* прискоренням (при цьому радіус кривизни траєкторії r дорівнює радіусу кола).

Оскільки кутова швидкість рівномірного обертання радіусавектора точки стала ($\omega = const$), то, згідно з формулою (4.4), залежність кута φ від часу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (4.8)$$

де φ_0 – кут повороту в початковий момент часу.

Приймаючи для простоти $\varphi_0 = 0$, знайдемо кутову швидкість

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad (\text{при } \varepsilon = 0). \quad (4.9)$$

Нехай точка, що рівномірно рухається по колу, за час t здійснює N оборотів. Тоді *число оборотів за одиницю часу називається частотою* n її обертання по колу:

$$n = \frac{N}{t}. \quad (4.10)$$

Періодом обертання матеріальної точки T називається час, за який вона робить один повний оборот:

$$T = \frac{t}{N}. \quad (4.11)$$

Період і частота – взаємно-зворотні величини:

$$T = \frac{1}{n}. \quad (4.12)$$

Одиниця вимірювання періоду $[T] = c$, частоти $[n] = 1/c$ (оборот за секунду).

Якщо точка зробила N оборотів, то кут повороту її радіуса-вектора $\varphi = 2\pi N$, а його кутова швидкість $\omega = \varphi/t = 2\pi N/t$. Підставляючи сюди N/t з формули (4.10), одержимо зв'язок кутової швидкості ω з частотою обертання n і періодом T :

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.13)$$

Швидкість точки v при її русі по колу прийнято називати *лінійною швидкістю*, щоб відрізнити її від кутової швидкості ω , що називають також *коловою частотою*. Роблячи N оборотів за час t , матеріальна точка проходить відстань $s = 2\pi r \cdot N$ ($2\pi r$ – довжина кола). Тоді її лінійна швидкість $v = s/t$, з урахуванням рівнянь (4.10) і (4.13), виражається через кутову швидкість:

$$v = \omega \cdot r. \quad (4.14)$$

Ця формула справедлива і тоді, коли точка рухається по колу з прискоренням. Диференціюючи (4.14) за часом за умови $r = const$, одержимо тангенціальне прискорення:

$$a_{\tau} = \varepsilon \cdot r. \quad (4.15)$$

Доцентрове прискорення a_n також може бути виражене через кутову швидкість:

$$a_n = v^2 / r = \omega^2 r. \quad (4.16)$$

Швидкість точки \vec{v} , як і радіус-вектора \vec{r} , проведеного до неї з центра кола, є величини векторні. Вісь обертання перпендикулярна обом цим векторам і має певний напрямок у просторі. Щоб позначити цей напрямок і зв'язати зазначені вектори, вводять поняття *аксіального вектора* і *векторного добутку* векторів.

§ 4.2. Векторний добуток векторів

Скалярне множення векторів, розглянуте в попередньому розділі, дає скалярну величину. Тепер ми розглянемо векторне множення двох векторів, у результаті якого виходить новий вектор.

Векторним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор \vec{c} , модуль якого чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} . Вектор \vec{c} перпендикулярний площині цих векторів і спрямований у таку

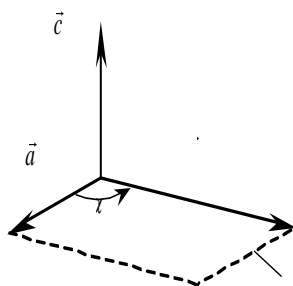


Рис. 4.2

сторону, щоб обертання від вектора \vec{a} до вектора \vec{b} по найкоротшому шляху навколо отриманого вектора \vec{c} відбувалося в той же бік, що й обертання по найкоротшому шляху від осі X до осі Y навколо осі Z (рис. 4.2).

З визначення випливає, що напрямок вектора \vec{c} збігається з напрямком руху правого гвинта в правій системі координат (рис. 4.2) і лівого гвинта – у лівій системі, тобто напрямок вектора \vec{c} залежить від вибору системи координат – лівої або правої. Такі вектори називаються *аксіальними* або *псевдовекторами*. До їхнього числа належать, крім векторного

добутку двох звичайних – *полярних* – векторів, ще і вектори кутової швидкості $\vec{\omega}$ і кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ (див. нижче), спрямовані по осі обертання (звідси назва – аксіальний або осьовий вектор). Полярними є вектори переміщення, швидкості, прискорення, сили.

Векторний добуток \vec{a} на \vec{b} позначається косим хрестом або квадратними дужками:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv [\vec{a}, \vec{b}].$$

Модуль вектора \vec{c} , за визначенням,

$$c = ab \sin(\alpha),$$

оскільки площа паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , $S = ab \sin \alpha$ (α – кут між векторами \vec{a} і \vec{b}).

Поворот на нескінченно малий кут $d\varphi$ радіуса-вектора \vec{r} точки, що рухається по колу (див. рис. 4.1), можна подати вектором $d\vec{\varphi}$, спрямованим уздовж осі обертання в той бік, куди рухається гвинт, що обертається по напрямку руху точки. У правій системі координат вектор $d\vec{\varphi}$ спрямований так, як показано на рис. 4.3.

Кутову швидкість обертання радіуса-вектора також можна подати у вигляді аксіального вектора, паралельного вектору $d\vec{\varphi}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (4.17)$$

Швидкість точки, як видно з рис. 4.3, дорівнює векторному добутку $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, а її модуль збігається з виразом (4.14).

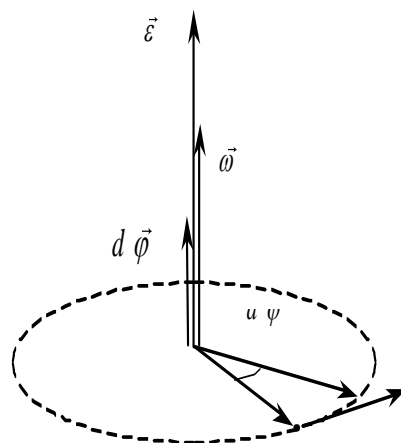


Рис. 4.3

Вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ пов'язаний з вектором тангенціального прискорення співвідношенням

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \quad (4.18)$$

Аксіальний вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ збігається по напрямку з вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$, якщо обертання прискорене, і спрямований у протилежний бік, якщо воно вповільнене.

§ 4.3. Момент сили і момент імпульсу відносно нерухомого центра

Закони механіки обертального руху пов'язані з поняттями *моменту сили* й *моменту імпульсу*. Слід розрізняти моменти цих векторів щодо точки і щодо осі.

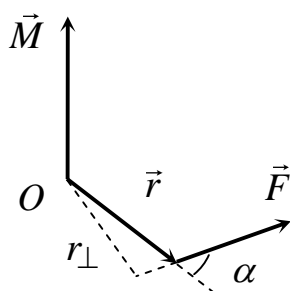


Рис. 4.4

Нехай O – яка-небудь точка, що називається *центром* або *полюсом обертання*. Позначимо \vec{r} радіус-вектор, проведений із цієї точки до точки прикладання сили \vec{F} (рис. 4.4).

Моментом сили \vec{F} відносно полюса O називається векторний добуток радіуса-вектора \vec{r} на силу \vec{F} :

$$\vec{I} \stackrel{def}{=} \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.19)$$

Модуль моменту сили

$$M = r F \sin \alpha = r_\perp F,$$

де α – кут між векторами \vec{r} і \vec{F} , а $r_\perp = r \sin \alpha$ – *плече сили* – довжина перпендикуляра, опущеного з полюса O на лінію дії сили \vec{F} .

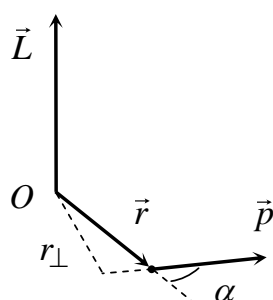


Рис. 4.5

Моментом імпульсу \vec{L} матеріальної точки відносно полюса O називається векторний добуток радіуса-вектора \vec{r} , що

з'єднує полюс з матеріальною точкою, на вектор її імпульсу \vec{p} :

$$\vec{L} \stackrel{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} . \quad (4.20)$$

Якщо траєкторією точки є коло, то момент її імпульсу щодо центра кола:

$$L = m v r .$$

Момент імпульсу точки, що рухається вздовж прямої лінії (рис. 4.5):

$$L = r p \sin \alpha = r_{\perp} m v .$$

Якщо на точку не діють сили, її швидкість не змінюється і момент імпульсу залишається сталим.

§ 4.4. Рівняння моментів

Вектори моменту сили \vec{I} і моменту імпульсу \vec{L} матеріальної точки відносно полюса є *аксіальними* і зв'язані між собою співвідношенням, яке можна вивести з рівнянь Ньютона. Продиференціюємо рівність (4.20) за часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

Похідна радіуса-вектора \vec{r} дорівнює швидкості матеріальної точки $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, а оскільки вектори \vec{v} і \vec{p} паралельні один одному, їхній векторний добуток перетворюється в нуль. У другому доданку $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, а векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F}$ утворює момент сили \vec{I} . Тому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (4.21)$$

Це співвідношення називається *рівнянням моментів*: похідна за часом від моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого центра дорівнює моменту діючої на неї сили відносно цього ж центра.

§ 4.5. Основне рівняння динаміки обертального руху. Закон збереження моменту імпульсу

Рівняння моментів (4.21) можна узагальнити на випадок системи N матеріальних точок. На кожен з матеріальних точок системи діють *зовнішні* і *внутрішні* сили. Під зовнішніми слід розуміти сили, що діють на матеріальні точки системи ззовні, а під внутрішніми – сили, з якими кожна матеріальна точка системи діє на всі інші її точки. Сили, що діють на i -ту матеріальну точку:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{зовнішні}} + \sum_{\hat{e}=1}^{N-1} \vec{F}_{\hat{e}i}^{\text{внутрішні}} .$$

Момент імпульсу цієї точки $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ пов'язаний з моментом діючих на неї сил співвідношенням (4.21):

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{зовнішні}} + \sum_{\hat{e}=1}^{N-1} \vec{r}_i \times \vec{F}_{\hat{e}i}^{\text{внутрішні}} . \quad (4.22)$$

Повний момент імпульсу \vec{L} системи матеріальних точок є сума моментів імпульсу \vec{L}_i кожної з них. Тому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{зовнішні}} + \sum_{i=1}^N \sum_{\hat{e}=1}^{N-1} \vec{r}_i \times \vec{F}_{\hat{e}i}^{\text{внутрішні}} . \quad (4.23)$$

Другий член правої частини цієї рівності можна розглядати як суму членів виду

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{\hat{e}i}^{\text{внутрішні}} + \vec{r}_{\hat{e}} \times \vec{F}_{i\hat{e}}^{\text{внутрішні}} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{\hat{e}}) \times \vec{F}_{\hat{e}i}^{\text{внутрішні}} ,$$

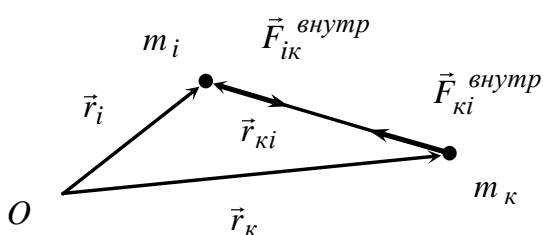


Рис. 4.6

оскільки згідно з третім законом Ньютона $\vec{F}_{i\hat{e}}^{\text{внутрішні}} = -\vec{F}_{\hat{e}i}^{\text{внутрішні}}$. Але різниця $\vec{r}_i - \vec{r}_{\hat{e}} = \vec{r}_{\hat{e}i}$ є вектор, що

спрямований від точки \hat{e} до точки i (рис. 4.6). Отже, вектори $\vec{r}_{\hat{e}i}$ і $\vec{F}_{\hat{e}i}^{\hat{a}\hat{t}\hat{o}\hat{o}\hat{d}}$ спрямовані вздовж однієї прямої, а їхній векторний добуток дорівнює нулю. Рівняння (4.23) набуває вигляду

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{I}_{\hat{c}\hat{t}\hat{a}\hat{t}}, \quad (4.24)$$

де векторна сума моментів зовнішніх сил, прикладених до кожної з матеріальних точок системи $\vec{I}_{\hat{c}\hat{t}\hat{a}\hat{t}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\hat{c}\hat{t}\hat{a}\hat{t}}$, називається *результуючим або головним моментом зовнішніх сил*.

Рівняння (4.24) називається *основним рівнянням динаміки обертального руху*. З нього випливає закон збереження моменту імпульсу: якщо результуючий момент зовнішніх сил, що діють на систему матеріальних точок, дорівнює нулю, то момент імпульсу системи залишається сталим у часі.

На практиці зустрічаються ситуації, коли зберігається проекція моменту імпульсу системи точок на який-небудь напрямок. Так, в однорідному полі тяжіння зберігається проекція вектора \vec{L} на вертикальну вісь Z , оскільки проекція на цю вісь моменту сили тяжіння, що діє на кожну із точок, дорівнює нулю ($M_z = 0$). Тому, на підставі (4.24), $L_z = const$ при будь-яких значеннях $M_x^{\hat{c}\hat{t}\hat{a}\hat{t}}$ й $M_y^{\hat{c}\hat{t}\hat{a}\hat{t}}$.

Закон збереження моменту імпульсу є одним з фундаментальних законів фізики поряд із законами збереження імпульсу й енергії.

§ 4.6. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Момент інерції

Розглянемо тверде тіло, закріплене на осі. Зміна швидкості його обертання викликана зовнішніми силами. Дія сили залежить

від її напрямку і від точки прикладання. Складова зовнішньої сили вздовж осі не може змінити кутову швидкість обертання тіла. Це відбувається під дією складової F_{\perp} – проекції зовнішньої сили на площину, перпендикулярну осі обертання (рис. 4.7). Момент її щодо осі Z :

$$M_z = F_{\perp} r \cdot \sin \alpha = F_{\perp} \cdot r_{\perp}, \quad (4.25)$$

де r_{\perp} – плече сили F_{\perp} .

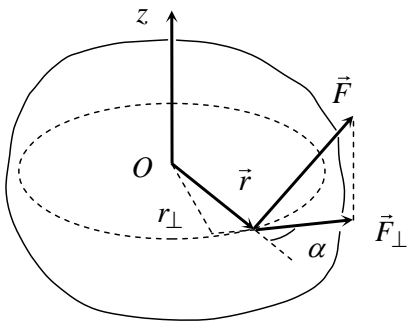


Рис. 4.7

Моментом сили \vec{F} відносно осі Z називається добуток складової цієї сили F_{\perp} , що лежить у площині, перпендикулярній до цієї осі, на її плече.

Щоб знайти момент імпульсу тіла, що обертається навколо осі Z з кутовою швидкістю ω , подумки розіб'ємо його на N матеріальних точок масами Δm_i (рис. 4.8). Момент імпульсу кожної точки $L_{zi} = \Delta m_i v_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$, оскільки її швидкість $v_i = \omega r_i$, де r_i – відстань від точки до осі обертання. Сумуючи по всіх точках і виносячи за знак суми загальний множник ω , одержимо момент імпульсу тіла відносно осі Z :

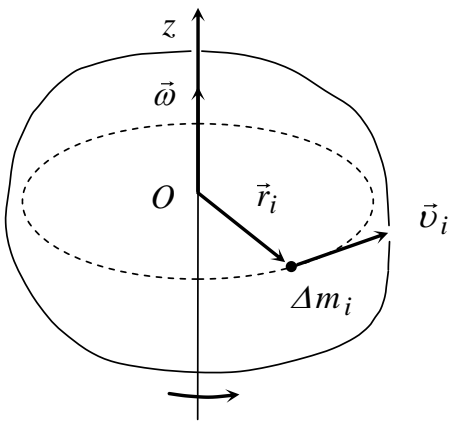


Рис. 4.8

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 \right) \omega. \quad (4.26)$$

Вираз в дужках називається моментом інерції тіла відносно осі Z :

$$J_z \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2. \quad (4.27)$$

Момент імпульсу тіла, закріпленого на осі, дорівнює добутку його моменту інерції на кутову швидкість:

$$L_z = J_z \omega. \quad (4.28)$$

Підставивши його в (4.24), одержимо

$$J_z \varepsilon = M_z, \quad (4.29)$$

де ε – кутове прискорення тіла, а M_z – проекція на вісь Z вектора моменту зовнішніх сил.

Рівняння (4.29) називається основним рівнянням динаміки обертального руху тіла навколо нерухомої осі. За формою запису воно збігається з рівнянням (2.5a) і є аналогом другого закону Ньютона.

Момент інерції характеризує інертність тіла при його обертанні. Згідно з рівнянням (4.29): кутове прискорення тіла $\varepsilon = M_z / J_z$ при заданому значенні M_z тим менше, чим більший його момент інерції J_z . Момент інерції відіграє тут роль маси при поступальному русі. Однак на відміну від маси (табл. 4.1) момент інерції залежить від конфігурації тіла, тобто від розподілу його маси навколо осі обертання.

§ 4.7. Вільні осі і головні моменти інерції твердих тіл. Теорема Штейнера

Моменти інерції тіл правильної форми можуть бути знайдені аналітично. Для цього у формулі (4.27) необхідно перейти від додавання до інтегрування по об'єму тіла V :

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm.$$

Для однорідного тіла $dm = \rho dV$, де $\rho = m/V$ – його густина. Тоді

$$J = \rho \int_V r^2 dV. \quad (4.30)$$

Як приклад знайдемо момент інерції однорідного тонкого стрижня довжиною l відносно перпендикулярної до нього осі, що проходить через один з його кінців (вісь AA' на рис. 4.9). Розіб'ємо стрижень на малі ділянки довжиною dr . Об'єм кожної такої ділянки $dV = S dr$, де S – площа поперечного перерізу стрижня.

З рівняння (4.30) одержимо

$$J_A = \rho \int_0^l S r^2 dr = \frac{1}{3} \rho S l^3 = \frac{1}{3} m l^2, \quad (4.31)$$

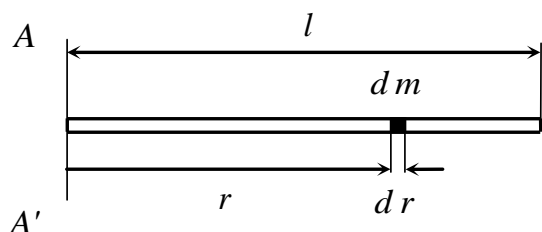


Рис. 4.9

оскільки $\rho S l = m$ – маса стрижня.

Будь-яке тіло має три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через його центр мас, обертання навколо яких не супроводжується тиском на підшипники, що

кріплять вісь. Вони називаються *вільними осями*. У тіла правильної форми ці осі збігаються з осями його симетрії.

Моменти інерції тіла відносно вільних осей J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} називаються *головними моментами інерції*, а самі ці осі – *головними осями інерції*.

Рівняння (4.28), що зв'язує момент імпульсу тіла з кутовою швидкістю, можна навести у векторному вигляді. Вектори \vec{L} й $\vec{\omega}$ збігаються за напрямком, якщо тіло обертається навколо однієї з головних його осей інерції:

$$\vec{L} = J \vec{\omega}.$$

У протилежному випадку напрямки цих векторів різні.

При обчисленні моментів інерції тіл використовують *теорему Штейнера*: момент інерції J_A тіла відносно

деякої осі AA' дорівнює сумі моменту інерції тіла J_C відносно осі OO' , що проходить через його центр мас C паралельно осі AA' , і добутку маси тіла на квадрат відстані d між цими осями (рис. 4.10):

$$J_A = J_C + md^2. \quad (4.32)$$

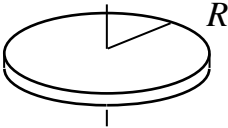
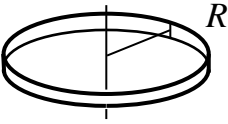
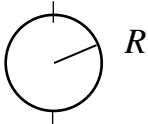
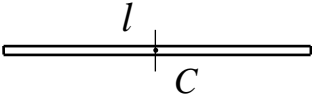
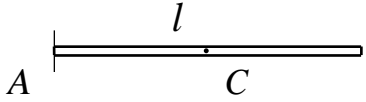
За допомогою теореми Штейнера знайдемо момент інерції однорідного стрижня відносно осі, що проходить через його середину (центр мас). Оскільки у цьому випадку $d=l/2$, з рівнянь (4.32) і (4.31) випливає:

$$J_C = \frac{1}{3} ml^2 - m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2.$$

У табл. 4.1 наведені моменти інерції однорідних тіл простої форми, обчислені за формулою (4.30).

Таблиця 4.1.

Моменти інерції деяких тіл

Тіло	Рисунок	Момент інерції
Циліндр або диск		$J_{\text{оо}'} = \frac{1}{2} m R^2$
Обруч		$J_{\text{і о}'} = m R^2$
Куля		$J_{\text{оо}'} = \frac{2}{5} m R^2$
Стрижень		$J_C = \frac{1}{12} m l^2$
		$J_A = \frac{1}{3} m l^2$

§ 4.8. Кінетична енергія і робота при обертальному русі твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі OO' (рис. 4.11). Подумки розіб'ємо його об'єм на малі частини масами Δm_i , кожен з яких будемо вважати матеріальною точкою, що знаходиться від осі обертання на відстані r_i . Оскільки $v_i = \omega r_i$, кінетична енергія обертання тіла, з урахуванням (4.27), має вигляд

$$W_{iá} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (4.33)$$

Помноживши чисельник і знаменник на J і скориставшись співвідношенням $L = J\omega$, цю формулу можна подати у вигляді

$$W_{iá} = \frac{L^2}{2J}. \quad (4.34)$$

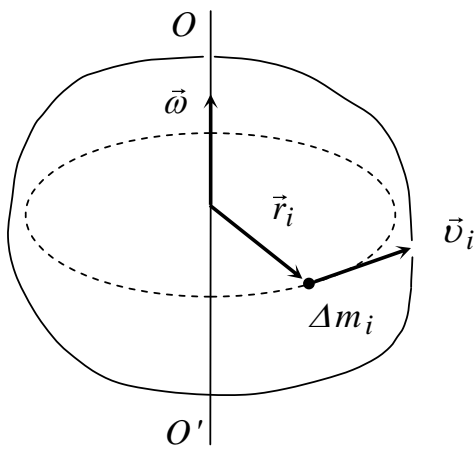


Рис. 4.11

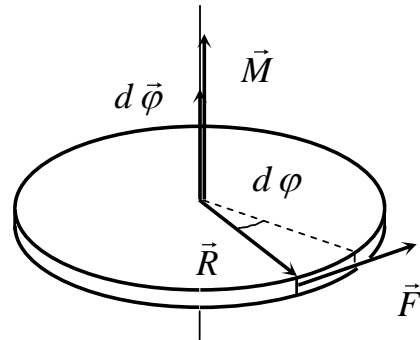


Рис. 4.12

Якщо момент сили F , прикладеної до тіла, не дорівнює нулю, то ця сила може виконувати роботу. Нехай наше тіло – диск радіусом R , на який намотана нитка (рис. 4.12). Потягнувши за нитку із силою F , ми змусимо диск обертатися. При повороті його на кут $d\varphi$ точка прикладання сили проходить шлях $ds = R d\varphi$. Виконана при цьому робота

$$dA = F ds = F \cdot R d\varphi = M d\varphi.$$

Її можна виразити через скалярний добуток векторів \vec{M} й $d\vec{\varphi}$:

$$dA = \vec{M} d\vec{\varphi}. \quad (4.35)$$

Робота прикладеної до тіла сили при повороті його на нескінченно малий кут $d\varphi$ дорівнює скалярному добутку вектора

моменту цієї сили \vec{M} на вектор кута повороту $d\vec{\phi}$.

Доведемо таку теорему.

Теорема. Кінетична енергія тіла, що рухається, дорівнює сумі кінетичної енергії його поступального руху та енергії обертання навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно напрямку його руху (теорема Кеніга):

$$W_{\hat{e}} = \frac{m v^2}{2} + W_{i\acute{a}}. \quad (4.36)$$

Доведення. Розіб'ємо тіло на N малих частин масами Δm_i , кожна з яких будемо вважати матеріальною точкою. Нехай центр мас тіла C рухається зі швидкістю $\vec{v}_{\text{цм}}$ в системі відліку \hat{E} , пов'язаною із Землею. Виберемо систему відліку \hat{E}' , що рухається разом з тілом, так що центр мас тіла в цій системі відліку нерухомий (рис. 4.13).

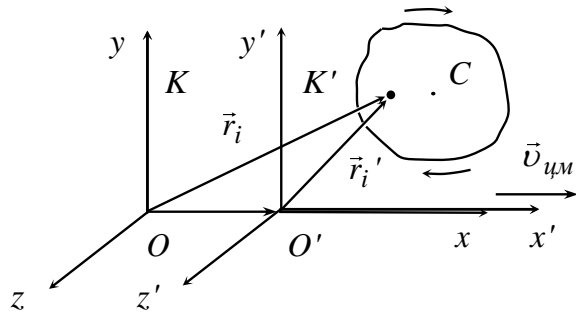


Рис. 4.13

Позначивши \vec{v}_i швидкість i -ї точки в системі \hat{E} , а \vec{v}_i' – її швидкість у системі \hat{E}' , і з огляду на те, що $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{\text{цм}}$, запишемо кінетичну енергію тіла:

$$W_{\hat{e}} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2} + \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{v}_i' \right) \vec{v}_{\text{цм}} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i \right) v_{\text{цм}}^2.$$

Оскільки $v_i' = \omega \cdot r_i'$, перший доданок правої частини є не що інше, як енергія обертання тіла навколо осі, що проходить через його центр мас:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i'^2 \right) \omega^2 = \frac{J_z \omega^2}{2} = W_{i\acute{a}}.$$

У другому доданку, згідно з (2.15), $\sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{v}_i' = \vec{v}'_{\dot{o}i} \cdot \sum_{i=1}^N \Delta m_i$,

де $\vec{v}'_{\dot{o}i}$ – швидкість центра мас тіла в системі відліку \hat{E}' . Але в цій системі відліку центр мас тіла є нерухомий ($\vec{v}'_{\dot{o}i} = 0$), тому зазначений доданок перетворюється в нуль.

Третій доданок – кінетична енергія поступального руху тіла:

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i \right) v_{\dot{o}i}^2 = \frac{m v_{\dot{o}i}^2}{2}.$$

Оскільки швидкість тіла $v = v_{\dot{o}i}$, ми приходимо до формули (4.36).

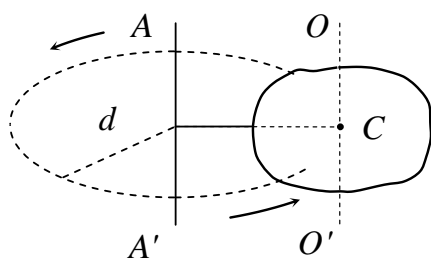


Рис. 4.14

Користуючись цією теоремою, доведемо теорему Штейнера (див. § 4.7):

$$J_A = J_C + m d^2.$$

Розглянемо тіло масою m , яке прикріплене ниткою до осі AA' і обертається навколо цієї вісі з кутовою швидкістю ω (рис. 4.14).

Відстань від осі AA' до центра мас тіла позначимо d . Тоді швидкість центра мас $v_{\dot{o}i} = \omega \cdot d$. Рухаючись по колу, тіло одночасно обертається з тією ж кутовою швидкістю ω навколо своєї осі OO' , паралельній осі AA' . Згідно з (4.36), кінетична енергія тіла:

$$W_e = \frac{m v_{\dot{o}i}^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

де J_C – момент його інерції відносно осі OO' .

Рух тіла можна розглядати і як чисте обертання навколо осі AA' . При цьому

$$W_{i\dot{a}} = \frac{J_A \omega^2}{2},$$

де J_A – момент інерції тіла відносно цієї осі.

Прирівнюючи праві частини і підставляючи туди значення $v_{\dot{a}} = \omega \cdot d$, одержимо

$$\frac{J_A \omega^2}{2} = \frac{m \omega^2 d^2}{2} + \frac{J_{\tilde{N}} \omega^2}{2},$$

що після скорочення $\omega^2/2$ приводить до формули (4.32), яка виражає теорему Штейнера.

У табл. 4.2 наведені величини, що характеризують поступальний і обертальний рух.

Таблиця 4.2

<i>Поступальний рух (прямолінійний)</i>		<i>Обертальний рух (навколо нерухомої осі)</i>	
Шлях	s	φ	кут повороту
Швидкість	$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	кутова швидкість
Прискорення	$a = \frac{dv}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	кутове прискорення
Маса	m	J	момент інерції
Імпульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$	момент імпульсу
Сила	\vec{F}	\vec{M}	момент сили

Рівняння руху	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$	рівняння руху
Робота	$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$	робота
Кінетична енергія	$W_{\varepsilon} = \frac{mv^2}{2}$	$W_{\dot{\alpha}} = \frac{J\omega^2}{2}$	кінетична енергія
<i>Рівноприскорений рух</i>			
	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$ $v = v_0 + at,$ $v^2 - v_0^2 = 2as$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$	

§ 4.9. Гіроскопи

Гіроскопом (або вовчком) називається масивне тіло, що має вісь симетрії та обертається навколо неї з великою швидкістю. Вісь симетрії є однією з його головних осей інерції, тому напрямки вектора моменту імпульсу гіроскопа \vec{L} і вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ збігаються:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \quad (4.37)$$

де J – момент інерції гіроскопа відносно його осі.

З рівняння (4.24) $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ видно, що при вільному обертанні, коли момент зовнішніх сил дорівнює нулю ($\vec{M} = 0$),

$$\vec{L} = \text{const}$$

і гіроскоп зберігає незмінною вісь свого обертання. Ця властивість гіроскопа лежить в основі роботи *гірокомпасів і гірогоризонтів*, що використовуються у навігаційних приладах в авіації, космонавтиці, судноплавстві.

Розглянемо вплив зовнішніх сил на обертання гіроскопа. Нехай гіроскоп обертається з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі (вісь Z на рис. 4.15). Будемо обертати вісь обертання гіроскопа навколо координатної осі X , приклавши пару сил F , спрямованих уздовж осі Y .

Момент пари сил $\vec{M} = \vec{h} \times \vec{F}$, де \vec{h} – вектор (на рис. 4.15 не показаний), чисельно дорівнює відстані між векторами \vec{F} й $-\vec{F}$ і перпендикулярний їм. Вектор \vec{M} спрямований уздовж осі X . Відповідно до рівняння (4.24), приріст $\Delta\vec{L}$ вектора моменту імпульсу за час Δt збігається по напрямку з вектором \vec{M} :

$$\Delta\vec{L} = \vec{M} \Delta t.$$

Оскільки вектор $\Delta\vec{L}$ дорівнює різниці векторів \vec{L} й \vec{L}_0 ($\Delta\vec{L} = \vec{L} - \vec{L}_0$), ясно, що вісь обертання гіроскопа залишається в площині XOZ , тобто поворот її в просторі відбувається не навколо осі X , а навколо перпендикулярної до неї осі Y .

Таким чином, якщо до гіроскопа, що обертається, прикласти пару сил, що прагнуть обернути його навколо осі, перпендикулярної до осі його обертання, то він стане обертатися навколо третьої осі, перпендикулярної до перших двох. Це явище називається *гіроскопічним ефектом*.

З рис. 4.15 видно, що в результаті гіроскопічного ефекту гіроскоп прагне розташувати вісь свого обертання так, щоб вона

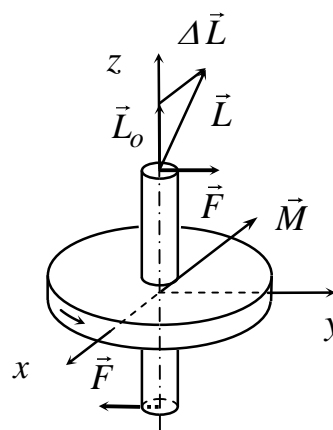


Рис. 4.15

утворювала по можливості менший кут з віссю вимушеного обертання (віссю X) і щоб обидва обертання (навколо своєї осі і вимушене) відбувалися в одному напрямку.

Щоб утримати вісь обертання гіроскопа (див. рис. 4.15), потрібно до підшипників, що кріплять вісь, прикласти пару сил, що лежать у площині XOZ . З іншого боку, сам гіроскоп буде давити на підшипники з такими ж силами. Ці сили називаються *гіроскопічними*.

Гіроскопічні сили можуть бути дуже великі і з ними треба рахуватися при проектуванні машин і механізмів. Вони проявляються, зокрема, в авіації. Літак, турбіни двигунів якого обертаються зі швидкістю десятки тисяч оборотів за хвилину, при зміні курсу витримує дію сил, що прагнуть підняти або опустити його ніс залежно від напрямку повороту – вправо або вліво. При пікіруванні або кабруванні на нього діють сили, що прагнуть повернути його у горизонтальній площині.

Момент гіроскопічних сил виражається через векторний добуток моменту імпульсу гіроскопа $J\vec{\omega}$ і вектора кутової швидкості $\vec{\Omega}$, з якою обертається його вісь обертання:

$$\vec{M}_{\text{аід}} = J\vec{\omega} \times \vec{\Omega}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається абсолютно твердим тілом?
2. Який рух твердого тіла називається плоскопаралельним?
3. Наведіть визначення кутової швидкості і кутового прискорення при обертанні тіла навколо нерухомої осі.
4. Дайте визначення періоду, частоти і кругової частоти обертання та вкажіть зв'язок між ними.
5. Запишіть формули, які пов'язують кутові і лінійні величини, що характеризують обертання матеріальної точки по колу.
6. Що називається тангенціальним і нормальним прискоренням матеріальної точки? Чому дорівнює доцентрове прискорення точки, що рухається по колу?

7. Які вектори називаються аксіальними? У чому їхня відмінність від полярних векторів і у чому подібність?
8. Дайте визначення векторного добутку векторів.
9. Зобразіть вектори кута повороту, кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла. Як вони пов'язані з напрямком його обертання?
10. Наведіть визначення моменту сили і моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого центра (полюса).
11. Виведіть формулу, що пов'язує момент сили і момент імпульсу.
12. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху системи матеріальних точок. Що називається головним моментом сил?
13. Дайте формулювання закону збереження моменту імпульсу.
14. Що називається моментом інерції тіла відносно осі? Який його фізичний зміст?
15. Що називається головними осями і головними моментами інерції твердого тіла?
16. Наведіть формулювання і доведення теореми Штейнера.
17. Запишіть формули для моментів інерції круглого диска, обруча, кулі й однорідного стрижня.
18. Виведіть формулу кінетичної енергії твердого тіла, що обертається.
19. Якою формулою виражається робота при повороті тіла на деякий кут?
20. Сформулюйте і доведіть теорему про повну кінетичну енергію тіла, що рухається.

РОЗДІЛ 5

РУХ РІДИНИ

Вивчаючи механіку, ми використовували для опису руху тіл поняття *матеріальної точки* і *твердого тіла* – системи матеріальних *точок*, взаємні відстані між якими залишаються незмінними при русі тіла як цілого. Існує великий клас речовин, в яких може відбуватися переміщення одних частин тіла відносно інших. До них належать рідини і гази, що є *суцільними середовищами*. Молекули газу, здійснюючи хаотичний рух, рівномірно заповнюють весь наданий їм об'єм. У рідинах, на відміну від газів, середня відстань між молекулами незмінна. Зберігаючи об'єм, рідина набуває форму тієї посудини, в якій знаходиться. Не дивлячись на відмінність, рух рідин і газів, якщо їх розглядати як суцільні середовища, описується однаковими законами.

Розділ механіки, який вивчає рух рідин і газів, називається *гідромеханікою*. Не вдаючись в деталі будови суцільних середовищ, ми розглянемо в цьому розділі основні поняття, що використовуються для опису їх руху, і одержимо рівняння, що дозволяють розв'язувати пов'язані з ним практичні задачі. При цьому ми використовуватимемо модель *нестискуваної рідини*, припускаючи, що при русі рідини будь-який подумки виділений її об'єм, який містить деяку кількість речовини, зберігає свою величину незмінною.

§ 5.1. Тиск рідини

На тіло, що знаходиться в рідині, з її боку діє сила тиску. *Тиском рідини на яку-небудь поверхню називається відношення*

діючої на неї з боку рідини нормальної сили F_{\perp} до площі S цієї поверхні:

$$p \stackrel{def}{=} \frac{F_{\perp}}{S}. \quad (5.1)$$

Одиниця тиску – паскаль (Па). 1 Па дорівнює тиску, який створюється силою в 1 Н на площу в 1 м²:

$$\text{Па} = \text{Н} / \text{м}^2.$$

Для рідин і газів існує закон Паскаля: тиск, що здійснюється на рідину або газ зовнішніми силами, передається в зайнятому ними об'ємі однаково у всіх напрямках.

Тиск, що здійснюється самою рідиною на стінки посудини, в якій вона знаходиться, називається гідростатичним. Щоб одержати формулу гідростатичного тиску, розглянемо стовп рідини висотою h , площею поперечного перерізу S , що знаходиться в посудині (рис. 5.1).

Якщо рідина нестискувана, її густина $\rho = m/V$ не залежить від тиску. Вага цієї рідини $P = mg = \rho gV$, а її тиск на дно посудини:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho gV}{S} = \rho g h \quad (5.2)$$

($V = S \cdot h$ – об'єм рідини, g – прискорення вільного падіння).

Формула (5.2) визначає тиск рідини на глибині h . Він не залежить від форми посудини, в якій знаходиться рідина, що дозволяє використовувати заповнені рідиною тонкі трубки при виготовленні манометрів – приладів, що показують тиск. Тиск земної атмосфери відповідає тиску стовпа ртуті заввишки 760 мм і складає приблизно 10^5 Па. Тиск 1 мм рт. ст. рівний 133 Па.

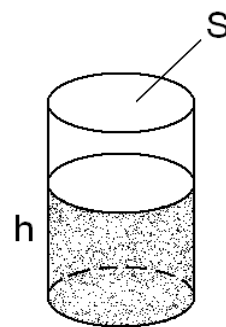


Рис. 5.1

У нижніх шарах рідини тиск більший, ніж у верхніх, тому на тіло, занурене в рідину, діє виштовхуюча сила, спрямована вгору. Ця сила підкоряється *закону Архімеда*, згідно з яким *на тіло, занурене в рідину, діє виштовхуюча сила, рівна вазі рідини, витісненої цим тілом*:

$$F_{арх} = \rho_p g V, \quad (5.3)$$

де ρ_p – густина рідини, V – об'єм тіла.

§ 5.2. Рух ідеальної рідини. Рівняння нерозривності

Рідина називається ідеальною, якщо вона нестискувана і переміщення одних шарів рідини відносно інших не супроводжується силами тертя (відсутнє внутрішнє тертя або в'язкість). Ідеальна рідина служить більш-менш хорошим наближенням до реальних рідин.

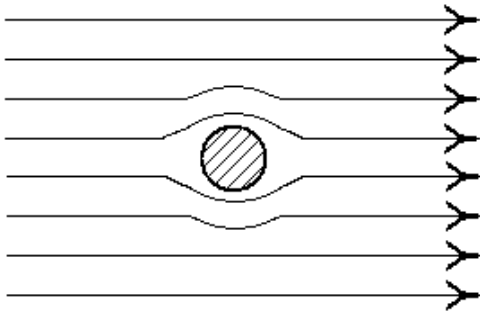


Рис. 5.2

швидкість переміщення її

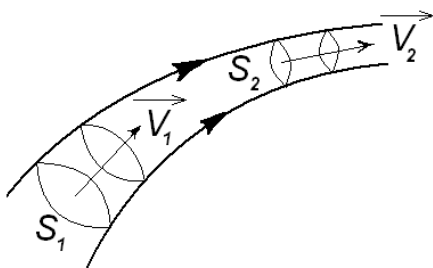


Рис. 5.3

Рух частинок рідини зображають лініями, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямком їх швидкості в цій точці. Вони називаються *лініями струму* (рис. 5.2). Густина ліній більша там, де більша швидкість руху рідини. Розглядатимемо *стаціонарний (або сталий) рух ідеальної рідини*, коли частинок в кожній точці об'єму, зайнятому рідиною, має певне значення, що не змінюється з часом. У стаціонарному випадку лінії струму незмінні і збігаються з траєкторіями частинок рідини.

Частина рідини, обмежена лініями струму, називається *трубкою струму* (рис. 5.3). Частинки рідини, що знаходяться в деякому перерізі трубки струму, при русі не виходять за її межі. Частинки ззовні всередину трубки струму не проникають. Ця обставина дозволяє знайти залежність швидкості руху рідини від площі поперечного перерізу трубки.

Виберемо два які-небудь перерізи трубки струму S_1 і S_2 , перпендикулярні напрямку руху рідини, в яких швидкості рідини дорівнюють, відповідно, v_1 і v_2 . За одиницю часу через переріз S_1 протече об'єм рідини, рівний $S_1 v_1$, а через переріз S_2 – об'єм $S_2 v_2$. Для нестискуваної рідини ці об'єми рівні, тому

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (5.4)$$

Оскільки співвідношення (5.4) справедливе для будь-яких двох перерізів трубки струму, можна сказати, що *добуток швидкості руху рідини в будь-якому поперечному перерізі трубки струму на площу цього перерізу є величина стала для даної трубки*:

$$S \cdot v = const. \quad (5.5)$$

Це рівняння виражає закон збереження речовини в гідромеханіці і називається *рівнянням нерозривності*. З нього випливає, що швидкість рідини, яка тече по трубці, більша на тих ділянках труби, переріз у яких менший.

§ 5.3. Рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі зв'язує швидкість рідини в деякому перерізі трубки струму з тиском рідини в цьому перерізі. Щоб його вивести, розглянемо трубку струму, зображену на рис. 5.4. Переходячи з широкої частини трубки перерізом S_1 у вузьку частину, переріз якої S_2 , рідина, згідно з рівнянням нерозривності, починає текти швидше, тобто набуває прискорення. Отже, на рідину, що

знаходиться в трубці, діє сила, спрямована у бік її вузької частини. Під дією цієї сили рідина, розміщена між перерізами S_1 і S_2 , за час Δt зміщується і займає положення між перерізами S'_1 і S'_2 . Виконана при цьому робота дорівнює

$$A = F_1 \Delta l_1 + F_2 \Delta l_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2, \quad (5.6)$$

де $F_1 = p_1 S_1$ – сила, що діє на виділений об'єм рідини зліва,

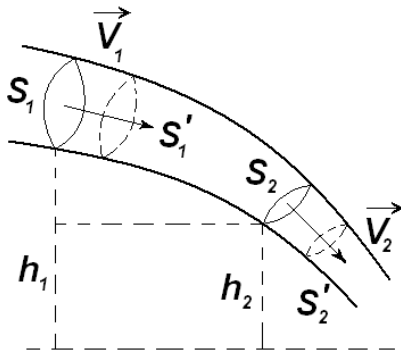


Рис. 5.4

$F_2 = -p_2 S_2$ – сила, що діє на нього справа. Знак "мінус" показує, що напрямок сили протилежний швидкості руху рідини. Через Δl_1 і Δl_2 позначені переміщення відповідно лівої і правої меж об'єму; p_1 і p_2 – величини зовнішнього тиску, що чиниться рідиною на поверхні S_1 і S_2 .

Оскільки загальна частина вказаних об'ємів – перерізами S'_1 і S_2 – зберігає стан свого руху незмінним, переміщення рідини вздовж трубки струму рівносильне перенесенню рідини масою Δm з об'єму, розміщеного між перерізами S_1 і S'_1 , в об'єм між перерізами S_2 і S'_2 .

Нехай W_1 – повна механічна енергія цієї частини рідини поблизу перерізу S_1 , а W_2 – поблизу перерізу S_2 . Повна механічна енергія складається з кінетичної і потенціальної енергії, тобто

$$W_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1, \quad W_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2, \quad (5.7)$$

де h_1 – висота, відрахована від дна посудини, на якій

розташовано переріз трубки S_1 , h_2 – переріз S_2 .

Різниця енергій рівна роботі зовнішніх сил, що переміщують рідину, розміщену в об'ємі між перерізами S_1 і S_2 :

$$W_2 - W_1 = A. \quad (5.8)$$

Підставляючи (5.6) і (5.7) в (5.8), одержимо

$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m g h_1 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2. \quad (5.9)$$

Через рівняння нерозривності (5.5), об'єм рідини, що пройшла через переріз S_1 , рівний об'єму рідини, що пройшла через переріз S_2 , тому $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2 = \Delta V$. Розділивши (5.9) на ΔV і враховуючи, що $\Delta m / \Delta V = \rho$ – густина рідини, одержимо рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (5.10)$$

Якщо рідина тече по трубці, розташованій горизонтально, то $h_1 = h_2$ і це рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2. \quad (5.10a)$$

З нього і рівняння нерозривності випливає, що в місцях звуження трубки швидкість руху рідини більша, а тиск – менший. При великих швидкостях він може стати навіть негативним, і струмінь чинитиме всмоктуючу дію. На цьому принципі працюють

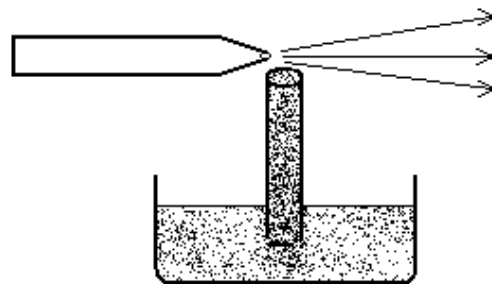


Рис. 5.5

пульверизатор і водострумний насос (рис.5.5).

Якщо в потік рідини помістити заломлену під прямим кутом манометричну трубку (“трубку Піто”, рис. 5.6), то лінії струму поблизу неї зміняться. Перед отвором трубки рідина буде нерухома ($v_2 = 0$), а тиск в трубці Піто, згідно з (5.10а),

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}. \quad (5.11)$$

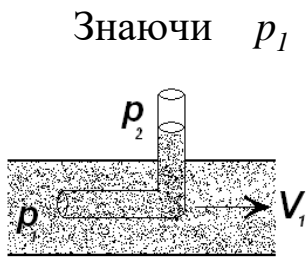


Рис. 5.6

Знаючи p_1 і вимірявши p_2 , можна знайти швидкість рідини v_1 . Трубка Піто служить для вимірювання швидкості літаків і морських суден, які рухаються відносно нерухомого повітря або води. При цьому як p_1 береться

атмосферний тиск. Доданок $\frac{\rho v^2}{2}$

називається *динамічним тиском*.

Розглянемо приклад застосування рівняння Бернуллі.

Приклад. Знайти швидкість витікання рідини з отвору в судині, площа поперечного перетину якого набагато більша площі отвору (рис. 5.7).

Рзв’язання. Дану посудину можна розглядати як трубу, що звужується до розміру отвору. Оскільки тиск атмосфери на поверхнях S_1 і S_2 однаковий, то у рівнянні (5.10), прирівняємо p_1 і

p_2 . Після скорочення p_1 і ρ маємо:

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2, \quad (a)$$

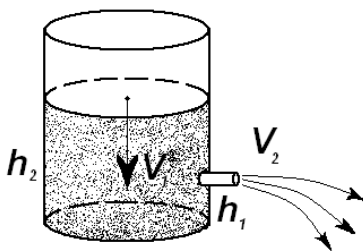


Рис. 5.7

де h_1 – висота стовпа рідини в посудині, h_2 – висота, на якій розташовано отвір,

v_1 – швидкість рідини в посудині, v_2 – швидкість витікання рідини з отвору. Вважаючи, що $h_1 - h_2 = h$ і враховуючи, що $v_1 \gg v_2$ через велику різницю в діаметрах посудини й отвору, одержимо:

$$v_2 = \sqrt{2gh} . \quad (б)$$

Ця формула називається *формулою Торрічеллі*. З неї випливає, що швидкість витікання ідеальної рідини не залежить від її густини і збігається зі швидкістю тіла, що падає з висоти h .

§ 5.4. В'язкість рідин і газів

В'язкість – це властивість рідин і газів чинити опір руху тіл, розміщених в їхньому середовищі. Спостережуване при цьому переміщення шарів рідини або газу один відносно одного також супроводжується силами, які цьому перешкоджають. В'язкість називають ще *внутрішнім тертям*.

Розглянемо нерухомий шар рідини товщиною h , що знаходиться в посудині, розміри якої набагато більші h . Якщо на поверхню рідини покласти аркуш паперу і рухати його зі сталою швидкістю v_0 у горизонтальному напрямку, то рідина плчне

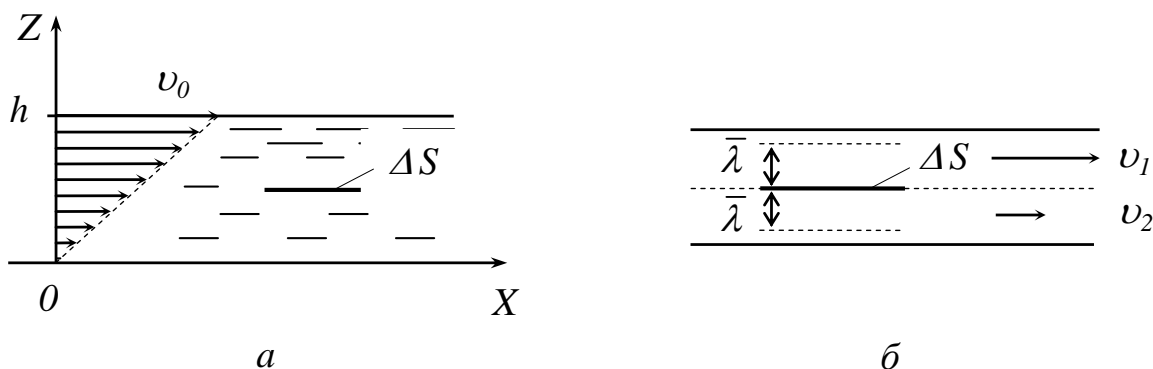


Рис. 5.8

рухатися (рис. 5.8,а). Верхній шар рухатиметься зі швидкістю v_0 , а нижній шар, що прилягає до дна посудини, залишиться нерухомим.

Проміжні шари почнуть переміщатися паралельно один одному зі швидкостями, що змінюються від нуля до v_0 , тобто швидкість шару v є функцією координати по осі Z , перпендикулярній дну посудини.

Розглянемо два сусідні шари, один з яких – верхній – рухається зі швидкістю v_1 , а нижній – з меншою швидкістю v_2 (рис. 5.8,б). Завдяки взаємодії молекул між шарами рідини виникає сила, яка називається *силою внутрішнього тертя*. Вона спрямована вздовж осі X і діє на верхній шар як гальмуюча, а на нижній – як прискорююча. Сила тертя між шарами пропорційна площі їх зіткнення ΔS і градієнту швидкості шарів dv/dz , який в даному випадку показує, наскільки різко змінюється ця швидкість, якщо подумки переміщатися вздовж осі Z від одного шару до іншого:

$$F_x = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S. \quad (5.12)$$

Це рівняння називається рівнянням Ньютона для сили в'язкого тертя. Воно справедливе для рідин і газів. Коефіцієнт пропорційності η називається *коефіцієнтом внутрішнього тертя* або *коефіцієнтом в'язкості*.

Рівняння (5.12) служить для визначення коефіцієнта в'язкості: *коефіцієнт в'язкості дорівнює силі внутрішнього тертя між шарами рідини або газу, що мають одиничну площу зіткнення ($\Delta S = 1 \text{ м}^2$), за умови, що градієнт швидкості шарів рівний одиниці ($dv/dz = 1 \text{ с}^{-1}$).*

Одиниця вимірювання коефіцієнта в'язкості – Па·с (*паскаль-секунда*) або кг/(м·с).

В'язкість рідини або газу залежить від їх природи і від температури. Як показує дослід, із зростанням температури в'язкість рідин падає, а газів – зростає. Механізм внутрішнього тертя в рідинах принципово відрізняється від такого ж в газах.

Молекули рідини, переміщуючись при русі рідини, зберігають незмінними відстані між собою. Щоб зрушити один шар рідини відносно іншого, потрібно розірвати зв'язки між молекулами, що вимагає певних зусиль. З підвищенням температури міжмолекулярні відстані незначно зростають, про що свідчить збільшення об'єму рідини. Сили зчеплення між молекулами при цьому слабшають, і в'язкість рідини зменшується.

Механізм в'язкості газів зумовлений перенесенням імпульсу впорядкованого руху їх молекул в кожному шарі з одного шару в інший, сусідній з ним. Детально цей механізм ми розглянемо далі.

§ 5.5. Методи вимірювання в'язкості рідин

Існують різні методи вимірювання в'язкості рідин. Тут ми розглянемо два з них. Перший – *метод Стокса* – заснований на вимірюванні швидкості кульки, що рухається в рідині під дією сили тяжіння.

Нехай кулька радіусом r , що має густину ρ , розміщена в рідині густиною ρ_p . Якщо $\rho > \rho_p$, кулька почне занурюватися з деякою швидкістю v . Її рух відбувається під дією трьох сил (рис. 5.9):

- 1) сили тяжіння P , спрямованої вниз:

$$P = mg = \rho Vg, \quad (5.13)$$

де V – об'єм кульки;

- 2) виштовхуючої сили Архімеда, яка спрямована вгору:

$$F_{арх} = m_p g = \rho_p Vg; \quad (5.14)$$

- 3) сили опору $F_{оп}$, зумовленої в'язкістю рідини, спрямованої у бік, протилежний швидкості руху кульки.

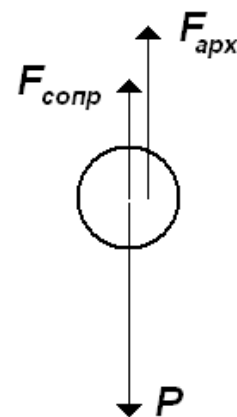


Рис. 5.9

Вираз для цієї сили одержаний Стоксом і має вигляд:

$$F_{on} = 6\pi\eta r v. \quad (5.15)$$

На початку шляху кулька рухається прискорено, а сила в'язкого тертя зростає разом зі швидкістю до тих пір, поки сума її і сили Архімеда не зрівноважить силу тяжіння. Тоді, використовуючи формули (5.13) – (5.15), можна записати:

$$\rho_p V g + 6\pi\eta r v = \rho V g,$$

звідки

$$\eta = \frac{(\rho - \rho_p) V g}{6\pi r v}. \quad (5.16)$$

Оскільки об'єм кульки $V = \frac{4\pi}{3} r^3$, рівняння (5.16) набуває вигляду:

$$\eta = \frac{2g r^2 (\rho - \rho_p)}{9v}. \quad (5.17)$$

Іншим методом експериментального визначення коефіцієнта в'язкості є *метод Пуазейля*. Він заснований на вимірюванні часу t , за який рідина об'ємом V пройде через капіляр – тонку трубку, довжина якої l набагато більша її радіуса R ($l \gg R$).

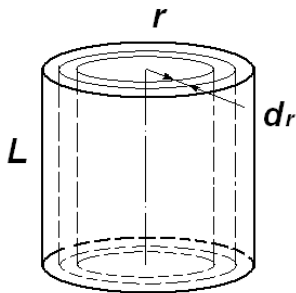


Рис. 5.10

За Пуазейлем, одержимо формулу для знаходження η . Виділимо подумки в рідині, що рухається через капіляр, циліндричний об'єм радіусом r , вісь якого збігається з віссю капіляра (рис. 5.10). При сталій течії розподіл циліндричних шарів рідини за швидкостями вздовж радіуса капіляра не змінюється з часом, оскільки сила, що

приводить рідину в рух, зумовлена різницею тиску Δp на кінцях капіляра, врівноважуватиметься силою тертя між цими шарами.

Площа основи виділеного циліндра $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, площа його бічної поверхні $S_{\text{біч}} = 2\pi r l$, тому вказана умова рівноваги сил, згідно з (5.1) і (5.12), записується для нього у вигляді

$$\pi r^2 \cdot \Delta p = 2\pi r l \cdot \eta \frac{dv}{dr},$$

звідки

$$dv = \frac{\Delta p}{2\eta l} r dr.$$

Інтегруючи це рівняння, одержимо залежність швидкості руху рідини в циліндричному шарі від його радіуса:

$$v = \frac{\Delta p}{2\eta l} \int_0^R r dr = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (5.18)$$

На рис. 5.11 показаний розподіл шарів рідини в капілярі за швидкостями. При $r = R$, біля стінки капіляра, рідина нерухома. Максимальне значення швидкості рідини має на осі капіляра (при $r = 0$).

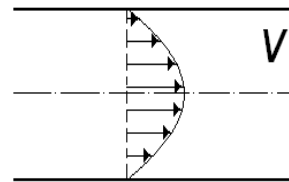


Рис. 5.11

За час t уздовж шару радіуса r товщиною dr (рис. 5.10) пройде рідина об'ємом $dV = 2\pi r dr \cdot vt$. Підставивши сюди v з (5.18) та інтегруючи по r у межах від 0 до R , знайдемо об'єм рідини, що протікає за цей час через капіляр:

$$V = \frac{2\pi \Delta p \cdot t}{4\eta l} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi R^4 \Delta p \cdot t}{8\eta l},$$

звідки коефіцієнт в'язкості

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p \cdot t}{8 V l}. \quad (5.19)$$

§ 5.6. Ламінарна і турбулентна течія рідини

У цьому розділі ми розглядали *ламінарний* рух рідини, коли шари рідини начебто ковзають один щодо одного, а частинки рідини не переходять з одного шару в інший. Ламінарний рух рідини спостерігається при невеликих швидкостях її руху. Зі збільшенням швидкості течія втрачає ламінарний характер і стає безладною. Виникають компоненти швидкості, перпендикулярні лініям струму. Такий рух називається *турбулентним*. Він супроводжується інтенсивним перемішуванням рідини та утворенням вихорів. Перехід від ламінарної до турбулентної течії в трубах веде до різкого зростання опору руху. Цей перехід відбувається при певному значенні швидкості, характерному для кожного конкретного випадку.

О.Рейнольдс в 1883 р. встановив, що перехід до турбулентної течії залежить від швидкості течії, діаметру труби, природи рідини. Характер течії визначається так званим *числом Рейнольдса*:

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta}, \quad (5.20)$$

де ρ – густина рідини, $\langle v \rangle$ – середнє значення її швидкості по перерізу труби, d – діаметр труби.

Число Рейнольдса набуло великого поширення в теорії руху рідин. З дослідів було знайдено, що ламінарна течія спостерігається при малих значеннях числа Рейнольдса ($Re \leq 1000$). В області

$1000 \leq Re \leq 2000$ відбувається перехід від ламінарної течії до турбулентної, коли течія нестійка і є ламінарною тільки на окремих ділянках. При $Re \geq 2000$ течія турбулентна.

При обтіканні рідиною тіл течія зі збільшенням його швидкості стає вихоровою. Цим зумовлений, зокрема, опір руху тіл в рідинах і газах при великих швидкостях. При ламінарній течії, як було сказано вище, сила опору пропорційна швидкості і лінійним розмірам тіла – закон *Стокса*, що виражається формулою (5.15). Зі збільшенням швидкості (при утворенні вихорів) сила опору стає пропорційною квадрату швидкості:

$$F_{on} \propto v^2.$$

При швидкостях, близьких до швидкості звуку в даному середовищі, вона пропорційна кубу швидкості ($F_{on} \propto v^3$), а при надзвукових швидкостях знову стає пропорційною v^2 .

Питання для самоперевірки

1. Які тіла належать до суцільних середовищ? Назвіть їх характерні властивості.
2. Дайте визначення тиску рідини або газу.
3. Сформулюйте закон Паскаля.
4. Запишіть формулу гідростатичного тиску.
5. Запишіть формулу, що виражає закон Архімеда, і сформулюйте умову плавання тіл.
6. Що називається ідеальною рідиною?
7. Дайте визначення лінії і трубки струму. Який рух рідини називається стаціонарним?

8. Запишіть рівняння нерозривності. Що воно виражає в гідромеханіці?
9. Запишіть рівняння Бернуллі і поясніть значення його складових величин.
10. Поясніть принцип дії водострумного насоса.
11. Що таке трубка Піто? Як з її допомогою вимірюють швидкість руху рідини або газу?
12. Запишіть рівняння Ньютона для сили в'язкого тертя і дайте визначення коефіцієнта в'язкості.
13. Як в'язкість рідин залежить від температури? Наведіть пояснення цьому.
14. Які ви знаєте методи експериментального визначення коефіцієнта в'язкості рідин?
15. Дайте характеристику ламінарному і турбулентному руху рідини. Що таке число Рейнольдса?
16. Як залежить сила опору руху тіл в рідині або газі від їх швидкості при малих і великих швидкостях?

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

РОЗДІЛ 6

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Коливальні процеси дуже поширені в природі і техніці. Прикладами таких процесів служать хитання годинникового маятника, хвилі на воді, змінний електричний струм, світло, звук. При русі маятника коливається його центр ваги. У випадку змінного електричного струму коливаються напруга і струм у ланцюзі. Ці два процеси різні за своєю фізичною природою, однак їхні закономірності мають між собою багато спільного.

Властивості коливальних процесів ми вивчимо на прикладі механічних коливань, тобто коливань твердих тіл. Коливальним рухам тіл властива загальна ознака, що полягає в існуванні деякого стійкого положення, у якому тіло може знаходитися як завгодно довго – доти, поки зовнішня сила не виведе його з цього положення. Воно називається *положенням рівноваги*. У маятника це прямовисне положення; у тіла, закріпленого на пружині, – положення, коли пружина не деформована. Якщо при відхиленні від цього положення на тіло діє сила, спрямована до положення рівноваги, то тіло буде здійснювати коливальний рух. При невеликих відхиленнях сила пропорційна відхиленню і коливання будуть *гармонічними*, тобто такими, які описуються синусом або косинусом. Тіло, що робить гармонічні коливання, називається *гармонічним осцилятором*. Гармонічними осциляторами є розглянуті нижче математичний, фізичний і пружинний маятники.

§ 6.1. Амплітуда, фаза, період і частота гармонічних коливань

Розглянемо рух тіла масою m , яке закріплене на пружині й знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні (рис. 6.1). Такий пристрій називається *пружинним маятником*. Коли пружина не деформована, центр мас тіла розташований у точці $x=0$ координатної осі X , уздовж якої відбувається його рух.

Якщо пружину розтягти або стиснути, виникає пружна сила, що прагне повернути тіло у вихідне положення. За законом Гука *при пружній деформації сила пружності пропорційна величині деформації x* :

$$F_{i\delta} = -kx, \quad (6.1)$$

де k – жорсткість пружини.

Знак “мінус” вказує на те, що сила пружності $F_{i\delta}$ спрямована у бік, протилежний зміщенню тіла, тобто до положення рівноваги, і є повертаючою. Якщо знехтувати тертям, рівняння руху (другий закон Ньютона) набуває вигляду

$$mx'' = -kx. \quad (6.2)$$

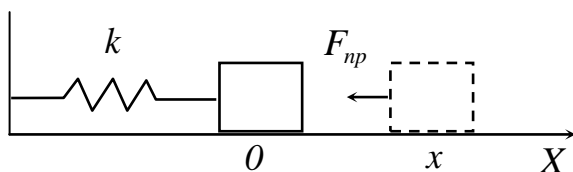


Рис. 6.1

Розділивши на mt і переносячи праву частину в ліву частину рівняння, одержимо диференціальне рівняння *вільних гармонічних коливань*:

$$x'' + \omega^2 x = 0. \quad (6.3)$$

Стала ω має розмірність оберненого часу і дорівнює

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad [\omega] = 1/\text{с}. \quad (6.4)$$

Рівняння (6.3) задовольняє функція

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.5)$$

яка є його розв'язком при будь-яких значеннях сталих A і φ_0 , тобто являє собою загальний розв'язок рівняння, у чому можна переконатися шляхом безпосередньої підстановки в рівняння (6.3). Справді, швидкість тіла

$$v = x' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.6)$$

а прискорення

$$a = v' = x'' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (6.7)$$

З (6.5) випливає $a = -\omega^2 x$, що рівносильно рівнянню (6.3).

Функція $x(t)$ описує зміщення тіла відносно положення рівноваги, що відбувається періодично в обидва боки, тобто тіло здійснює коливальний рух. Найбільше зміщення A називається *амплітудою коливань*, функція $\varphi = \omega t + \varphi_0$, що знаходиться під знаком косинуса, – *фазою коливань*, а її значення φ_0 при $t=0$ – *початковою фазою*. Початкова фаза показує, які були зміщення і швидкість тіла в початковий момент часу. Пояснимо це.

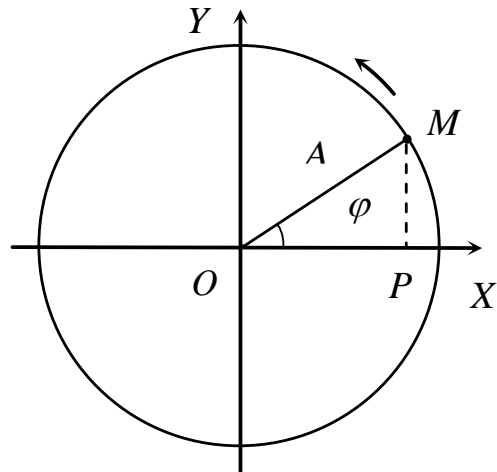


Рис. 6.2

Візьмемо точку M , що обертається по колу радіуса A зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 6.2). Проекція P цієї точки на вісь X здійснює гармонічні коливання, що описуються функцією

(6.5). Якщо, наприклад, початкова фаза коливань знаходиться в межах $0 < \varphi_0 < \pi/2$, то в початковий момент часу зміщення точки P позитивне ($x > 0$), а швидкість – негативна, тобто спрямована вліво. Якщо ж $3\pi/2 < \varphi_0 < 2\pi$, то зміщення і швидкість позитивні і точка P рухається зліва направо.

Кутова швидкість ω називається *круговою* або *циклічною частотою* коливань.

Період коливань T – час, протягом якого відбувається одне коливання. Точка M (рис. 6.2) здійснює за цей час одне обертання, а фаза коливань φ збільшується на 2π . З рівняння (6.5):

$$\cos[\omega(t+T) + \varphi_0] = \cos(\omega t + \varphi_0 + 2\pi),$$

звідки період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.8)$$

Якщо за час t відбувається N коливань, то період $T = t/N$. Число коливань, здійснених за одиницю часу, називається *частотою коливань*. Частота і період – взаємно обернені величини:

$$\nu = N/t = 1/T. \quad (6.9)$$

У системі СІ період вимірюється в *секундах* (с), а частота – в *герцах* (Гц): $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Порівнюючи формули (6.8) і (6.9), можна знайти зв'язок ν з циклічною частотою ω :

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (6.10)$$

Графік функції $x(t)$ наведений на рис. 6.3,а. Форма кривої на графіку визначається амплітудою A і циклічною частотою ω , а її положення відносно осі ординат (зрушення всієї кривої по осі t) –

початковою фазою φ_0 . При $\varphi_0 = 0$ $x = A \cos \omega t$ (рис. 6.3,а); якщо $\varphi_0 = -\pi/2$, то $x = A \sin \omega t$. На рис. 6.3,б показана залежність від часу швидкості тіла (при $\varphi_0 = 0$). Порівнюючи графіки функцій $x(t)$ і $v(t)$, бачимо, що при максимальному відхиленні від положення рівноваги швидкість тіла перетворюється в нуль. При проходженні положення рівноваги, навпаки, швидкість тіла максимальна.

Період коливань пружинного маятника, відповідно до рівнянь (6.4) і (6.8):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.11)$$

Період не залежить від амплітуди. Ця його властивість називається *ізохронністю* і спотерігається при малих деформаціях пружини, коли справедливий закон Гука. При більших деформаціях з'являється залежність періоду коливань від амплітуди. Коливання в цьому випадку називаються *ангармонічними*.

Амплітуда і початкова фаза не можуть бути знайдені з диференціального рівняння (6.3). Вони визначаються *початковими умовами* – зсувом і швидкістю маятника в момент часу $t = 0$:

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0. \quad (6.12)$$

Умови (6.12) дозволяють, користуючись рівняннями (6.5) і (6.6), знайти значення A і φ_0 і, отже, записати рівняння гармонічного коливання. При $x(0) = A$, $v(0) = 0$ рівняння (6.5)

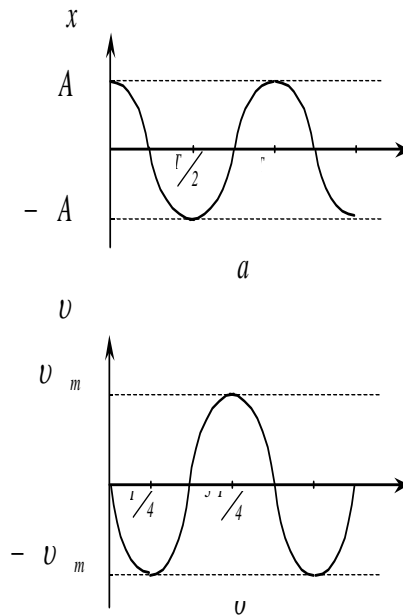


Рис. 6.3

набуває вигляду $x(t) = A \cos \omega t$, а при $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$ – вид $x(t) = A \sin \omega t$, де амплітуда визначається тепер початковою швидкістю тіла v_0 і круговою частотою ω : $A = v_0 / \omega$.

§ 6.2. Фізичний маятник

Фізичним маятником називають абсолютно тверде тіло, закріплене на горизонтальній осі, що не проходить через його центр мас і здійснює навколо цієї осі коливання під дією сили тяжіння.

На рис. 6.4 показаний розріз цього тіла площиною, перпендикулярною осі обертання OO . Точка C – центр мас.

Відрізок OC довжиною l , що з'єднує вісь з центром мас, позначимо вектором \vec{l} .

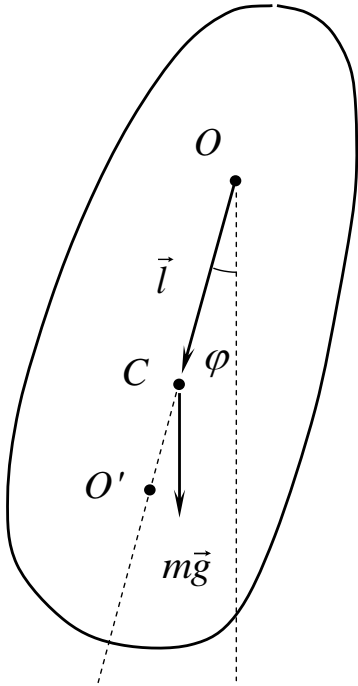


Рис. 6.4

Нехай маятник відхилений від положення рівноваги вліво на невеликий кут φ . На нього діє момент сили тяжіння $\vec{M} = [\vec{l}, m\vec{g}]$. Вектор \vec{M} спрямований уздовж осі OO до спостерігача, тобто до нас, а його модуль

$$M = mgl \sin \varphi, \quad (6.13)$$

де m – маса маятника, g – прискорення вільного падіння.

При малих кутах $\sin \varphi \approx \varphi$ і рівняння (6.13) можна записати у векторному вигляді, позначивши малий (точніше кажучи,

нескінченно малий) кут повороту маятника вектором $\vec{\varphi}$, що теж спрямований уздовж осі OO , але за площину рисунка – від нас. Тоді

$$\vec{M} = -mgl\vec{\varphi}.$$

Знак “мінус” вказує на те, що напрямки аксіальних векторів \vec{M} і $\vec{\varphi}$ взаємно протилежні. При відхиленні маятника вправо вектори \vec{M} і $\vec{\varphi}$ змінять свої напрямки на зворотні, однак знову будуть спрямовані протилежно один одному. Отже, момент сили тяжіння завжди прагне повернути маятник у положення рівноваги.

Рівняння руху маятника $J\varepsilon = M$ має вигляд

$$J\varphi'' = -mgl\varphi, \quad (6.14)$$

де J – момент інерції маятника відносно осі OO .

Розділивши на J і переносячи праву частину вліво, одержимо рівняння

$$\varphi'' + \omega^2\varphi = 0, \quad (6.15)$$

аналогічне рівнянню (6.3). З нього видно, що маятник здійснює гармонічні коливання біля положення рівноваги з циклічною частотою

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad (6.16)$$

і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (6.17)$$

Період малих коливань маятника не залежить від амплітуди. На цій властивості базується його застосування в годинниках. Маятники однакової конфігурації, виготовлені з різних матеріалів, мають однакові періоди коливань, що свідчить про рівність інертної і гравітаційної мас (див. розд. 2).

§ 6.3. Математичний маятник

Математичним маятником називається матеріальна точка, яка підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці і здійснює коливання під дією сили тяжіння.

Прикладом математичного маятника служить маленька кулька на довгій нитці. Її можна розглядати як фізичний маятник, вся маса якого m практично зосереджена в одній точці – у центрі кульки на відстані l від точки підвісу (рис. 6.5). У цьому випадку момент інерції $J = ml^2$ і формула (6.17) набуває вигляду

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.18)$$

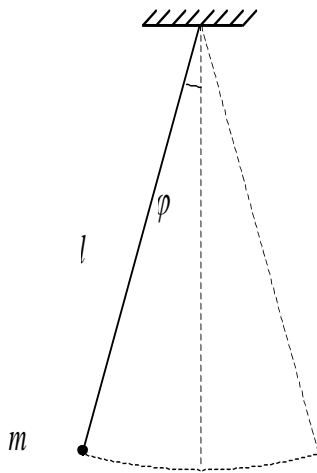


Рис. 6.5

Період коливань математичного маятника залежить тільки від його довжини і прискорення вільного падіння.

Якщо у формулі (6.17) позначити

$$l = \frac{J}{ml'},$$

(6.19)

то вона набуває вигляду (6.18).

Період коливань такого фізичного маятника дорівнює періоду коливань математичного маятника довжиною l' . *Довжина l' математичного маятника, який має такий же період коливань, що і даний фізичний маятник, називається приведеною довжиною цього фізичного маятника.*

Приведена довжина l' більше l (рис. 6.4). Справді, згідно з теоремою Штейнера, момент інерції фізичного маятника відносно осі OO :

$$J = J_c + ml^2, \quad (6.20)$$

де J_c – момент інерції відносно осі, паралельної осі OO , що проходить через його центр мас. Виразивши l' з формули (6.19) і підставивши туди J з рівняння (6.20), одержимо $l' = l + \frac{J_c}{ml}$, звідки і випливає, що $l' > l$. Точку O' , показану на рис. 6.4 на продовженні прямої OC на відстані l' від точки O , називають *центром гойдань* маятника. Якщо вісь обертання перенести паралельно самій собі в центр гойдань O' , то період коливань маятника залишиться незмінним. Точка O буде тепер новим центром гойдань відносно точки O' .

§ 6.4. Енергія гармонічного осцилятора

Питання про енергію гармонічного осцилятора розглянемо на прикладі пружинного маятника, тобто тіла маси m , закріпленого на пружині і здійснюючого вільні гармонічні коливання (див. рис. 6.1). Енергія маятника складається з кінетичної енергії W_e тіла, що рухається зі швидкістю v , і потенціальної енергії W_p пружини, деформованої на величину x :

$$W = W_e + W_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (6.21)$$

Підставляючи сюди $x(t)$ з рівняння (6.5) і $v(t)$ з рівняння (6.6), отримаємо:

$$W_e = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$W_p = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Замінивши квадрати синуса й косинуса косинусом подвоєного аргументу і з огляду на те, що $k = m\omega^2$, одержимо

$$W_{\dot{e}} = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)],$$

$$W_p = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)].$$

Кінетична і потенціальна енергії маятника окремо не залишаються сталими, а здійснюють коливання навколо загального середнього значення $m\omega^2 A^2 / 4$ з подвоєною круговою частотою

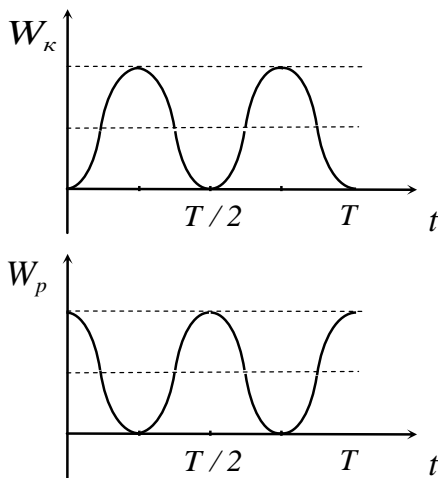


Рис. 6.6

2ω . Оскільки середнє значення косинуса за період коливань дорівнює нулю, середнє значення кінетичної енергії дорівнює середньому значенню енергії потенціальної: $\bar{W}_{\dot{e}} = \bar{W}_p$. Їхня сума, тобто повна енергія $W = W_{\dot{e}} + W_p$, не залежить від часу і дорівнює

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (6.22)$$

На рис. 6.6 показані графіки цих функцій при $\varphi_0 = 0$. Як видно з графіків, протягом одного періоду повна енергія W двічі цілком переходить у кінетичну енергію $W_{\dot{e}}$ і двічі – у потенціальну енергію W_p .

З формули (6.22) випливає, що повна енергія коливань маятника пропорційна квадрату амплітуди і квадрату частоти.

Отримані тут результати справедливі для будь-якого гармонічного осцилятора.

§ 6.5. Додавання коливань одного напрямку з однаковими періодами

Тіло може одночасно брати участь у декількох гармонічних коливаннях. Результируючий рух тіла є складним рухом, однак у більшості випадків він також є коливальним. Розглянемо кілька прикладів додавання коливань.

Нехай тіло бере участь у двох коливаннях одного напрямку й однакової частоти, що відбуваються з деякою різницею фаз і різними амплітудами:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad (6.23)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}). \quad (6.23a)$$

Зміщення тіла відносно положення рівноваги виразиться алгебраїчною сумою x_1 і x_2 :

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}). \quad (6.24)$$

Коливання тіла будуть відбуватися з тією ж частотою ω . Рівняння результируючих коливань можна подати у вигляді

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.25)$$

де A і φ_0 – відповідно амплітуда і початкова фаза цих коливань.

Для знаходження їхніх числових значень скористаємося *методом обертового вектора амплітуди*. Відкладемо з точки O (рис. 6.7) під кутом φ_{01} до осі X вектор \vec{A}_1 , а під кутом φ_{02} – вектор \vec{A}_2 . Довжини цих векторів дорівнюють амплітудам A_1 і A_2 відповідних коливань, а їхні проекції на вісь X – зміщенню тіла в кожному з коливань.

За час t кути φ_{01} і φ_{02} одержують приріст ωt , пропорційний часу. Це означає, що обидва вектори \vec{A}_1 й \vec{A}_2 обертаються навколо точки O з кутовою швидкістю ω . Сума векторів $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ являє собою вектор амплітуди результируючого коливання. Проекція його

на вісь X , відповідно до рівняння (6.25), показує зміщення тіла відносно положення рівноваги в момент часу t . Помноживши векторну рівність $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ саму на себе скалярно, одержимо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (6.26)$$

Діаграми, зображені на рис. 6.7, дозволяють знайти початкову фазу φ_0 результуючого коливання:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (6.27)$$

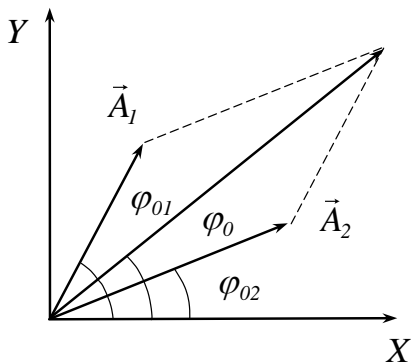


Рис. 6.7

З формули (6.26) випливає, що амплітуда A результуючого коливання залежить від різниці початкових фаз $\varphi_{01} - \varphi_{02}$ коливань, і знаходиться в межах

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2.$$

Амплітуда максимальна, коли фази φ_{01} і φ_{02} збігаються, і має мінімальне значення – коли φ_{01} і

φ_{02} відрізняються на π .

Використаний тут діаграмний метод особливо зручний при додаванні декількох коливань однакової частоти, оскільки суму векторів, що представляють кожне з коливань, можна знайти за правилом багатокутника (див. § 1.3).

§ 6.6. Додавання коливань з близькими частотами. Биття

Розглянемо тепер додавання двох коливань однакового напрямку, частоти яких мало відрізняються одна від одної. Для спрощення обчислень будемо вважати амплітуди a цих коливань

однаковими, а початкові фази візьмемо рівними нулю ($\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$). Тоді

$$x_1(t) = a \cos \omega_1 t, \quad (6.28)$$

$$x_2(t) = a \cos \omega_2 t. \quad (6.28a)$$

Близькість частот ω_1 і ω_2 означає, що їхня різниця $|\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega$ набагато менша кожної з частот $\Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$.

Результуюче коливання отримуємо додаванням x_1 і x_2 . Використовуючи формулу перетворення суми косинусів у добуток, одержимо

$$x = a(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2a \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Цю формулу подамо у вигляді

$$x = A(t) \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \quad (6.29)$$

де введена функція

$$A(t) = 2a \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \quad (6.30)$$

Її модуль $|A(t)|$ має зміст амплітуди результуючого коливання, що періодично змінюється з часом. *Явище періодичного зростання і спадання амплітуди результуючого коливання при додаванні коливань з близькими частотами називається биттями.*

Графік результуючого коливання зі «змінною амплітудою» показаний на рис. 6.8. Період високочастотного коливання τ_1 знайдемо з формули (6.29):

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Період τ_2 зміни амплітуди A дорівнює половині періоду косинуса напіврізниці кругових частот у формулі (6.30):

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Цей період тим більший, чим менша різниця частот коливань, що додаються.

Биття використовують настроювачі музичних інструментів, наприклад, при настроюванні в унісон струн фортепіано. Додавання близьких по частоті коливань використовується в радіоприймачах, що називаються *гетеродинами*.

§ 6.7. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу

Розглянемо додавання коливань матеріальної точки, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках – уздовж осей X і Y – і мають однакові періоди. Рівняння цих коливань:

$$x = A \cos \omega t, \quad (6.31)$$

$$y = B \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.31a)$$

де A і B – амплітуди, φ – різниця фаз коливань.

Щоб знайти рівняння траєкторії, по якій рухається точка, виключимо з рівнянь (6.31) і (6.31a) час t . Для цього, використовуючи формулу косинуса суми, перепишемо їх у вигляді:

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t, \quad (6.32)$$

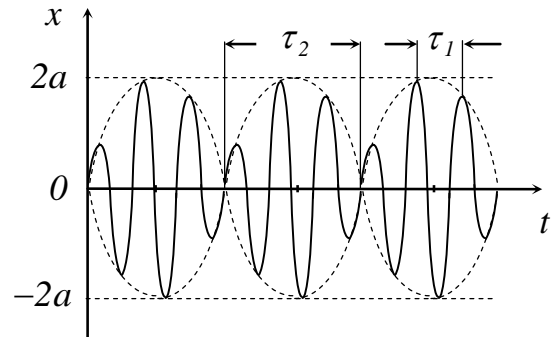


Рис. 6.8

$$\frac{y}{B} = \cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi. \quad (6.32a)$$

Виразимо $\sin \omega t$ з рівняння (6.32a), заздалегідь підставивши туди $\cos \omega t$ з рівняння (6.32). Тоді

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}, \quad (6.33)$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{x}{A} \cos \varphi - \frac{y}{B} \right). \quad (6.33a)$$

Піднесемо ці рівняння до квадрата і складемо, скориставшись тригонометричною тотожністю $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$. У результаті одержимо *рівняння траєкторії*:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x}{A} \cdot \frac{y}{B} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (6.34)$$

Розглянемо окремі випадки, що відповідають різним значенням φ .

1. Нехай $\varphi = 0$ або π . Тоді $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = \pm 1$ і ліву частину рівняння (6.34) можна згорнути, записавши $\left(\frac{x}{A} \mp \frac{y}{B} \right)^2 = 0$, звідки

$$y = \pm \frac{B}{A} x.$$

Це рівняння двох прямих, що проходять через початок координат, зображених на рис. 6.9 (суцільна лінія відповідає $\varphi = 0$, пунктирна – $\varphi = \pi$). Точка рухається залежно від φ уздовж однієї з цих прямих, здійснюючи гармонічні коливання з циклічною частотою ω і амплітудою $a = \sqrt{A^2 + B^2}$.

2. Нехай $\varphi = \pi/2$ або $3\pi/2$. Тоді рівняння траєкторії набуває вигляду

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Це рівняння еліпса (рис. 6.10). При $\varphi = \pi/2$ точка рухається по еліпсу за годинниковою стрілкою, а при $\varphi = 3\pi/2$ – проти годинникової стрілки. В окремому випадку, коли амплітуди коливань рівні ($A = B$), рух точки відбувається по колу радіусом A зі сталою кутовою швидкістю ω .

Усі інші значення різниці фаз φ , окрім розглянутих вище, дають еліпси, осі симетрії яких обернені щодо осей X і Y на кут φ (рис. 6.11).

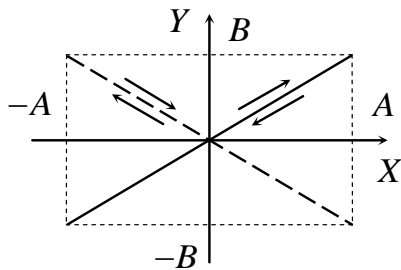


Рис. 6.9

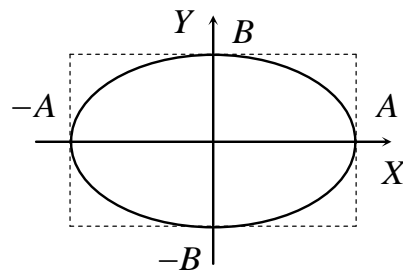


Рис. 6.10

Якщо частоти коливань за сями X і Y відрізняються в n раз (n – ціле число), то траєкторія точки – замкнута фігура, що має n петель. Сукупність усіх таких траєкторій носить назву *фігур Ліссажу*.

На рис. 6.12 показана траєкторія точки, частота коливань якої уздовж осі Y у два рази більше частоти коливань уздовж осі X .

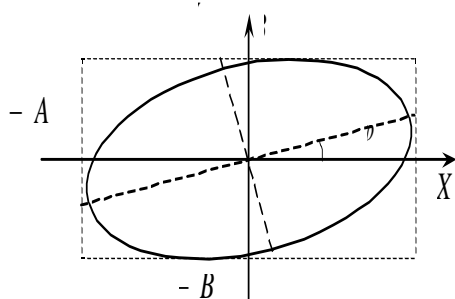


Рис. 6.11

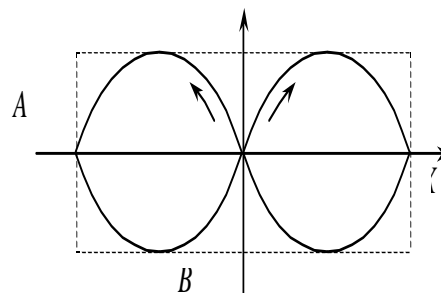


Рис. 6.12

§ 6.8. Згасаючі коливання

Вище ми розглядали коливання, що відбуваються без втрати енергії. На практиці будь-яка коливальна система безперервно віддає частину енергії середовищу. Унаслідок цього коливання згасають, а їх амплітуда зменшується. Причини згасання зумовлені силами, що гальмують рух, наприклад силою тертя в місці підвісу маятника або силою опору середовища.

Щоб дослідити це питання, розглянемо пружинний маятник – тіло, закріплене на пружині (рис. 6.1). Крім повертаючої сили (6.1), на тіло діє сила опору. Ця сила, як показує дослід, пропорційна швидкості тіла v і спрямована в протилежний їй бік:

$$F_{\text{опору}} = -rv. \quad (6.35)$$

Коефіцієнт пропорційності r називається *коефіцієнтом опору*.

Рівняння руху (6.2) з урахуванням тертя набуває вигляду

$$mx'' = -kx - rx' \quad (x' = v), \quad (6.36)$$

де m – маса тіла, k – жорсткість пружини.

Розділивши обидві частини на m і позначивши $\beta = r/(2m)$, одержимо

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.37)$$

де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – циклічна частота коливань тіла при відсутності тертя.

Рівняння (6.37) – диференціальне рівняння згасаючих коливань. Розв'язком його є функція

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (6.38)$$

Підстановкою (6.38) в (6.37) можна переконатися у тому, що рівняння (6.37) задовольняється при

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (6.39)$$

Величина ω відіграє роль *циклічної частоти коливань*, а β називається *коефіцієнтом згасання*. Як і ω коефіцієнт β вимірюється в $1/c$.

Згідно з рівнянням (6.39), ω менша власної частоти вільних коливань ω_0 через наявність тертя, що характеризується коефіцієнтом β . У більшості випадків тертя невелике, тобто $\beta \ll \omega_0$ і $\omega \approx \omega_0$. Якщо коефіцієнт згасання β порівнянний з ω_0 , коливань взагалі не буде. Це буде наближення тіла до положення рівноваги, що складається з одного-двох гойдань.

Позначивши

$$a(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (6.40)$$

перепишемо рівняння (6.38) у вигляді

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (6.41)$$

Тіло здійснює коливання з циклічною частотою ω , амплітуда яких зменшується з часом за експоненціальним законом. Графік згасаючих коливань зображений на рис. 6.13, де пунктирною лінією позначена залежність (6.40) амплітуди коливань від часу.

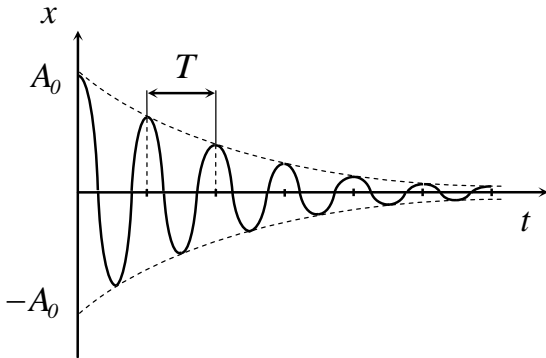


Рис. 6.13

Згасаючі коливання, взагалі кажучи, не є періодичними. Тому проміжок часу між двома моментами, що йдуть один за одним, коли тіло займає крайнє ліве або крайнє праве положення, назовемо *умовним періодом коливань*. Його знаходять підстановкою (6.39) в

рівняння (6.8):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6.42)$$

З рівняння (6.40) можна знайти відношення амплітуд двох коливань, віддалених одна від одної у часі на один такий період:

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}. \quad (6.43)$$

Логарифм цього відношення, однакового для будь-яких двох послідовних коливань

$$\chi = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)}, \quad (6.44)$$

називається *логарифмічним декрементом згасання*.

Логарифмічний декремент згасання характеризує зменшення амплітуди за час T одного коливання. З формули (6.43) випливає, що він пов'язаний з коефіцієнтом згасання β співвідношенням

$$\chi = \beta T. \quad (6.45)$$

§ 6.9. Вимушені коливання. Резонанс

Розглянемо коливання, які здійснює закріплене на пружині тіло, якщо на нього, крім пружної сили і сили опору діє ще додаткова періодична сила. Ця сила, названа *змушувальною*, змінюється з часом згідно із законом

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad (6.46)$$

де F_0 – її амплітуда, Ω – циклічна частота.

Рівняння руху (6.36) (другий закон Ньютона) набуває вигляду

$$m x'' = -k x - r x' + F_0 \cos \Omega t, \quad (6.47)$$

де m – маса тіла, k – жорсткість пружини, r – коефіцієнт опору.

Розділивши (6.47) на m , одержимо рівняння, відмінне від рівняння (6.37) правою частиною:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (6.48)$$

Коефіцієнтами β і ω_0 позначають відповідно *коефіцієнт згасання* і *власну циклічну частоту коливань* системи.

Рівняння (6.48) – неоднорідне диференціальне рівняння, тобто його права частина відмінна від нуля. Тому його розв'язок можна подати у вигляді суми двох функцій:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

перша з яких $x_1(t)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння (6.37), поданий рівністю (6.38); $x_2(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.48). Очевидно, що при $t \rightarrow \infty$ функція $x_1(t)$ перетворюється в нуль, оскільки вона

пропорційна $e^{-\beta t}$ (див. (6.38)). Тому розв'язок рівняння (6.48) зводиться до частинного розв'язка $x_2(t)$, який шукатимемо у вигляді періодичної функції:

$$x(t) = x_2(t) = A \cos(\Omega t - \Phi), \quad (6.49)$$

що змінюється з частотою Ω змушувальної сили. Константи A і Φ можуть бути знайдені з самого рівняння (6.48). При цьому A відіграє роль амплітуди вимушених коливань, а Φ – зміщення фаз між змушувальною силою і зміщенням тіла відносно положення рівноваги.

Підставимо (6.49) в рівняння (6.48). Оскільки

$$x'(t) = -A\Omega \sin(\Omega t - \Phi) = A\Omega \cos(\Omega t - \Phi + \frac{\pi}{2}), \quad (6.50)$$

$$x''(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \Phi), \quad (6.50a)$$

рівняння (6.48) набуває вигляду

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t - \Phi) + 2\beta\Omega A \cos(\Omega t - \Phi + \frac{\pi}{2}) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (6.51)$$

Щоб знайти A і Φ , скористаємося діаграмним методом, розглянутим в § 6.5 при додаванні коливань (рис. 6.14). При $t=0$ перший доданок лівої частини рівняння (6.51) є проекцією на вісь X вектора довжиною $A(\omega_0^2 - \Omega^2)$, спрямованого під кутом $-\Phi$ до цієї осі, другий доданок – проекцію перпендикулярного до нього вектора довжиною $2\beta\Omega A$. Права частина рівняння – їх сума, дорівнює F_0/m . За теоремою Піфагора,

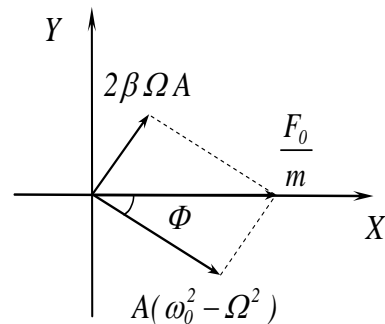


Рис. 6.14

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = A^2 (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4A^2 \beta^2 \Omega^2,$$

звідки

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (6.52)$$

Крім того,

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (6.53)$$

Рівняння (6.52) дозволяє проаналізувати залежність амплітуди A вимушених коливань від частоти змушувальної сили Ω . Графік цієї залежності показаний на рис. 6.15. Функція $A = A(\Omega)$ має максимум при

$$\Omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (6.54)$$

що є коренем рівняння $A'(\Omega) = 0$. При малому опорі руху ($\beta \ll \omega_0$) $\omega_{\text{рез}}$ практично збігається з власною частотою коливань системи ω_0 .

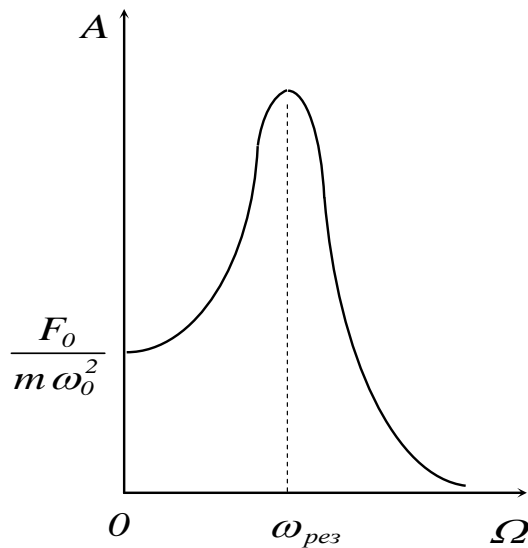


Рис. 6.15

Розглянемо граничні випадки великих і малих частот.

1. Частота змушувальної сили Ω набагато менша власної частоти ω_0 ($\Omega \ll \omega_0$). Тоді амплітуда вимушених коливань $A \approx F_0/m\omega_0^2$, а зміщення фаз $\Phi = 0$, оскільки в рівнянні (6.53) $\operatorname{tg} \Phi \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow 0$.

Коливання тіла описуються рівнянням

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos \Omega t, \quad (6.55)$$

тобто зміщення тіла у будь-який момент часу відтворює прикладену силу (6.46). Таку коливальну систему називають *системою, керованою пружністю*. Цей випадок реалізується на практиці, наприклад, в самописцях вимірювальних приладів, що фіксують на паперовій стрічці характер зміни вимірюваної величини. Стрілка самописця закріплюється на пружинах великої жорсткості, щоб частоти електричних сигналів, які управляють самописцем, були істотно менші за власну частоту коливань стрілки ($\Omega \ll \omega_0$).

2. Нехай частота змушувальної сили Ω набагато перевищує власну частоту ω_0 ($\Omega \gg \omega_0$). Тоді у формулі (6.52) під знаком радикала можна знехтувати малими у порівнянні з Ω^4 членами, вважаючи також $\beta \ll \omega_0$. Амплітуда вимушених коливань $A = F_0/m\Omega^2$ із зростанням Ω наближається до нуля. З рівняння (6.53) випливає, що $\text{tg } \Phi \approx -2\beta/\Omega$ і, залишаючись негативним, теж наближається до нуля, а зміщення фаз $\Phi = -\pi$. Оскільки $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$, рівняння вимушених коливань (6.49) набуває вигляду

$$x(t) = -\frac{F_0}{m\Omega^2} \cos \Omega t. \quad (6.56)$$

Тіло коливається з малою амплітудою і в протифазі із змушувальною силою. Коливальну систему у цьому випадку називають *системою, керованою масою*. На практиці, коли хочуть захистити від вібрацій, наприклад, вимірювальний прилад, його ставлять на масивну платформу, закріплену на пружинах малої жорсткості, для того, щоб власна частота коливань цієї системи була набагато меншою частоти вібрацій, викликаних зовнішнім джерелом ($\omega_0 \ll \Omega$).

3. Нехай тепер частота змушувальної сили Ω збігається з частотою $\omega_{\delta\dot{a}\zeta} \approx \omega_0$. Амплітуда вимушених коливань при цьому стає максимальною (рис. 6.15) і досягає значення

$$A_{\delta\dot{a}\zeta} = \frac{F_0}{2m\omega_0\beta\sqrt{1-\beta^2/\omega_0^2}}. \quad (6.57)$$

Ми маємо справу з явищем резонансу. *Резонансом називається різке зростання амплітуди вимушених коливань, коли частота змушувальної сили наближається до власної частоти коливань системи.*

Чим більший опір середовища (коефіцієнт згасання β), тим менше виражений резонанс. Навпаки, коли опір середовища малий ($\beta \rightarrow 0$), амплітуда вимушених коливань досягає великих значень.

З рівняння (6.53) випливає, що при $\Omega = \omega_{\delta\dot{a}\zeta} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\Omega}{\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}. \quad (6.58)$$

Із зменшенням β тангенс спрямований до нескінченності, а зміщення фаз Φ між змушувальною силою і зміщенням тіла наближається до $\pi/2$. Оскільки $\cos(\Omega t - \pi/2) = \sin \Omega t$, рівняння (6.49) набуває вигляду

$$x(t) = A_{\delta\dot{a}\zeta} \sin \Omega t. \quad (6.59)$$

При цьому швидкість тіла

$$v(t) = x'(t) = A_{\delta\dot{a}\zeta} \Omega \cos \Omega t \quad (6.60)$$

збігається по фазі із змушувальною силою, тобто при резонансі сила завжди спрямована вздовж швидкості тіла і робота

цієї сили йде на збільшення амплітуди коливань. Зростання амплітуди відбувається до тих пір, поки робота зовнішньої сили (за одиницю часу) не стане рівною роботі сили тертя, що викликає згасання коливань. При цьому амплітуда сталих вимушених коливань визначається співвідношенням (6.57).

Відзначимо, що вимушені коливання завжди відбуваються з частотою змушувальної сили, а їх амплітуда залежить від числового значення цієї частоти.

Явище резонансу часто проявляє себе при роботі машин і механізмів і може привести до їх поломки. Історія розвитку техніки знає немало випадків, коли руйнувалися величезні мости під дією вітру або роти крокуючих в ногу солдатів, ламалися вали парових турбін і крила літаків. Тому при проектуванні такого роду пристроїв питанням безпеки надають особливу увагу.

Явище резонансу знаходить практичне застосування, наприклад, в механічних і акустичних резонаторах, що служать для аналізу звуку. Простим механічним резонатором є струна із закріпленими кінцями або мембрана. Акустичний резонатор – посудина, що сполучається із зовнішнім середовищем через невеликий отвір. У віброперетворювачах резонанс дозволяє досягати значних амплітуд пружних коливань завдяки періодичній дії порівняно слабкої сили. У радіотехніці явище резонансу лежить в основі численних способів фільтрації сигналів різних частот, виявлення і приймання слабких сигналів.

Питання для самоперевірки

1. Наведіть приклади коливальних процесів у навколишньому світі.
2. Що називається гармонічним осцилятором? Які гармонічні осцилятори вам відомі?
3. Запишіть рівняння руху пружинного маятника.

4. Дайте визначення амплітуди, фази, періоду і частоти гармонічних коливань.
5. Виведіть формулу періоду коливань пружинного маятника.
6. Що розуміється під початковими умовами руху гармонічного осцилятора? Чи залежать амплітуда і фаза коливань від початкових умов?
7. Що таке фізичний маятник? Запишіть рівняння його руху.
8. Що називається математичним маятником? Отримайте формулу періоду його коливань.
9. Що таке приведена довжина фізичного маятника, центр гойдань?
10. З чого складається енергія гармонічного осцилятора? Знайдіть середні за період коливань значення його кінетичної і потенціальної енергії.
11. У чому суть методу обертового вектора амплітуди, що використовується при додаванні коливань одного напрямку та однакової частоти?
12. Чим є биття? Де вони використовуються?
13. Отримайте рівняння траєкторії точки, що бере участь у коливаннях у взаємно перпендикулярних напрямках.
14. Що таке фігури Ліссажу?
15. Запишіть диференціальне рівняння згасаючих коливань і його розв'язання. Побудуйте графік згасаючих коливань.
16. Чи є згасаючі коливання гармонічними? Як змінюється з часом амплітуда коливань?
17. Що характеризує коефіцієнт згасання? Як він впливає на період коливань?
18. Що таке логарифмічний декремент згасання? Який його фізичний зміст?

19. Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань, що відбуваються під дією періодичної сили.
20. Використовуючи діаграмний метод, виведіть формули амплітуди і фази вимушених коливань.
21. Нарисуйте графік залежності амплітуди вимушених коливань від частоти змушувальної сили. Дайте розгорнену характеристику вимушених коливань при великих і малих частотах цієї сили.
22. Що називається механічним резонансом? Від чого залежить амплітуда коливань при резонансі?
23. Наведіть приклади явищ резонансу. Коли він виконує позитивну роль і коли з ним потрібно боротися?

ХВИЛІ У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Якщо тіло, що здійснює коливальний рух, знаходиться у пружному середовищі, воно спричиняє рух частинок цього середовища, і, тим самим – поширення коливань у просторі. Процес поширення коливань називається *хвилею*. Прикладом служать хвилі на поверхні води в озері або річці: коли у воду падає камінь, хвилі від нього йдуть у вигляді кіл. Поплавок, що приводиться в рух прикріпленою до нього ниткою, створює такі хвилі безупинно.

Найпоширенішими серед пружних хвиль є звукові хвилі у повітрі. Їхніми джерелами можуть бути краплі дощу, шум прибою, вітер, спалах блискавки або спів птахів, тварини й сама людина.

Середовище, що передає коливання від точки до точки, має пружність на стискання або зсув. Пружні властивості притаманні газам, рідинам і твердим тілам. Повітря, що знаходиться всередині циліндра під поршнем, прагне зберегти свій об'єм незмінним. Спроби змістити поршень у той або інший бік виявляються марними – поршень повертається у вихідне положення.

Рідини набагато сильніше, ніж гази, опираються зміні їхнього об'єму, хоча так само, як і гази, не мають зсувної пружності, тобто зрушення одного шару рідини відносно іншого не породжує сил, що прагнуть повернути його в початкове положення. У газах і рідинах можуть поширюватися лише хвилі стиснення-розрідження, коли частинки середовища коливаються вздовж напрямку поширення хвилі. Такі хвилі називаються *повздовжніми*.

У твердих тілах, крім повздовжніх, можуть поширюватися і поперечні хвилі. Хвиля називається *поперечною*, якщо коливання частинок середовища відбуваються у напрямку, перпендикулярному до напрямку її поширення. Наочним

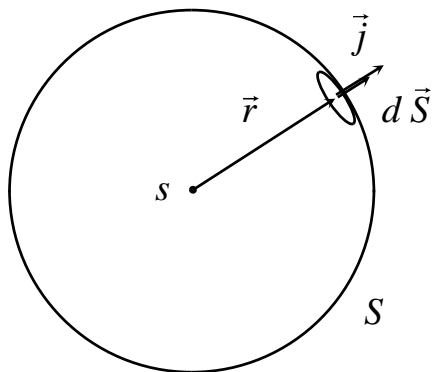
прикладом саме і служать хвилі на поверхні рідини, хоча механізм утворення таких хвиль пов'язаний з дією на частинки рідини сили тяжіння, а не зсувної пружності. Хвилі на поверхні рідини добре ілюструють притаманну всім хвилям властивість – поширюючись у просторі, хвиля не переносить речовини: тріска, що плаває на водній поверхні озера, здійснює коливання вгору-вниз, залишаючись на одному місці, у той час як хвиля безперервно переміщується.

Існування поперечних хвиль у твердих тілах пов'язується з такою їх властивістю як зсувна пружність. Якщо кубик із заліза або іншого металу закріпити однією гранню на горизонтальній поверхні, а протилежну грань дещо зрушити, приклавши до неї горизонтальну силу, то після зняття навантаження кубик завдяки зсувній пружності відновить свою форму. Пружина, розтягуючись або стискаючись, демонструє нам зсувну пружність кручення.

У цьому розділі ми розглянемо деякі властивості хвильових процесів у пружному середовищі і на їхньому прикладі виведемо закономірності, властиві хвилям будь-якої природи.

§ 7.1. Механізм утворення хвиль у пружному середовищі. Рівняння плоскої і сферичної хвиль

Тіло, що здійснює коливання у пружному середовищі, служить *джерелом* хвиль. Від джерела хвилі поширюються у просторі. Область простору, у якій відбуваються коливання частинок середовища, називається *хвильовим полем*. Поверхня, що відокремлює хвильове поле від іншої частини простору, у



якій коливання ще не почалися, називається *фронтом хвилі*. Поширення коливань у середовищі супроводжується переміщенням фронту хвилі зі швидкістю, що залежить від властивостей середовища.

Рис. 7.1

Джерело хвиль називається *точковим*, якщо воно випромінює хвилі в усіх напрямках рівномірно, а розміри його малі у порівнянні з відстанню від нього до точки спостереження. Точкове джерело s випромінює хвилю, фронт якої в однорідному середовищі має форму сфери (рис. 7.1). Хвиля у цьому випадку називається *сферичною*. На великій відстані r від джерела сферична поверхня S фронту хвилі поблизу точки спостереження мало відрізняється від плоскої. Хвилю, фронтом якої є плоска поверхня, називають *плоскою хвилею*. Джерелом плоских хвиль може також служити коливна площина. Хвиля поширюється у перпендикулярному до неї напрямку. Якщо відстань від точки спостереження до площини набагато менша її розмірів, ми говоримо про нескінченну площину.

Одержимо рівняння плоскої хвилі, що випромінюється такою площиною в перпендикулярному до неї напрямку (уздовж осі X на рис. 7.2). Позначимо через $\xi(x,t)$ зсув відносно положення рівноваги в момент часу t точок середовища, що знаходяться від джерела на відстані x . Джерело хвиль (площина YOZ) здійснює коливання вздовж осі Y , тобто випромінює поперечні хвилі.

Колівання джерела описуються функцією

$$\xi(0,t) = A \cos \omega t, \quad (7.1)$$

де A – амплітуда, ω – циклічна частота.

Нехай τ – час, протягом якого фронт хвилі проходить відстань x від джерела до точки спостереження. Зміщення точок середовища, що мають координату x , тобто знаходяться у площині, перпендикулярній осі X , відстає по фазі від зміщення джерела. У момент часу $t = \tau$ воно дорівнює зміщенню джерела у момент часу $t = 0$, тобто

$$\xi(x,t) = A \cos \omega(t - \tau), \quad (7.2)$$

де $\tau = x/v$, а v – швидкість поширення коливань (фронту хвилі). Ця швидкість називається *фазовою*, оскільки за час τ на відстань x переміщується фаза коливань. Підстановка τ у формулу (7.2) приводить до рівняння

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

яке записують у симетричному відносно x і t вигляді:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - \hat{e} \tilde{\delta}). \quad (7.3)$$

Множник

$$\hat{e} = \frac{\omega}{v} \quad (7.4)$$

називається *хвильовим числом*.

Рівняння (7.3) – *рівняння плоскої хвилі*. При $t = \text{const}$ функція $\xi(x, t)$ періодична по координаті x . Вона зображена на рис. 7.2.

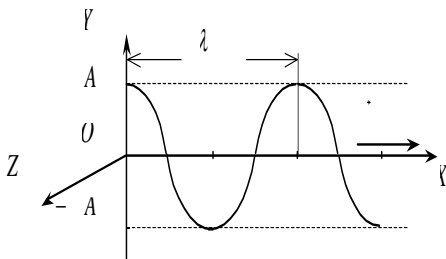


Рис. 7.2

Якщо зафіксувати координату, тобто припустити, що $x = \text{const}$, то періодична функція часу $\xi(x, t)$ описує коливання точок середовища, які мають цю координату, тобто

коливання площини. Ці коливання відтворюють коливання джерела з відставанням по фазі на $\hat{e}x$.

Відстань, яку проходить фронт хвилі за час, рівний періоду коливань джерела T , називається довжиною хвилі λ . Отже, довжина хвилі $\lambda = vT$. Довжина хвилі – це найкоротша відстань між двома точками, що коливаються в однакових фазах (рис. 7.2).

Оскільки $v = \lambda/T$, $\omega T = 2\pi$, з формули (7.4) випливає:

$$\hat{e} = \frac{\omega T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (7.5)$$

Хвильове число k показує, скільки довжин хвиль укладається на відрізку довжиною 2π , вимірюваною у тих же одиницях, що і λ .

З огляду на те, що частота коливань джерела ν і його період пов'язані співвідношенням $T = 1/\nu$, з формул (7.4) і (7.5) одержимо

$$v = \frac{\omega}{\hat{e}} = \frac{2\pi\nu}{\hat{e}} = \lambda\nu. \quad (7.6)$$

Амплітуда A плоскої хвилі у рівнянні (7.3) стала, оскільки передбачається, що при поширенні хвилі її енергія не поглинається середовищем. Амплітуда сферичної хвилі зменшується при віддаленні від джерела, оскільки площа поверхні фронту хвилі при цьому зростає. Рівняння сферичної хвилі має вигляд

$$\xi(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - \vec{e} \vec{r}), \quad (7.7)$$

де A_0 – амплітуда хвилі на відстані $r = l$ м від джерела, \vec{r} – радіус-вектор, що з'єднує джерело із точкою спостереження. Вектор \vec{e} називається *хвильовим вектором*. Він перпендикулярний фронту хвилі (див. рис. 7.1) і по модулю збігається з хвильовим числом (7.5):

$$\vec{e} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}, \quad (7.8)$$

де \vec{n} – одиничний вектор нормалі до фронту хвилі.

Щоб пояснити механізм поширення хвилі, виберемо як модель пружного середовища ланцюжок з однакових кульок, скріплених одна з одною однаковими пружинками (рис.

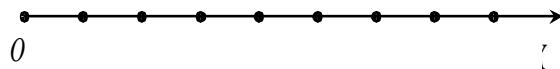


Рис. 7.3

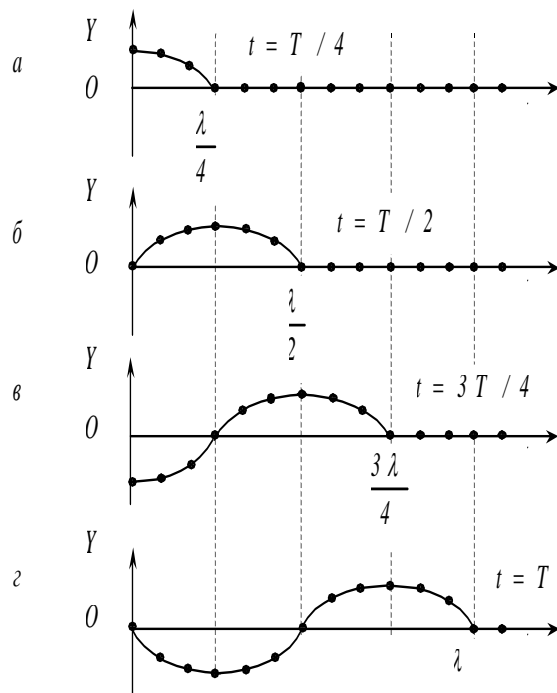


Рис. 7.4

РОЗДІЛ 7

7.3). Зміщення однієї з кульок спричиняє рух інших кульок – збурення передається по ланцюжку у вигляді хвилі. Розглянемо *поперечну хвилю*.

За першу чверть періоду перша кулька (джерело хвиль), розташована у точці $x = 0$, зміщується від положення рівноваги вздовж осі Y на відстань, рівну амплітуді коливань A (рис. 7.4, *a*). Під дією пружинок у тому ж напрямку зміщуються і сусідні кульки, і збурення поширюється по ланцюжку на відстань $\lambda/4$.

Через ще чверть періоду перша кулька повертається у початкове положення, продовжуючи рухатись униз. Хвиля поширюється ще на один відрізок $\lambda/4$ і набуває вигляду, показаного на рис. 7.4, *б*.

Далі ми спостерігаємо зміщення першої кульки вниз на максимальну відстань A і, нарешті, повернення її у початкове положення після закінчення часу, рівного періоду коливань T . Відповідні картинки хвильового процесу зображені на рис.

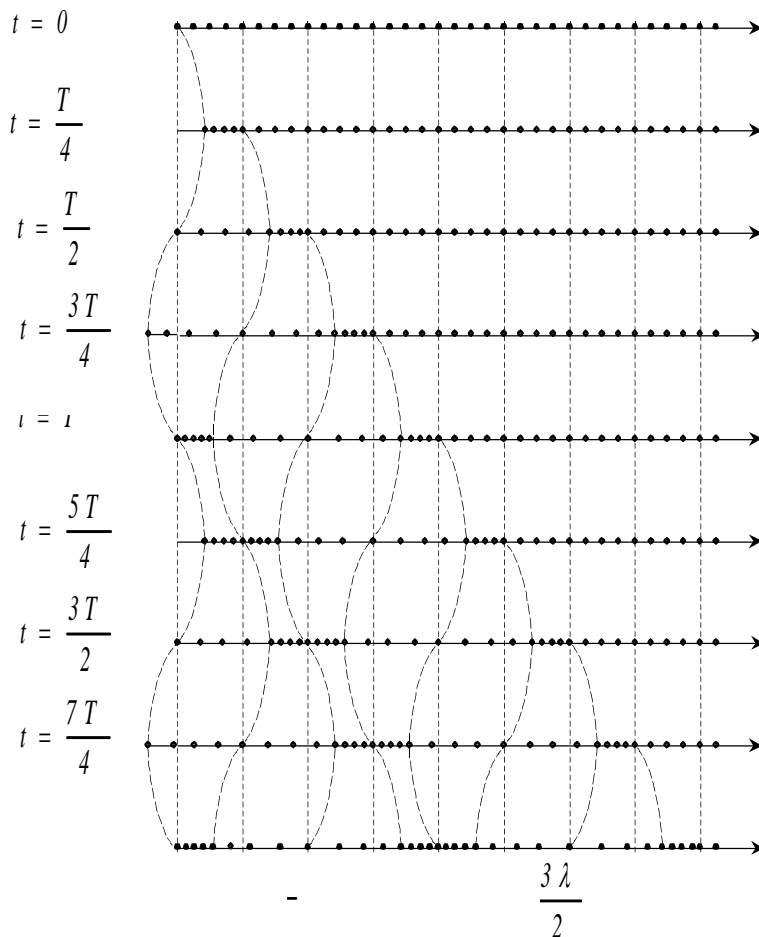


Рис. 7.5

7.4, в, г.

У той час, як хвиля поширюється у горизонтальному напрямку – вздовж осі X – кульки (точки середовища) здійснюють коливання у вертикальній площині. Завдяки взаємодії кульки передають одна одній рух, що відбувається у поперечному відносно осі X напрямку. Сила, що діє на кожному з кульок з боку її сусідів, завжди спрямована вгору або вниз – коливальна система володіє *зсувною пружністю*. При цьому хвиля (хвиля збурення) безупинно зміщується вправо.

У *повздовжній хвилі* коливання кульок (точок середовища) відбуваються вздовж осі X , тобто у напрямку поширення хвилі. Картини хвильового процесу в різні моменти часу, що відрізняються на чверть періоду ($T/4$), зображені на рис. 7.5. Синусоїди, що йдуть зверху вниз, показують зміну з часом положень кульок, що знаходяться одна від іншої на відстані у чверть довжини хвилі ($\lambda/4$). Повздовжня хвиля на миттєвому фотознімку виглядає як чергування згущень і розріджень точок середовища.

§ 7.2. Хвильове рівняння

Гармонічна плоска хвиля, що описується функцією $\xi(x, t)$ (7.3), є частинним розв'язком диференціального рівняння, яке ми зараз виведемо. Продиференціюємо $\xi(x, t)$ двічі по t і двічі по x :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \hat{e}x) = -\omega^2 \xi(x, t),$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -A\hat{e}^2 \cos(\omega t - \hat{e}x) = -\hat{e}^2 \xi(x, t).$$

Виразивши $\xi(x, t)$ з першого рівняння і підставивши його в друге, одержимо

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\hat{e}^2}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Відношення ω/\hat{e} , згідно з (7.6), дорівнює фазовій швидкості хвилі ν , тому останню рівність можна подати у вигляді

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} . \quad (7.9)$$

Це диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку називається *хвильовим рівнянням*. Його задовольняє функція $\xi_1(x,t) = A \cos(\omega t - \hat{e} \delta)$, що описує плоску хвилю, яка поширюється вздовж осі X зліва направо, і функція $\xi_2(x,t) = A \cos(\omega t + \hat{e} \delta)$, що описує таку ж хвилю, яка поширюється у зворотному напрямку – справа наліво. Рівняння сферичної хвилі (7.7) також є розв'язком хвильового рівняння, записаного у сферичних координатах для тривимірного випадку (ми його тут не наводимо). Використовуючи хвильове рівняння, знайдемо швидкість поширення хвилі.

§ 7.3. Швидкість пружної хвилі

Розглянемо повздовжню хвилю, що поширюється вздовж однорідного круглого стрижня площею поперечного перерізу S , виготовленого з матеріалу густиною ρ , модуль пружності якого (модуль Юнга) E .

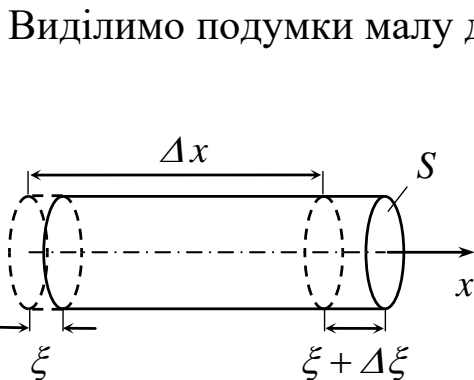


Рис. 7.6

Виділимо подумки малу ділянку стрижня у вигляді циліндра довжиною Δx об'ємом $\Delta V = S \cdot \Delta x$ (рис. 7.6). Повздовжня хвиля являє собою чергування згущень і розріджень середовища, що періодично повторюються у напрямку осі стрижня (осі X).

Нехай у деякий момент часу t ліва основа циліндра зміщена відносно свого початкового

положення на відстань ξ , а права основа – на відстань $(\xi + \Delta\xi)$, так що деформація циліндра дорівнює $\Delta\xi$. Відносна деформація, тобто відношення $\Delta\xi/\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, дорівнює частинній похідній функції $\xi(x, t)$ по координаті x :

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (7.10)$$

За законом Гука механічна напруга σ , що виникає у циліндрі при його пружному деформуванні, пропорційна відносній деформації:

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (7.11)$$

де $\sigma = F/S$, а F – сила, перпендикулярна основі циліндра.

Рівняння руху циліндра (другий закон Ньютона $ma = F_{\delta a_c}$):

$$\rho \Delta V \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_{\delta a_c}, \quad (7.12)$$

де $\rho \Delta V = m$ – маса циліндра; $\partial^2 \xi / \partial t^2$ – прискорення, з яким рухається його центр мас.

На обидві основи циліндра діють сили з боку прилягаючих до них шарів пружного середовища – на ліву основу сила $F(x, t) = \sigma(x, t)S$, а на праву – сила $F(x + \Delta x, t) = \sigma(x + \Delta x, t)S$ ($\sigma(x, t)$ – механічна напруга в точці x у момент часу t). Результуюча сила дорівнює їхній різниці:

$$F_{\delta a_c} = S [\sigma(x + \Delta x, t) - \sigma(x, t)].$$

Розкладаючи $\sigma(x + \Delta x, t)$ в ряд за степенями Δx і обмежуючись лінійним членом, маємо:

$$\sigma(x + \Delta x, t) = \sigma(x, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x + \dots .$$

Тоді формула (7.12) набуває вигляду

$$\rho \Delta V \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x. \quad (7.13)$$

Похідну $\partial \sigma / \partial x$ знайдемо з формул (7.11) і (7.10):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Підставляючи цю похідну в рівняння (7.13) і скорочуючи $\Delta V = S \Delta x$, одержимо після ділення обох частин на E рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Воно збігається з хвильовим рівнянням (7.9), якщо в ньому прийняти

$$v = \sqrt{E / \rho}. \quad (7.14)$$

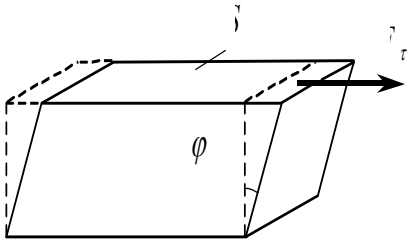


Рис. 7.7

Ця формула швидкості повздовжньої хвилі справедлива для твердих тіл і рідин. Швидкість хвилі тим більша, чим більша пружність середовища і чим менша її густина.

У твердих тілах, як було сказано вище, можуть поширюватися і поперечні хвилі. Їхню швидкість знаходять за формулою, аналогічною (7.14), якщо в ній модуль пружності E замінити модулем зсуву G :

$$v = \sqrt{G / \rho}. \quad (7.15)$$

(При пружній деформації зсуву закон Гука має вигляд: $\sigma = G \varphi$, де $\sigma = F_\tau / S$ – механічна напруга зсуву; F_τ – дотична сила, прикладена до верхньої грані зображеного на рис. 7.7

паралелепіпеда, площа якої S ; φ – кут нахилу бічних граней паралелепіпеда, що виникає під дією зсувного навантаження).

Швидкість пружної хвилі в газах залежить від природи газу. На практиці ми зустрічаємося зі звуковими хвилями. Швидкість звуку в газах можна обчислити за формулою, отриманою Лапласом:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (7.16)$$

де p – тиск, ρ – густина газу, $\gamma = c_p / c_v$ – відношення теплоємностей газу при сталому тиску і сталому об'ємі.

§ 7.4. Енергія пружної хвилі. Вектор Умова

Хвиля, поширюючись у просторі, переносить енергію (джерело хвиль, позбавлене притоку енергії, швидко приходить у стан спокою і перестає випромінювати).

Одержимо вираз для енергії, що переноситься хвилею. Знову звернемося до пружного однорідного стрижня, вздовж якого поширюється повздовжня хвиля, і подумки виділимо малу ділянку стрижня об'ємом ΔV , настільки малу, щоб швидкості всіх її точок можна було вважати однаковими. Енергія цієї ділянки складається з кінетичної енергії руху його як цілого $W_{\dot{\epsilon}}$ і потенціальної енергії W_p , що виникає внаслідок його деформації (див. формули (3.5) і (3.22)):

$$W = W_{\dot{\epsilon}} + W_p,$$

де

$$W_{\dot{\epsilon}} = \frac{m v^2}{2} = \frac{\rho v^2}{2} \Delta V, \quad W_p = \frac{E \epsilon^2}{2} \Delta V. \quad (7.17)$$

З рівняння (7.3) знайдемо швидкість ділянки стрижня v і його відносну деформацію ϵ :

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A \omega \sin(\omega t - \hat{\epsilon} x), \quad \epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = A \hat{\epsilon} \sin(\omega t - \hat{\epsilon} x). \quad (7.18)$$

Підставивши ці величини у (7.17), одержимо

$$W_{\dot{e}} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - \hat{e} x) \Delta V, \quad (7.19)$$

$$W_p = \frac{1}{2} E A^2 \hat{e}^2 \sin^2 (\omega t - \hat{e} x) \Delta V. \quad (7.19a)$$

Порівнюючи вирази (7.19) і (7.19a), бачимо, що кінетична і потенціальна енергії змінюються в однакових фазах, тобто одночасно досягають максимуму або мінімуму. Коливання пружного середовища істотно відрізняються від коливань гармонічного осцилятора, у якого при максимумі кінетичної енергії потенціальна енергія має мінімум, і навпаки, у той час як повний запас енергії осцилятора залишається незмінним (див. § 6.4).

При поширенні хвилі енергія коливань безупинно передається від одного елемента об'єму до іншого. Тому енергія розглянутої ділянки стрижня періодично змінюється. Повну його енергію знайдемо, додаючи (7.19) і (7.19a):

$$W = \frac{1}{2} (\rho \omega^2 + E \hat{e}^2) A^2 \sin^2 (\omega t - \hat{e} x) \Delta V.$$

Другий доданок у дужках дорівнює першому, у чому легко переконатися, використовуючи співвідношення (7.6) і (7.14). Тоді

$$W = \rho \omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t - \hat{e} x) \Delta V.$$

Об'ємна густина енергії w дорівнює середньому значенню енергії W, що знаходиться в одиниці об'єму середовища, у якому поширюється хвиля. Оскільки середнє за період коливань значення квадрата синуса дорівнює 1/2 (див. § 6.4), одержимо

$$w = \frac{\overline{W}}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad (7.20)$$

Енергія, що переноситься хвилею, пропорційна квадрату амплітуди коливань і квадрату частоти.

Внаслідок того, що енергія не залишається локалізованою в даній ділянці, а переміщується в просторі, можна ввести поняття *потoku енергії*.

Потоком енергії через будь-яку поверхню називається енергія, що переноситься хвилею через цю поверхню за одиницю часу.

Густиною потоку енергії називається потік, що проходить через одиничну ділянку, перпендикулярну напрямку поширення хвилі:

$$j = \frac{W}{St}.$$

На рис. 7.8 зображений циліндр висотою vt і площею поперечного перерізу S , вздовж якого поширюється хвиля. Енергія, що міститься в циліндрі, пройде за час t через його праву основу. Ця енергія дорівнює добутку w на об'єм циліндра: $W = w \cdot vt S$. Підставляючи її в попередню формулу, одержимо: $j = w \cdot v$. Оскільки напрямок руху енергії збігається з напрямком поширення хвилі, цю формулу можна записати у векторному вигляді:

$$\vec{j} = w \cdot \vec{v}. \quad (7.21)$$

Вектор \vec{j} , названий *вектором густини потоку енергії*, вперше був введений в 1874 р. російським ученим Н.А.Умовим і носить його ім'я.

Використовуючи поняття потоку енергії, покажемо, що амплітуда сферичної хвилі $A(r)$ в однорідному середовищі спадає з відстанню r від джерела обернено пропорційно цій відстані (рівняння (7.7)).

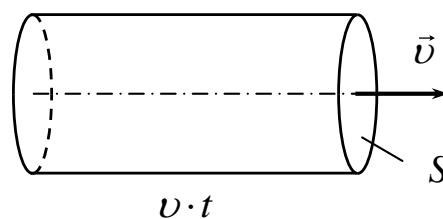


Рис. 7.8

Оточимо точкове джерело коливань s сферичною поверхнею S радіуса r (див. рис. 7.1). Оскільки вектор \vec{j} у кожній точці поверхні сфери спрямований уздовж її радіуса,

потік енергії через цю поверхню:

$$\Phi = \oint_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = \oint_S j_n dS = \oint_S wv dS,$$

де $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, $j_n = j = w \cdot v$ – нормальна до ділянки dS складова вектора \vec{j} . (Кружок на знаку інтеграла означає інтегрування по замкнутій поверхні. Значення підінтегральної функції при інтегруванні по поверхні беруться в точках цієї поверхні).

Внаслідок того, що всі точки сфери рівновіддалені від джерела хвиль, що знаходиться у її центрі, густина енергії w в цих точках однакова. Виносячи сталі величини за знак інтеграла, одержимо

$$\Phi = wv \oint_S dS = 4\pi r^2 w \cdot v,$$

де $4\pi r^2$ – площа поверхні сфери.

Підставляючи сюди w з рівняння (7.20) і з огляду на те, що потік енергії Φ через поверхню сфери будь-якого радіуса має те саме числове значення, маємо: $4\pi r^2 v \cdot \rho \omega^2 A^2(r) / 2 = const$, звідки випливає, що і добуток $A(r) \cdot r$ – величина стала, тобто амплітуда сферичної хвилі $A(r) \propto 1/r$.

§ 7.5. Стоячі хвилі

У середовищі можуть одночасно поширюватися у вигляді хвиль коливання, що виходять з різних джерел. Якщо дві хвилі перекриваються у деякій області, а потім знову розходяться, то далі кожна з хвиль поширюється так, ніби вона не зустрічала на своєму шляху іншу. Цей принцип незалежності поширення хвиль відомий під назвою *принципу суперпозиції*. Він властивий усім хвильовим процесам.

В області перекриття хвиль коливання накладаються одне на одне, в результаті чого в одних місцях вони підсилюються, а в інших – послаблюються. У кожній точці середовища результуюче коливання буде сумою коливань, що дійшли до цієї точки, тобто

зміщення точки середовища від положення рівноваги дорівнює сумі зміщень кожної з хвиль. Коли джерела коливаються з однаковою частотою, мають однакові напрямки коливань і стали різницю фаз, вони називаються *когерентними*. У цьому випадку результуюче коливання у кожній точці середовища має сталу в часі амплітуду, що залежить від різниці відстаней цієї точки від джерел коливань. Результат додавання такого роду коливань називається *інтерференцією від когерентних джерел*.

Явище інтерференції ми докладно розглянемо в розділі курсу, присвяченому хвильовій оптиці, а тут зупинимося лише на одному його окремому випадку, коли додаються дві плоскі хвилі з однаковими амплітудами, що поширюються назустріч одна одній.

Рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі X зліва-направо, згідно з (7.3):

$$\xi_{\hat{E}I\hat{A}}(x, t) = a \cos(\omega t - \hat{e}\tilde{\delta}).$$

Рівняння хвилі, що поширюється у зворотному напрямку – справа-наліво:

$$\xi_{\hat{I}D}(x, t) = a \cos(\omega t + \hat{e}\tilde{\delta}).$$

Додаючи їх і використовуючи формулу перетворення суми косинусів у добуток, одержимо

$$\xi(x, t) = \xi_{\hat{E}I\hat{A}}(x, t) + \xi_{\hat{I}D}(x, t) = 2a \cdot \cos \hat{e}\tilde{\delta} \cdot \cos \omega t. \quad (7.22)$$

Результуюче коливання називається *стоячою хвилею*. Множник $\cos \omega t$ показує, що всі точки середовища здійснюють коливання з тією ж частотою ω , що і коливання зустрічних хвиль.

Множник $2a \cdot \cos \hat{e}x$ не залежить від часу. Він виражає амплітуду результуючого коливання у площині, що має координату x :

$$A = \left| 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \quad \left(\hat{e} = \frac{2\pi}{\lambda} \right). \quad (7.23)$$

РОЗДІЛ 7

Амплітуда максимальна в точках, у яких $|\cos(2\pi x/\lambda)| = 1$. Ці точки називаються *пучностями* стоячої хвилі, для яких $A = 2a$. Їхні координати знайдемо з умови $\frac{2\pi}{\lambda}x_n = \pm n\pi$ (n – ціле число), звідки

$$x_n^{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2}. \quad (7.24)$$

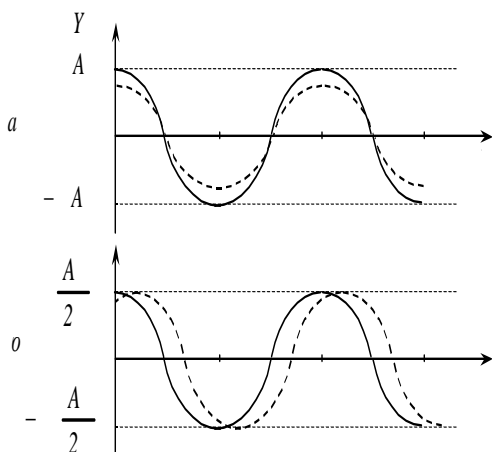
Відстань між сусідніми пучностями становить половину довжини хвилі кожної з хвиль, що складає

$$x_{n+1}^{\text{пучн}} - x_n^{\text{пучн}} = \frac{\lambda}{2}.$$

Аналогічно можна знайти координати точок, у яких результуюча амплітуда дорівнює нулю. Ці точки називаються *вузлами* стоячої хвилі. Координати вузлів, згідно з (7.23), знайдемо з умови $\cos(2\pi x/\lambda) = 0$ або $\frac{2\pi}{\lambda}x_n = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (n – ціле число), звідки

$$x_n^{\text{вузл}} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{4}. \quad (7.25)$$

Відстань між сусідніми вузлами теж дорівнює $\lambda/2$, а відстань від вузла до найближчої пучності $(2n+1)\lambda/4 - n\lambda/2 = \lambda/4$, тобто вузли і пучності знаходяться один від одного на чверть довжини хвилі.



На миттєвій фотографії стоячу хвилю неможливо відрізнити від хвилі, що переміщується у просторі, що ми розглядали вище і яку називають *біжучою*, щоб відрізнити її від хвилі стоячої. На рис. 7.9,а

Рис. 7.9

зображена стояча поперечна хвиля, а на рис. 7.9,б – біжуча. Пунктиром позначене розташування точок середовища через малу частку періоду коливань. З рисунка видно, що якщо при поширенні такої хвилі, амплітуди коливання всіх точок середовища однакові, то в стоячій хвилі різні точки мають різні амплітуди.

Внаслідок того, що амплітуда коливань у вузлах стоячої хвилі дорівнює нулю, дорівнює нулю і потік енергії через кожен з них, тому стояча хвиля не переносить енергії.

Поперечні стоячі хвилі виникають у струнах музичних інструментів – фортепіано, скрипки, віолончелі; повздовжні стоячі хвилі – у трубах духових інструментів. Для посилення гучності випромінюваного звуку використовуються у першому випадку резонансні деки – спеціальні дерев'яні щити, на які опираються струни; у духових інструментах для таких цілей трубам надають спеціальну форму у вигляді розтрубів. Частота звуку визначається довжиною струни і її натягом; у випадку труб – тільки довжиною.

Питання для самоперевірки

1. Що називається хвилею? Наведіть приклади хвильових процесів у навколишньому світі.
2. Які хвилі називаються повздовжніми? Де вони можуть поширюватися?
3. Що таке поперечна хвиля? Якими властивостями повинно володіти середовище, щоб у ньому могли поширюватися поперечні хвилі?
4. Яка властивість характерна для будь-якого хвильового процесу? Чи переносить хвиля речовину?
5. Що називається фронтом хвилі? Яка хвиля називається сферичною, плоскою?

РОЗДІЛ 7

6. Запишіть рівняння плоскої хвилі. Що називається амплітудою, фазою, довжиною хвилі, фазовою швидкістю хвилі?
7. Запишіть формулу, що пов'язує довжину хвилі з частотою коливань частинок середовища.
8. Запишіть рівняння сферичної хвилі.
9. Поясніть механізм поширення у пружному середовищі повздовжньої хвилі, поперечної хвилі.
10. Запишіть диференціальне рівняння, що називається хвильовим. Що являє собою розв'язок хвильового рівняння?
11. Виведіть формулу швидкості повздовжньої хвилі у пружному середовищі. Як її записати для випадку поперечної хвилі?
12. Наведіть формулу швидкості звукової хвилі у газі. Оцініть числові значення швидкості пружних хвиль у газах, рідинах, твердих тілах.
13. Виведіть формулу для густини енергії, що переноситься хвилею у пружному середовищі. Що називається потоком енергії, густиною потоку? Поясніть фізичний зміст вектора Умова.
14. Використовуючи поняття потоку енергії, покажіть, що амплітуда сферичної хвилі спадає зі збільшенням відстані від джерела обернено пропорційно цій відстані.
15. У чому полягає принцип суперпозиції хвиль?
16. Що таке стоячі хвилі і коли вони виникають?
17. Виведіть рівняння стоячої хвилі. Що таке вузли і пучності стоячої хвилі? Знайдіть відстань між сусідніми вузлами і пучностями.
18. Зобразіть графіки біжучої і стоячої хвиль і поясніть, чим ці хвилі відрізняються одна від одної.

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

РОЗДІЛ 8

МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ГАЗІВ

Молекулярна фізика і термодинаміка досліджують теплові властивості тіл. При вивченні механіки ми бачили, що завдяки тертю між тілами їх механічна енергія переходить у теплову. Механіка не розглядає внутрішню будову тіл і не конкретизує поняття їх *внутрішньої* (або *теплової*) енергії. Це поняття вводиться в термодинаміці і молекулярній фізиці, що разом становлять єдиний розділ фізики.

Молекулярна, або статистична, фізика, яка ще називається *молекулярно-кінетичною теорією*, використовує конкретні моделі будови тіл і спирається на три заснованих на досліді положення:

1. Всі тіла складаються з величезного числа атомів або молекул;
2. Атоми або молекули, з яких складаються тіла, знаходяться в безперервному русі, швидкість якого зростає з температурою;
3. Молекули взаємодіють між собою. Взаємодія носить характер притягання на великих відстанях і відштовхування – на малих.

Молекулою називається найдрібніша частинка речовини, що зберігає його хімічні властивості. Роль молекул можуть виконувати й атоми, що в перекладі з грецької означає неподільні частинки речовини. Такі, наприклад, одноатомні молекули інертних газів – гелію, аргону, неону та ін. Метали також складаються з атомів. Надалі ми говоритимемо про молекули, маючи на увазі й атоми.

Характер руху молекул у різних тілах різних. У *твердих тілах* молекули займають певні положення в просторі, утворюючи так звані *кристалічні решітки*, і здійснюють поблизу цих

положень коливальні рухи. Тверді тіла мають власну форму та об'єм.

У *рідинах* молекули можуть переміщатися, зберігаючи при цьому незмінними відстані між собою. Рідини не мають власної форми, але мають власний об'єм.

У *газах* молекули більшу частину часу рухаються вільно, зрідка стикаючись одна з одною та зі стінками посудини, що їх містить. Гази не мають ні власної форми, ні об'єму. Вони займають весь об'єм тієї посудини, в якій знаходяться.

Приналежність тіла до газоподібних, рідких або твердих залежить від його природи, а також від тиску і температури. Всяке тіло може знаходитися в будь-якому з перерахованих агрегатних станів. Переходи з одного стану в інший, тобто з рідкої фази в газоподібну або з твердої в рідку і назад, називають *фазовими переходами першого роду*.

Термодинаміка або *загальна теорія теплоти*, на відміну від молекулярної фізики, не конкретизує будову макроскопічних тіл. Вона розглядає співвідношення між термодинамічними функціями і параметрами і спирається на два *принципи* або *початки термодинаміки*, що є узагальненням дослідних фактів. Висновки термодинаміки мають загальний характер, тобто застосовні для будь-яких тіл. Прикладами термодинамічних параметрів служать тиск p , об'єм V , температура T , концентрація молекул n , маса речовини m , молярна маса M ; прикладами термодинамічних функцій – внутрішня енергія U , кількість теплоти Q , ентропія S .

Термодинамічною системою, що розглядається в теорії як об'єкт дослідження, називається сукупність великого числа атомів або молекул. Їх число повинне бути достатньо велике, щоб висновки теорії підтверджувалися дослідом. Цю вимогу задовольняє маса речовини всього в декілька грамів, оскільки навіть

число молекул, що містяться за звичайних умов в одному кубічному сантиметрі найменш щільної з названих речовин – газу, складає приблизно 10^{19} . Надалі ми обмежимося розглядом властивостей *ідеальних газів* – речовин, найпростіших для математичного опису.

§ 8.1. Рівняння стану ідеального газу. Температура

Ідеальним називається газ, сумарний об'єм молекул якого дуже малий у порівнянні з об'ємом посудини, що містить цей газ, а відстань, на якій молекули взаємодіють одна з одною, набагато менша середньої відстані між ними. Тому більшу частину часу молекули рухаються вільно. З досліду випливає, що всі існуючі в природі гази при кімнатній температурі та атмосферному тиску можна вважати ідеальними.

Стан даної маси газу характеризується трьома параметрами – тиском, об'ємом і температурою. Ці параметри, як показує дослід, не можуть змінюватися незалежно один від одного. Вони зв'язані рівнянням, що називається *рівнянням стану ідеального газу*:

$$pV = NkT, \quad (8.1)$$

де N – число його молекул, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана (одиниця вимірювання – джоуль на кельвін).

З рівняння (8.1), зокрема, випливає, що підвищення температури при незмінному об'ємі приводить до збільшення тиску. Якщо температура стала, то тиск можна підвищити шляхом стискання газу, зменшивши його об'єм.

Тиск, який газ здійснює на стінку посудини, чиниться за рахунок теплового руху його молекул. Молекули, стикаючись зі стінкою посудини, передають їй деякий імпульс, зміна ж імпульсу тіла (в одиницю часу) визначає діючу на тіло силу.

Тиском називається відношення нормальної компоненти

сили F_{\perp} , діючої на стінку посудини, до площі поверхні стінки S :

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{\perp}}{S}. \quad (8.2)$$

У системі СІ тиск вимірюється в *паскалях* (Па). 1 Па – тиск із силою в 1 Н на площину в 1 м²:

$$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Тиск земної атмосфери приблизно складає 10^5 Па; тиск, створований стовпчиком ртуті заввишки 1 мм (*1 мм рт. ст.*), приблизно дорівнює 133 Па.

Рівняння (8.1) можна вивести за допомогою рівнянь класичної механіки. Розглянемо модель ідеального газу у вигляді сукупності молекул масами m_0 , які рухаються зі швидкістю v і співударяються одна з одною і зі стінками посудини абсолютно пружно.

Нехай газ знаходиться у прямокутній посудині завдовжки l і площею поперечного перерізу S (рис. 8.1). Осі X і Y декартової системи координат спрямуємо вздовж стінок посудини, як показано на рис. 8.1.

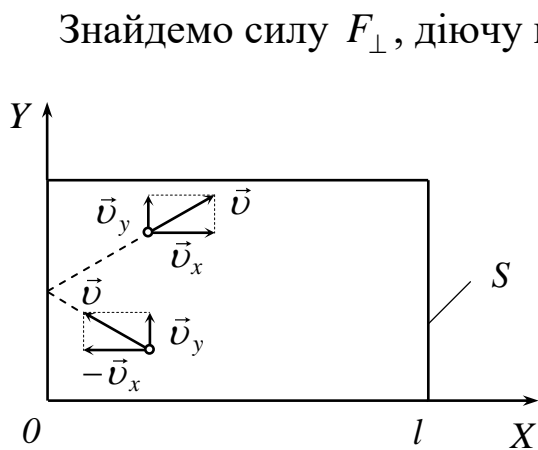


Рис.8.1

Знайдемо силу F_{\perp} , діючу на ліву стінку. Для цього помножимо середнє значення сили \bar{F}_{lx} (позначається межею над символом), діючої на цю стінку з боку однієї молекули, на число N молекул, що знаходяться в посудині:

$$F_{\perp} = N \bar{F}_{lx}.$$

За другим законом

Ньютона, сила F_{Ix} рівна зміні відповідної компоненти імпульсу молекули за одиницю часу:

$$F_{Ix} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t},$$

де $\Delta p_x = m_0 v_x - (-m_0 v_x) = 2m_0 v_x$.

Кожна молекула газу співударяється зі стінкою один раз за проміжок часу Δt , необхідний їй для подолання відстані l (довжина посудини) туди і назад, тобто $\Delta t = 2l/v_x$. Підставивши Δt у (8.2) і зробивши усереднення за часом, одержимо

$$p = N \frac{m_0 \overline{v_x^2}}{lS}. \quad (8.3)$$

Середнє значення квадрата x -ї компоненти швидкості $\overline{v_x^2}$ виразимо через середнє значення квадрата самої швидкості. Оскільки всі напрямки руху молекул рівноймовірні, то $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ і $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$, звідки $\overline{v_x^2} = \overline{v^2}/3$. Враховуючи це, помножимо і розділимо рівність (8.3) на 2 і замінимо добуток lS на об'єм посудини V . Тоді

$$p = \frac{N}{V} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \frac{N}{V} \cdot \frac{2}{3} \overline{W_{\dot{e}}}, \quad (8.4)$$

де $\overline{W_{\dot{e}}} = m_0 \overline{v^2}/2$ – середнє значення кінетичної енергії молекули газу. Ця величина має чудову властивість – якщо змішати, наприклад, два різні гази, то середні значення кінетичних енергій молекул цих газів вирівнюються: $\overline{W_{\dot{e}1}} = \overline{W_{\dot{e}2}}$. Молекули газу, що мають меншу масу, рухатимуться з більшою швидкістю, і навпаки. Кінетичні ж енергії молекул будуть однаковими. Таку ж властивість

має температура – дослід показує, що тіла, приведені в контакт один з одним, набувають однакової температури.

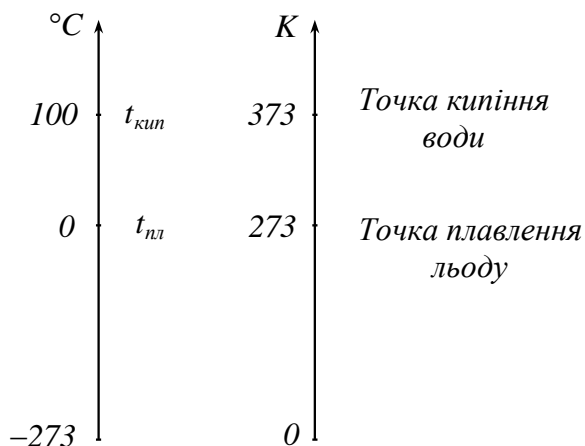
Температурою газу θ (або енергетичною температурою) прийнято вважати $2/3$ середньої кінетичної енергії поступальної ходи його молекул:

$$\theta = \frac{2}{3} \overline{W_{\epsilon}} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{3}. \quad (8.5)$$

Так визначена температура вимірюється в *джоулях*. Проте у фізиці температуру вимірюють в *градусах*. За шкалою Цельсія за нуль градусів приймається температура замерзання чистої води ($t_0 = 0^\circ\text{C}$), а температура кипіння води при атмосферному тиску 760 мм рт. ст. приймається за 100 градусів ($t_{\text{еіі}} = 100^\circ\text{C}$). Градус визначається як одна сота частина різниці цих температур.

Температура будь-якого тіла не може опуститися нижче $-273,15^\circ\text{C}$. При цій температурі рух молекул повністю припиняється. Кельвін ввів іншу шкалу температур (рис. 8.2), на якій за нуль прийнята саме ця температура, а “розмір” градуса залишився колишнім і в системі СІ одержав назву *кельвін* (К). Температура T за шкалою Кельвіна і температура t за шкалою Цельсія пов'язані рівнянням

$$T = t + 273. \quad (8.6)$$



Усі температури за шкалою Кельвіна позитивні, тому ця шкала називається *абсолютною*, а температура T – *абсолютною температурою*.

Рис. 8.2

Рівняння (8.4) після підстановки в нього (8.5) набуває вигляду

$$pV = N\theta. \quad (8.7)$$

Якщо ввести позначення $\theta = kT$, то рівняння (8.7) приводиться до вигляду (8.1). Перевідний коефіцієнт k , що показує, яка частина джоуля міститься в одному кельвіні, називається *сталю Більцмана*, числове значення якої наведене вище.

Рівнянню стану ідеального газу (8.1) можна надати вигляд, зручніший для практичного застосування. Виразимо число молекул N через масу газу m і його молярну масу M .

Молярною масою будь-якої речовини називається маса одного моля цієї речовини в грамах. За 1 моль речовини приймається таке число його атомів або молекул, яке міститься в 12 г ізотопу вуглецю ^{12}C (ядро якого складається з 6 протонів і 6 нейтронів). Це число виявляється рівним $6,02 \cdot 10^{23}$. Воно називається *сталю Авогадро*: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$.

У таблиці Менделєєва вказані відносні атомні маси елементів, що показують, у скільки разів маса атома даного елемента більше $1/12$ маси m_c ізотопу вуглецю ^{12}C . Додаючи їх відповідно до хімічної формули, молекули будь-якої речовини одержують його молярну масу M . Наприклад, для води (H_2O) $M = 1 \cdot 2 + 16 = 18$ г/моль; для заліза (Fe) $M = 56$ г/моль, а для кисню (O_2) $M = 2 \cdot 16 = 32$ г/моль. У системі СІ молярні маси виражаються в кілограмах на моль.

Маса однієї молекули $m_0 = M / N_A$, а маса газу, що містить N молекул, $m = N m_0$. Тоді $N = \frac{m}{m_0} = \frac{m}{M} N_A$ і рівняння (8.1) можна записати у вигляді

$$pV = \frac{m}{M} N_A kT.$$

Добуток N_A на k позначається буквою R і називається *універсальною газовою сталою*:

$$R = N_A k = 8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)}.$$

Вона виражає сумарну кінетичну енергію молекул в одному молі газу при температурі $T = 1 \text{ К}$.

Рівняння стану ідеального газу (8.1) набуває вигляду

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (8.8)$$

Це рівняння називається *рівнянням Клапейрона–Менделєєва*.

Використовується ще одна форма запису рівняння стану ідеального газу. Розділивши обидві частини (8.1) на V і позначивши число молекул в одиниці об'єму, тобто їх *концентрацію*, через $n = N/V$, одержимо

$$p = nkT. \quad (8.9)$$

Принцип роботи *газового термометра* заснований на рівнянні (8.8). Якщо деяку кількість газу помістити в об'єм V , то температура газу, згідно з цим рівнянням, буде пропорційна тиску газу p за умови сталості об'єму ($V = \text{const}$):

$$T = \left(\frac{MV}{mR} \right) p.$$

Знаючи масу газу m , молярну масу M і об'єм V , можна знайти температуру T , вимірюючи за допомогою манометра тиск газу p . Так працює *газовий термометр зі сталим об'ємом*.

Газові термометри є *первинними*, оскільки вимірюють температуру безпосередньо за температурною шкалою. Вони незручні для практичного застосування, проте служать для градуювання *вторинних* термометрів, що використовують як робочі агенти рідини (ртуть, спирт) або тверді тіла (термометр з металевою спіраллю, що розширюється при нагріванні; термометр опору, в якому використовується залежність опору напівпровідника від температури).

§ 8.2. Поняття про ймовірність. Основна задача статистичної фізики

Молекулярна (або статистична) фізика розглядає конкретні моделі будови тіл, ставлячи за мету обчислення *середніх значень* тих фізичних величин, які можуть бути виміряні на досліді. Наприклад, температура, вимірювана термометром, виражається через середнє значення кінетичної енергії молекул (формула (8.5)); тиск на яку-небудь поверхню можна обчислити, знаючи середнє значення квадрата нормальної до цієї поверхні компоненти швидкості молекули (формула (8.3)), і т.д. Обчислення середніх значень здійснюється за допомогою *статистичних функцій розподілу*. Щоб з'ясувати фізичне значення цих функцій, введемо *поняття про ймовірність*.

Розглянемо приклад з гральним кубиком (кубик з нанесеними на його грані цифрами від 1 до 6). Кидання кубика приводить до однієї з *випадкових подій* – випадання якого-небудь числа x_i ($x_i = 1, 2, \dots, 6$). Проведемо N випробувань (тобто кидань кубика), в результаті яких число x_1 випаде N_1 раз, число x_2 – N_2 разу і т.д. Очевидно, що

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_{\hat{e}} = \sum_{i=1}^{\hat{e}} N_i \quad (\text{для кубика } \hat{e} = 6).$$

Випробування назвемо *успішним*, якщо відбувається дана *подія* – випадає очікуване число x_j (наприклад, число 1). Відносна частота випадань числа x_j рівна N_j/N . При невеликому числі випробувань частоти випадань різних чисел x_i можуть істотно розрізнятися. Наприклад, при 30 випробуваннях число 1 випало 3 рази ($N_1/N=0,1$), число 2 – 5 разів ($N_2/N \approx 0,166$), число 3 – 6 разів ($N_3/N=0,2$) і т.д. При збільшенні ж числа випробувань відношення N_j/N прагне до певної межі (у випадку з кубиком – до $1/6$, оскільки всі грані кубика ідентичні й умови випадання будь-якого з шести чисел 1, 2, ... 6 однакові). Межа цього відношення при $N \rightarrow \infty$ називається *ймовірністю* випадання числа x_j :

$$w_j \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_j}{N}. \quad (8.10)$$

У загальному випадку *ймовірністю* даної події при проведенні *статистичних випробувань* називається відношення числа *успішних випробувань* до *повного числа випробувань*, якщо *повне число випробувань прагне до нескінченності*.

Подія, яка відбудеться обов'язково, називається *достовірною*. Ймовірність такої події рівна одиниці. При киданні грального кубика випадання якого-небудь з шести чисел – достовірна подія.

Ймовірність будь-якого з n взаємовиключаючих подій виражається числом, меншим одиниці. Випадання в даному випробуванні, наприклад, двійки виключає випадання інших чисел – одиниці, трійки, четвірки і т.д. Сума ймовірностей всіх таких подій рівна одиниці, оскільки їх сукупність вичерпує всі наявні можливості:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1. \quad (8.11)$$

Ймовірність w того, що серед n взаємовиключаючих подій відбудеться одна з m подій ($m < n$), рівна сумі ймовірностей кожної з цих подій:

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_m. \quad (8.12)$$

Ясно, що через рівність (8.11) і оскільки $w_i > 0$, ця сума при $m < n$ завжди буде менша одиниці. У випадку з гральним кубиком ймовірність випадання, наприклад, одного з двох чисел – 5 або 6 – рівна $\frac{1}{3}$ ($w = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$).

Ймовірність w того, що відбудеться \hat{e} випадкових подій одночасно, рівна добутку їх ймовірностей:

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_{\hat{e}}. \quad (8.13)$$

Так, при киданні відразу двох гральних кубиків випадання одночасно, наприклад, двох п'ятірок подія рідкісніша, ніж випадання двох різних чисел. Ймовірність такої події можна обчислити, узявши добуток ймовірностей випадання п'ятірки на одному і на другому кубиках: $w = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Середнім значенням \bar{x} числа, що випадає при киданні грального кубика, називається відношення суми всіх чисел x_i , що випали, до числа кидань N , тобто

$$\bar{x} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_{\hat{e}} \tilde{\sigma}_{\hat{e}}}{N_1 + N_2 + \dots + N_{\hat{e}}} = \sum_{i=1}^{\hat{e}} \frac{N_i}{N} x_i.$$

Використовуючи визначення ймовірності (8.10), цю рівність можна подати у вигляді

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\hat{e}} w_i x_i. \quad (8.14)$$

Так, щоб знайти середнє значення випадкової величини x , потрібно обчислити суму добутків усіх її можливих значень на ймовірність кожного з них.

Нехай задана функція $f(x_i)$, аргументом якої є дискретний набір випадкових чисел x_i . Середнім значенням цієї функції буде сума добутків значень функції $f(x_i)$ на відповідну ймовірність випадання чисел x_i :

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{\hat{e}} w_i f(x_i). \quad (8.15)$$

Нехай тепер аргумент функції $f(x)$ приймає не дискретний, а безперервний набір значень. Якщо x є величиною випадковою, то ймовірність того, що її значення лежить в інтервалі від x до $x + dx$, пропорційна ширині інтервалу dx . Коефіцієнт пропорційності $\rho(x)$ у загальному випадку залежить від x , так що ця ймовірність

$$dw = \rho(x) dx.$$

Функція $\rho(x) = \frac{dw}{dx}$ називається *густиною*

ймовірності даного значення x або *функцією розподілу* випадкової величини x . Вона показує, яка ймовірність того, що випадкова величина x знаходиться в одиничному інтервалі поблизу даного її значення.

Умова (8.11) для функції розподілу $\rho(x)$ набуває вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (8.16)$$

Змінна x може мати різну природу. Це може бути координата, швидкість, енергія, кут орієнтації та ін. Знаходження функції розподілу $\rho(x)$ є *основною задачею статистичної фізики*, оскільки за допомогою цієї функції можна обчислити середнє значення будь-якої величини, що залежить від x .

Замінивши у формулі (8.15) підсумовування інтегруванням по x , одержимо формулу для знаходження середнього значення функції $f(x)$:

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d w = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \rho(x) d x. \quad (8.17)$$

Так, щоб обчислити середнє значення якої-небудь функції випадкової величини x , потрібно помножити її на функцію розподілу $\rho(x)$ і одержаний добуток проінтегрувати по всьому інтервалу зміни x . У цьому випадку кажуть про середнє значення функції *по статистичному ансамблю*.

Як можна одержати функцію розподілу? Уявимо собі, що ми вимірюємо швидкості автомобілів, які рухаються по міській вулиці (як випадкова величина x в даному випадку виступає швидкість автомобіля v). Найчастіше нам зустрічатимуться автомобілі, швидкості яких лежать в інтервалі від 40 до 80 км/год. Деякі з автомобілів у момент спостереження рушають з місця або гальмують і тому їх швидкість менше 40 км/год, інші ж, порушуючи правила дорожнього руху, мчаться зі швидкостями, що перевищують 80 км/год. Розбиваючи весь інтервал швидкостей на відрізки, наприклад по 5 км/год, і підраховавши відносне число автомобілів, що мають швидкість у відповідному інтервалі, ми знайдемо функцію їх розподілу за швидкостями $\rho(v)$. Середню швидкість автомобілів можна обчислити, додавши їх швидкості і розділивши одержану суму на їх число, або через знайдену функцію $\rho(v)$:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \rho(v) dv. \quad (8.18)$$

Раніше, в розділі "Механіка", ми користувалися визначенням середнього значення функції, залежної від часу. Середнє за часом значення швидкості якого-небудь одного з автомобілів в розглянутому вище прикладі визначають за формулою

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt. \quad (8.19)$$

Вибраний нами автомобіль може брати участь в будь-якому з перерахованих видів руху – рушати з місця, їхати зі швидкістю, більшою 80 км/год, зупинятися. Тобто він виступає по черзі в ролі кожного з тих автомобілів на міській вулиці, швидкості яких ми вимірювали для знаходження функції $\rho(v)$. Тому середнє значення швидкості його руху $v(t)$ за достатньо великий проміжок часу T , наприклад за 1 годину, обчислене за формулою (8.19), збігається з середньою швидкістю, знайденою за формулою (8.18).

У статистичній механіці точно доводиться, що *середнє по статистичному ансамблю і середнє за часом рівні один одному*. Таким чином, визначення середнього значення якої-небудь величини в статистичній фізиці по суті не відрізняється від визначення середнього значення цієї величини в механіці.

§ 8.3. Швидкості газових молекул. Дослід Штерна

Молекули газу рухаються хаотично. Зіткнення їх одної з одною мають випадковий характер і призводять до того, що встановлюється деякий рівноважний розподіл молекул за швидкостями. Оскільки швидкість молекул і температура газу пов'язані одна з одною (див. співвідношення (8.5)), ми говоримо про швидкість теплового руху молекул. Цю швидкість вперше виміряв німецький фізик Отто Штерн в 1920 р.

Схема досліду Штерна подана на рис. 8.3. Установка складається з двох скріплених один з одним коаксіальних циліндрів 1 і 2 , вздовж осі яких розташовується платиновий дріт P , покритий шаром срібла. Дріт може нагріватися електричним струмом до температури, близької до температури плавлення срібла (960°C), при якій випаровування срібла стає дуже інтенсивним. Атоми срібла вилітають з поверхні дроту у всіх напрямках і є газом. Їх швидкості потрібно визначити. Проходячи через щілину S у внутрішньому циліндрі 2 , пучок атомів срібла конденсується на мішені – зовнішньому циліндрі 1 – в точці A , утворюючи на його поверхні вузьку смужку A , що є зображенням щілини S . Завдяки високому вакууму, створеному в циліндрах, атоми срібла не стикаються з молекулами повітря і потрапляють на мішень з тією швидкістю, яку вони мали при вильоті.

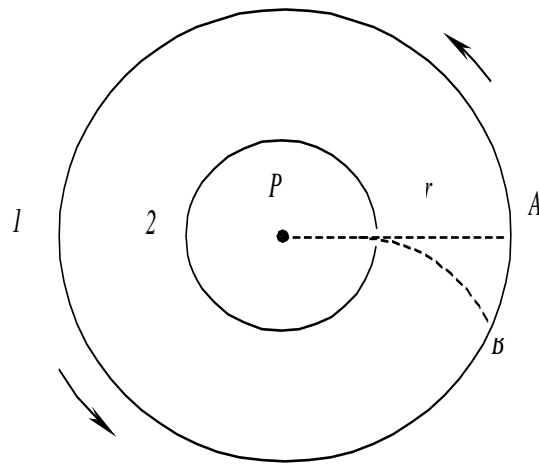


Рис. 8.3

Циліндри можуть обертатися навколо своєї осі з великою частотою $n \approx 2700$ об/хв. При цьому атоми, що пролетіли через щілину вже не потраплять в точку A . За той час, поки вони пройдуть відстань r від щілини до мішені, циліндри обернуться на деякий кут і атоми досягнуть поверхні зовнішнього циліндра в точці B , віддаленій від A на відстань l . Ця відстань залежить від швидкості атомів v , частоти обертання установки n і довжини шляху r від щілини до екрана. Легко знайти зв'язок між цими величинами. Час t прольоту атомом відстані r дорівнює відношенню r/v . За цей час поверхня зовнішнього циліндра 1 зміститься на відстань $l = 2\pi n \cdot R \cdot t = 2\pi n R r / v$ (R – радіус

зовнішнього циліндра), звідки

$$v = \frac{2\pi n R r}{l}.$$

Вимірявши l , можна обчислити швидкість атомів срібла при тій температурі, яку має нагрітий дріт.

У дослідах Штерна смужка B кожен раз виявлялася розмитою і не мала різких меж, що спостерігалось у смужки A при нерухомій установці. Розмиття смужки зумовлене відмінністю швидкостей атомів, що випускаються нагрітим дротом. Швидші атоми потрапляють на мішень ближче до точки A , ніж повільніші. Середня частина сліду B пучка атомів, що має найбільшу густину, відповідає середній швидкості молекул.

Досліди Штерна дозволили не тільки виміряти швидкості теплового руху молекул, але і за розмиттям смужки B оцінити розподіл молекул за швидкостями. Теоретично такий розподіл був одержаний Джеймсом Максвеллом в 60-х роках XIX століття. Цьому питанню присвячений наступний параграф.

§ 8.4. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями.

Середня, середня квадратична і найімовірніша швидкості молекул

Розглянемо розміщений у посудині газ, що знаходиться в стані термодинамічної рівноваги, коли його температура і тиск усюди всередині посудини сталі. Серед N його молекул можна знайти молекули, що рухаються з дуже великими швидкостями, і молекули, швидкості яких дуже малі, тобто спостерігається розподіл молекул газу за швидкостями.

Позначимо через ΔN число молекул, що мають швидкості в інтервалі від v до $v + \Delta v$, де Δv складає невелику частину v ($\Delta v \ll v$). Число таких молекул пропорційне ширині інтервалу Δv і загальному числу молекул у посудині:

$$\Delta N \propto N \cdot \Delta v.$$

Множник пропорційності, який тут потрібно поставити, не є сталою величиною. Він залежить від швидкості v . Цей множник і буде *статистичною функцією розподілу* молекул за швидкостями $\rho(v)$. Тоді

$$\Delta N = N \rho(v) \Delta v. \quad (8.20)$$

Згідно з Максвеллом, функція $\rho(v)$ має вигляд

$$\rho(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}, \quad (8.21)$$

де M – молярна маса газу, T – його температура.

Функція $\rho(v)$, як випливає з (8.20), рівна відносному числу молекул газу $\Delta N/N$, швидкості яких знаходяться в одиничному інтервалі $\Delta v = 1$ м/с поблизу v , тобто ця функція є густиною ймовірності того, що дана молекула має швидкість v . Тоді, як і повинно бути, сума ймовірностей, поширена на весь інтервал значень швидкості молекул, рівна одиниці. Це рівносильно виконанню умови

$$\int_0^{\infty} \rho(v) dv = 1, \quad (8.22)$$

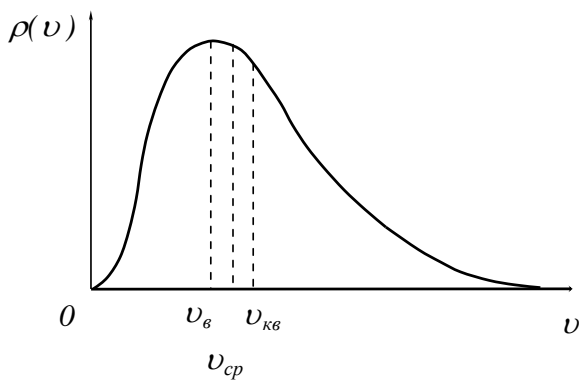
де сума замінена інтегралом, оскільки v набуває безперервного ряду значень від 0 до ∞ .

При обчисленні цього інтеграла слід скористатися першою з формул табл. 8.1, в якій наведені значення деяких інтегралів, що зустрічаються нижче. Позначивши $M/(2RT) = \alpha$, маємо

$$\int_0^{\infty} \rho(v) dv = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} dv =$$

$$= 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4(M/2RT)^{3/2}} = 1.$$

З графіка функції $\rho(v)$ (рис. 8.4) видно, що число “повільних” молекул і число “дуже швидких” незначне. Швидкості більшості молекул лежать поблизу деякого середнього її значення. Максимум функції $\rho(v)$ знаходиться в точці $v = v_a$. Ця швидкість називається *найімовірнішою* і може бути знайдена з умови рівності нулю похідної функції $\rho(v)$, тобто з рівняння $\rho'(v) = 0$, яке після диференціювання (8.21) має вигляд



$$2ve^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \left(1 - \frac{Mv^2}{2RT} \right) = 0.$$

Значення v_a , що відповідає максимуму функції $\rho(v)$, знаходиться з умови $1 - Mv^2 / (2RT) = 0$, звідки

$$v_a = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Рис. 8.4

(8.23)

Середню арифметичну швидкість молекул \bar{v} можна знайти за формулою (8.18), обчисливши інтеграл

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \rho(v) dv = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} dv.$$

Таблиця 8.1

1.	$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
2.	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^2}$
3.	$\int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{8\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Використовуючи формулу (2) табл. 8.1, одержимо

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} \frac{1}{2M^2 / (2RT)^2} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (8.24)$$

Середні швидкості молекул газів при кімнатній температурі складають декілька сотень метрів за секунду і лише у водню досягають значення біля 1800 м/с.

Надалі нас цікавитиме *середня квадратична* швидкість молекул, яка рівна квадратному кореню із середнього арифметичного значення квадрата швидкості v^2 :

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\overline{v^2}}. \quad (8.25)$$

Значення $\overline{v^2}$ можна знайти, додавши квадрати швидкостей усіх молекул газу і розділивши одержану суму на число молекул. Оскільки швидкість v набуває безперервного ряду значень, це рівносильно обчисленню інтеграла

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 \rho(v) dv = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} dv.$$

Скориставшись третьою формулою табл. 8.1, одержимо

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8 \left(\frac{M}{2RT} \right)^{5/2}} = \frac{3RT}{M},$$

звідки, з урахуванням (8.25):

$$v_{\hat{e}\hat{a}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (8.26)$$

Відзначимо, що $\overline{v^2} \neq \bar{v}^2$. Порівнюючи формули (8.23), (8.24) і (8.26), бачимо, що

$$v_{\hat{e}\hat{a}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \bar{v} = 1,09 \bar{v}, \quad v_{\hat{e}\hat{a}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_{\hat{a}} = 1,22 v_{\hat{a}},$$

тобто $v_{\hat{a}} < \bar{v} < v_{\hat{e}\hat{a}}$. Середня арифметична швидкість виявляється

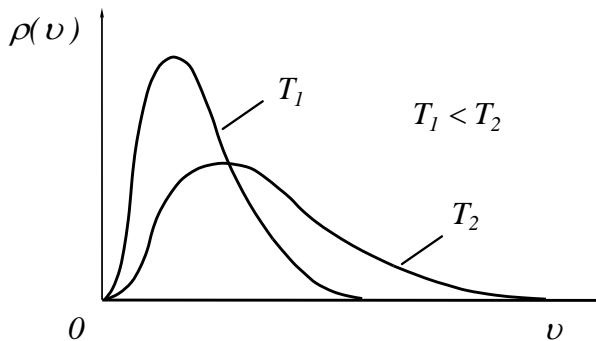


Рис. 8.5

“середньою” в тому сенсі, що її числове значення лежить між значеннями найімовірнішої і середньої квадратичної швидкості. Проте відмінність між цими трьома швидкостями невелика.

Із зростанням температури T швидкості молекул зростають, і максимум функції $\rho(v)$ зміщується вправо, в той же час крива стає пологішою, оскільки площа під кривою, згідно з (8.22), не змінюється (рис. 8.5).

§ 8.5. Закон рівномірного розподілу енергії за степенями вільності молекул

Середню квадратичну швидкість $v_{\text{ср}}$ називають “тепловою”, оскільки її квадрат входить у визначення температури газу (див. формулу (8.5)):

$$\theta = kT = \frac{2}{3} \overline{W_{\text{ср}}} = \frac{mv^2}{3}.$$

З розділу “Механіка” відомо, що число степенів вільності тіла – це число незалежних координат, що визначають його положення в просторі. При виведенні рівняння газового стану (8.1) ми використовували модель одноатомного ідеального газу, у якій молекули розглядалися як матеріальні точки. Було показано, що середнє значення кінетичної енергії молекули газу $\overline{W_{\text{ср}}} = 3kT/2$. Оскільки матеріальна точка має три степені вільності, на кожен з них припадає енергія $kT/2$.

Закон рівномірного розподілу енергії за степенями вільності молекул стверджує, що *в стані термодинамічної рівноваги на кожен ступінь вільності молекули припадає середня енергія, рівна $kT/2$.*

Йдеться не тільки про поступальні, але і про обертальні степені вільності молекули, а при достатньо високих температурах – і про коливальні степені вільності атомів, що входять до її складу. Цей закон був сформульований у вигляді теореми Людвігом Больцманом. Називатимемо його стисло *законом рівнорозподілу енергії*. Справедливість його підтверджується експериментально шляхом вимірювання теплоємності тіл – твердих, рідких, газоподібних (визначення теплоємності дано в розд. 9).

Кожна молекула газу, до складу якої входить більше одного атома, має, подібно твердому тілу, окрім поступальних ще й обертальні степені вільності. Енергія обертання молекули біля

кожної з її головних осей інерції, згідно із законом рівнорозподілу енергії, складає $kT/2$. Повна ж енергія молекули рівна $i kT/2$, де i – число її поступальних і обертальних степенів вільності. Молекули газів, що містять різне число атомів, мають різні енергії, отже, і теплоємності цих газів різні.

Атоми твердих тіл, позбавлені можливості вільно переміщатися в просторі, здійснюють коливання у вузлах кристалічних решіток. Енергія атома, що здійснює гармонічні коливання, рівна сумі його кінетичної і потенціальної енергій, кожна з яких за законом рівнорозподілу енергії в середньому складає $kT/2$. Оскільки коливання атома відбуваються вздовж трьох осей декартової системи координат, енергія його коливань рівна $3kT$, тобто $3 \cdot 2(kT/2)$.

Теорія теплоємності, заснована на законі рівнорозподілу енергії за степенями вільності молекул, добре узгоджується з дослідом.

§ 8.6. Розподіл Больцмана. Барометрична формула

Розглянемо ідеальний газ, що знаходиться в полі тяжіння Землі. У стані теплової рівноваги температура газу у всьому його об'ємі однакова. Тиск же газу змінюється з висотою, оскільки на його молекули діє сила тяжіння.

Знайдемо закон зміни тиску газу з висотою. Спрямуємо вісь Z вертикально вгору і візьмемо дві перпендикулярні їй плоскі поверхні площею S кожна на відстані dz одна від одної (рис. 8.6). Нехай p – тиск, який газ здійснює на першу з них, розташовану на висоті z , а $p + dp$ – тиск на другу поверхню. Різниця тиску рівна вазі dN молекул, що знаходяться між ними в об'ємі $dV = S dz$, поділеному на S :

$$dp = - \frac{m_0 g dN}{S} = - \frac{m_0 g n dV}{S} = - m_0 g n dz \quad (n = N/V),$$

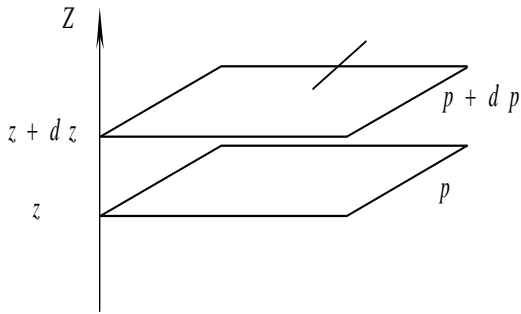


Рис. 8.6

де m_0 – маса молекули, g – прискорення вільного падіння. Знак “мінус” вказує на зменшення тиску з висотою (приріст тиску dp із зростанням z негативний).

Згідно з (8.9), тиск газу пов'язаний з концентрацією молекул n рівнянням $p = n kT$. Розділивши на нього попереднє рівняння, знайдемо:

$$\frac{dp}{p} = d(\ln p) = -\frac{m_0 g dz}{kT}, \quad \text{звідки}$$

$\ln p = -\frac{m_0 g z}{kT} + \text{const}$. Оскільки тиск на поверхні Землі p_0 (при $z = 0$), константа в цьому рівнянні дорівнює $\ln p_0$. Потенціюючи, одержимо

$$p = p_0 e^{-m_0 g z / kT}. \quad (8.27)$$

Помноживши чисельник і знаменник дробу в показнику експоненти на сталу Авогадро N_A і враховуючи, що $N_A m_0 = M$ – молярна маса газу, $N_A k = R$ – універсальна газова стала, запишемо це рівняння у вигляді

$$p = p_0 e^{-Mg z / RT}. \quad (8.28)$$

Цей вираз, що встановлює закон зменшення тиску газу з висотою, називається *барометричною формулою*. З нього випливає, що зі збільшенням висоти над поверхнею Землі тиск падає тим швидше, чим більша молярна маса газу. Тому зі збільшенням висоти атмосфера збагачується легкими газами. Проте застосовність барометричної формули до реальної атмосфери дуже обмежена, оскільки атмосфера не знаходиться в тепловій рівновазі і температура її змінюється з висотою.

З рівняння (8.27) з урахуванням (8.9) випливає залежність

від z концентрації молекул газу:

$$n = n_0 e^{-m_0 g z / kT}. \quad (8.29)$$

Оскільки $m_0 g z = W_p$ – потенціальна енергія молекули в полі тяжіння Землі, а ймовірність знайти молекулу в якій-небудь області простору пропорційна концентрації молекул, формулу (8.29) можна узагальнити на випадок довільного силового поля. Тоді ми одержимо вираз для статистичної функції розподілу будь-яких частинок – молекул, атомів, електронів – у цьому силовому полі:

$$\rho_A(x, y, z) = \rho_0 e^{-W_p(x, y, z) / kT}, \quad (8.30)$$

де ρ_0 – значення функції в точці, в якій потенціальна енергія W_p частинки рівна нулю.

Формула (8.30) виражає *розподіл Больцмана*. Вона показує, що ймовірність знаходження частинки в стані з енергією W_p із зростанням енергії зменшується. Розподіл Больцмана виконує у фізиці дуже важливу роль.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте основні положення молекулярно-кінетичної теорії речовини.
2. Опишіть характер руху молекул у газах, рідинах і твердих тілах. Від чого залежить приналежність тіла до газоподібних, рідких або твердих тіл?
3. Що називається термодинамічною системою? Наведіть приклади таких систем.
4. Що називається ідеальним газом? Дайте його розгорнену характеристику.
5. Якими термодинамічними параметрами характеризується стан деякої маси газу? Запишіть рівняння стану ідеального газу.

6. Дайте визначення тиску газу або рідини, яке вони чинять на стінки посудини. У яких одиницях він вимірюється?
7. Виведіть рівняння стану ідеального газу, користуючись законами класичної механіки.
8. Як вводиться поняття температури, що є одним з термодинамічних параметрів?
9. Дайте характеристику температурних шкал Цельсія і Кельвіна. Як вони пов'язані одна з одною?
10. Що таке стала Больцмана? Яке її фізичне значення?
11. Що називається моєм речовини? Скільки молекул міститься в одному молі будь-якої речовини?
12. Запишіть рівняння Клапейрона–Менделєєва і поясніть значення величин, що в нього входять.
13. Опишіть принцип дії газового термометра. Де він використовується?
14. Що називається ймовірністю події при проведенні статистичних випробувань? Що таке достовірна подія?
15. Дайте визначення середнього значення випадкової величини.
16. Як знайти середнє значення функції, аргументом якої служить випадкова величина?
17. Що називається статистичною функцією розподілу випадкової величини?
18. Дайте визначення середнього значення за часом і середнього значення по статистичному ансамблю.
19. Опишіть дослід Штерна з вимірювання швидкості газових молекул.
20. Запишіть формулу для функції розподілу молекул ідеального газу за швидкостями (розподіл Максвелла) і поясніть її фізичне значення.

21. Зобразіть графік функції розподілу Максвелла і дайте визначення середньої, середньої квадратичної і найімовірнішої швидкостей молекул ідеального газу.
22. Запишіть формули середньої, середньої квадратичної і найвірогіднішої швидкостей молекул ідеального газу.
23. Сформулюйте закон рівнорозподілу енергії за степенями вільності молекул ідеального газу.
24. Запишіть барометричну формулу, поясніть її значення і вкажіть межі її застосовності.
25. Запишіть формулу, що виражає розподіл Больцмана, і поясніть її фізичне значення.

РОЗДІЛ 9

ПЕРШИЙ ПОЧАТОК ТЕРМОДИНАМІКИ

Термодинаміка, або *загальна теорія теплоти*, – один з найважливіших розділів фізики. Термодинаміка як наука виникла з потреб практики, коли перед людиною постало завдання створення пристрою, що перетворює енергію спалюваного палива у механічну роботу. У найзагальнішому значенні слова термодинаміка є наукою про енергію і її властивості, звідки випливає, що вона повинна мати відношення до всіх розділів фізики, бути застосовна до явищ молекулярних і до явищ, що відбуваються у Всесвіті, – взагалі до матерії, що існує, як відомо, у вигляді речовини і у вигляді поля.

Термодинаміка побудована на двох *принципах* або *засадах*, що є узагальненням дослідних фактів. Для науки про енергію і її властивості перший початок термодинаміки є не що інше, як принцип збереження енергії. Пристрій, що безперервно здійснює роботу без витрати енергії, називається вічним двигуном (*perpetuum mobile*) першого роду (для відмінності від *perpetuum mobile* другого роду, з яким ми ознайомимося нижче). Тому перший початок можна сформулювати так: *perpetuum mobile* першого роду неможливий.

Для термодинаміки, у якій вченню про теплоту надається особливе значення, перший початок полягає у припущенні, що теплота є форма енергії, а тому вона еквівалентна деякій роботі. До 40-х років XIX століття теплота вважалася особливого роду речовиною, що називалася “теплородом”. Дослідним шляхом тоді було доведено, що теплород – невагома субстанція. Кількість теплороду, що міститься в тілі, визначає його температуру.

Перший початок був сформульований у працях Роберта Майєра (1842), Джеймса Джоуля (1843) і Германа Гельмгольца (1847). Другий початок був уперше сформульований Саді Карно (1824) у формі, що відповідала уявленню про теплоту, які панували

у той час. Рудольф Клаузіус (1850) трансформував ідеї Карно у дусі нового вчення про теплоту як про форму енергії. Він і Уільям Томсон (лорд Кельвін, 1851), що сформулював в іншій формі ті ж істини, можуть бути названі, разом з С.Карно, засновниками термодинаміки.

§ 9.1. Діаграми стану термодинамічної системи. Види процесів

Термодинамічною системою називається сукупність великого числа атомів або молекул. У термодинаміці байдуже, яка речовина розглядається – тверда, рідка або газоподібна. Висновки термодинаміки мають загальний характер, тобто застосовні для будь-яких тіл, проте надалі, як і в розд. 8, ми обмежимося розглядом властивостей ідеальних газів.

Стан термодинамічної системи характеризується яким-небудь набором значень термодинамічних параметрів. Зокрема, стан даної маси газу повністю визначається значеннями трьох параметрів – тиску, об'єму і температури. Ці параметри не можуть змінюватися незалежно один від одного і пов'язані рівнянням стану ідеального газу (рівнянням Клапейрона–Менделєєва):

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (9.1)$$

де m – маса газу, розміщеного в посудині об'ємом V при тиску p і температурі T ; M – його молярна маса;
 $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала.

З цього рівняння випливає, що, зафіксувавши один з параметрів – p , V або T , можна

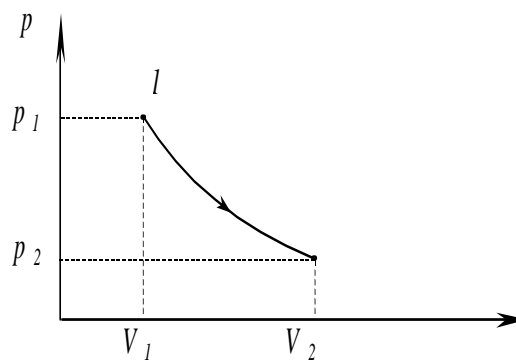


Рис. 9.1

знайти залежність між двома іншими. Графіки таких залежностей називаються *діаграмами стану*.

Виходячи з рівняння (9.1), можна одержати три види діаграм, які графічно зображають три види процесів: *ізотермічний*, що протікає при постійній температурі ($T = const$), *ізобарний* – при постійному тиску ($p = const$) та *ізохорний*, коли об'єм газу не змінюється ($V = const$).

Рівняння ізотермічного процесу має вигляд

$$pV = const. \quad (9.2)$$

Цей процес зображається на Vp -діаграмі лінією, що є гіперболою (рис. 9.1):

$$p = \frac{const}{V}. \quad (9.3)$$

Початковий стан газу характеризується тиском p_1 і об'ємом V_1 (точка 1 на рис. 9.1), кінцевий – тиском p_2 і об'ємом V_2 (точка 2). Усі проміжні стани зображаються точками гіперболи, яка у цьому випадку називається *ізотермою*.

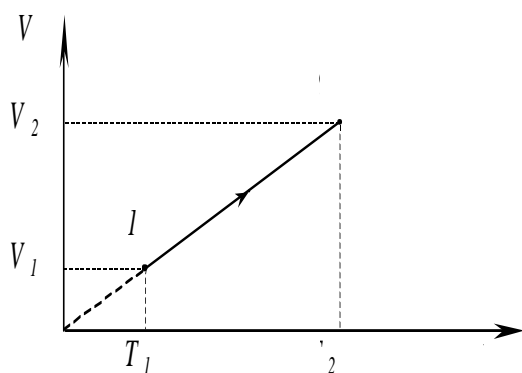


Рис. 9.2

Рівняння ізобарного процесу

$$V = \left(\frac{mR}{Mp} \right) T. \quad (9.4)$$

На TV -діаграмі цей процес зображається прямою лінією, що називається *ізобарою* (рис. 9.2). Ця пряма повинна пройти через

початок координат. Проте при зменшенні температури газ

перетворюється на рідину, до якої рівняння (9.4) застосовувати не можна. Тому вказана пряма обривається на шляху до початку координат.

Для ізохорного процесу з рівняння (9.1) маємо

$$p = \left(\frac{mR}{MV} \right) T. \quad (9.5)$$

На Tr -діаграмі – це теж пряма лінія, що називається ізохорою (рис.9.3). З вказаної вище причини вона не може пройти через початок координат.

Наведені діаграми дуже корисні при розв'язанні задач термодинаміки, оскільки дозволяють наочно представити характер змін, що відбуваються у газі.

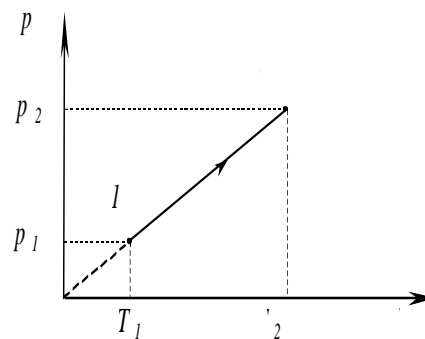


Рис. 9.3

§ 9.2. Внутрішня енергія ідеального газу і кількість теплоти

Внутрішня енергія U є однією з *функцій стану* термодинамічної системи, що розглядаються в термодинаміці. З точки зору кінетичної теорії, внутрішня енергія тіла – це енергія руху і взаємодії атомів або молекул, з яких складається тіло.

Найбільш просто знайти внутрішню енергію ідеального газу. Оскільки молекули ідеального газу не взаємодіють одна з одною на відстані, а зіткнення їх пружні, внутрішня енергія газу рівна сумі кінетичних енергій його молекул і залежить тільки від температури. Внутрішню енергію називають ще *тепловою*.

Як показує дослід, змінити температуру, а отже, і внутрішню енергію якого-небудь тіла, можна двома способами – здійснюючи

над ним механічну роботу або приводячи його в контакт з гарячим або холодним тілом. У першому випадку тіло можна нагрівати за допомогою тертя об інше тіло, а газ, як ми побачимо нижче, – ще і шляхом здійснення роботи при його стисканні.

Зміна внутрішньої енергії при другому – контактному – способі відбувається без здійснення роботи завдяки теплообміну – передачі енергії теплового руху молекул “гарячого” тіла молекулам “холодного”. Через історичні причини у цьому випадку говорять, що до тіла підводиться або від нього відводиться деяка *кількість теплоти* Q . Кількість теплоти є *енергією, що передається від одного тіла до іншого при їх контакті*, і теж є однією з термодинамічних функцій. На відміну від внутрішньої енергії кількість теплоти Q , що передається газу, залежить від виду здійснюваного газом процесу, тобто визначається неоднозначно.

Робота, внутрішня енергія і кількість теплоти вимірюються в одних і тих же одиницях – в системі СІ в *джоулях* (Дж).

У теплових вимірюваннях як одиниця кількості теплоти раніше використовувалася особлива одиниця енергії – *калорія* (кал), рівна кількості теплоти, необхідної для нагрівання 1 г води на один градус (точніше, від $19,5$ до $20,55^{\circ}\text{C}$). Дослідним шляхом встановлений *механічний еквівалент теплоти* – співвідношення між *калорією* і *джоулем*:

$$1 \text{ кал} = 4,2 \text{ Дж.}$$

§ 9.3. Перший початок термодинаміки

Перший початок термодинаміки виражає закон збереження енергії для теплових процесів. Він свідчить про те, що *кількість теплоти* δQ , *передана тілу шляхом теплообміну*, йде на збільшення його внутрішньої енергії dU і на здійснення цим тілом роботи δA проти зовнішніх сил:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (9.6)$$

Внутрішня енергія ідеального газу залежить тільки від температури і є функцією його стану. Робота, здійснювана газом при розширенні або стисканні, в термодинаміці виражається через зміну об'єму газу і залежить від виду процесу, що відбувається в ньому.

Розглянемо газ, що знаходиться в циліндрі з рухомим поршнем (рис. 9.4). Нехай тиск газу p , об'єм V , площа поршня S . Тоді сила, діюча на поршень з боку газу $F = pS$, а робота, виконана газом при переміщенні поршня на відстань dx :

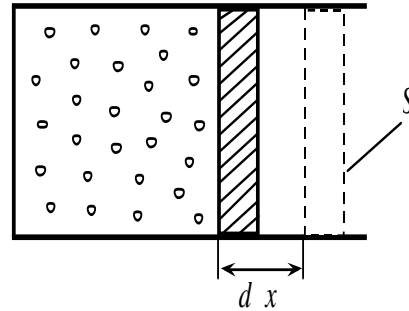


Рис. 9.4

$$\delta A = F dx = pS dx = p dV. \quad (9.7)$$

При розширенні газу від об'єму V_1 до об'єму V_2 робота дорівнює інтегралу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (9.8)$$

Чисельно вона рівна площі криволінійної трапеції на Vp -діаграмі, форма якої визначається видом процесу, здійснюваного газом (рис. 9.5). Так, під час переходу газу із стану 1 у стан 2 по верхній кривій $1a2$ здійснювана робота більша, ніж при переході із стану 1 у стан 2 по нижній кривій $1b2$, оскільки

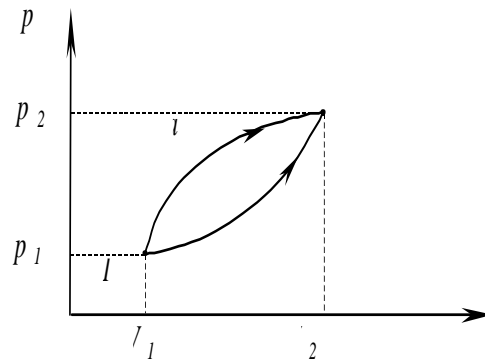


Рис. 9.5

площа фігури $V_1 I a_2 V_2$ більше площі фігури $V_1 I b_2 V_2$. Отже, робота залежить від форми шляху на Vp -діаграмі. Щоб відзначити цю обставину, роботу і кількість теплоти при нескінченно малій зміні об'єму ми позначили у рівнянні (9.6) грецькою буквою δ (дельта).

З урахуванням (9.7), рівняння (9.6), що виражає перший початок термодинаміки, можна записати у вигляді

$$\delta Q = dU + p dV. \quad (9.9)$$

§ 9.4. Теплоємність газів

Теплоємність характеризує теплові властивості речовини і є однією з функцій стану, що розглядаються в термодинаміці. За визначенням, *питомою теплоємністю називається кількість теплоти, необхідна для збільшення температури одного грама речовини на один кельвін:*

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta Q}{dT} \quad (\text{на } 1 \text{ г речовини}). \quad (9.10)$$

Аналогічно, *молярною теплоємністю називається кількість теплоти, необхідна для збільшення температури одного моля речовини на один кельвін:*

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\delta Q}{dT} \quad (\text{на } 1 \text{ моль речовини}). \quad (9.11)$$

В I молі міститься M грамів речовини (M – молярна маса, $\nu = m/M$ – кількість молів), тому для нагрівання I моля речовини потрібно в M раз більше тепла. Молярна і питома теплоємності зв'язані співвідношенням

$$C = M \cdot c. \quad (9.12)$$

Кількість теплоти, необхідна для нагрівання речовини масою m від температури T_1 до температури T_2 :

$$Q = cm(T_2 - T_1) = cm(t_2 - t_1), \quad (9.13)$$

де $T = t + 273$ – абсолютна температура, t – температура за шкалою Цельсія.

Дослід показує, що теплоємність газу залежить від виду процесу, який здійснює газ при нагріванні. Найважливішими є теплоємність газу при сталому об'ємі C_V і теплоємність при сталому тиску C_P .

Візьмемо 1 моль ідеального газу, що знаходиться в циліндрі з рухомим поршнем (див. рис. 9.4). Якщо закріпити поршень, то об'єм газу не змінюватиметься ($V = const$). Оскільки у цьому випадку $dV = 0$, з рівняння (9.9) випливає $\delta Q = dU$. Тоді *молярна теплоємність газу при сталому об'ємі*:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V \quad (\text{на } 1 \text{ моль газу}). \quad (9.14)$$

Індекс V у похідної означає, що диференціювання здійснюється при сталому значенні об'єму V .

Молекули одноатомного газу мають три поступальні степені вільності, на кожну з яких, за законом рівнорозподілу енергії, в середньому припадає енергія $kT/2$, так що внутрішня енергія 1 моля газу

$$U = N_A(3kT/2) = 3RT/2.$$

Згідно з (9.14),

$$C_V = \frac{3}{2}R \quad (\text{одноатомний газ}).$$

Двоатомні молекули, як випливає з досліду, мають додатково дві обертальні степені свободи – навколо осей, перпендикулярних

одна одній, і осі симетрії молекули, що проходять через центри атомів (рис. 9.6). На кожному з них припадає енергія $kT/2$. Внутрішня енергія U моля двоатомного газу

$$U = N_A(3kT/2 + 2kT/2) = 5RT/2,$$

а молярна теплоємність

$$C_V = \frac{5}{2} R \quad (\text{двоатомний газ}).$$

Молекули з числом атомів $n \geq 3$ мають всі три обертальні степені вільності. У багатоатомних газів

$$U = N_A(3kT/2 + 3kT/2) = 3RT,$$

$$C_V = 3R \quad (\text{багатоатомний газ}).$$

У загальному випадку молярну теплоємність газу при сталому об'ємі можна подати у вигляді

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad (9.15)$$

де i – число степенів вільності молекули газу. При цьому

$i = 3$ – для одноатомного газу,

$i = 5$ – для двоатомного газу,

$i = 6$ – для багатоатомного газу.

Молярні теплоємності газів визначаються тільки числом атомів в їх молекулах. Тому, наприклад, такі гази, як водень і кисень, не дивлячись на велику відмінність у масах молекул, мають однакові теплоємності.

З формули (9.14) випливає, що $dU = C_V dT$. Тоді рівняння

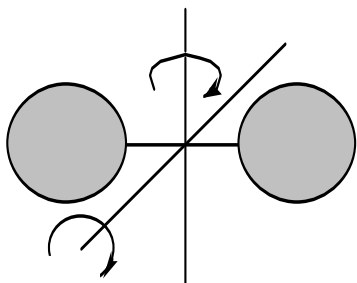


Рис. 9.6

(9.9), що виражає перший початок термодинаміки, можна записати у вигляді

$$\delta Q = C_V dT + p dV \quad (\text{на } 1 \text{ моль газу}). \quad (9.16)$$

§ 2.5. Ізобарний процес. Рівняння Майєра

Процес, що протікає при сталому тиску, називається *ізобарним*. Нехай у циліндрі, в якому знаходиться газ (див. рис. 9.4), поршень не закріплений. При нагріванні газу він переміщуватиметься вправо, завдяки чому тиск газу всередині циліндра залишається сталим, рівним зовнішньому атмосферному тиску p_0 (рис. 9.7). Теплота, одержана газом, йде тепер не тільки на збільшення його внутрішньої енергії, але і на здійснення роботи.

Молярна теплоємність газу при сталому тиску може бути обчислена як похідна

$$C_P = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p \quad (\text{на } 1 \text{ моль газу}). \quad (9.17)$$

Індекс p означає, що диференціювання здійснюється при сталому значенні тиску p .

Знайдемо, як пов'язані одна з одною молярні теплоємності C_P і C_V . Кількість теплоти, одержана модем газу при нагріванні, згідно з рівнянням (9.16), $\delta Q = C_V dT + p dV$, але $p dV = R dT$, що впливає з рівняння Клапейрона–Менделєєва (9.1) при $m = M$, $p = \text{const}$. Тоді

$$\delta Q = (C_V + R) dT .$$

Підставляючи цей вираз у формулу (9.17), приходимо до рівняння

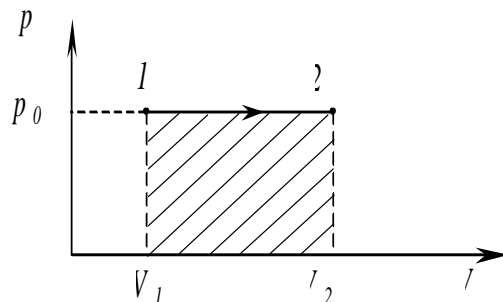


Рис. 9.7

$$C_P = C_V + R, \quad (9.18)$$

яке називається рівнянням Майєра.

Роботу, що виконується газом при ізобарному розширенні, можна знайти, підставивши постійне значення тиску газу p_0 у рівняння (9.8). Тоді одержимо

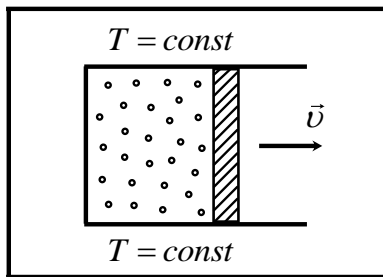
$$A = \int_{V_1}^{V_2} p_0 dV = p_0(V_2 - V_1) = p_0 \Delta V. \quad (9.19)$$

Ця робота чисельно рівна площі прямокутника $V_1 12 V_2$ на Vp -діаграмі, що зображає ізобарний процес (рис. 9.7).

З'ясуємо фізичне значення універсальної газової сталої R . З рівняння (9.1) при $m = M$, $p = p_0$ знаходимо $p_0 \Delta V = R \Delta T$. Порівнюючи це рівняння з (9.19), бачимо, що $A = R \Delta T$. Якщо $\Delta T = 1 \text{ K}$, то робота $A = R$, тобто *універсальна газова стала R чисельно рівна роботі розширення одного моля ідеального газу, коли він нагрівається на один кельвін при сталому тиску.*

§ 9.6. Робота при ізотермічному розширенні ідеального газу

Для здійснення ізотермічного розширення газу, що знаходиться у циліндрі з рухомим поршнем, температура стінок циліндра повинна підтримуватися сталою за допомогою термостата (рис. 9.8),



Тоді і нò àò

а поршень повинен переміщатися настільки повільно, щоб газ весь час знаходився в тепловій рівновазі зі стінками.

При ізотермічному розширенні кількість теплоти, одержувана газом від термостата,

Рис. 9.8

рівна роботі, виконаній газом: $\delta Q = \delta A$. Це впливає з рівняння $\delta Q = C_V dT + \delta A$ при $T = const$.

Підставляючи в (9.8) $p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$ з рівняння (9.1), знайдемо роботу при ізотермічному розширенні газу:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{при } T = const). \quad (9.20)$$

§ 9.7. Адіабатний процес. Рівняння Пуассона

Процес, що протікає без теплообміну з навколишнім середовищем, називається *адіабатним*. Циліндр, у якому знаходиться газ (рис. 9.8), слід помістити в так звану адіабатичну оболонку, що не проводить тепло. У цьому випадку $\delta Q = 0$, і рівняння (9.6), що виражає перший початок термодинаміки, набуває вигляду

$$dU + \delta A = 0 \quad \text{або} \quad \delta A = -dU.$$

З цього рівняння випливає, що *при адіабатному процесі робота здійснюється за рахунок внутрішньої енергії газу*.

При адіабатному розширенні газ здійснює роботу над зовнішніми тілами ($\delta A > 0$), а його внутрішня енергія і, отже, температура зменшуються ($dU < 0$). При адіабатному стисненні ця робота негативна ($\delta A < 0$), а внутрішня енергія і температура газу зростають ($dU > 0$).

Адіабатний процес можна здійснити і за відсутності теплоізоляції. Для цього процес повинен відбуватися настільки швидко, щоб теплообмін з навколишнім середовищем не встигав відбуватися (у розд. 10 показано, що теплообмін є повільним процесом).

Знайдемо рівняння кривої, що зображає на Vp -діаграмі адіабатний процес. Рівняння (9.16) для адіабатного процесу, що протікає в 1 молі ідеального газу, має вигляд

$$C_V dT + p dV = 0. \quad (9.21)$$

Якщо теплообмін з навколишнім середовищем відсутній, то змінюються всі три параметри, які характеризують стан газу – p , V і T . Продиференціювавши рівняння стану 1 моля газу $pV = RT$, одержимо

$$p dV + V dp = R dT.$$

Виразивши звідси dT і підставивши його в (9.21), отримаємо рівняння

$$\frac{C_V + R}{R} p dV + \frac{C_V}{R} V dp = 0. \quad (9.22)$$

Скоротивши R , розділимо одержане рівняння на добуток $C_V \cdot pV$, врахуємо, що $C_V + R = C_P$, і введемо позначення

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}. \quad (9.23)$$

Тоді рівняння (9.22) набуває вигляду

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (9.24)$$

Інтегруючи його, знаходимо: $\gamma \ln V + \ln p = \ln const$, звідки

$$pV^\gamma = const. \quad (9.25)$$

Це рівняння носить назву *рівняння адіабати* або *рівняння Пуассона*. Стала γ називається *показником*

адіабати. Чисельне його значення можна знайти, підставивши в (9.23) співвідношення (9.15) і (9.18). Тоді

$$\gamma = \frac{i+2}{i}, \quad (9.26)$$

де i – число степенів вільності молекули.

В одноатомних газів $i=3$ і $\gamma=1,67$, у двоатомних ($i=5$) $\gamma=1,4$. Значення показника адіабати у багатоатомних газів ($i=6$) ще ближче до одиниці і складає $1,33$. Обчислені за формулою (9.26) значення γ добре узгоджуються з дослідними даними для більшості газів.

Корисно побудувати графіки залежності тиску газу від його об'єму. На рис. 9.9 наведені такі графіки для ізотермічного і адіабатного процесів, коли об'єм газу змінюється від V_1 до V_2 .

Оскільки $\gamma > 1$, адіабата $p = \frac{const}{V^\gamma}$ йде крутіше за ізотерму $p = \frac{const}{V}$, показану на цьому рисунку пунктиром.

Адіабата, що проходить через точку 1 , при збільшенні об'єму газу опускається нижче за ізотерму, тобто газ при адіабатному розширенні охолоджується.

Роботу розширення газу при адіабатному процесі знайдемо, підставивши в (9.8) тиск $p = \frac{const}{V^\gamma}$. З рівняння (9.25) випливає, що константа рівна добутку $p_1 V_1^\gamma$ у початковому стані 1 :

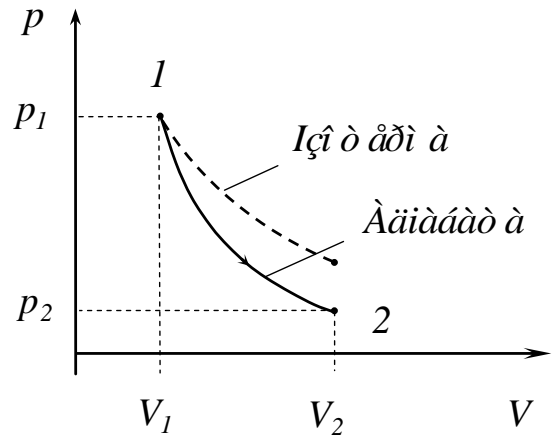


Рис. 9.9

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (9.27)$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте розгорнену відповідь на питання: “Що вивчає термодинаміка?”
2. Що називається термодинамічною системою?
3. Наведіть приклади термодинамічних параметрів, що характеризують стан термодинамічної системи.
4. Які ізопроцеси в ідеальних газах розглядає термодинаміка? Зобразіть відповідні їм діаграми стану.
5. Що називається внутрішньою енергією термодинамічної системи? Від чого залежить внутрішня енергія ідеального газу?
6. Поясніть значення поняття кількості теплоти.
7. Наведіть формулювання першого початку термодинаміки.
8. Отримайте формулу роботи розширення ідеального газу.
9. Що називається питомою теплоємністю речовини, молярною теплоємністю?
10. Користуючись законом рівнорозподілу енергії, отримайте формулу молярної теплоємності ідеальних газів при сталому об'ємі C_V .
11. Виведіть рівняння Майєра, що пов'язує молярні теплоємності ідеального газу при сталому тиску C_p і сталому об'ємі C_V .
12. Знайдіть роботу ізобарного розширення ідеального газу.
13. Яке фізичне значення універсальної газової сталої?
14. Обчисліть роботу, що виконується газом при ізотермічному розширенні.
15. Який процес називається адіабатним? Запишіть перший початок термодинаміки для адіабатного процесу.

16. Виведіть рівняння Пуассона. Який вигляд має це рівняння в змінних $T-p$ і $T-V$?
17. Отримайте формулу роботи, що виконується газом при адіабатному розширенні.

ПРОЦЕСИ ПЕРЕНЕСЕННЯ У ГАЗАХ

Будь-яка термодинамічна система, під якою ми розуміємо сукупність великого числа молекул, за незмінних зовнішніх умов приходить в *стан термодинамічної рівноваги*, коли температура і тиск в будь-якій точці об'єму, що займає система, мають певні значення, які не змінюються з часом. Якщо є суміш декількох газів або рідин, то в стані термодинамічної рівноваги концентрація кожної з компонент всюди в об'ємі однакова. Крім того, в рівноважному стані не відбувається руху газу або рідини як цілого.

Процес вирівнювання концентрації, що супроводжується переходом молекул даного сорту з області з більшою концентрацією в область, де концентрація цих молекул менша, називається *дифузією*. Процес поширення тепла від гарячої частини тіла до холодної носить назву *теплопровідності*. І, нарешті, зникнення макроскопічних потоків газу або рідини зумовлене *внутрішнім тертям*, або *в'язкістю*.

У першому з цих процесів проходить перенесення *маси*, у другому – перенесення тепла, у третьому – перенесення імпульсу з одного шару газу або рідини в інший. Ці процеси, що приводять систему в стан термодинамічної рівноваги, називаються *процесами перенесення*.

Як показує дослід, процеси встановлення термодинамічної рівноваги достатньо повільні. Найшвидше вони протікають в газах завдяки тому, що швидкості теплового руху молекул газу досягають декількох сотень метрів за секунду. Проте через зіткнення молекул однієї з одною, що мають випадковий характер, траєкторії їх руху схожі на ламану лінію, так що переміщення будь-якої з молекул за невеликий проміжок часу незначне і не має ніякого переважного напрямку в просторі.

Обчислимо частоту зіткнень і довжину пробігу молекули газу між двома послідовними її зіткненнями з іншими молекулами, а потім розглянемо кожний з процесів перенесення.

§ 10.1. Частота зіткнень і довжина вільного пробігу молекул ідеального газу

Для розрахунку середнього числа зіткнень \bar{Z} , які має молекула ідеального газу за одиницю часу, скористаємося такою моделлю. Молекули представимо у вигляді кульок радіусом r , що стикаються одна з одною абсолютно пружно. Швидкості молекул будемо вважати рівними середній швидкості їх теплового руху \bar{v} .

Розрахунок істотно спрощується, якщо допустити, що:

- а) зіткнення даної молекули з іншими молекулами не змінюють напрямку її руху;
- б) всі інші молекули нерухомі.

Перше з цих припущень не впливає на кінцеве значення шуканої величини, друге приводить до заниженого значення \bar{Z} , яке можна виправити, ввівши числовий коефіцієнт $\sqrt{2}$, що з'являється при точному, але складнішому розрахунку.

Вибрана нами молекула за час t має зіткнення з молекулами, центри яких знаходяться всередині циліндра радіусом $R = 2r$ і висотою $\bar{v}t$ (рис. 10.1). Їх число рівне добутку концентрації молекул газу n_0 на об'єм циліндра $V = 4\pi r^2 \bar{v}t$ (площа основи циліндра $S = \pi R^2 = 4\pi r^2$).

Число зіткнень нашої молекули з іншими за одну секунду ($t = 1$ с), тобто *середня частота зіткнень* (з урахуванням коефіцієнта $\sqrt{2}$)

$$\bar{Z} = 4\sqrt{2}\pi r^2 n_0 \bar{v}. \quad (10.1)$$

З цієї формули випливає, що частота зіткнень тим більша,

чим вища концентрація молекул газу n_0 і його температура T (оскільки $\bar{v} \sim \sqrt{T}$).

Числова оцінка цієї величини, наприклад, для азоту (молярна маса $M = 0,028$ кг / моль, радіус молекули $r = 10^{-10}$ м) при нормальному тиску ($p = 10^5$ Па) і кімнатній температурі ($T = 300$ К) показує, що середня частота зіткнень $\bar{Z} \approx 10^9$ с $^{-1}$.

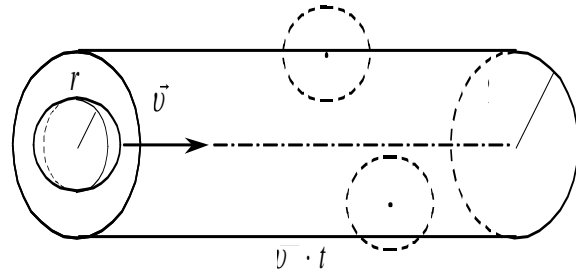


Рис. 10.1

Оскільки частота зіткнень дуже велика, рух молекул газу не можна вважати вільним, не дивлячись на те, що середня відстань між молекулами у багато разів перевищує їх розміри. Цим і пояснюється повільність процесів дифузії і теплопровідності.

Середня довжина вільного пробігу молекул

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}, \quad (10.2)$$

де d – діаметр молекули. Цю формулу часто записують у вигляді

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n_0}, \quad (10.2a)$$

де $\sigma = \pi d^2$ – площа ефективного перерізу зіткнень молекули. Вона рівна площі поперечного перерізу циліндра, зображеного на рис. 10.1, тобто площі, куди повинні потрапити

центри інших молекул, щоб вони могли зіткнутися з даною молекулою.

За нормальних умов числове значення $\bar{\lambda}$ складає приблизно 10^{-7} м, тобто в сотні раз більше діаметра молекули, але набагато менше розмірів посудини, в якій знаходиться газ.

§ 10.2. Дифузія в газах

При хаотичному русі молекул рідини або газу відбувається їх перемішування, внаслідок чого концентрація кожної з компонент суміші стає однаковою в будь-якій частині об'єму, зайнятого речовиною. *Процес вирівнювання концентрації речовини називається дифузійною.*

Розглянемо середовище (газ або рідина), в якій присутня стороння домішка з об'ємною густиною $\rho = m/V$, де m – маса речовини домішки, V – об'єм, зайнятий сумішшю молекул. Нехай

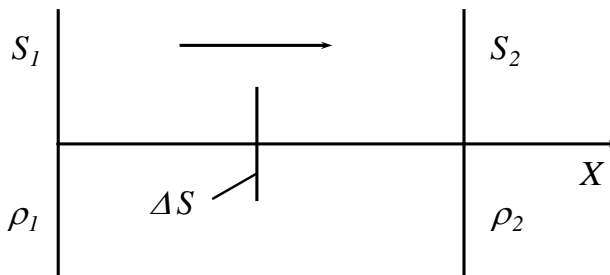


Рис. 10.2

густина ρ зменшується у напрямку осі X (рис. 10.2), а в перерізах S_1 і S_2 її значення відповідно рівні ρ_1 і ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$) і підтримуються сталими протягом усього часу спостереження. Дифузія

молекул домішок від S_1 до S_2 носить у цьому випадку стаціонарний характер.

Як показує дослід, маса речовини домішки m , що переноситься в результаті дифузії через перпендикулярну осі X поверхню площею ΔS за час Δt (рис. 10.3), пропорційна градієнту густини домішки $d\rho/dx$ і виражається рівнянням

$$m = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S \Delta t. \quad (10.3)$$

Це *рівняння дифузії*, або *рівняння Фіка*. Коефіцієнт пропорційності D називається *коефіцієнтом дифузії*. Він

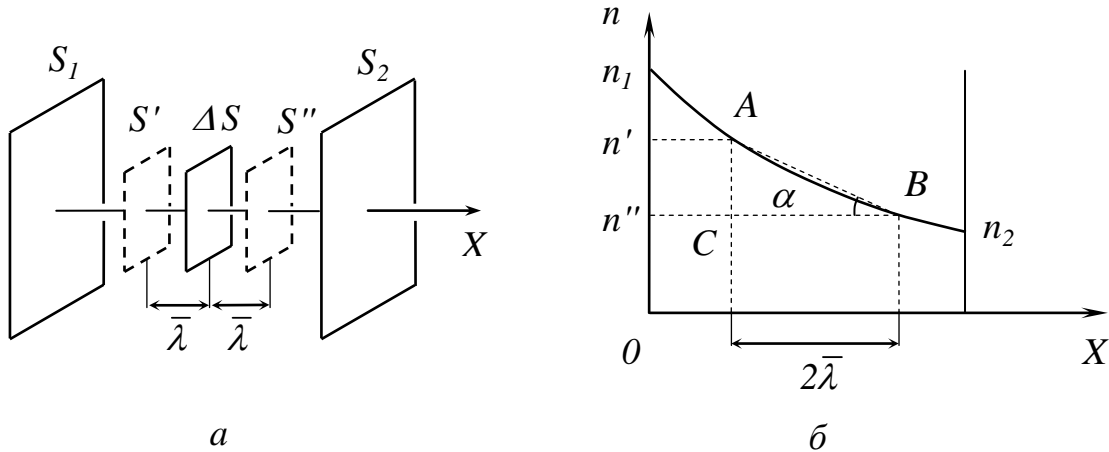


Рис. 10.3

залежить від властивостей дифундуючої речовини і середовища, в якому вона знаходиться. Градієнт густини $d\rho/dx$ показує, наскільки різко змінюється густина домішки з координатою x . Знак “мінус” робить праву частину цього рівняння додатною, оскільки густина домішки вздовж осі X зменшується, і $d\rho/dx < 0$.

З рівняння (10.3) випливає, що коефіцієнт дифузії чисельно рівний масі речовини домішки, що переноситься через одиничний майданчик за одиницю часу при градієнті густини, рівному одиниці.

Одиниця вимірювання коефіцієнта дифузії в системі СІ – *квадратний метр на секунду* ($\text{м}^2/\text{с}$).

Якщо дифузія відбувається в газі, то можна одержати аналітичний вираз коефіцієнта дифузії. Виразимо масу дифундуючого газу через число його молекул N :

$$m = N m_0,$$

де $m_0 = M / N_A$ – маса однієї молекули (M – молярна маса, N_A – стала Авогадро).

Густина домішки $\rho = n m_0$ ($n = N/V$ – концентрація молекул домішки). Підставляючи m і ρ у формулу (10.3) і скорочуючи m_0 , одержимо число молекул газу, що переносяться в процесі дифузії через майданчик ΔS за час Δt :

$$N = -D \frac{dn}{dx} \Delta S \Delta t. \quad (10.4)$$

Щоб знайти число таких молекул, проведемо подумки площини S' і S'' паралельно майданчику ΔS на відстані довжини вільного пробігу $\bar{\lambda}$ від неї (рис. 10.3,а). Концентрацію молекул домішки в цих площинах позначимо відповідно n' і n'' ($n' > n''$). Через майданчик ΔS за час Δt пройдуть молекули, що рухаються вздовж осі X і що знаходяться зліва і праворуч від неї в шарі товщиною $\bar{v} \Delta t$. Оскільки молекули рухаються хаотично, всі напрямки їх руху рівноправні, тому вздовж осі X в середньому переміщатиметься $1/3$ всіх молекул, половина з яких – $1/6$ частина – рухається зліва-направо і $1/6$ частина – справа наліво. Оскільки на шляху завдовжки $\bar{\lambda}$ молекули не мають зіткнень з іншими молекулами, число молекул домішки N_1 , що перетинають майданчик ΔS зліва направо, дорівнює добутку їх концентрації n' на відстані $\bar{\lambda}$ від цього майданчика на об'єм шару $\bar{v} \Delta t \Delta S$.

Таким чином,

$$N_1 = \frac{1}{6} n' \bar{v} \Delta S \Delta t.$$

Аналогічно, число молекул, що перетинають майданчик ΔS справа наліво:

$$N_2 = \frac{1}{6} n'' \bar{v} \Delta S \Delta t.$$

Різниця $N_1 - N_2$ рівна числу дифундуючих через цей майданчик молекул:

$$N = \frac{1}{6} (n' - n'') \bar{v} \Delta t \Delta S. \quad (10.5)$$

На рис. 10.3,б наведена залежність концентрації молекул домішки від координати x . З трикутника ABC знайдемо

$$n' - n'' = 2\bar{\lambda} \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.6)$$

Тангенс кута α чисельно рівний взятій зі зворотним знаком похідній функції $n(x)$ ($\operatorname{tg} \alpha = -\frac{dn}{dx}$), тобто градієнту концентрації. Підставляючи рівняння (10.6) в (10.5) і порівнюючи з рівнянням (10.4), бачимо, що коефіцієнт дифузії газу

$$D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v}. \quad (10.7)$$

Оскільки, згідно з (10.2) і (8.24), $\bar{\lambda} = \frac{l}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}$, а $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, коефіцієнт дифузії обернено пропорційний концентрації молекул суміші газів, а отже і тиску ($D \propto 1/p$), і прямо пропорційний кореню з температури ($D \propto \sqrt{T}$). Таким чином, зі зниженням тиску і зростанням температури процес дифузії в газах прискорюється.

§ 3.3. Теплопровідність газів

Властивість тіл проводити тепло за рахунок теплового руху молекул називається теплопровідністю. Розглянемо суцільне середовище (газ, рідина або тверде тіло), температура якої плавно змінюється у напрямку осі X (рис. 10.4,а). У перерізі S_1 температура рівна T_1 , а в перерізі S_2 вона рівна T_2 , причому

$T_1 > T_2$, і обидві вони підтримуються сталими. Процес перенесення тепла від S_1 до S_2 носить у цьому випадку стаціонарний характер. Щоб виключити рух газу або рідини, тобто конвекцію, яка відбувається за рахунок різниці густини при різних температурах, вісь X слід спрямувати вертикально вниз так, щоб нагріта поверхня знаходилась вище холодної. Вважатимемо цю умову виконаною, проте на рисунку для зручності розгляду розташуємо вісь X горизонтально.

Дослід показує, що кількість тепла, що переноситься через перпендикулярний осі X майданчик ΔS за час Δt (рис. 10.4,а), пропорційна градієнту температури dT/dx і виражається рівнянням

$$Q = -\chi \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t, \quad (10.8)$$

яке називається *рівнянням теплопровідності* або *рівнянням Фур'є*. Коефіцієнт пропорційності χ називається *коефіцієнтом теплопровідності*, характерним для даної

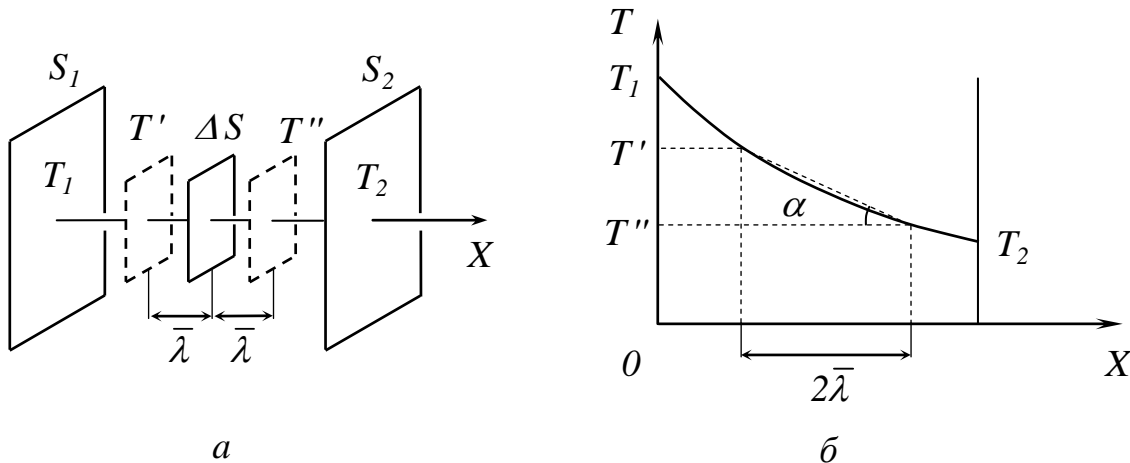


Рис. 10.4

речовини. Знак “мінус” поставлений для того, щоб зробити праву

частину рівняння додатною, оскільки температура уздовж осі X спадає, і $dT/dx < 0$.

З рівняння (10.8) випливає, що коефіцієнт теплопровідності чисельно рівний кількості тепла, що переноситься через одиничний майданчик за одиницю часу при градієнті температури, рівному одиниці.

Одиниця вимірювання коефіцієнта теплопровідності в системі СІ – джоуль на метр-секунду-кельвін (Дж/(м·с·К)).

Можна одержати аналітичний вираз коефіцієнта теплопровідності газів. Виведення його багато в чому повторює виведення формули коефіцієнта дифузії, наведене в попередньому параграфі. Число молекул газу N_1 , що хаотично рухаються і перетинають майданчик ΔS зліва направо, виражається аналогічною наведеної там формулою, в якій концентрацію домішки n' слід замінити концентрацією молекул газу n_0 :

$$N_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t.$$

Якщо вважати концентрацію молекул зліва і справа від майданчика ΔS приблизно однаковою, то число молекул N_2 , що перетинають цей майданчик справа наліво, збігається з N_1 : $N_2 = N_1$. Молекули, що рухаються вздовж осі X зліва направо, мають енергією хаотичного руху (теплову енергію), що відповідає температурі T' шару газу, розташованого зліва від майданчика на відстані довжини вільного пробігу $\bar{\lambda}$. Енергія теплового руху молекул, що рухаються у зворотному напрямку, відповідає температурі T'' у шарі газу на відстані $\bar{\lambda}$ праворуч від неї. Оскільки $T'' < T'$, через майданчик ΔS відбувається перенесення тепла у напрямку зниження температури.

Кількість теплоти, що переноситься зліва направо, дорівнює різниці кількостей теплоти, що переносяться молекулами вздовж осі X у взаємно протилежних напрямках:

$$Q = Q_1 - Q_2 = N_l(U' - U'') = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} (U' - U'') \Delta S \Delta t, \quad (10.9)$$

де $U' = i(kT'/2)$ – енергія молекули, що перетинає майданчик ΔS зліва направо; $U'' = i(kT''/2)$ – енергія молекули, що рухається у протилежному напрямку; i – число степенів вільності молекули.

Підставимо U' і U'' у рівняння (10.9) і скористаємося наближеною рівністю $T' - T'' = 2\bar{\lambda} \operatorname{tg} \alpha = -2\bar{\lambda} \frac{dT}{dx}$ (рис. 10.4,б).

Тоді

$$Q = -\frac{i}{6} n_0 k \bar{\lambda} \bar{v} \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t.$$

Порівнюючи одержане рівняння з рівнянням (10.8), бачимо, що коефіцієнт теплопровідності газу

$$\chi = \frac{i}{6} n_0 k \bar{\lambda} \bar{v}.$$

Цей вираз можна перетворити, скориставшись ланцюжком рівності $\frac{i}{2} k = \frac{C_V}{N_A} = \frac{M c_V}{N_A} = m_0 c_V$, де M – молярна маса газу, C_V і c_V – відповідно його молярна і питома теплоємності при сталому об'ємі, N_A – стала Авогадро. Остаточню одержимо

$$\chi = \frac{1}{3} n_0 m_0 c_V \bar{\lambda} \bar{v} = \frac{1}{3} \rho c_V \bar{\lambda} \bar{v} \quad (10.10)$$

($\rho = n_0 m_0$ – об'ємна густина газу).

Коефіцієнт теплопровідності зростає зі збільшенням температури газу пропорційно \sqrt{T} , що випливає з формули (8.24) для середньої швидкості молекул \bar{v} . Він не залежить від тиску газу, оскільки густина ρ пропорційна тиску p , довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}$ – обернено пропорційна йому, а у виразі (10.10) міститься добуток цих величин.

§ 10.4. В'язкість газів

В'язкість – це властивість рідин і газів чинити опір руху тіл, розміщених в їхньому середовищі. В'язкість називають ще внутрішнім тертям. Визначення коефіцієнта в'язкості речовини зроблено у розд. 5.

Якщо розглянути два сусідні шари рідині або газу, один з яких – верхній – рухається вздовж вісі X (рис. 10.5) зі швидкістю u_1 , а нижній – з меншою швидкістю u_2 , то силу тертя між шарами може бути представлено у вигляді

$$F_x = \eta \frac{du}{dz} \Delta S, \quad (10.11)$$

де ΔS – площі їх зіткнення, du/dz – градієнт швидкості, який показує, наскільки різко змінюється ця швидкість, якщо у думках переміщатись від одного шару до іншого, тобто вздовж осі Z ,

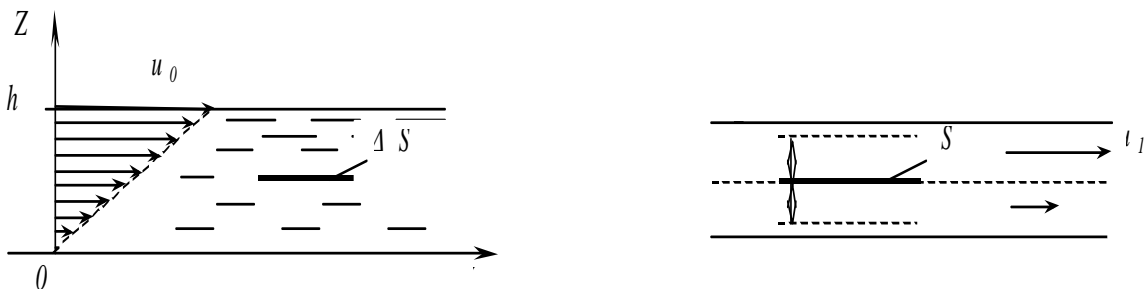


Рис. 10.5

η – коефіцієнт в'язкості.

Коефіцієнт в'язкості залежить від природи рідини або газу і від температури – із зростанням температури в'язкість рідин падає, а газів – зростає. Механізм внутрішнього тертя в газах принципово інший, ніж в рідинах. Відстані між молекулами у газах набагато перевищують їх розміри, а самі молекули взаємодіють одна з одною тільки у момент зіткнення. Тертя між шарами газу зумовлене перенесенням імпульсу, спрямованого вздовж осі X , з шару, який рухається з більшою швидкістю, у шар, швидкість якого менша, і навпаки – з “повільного” шару у “швидкий”. Носіями цього імпульсу є самі молекули газу.

Пояснимо сказане на прикладі двох вагонеток, що рухаються паралельно одна одній з різними швидкостями. У момент обгону людина, що знаходиться у швидкій вагонетці, перестрибує у повільну. Імпульс людини у напрямку руху вагонеток при цьому зменшується завдяки тому, що частину цього імпульсу він передає другій вагонетці, яка набуває більшої швидкості, тобто на неї діє прискорююча сила у напрямку свого руху.

Аналогічно, якщо людина перестрибує з повільної вагонетки у швидку, вона набуває додаткового імпульсу у напрямку руху вагонеток, який передається йому швидкою вагонеткою, на яку при цьому діє гальмуюча сила. Такий механізм внутрішнього тертя в газах.

Користуючись цими уявленнями, знайдемо силу в'язкого тертя між шарами газу. Виділимо подумки в шарах 1 і 2 поверхні, паралельні поверхні їх зіткнення площиною ΔS , на відстані довжини вільного пробігу молекул $\bar{\lambda}$ від неї (рис. 10.5,б). За час Δt частина молекул, що знаходяться у шарі 1, внаслідок хаотичного руху переходить у шар 2, а частина молекул з шару 2 переходить у шар 1. Число тих і інших однакове і рівне (див. § 10.3):

$$N = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t.$$

Молекули переносять через майданчик ΔS з шару 1 в шар 2 імпульс, спрямований уздовж осі X , що дорівнює $\Delta p_{1x} = N m_0 u_1$, а молекули з шару 2 у шар 1 – імпульс $\Delta p_{2x} = N m_0 u_2$ (m_0 – маса молекули). Зміну імпульсу шару 1 у напрямку осі X , зумовлене взаємними переходами молекул газу з одного шару в інший, складе за час Δt величину

$$\Delta p_x = \Delta p_{1x} - \Delta p_{2x} = \frac{1}{6} n_0 m_0 \bar{v} \Delta S \Delta t (u_1 - u_2).$$

Різницю швидкостей $u_1 - u_2$ можна знайти, розклавши функцію $u(z)$ в ряд Тейлора поблизу точки z (рис. 10.5,б):

$$u_1 = u(z + \bar{\lambda}) = u(z) + \frac{du}{dz} \bar{\lambda} + \dots,$$

$$u_2 = u(z - \bar{\lambda}) = u(z) - \frac{du}{dz} \bar{\lambda} + \dots,$$

Тоді $u_1 - u_2 = 2\bar{\lambda} \frac{du}{dz}$ і $\Delta p_x = \frac{1}{3} n_0 m_0 \bar{\lambda} \bar{v} \frac{du}{dz} \Delta S \Delta t.$

Сила, що діє по дотичній до шару 1, згідно з другим законом Ньютона, дорівнює $F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}$, тобто

$$F_x = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} \frac{du}{dz} \Delta S,$$

де $\rho = n_0 m_0$ – густина газу.

Порівнюючи одержане рівняння з рівнянням (10.11), бачимо, що коефіцієнт в'язкості газу

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v}. \quad (10.12)$$

Коефіцієнт в'язкості газу зростає зі збільшенням його температури пропорційно \sqrt{T} , оскільки, згідно з (8.24), так змінюється середня швидкість молекул \bar{v} . У той же час, коефіцієнт в'язкості не залежить від тиску газу p , оскільки у формулу (10.12) входить добуток густини газу ρ і довжини вільного пробігу його молекул $\bar{\lambda}$, перша з яких пропорційна p , а друга – йому обернено пропорційна. Цей з першого погляду парадоксальний закон (який називається законом Максвелла) пояснюється тим, що якщо подвоїти густину, то вдвічі більша кількість молекул переходить з одного шару в інший, проте ці молекули й удвічі менш глибоко входять в цей шар, чим і компенсується вплив збільшення удвічі кількості молекул.

Порівнюючи формули (10.7), (10.10) і (10.12) для коефіцієнтів дифузії, теплопровідності і в'язкості, легко помітити, що ці коефіцієнти пов'язані один з одним співвідношеннями

$$\chi = c_V \eta = \rho c_V D, \quad D = \frac{\eta}{\rho}. \quad (10.13)$$

Тому, вимірявши на досліді один з них, можна знайти інші. Незалежне вимірювання вказаних коефіцієнтів підтверджує правильність співвідношень (10.13). Проте формули (10.7), (10.10) і (10.12) не можуть бути використані для розрахунку коефіцієнтів перенесення, оскільки містять величини $\bar{\lambda}$ і \bar{v} , які не піддаються прямому вимірюванню.

Питання для самоперевірки

1. Наведіть приклади процесів, що приводять термодинамічну систему в рівноважний стан.

2. Виведіть формулу частоти зіткнень молекул ідеального газу. Які спрощуючі припущення слід при цьому зробити?
3. Поясніть, що таке довжина вільного пробігу молекул ідеального газу, і отримайте формулу для її обчислення. Як залежить ця величина від тиску газу і його температури?
4. Що називається дифузією речовини? Запишіть рівняння дифузії і поясніть фізичне значення коефіцієнта дифузії.
5. Отримайте вираз для коефіцієнта дифузії ідеального газу. Як він залежить від тиску і температури?
6. Запишіть рівняння теплопровідності. Поясніть фізичне значення коефіцієнта теплопровідності?
7. Отримайте формулу коефіцієнта теплопровідності ідеального газу. Як він залежить від температури газу і чому не залежить від тиску?
8. Дайте визначення коефіцієнта в'язкості рідини або газу. Яке його фізичне значення?
9. Який механізм внутрішнього тертя у рідинах? Як залежить в'язкість рідин від температури? Дайте розгорнену характеристику цьому процесу.
10. У чому принципова відмінність механізму внутрішнього тертя в газах від механізму внутрішнього тертя в рідинах?
11. Отримайте формулу коефіцієнта в'язкості газу. Як залежить в'язкість газів від температури? Наведіть пояснення цьому.
12. Запишіть формули, що пов'язують коефіцієнти дифузії, в'язкості і теплопровідності газів.

РОЗДІЛ 11

ДРУГИЙ ПОЧАТОК ТЕРМОДИНАМІКИ

Перший початок термодинаміки виражає закон збереження енергії для теплових процесів. По суті він еквівалентний твердженню про неможливість створення вічного двигуна (*perpetuum mobile*), який міг би створювати енергію “з нічого”. Проте перший початок не накладає ніяких обмежень на перетворення енергії з одного виду в інший. Згідно з першим початком термодинаміки, завжди є можливість перетворити теплоту на роботу або роботу у теплоту, якщо загальна кількість теплоти еквівалентна загальній кількості роботи. Це справедливо, коли ми хочемо роботу перетворити на теплоту – тіло можна нагрівати тертям, а загальна кількість тепла, що виділилося при цьому, завжди буде рівною виконаній роботі.

Проте повністю перетворити теплоту на роботу не можна. Щоб зробити таке перетворення, частину тепла потрібно передати тілу, що має нижчу температуру. Якби такого обмеження не було, можна було б побудувати машину, яка шляхом охолодження оточуючих її тіл перетворювала б на роботу всю узятую у них теплоту. Таку машину називають вічним двигуном другого роду, оскільки запаси теплової енергії, що містяться в землі, атмосфері і світовому океані, практично необмежені, і ця машина могла б працювати дуже тривалий час. Другий початок термодинаміки виключає можливість побудови *perpetuum mobile* другого роду.

Пристрій, що перетворює теплоту в механічну роботу, називається тепловою машиною. У цьому розділі ми розкриємо зміст другого початку і з'ясуємо умови, при яких теплова машина виконуватиме найбільшу роботу, яку вона зможе виробити в результаті спалювання палива. Спочатку нам буде необхідно ввести

ряд понять, що стосуються характеру процесів, які протікають у термодинамічних системах.

§ 11.1. Оборотні, необоротні і кругові процеси

Термодинамічна система знаходиться у стані термодинамічної рівноваги, якщо температура і тиск мають сталі значення у будь-якому місці зайнятого нею об'єму. За незмінних зовнішніх умов значення всіх її термодинамічних параметрів залишаються незмінними як завгодно довго. Такий стан називається *рівноважним*.

При зміні зовнішніх умов термодинамічна система переходить у новий стан, що характеризується іншими значеннями термодинамічних параметрів. Якщо цей процес протікає настільки повільно, що в кожен момент часу система знаходиться в стані термодинамічної рівноваги, то він називається *рівноважним* або *квазістатичним*.

Процес називається оборотним, якщо він може протікати у зворотному напрямку, при цьому так, що система проходить ті ж проміжні стани, що і при прямому процесі, але у зворотній послідовності.

Прикладами оборотних процесів в ідеальному газі служать ізотермічний і адіабатний процеси, діаграми яких зображені на рис. 11.1.

Нехай газ, що знаходиться у циліндрі з поршнем (див. рис. 9.4), переходить із стану 1 (тиск газу p_1 , об'єм V_1) у стан з великим об'ємом. При розширенні газ виконує роботу. Якщо циліндр теплоізолюваний, внутрішня

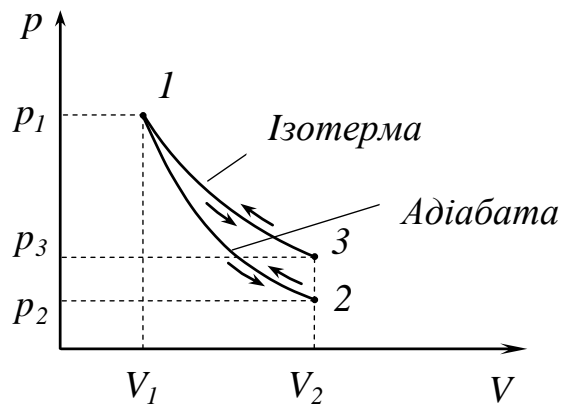


Рис. 11.1

енергія газу при цьому зменшується, а температура – падає. Газ переходить у новий стан 2 (тиск p_2 , об'єм V_2) по адіабаті, рівняння якої – $pV^\gamma = p_1V_1^\gamma = \text{const}$.

Якщо циліндр з газом знаходиться у контакті з тепловим резервуаром (наприклад, з навколишнім повітрям), то температура газу завдяки притоку тепла ззовні підтримуватиметься сталою, а його внутрішня енергія не зміниться. Розширення газу відбувається по ізотермі ($pV = p_1V_1 = \text{const}$), а тиск газу p_3 в стані 3, куди він тепер переходить, більше тиску p_2 , досягнутого при адіабатному розширенні.

Процес теплопровідності, що забезпечує сталість температури газу при його розширенні, достатньо повільний, тому і швидкість поршня повинна бути невеликою. При зворотному повільному ході поршня газ повертається із стану 2 або із стану 3 в стан 1 тими ж шляхами на Vp -діаграмі – по адіабаті або ізотермі, символізуючи оборотність цих процесів. Очевидно, що будь-який квазістатичний процес обернений.

Найчастіше, проте, ми маємо справу з процесами необоротними, які самі по собі протікають тільки в одному напрямку. Якщо, наприклад, привести в контакт два тіла з різними температурами, то більш нагріте тіло віддаватиме тепло менш нагрітому тілу до тих пір, поки їх температури не зрівняються. Зворотний процес – перехід тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого – ніколи не відбувається.

Необоротним є процес розширення газу в пустоту. Якщо в посудині (рис. 11.2), ліва частина якої заповнена газом, а права – порожня, прибрати перегородку, то газ займе весь об'єм посудини, і тиск усюди стане однаковим.

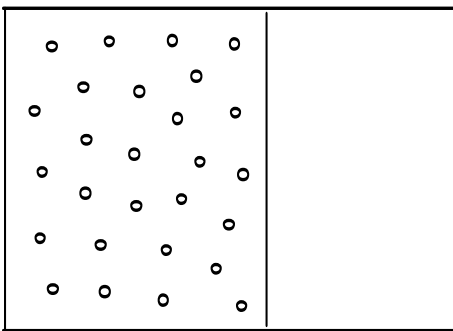


Рис. 11.2

Взагалі будь-яка представлена самій собі система

тіл має тенденцію переходу до стану термодинамічної рівноваги, а супроводжуючі такий перехід процеси необоротні. Процес вирівнювання концентрацій, дифузія, тертя, пластична деформація, передача тепла через випромінювання – приклади необоротних процесів.

Розглянемо ще один вид теплових процесів, що мають важливе значення для питання про перетворення теплової енергії у механічну роботу. Це *циклічні процеси*, або *цикли*.

Циклічним називається процес, при якому термодинамічна система проходить ряд різних проміжних станів і повертається до свого початкового стану.

На P -діаграмі циклічний процес зображається замкнутою кривою (рис. 11.3). Роботу, що виконується системою за один цикл, геометрично можна подати площею, що охоплюється цією кривою. Робота, що виконується під час переходу системи зі стану 1 у стан 2 по “верхньому” шляху, позитивна і чисельно рівна площі фігури $1a2V_2V_11$. Робота, що виконується при зворотному переході зі стану 2 у стан 1 по “нижньому” шляху, негативна. Чисельно вона рівна площі фігури $2V_2V_11b2$. Виконана за цикл робота дорівнює різниці площ цих фігур, тобто площі, обмеженій кривою, що зображає цикл. Ця робота позитивна, якщо цикл протікає по напрямку ходу годинникової стрілки, і негативна, якщо він проходить у зворотному напрямку.

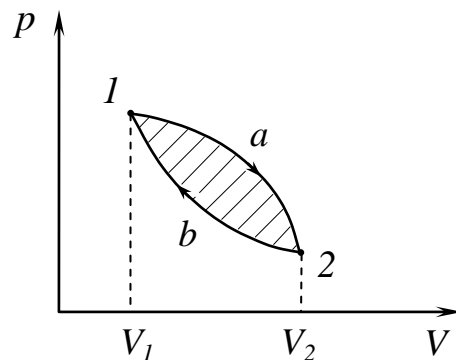


Рис. 11.3

§ 11.2. Принцип роботи теплової машини

Тепловою машиною називається пристрій, який перетворює теплову енергію у механічну роботу. З'ясуємо умови, при яких можливе таке перетворення. У системі тіл, що знаходяться в тепловій рівновазі, без зовнішнього втручання ніяких процесів відбуватися не може. Не можна виконати і роботу, оскільки вона пов'язана зі спрямованим рухом макроскопічних тіл, а тепловий рух молекул хаотичний і не має ніякого переважного напрямку в просторі. Для отримання механічної роботи, очевидно, треба мати два тіла з різними температурами і вдатися до допомоги третього тіла, яке і буде цю роботу виконувати. Наприклад, можна взяти ідеальний газ, розміщений у циліндрі з рухомим поршнем (див. рис. 9.4), стінки якого мають хорошу теплопровідність.

Нехай спочатку газ у циліндрі має температуру навколишнього повітря, а тиск газу дорівнює атмосферному. Якщо циліндр привести у контакт з тілом, нагрітим до більш високої температури, то газ усередині циліндра розшириться, поглинувши у цього тіла деяку кількість теплоти і виконавши механічну роботу. Щоб повернути поршень у початкове положення і підготувати систему до повторного виконання роботи, потрібно охолодити газ, привівши циліндр у контакт з холоднішим тілом, наприклад, з тим же навколишнім повітрям. При зворотному ході поршня, що супроводжує охолодження газу, виконується робота зворотного знака. Оскільки робота розширення перевищує роботу стиснення, так як температура нагрітого тіла вища за температуру холодного (див. рівняння (9.20)), такий пристрій здатний перетворювати теплоту в механічну роботу.

§ 11.3. Цикл Карно

Зі сказаного у попередньому параграфі випливає, що будь яка теплова машина повинна мати три складові частини (рис. 11.4):

- 1) нагрівач – “гаряче” тіло з температурою T_1 ;

2) робоче тіло, за яке можна взяти ідеальний газ у циліндрі з поршнем;

3) охолоджувач – тіло, що має температуру T_2 , нижчу, ніж у нагрівача.

Це машина періодичної дії. За один період (цикл) газ у циліндрі спочатку розшириться, виконавши деяку роботу A і одержавши при цьому від нагрівача кількість теплоти Q_1 , потім знову стиснеться, віддавши частину тепла Q_2 охолоджувачу. Якщо обидві величини Q_1 і Q_2 вважати позитивними, то, згідно із законом збереження енергії:

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (11.1)$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД) теплової машини дорівнює відношенню роботи A , виконуваної нею за один цикл, до кількості теплоти Q_1 , одержуваної робочим тілом за один цикл від нагрівача:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (11.2)$$

При цьому не має значення, який процес відбувається з робочим тілом – оборотний або необоротний.

З'ясуємо, за яких умов ККД теплової машини буде максимальним. Машину, що має при даних зовнішніх умовах найбільше значення коефіцієнта корисної дії, називають ідеальною. Аналіз показує, що для цього потрібно:

1) позбавитися тертя між циліндром і поршнем;

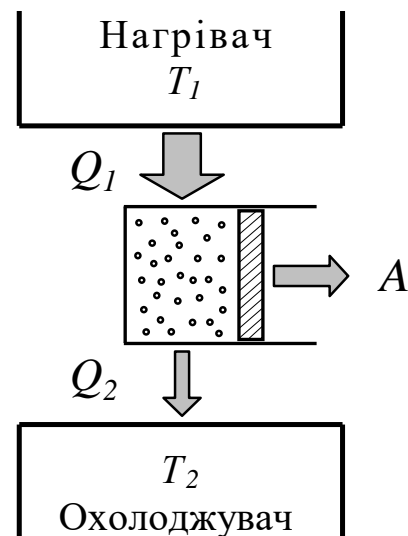


Рис. 11.4

2) усунути процеси безпосередньої передачі тепла від нагрівача охолоджувачу і при роботі машини використовувати тільки оборотні процеси.

Такими процесами є ізотермічний і адіабатний. Цикл Карно – здійснюваний робочим тілом (ідеальним газом) круговий процес, що включає дві ізотерми і дві адіабати.

За початковий візьмемо стан, позначений на Vp -діаграмі точкою a (рис. 11.5), коли робоче тіло знаходиться під тиском p_a і займає об'єм V_a , а його температура рівна температурі нагрівача T_1 .

Не порушуючи контакту робочого тіла з нагрівачем, розширимо його ізотермічно до об'єму V_b . Рівняння цього процесу, згідно (9.2):

$$p_a V_a = p_b V_b, \quad (11.3)$$

а кількість теплоти, отримана робочим тілом у нагрівача, згідно з (9.19):

$$Q_1 = NkT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}. \quad (11.4)$$

Теплоізолюємо робоче тіло і розширимо адіабатно так, щоб його температура знизилася до температури охолоджувача T_2 .

Рівняння цього процесу (див. рівняння (9.26)):

$$p_b V_b^\gamma = p_c V_c^\gamma. \quad (11.5)$$

Приведемо тепер робоче тіло у тепловий контакт з охолоджувачем і стиснемо ізотермічно до об'єму V_d , такого, щоб точка d на Vp -діаграмі належала адіабаті, що проходить через точку a . Рівняння цього процесу

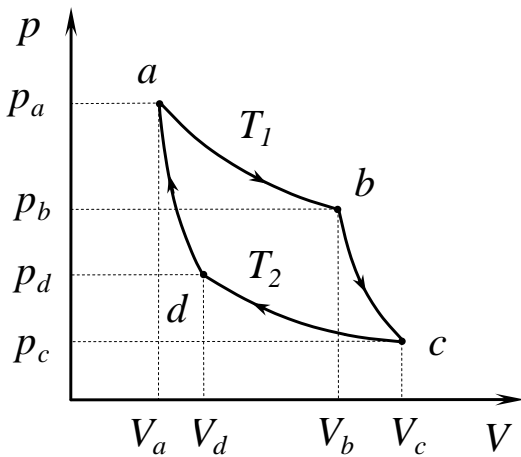


Рис. 11.5

$$p_c V_c = p_d V_d. \quad (11.6)$$

Кількість теплоти, віддана робочим тілом охолоджувачу при ізотермічному стисненні, негативна і по модулю складає

$$Q_2 = N k T_2 \ln \frac{V_c}{V_d}. \quad (11.7)$$

Повернемо тепер робоче тіло у початковий стан (у точку a на Vp -діаграмі) шляхом адіабатного стиснення, описуваного рівнянням

$$p_d V_d^\gamma = p_a V_a^\gamma. \quad (11.8)$$

Температура робочого тіла у цьому процесі підвищиться до температури нагрівача T_1 . За повний цикл воно виконує роботу, рівну різниці одержаної у нагрівача теплоти Q_1 і теплоти Q_2 , відданої охолоджувачу: $A = Q_1 - Q_2$. ККД циклу знайдемо, підставивши у формулу (11.2) вирази (11.1), (11.4) і (11.7):

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\ln(V_c/V_d)}{\ln(V_b/V_a)}. \quad (11.9)$$

Покажемо, що відношення логарифмів рівне одиниці. Для цього перемножимо рівняння (11.3), (11.5), (11.6) і (11.8):

$$p_a p_b p_c p_d V_a V_b^\gamma V_c V_d^\gamma = p_b p_c p_d p_a V_b V_c^\gamma V_d V_a^\gamma,$$

звідки випливає, що

$$\left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1}.$$

Логарифмуючи і скорочуючи $(\gamma - 1)$, одержимо

$$\ln \frac{V_b}{V_a} = \ln \frac{V_c}{V_d}.$$

Тоді вираз (11.9) набуде вигляду

$$\eta_{i\ddot{a}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (11.10)$$

З цієї формули випливає, що ККД ідеальної теплової машини менший одиниці, тобто вона не може повністю перетворити теплову енергію у механічну роботу – частина тепла повинна бути віддана охолоджувачу. Теоретичний коефіцієнт корисної дії теплової машини, що виражається формулою (11.10), не залежить від особливостей її будови, способу дії і природи газу, що використовується як робоче тіло. Істотне лише виключення всіх необоротних процесів, і тоді вирішальними є температура нагрівача T_1 , при якій робоче тіло відбирає у нього кількість теплоти Q_1 , і температура охолоджувача T_2 , при якій йому передається кількість теплоти Q_2 .

Теоретичний цикл, побудований Карно, показує, що для збільшення ККД теплової машини потрібно знижувати температуру охолоджувача і підвищувати температуру нагрівача. Оскільки охолоджувачем в реальних умовах звичайно є навколишнє повітря, перший шлях неможливий. Другий шлях пов'язаний з труднощами створення матеріалів для виготовлення деталей двигунів, здатних працювати при високих температурах.

Окрім двигунів внутрішнього згорання, які використовуються на автотранспорті, тепловозах, дизель-електроходах (кораблях), до теплових належать також

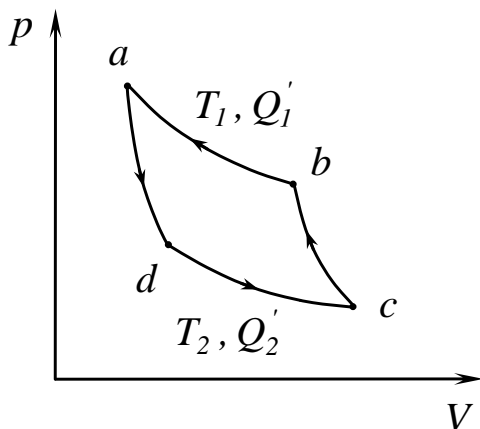


Рис. 11.6

турбореактивні двигуни літаків і ракетні двигуни.

Цикл Карно може відбуватися і у зворотному напрямку (рис. 11.6). Машина у цьому випадку працює як тепловий насос, що перекачує тепло від холодного тіла до гарячого. Робоче тіло (ідеальний газ) переводиться з точки a на Vp -діаграмі, зображеній на рис. 11.6, в точку d шляхом адіабатного розширення, потім розширяється ізотермічно, відбираючи тепло у “холодного” тіла, потім адіабатно стискається, переходячи в точку b , і, нарешті, стискається ізотермічно, віддаючи тепло “гарячому” тілу. Так працюють побутові холодильники і кондиціонери.

Відношення кількості теплоти Q_2' , відібраної у холодного тіла, до виконаної при цьому механічної роботи A називається коефіцієнтом перетворення холодильника:

$$\frac{Q_2'}{A} = \frac{Q_2'}{Q_1' - Q_2'} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} . \quad (11.11)$$

Це відношення звичайно більше одиниці. У домашньому холодильнику температура T_2 холодного резервуара (морозильної камери) приблизно складає 250 K . Гарячим резервуаром служить кімнатне повітря, температура якого $T_1 \approx 300 \text{ K}$. Формула (11.11) дає таке значення коефіцієнта перетворення холодильника:

$$\frac{Q_2'}{A} = \frac{250}{300 - 250} = 5 .$$

На кожен джоуль електроенергії, витраченої на роботу компресора, припадає 5 Дж тепла, відібраного у холодильної камери.

Тепловий насос можна використовувати і для обігрівання приміщення в зимову пору року, передаючи всередину приміщення тепло, відібране у холоднішого навколишнього повітря. Такий спосіб опалювання виявляється набагато ефективнішим, ніж просте

спалювання палива. Відношення кількості теплоти Q_1' , переданої “гарячому” тілу, до витраченої на це механічної роботи A називається коефіцієнтом передачі тепла:

$$\frac{Q_1'}{A} = \frac{Q_1'}{Q_1' - Q_2'} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (11.12)$$

Якщо температура повітря на вулиці $T_2 = 250$ К, а в кімнаті $T_1 = 300$ К, то цей коефіцієнт рівний 6. Витрачаючи 1 Дж електричної енергії, необхідної для приведення в дію компресора насоса, ми можемо одержати всередині приміщення 6 Дж теплової енергії, з яких 5 Дж відбирається у холодного зовнішнього повітря і 1 Дж – результат перетворення в тепло механічної роботи.

§ 11.4. Ентропія

Розглядаючи цикл Карно, ми бачили, що при переході з початкового стану – точки a на Vp -діаграмі – в стан, позначений точкою c (див. рис. 11.5), робоче тіло (ідеальний газ) одержує кількість теплоти Q_1 . Якщо перевести робоче тіло з точки a у точку c по “нижньому” шляху (через точку d), робоче тіло одержить кількість теплоти Q_2 . Таким чином, під час переходу робочого тіла з даного стану в який-небудь інший, кількість теплоти, що супроводжує цей перехід, визначається не тільки положенням початкової і кінцевої точок шляху на Vp -діаграмі, але і формою кривої, що зображає процес, тобто кількість теплоти Q не є функцією стану термодинамічної системи.

Коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини, що працює по циклу Карно: $\eta_{i\ddot{a}} = 1 - T_2/T_1$. З іншого боку, ККД теплової машини можна подати у вигляді $\eta_{i\ddot{a}} = 1 - Q_2/Q_1$ (Q_1 і Q_2 беруться тут по модулю). Прирівнюючи праві частини цієї рівності, одержимо

$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$, звідки випливає, що

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (11.13)$$

Відношення Q/T називається *приведеною теплотою*. Рівняння (11.13) показує, що *приведена теплота оборотного переходу термодинамічної системи з одного стану в інший визначається тільки її початковим і кінцевим станами і не залежить від форми шляху на Vp -діаграмі, по якому відбувається цей перехід*. Тому можна ввести нову функцію стану системи – *ентропію* S , повний диференціал якої дорівнює приведеній теплоті:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (11.14)$$

Приріст ентропії термодинамічної системи при нескінченно малій зміні її стану дорівнює відношенню квазістатично поглиненої нею теплоти до абсолютної температури.

Приріст ентропії під час переходу системи з рівноважного стану A у рівноважний стан B виражається інтегралом, обчисленим для якого-небудь оборотного процесу, що здійснює вказаний перехід:

$$\Delta S \stackrel{def}{=} S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad (\text{для оборотного процесу}). \quad (11.15)$$

Різниця ентропій у двох рівноважних станах B і A рівна приведеній кількості теплоти, яку треба надати системі, щоб перевести її зі стану A у стан B по будь-якому оборотному шляху.

Ентропія деякого стану системи A визначається з точністю до довільної сталої:

$$S_A = \int_0^A \frac{\delta Q}{T} + S_0 \quad (\text{для оборотного процесу}), \quad (11.16)$$

де інтеграл береться по шляху її оборотного переходу з деякого стандартного стану O у стан A ; S_0 – ентропія стандартного стану.

Рівняння (11.15) і (11.16) служать визначенням ентропії. Ентропію у термодинаміці можна уподібнити потенціальній енергії у механіці – однозначно визначається не сама ентропія, а лише різниця ентропій. Ентропію термодинамічної системи у стандартному стані можна прийняти за нуль. Як стандартний можна узяти стан системи при абсолютному нулі температур ($T = 0$). Німецьким фізиком В. Нернстом в 1906 році було показано, що при $T \rightarrow 0$ ентропія прямує до нуля, тобто $S_0 = 0$ (теорема Нернста, яка ще називається *третім початком термодинаміки*).

§ 11.5. Властивості ентропії

При оборотних (квазістатичних) процесах, що протікають у замкнутих системах, ентропія, подібно енергії у механіці, зберігається ($S = \text{const}$). Щоб це показати, розглянемо ізотермічний процес розширення газу, що знаходиться у циліндрі з рухомим поршнем (див. рис. 9.4). При збільшенні об'єму газ одержує від термостата деяку кількість теплоти Q , а його ентропія при $T = \text{const}$, згідно (11.15), зростає на величину

$$\Delta S_{\text{ізот}} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} > 0.$$

Припускаючи теплоємність термостата настільки великою, що його температура при передачі газу кількості теплоти Q не змінюється, знайдемо зменшення його ентропії:

$$\Delta S_{\delta \dot{a} \dot{i}} = -\frac{Q}{T} < 0.$$

Зміна ентропії замкнутої системи “газ – термостат” рівна нулю. Процес можна спрямувати у зворотний бік, стискаючи газ при сталій температурі. Тоді ентропія газу зменшиться, а ентропія термостата зросте на ту ж величину, так що ентропія системи залишиться колишньою.

Найважливішою особливістю ентропії є її поведінка при необоротних процесах. У замкнутих системах ентропія завжди зростає, якщо там ідуть необоротні процеси наближення до стану термодинамічної рівноваги. Властивість ентропії зростати, на відміну від енергії, яка завжди зберігається, вказує напрямок протікання теплових процесів. Покажемо це на прикладах.

Приклад 1. Знайти зміну ентропії замкнутої системи двох тіл з різними температурами при їх тепловому контакті (рис. 11.7).

Розв’язання. Нехай тіла мають температури T_1 і T_2 ($T_1 > T_2$). При передачі нескінченно малої кількості тепла δQ від першого тіла другому зміна ентропії першого тіла $dS_1 = -\delta Q/T_1 < 0$ (dS_1 негативна, оскільки тіло віддає тепло). Зміна ентропії другого тіла $dS_2 = \delta Q/T_2 > 0$.

Ентропія системи тіл змінюється на величину

$$dS = dS_1 + dS_2 = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \delta Q > 0. \quad (11.17)$$

Таким чином, процес передачі тепла від гарячого тіла холодному, що приводить до вирівнювання їх температур, супроводжується

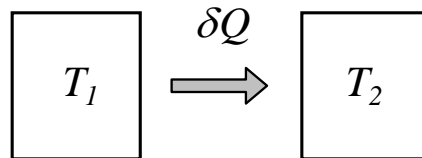


Рис. 11.7

збільшенням ентропії замкнутої системи тіл.

Приклад 2. Знайти зміну ентропії ΔS ідеального газу при його розширенні в пустоту.

Розв'язання. Розглянемо посудину, розділену перегородкою на дві частини, об'єми яких V_1 і V_2 (рис. 11.8,а). Ліва частина посудини заповнена газом, права – порожня. Якщо прибрати перегородку (рис. 11.8,б), газ пошириться по всьому об'єму посудини, а температура його не зміниться, оскільки молекули газу, що рухаються у напрямку перегородки, за відсутності такої продовжуватимуть рух з колишніми швидкостями до тих пір, поки не досягнуть правої стінки судини. Розширення газу в пустоту – процес ізотермічний.

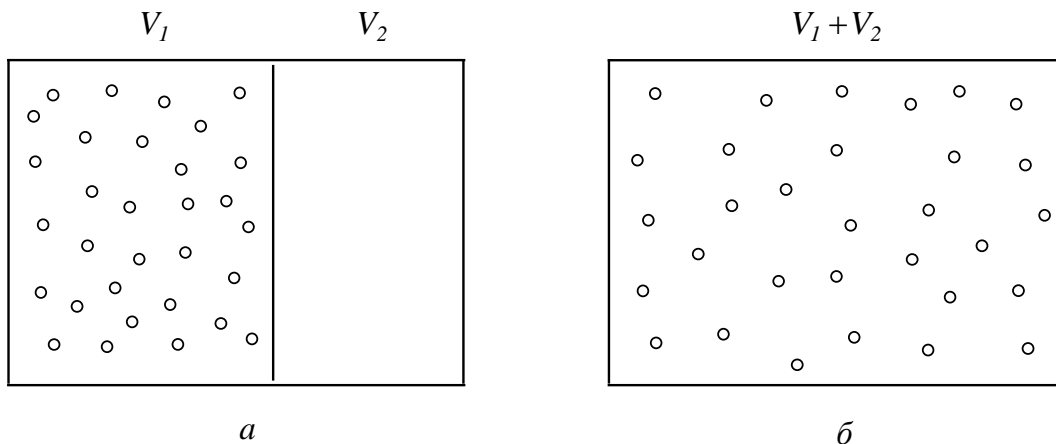


Рис. 11.8

Щоб знайти зміну ентропії, потрібно, згідно з визначенням (11.15), обчислити приведену теплоту ізотермічного переходу газу з першого стану, коли він займає об'єм V_1 , у другий стан, коли об'єм його стає рівним $V_1 + V_2$. Ізотермічне розширення – оборотний процес.

Згідно з першим початком термодинаміки, кількість теплоти, одержана газом у термостата, дорівнює у цьому випадку роботі

розширення газу $Q = A$, обчисленої в розд. 9 (див. рівняння (9.6), (9.15) і (9.19)). Тоді

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} = \nu R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} > 0, \quad (11.18)$$

тобто ентропія газу зростає ($\nu = m/M$ – число молів газу).

У будь-якому процесі, що переводить замкнуту систему з одного стану в інший, ентропія кінцевого стану не може бути менша ентропії початкового стану:

$$S_B \geq S_A, \quad (11.19)$$

де індекси A і B нумерують відповідно початковий і кінцевий стани.

Умова (11.19) може бути застосована тільки до замкнутих термодинамічних систем, тобто до систем, що не обмінюються теплотою з зовнішніми тілами. Якщо процес оборотний, то в (11.19) стоїть знак рівності – ентропія системи не змінюється. Ентропія будь-якого тіла, що входить до складу замкнутої системи, може зменшитися (у прикладі 1 зменшується ентропія “гарячого” тіла), проте ентропія системи тіл, взятих сумісно, зменшуватися не може.

Коли замкнута система знаходиться у стані з максимальною ентропією, в ній не може відбуватися ніяких процесів, тому що будь-який процес привів би до зменшення ентропії. Тому *стан замкнутої системи з максимальною ентропією є найстійкішим її станом.*

§ 11.6. Ентропія і ймовірність

При виведенні рівняння (11.18) ми використовували термодинамічне визначення ентропії. Цей же результат можна одержати на підставі молекулярної картини, що зробить поняття ентропії наочнішим.

Розглянемо посудину об'ємом V і подумки розділимо його на дві частини, об'єми яких V_1 і V_2 (див. рис. 11.8). Припустимо, що об'єм V_2 складає n -ну частину всього об'єму посудини: $V_2 = V/n$ ($V = V_1 + V_2$), тобто

$$n = \frac{V}{V_2} = \frac{V_1 + V_2}{V_2}.$$

Нехай в посудині знаходиться всього одна молекула. Ця молекула достовірно, тобто з імовірністю $w_1 = 1$, знаходиться в об'ємі V і лише з імовірністю $w_2 = 1/n$ її можна знайти в об'ємі V_2 . З n спостережень у середньому лише в одному з них молекулу можна знайти в об'ємі V_2 .

Для двох молекул імовірності знайти одночасно обидві молекули в об'ємі V або V_2 складають відповідно:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2;$$

для трьох молекул:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \left(\frac{1}{n}\right)^3;$$

для N молекул:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \left(\frac{1}{n}\right)^N.$$

Відношення $W = w_1/w_2$ показує, у скільки разів імовірніше знайти одночасно ці N молекул в об'ємі V , ніж у об'ємі V_2 . Ми одержуємо

$$W = n^N, \quad (11.20)$$

або

$$\ln W = N \cdot \ln n = N \cdot \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} = \nu N_A \cdot \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2},$$

де $\nu = N / N_A$ – число молів газу (N_A – стала Авогадро).

Помножимо цю рівність на сталу Больцмана k і врахуємо, що добуток $N_A k = R$ (R – універсальна газова стала). Порівнюючи з рівнянням (11.18), бачимо, що

$$\Delta S = k \ln W. \quad (11.21)$$

Таким чином, зростання ентропії при необоротному розширенні газу, розглянуте в прикладі 2, означає перехід до стану, що має велику імовірність. Скупчення всіх молекул газу в об'ємі V_2 не неможливо, але лише у край малоймовірно. Це тим більше справедливо, чим більше молекул знаходиться в посудині.

Якщо посудину подумки розділити на дві рівні частини ($V_1 = V_2$), то $n = 2$. Помістивши в посудину дві молекули ($N = 2$), одержимо, згідно з (11.20), $W = 4$. Якщо молекул чотири ($N = 4$), то $W = 16$, а якщо їх хоча б десять ($N = 10$), $W = 1024$, тобто стан, коли ці молекули зберуться в одній половині посудини, в 1024 рази менш імовірний стану, коли вони розподілені по всьому об'єму посудини.

Зв'язок ентропії з імовірністю, виражений рівнянням (11.21), встановлений Людвігом Больцманом у 1872 році.

§ 11.7. Другий початок термодинаміки

Перший початок термодинаміки стверджує, що сума всіх енергій, які беруть участь у процесі зміни стану системи, залишається сталою. Так, механічна енергія може бути повністю перетворена в теплову. Зворотний шлях – перетворення теплоти в механічну роботу – обмежує другий початок термодинаміки.

Рівняння (11.10) є кількісним виразом другого початку термодинаміки, основний зміст якого сформулював Саді Карно у 1824 році. Сучасне тлумачення рівняння належить Рудольфу Клаузіусу.

Наведемо чотири формулювання другого початку термодинаміки, що є еквівалентними одне одному:

1. Вічний двигун другого роду нездійснений.
2. Якщо два тіла з різними температурами привести в тепловий контакт, то тепло переходитиме від гарячішого тіла до холоднішого.
3. Ніяка теплова машина періодичної дії не може мати ККД, що перевищує $(T_1 - T_2)/T_1$, де T_1 – верхня, T_2 – нижня температура циклу.
4. Ентропія замкнутої системи не може зменшуватись – вона залишається сталою, якщо в системі відбуваються оборотні процеси, і зростає, якщо ці процеси необоротні.

Кожне з цих формулювань логічно пов'язане з іншими. Можливість здійснення вічного двигуна другого роду не суперечить закону збереження енергії. Він міг би перетворювати теплову енергію в механічну роботу. При цьому відбувалося б поступове охолодження джерела теплової енергії, наприклад світового океану, що містить практично необмежену кількість тепла. Проте другий закон термодинаміки стверджує, що неможливе пряме перетворення хаотичного теплового руху молекул у впорядкований рух деталей машини.

Якби порушувалося друге формулювання, тепло могло б переходити від холодного резервуара до гарячого. Використовуючи це тепло у тепловій машині, ми могли б зробити вічний двигун, про який йдеться в першому формулюванні.

Якби вдалося створити теплову машину періодичної дії з вищим ККД, ніж у машини Карно, її можна було з'єднати механічним приводом з машиною Карно і примусити останню працювати в режимі холодильника з тими ж двома тепловими резервуарами. Результатом сумісної дії цих машин була б передача тепла від холодного резервуара до гарячого, що суперечить другому формулюванню.

Вище, в прикладі 1, було показано, що ентропія замкненої системи двох тіл з різними температурами зростає, коли тепло передається від гарячого тіла холодному. Тому четверте формулювання другого початку термодинаміки є наслідком трьох попередніх.

Питання для самоперевірки

1. Що називається вічним двигуном? Яке значення вкладається в поняття вічного двигуна другого роду?
2. Дайте визначення рівноважного стану термодинамічної системи. Який процес називається рівноважним?
3. Дайте визначення оборотного процесу. Наведіть приклади оборотних процесів і обґрунтуйте свою відповідь.
4. Які процеси є необоротними?
5. Який процес називається циклічним? Використовуючи графік, знайдіть роботу, виконувану газом при циклічному процесі?
6. Що називається тепловою машиною? Сформулюйте умови, при яких можливе перетворення теплової енергії в механічну роботу.
7. З яких частин складається теплова машина циклічної дії?
8. Чому дорівнює коефіцієнт корисної дії теплової машини? Що називається ідеальною тепловою машиною?

9. Розгляньте теоретичний цикл Карно й отримайте формулу для коефіцієнта корисної дії ідеальної теплової машини.
10. Опишіть принцип роботи теплового насоса. Які види теплових насосів вам відомі?
11. Що називається приведеною теплотою оборотного процесу, що протікає в термодинамічній системі?
12. Дайте визначення функції стану термодинамічної системи – ентропії.
13. Перерахуйте властивості ентропії і сформулюйте другий початок термодинаміки.

РОЗДІЛ 12

РЕАЛЬНІ ГАЗИ, РІДИНИ І ТВЕРДІ ТІЛА

Розглянуті у попередніх розділах закони ідеальних газів ґрунтуються на рівнянні газового стану, отриманому з використанням моделі газу у вигляді твердих кульок, що взаємодіють одна з одною лише при їх зіткненні. Не дивлячись на добре узгодження теорії з експериментом, що спостерігається для багатьох газів за звичайних умов, така модель не може описати *фазові переходи* – процеси плавлення твердих тіл і випаровування рідин. Саме існування тих та інших зумовлено силами притягіння між молекулами речовини, що проявляються на далеких відстанях, і силами відштовхування – на близьких. Удосконалення моделі взаємодії молекул, що враховує ці сили, дозволяє отримати рівняння стану так званого *реального газу*, набагато багатше за своїм фізичним змістом. Воно, зокрема, передбачає існування *метастабільних станів* речовини – перегрітої рідини і переохолодженої пари, а також наявність у кожній речовині *критичної точки* – температури, при якій зникає межа між рідиною і її насиченою парою.

Обговоренню цих питань присвячений даний розділ. Дано опис рідкого стану речовини і такої властивості рідин, як поверхневе натягіння. Розглянуті також будова твердих тіл і їх теплові властивості, що впливають із закону рівнорозподілення енергії за степенями вільності молекул.

§ 12.1. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Рівняння стану ідеального газу, отримане в розд. 9, для одного моля газу ($m = M$) називається *рівнянням Клапейрона* і має вид

$$pV = RT, \quad (12.1)$$

де p – тиск; V – об'єм посудини, у якій знаходиться газ; R – універсальна газова стала; T – абсолютна температура.

Ми назвали газ ідеальним, вважаючи, що його молекули не взаємодіють на відстані і їх сумарний об'єм дуже малий у порівнянні з об'ємом, що займає цей газ в посудині. Більшість газів за звичайних умов – атмосферному тиску і кімнатній температурі – підпорядковуються рівнянню Клапейрона. Проте, як показує дослід, при збільшенні густини газу добуток тиску на об'єм при одній і тій же температурі вже не залишається сталим. Рівняння, що описує поведінку такого газу, який називають *реальним*, отримане голландським фізиком Ван-дер-Ваальсом у 1881 році шляхом введення поправок у рівняння Клапейрона.

Перша поправка, яку він вніс до рівняння (12.1), враховує кінцевий об'єм молекул. Об'єм V зайнятої газом посудини він замінив на $V - b$, ввівши константу b , яка виявилася приблизно рівною збільшеному вчетверо об'єму всіх його N молекул. Дійсно, молекули – кульки радіусом r – не можуть зближуватися на відстань, меншу $2r$ (рис. 12.1), отже, для центрів двох молекул недоступний сферичний об'єм радіусом $2r$, що у вісім разів перевищує об'єм однієї молекули. З розрахунку на одну молекулу він саме і складає збільшений учетверо її об'єм.

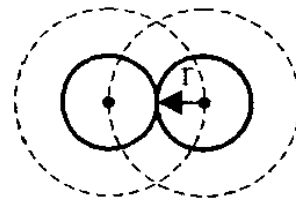


Рис. 12.1

Рівняння стану газу, що складається з пружних кульок, можна тепер записати у вигляді

$$p(V - b) = RT. \quad (12.2)$$

Друга поправка до рівняння (12.1) враховує сили тяжіння між молекулами, що діють на великих відстанях. Ці сили зводяться до деякого додаткового тиску на газ, оскільки діють у тому ж напрямку, що й, наприклад, поршень, стримуючий газ у циліндрі

від розширення в порожнечу. Можна показати, що цей тиск обернено пропорційний до квадрата об'єму, який займає газ.

Уявимо собі яку-небудь площину, подумки проведену в газі. Молекули, що знаходяться по обидві боки площини, притягуються одна до одної, причому кожна молекула, знаходячись з однієї сторони від цієї площини, притягується із силою, пропорційною об'ємній густині числа молекул $n = N/V$, що знаходяться з іншою її сторони. Але тиск на цю уявну площину викликаний не однією, а всіма молекулами, які знаходяться по одну сторону від площини. Цей тиск теж пропорційний числу молекул в одиниці об'єму, і тому додатковий тиск пропорційний квадрату густини числа молекул n , отже, обернено пропорційний до квадрата об'єму, що займає газ. Таким чином, внутрішній тиск газу $p_{\text{вн}}$ можна виразити як деяку константу a , поділену на V^2 :

$$p_{\text{вн}} = \frac{a}{V^2}.$$

Тоді рівняння стану запишемо у вигляді

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (\text{на } 1 \text{ моль}). \quad (12.3)$$

Це рівняння називається *рівнянням Ван-дер-Ваальса*. При належному підборі сталих a і b воно виявляється справедливим з дуже великим ступенем точності для газів при збільшенні їх густини у 100 – 500 разів.

§ 12.2. Ізотерми реального газу. Критичний стан речовини

Ізотерми реального газу графічно зображають у вигляді залежності його тиску від його молярного об'єму. Криві цієї залежності при трьох температурах, побудовані згідно з рівнянням Ван-дер-Ваальса (12.3), наведені на рис. 12.2. При температурах, що перевищують так звану критичну, про яку мова піде нижче,

форма кривої (крива 1) нагадує ізотерму ідеального газу, яка показує, що зі збільшенням об'єму тиск газу зменшується монотонно.

Крива 3 має локальні максимум і мінімум і відповідає температурі нижче критичної. Згідно з теорією, в деякому інтервалі тиску повинні реалізуватися стани з молярними об'ємами речовини V_1 , V_2 і V_c .

При підвищенні температури їх значення зближаються, а при деякій

температурі T_c – збігаються один з одним. Точка, у якій $V_1 = V_2 = V_c$ (точка K на рис. 12.2), є точкою перегину ізотерми (крива 2), яка проходить через неї. Стан речовини у цій точці називається *критичним*. Цей стан можна реалізувати на досліді.

Для спостереження критичного стану речовини зручніше всього використовувати вуглекислий газ (вуглекислоту), оскільки його критична температура невелика і складає приблизно 31°C (наприклад, для води вона становить 374°C , а для двохатомних газів – набагато менше за 0°C). Критичний тиск вуглекислого газу $p_c = 7,35 \cdot 10^6$ Па. Газом наповнюють циліндр A з рухомим поршнем B , який зображено на рис. 12.3.

Ізотерми вуглекислоти, отримані дослідним шляхом, подані на рис. 12.4. Ізотерма 1 відповідає температурі, меншій за критичну ($T < T_c$). При великих значеннях об'єму газу ($V > V_2$) – гілка ізотерми ON – властивості вуглекислоти аналогічні властивостям ідеального газу. Зменшуючи об'єм до величини V_2 ми досягаємо деякого значення тиску p_0 (точка N ізотерми), при якому

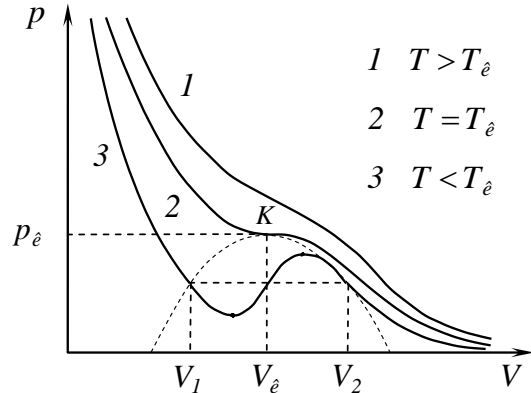


Рис. 12.2

поведінка газу різко змінюється: подальше зменшення об'єму приводить до часткової його конденсації (перетворення на рідину), тоді як тиск частини газу, що залишилася, зберігається незмінним. Цим газом є насичена пара рідкої вуглекислоти. Тиск p_0 , при якому відбувається зрідження, називається *пружністю насиченої пари*. Із зростанням температури пружність насиченої пари зростає.

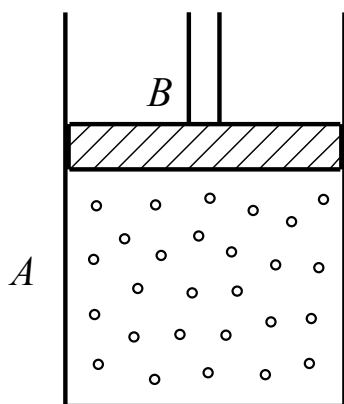


Рис. 12.3

Точка ізотерми Q , що характеризується тиском p_0 і об'ємом V_1 визначає на діаграмі перехід всієї вуглекислоти у рідкий стан. Подальше просування поршня (гілка ізотерми QR) вимагає дуже великих зусиль, оскільки рідка вуглекислота, як і будь-яка рідина, практично нестискувана.

На рис. 12.4 область діаграми між віссю абсцис і пунктирною кривою відповідає тим станам речовини, в яких у посудині одночасно присутня і рідина і її насичена пара, а температура нижче критичної. При температурах вище критичної (крива 3) речовина може знаходитись тільки в газоподібному стані наскільки великим би не її тиск. Усвідомлення цієї обставини пояснює безуспішність тривалих спроб перетворити на рідину такі гази, як водень і гелій, критичні температури яких рівні відповідно -240 і -268°C .

був

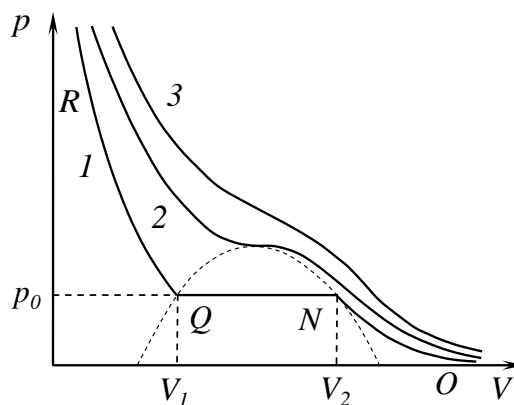


Рис. 12.4

Розглянемо детальніше відмінність між ізотермою, отриманою експериментально, і теоретичною ізотермою Ван-дер-Ваальса, поданими на рис. 12.5. На експериментальній ізотермі область горбів $MABN$ перетворилася на пряму лінію MN , оскільки стани, що відповідають ділянкам MA і BN , реалізуються на досліді тільки при виконанні певних умов. Стани ж, що відповідають ділянці AB теоретичної кривої (відмічені на рис. 12.5 пунктиром), взагалі не можуть реалізуватися на досліді.

Насичену пару (точка N) можна стиснути до тиску, що перевищує тиск насиченої пари p_0 тільки тоді, коли в посудині немає центрів конденсації – порошинок сторонньої домішки або вільних зарядів, тобто в дуже чистому середовищі (ділянка ізотерми NB). Така пара називається *пересиченою*. Прозора пересичена пара конденсується у вигляді дрібних крапельок рідини вздовж траєкторії руху заряджених частинок – іонів, протонів або електронів, сліди яких відразу стають видимими. Це явище лежить в основі будови *камери Вільсона*, що використовується у фізиці елементарних частинок.

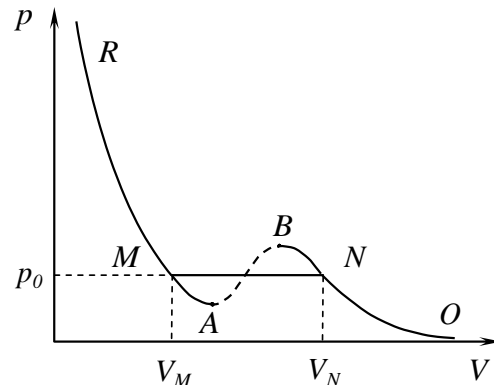


Рис. 12.5

Ділянка ізотерми MA показує стани, в яких тиск насиченої пари в циліндрі менший за p_0 , а об'єм рідини перевищує V_M – значення його у точці M , коли рідина повинна почати випаровуватися. Ці стани відповідають розтягнутій або *перегртій* рідині, яку можна отримати шляхом тривалого кип'ятіння звичайної рідини.

При кипінні рідини від стінок посудини відділяються дрібні бульбашки повітря, що містяться у порах і тріщинах стінок.

Спливаючи, бульбашки збільшуються в розмірах, оскільки при кипінні рідина інтенсивно випаровується не тільки з її поверхні, але і всередину цих бульбашок. Виділення бульбашок з часом поступово припиняється, оскільки запас повітря в порах стінок посудини вичерпується.

Перегрита рідина схожа на гримучу суміш – при появі в ній центрів газоподібної фази, якщо кинути в рідину крупинки солі або піщинки, у порах яких є повітря, рідина миттєво скипає і може навіть вихлюпнутися з посудини, в якій знаходиться.

Перегрита рідина використовується в *бульбашковій камері*, яка служить, подібно до камери Вільсона, для спостереження траєкторій заряджених частинок. Вона є герметично закритою посудиною, заповненою залежно від роду досліджуваних частинок яким-небудь зрідженим газом – воднем, дейтерієм, пропаном, фреоном, ксеноном або їх сумішами. При проходженні через таку рідину заряджених частинок уздовж їх траєкторій утворюються бульбашки газу, що роблять ці траєкторії видимими.

У критичному стані при відповідних значеннях критичних температури, об'єму і тиску зникає межа між рідиною і її насиченою парою, а вміст посудини, у якій вони знаходяться, стає непрозорим для світла, перетворюючись на однорідне каламутне середовище. Поняття про критичну температуру вперше було введено в 1861 році російським ученим Д.І. Менделєєвим, який досліджував це явище. Критичну температуру він назвав температурою абсолютного кипіння, при якій зникають сили зчеплення між молекулами рідини і вона перетворюється на пару незалежно від тиску і питомого об'єму.

§ 12.3. Рідкий стан речовини

Рідкий стан є проміжним між твердим і газоподібним та має схожість з тим і іншим. Густина рідин приблизно у 1000 разів перевищує густину газів за звичайних умов (атмосферному тиску і кімнатній температурі), а відстані між молекулами порівнянні з їх розмірами. Тому взаємодія між молекулами рідин дуже сильна.

Подібно до твердих тіл, рідини мають власний об'єм, який мало змінюється при зміні температури. Щоб рідину розтягнути або стиснути навіть на дуже малу величину, потрібно докласти величезні зусилля. Зберігаючи незмінними взаємні відстані, молекули рідин проте легко рухаються, через що, подібно до газів, рідини не мають власної форми, набуваючи форми тієї посудини, в яку їх поміщають.

У рідинах спостерігається так званий *ближній порядок* – поблизу якої-небудь з молекул інші молекули розподілені упорядкованим чином, причому так, щоб між ними не залишалось вільних місць. Тепловий рух молекул зводиться до переміщення їх у просторі на відстані, порівнянні з розмірами молекул. У рідинах це відбувається набагато повільніше, ніж у газах, про що, наприклад, свідчить мала швидкість дифузії у рідинах.

Сили, що діють на молекулу A , що знаходиться всередині об'єму, зайнятого рідиною, не мають ніякого переважного напрямку в просторі (рис.12.6). Проте, якщо вона розташована біля поверхні рідини, рівнодіюча таких сил R вже не рівна нулю, а направлена всередину об'єму рідини, завдяки чому кожна з таких молекул прагне покинути поверхневий шар і піти вглиб рідини. Поверхневий шар рідини стає подібним до розтягнутої пружної плівки. Стягуюча сила, яка зменшує площу її поверхні, називається *силою поверхневого натяжіння*. Поверхнєве натяжіння залежить від природи рідини і від температури.

Розглянемо мильну плівку, натягнуту на металеву рамку з рухомою перемичкою довжиною l (рис. 12.7). Плівка є тонким

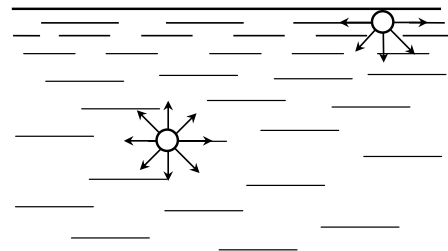


Рис. 12.6

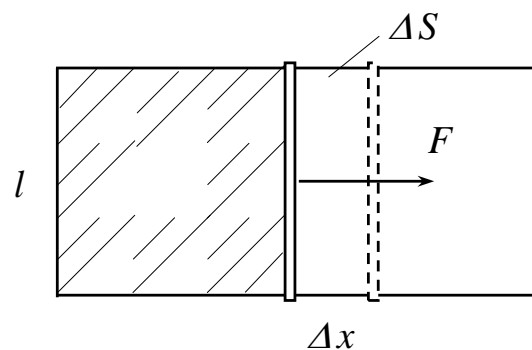


Рис. 12.7

шаром водного розчину поверхнево активної речовини, наприклад мила, і утримується на рамці завдяки силам поверхневого натягіння. Щоб збільшити площу її поверхні на величину ΔS , потрібно перемістити перемичку на відстань Δx , приклавши до неї направлену вздовж плівки силу F і виконавши при цьому роботу

$$\Delta A = F \cdot \Delta x. \quad (12.5)$$

Виконана робота йде на збільшення поверхневої енергії плівки

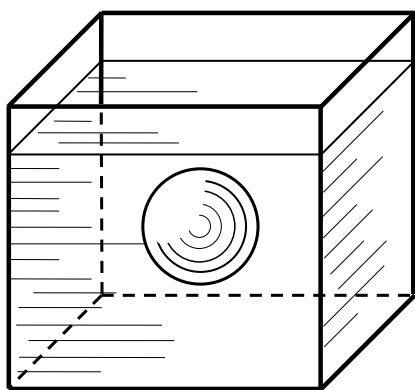


Рис. 12.8

$\Delta W_{i\hat{a}}$ – тієї додаткової енергії, якою володіють молекули рідини завдяки згаданим вище силам, і що знаходяться на двох поверхнях плівки:

$$\Delta W_{i\hat{a}} = \sigma \cdot 2 \Delta S = 2\sigma \cdot l \Delta x. \quad (12.6)$$

Коефіцієнт пропорційності σ називається *поверхневим натягінням* рідини. Прирівнюючи праві частини рівностей (12.5) і

(12.6), отримаємо для нього співвідношення

$$\sigma = \frac{F}{2l}. \quad (12.7)$$

Поверхнєве натягіння дорівнює стягуючій силі, що припадає на одиницю довжини контура, що обмежує поверхню рідини, і спрямована перпендикулярно лінії цього контура.

Одиниця вимірювання поверхневого натягіння – *ньютон на метр* (Н/м) або *джоуль на квадратний метр* (Дж/м²).

Існування поверхневого натягіння виявляється, зокрема, в тому, що краплі рідини набувають форми, близької до сферичної. Сфера, як відомо, серед тіл однакового об'єму має найменшу площу

поверхні. Відхилення від сферичності викликається силою тяжіння, яка виявляється набагато слабшою за поверхневі сили у дрібних краплях і тому вони мають сферичну форму.

З дослідів, що демонструють існування сил поверхневого натягнення, часто показують сферичну краплю аніліну, зважену в розчині кухонної солі, концентрація якої підбрана так, щоб щільність розчину збігалася зі щільністю аніліну (рис. 12.8).

§ 12.4. Кристалічні й аморфні тверді тіла

Твердим тілом ми називаємо речовину, що знаходиться у такому агрегатному стані, у якому залишаються незмінними його об'єм і форма. У твердому тілі молекули або атоми речовини не можуть змінювати свого положення в просторі, подібно до того, як це відбувалося в рідинах або газах.

Тверді тіла за своєю внутрішньою будовою діляться на *кристалічні* й *аморфні*. У кристалічних тілах атоми розташовуються в просторі у визначених положеннях, що називаються *вузлами кристалічної решітки* (рис. 12.9). Якщо через який-небудь атом

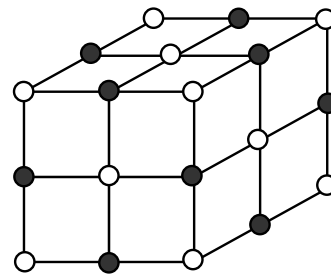


Рис. 12.9

подумки провести пряму лінію, то вона пройде і через інші атоми, причому так, що відстані між сусідніми атомами на цій прямій будуть однаковими. Ці відстані будуть найменшими, якщо пряму направити від початкового атома до його найближчого сусіда (рис. 12.10, пряма *l*).

Форма кристалічної решітки залежить від природи речовини і може бути не тільки кубічною, як це зображено на рис. 12.9. Визначити її можна за зовнішнім виглядом утворюваних цією речовиною кристалів.

Найбільш загальною ознакою кристалічних тіл є відмінність їх фізичних властивостей – механічних, теплових, оптичних – від напрямку в кристалі. Так, кристали

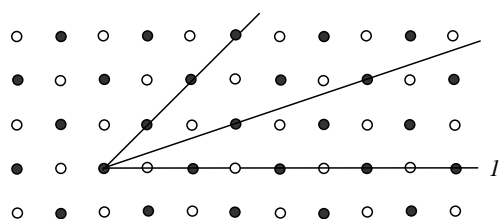


Рис. 12.10

слюди у вигляді тонких пластинок легко розділяються на ще тонші пластинки, демонструючи слабкий зв'язок між її молекулами у напрямку, перпендикулярному площині цих пластинок. У той же час міцність зв'язку молекул уздовж площини пластинки достатньо велика.

Теплопровідність і коефіцієнт лінійного розширення кристалів уздовж різних граней кристала теж різні. Залежність оптичних властивостей кристала від напрямку променя світла відносно різних його осей ми обговоримо в розділі, присвяченому оптиці.

Існує багато речовин (наприклад, метали), що складаються з дрібних кристалів, орієнтованих довільно, так що їх фізичні властивості по різних напрямках усереднюються і стають однаковими.

Аморфні тверді тіла різко відрізняються від кристалічних. У них не можна виявити залежності фізичних властивостей від напрямку. Структура їх подібна до структури рідини, де є ближній порядок у розташуванні

молекул. В аморфному стані можуть знаходитися і такі речовини, які зазвичай мають кристалічну будову. Так, наприклад, якщо розплавити кристали кварцу (при $t = 1700^{\circ}\text{C}$), а потім охолодити, утворюється так званий плавлений кварц, що має меншу густину і властивості, однакові за всіма напрямками.

Аморфний стан речовини нестійкий – з часом аморфна речовина переходить у кристалічну. Цей час може обчислюватися роками і десятиліттями.

Найбільш важливим прикладом аморфного стану є скло – аморфний сплав силікатів. З часом воно мутніє, що пов'язано з появою всередині скла дрібних кристалів, оптичні властивості яких інші, ніж оточуючого їх аморфного середовища.

Особливий клас твердих тіл утворюють *полімери* – органічні аморфні тіла, молекули яких складаються з великого числа однакових довгих молекулярних ланцюжків, сполучених хімічними зв'язками. До них належать каучук, поліетилен, гума. Таку будову молекул зумовлює здатність полімерів до порівняно великих деформацій, при яких не відбувається їх руйнування.

§ 12.5. Теплоємність твердих тіл

Експериментально встановлено, що *всі тверді тіла мають приблизно одну і ту ж молярну теплоємність*

$$C = 3R, \quad (12.8)$$

де R – універсальна газова стала. Це твердження носить назву *закону Дюлонга і Пті*.

Походження такої величини теплоємності можна пояснити,

якщо вважати, що кожен атом твердого тіла здійснює поблизу свого положення рівноваги гармонічні коливання. Оскільки напрямок, у якому коливається кожен з атомів, довільний, зміщення атома можна розкласти на три складові – вздовж кожної з координатних осей X, Y, Z . Атом, таким чином, має три коливальні степені вільності у трьох взаємно перпендикулярних напрямках. Енергія коливань атома складається з потенціальної і кінетичної енергії, на кожну з яких припадає по $kT/2$ теплової енергії (згідно із законом рівнорозподілу енергії за степенями вільності молекул), тобто $2 \cdot (kT/2) = kT$ на кожний коливальний степінь вільності. Енергія коливань атомів, що містяться в одному молі речовини, дорівнює добутку сталої Авогадро (числа атомів в молі) на $3kT$ (по числу коливальних степенів вільності):

$$W_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}} = 3 N_A kT = 3RT ,$$

Звідки молярна теплоємність

$$C = \frac{dW_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}}{dT} = 3R .$$

Питання для самоперевірки

1. Запишіть рівняння стану реального газу, запропоноване Ван-дер-Ваальсом. З чим пов'язана його відмінність від рівняння Клапейрона?
2. Що таке насичена пара? Дайте визначення пружності насиченої пари. Від чого вона залежить?
3. Зобразіть на графіку ізотерми, побудовані за рівнянням Ван-дер-Ваальса й отримані експериментально, і поясніть, що таке перегріта рідина і пересичена пара.
4. Поясніть принцип роботи камери Вільсона і бульбашкової камери, які використовують для спостереження траєкторій елементарних частинок.

5. Який стан речовини називається критичним? Як його можна реалізувати на досліді і які його зовнішні прояви?
6. Дайте характеристику рідкого стану речовини. Чим він відрізняється від твердого і газоподібного?
7. Яка фізична причина виникнення поверхневого натягіння рідин? У чому воно виявляється?
8. Які тіла називаються твердими і які види твердих тіл вам відомі?
9. Назвіть особливі властивості кристалічних твердих тіл. Чим від них відрізняються тіла аморфні?
10. Сформулюйте закон Дюлонга і Пті і дайте йому пояснення на основі закону про рівнорозподіл енергії за степенями вільності молекул.

Бібліографічний список

1. Беляев Н.М. Термодинамика. – К.: Вищ. шк., 1987. – 342 с.
2. Бишоп Р. Колебания. – М.: Наука, 1979. – 160 с.
3. Бондарев Б.В., Калашников Н.П., Спирин Г.Г. Курс общей физики: В 5 кн. Кн. 1. Механика. – М.: Высш. шк., 2003. – 352 с.
4. Гиббс Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика. – М.: Наука, 1982. – 584 с.
5. Горелик Г.С. Колебания и волны. – М.: Физматгиз, 1959. – 572 с.
6. Грабовский Р.И. Курс физики – СПб.: Лань, 2005. – 608 с.
7. Грибов Л.А., Прокофьева Н.И. Основы физики.– М.: Гардирика, 1998. – 556 с.
8. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высш. шк., 2001, 718 с.

9. Задачі з фізики: / А.В.Попов, Р.В.Вовк, Н.В.Глейзер та ін. – Харків: УкрДАЗТ, 2008. – 92 с.
10. Зисман Г.А., Годес О.М. Курс общей физики: В 3 т.– М.: Наука, 1972.– Т.1.– 340 с.
11. Зисман Г.А., Годес О.М. Курс общей физики: В 3 т.– М.: Наука, 1972.– Т.2.– 340 с.
12. Кудрявцев П.С. История физики: В 3 т. – М.: Учпедгиз, 1956. – Т.2.–488 с.
13. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1965. – 384 с.
14. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний – М.: Наука, 1972. – 470 с.
15. Орир Дж. Физика: В 2 т.– М.: Мир, 1981.– Т.1.– 336 с.
16. Путилов К.А. Курс физики: В 3 т.– М.: Физматгиз, 1962. – Т.1.– 560 с.
17. Савельев И.В. Курс общей физики: В 5 кн. Кн.1: Механика. – М.: Астрель, 2005. – 336 с.
18. Савельев И.В. Курс общей физики: В 5 кн. Кн.2: Молекулярная физика и термодинамика.– М.: Астрель, 2005. – 306 с.
19. Сивухин Д.В. Общий курс физики: В 5 т. – М.: Наука, 1979. Т.1: Механика. – 520 с.
20. Сивухин Д.В. Общий курс физики: В 5 т. – М.: Наука, 1979. – Т.2: Молекулярная физика и термодинамика. – 552 с.
21. Трофимова Т.И. Курс физики.– М.: Высш. шк., 2004.– 544 с.
22. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: В 9 т. – М.: Мир, 1965.– Т.1.– 268 с., Т.2.– 168 с., Т.4.– 262 с.

23. Фриш С.Э., Тиморева А.В. Курс общей физики: В 3 т.– М.: Техтеоретиздат, 1953.– Т.1. – 464 с.
24. Чолпан П.П. Фізика. – К.: Вищ. шк., 2003. – 566 с.

Предметний покажчик

- Авогадро постійна 140
Архімеда закон 75
- Больцмана розподіл 154
– стала 135, 140
Бульбашкова камера 213
- Вектор аксіальний 56
– полярний 15
Вільсона камера 213
Вічний двигун 189
- Гіроскопічний ефект 71
Гука закон 48
Густина потоку енергії 127
- Декартова система координат 9
Декремент затухання логарифмічний 106
- Ідеальний газ 135
Інерціальна система відліку 26
- Коефіцієнт корисної дії теплової машини 191
Клапейрона рівняння 208
- Лінії струму 76
Лиссажу фігури 103
- Матеріальна точка 9
Метод обертового вектора амплітуди 98
Механічна система 31
- Насичена пара 211
Нернста теорема 202

Паскаля закон 74
Перегріта рідина 213
Пересичена пара 211
Піто трубка 78
Плоскопаралельний рух 52
Поверхнєве натяжіння 216
Приведена теплота 199
Прискорення нормальне 19
– тангенціальне 19
Пуазейля метод 84

Радіус кривизни траєкторії 20
Рейнольдса число 87

Стокса метод 83

Температура 138
Термодинамічна система 135
Тіло відліку 9
Тиск гідростатичний 76
Тиск динамічний 80
Торрічеллі формула 80
Трубка струму 77

Удар тіл 43

Фазовий перехід 208

Хвильове число 117
Хвильовий вектор 118

Центр гойдань маятника 95

Юнга модуль 48, 123