



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО
ТРАНСПОРТУ

РОЗРАХУНОК РОЗПІРНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

ББК 38.54я7
Р 64

*Рекомендовано вченою радою Українського державного
університету залізничного транспорту як навчальний посібник
(витяг з протоколу № 4 від 24 травня 2016 р.)*

Рецензенти:

професори Д. А. Плугін (УкрДУЗТ),
М. Ю. Ізбаш (ХНУБА),
В. П. Кожушко (ХНАДУ)

Авторський колектив:

Г. Л. Ватуля, Ю. В. Глазунов, Л. Б. Кравців, Н. В. Смолянук

Р 64 Розрахунок розпірних систем [Текст]: навч. посібник /
Г.Л. Ватуля, Ю.В. Глазунов, Л.Б. Кравців та ін. – Харків:
УкрДУЗТ, 2016. – 124 с., рис. 41, табл. 15.
ISBN 978-617-654-056-4

Відображено сучасний стан розділів будівельної механіки, у яких надано розрахунки розпірних систем і визначення переміщень методом Мора, що необхідно знати для проектування інженерних споруд.

Традиційні розрахунки стрижневих систем орієнтовано на використання ПЕОМ. Розширено викладення чисельних методів, велику увагу приділено підготовці вихідних даних для автоматизованого розрахунку і аналізу отриманих результатів. Наведено докладні приклади розрахунків: тришарнірної системи, складеної з аркової частини і вертикальних стояків; тришарнірної рами з нахиленими стояками; аркової ферми; комбінованої системи, яка включає трос і балку жорсткості.

Навчальний посібник призначено для студентів будівельних спеціальностей.

УДК 624.072.3(075)
ББК 38.54я7

ISBN 978-617-654-056-4

© Український державний
університет залізничного транспорту,
2016.

Навчальний посібник

Ватуля Гліб Леонідович,
Глазунов Юрій Володимирович,
Кравців Лариса Богданівна
та ін.

РОЗРАХУНОК РОЗПІРНИХ СИСТЕМ

Відповідальний за випуск Глазунов Ю.В.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 16.12.15 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 5,75. Тираж 75. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного
транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.
Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

РОЗРАХУНОК РОЗПІРНИХ СИСТЕМ
Навчальний посібник

ХАРКІВ 2016

УДК 624.072.3(075)
ББК 38.54я7
Р-64

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (№)*

Рецензенти:

професори Д.А. Плугін (УкрДУЗТ),
М.Ю. Ізбаш (ХНУБА),
В.П. Кожушко (ХНАДУ)

Авторський колектив:

Г.Л. Ватуля, Ю.В. Глазунов, Л.Б. Кравців, Н.В. Смолянюк

Р-64 Розрахунок розпірних систем [Текст]: навч. посібник / Г.Л. Ватуля, Ю.В. Глазунов, Л.Б. Кравців, Н.В. Смолянюк. – Харків: УкрДУЗТ, 2016. – 124 с., іл. 41, табл. 15, бібліогр.: 22 назв.
ISBN

Відображено сучасний стан розділів будівельної механіки, у яких надано розрахунки розпірних систем і визначення переміщень методом Мора, що необхідно знати для проектування інженерних споруд.

Традиційні розрахунки стрижневих систем орієнтовано на використання ПЕОМ. Розширено викладення чисельних методів, велику увагу приділено підготовці вихідних даних для автоматизованого розрахунку і аналізу отриманих результатів. Наведено докладні приклади розрахунків: тришарнірної системи, складеної з аркової частини і вертикальних стояків; тришарнірної рами з нахиленими стояками; аркової ферми; комбінованої системи, яка включає трос і балку жорсткості.

Навчальний посібник призначено для студентів будівельних спеціальностей.

УДК 624.072.3(075)
ББК 38.54я7

ISBN 000-000-0000-00-0

© **Український державний університет
залізничного транспорту, 2016**

ЗМІСТ

1	Вступ	5
·	
2	Розрахунок тришарнірних систем на нерухоме навантаження	7
·	
2.1	Розрахунок тришарнірної арки на нерухоме навантаження	7
·	
2.1.1.	Особливості розрахунку тришарнірної арки з затягуванням	10
·	
2.1.2.	Розрахунок систем, що включають тришарнірну арку	11
·	
2.1.3.	Розрахунок тришарнірних рам	15
·	
2.2	Лінії впливу в перерізах тришарнірної арки	21
·	
2.3	Лінії впливу в перерізах тришарнірних рам	24
·	
3	Розрахунок аркових ферм	29
·	
3.1	Розрахунок аркових ферм на нерухоме навантаження	29
·	
3.2	Лінії впливу в стрижнях аркових ферм	31
·	
4	Розрахунок комбінованих систем	33
·	
4.1	Розрахунок комбінованих систем на нерухоме навантаження	35
·	
4.2	Лінії впливу в перерізах комбінованої системи	38
·	
5	Завдання: Розрахунок розпірних систем на нерухоме і	

·	рухоме навантаження	39
	
6	Приклади до завдання	44
·	
	6.1 Розрахунок тришарнірної системи	44
·	
	6.2 Розрахунок тришарнірної рами	54
·	
	6.3 Розрахунок аркової ферми	62
·	
	6.4 Розрахунок комбінованої системи	74
·	
7	Визначення переміщень у пружних системах від	
·	заданого зовнішнього навантаження, температурних	
	впливів і зсуву зв'язків	86
	
	7.1 Визначення переміщень від заданого зовнішнього	
·	навантаження	87
	
	7.2. Визначення переміщень від заданої зміни	
	температури	93
	
	7.3. Визначення переміщень від заданого зсуву	
	зв'язків...	95
8	Завдання: Визначення переміщень у рамах від заданого	
·	зовнішнього навантаження, температурних впливів і	
	зсуву зв'язків	96
	
	8.1. Визначення переміщень від зовнішнього	
	навантаження	102
	
	8.2. Визначення переміщень від температурних	
	впливів...	104
	8.3. Визначення переміщень від зсуву зв'язків	
	
	Бібліографічний список	108
	

Додаток 1. Програма розрахунку стрижневих систем на

ПЕОМ з використанням методу кінцевих елементів (МКЕ)	110
.....	
1. Основні положення методу кінцевих елементів	110
.....	
2. Підготовка вихідних даних і виконання розрахунків	118
.....	
Додаток 2. Вплив кількості проміжних вузлів на точність обчислення поперечних і поздовжніх сил в арці ..	122

1. ВСТУП

На відміну від систем балкового типу, у розпірних системах при вертикальному навантаженні виникають горизонтальні опорні реакції, що називаються розпором. До цих систем

належать тришарнірні арки й рами, аркові ферми, комбіновані системи, у яких диски балок або ферм утримуються ланцюгом (тросом).

Приклади використання розпірних систем показано на рис. 1.1 – 1.5. В аркових мостах, наведених на рис. 1.1 – 1.3, основними частинами прогонових будівель є арки без затягування (рис. 1.1) або з затягуванням (рис. 1.2.), або аркові ферми (рис. 1.3).

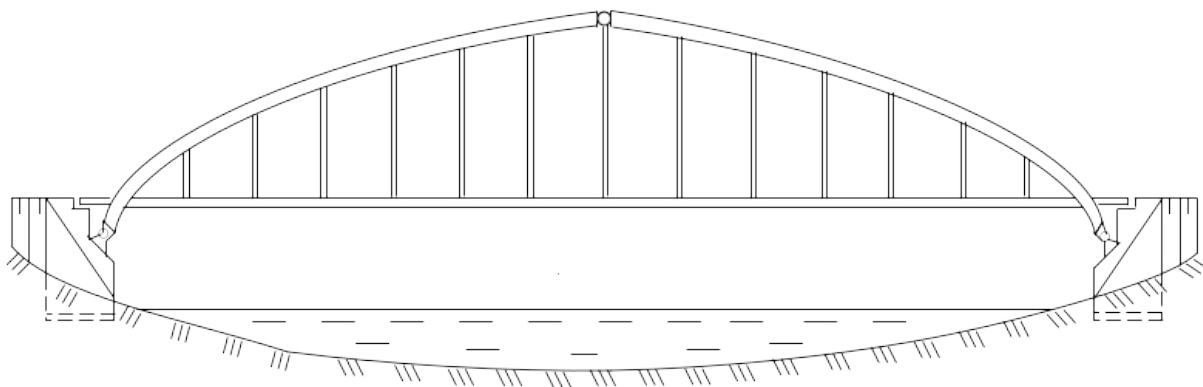


Рис. 1.1. Схема аркового моста без затягування

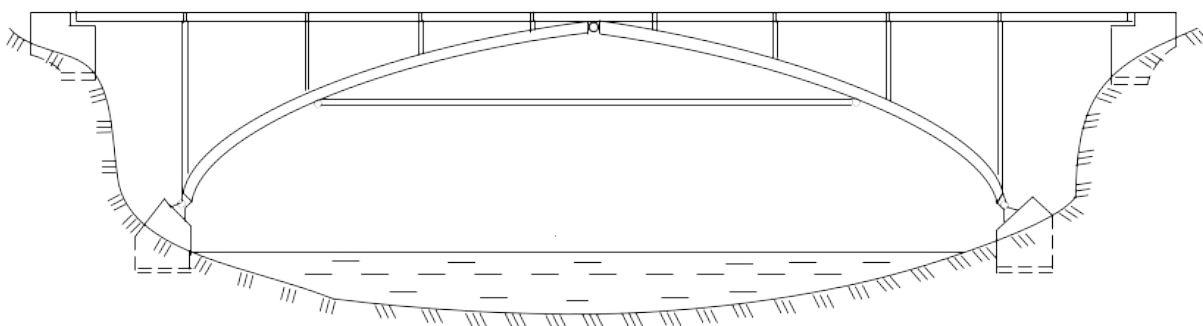


Рис. 1.2. Схема аркового моста з затягуванням

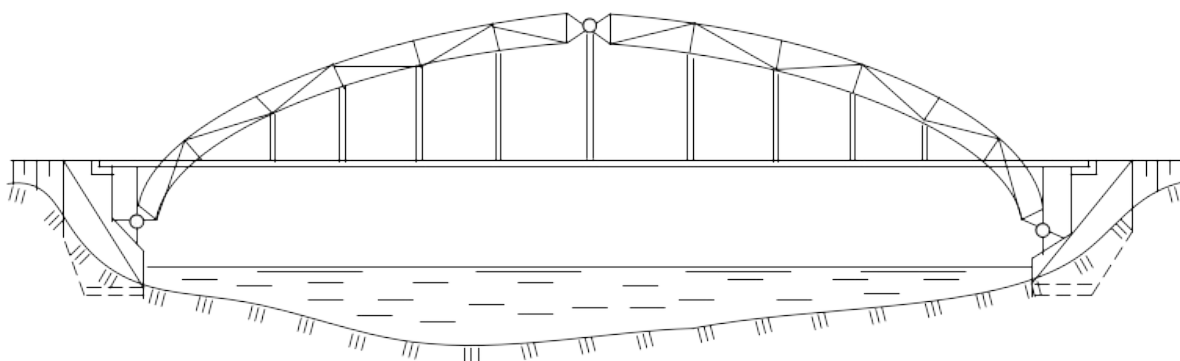


Рис. 1.3. Схема аркового моста з арковими формами

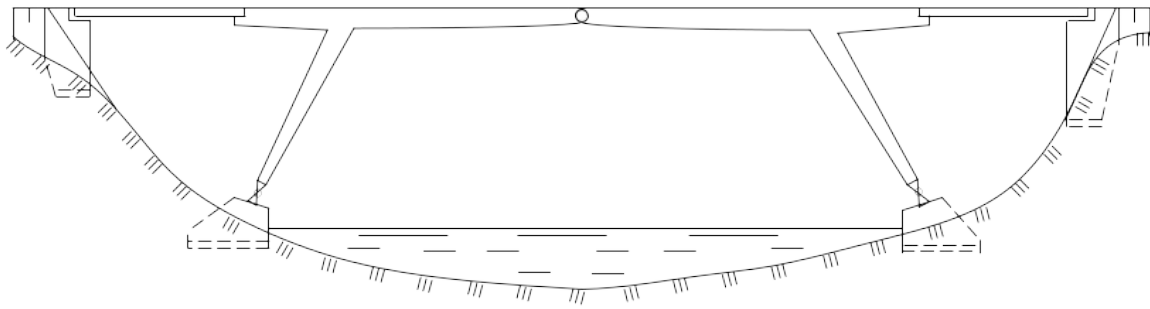


Рис. 1.4. Схема рамного моста

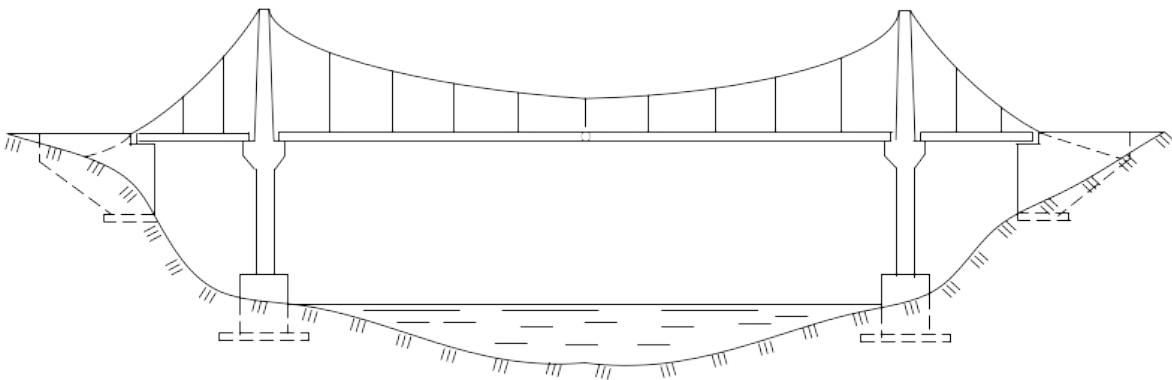


Рис. 1.5. Схема висячого моста

2. РОЗРАХУНОК ТРИШАРНІРНИХ СИСТЕМ НА НЕРУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Тришарнірна арка являє собою статично визначну систему. Вона складається з двох половин арок AC і BC (рис. 2.1), шарнірно зв'язаних з опорами A , B і між собою. Опорні шарніри називаються п'ятковими, а середній – ключовим. Різновидом тришарнірної арки є тришарнірна арка з затягуванням (рис. 2.2). Системи, що включають у себе в якості складової частини тришарнірну арку, зображені на рис. 2.3, 2.4, 2.5.

2.1. Розрахунок тришарнірної арки на нерухоме навантаження

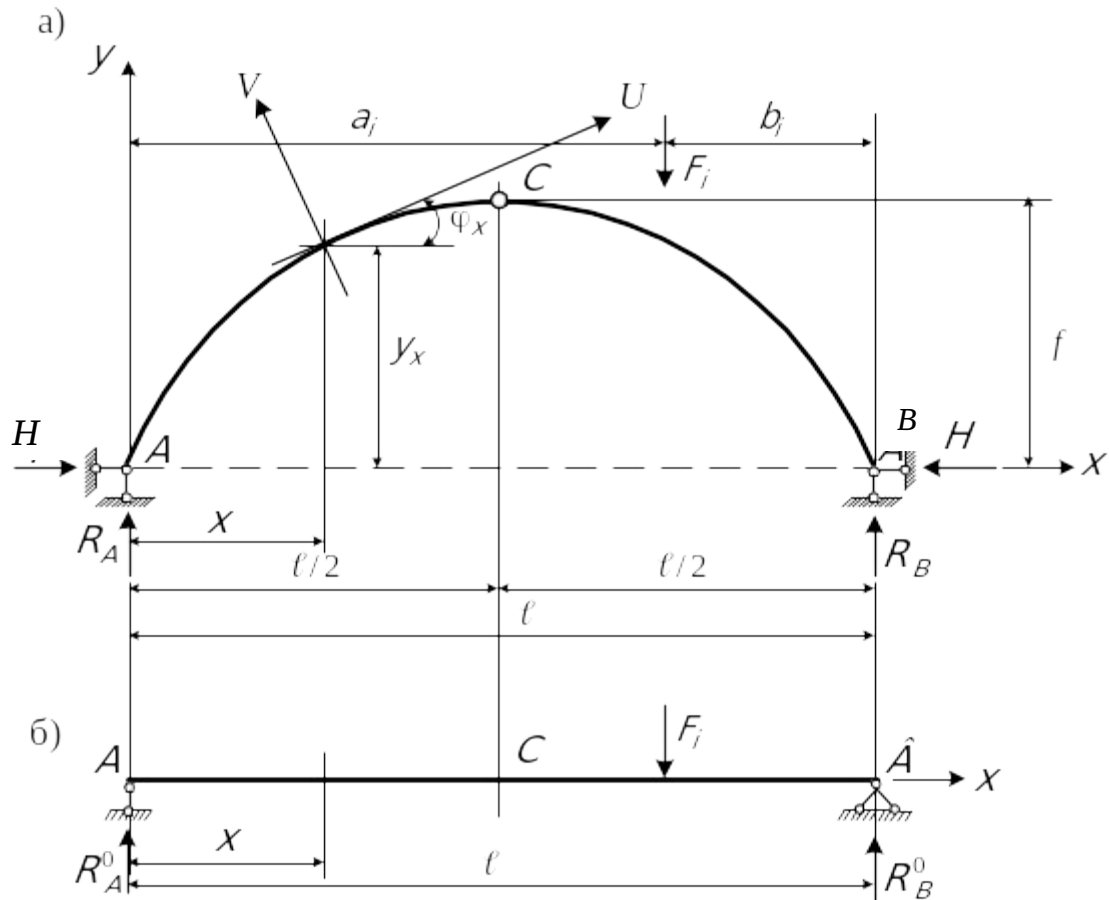


Рис. 2.1. Розрахункова схема тришарнірної арки

Для аналітичного розв'язання задачі обмежимося випадком вертикального навантаження. Для визначення вертикальних опорних реакцій R_A і R_B складемо рівняння рівноваги вигляду

$$\sum M_A = 0 \text{ і } \sum M_B = 0.$$

У результаті одержимо

$$R_A = R_A^0 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i b_i, \quad R_B = R_B^0 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i a_i. \quad (2.1)$$

У цих формулах: ℓ – прогин арки; F_i – зосереджена сила, прикладена в довільному перерізі арки; a_i, b_i – відповідно відстань від зосереджених сил до лівої A та правої B опор арки; $i=1,2,\dots,n$ – кількість зосереджених сил. Розподілене навантаження, якщо таке є, приводиться до рівнодіючої: $F_i = q_i c_i$, де c_i – протяжність розподіленого навантаження інтенсивністю q_i .

Формули (2.1) показують, що реакції R_A і R_B нічим не відрізняються від тих вертикальних реакцій, що утворилися б від заданого навантаження, якби тришарнірна система була замінена простою балкою, опертю в точках A і B при відсутності середнього шарніра (рис. 2.1, б). Зусилля, отримані в цій балці, надалі будемо називати балковими.

З рівняння рівноваги $\sum M_C^{\text{лів}} = 0$ (або $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$) знайдемо горизонтальні опорні реакції H . При вертикальному навантаженні горизонтальні опорні реакції на лівій A та правій B опорах балки рівні між собою і спрямовані в протилежні боки:

$$H_A = H_B = H = \frac{M_C^0}{f}, \quad (2.2)$$

де M_C^0 – згинальний момент від заданих F_i сил у перерізі C простої балки – балковий згинальний момент (рис. 2.1, б).

У довільному перерізі X арки згинальний момент, поперечна і поздовжня сили відповідно рівні:

$$M_x = M_x^0 - H y_x; \quad (2.3)$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \quad (2.4)$$

$$N_x = - \left(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x \right). \quad (2.5)$$

Аналіз формул (2.3) – (2.5) показує, що згинальний момент і поперечна сила в арці менші, ніж у балці з таким самим прогоном і навантаженням (рис. 2.1, б). Причиною цього є розпір H . Зменшення згинальних моментів і поперечних сил досягається завдяки появі нового зусилля N (2.5), відсутнього в балці.

Нагадаємо, що поперечна сила (формула (2.4)) у перерізі криволінійного бруса дорівнює проекції всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на вісь V (рис. 2.1, а), а поздовжня сила (2.5) – проекція всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на вісь U (рис. 2.1, а).

У формулах (2.3) – (2.5) позначено: M_x^0 , Q_x^0 – балкові згинальний момент і поперечна сила в перерізі X (рис. 2.1, б); φ_x – кут між дотичною, проведеною до осі арки в перерізі X , і горизонталлю (вісь U на рис. 2.1, а; вісь V – перпендикулярна до осі U).

$$\sin \varphi_x = \frac{tg \varphi_x}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi_x}}; \quad (2.6)$$

$$\cos \varphi_x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi_x}}; \quad (2.7)$$

$tg \varphi_x = \frac{dy}{dx}$ – похідна функції y , що описує вісь арки; наприклад, якщо вісь арки обкреслена за квадратною параболою

$$y = \frac{4f}{\ell^2}(\ell - x)x,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = tg \varphi_x = \frac{4f}{\ell^2}(\ell - 2x);$$

якщо рівняння осі арки являє собою коло

$$y = \sqrt{(2R - x)x},$$

то

$$\frac{dy}{dx} = tg \varphi_x = \frac{R - x}{\sqrt{(2R - x)x}}.$$

2.1.1. Особливості розрахунку тришарнірної арки з затягуванням

У тришарнірній арці з затягуванням (рис. 2.2, а), тобто з додатковим стрижнем, що стягує обидві половини арки, розпір

виникає й погашається усередині самої споруди, не передаючись на опори.

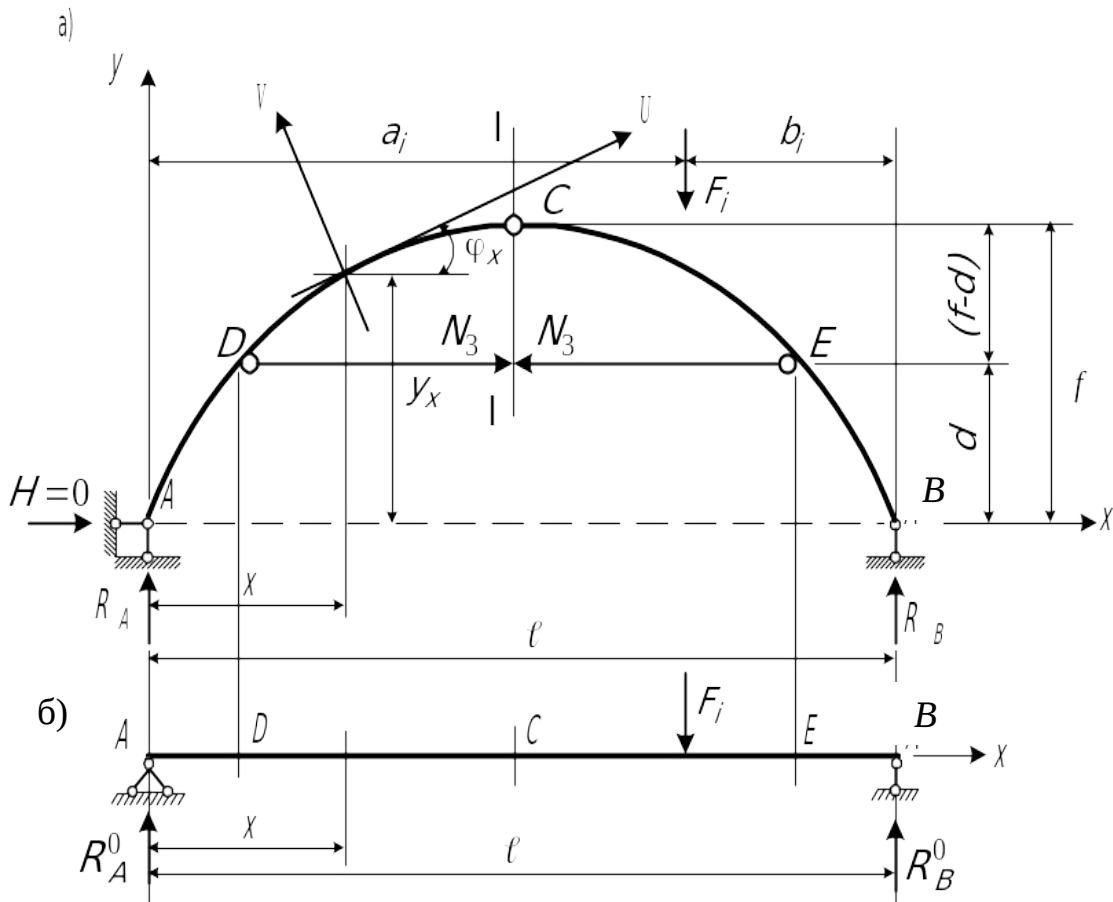


Рис. 2.2. Розрахункова схема тришарнірної арки з затягуванням

Така конструкція поєднує легкість опор простої балки з ефективністю тришарнірної арки (під ефективністю розуміється відзначений раніше факт зменшення згинальних моментів і поперечних сил в арці порівняно з балкою).

Зусилля в затягуванні одержимо, узявши суму моментів лівих або правих сил відносно шарніра C . Для цього випадку на рис. 2.2, а показано переріз I-I, проведений через шарнір C і затягування:

$$N_3 = \frac{M_C^0}{(f - d)}, \quad (2.8)$$

де d – відстань від лінії, що з'єднує опори A і B , до затягування;

$M_x^0; Q_x^0; N_x^0$ – балкові зусилля (рис. 2.2, б).

Згинальний момент, поперечна і поздовжня сили в перерізах визначаються за нижченаведеними і отриманими з них формулами залежно від розташування перерізу.

Переріз на ділянках AD і BE (див. рис. 2.2, а):

$$M_x = M_x^0; \quad (2.9)$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x; \quad (2.10)$$

$$N_x = - Q_x^0 \sin \varphi_x. \quad (2.11)$$

Переріз на ділянці DCE (рис. 2.2, а):

$$M_x = M_x^0 - N(y_x - d); \quad (2.12)$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - N_3 \sin \varphi_x; \quad (2.13)$$

$$N_x = - (Q_x^0 \sin \varphi_x + N_3 \cos \varphi_x). \quad (2.14)$$

2.1.2. Розрахунок систем, що включають тришарнірну арку

Розглянемо системи, що включають у себе в якості складової частини тришарнірні арки. На рис. 2.3, а показана система, складена з вертикальних стояків і аркової частини, жорстко з ними зв'язаної.

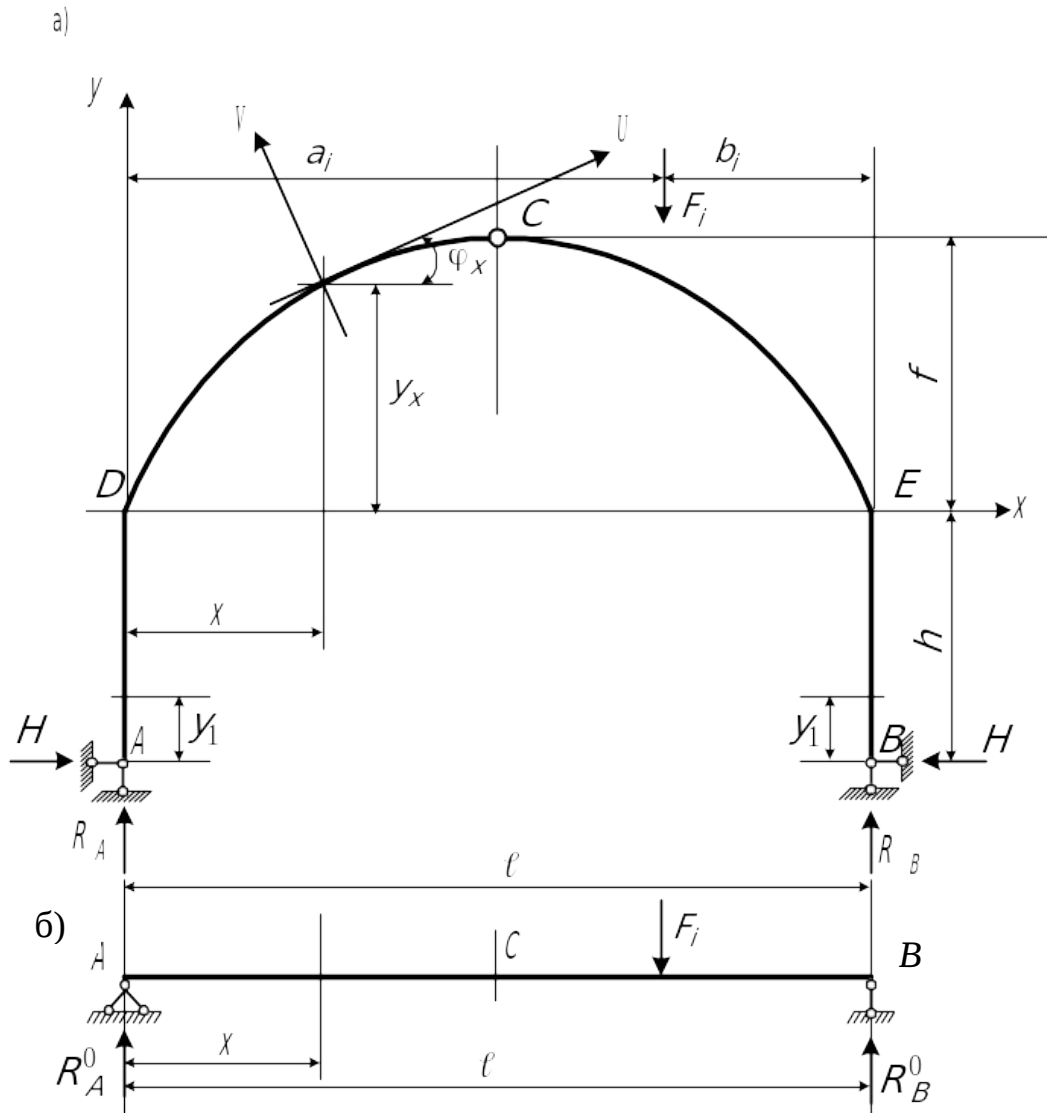


Рис. 2.3. Розрахункова схема тришарнірної системи

Вертикальні опорні реакції в такій споруді визначаються за формулами (2.1), тобто як у простій балці (рис. 2.3, б). Горизонтальні опорні реакції знаходяться так:

$$H = \frac{M_C^0}{f + h}. \quad (2.15)$$

де h – висота стояка.

Формула (2.15) отримана з рівнянь рівноваги: $\sum M_C^{liv} = 0$ або $\sum M_C^{np} = 0$. Згинальний момент, поперечна і поздовжня сили в довільному перерізі аркової частини визначаються з залежностей, аналогічних (2.3) – (2.5), тобто

$$\begin{aligned}
M_x &= M_x^0 - H(y_x + h); \\
Q_x &= Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \\
N_x &= - \left(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x \right).
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

Визначимо внутрішні сили у вертикальних елементах.
На ділянці AD ($x_1 = 0, \quad 0 \leq y_1 \leq h$)

$$M_y = -Hy_1; \tag{2.17}$$

$$Q_y = -H; \tag{2.18}$$

$$N_y = -R_A. \tag{2.19}$$

На ділянці BE ($x_1 = \ell, \quad 0 \leq y_1 \leq h$)

$$M_y = Hy; \quad Q_y = H; \quad N_y = -R_B. \tag{2.20}$$

Правила знаків для згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил при розгляді вертикальних елементів системи прийнято такими: якщо сумарний момент усіх сил, розташованих зліва від перерізу, спрямований за годинниковою стрілкою, то він вважається додатним (для правих сил додатний момент спрямований проти годинникової стрілки); поперечна сила вважається додатною, якщо зліва від перерізу вона спрямована нагору, а справа – униз; поздовжня сила додатна, якщо вона спрямована від перерізу. Поняття «низ», «верх», «зліва», «справа» залежать від спостерігача. Тому умовимося «дивитися» на вертикальні елементи справа-наліво. Тепер стануть зрозумілими знаки M_y, Q_y, N_y у формулах (2.17) – (2.20).

На закінчення цього пункту розглянемо систему, показану на рис. 2.4, а.

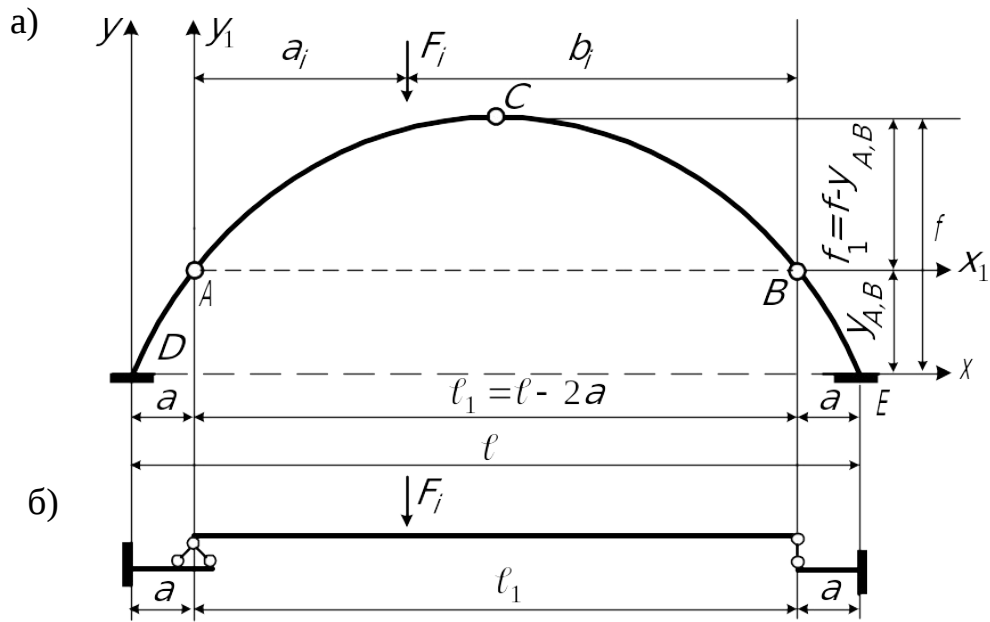


Рис. 2.4. Розрахункова схема тришарнірної системи

Система складається з тришарнірної арки ACB , що спирається на консолі DA і EB . Схема взаємодії елементів системи показана на рис. 2.5.

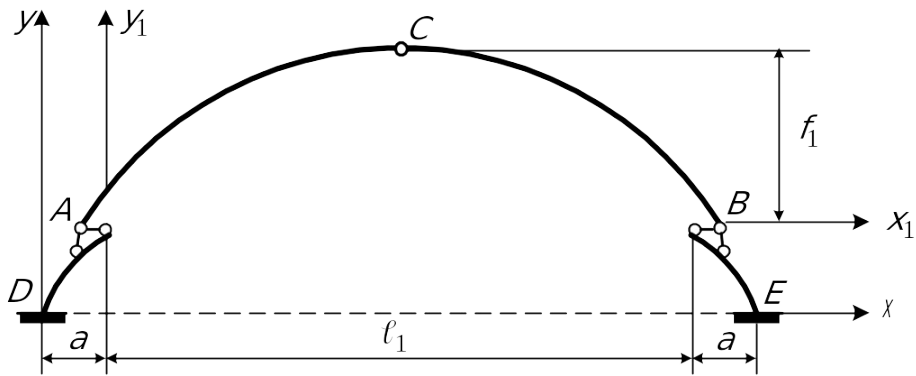


Рис. 2.5. Схема взаємодії елементів тришарнірної системи

Розрахунок цієї тришарнірної системи виконується в такій послідовності. Спочатку розглядається тришарнірна арка ABC (рис. 2.5). Розрахунок цієї частини системи виконується за формулами (2.1) – (2.5) із заміною l на l_1 і f на f_1 . Ординати точок A і B визначаються з рівняння, що описує вісь арки при $x = a$.

На другому етапі розрахунку розглядаються консольні частини системи (рис. 2.6).

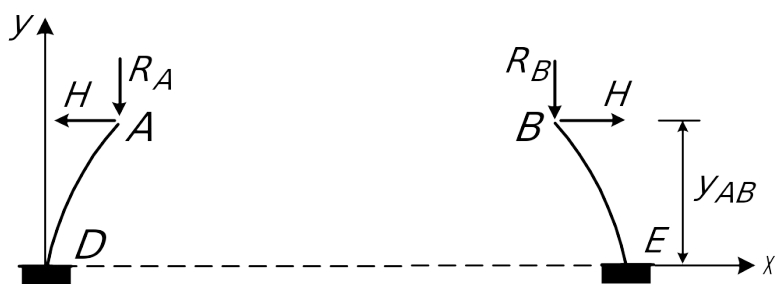


Рис. 2.6. Розрахункові схеми консолей тришарнірної системи

Згинальні моменти, поздовжні та поперечні сили в перерізах консолей знаходяться з залежностей (2.3) – (2.5). При цьому балкові значення функцій M_x^0 , Q_x^0 приймаються з розрахунку консольних балок (рис. 2.4, б), до яких, крім R_A і R_B , може бути також прикладено й інше навантаження, якщо за умовою задачі ці частини тришарнірної системи навантажені.

2.1.3. Розрахунок тришарнірних рам

Розглянемо тришарнірну раму (рис. 2.7). Обмежимося, як і раніше при розрахунку тришарнірних арок, вертикальним навантаженням.

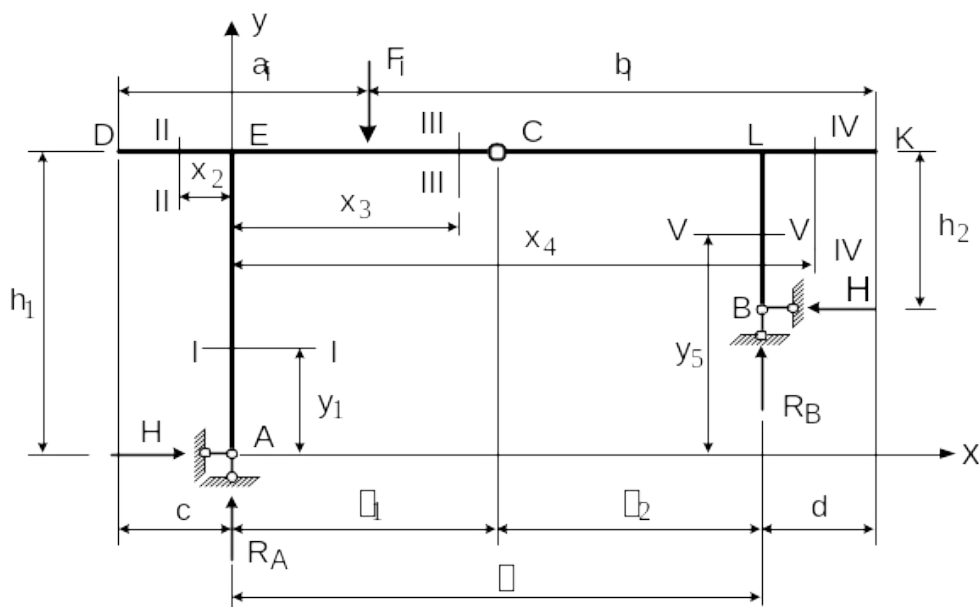


Рис. 2.7. Розрахункова схема тришарнірної рами з опорами, розташованими на різних рівнях

Визначимо спочатку опорні реакції. Для цього складемо систему двох рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0: \\ R_A \ell - \sum_{i=1}^n F_i (\ell + c - a_i) - H h_1 &= 0; \\ \sum M_B &= 0: \\ R_A \ell - \sum_{i=1}^m F_i (\ell + c - a_i) - H (h_1 - h_2) &= 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Замінімо перші два члени в цих рівняннях через $M_{C,лів}^0$ і M_B^0 . У результаті одержимо

$$\begin{aligned} M_{C,лів}^0 - H h_1 &= 0, \\ M_B^0 - H (h_1 - h_2) &= 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Розв'язавши систему (2.22), знайдемо

$$M_{C,лів}^0 = M_B^0 \frac{h_1}{(h_1 - h_2)}; \tag{2.23}$$

$$H = \frac{M_{C,лів}^0}{h_1} = M_B^0 \frac{1}{(h_1 - h_2)}. \tag{2.24}$$

З рівняння (2.23) можна визначити вертикальну опорну реакцію R_A , а з рівняння (2.24) – горизонтальну реакцію H – розпір.

Аналогічно, узявши суму моментів прaviх сил відносно шарнірів C і A , одержимо систему двох рівнянь із невідомими R_B і H . Розв'язавши цю систему, знайдемо

$$M_{C,прав}^0 = - M_A^0 \frac{h_2}{(h_1 - h_2)}; \tag{2.25}$$

$$H = \frac{M_{C, \text{прав}}^0}{h_2} = -M_A^0 \frac{1}{(h_1 - h_2)}. \quad (2.26)$$

Рівняння (2.25) служить для визначення опорної реакції R_B , а рівняння (2.26) – для перевірки правильності знайденого значення опорної реакції H за формулою (2.24). Щоб переконатися в тому, що правильно знайдено вертикальні опорні реакції R_A і R_B , необхідно всі сили, у тому числі й опорні реакції, що діють на тришарнірну раму, спроектувати на вертикальну вісь Y і одержати рівність $\sum F_x = 0$. У розглянутій тришарнірній системі вертикальні опорні реакції не дорівнюють балковим вертикальним реакціям R_A^0 і R_B^0 . Це пов'язано з тим, що опори рами A і B розташовані на різних рівнях, і для знаходження реакцій доводиться розв'язувати систему рівнянь (2.22), у яку в ролі невідомої входить і горизонтальна реакція H .

Тепер, коли реакції знайдено, перейдемо до визначення внутрішніх сил у перерізах рами.

Ділянка AE ($x=0, 0 \leq y_1 \leq h_1$):

$$M_{y_1} = -Hy_1; \quad Q_y = -H; \quad N_y = -R_A.$$

Ділянка DE ($y=h_1, 0 \geq x_2 \geq -c$):

$$M_{x_2} = -\sum_{i=1}^n F_i (c+x_2 - a_i); \quad Q_{x_2} = -\sum_{i=1}^n F_i; \quad N_x = 0; \quad a_i \leq (c+x_2).$$

Тут n – кількість зосереджених сил, розташованих зліва від перерізу II-II; a_i – відстань від точки D до зосередженої сили F_i .

Ділянка ECL ($y=h_1, \ell \geq x_3 \geq 0$):

$$M_{x_3} = R_A \cdot x_3 - \sum_{i=1}^p F_i (x_3 + c - a_i) - Hh_1;$$

$$Q_{x_3} = R_A - \sum_{i=1}^p F_i; \quad N_{x_3} = -H.$$

Тут P – кількість зосереджених сил, розташованих зліва від перерізу III-III.

Ділянка LK ($y = h_1, \quad \ell \leq x_4 \leq \ell + d$):

$$M_x = - \sum_{i=1}^r F_i (\ell + d - x_4 - b_i);$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^r F_i; \quad N_x = 0; \quad b_i \geq (\ell + d - x_4).$$

У цих формулах r – кількість зосереджених сил, розташованих справа від перерізу IV-IV (рис. 2.7).

Ділянка BL ($x = \ell, \quad h_1 \geq y_5 \geq h_1 - h_2$):

$$M_{y_5} = Hy_5; \quad Q_y = H; \quad N_y = -R_B.$$

Зупинимося на окремому випадку конструкції тришарнірної рами, коли $h_1 = h_2 = h$ (рис. 2.8).

Оскільки опори A і B розташовані на одному рівні, опорні реакції R_A і R_B знаходяться за формулами, аналогічними (2.1), тобто з розрахунку балки, показаної на рис. 2.8, б.

Для визначення горизонтальної опорної реакції H достатньо першого рівняння типу (2.22):

$$H = \frac{M^0}{h}. \quad (2.27)$$

Внутрішні силові фактори на ділянках AE , DE , ECL , LK , BL (рис. 2.8, а) визначаються за формулами, аналогічними для рами, показаної на рис. 2.7.

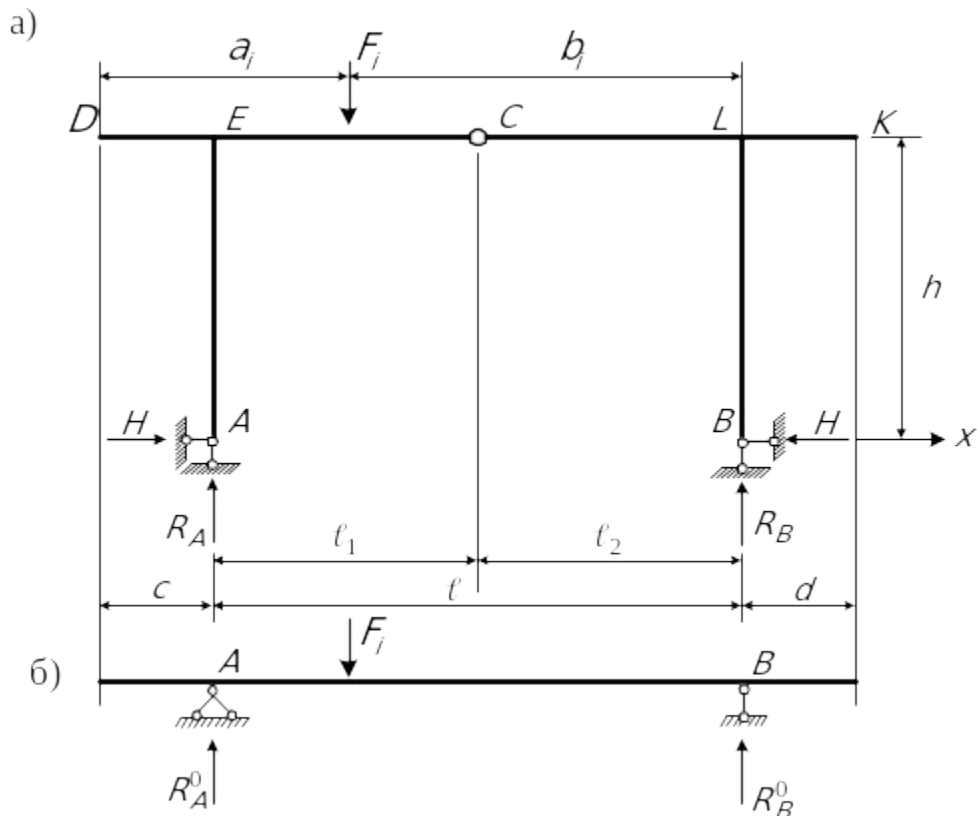


Рис. 2.8. Розрахункова схема тришарнірної рами з опорами, розташованими на одному рівні

Наприкінці цього пункту розглянемо тришарнірну раму з нахиленими стояками (рис. 2.9, а).

Для визначення вертикальних опорних реакцій R_A і R_B скористаємося формулами (2.1), а розпір H знайдемо за формулою (2.27). При цьому балковий згинальний момент M_C^0 у перерізі C одержимо з розрахунку балки, показаної на рис. 2.9, б. Внутрішні сили в перерізах рами знаходимо для кожної ділянки.

Ділянка AE $\left[(c - c_1) \geq x_1 \geq 0, \quad h \geq y_1 \geq 0 \right]$:

$$M_{x_1} = R_A x_1 - H y_1; \quad Q_{x_1} = R_A \cos \varphi_A - H \sin \varphi_A;$$

$$N_{x_1} = - R_A \sin \varphi_A - H \cos \varphi_A.$$

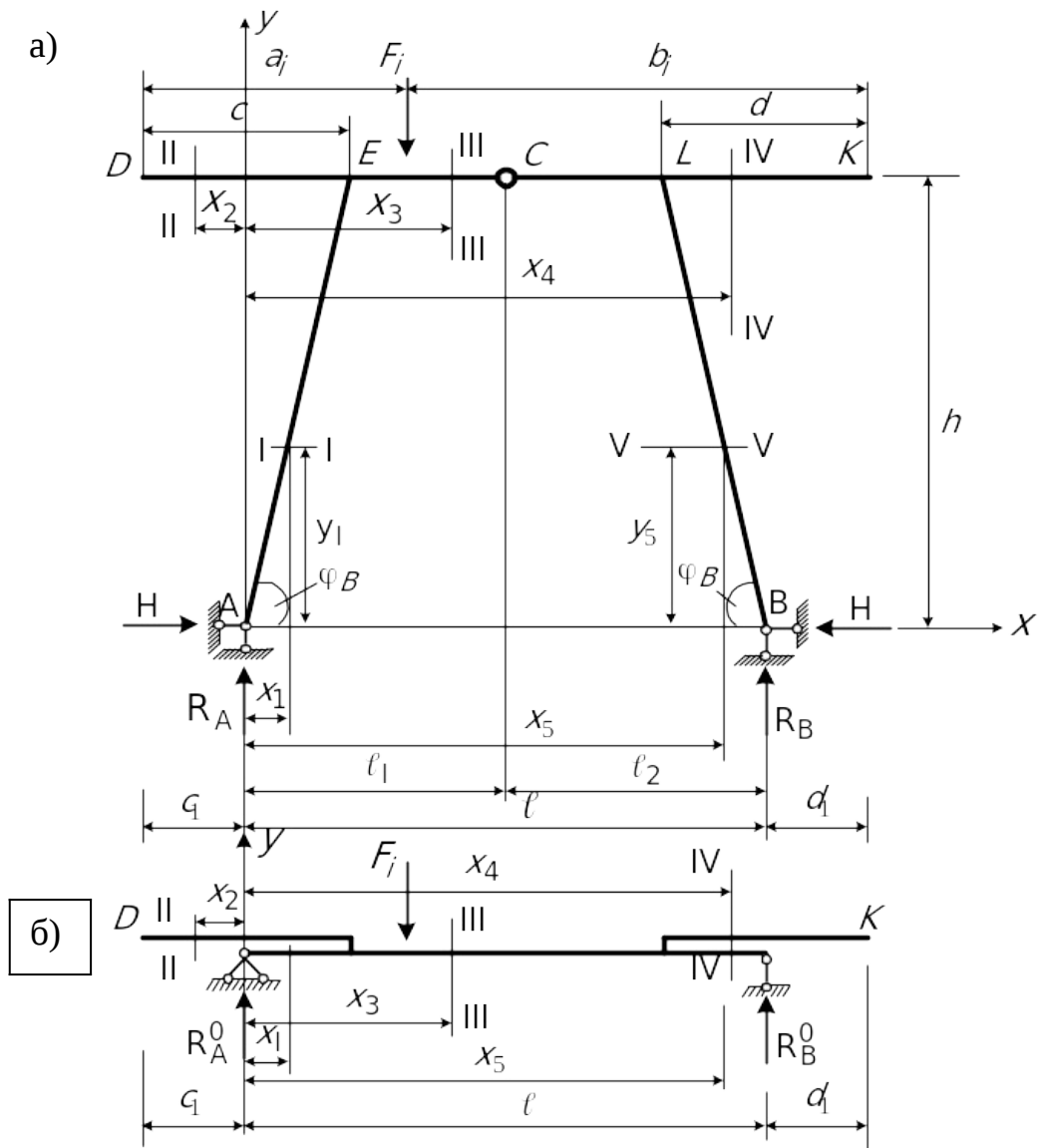


Рис. 2.9. Розрахункова схема тришарнірної рами з нахиленими стояками

Ділянка DE $\left[y = h, \quad (c - c_1) \geq x_2 \geq 0, \quad -c_1 \leq x_2 \leq 0 \right]$:

$$M_{x_2} = M_{x_2}^0; \quad Q_{x_2} = Q_{x_2}^0; \quad N_{x_2} = 0.$$

Ділянка ECL $\left[y = h, \quad (c - c_1) \leq x_3 \leq (\ell + d_1 - d) \right]$:

$$M_{x_3} = M_{x_3}^0 - Hh; \quad Q_{x_3} = Q_{x_3}^0; \quad N_{x_3} = -H.$$

Ділянка LK $\left[y = h, \quad (\ell + d_1) \geq x_4 \geq (\ell + d_1 - d) \right]$:

$$M_{x_4} = M_{x_4}^0; \quad Q_{x_4} = Q_{x_4}^0; \quad N_{x_4} = 0.$$

Ділянка BL $\left[h \geq y_5 \geq 0, \quad \ell \geq x_5 \geq (\ell + d_1 - d) \right]$:

$$M_{x_5} = R_B x_5 - H y_5; \quad Q_{x_5} = -R_B \cos \varphi_B + H \sin \varphi_B;$$

$$N_{x_5} = -\left(R_B \sin \varphi_B + H \cos \varphi_B \right).$$

2.2. Лінії впливу в перерізах тришарнірної арки

При побудові ліній впливу в тришарнірній арці використовуємо раніше отримані формули (2.2) – (2.5). Тоді лінія впливу розпору H дорівнює лінії впливу балкового згинального моменту в перерізі C , всі ординати якої зменшено на постійне число $\left| \frac{1}{f} \right|$, тобто

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \left(\frac{1}{f} \right). \quad (2.28)$$

Аналогічно, лінії впливу згинального моменту в перерізі являють собою суму двох ліній впливу: лінії впливу згинального балкового моменту в перерізі X і лінії впливу розпору H , всі ординати якої помножено на постійне число $(-y_x)$:

$$\text{л.в. } M_x = \text{л.в. } M_x^0 + \text{л.в. } H(-y_x). \quad (2.29)$$

Для побудови лінії впливу Q_x і N_x використовуємо такі рівності:

$$\text{л.в. } Q_x = \text{л.в. } Q_x^0 \cos \varphi_x + \text{л.в. } H(-\sin \varphi_x); \quad (2.30)$$

$$\text{л.в. } N_x = \text{л.в. } Q_x^0(-\sin \varphi_x) + \text{л.в. } H(-\cos \varphi_x). \quad (2.31)$$

На рис. 2.10 показано лінії впливу H , M_x , Q_x , N_x і процес їхньої побудови. Величина виступу (стрибка) на л.в. Q_x у перерізі X дорівнює $\cos \varphi_x$, а на л.в. N_x – $\sin \varphi_x$.

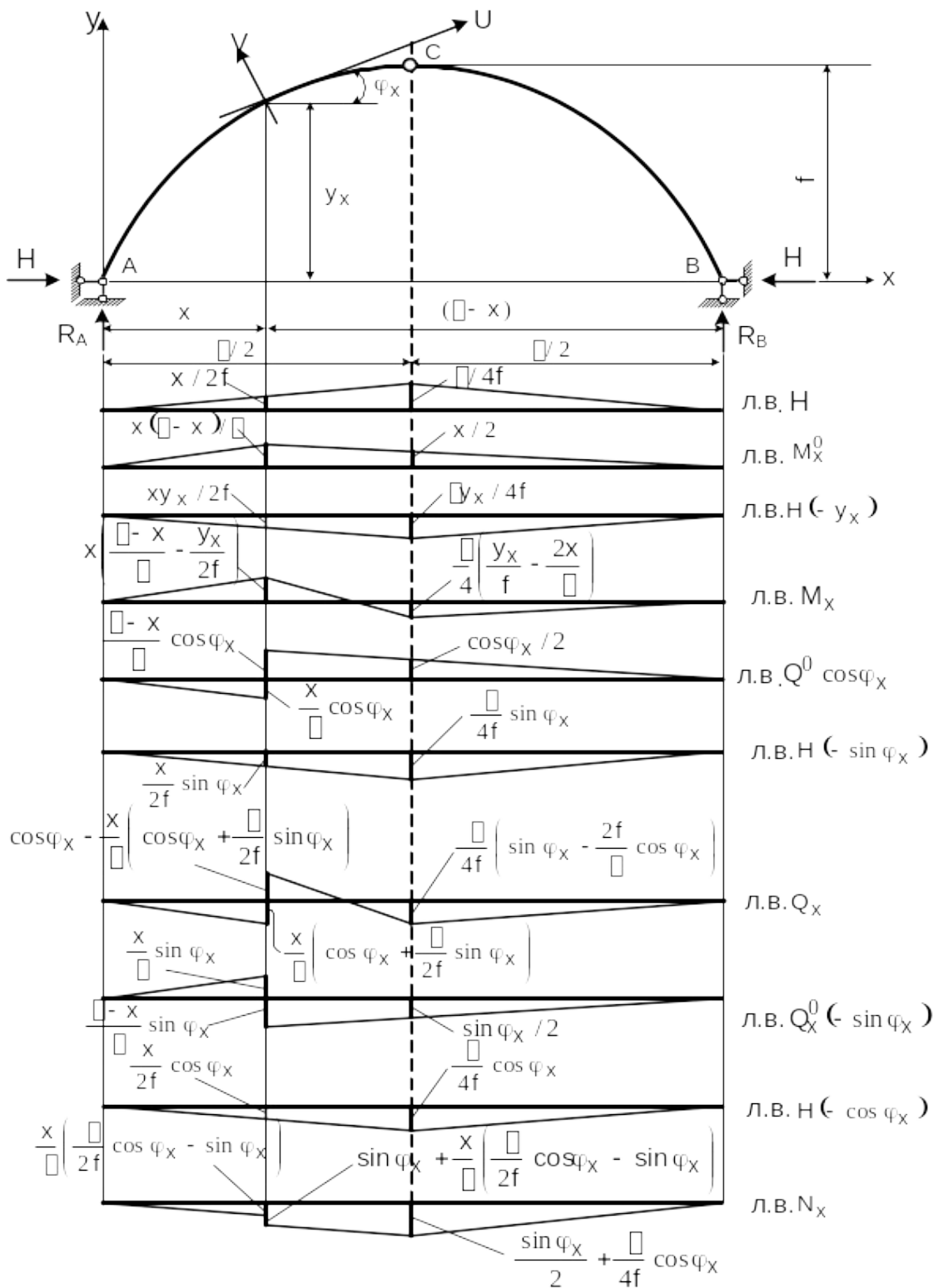


Рис. 2.10. Лінії впливу в перерізі тришарнірної арки

Звернемо увагу на особливості побудови ліній впливу в перерізах тришарнірної арки з затягуванням (п. 2.1.1, рис. 2.2) і систем, що включають тришарнірну арку (п. 2.1.2, рис. 2.3, 2.4). Лінія впливу зусилля в затягуванні будується за формулою (2.8). Якщо переріз проведено на ділянках AD і BE , то лінії впливу

M_x , Q_x , N_x будуються відповідно до формул (2.9) – (2.11). Якщо ж переріз належить ділянці DCE , то основою для побудови ліній впливу є формули (2.12) – (2.14). У тришарнірній системі, показаній на рис. 2.3, лінія впливу розпору будується за рівнянням (2.15). Для перерізу, розташованого на ділянці DCE , застосовуються формули (2.16). Для перерізів на ділянках AD і BE – відповідно (2.17) – (2.19) і (2.20).

Для системи, зображеної на рис. 2.4, лінія впливу в перерізі, розташованому на ділянці ACB , будується, як і у звичайній тришарнірній арці з прогоном ℓ_1 і стрілою підйому f_1 (див. рис. 2.10). Якщо ж переріз проведений в межах консольної частини, то спочатку будується лінія впливу для консольної частини, а потім поширюється на частину ACB системи. Наприклад, побудуємо лінії впливу M_x , Q_x , N_x у перерізі X , проведеному на ділянці DA (рис. 2.11).

Відповідно до формул (2.3) – (2.5) при $H = 0$ маємо

$$\begin{aligned} \text{л.в. } M_x &= \text{л.в. } M_x^0; \\ \text{л.в. } Q_x &= \text{л.в. } Q_x^0 \cos \varphi_x; \\ \text{л.в. } N_x &= \text{л.в. } Q_x^0 (-\sin \varphi_x). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Тепер залишилося побудувати балкові лінії впливу M_x^0 і Q_x^0 (рис. 2.11, б), скоригувати їх відповідно до виразів (2.32) і поширити на ділянку ACB (рис. 2.11, а).

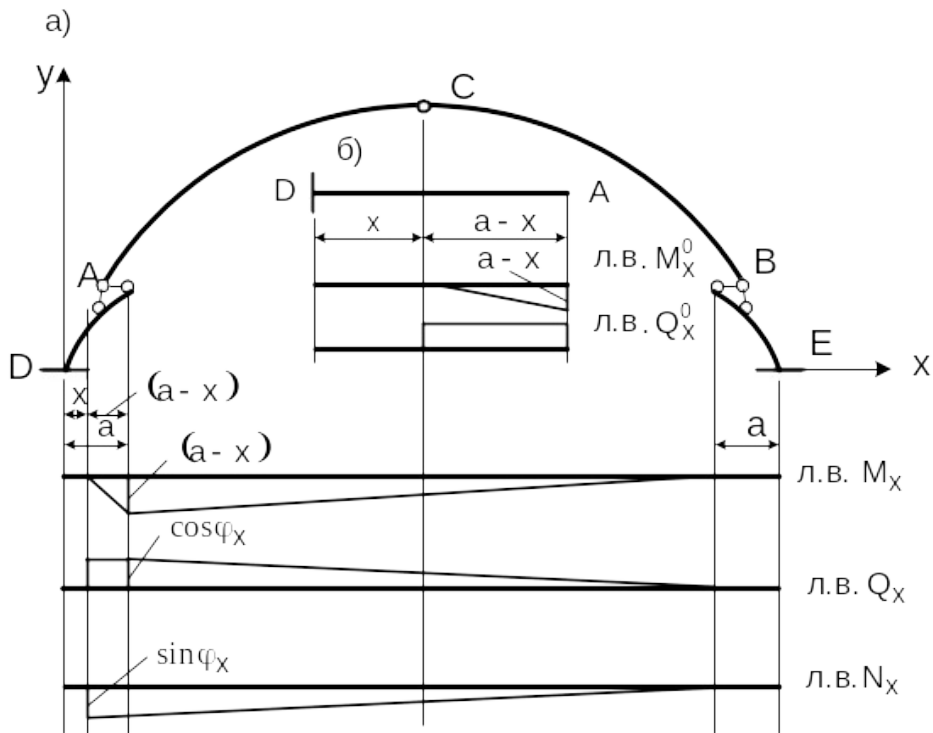


Рис. 2.11. Лінії впливу в перерізі консольної частини тришарнірної системи

2.3. Лінії впливу в перерізах тришарнірних рам

Побудуємо спочатку лінії впливу в тришарнірній рамі, опори якої розташовані на різних рівнях (рис. 2.12, а, рис. 2.7). Почнемо з лінії впливу опорної реакції R_A .

Припустимо, що одиничний вантаж переміщується по ділянці DC $0 \leq x \leq (\ell_1 + c)$. Скористаємося отриманою раніше формулою (2.23). Маємо

$$R_A \ell_1 - (\ell_1 + c - x) = [R_A \ell - (\ell + c - x)] \frac{h_1}{h_1 - h_2}.$$

Звідси знайдемо

$$R_A = \frac{-(\ell + c - x)h_1 + (\ell_1 + c - x)(h_1 - h_2)}{\ell_1(h_1 - h_2) - \ell h_1}. \quad (2.33)$$

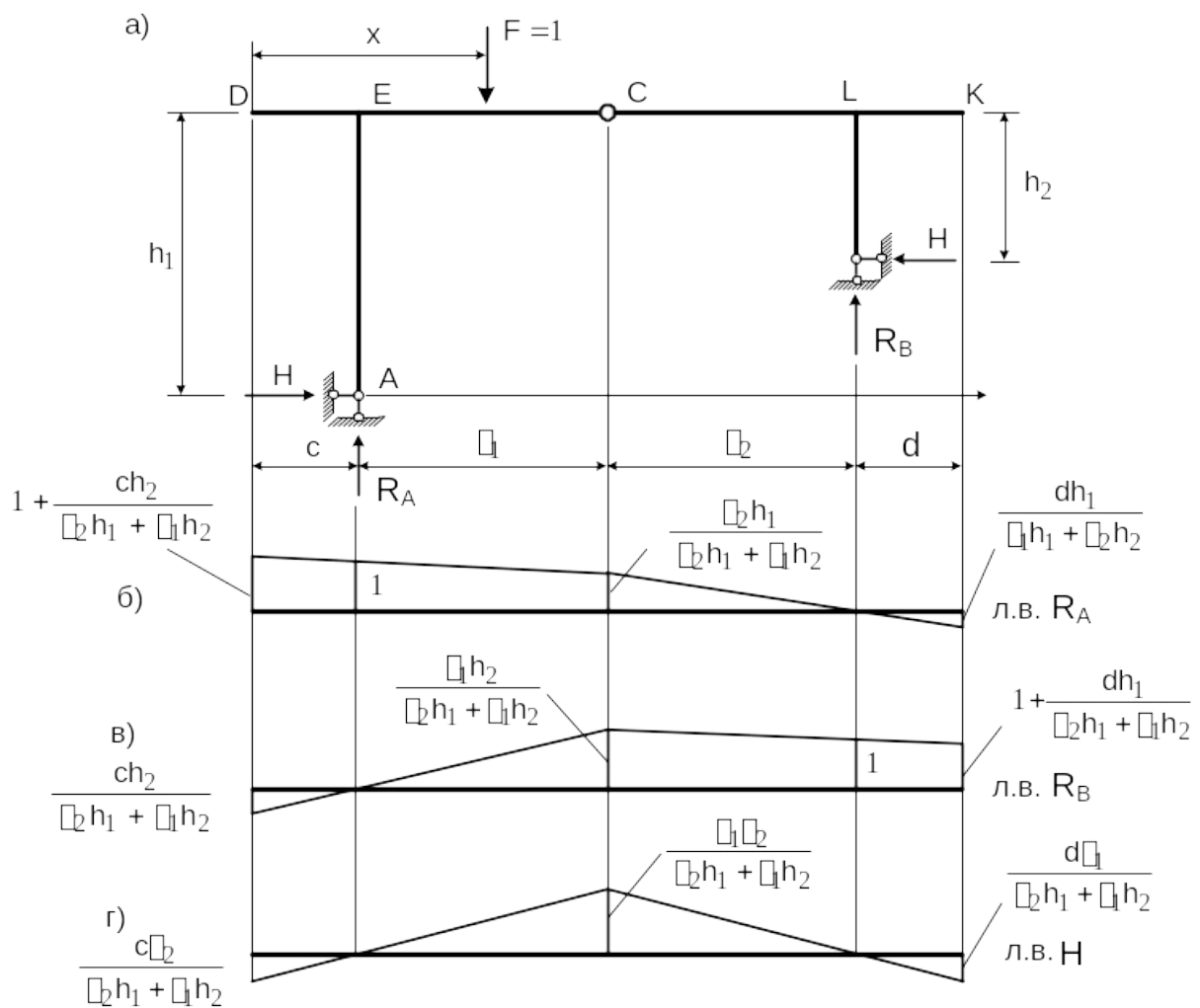


Рис. 2.12. Лінії впливу опорних реакцій у тришарнірній рамі

Таким чином, ми одержали рівняння лінії впливу R_A на ділянці DC .

Припустимо тепер, що вантаж розташовано на ділянці CK $(\ell_1 + c) \leq x \leq (\ell_1 + c + d)$. Використовуючи ту саму формулу (2.33), знайдемо

$$R_A = - \frac{(\ell_1 + c - x)h_1}{\ell_1(h_1 - h_2) - \ell h_1} \quad (2.34)$$

Аналогічно, скориставшись формулою (2.25), одержимо рівняння для лінії впливу R_B .

Вантаж $F = 1$ на ділянці CK $(\ell_1 + c) \leq x \leq (\ell_1 + c + d)$:

$$R_B = \frac{(x - c)h_2 + (x - c - \ell_1)(h_1 - h_2)}{\ell_2(h_1 - h_2) + \ell h_2} \quad (2.35)$$

Вантаж $F = 1$ на ділянці CD $0 \leq x \leq (\ell_1 + c)$:

$$R_B = \frac{(x - c)h_2}{\ell_2(h_1 - h_2) + \ell h_2}. \quad (2.36)$$

Лінії впливу R_A і R_B показано на рис. 2.12, б, в.

Побудуємо лінію впливу розпору H . Вантаж на ділянці CK . Складаємо рівняння рівноваги $\sum M_C = 0$:

$$R_A \ell_1 - H h_1 = 0.$$

Звідси

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } R_A \frac{\ell_1}{h_1}. \quad (2.37)$$

Отже, лінія впливу розпору H на ділянці CK буде такою самою, як і лінія впливу R_A на цій ділянці, всі ординати якої помножено на постійне число $\frac{\ell_1}{h_1}$.

Вантаж на ділянці CD . Тепер складаємо рівняння $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$:

$$R_B \ell_2 - H h_2 = 0,$$

звідки

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } R_B \frac{\ell_2}{h_2}. \quad (2.38)$$

Міркуючи так само, як і в попередньому випадку, бачимо, що лінія впливу розпору H на ділянці CD буде такою самою, як і лінія впливу R_B , всі ординати якої помножені на $\frac{\ell_2}{h_2}$.

Лінія впливу H показана на рис. 2.12, г. Лінії впливу згинального моменту, поздовжньої та поперечної сили на ділянці ECL будуються через лінії впливу R_A , R_B і H . Для побудови ліній впливу в перерізах ділянок DE , LK , AE , BL варто скористатися отриманими раніше формулами (п. 2.1.3).

Якщо опори тришарнірної рами розташовано на одному рівні, то побудова ліній впливу зусиль у її перерізах значно спрощується. Покажемо це на прикладі тришарнірної рами, зображеної на рис. 2.13, а.

Лінія впливу розпору будується відповідно до формули (2.27) (рис. 2.13, б):

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{h}.$$

Лінії впливу M_x , Q_x , N_x на ділянці ECL описуються такими рівняннями (рис. 2.13, в – и):

$$\begin{aligned} \text{л.в. } M_x &= \text{л.в. } M_x^0 - \text{л.в. } H(h); \\ \text{л.в. } Q_x &= \text{л.в. } Q_x^0; \\ \text{л.в. } N_x &= \text{л.в. } H(-1). \end{aligned}$$

Лінії впливу M_y , Q_y , N_y у перерізі U на ділянці AE будуються таким чином:

$$\begin{aligned} \text{л.в. } M_y &= \text{л.в. } H(-y); \\ \text{л.в. } Q_y &= \text{л.в. } H(-1); \\ \text{л.в. } N_y &= \text{л.в. } R_A(-1). \end{aligned}$$

Указані лінії – на рис. 2.13, и, к, л.

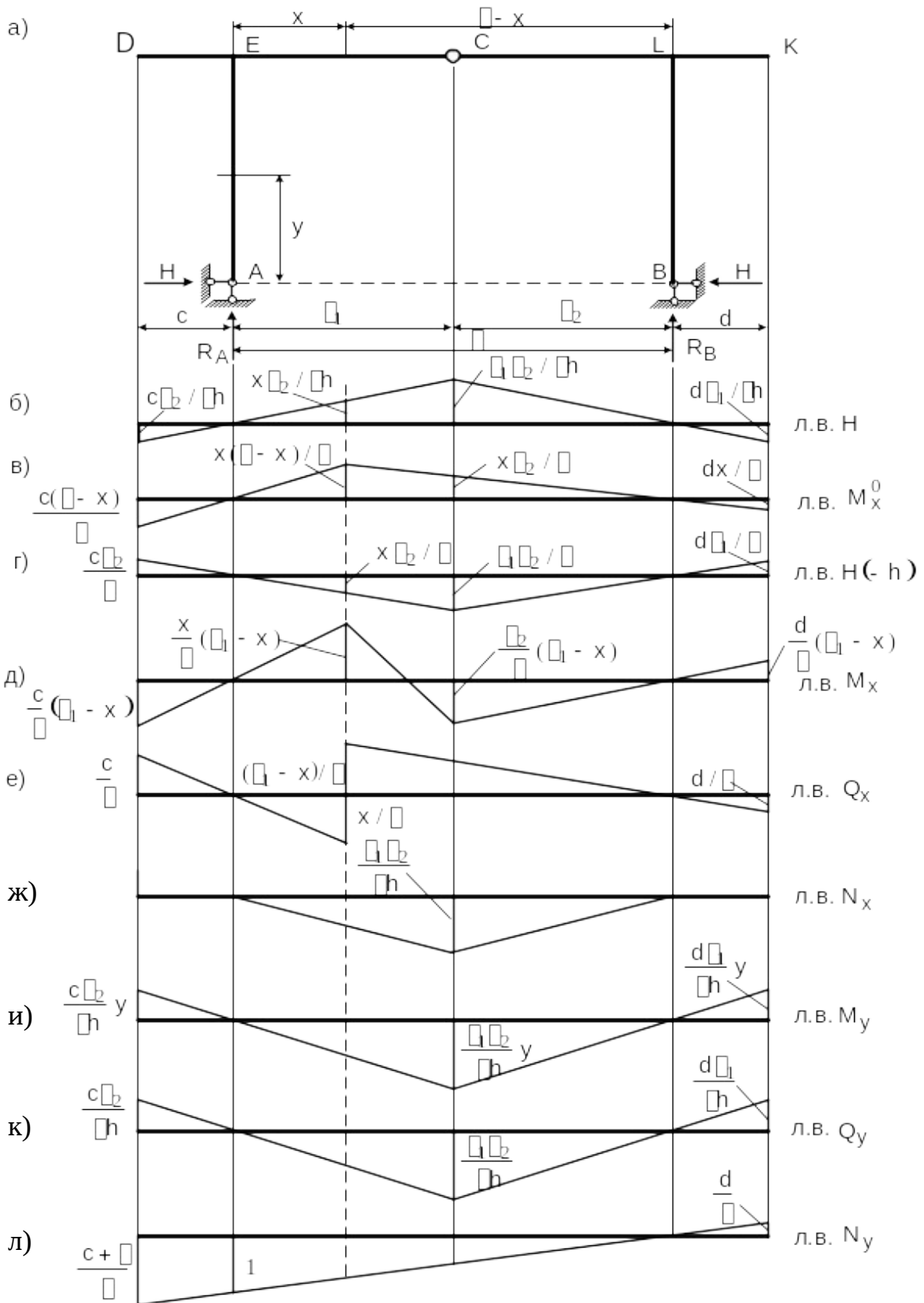


Рис. 2.13. Лінії впливу в перерізах тришарнірної рами з опорами на одному рівні

3. РОЗРАХУНОК АРКОВИХ ФЕРМ

Тришарнірна арка, у якій обидві половини арки AC і CB являють собою ферми, називається тришарнірною арковою фермою. Розрахунок тришарнірних аркових ферм провадиться на основі описаних прийомів розрахунку тришарнірної арки з суцільною стінкою (див. п. 2.1). При цьому використовуються також способи розрахунку звичайних ферм на рухоме і нерухоме навантаження.

3.1. Розрахунок аркових ферм на нерухоме навантаження

Вертикальні опорні реакції R_A і R_B в арковій фермі дорівнюють балковим опорним реакціям R_A^0 та R_B^0 (рис. 3.1, б).

Горизонтальні опорні реакції визначаються за формулою (2.2), отриманою при розрахунку тришарнірних арок, із заміною в ній f на h або за формулою (2.27) для тришарнірних рам:

$$H = \frac{M_C^0}{h}.$$

Покажемо тепер, як визначити зусилля в стрижнях аркової ферми, наприклад, 7-8, 16-8, 16-15.

Зусилля в стрижні 7-8. Проводимо переріз I-I (рис. 3.1, а). Визначаємо моментну точку, тобто точку, де перетинаються стрижні 16-8 і 16-15. Це точка 16. Довжину перпендикуляра, опущеного з точки 16 на напрямок стрижня 7-8, позначимо через h_1 . Складемо рівняння рівноваги $\sum M_{16}^{np} = 0$. У результаті одержуємо

$$R_B \cdot 3d - H \cdot f_{16} + S_{7-8} \cdot h_1 - F_4 \cdot d = 0.$$

Звідси визначаємо невідоме зусилля S_{7-8} .

Зусилля в стрижні 16-8. Моментна точка C . Довжина перпендикуляра, опущеного з точки C на напрямок стрижня 16-8, дорівнює h_2 (рис. 3.1, а).

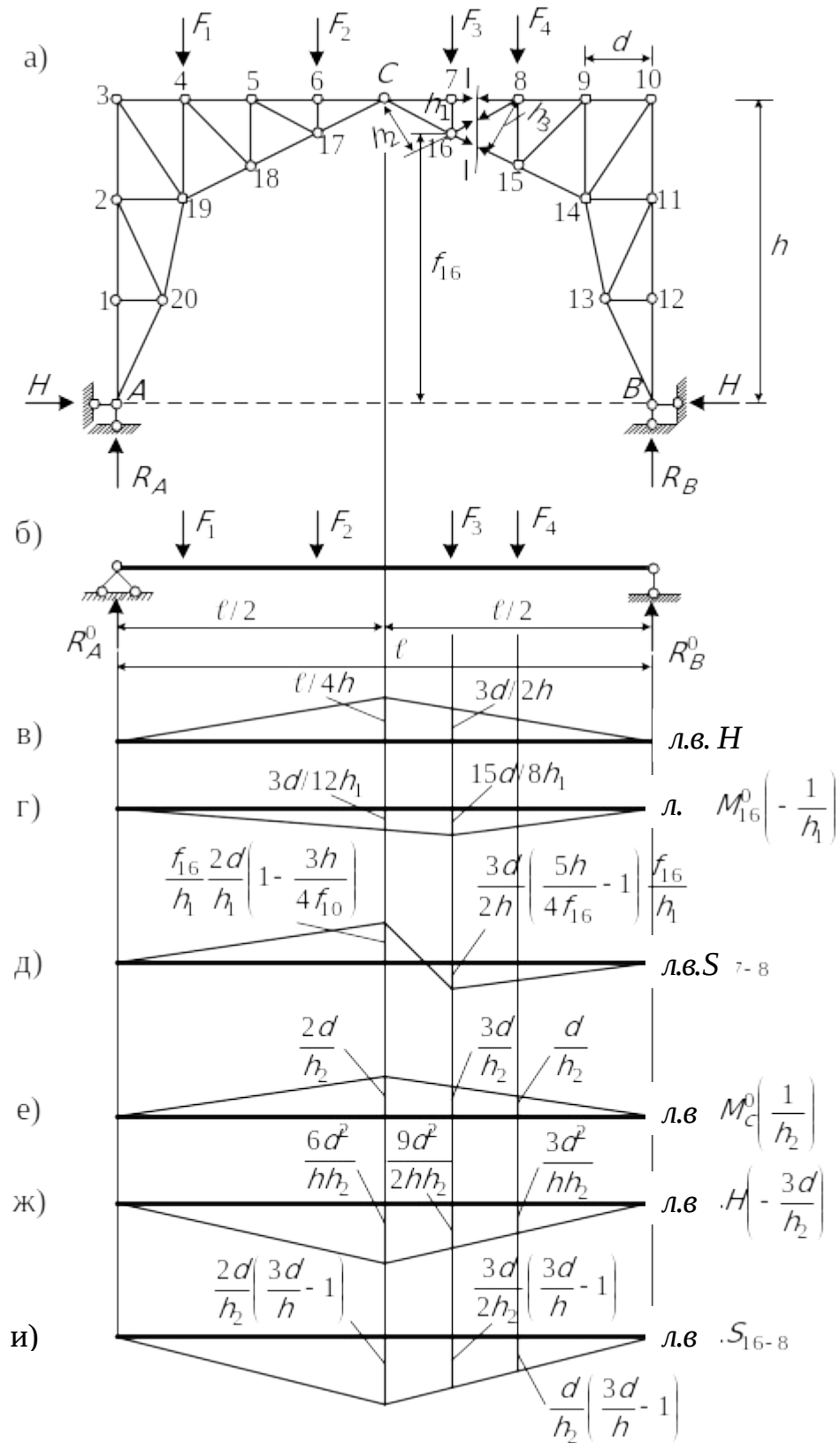


Рис. 3.1. Розрахункова схема аркової ферми та лінії впливу зусиль

Рівняння рівноваги $\sum M_C^{лів} = 0$:

$$R_A \cdot 4d - H \cdot h - F_1 \cdot 3d - F_2 \cdot d - S_{16-8} \cdot h_2 + F_3 \cdot d = 0.$$

Звідси знаходимо зусилля S_{16-8} .

Зусилля в стрижні 16-15. Моментна точка 8. Відстань від стрижня до моментної точки 8 – h_3 .

Рівняння рівноваги $\sum M_C^{лів} = 0$:

$$R_B \cdot 2d - H \cdot h - S_{16-15} \cdot h_3 = 0.$$

З цього рівняння і визначається зусилля S_{16-15} . Як і раніше, звернемо увагу на те, що в отриманих формулах розпір H значно зменшує зусилля в стрижнях аркової ферми порівняно з зусиллями в балкових фермах. Це дозволяє одержати економію матеріалу і збільшити той граничний прогін, що може бути перекритий даною системою.

3.2. Лінії впливу в стрижнях аркових ферм

Лінія впливу розпору H . У відповідності з формулою (2.27):

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{h}.$$

Лінія впливу показана на рис. 3.1, в.

Лінія впливу зусилля в стрижні 7-8. Скористаємося перерізом I-I (рис. 3.1, а). Знайдемо моментну точку (тобто точку, де перехрещуються стрижні 16-8 і 16-15). Це точка 16. Розсічена панель 7-8. Розглянемо два положення одиничного вантажу.

1. Вантаж на ділянці 8-10. Візьмемо суму моментів лівих сил відносно точки 16:

$$R_A \cdot 5d - H \cdot f_{16} + S_{7-8} \cdot h_1 = 0.$$

2. Вантаж на ділянці 3-7. Тепер запишемо рівняння моментів правих сил відносно точки 16. Маємо

$$R_B \cdot 3d - H \cdot f_{16} + S_{7-8} \cdot h_1 = 0.$$

Замінімо в отриманих рівняннях

$$R_A \cdot 5d = R_B \cdot 3d = M_{16}^0.$$

Тоді рівняння шуканої лінії впливу набуває вигляду

$$\text{л.в. } S_{7-8} = - \text{ л.в. } M_{16}^0 \left(\frac{1}{h_1} \right) + \text{ л.в. } H \frac{f_{16}}{h_1}.$$

Побудову цієї лінії впливу показано на рис. 3.1, г.

Лінія впливу в стрижні 16-8. Для знаходження зусилля в стрижні 16-8 від одиничного навантаження скористаємося також перерізом I-I (рис. 3.1, а). Моментною точкою в цьому випадку буде точка С. При перебуванні вантажу зліва і справа від розсіченої панелі 7-8 рівняння лінії впливу S_{16-8} будуть мати такий вигляд:

– вантаж на ділянці 8-10 (справа від розрахункової панелі):

$$S_{16-8} = R_A \frac{4d}{h_2} - H \frac{3d}{h_2};$$

– вантаж на ділянці 7-3 (зліва від розрахункової панелі):

$$S_{16-8} = R_B \frac{4d}{h_2} - H \frac{3d}{h_2}.$$

Замінімо в отриманих рівняннях

$$R_A \cdot 4d = R_B \cdot 4d = M_C^0$$

і тоді

$$\text{л.в. } S_{16-8} = \text{ л.в. } M_C^0 \left(\frac{1}{h_2} \right) - \text{ л.в. } H \frac{3d}{h_2}.$$

4. РОЗРАХУНОК КОМБІНОВАНИХ СИСТЕМ

Розглянемо комбіновану систему, що складається з шарнірного ланцюга і двох балкових ферм, з'єднаних шарніром (рис. 4.1, а).

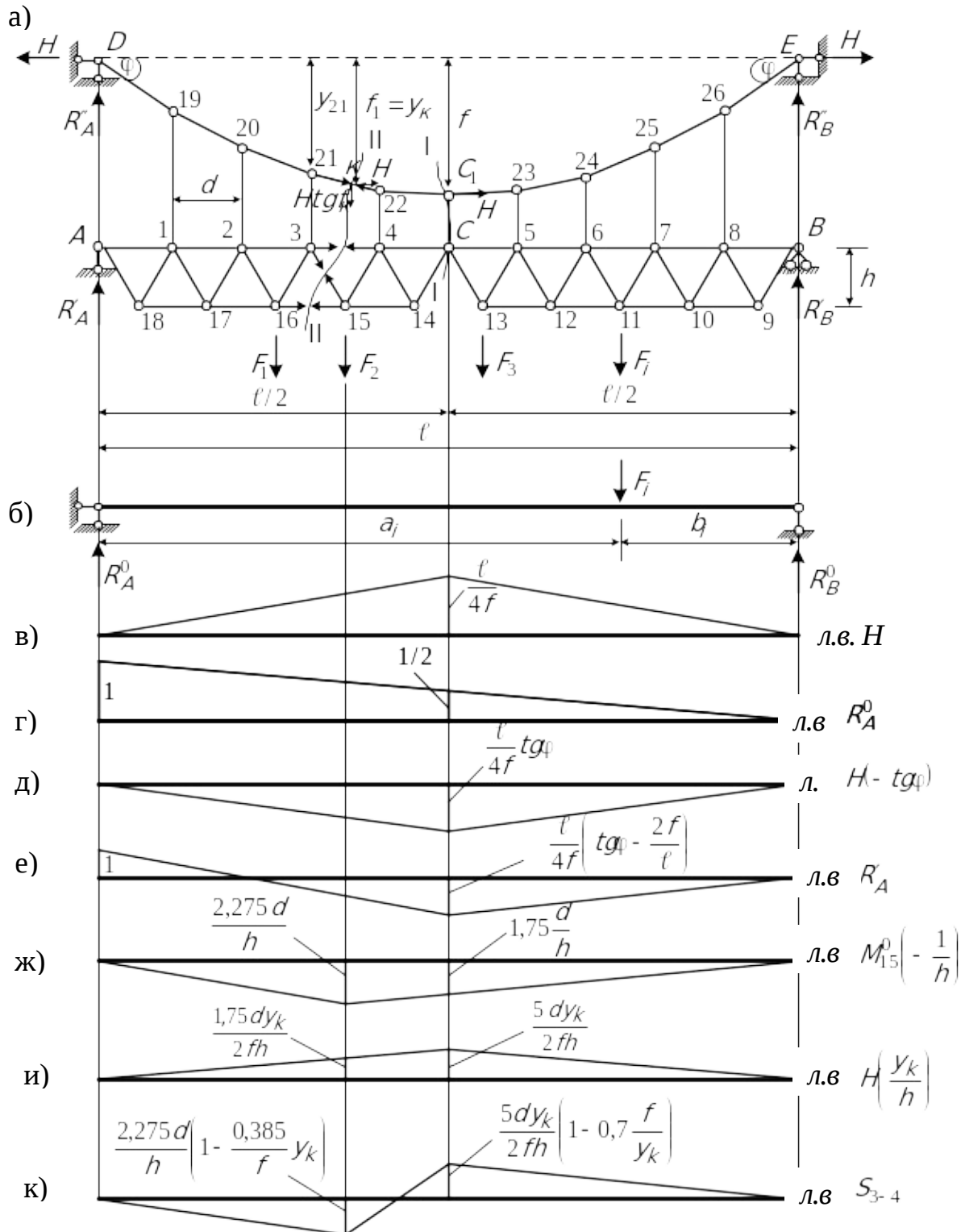


Рис. 4.1. Розрахункова схема комбінованої системи та лінії впливу зусиль

Система, яка показана на цьому рисунку, геометрично незмінна і статично визначна. Дійсно, якби проїзна частина

(ферми AC і CB) не була підкріплена ланцюгом, то вона мала б один ступінь свободи. Але до проїзної частини приєднується за допомогою вертикальних елементів (підвісок) трос, прикріплений до нерухомих опор D і E . Таким чином, трос позбавляє ферму проїзної частини відзначеного вище ступеня свободи, тобто робить ферму геометрично незмінною. Через те що підвіски вертикальні, зусилля в усіх елементах ланцюга (троса) мають ту саму горизонтальну проекцію. Будемо називати її, як і в аркових системах, розпором і позначати буквою H .

На розрахунок, що буде викладений нижче, необхідно дивитися як на наближений, тому що подовження троса враховуватися не буде. Зазначимо, що для статично визначної висячої системи, яка тут розглядається, розрахунок за деформованою схемою (з урахуванням подовження троса) не має істотного значення. Це пояснюється такою обставиною. Згинальний момент, як буде показано далі, у довільному перерізі балки жорсткості дорівнює

$$M_x = M_x^0 - Hf_1 = M_x^0 - M_C^0 \frac{f_1}{f},$$

де f_1 – відстань від горизонталі (вісь X) до троса в перерізі, який розглядається (рис. 4.1, а);

f – стріла провисання троса в перерізі C .

Коли трос подовжується, то f_1 і f одночасно збільшуються, тому згинальний момент змінюється мало. Деформація троса, викликана навантаженням, має особливе значення для статично невизначних висячих мостів, де подовження троса значно впливає на згинальний момент у балці.

При розрахунку обмежимося, як і раніше, випадком вертикального навантаження.

4.1. Розрахунок комбінованих систем на нерухоме навантаження

Знайдемо вертикальні опорні реакції. Для їхнього визначення складемо рівняння у формі моментів усіх сил, що діють на систему відносно шарнірів D і E . У результаті одержимо

$$R_A^0 = R'_A + R''_A = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i b_i; \quad (4.1)$$

$$R_B^0 = R'_B + R''_B = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i a_i, \quad (4.2)$$

де R_A^0 , R_B^0 – вертикальні реакції, що виникли б на опорах A і B , якби вся система, що розглядається, була замінена балкою AB (рис. 4.1, б);

$$R''_A = H \operatorname{tg} \varphi; \quad R''_B = H \operatorname{tg} \varphi; \quad (4.3)$$

$$R'_A = R_A^0 - H \operatorname{tg} \varphi; \quad R'_B = R_B^0 - H \operatorname{tg} \varphi.$$

Для визначення горизонтального складового зусилля (розпору) у тросі H скористаємося рівнянням

$$\sum M_{\text{лів}}^0 = 0$$

(переріз I-I на рис. 4.1, а).

У результаті одержимо формулу аналогічну (2.2), тобто

$$H = \frac{M_C^0}{f}, \quad (4.4)$$

де f – стріла провисання троса (рис. 4.1, а);

M_C^0 – балковий згинальний момент у перерізі C балки AB (рис. 4.1, б).

Знайдемо зусилля в підвісці 20-2. Виріжемо вузол 20 і розглянемо його рівновагу (рис. 4.2).

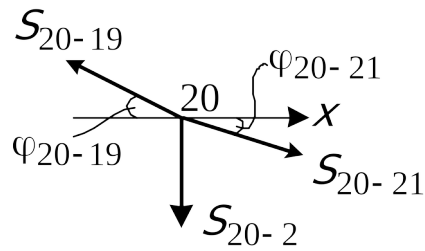


Рис. 4.2. Схема зусиль, що діють на вузол 20

Спроекуємо всі сили, що діють на вузол, на вісь X і врахуємо, що зусилля в елементах троса мають ту саму горизонтальну проекцію H . Одержимо

$$S_{20-19} \cos \varphi_{20-19} = S_{20-21} \cos \varphi_{20-21} = H.$$

Звідси знайдемо

$$S_{20-19} = \frac{H}{\cos \varphi_{20-19}}; \quad S_{20-21} = \frac{H}{\cos \varphi_{20-21}}. \quad (4.5)$$

Тепер спроекуємо всі сили на вертикальну вісь Y :

$$S_{20-2} - S_{20-19} \sin \varphi_{20-19} + S_{20-21} \sin \varphi_{20-21} = 0.$$

З урахуванням виразів (4.5), знайдемо зусилля в підвісці

$$S_{20-2} = H \left(\operatorname{tg} \varphi_{20-19} - \operatorname{tg} \varphi_{20-21} \right). \quad (4.6)$$

Цю формулу поширимо на n -й вузол:

$$S_n = H \left(\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1} \right), \quad (4.7)$$

де α_n, α_{n+1} – кути нахилу троса відповідно зліва і справа від підвіски.

Тепер залишилося знайти зусилля в стержнях проїзної частини. Розглянемо стрижні 3-4, 3-15, 16-15 (рис. 4.1, а).

Зусилля в стрижні 3-4. Проведемо переріз II-II (див. рис. 4.1, а). Зусилля в тросі розкладемо на горизонтальну H і

вертикальну складову $Htg\varphi_k$. Точка k на тросі – це вертикальна проекція точки 15, тобто моментної точки, у якій перетинаються стрижні 3-15 і 16-15. Складемо рівняння моментів усіх сил, розташованих зліва (справа) від перерізу:

$$M_{15}^0 - Hy_k + S_{3-4} h = 0,$$

де M_{15}^0 – балковий згинальний момент у перерізі 15 балки AB (рис. 4.1, б).

З цього рівняння знайдемо зусилля S_{3-4} .

Зусилля в стрижні 3-15. Скористаємося способом проєкцій усіх сил, розташованих зліва від перерізу. У результаті одержимо

$$Q_{лів}^0 - Htg\varphi_k - S_{3-15} \sin\alpha = 0,$$

де $Q_{лів}^0 = R_A^0 - \sum_{i=1}^m F_i$; m – число зосереджених сил, розташованих зліва від перерізу II (рис. 4.1, б) у балці AB .

Зусилля в стрижні 16-15. Складемо рівняння моментів лівих (правих) сил відносно точки 3:

$$M_3^0 - Hy_{21} - S_{16-15} h = 0.$$

Звідси ми і визначимо невідоме зусилля в стрижні проїзної частини S_{16-15} . Аналогічно знаходяться зусилля в усіх інших стрижнях ферми.

Якщо функції проїзної частини системи виконує суцільна балка (із середнім шарніром C), то згинальний момент і поперечна сила в будь-якому її перерізі визначаються за формулами

$$M_x = M_x^0 - Hy_x, \quad (4.8)$$

$$Q_x = Q_x^0 - Htg\varphi_x. \quad (4.9)$$

4.2. Лінії впливу в перерізах комбінованої системи

Лінія впливу горизонтальної складової зусилля в тросі (розпорі H)

На підставі формули (4.4) маємо

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{f}.$$

Лінія впливу розпору H показана на рис. 4.1, в.

Лінія впливу опорної реакції R'_A . З формули (4.3) бачимо, що лінія впливу R'_A дорівнює алгебраїчній сумі двох ліній впливу (рис. 4.1, г, д):

$$\text{л.в. } R'_A = \text{л.в. } R_A^0 + \text{л.в. } H(-\operatorname{tg}\varphi).$$

Звертає на себе увагу значне розвантаження балкової ферми, обумовлене впливом розпору H . Лінія впливу має від'ємну ділянку (рис. 4.1, г): навантаження, розташоване на цій ділянці, викликає реакцію R'_A , спрямовану вниз, причому лівий кінець балкової ферми намагається відірватися від опори.

Лінія впливу зусилля в стрижні 3-4. Відповідно до наведеної раніше формули

$$\text{л.в. } S_{3-4} = \text{л.в. } M_{15}^0 \left(-\frac{1}{h} \right) + \text{л.в. } H \frac{y_k}{h}.$$

Процес побудови цієї лінії впливу показано на рис. 4.1, д.

5. ЗАВДАННЯ: РОЗРАХУНОК РОЗПІРНИХ СИСТЕМ НА НЕРУХОМЕ І РУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

План розв'язання задачі

Схеми 1 – 12, 16

1. Від заданого навантаження визначити зусилля M , Q , N (для схеми "16" – M , Q) у перерізі k .
2. Побудувати лінії впливу M , Q , N (для схеми "16" – M , Q) у зазначеному перерізі.
3. Визначити зусилля по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти з даними, отриманими в пункті 1.

Схеми 13, 14, 15, 17, 18

1. Від заданого навантаження визначити зусилля в позначених стрижнях ферм.
2. Побудувати лінії впливу в позначених стрижнях.
3. Визначити зусилля по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти з даними, отриманими в пункті 1.

Дані для розрахунку наведено в табл. 5.1, схеми варіантів – на рис. 5.1.

Таблиця 5.1

Дані для розрахунку

Варіант	l , м	F , кН	Q , кН/м
1	30	100	10
2	24	60	15
3	36	90	20
4	42	70	30
5	30	80	15
6	24	50	10
7	36	90	25
8	42	110	30
9	48	40	35
10	30	85	20
11	24	75	25
12	36	80	20
13	32	65	40
14	30	70	20
15	24	55	25
16	42	60	10
17	48	40	20
18	30	50	30

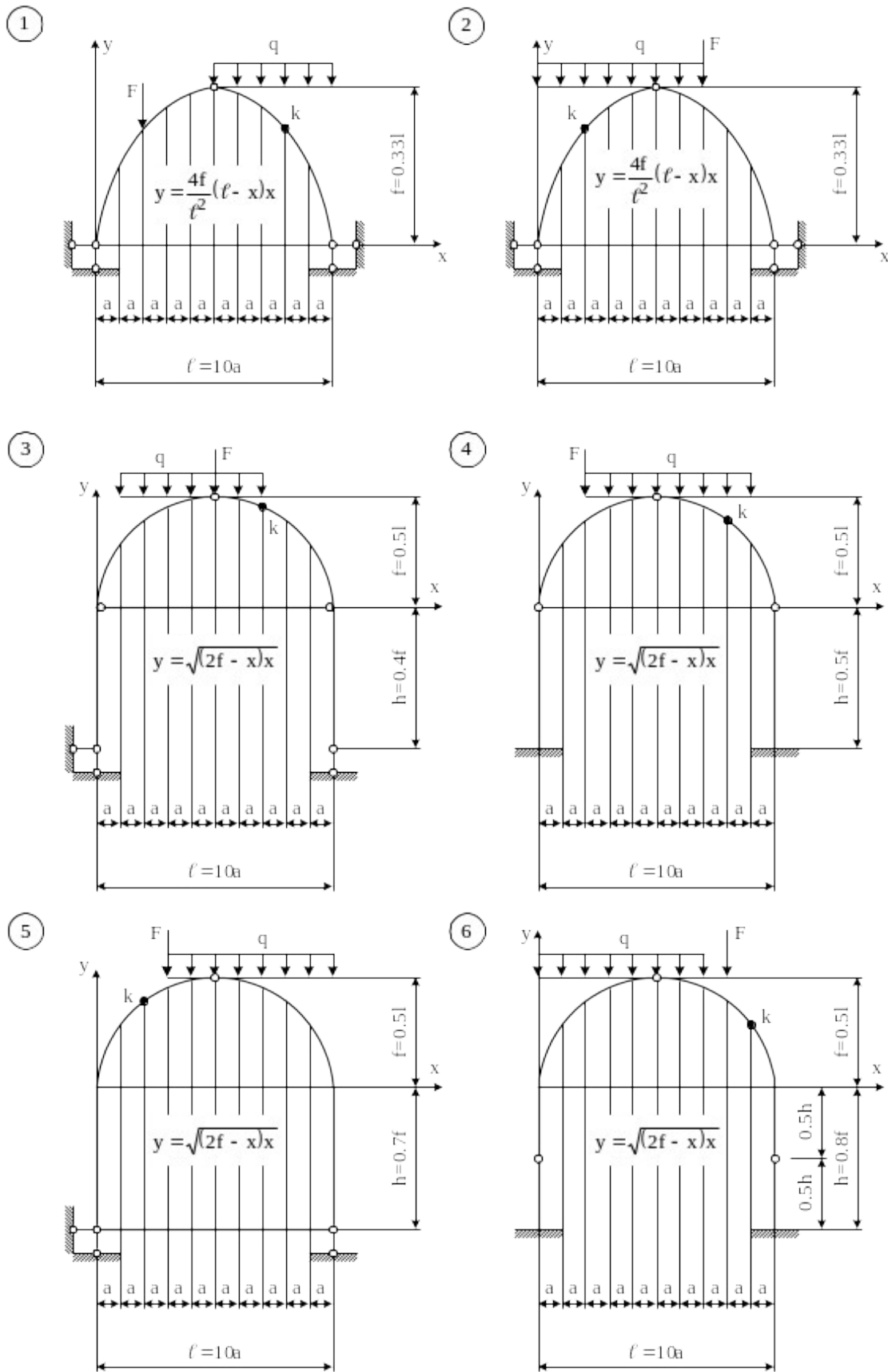


Рис. 5.1. Розрахункові схеми розпирних систем

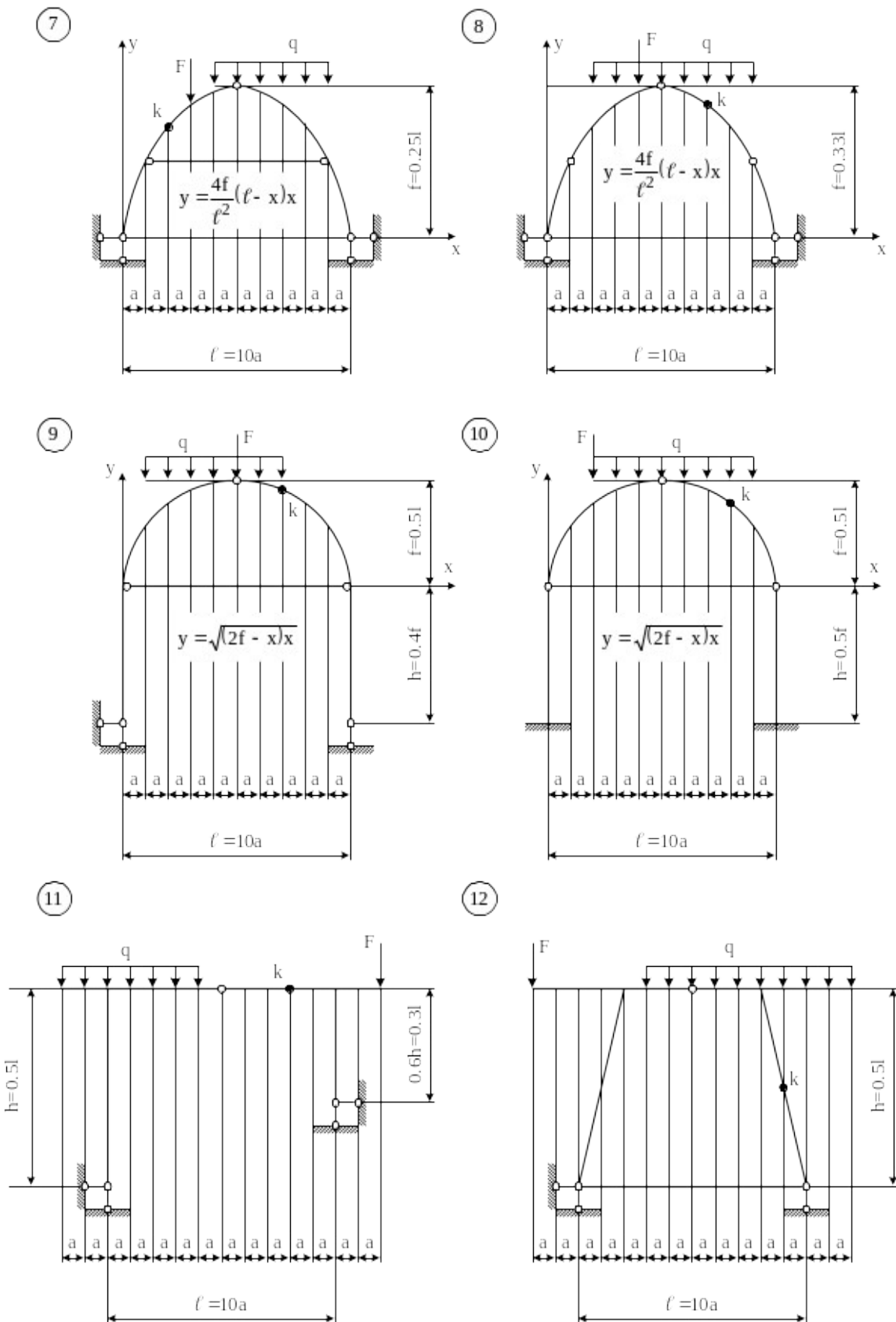


Рис. 5.1. Розрахункові схеми розпірних систем, аркуш 2

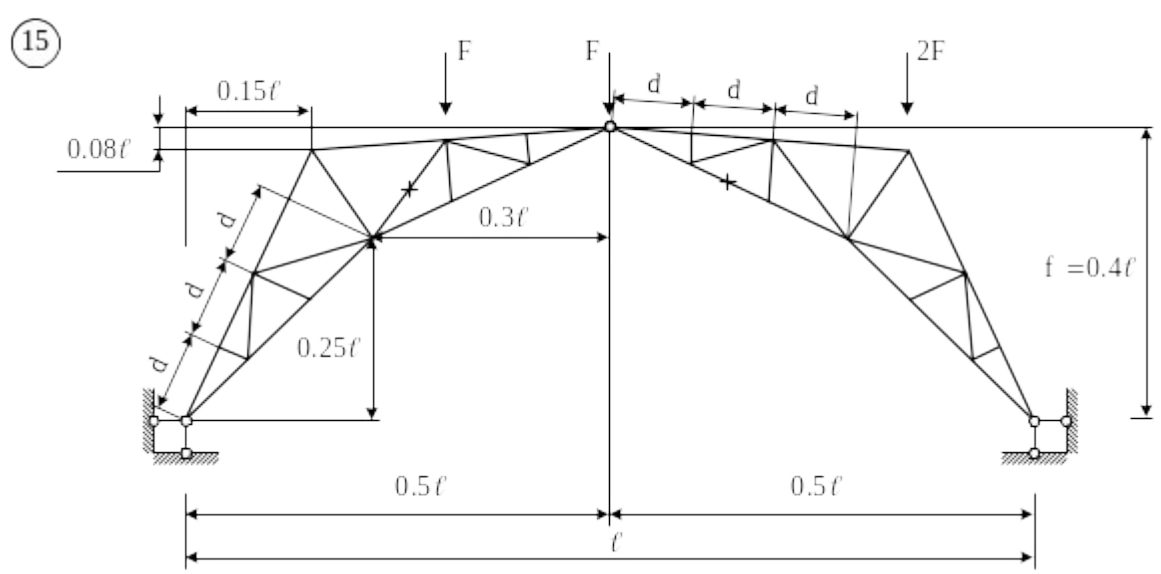
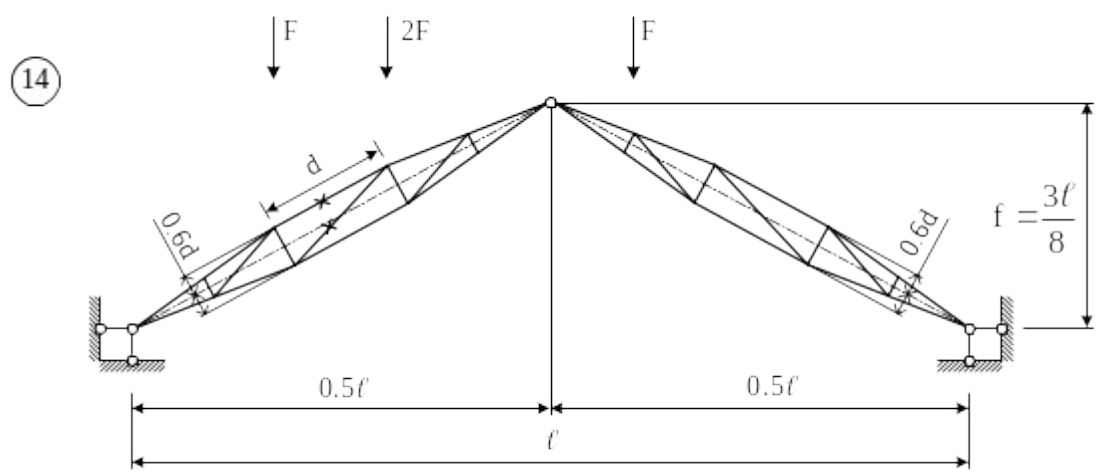
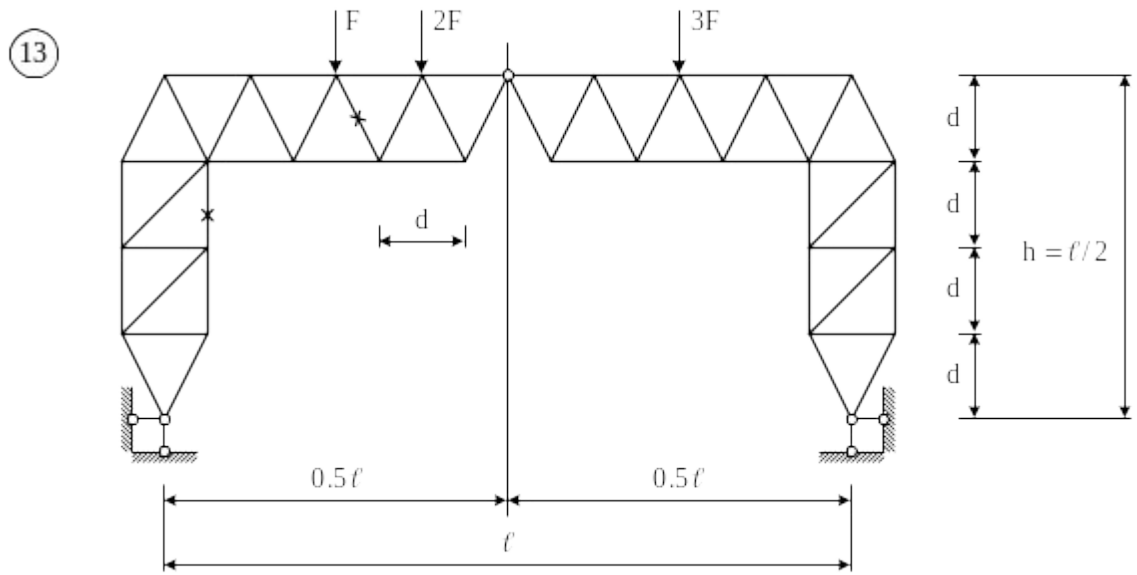
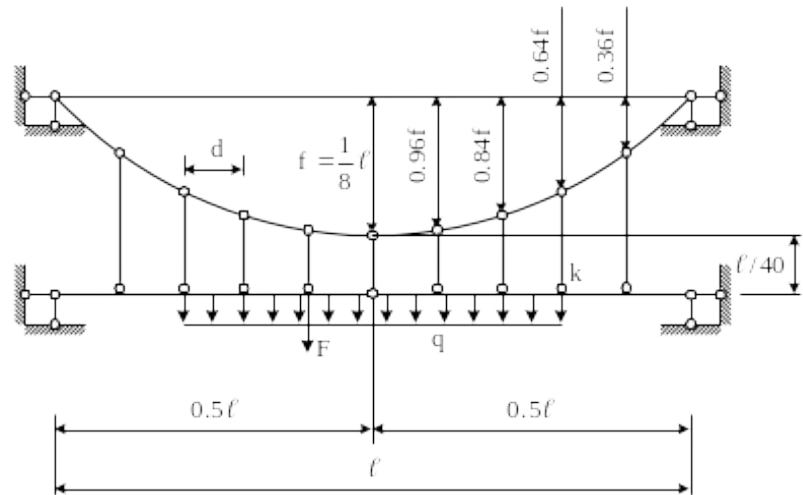
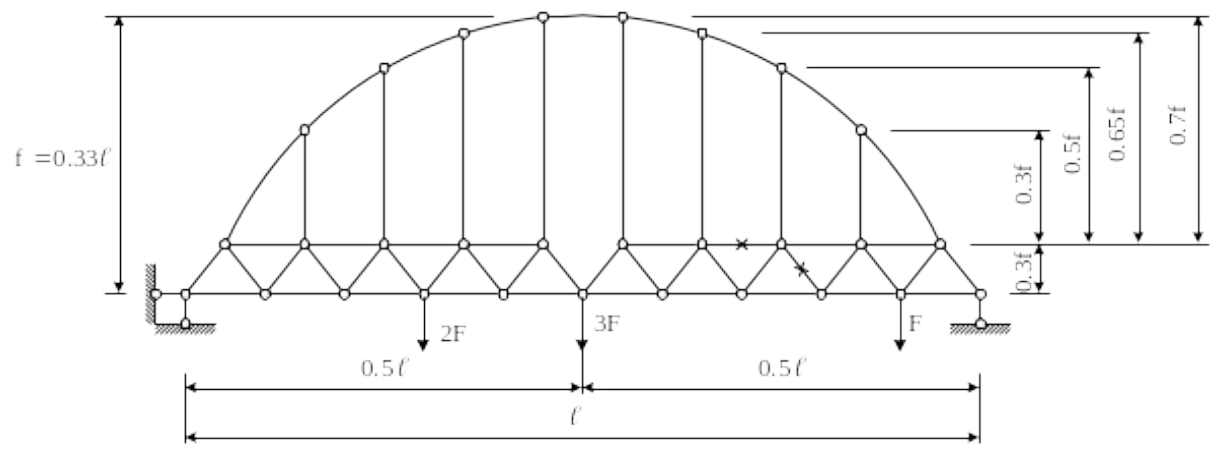


Рис. 5.1. Розрахункові схеми розпирних систем, аркуш 3

16



17



18

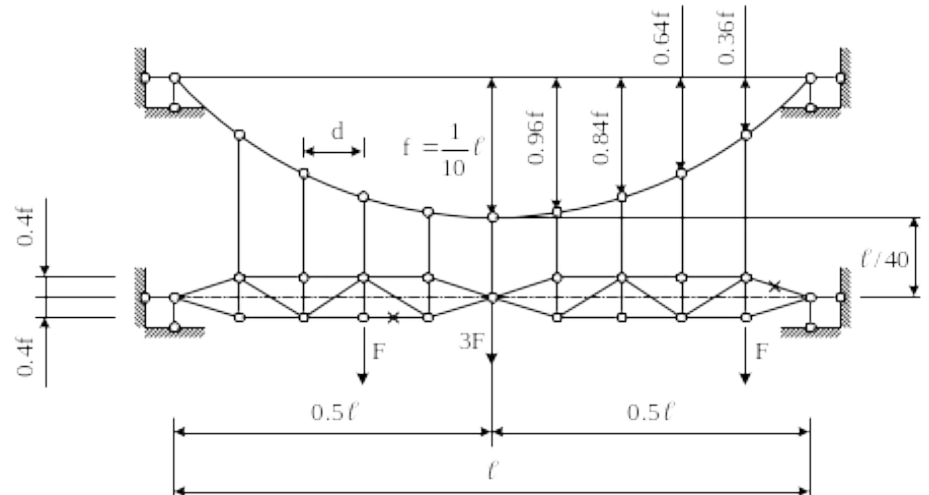


Рис. 5.1. Розрахункові схеми розпірних систем, аркуш 4

6. ПРИКЛАДИ ДО ЗАВДАННЯ

6.1. Розрахунок тришарнірної системи

Розрахуємо систему, показану на рис. 6.1. Поперечний переріз вертикальних стояків і аркової частини споруди прийнято у вигляді чотирьох поряд розташованих двотаврів. Жорсткість перерізу при згинанні $EJ = 614448 \text{ кНм}^2$, при розтягуванні і стисканні – $EA = 11,04 \cdot 10^6 \text{ кН}$.

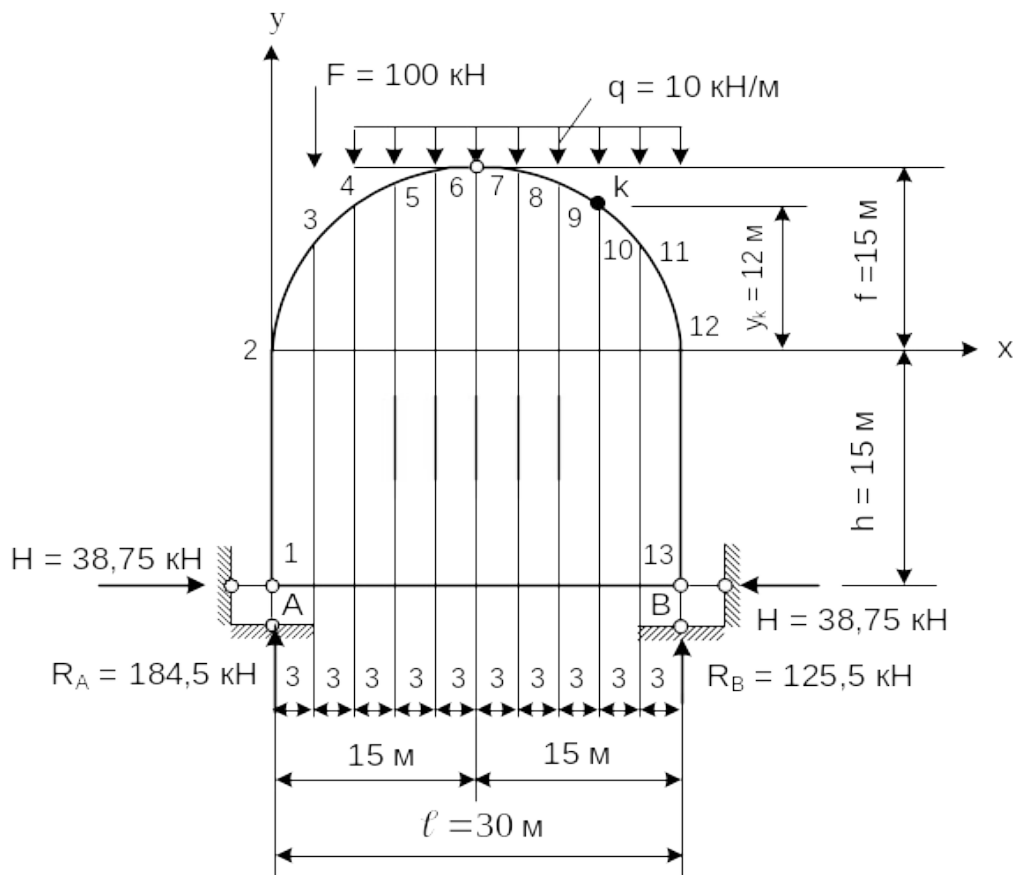


Рис. 6.1. Розрахункова схема тришарнірної системи

Визначимо вертикальні опорні реакції. При цьому будемо використовувати формули (2.1).

$$R_A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i b_i = \frac{100 \cdot 27 + 10 \cdot 21 \cdot (10,5 + 3,0)}{30} = 184,5 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i a_i = \frac{100 \cdot 3 + 10 \cdot 21 \cdot (10,5 + 6)}{30} = 125,5 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення вертикальних опорних реакцій. Для цього складемо рівняння:

$$\Sigma F_y = 0; 184,5 + 125,5 - 100 - 10 \cdot 21 = 0.$$

Вертикальні опорні реакції знайдено правильно.

Знайдемо балковий згинальний момент у перерізі C (рис. 6.1).

$$M_C^0 = R_A \cdot 15 - F \cdot 12 - 10 \cdot 9 \cdot 4,5 = 1162,5 \text{ кНм.}$$

За формулою (2.15) знайдемо горизонтальну опорну реакцію (розпір):

$$H = \frac{1162,5}{15 + 15} = 38,75 \text{ кН.}$$

У заданій точці k визначимо (див. формули (2.6), (2.7)):

$$y_k = \sqrt{(2f - x_k)x_k} = \sqrt{(2 \cdot 15 - 24)24} = 12 \text{ м;}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{\frac{\ell}{2} - x_k}{\sqrt{(2 \cdot \frac{\ell}{2} - x_k)x_k}} = \frac{15 - 24}{\sqrt{(30 - 24)24}} = -0,75;$$

$$\sin \varphi_k = \frac{\operatorname{tg} \varphi_k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = \frac{-0,75}{\sqrt{1 + 0,75^2}} = -0,6;$$

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = 0,8.$$

Тепер за формулами (2.16), (2.4), (2.5) знайдемо згинальний момент, поперечну і поздовжню сили в точці k . Попередньо визначимо балковий згинальний момент M_k^0 і балкову поперечну силу Q_k^0 в точці k :

$$M_k^0 = R_B \cdot 6 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 708 \text{ кНм;}$$

$$Q_k^0 = -R_B + 10 \cdot 3 = -95,5 \text{ кН.}$$

Після цього знайдемо:

$$M_k = M_k^0 - H(y_k + h) = 708 - 38,75(12 + 15) = -338,25 \text{ кНм};$$

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k = -95,5 \cdot 0,8 + 38,75 \cdot 0,6 = -53,15 \text{ кН};$$

$$N_k = -\left(Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k\right) = -(95,5 \cdot 0,6 + 38,75 \cdot 0,8) = -88,3 \text{ кН}.$$

Побудуємо лінії впливу H , M_k , Q_k , N_k (рис. 6.2).

Для побудови лінії впливу розпору H використовуємо формулу (2.15). З цієї формули випливає:

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{f+h} = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{27}.$$

На рис. 6.1, б показана ця лінія впливу. Знайдемо величину H з побудованої лінії впливу:

$$H = 100 \cdot 0,05 + 10 \cdot \left(\frac{0,25 + 0,1}{2} \cdot 9 + \frac{0,25 + 0,05}{2} \cdot 12 \right) = 38,75 \text{ кН}.$$

Одержаний результат збігається з аналітичним розрахунком.

З урахуванням рівняння (2.16) лінія впливу моменту в перерізі k записується таким чином:

$$\text{л.в. } M_k = \text{л.в. } M_k^0 - \text{л.в. } H(y_k + h) = \text{л.в. } M_k^0 + \text{л.в. } H(-27).$$

Лінія впливу M_k показана на рис. 6.2, в. Тут же проілюстровано процес її побудови.

Визначимо згинальний момент у точці k по лінії впливу:

$$M_k = -100 \cdot 0,75 - 10 \left(\frac{1,5 + 3,75}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 3,75 \cdot 9 \right) +$$

$$+ 10 \left(\frac{1}{2} \cdot 2,1 \cdot 9 + \frac{2,1 + 1,05}{2} \cdot 3 \right) = -338,25 \text{ кНм}.$$

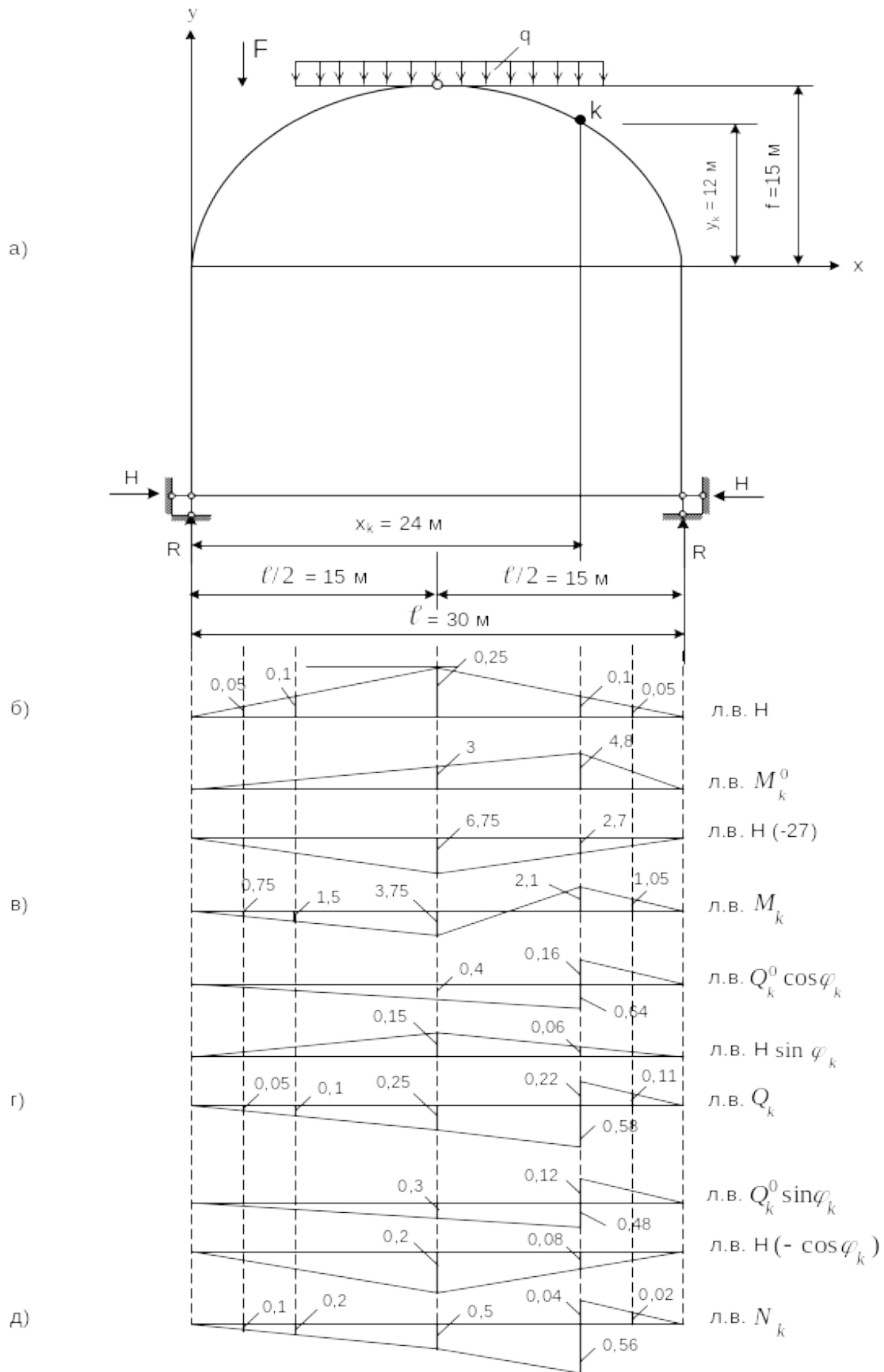


Рис. 6.2. Лінії впливу H , M_k , Q_k , N_k

Отриманий результат збігається з даними аналітичного розрахунку.

Для побудови лінії впливу поперечної сили в перерізі k використовуємо формулу (2.4):

$$\begin{aligned} \text{л.в. } Q_k &= \text{л.в. } Q_k^0 \cos \varphi_k - \text{л.в. } H \sin \varphi_k = \\ &= \text{л.в. } Q_k^0 \cdot 0,8 + \text{л.в. } H \cdot 0,6. \end{aligned}$$

Процес побудови і графік лінії впливу Q_k показано на рис. 6.2, г. Визначимо поперечну силу в перерізі k по побудованій лінії впливу:

$$\begin{aligned} Q_k &= -100 \cdot 0,05 - 10 \left(\frac{0,1 + 0,25}{2} \cdot 9 \right) + \\ &+ 10 \left(\frac{0,22 + 0,11}{2} \cdot 3 \right) = -53,15 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Цей результат також збігається з результатом аналітичного розрахунку.

Лінію впливу N_k у відповідності з формулою (2.5) будемо будувати так:

$$\begin{aligned} \text{л.в. } N_k &= - \text{л.в. } Q_k^0 \sin \varphi_k - \text{л.в. } H \cos \varphi_k = \\ &= \text{л.в. } Q_k^0 \cdot 0,6 + \text{л.в. } H (-0,8). \end{aligned}$$

Лінія впливу N_k показана на рис. 6.2, д.

Знайдемо поздовжню силу по лінії впливу N_k :

$$\begin{aligned} N_k &= -100 \cdot 0,1 - 10 \left(\frac{0,2 + 0,5}{2} \cdot 9 + \frac{0,5 + 0,56}{2} \cdot 9 \right) + \\ &+ 10 \left(\frac{0,04 + 0,02}{2} \cdot 3 \right) = -88,3 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Результат збігається з даними аналітичного розрахунку.

Подальший розрахунок виконаємо на ПЕОМ. Розіб'ємо розглянуту систему на окремі ділянки. Нумерація вузлів і напрям

координатних осей показано на рис. 6.1. У межах криволінійної системи (аркова частина) у машинному розрахунку ділянки розглядаються як прямі стрижні. Слід звернути увагу на те, що точки *A*, *B*, *K* мають подвійну нумерацію: *A*.1; *B*.13; *K*.10

Вихідні дані для розрахунку на ПЕОМ наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Загальні дані					
Кількість вузлів – 13					
Кількість елементів – 12					
Кількість типів поперечних перерізів – 1					
Кількість завантажень – 1					
Дані про вузли системи					
Номер вузла	Код вузла			Координати вузла	
				<i>X</i> , м	<i>У</i> , м
1	0	0	0	0.00	-15.00
2	1	1	1	0.00	0.00
3	1	1	1	3.00	9.00
4	1	1	1	6.00	12.00
5	1	1	1	9.00	13.74
6	1	1	1	12.00	14.70
7	1	1	0	15.00	15.00
8	1	1	1	18.00	14.70
9	1	1	1	21.00	13.74
10	1	1	1	24.00	12.00
11	1	1	1	27.00	9.00
12	1	1	1	30.00	0.00
13	0	0	0	30.00	-15.00
Дані про жорсткість перерізів					
Жорсткість перерізу при згинанні $EJ = 614448 \text{ кНм}^2$					
Жорсткість перерізу при розтяганні-стисканні $EA = 11,04 \cdot 10^6 \text{ кН}$					

Продовження табл. 6.1

Дані стрижнів системи					
-----------------------	--	--	--	--	--

Код стрижня		Тип поперечного перерізу	
-1	2	1	
2	3	1	
3	4	1	
4	5	1	
5	6	1	
6	-7	1	
-7	8	1	
8	9	1	
9	10	1	
10	11	1	
11	12	1	
12	-13	1	
Дані про завантаження вузлів і стрижнів:			
Кількість вузлів, завантажених зосередженим навантаженням, – 1			
Кількість стрижнів, завантажених розподіленим навантаженням, – 7			
Дані про завантаження вузлів			
Вузол	F_x , кН	F_y , кН	M_z , кНм
3	0	-100	0
Дані про завантаження стрижнів			
Стрижень		Q_x , кН/м	Q_y , кН/м
4	-5	0	-100
5	-6	0	-100
6	-7	0	-100
-7	8	0	-100
8	9	0	-100
9	10	0	-100
10	11	0	-100

Результати машинного розрахунку наведено в табл. 6.2 і 6.3.

Таблиця 6.3

Номер	Переміщення, м	Кут повороту
-------	----------------	--------------

вузла	горизонтальне	вертикальне	
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	-6.984E-02	-2.507E-04	7.407E-05
3	-3.358E-02	-1.251E-02	7.468E-03
4	-7.774E-03	-3.836E-02	9.594E-03
5	9.808E-03	-6.871E-02	1.050E-02
6	2.003E-02	-1.007E-01	1.076E-02
7	2.325E-02	-1.330E-01	0.000E+00
8	2.674E-02	-9.802E-02	-1.161E-02
9	3.767E-02	-6.382E-02	-1.109E-02
10	5.590E-02	-3.234E-02	-9.719E-03
11	8.086E-02	-7.322E-03	-6.692E-03
12	1.020E-01	-1.705E-04	2.068E-03
13	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

Для того щоб оцінити похибку розрахунку на ПЕОМ (табл. 6.2 і 6.3), пов'язану з поданням аркової частини споруди у вигляді ламаного 11-кутника, був виконаний точний розрахунок (див. розд. 2), за результатами якого побудовано епюри M , Q , N (рис. 6.3).

Порівнюючи ординати епюр з ординатами, підрахованими на ПЕОМ (табл. 6.2), бачимо відповідність ординат епюри моментів та істотну похибку при обчисленні поперечних і поздовжніх сил.

Так, наприклад, за даними аналітичного розрахунку і розрахунків по л.в.: $Q_k = -53,15$ кН; $N_k = -88,3$ кН. За даними розрахунку на ПЕОМ: $Q_k^{лів} = -63,2$ кН; $Q_k^{прав} = -40,1$ кН; $N_k^{лів} = -81,4$ кН; $N_k^{прав} = -94,9$ кН.

Для того щоб збільшити точність розрахунку на ПЕОМ поперечних і поздовжніх сил, необхідно розбити арковий прогин на більшу кількість ділянок. Такі розрахунки виконано (дод. 1.2), де показано, що при довжині ділянки 1 м $\left(\frac{\ell}{30}\right)$ одержуємо допустиму для інженерних розрахунків точність (7,24 %).

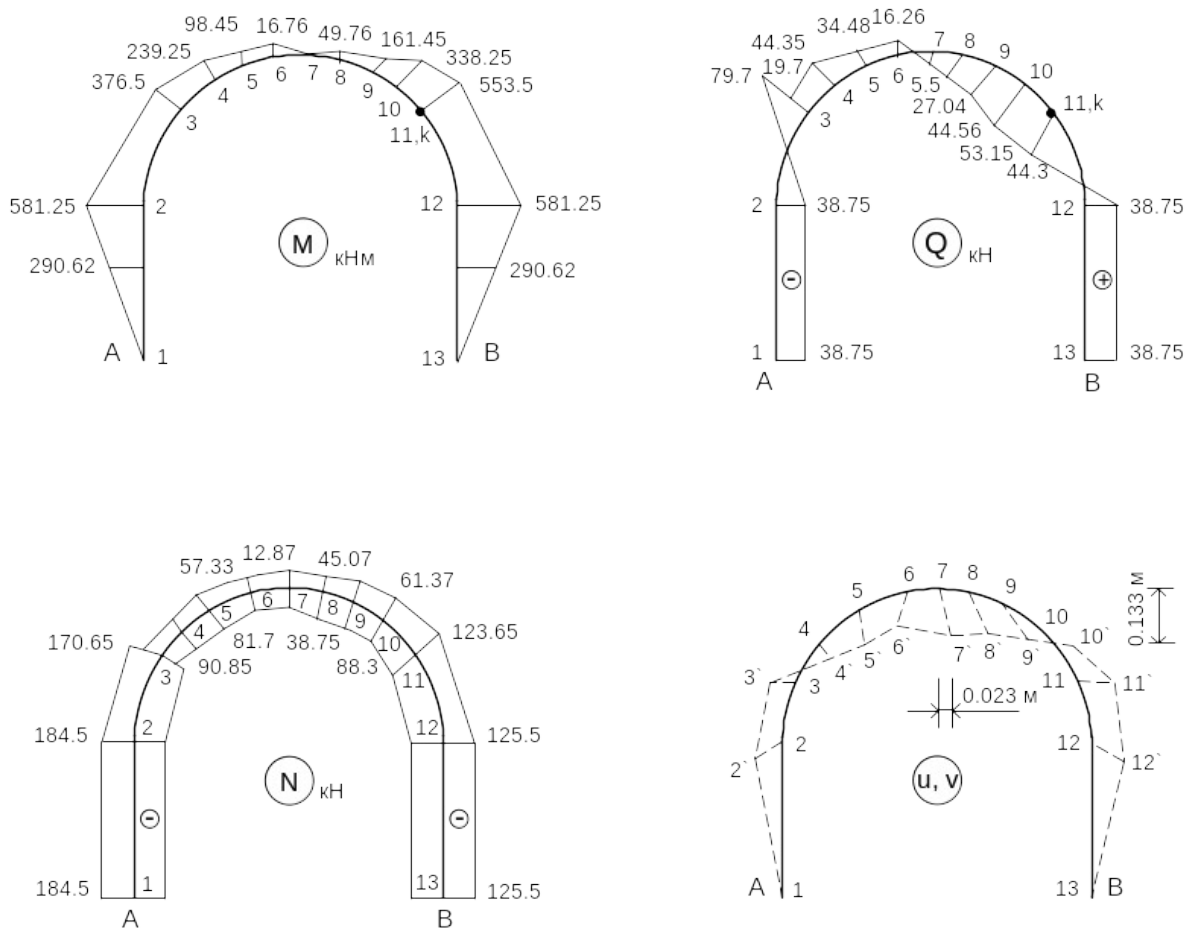


Рис. 6.3. Епюри внутрішніх зусиль M , Q , N і переміщень U і V

За даними табл. 6.3, де подано вертикальні і горизонтальні переміщення точок тришарнірної системи, побудовано епюру переміщень (рис. 6.3, U , V). Як показали чисельні розрахунки (див. дод. 2), збільшення ділянок розбиття прогону арки не має істотного впливу на прогини. Це пояснюється тим, що вплив згинальних моментів на величину прогину істотніше за вплив поздовжніх і поперечних сил.

Максимальне вертикальне переміщення складає 0,133 м (див. рис. 6.3, епюру U , V , вузол 7), що дорівнює $\frac{1}{225}$ прогону. Це переміщення слід кваліфікувати як мале (менше за висоту поперечного перерізу).

6.2. Розрахунок тришарнірної рами

Розрахуємо тришарнірну раму, показану на рис. 6.4. Поперечний переріз рами прийнято у вигляді двох поряд розташованих двотаврів. Жорсткість перерізу при згинанні $EJ = 223848 \text{ кН/м}^2$, при розтягуванні-стисканні – $EA = 4,72 \cdot 10^6 \text{ кН}$.

Визначимо вертикальні опорні реакції R_A і R_B (див. формули (2.1)):

$$R_A = \frac{10 \cdot 16(8+8) - 100 \cdot 4}{20} = 108 \text{ кН};$$
$$R_B = \frac{100 \cdot 24 + 10 \cdot 16 \cdot 4}{20} = 152 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення вертикальних реакцій:

$$\sum F_y = 0; \quad 108 + 152 - 10 \cdot 16 - 100 = 0.$$

Реакції знайдено правильно.

Визначимо горизонтальні опорні реакції (розпір). Використовуємо формулу (2.27). У цю формулу входить балковий згинальний момент у перерізі C , який знаходимо за формулою

$$M_C^0 = R_A \cdot \frac{\ell}{2} - 10 \cdot 14 \cdot 7 = 108 \cdot 10 - 10 \cdot 14 \cdot 7 = 100 \text{ кНм}.$$

Зазначимо, що M_C^0 може бути визначений з рівняння $\sum M_C^{прав} = 0$. Результат буде таким самим.

Знайдемо розпір за згаданою вище формулою (2.27):

$$H = \frac{M_C^0}{h} = \frac{100}{10} = 10 \text{ кН}.$$

Визначимо згинальний момент, поздовжню і поперечну сили в перерізі k (рис. 6.4, а):

$$M_k = R_A \cdot 2 - H \cdot 5 = 108 \cdot 2 - 10 \cdot 5 = 166 \text{ кНм};$$

$$Q_k = R_A \cdot \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k,$$

де $\cos \varphi_k = \frac{2}{\sqrt{25+4}} = 0,371$; $\sin \varphi_k = \frac{5}{\sqrt{29}} = 0,928$.

Тепер

$$Q_k = 108 \cdot 0,371 - 10 \cdot 0,928 = 30,788 \text{ кН.}$$

Поздовжня сила:

$$N_k = -R_A \sin \varphi_k - H \cos \varphi_k = -108 \cdot 0,928 - 10 \cdot 0,371 = -103,934 \text{ кН.}$$

Побудуємо лінії впливу:

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{h} = \text{л.в. } M_C^0 \cdot \frac{1}{10}.$$

Графік лінії впливу показано на рис. 6.4, б. Визначимо величину розпору по цій лінії впливу:

$$H = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 + \frac{0,5+0,4}{2} \cdot 2 \cdot 10 - 100 \cdot \frac{1}{5} = 10 \text{ кН.}$$

Результат збігається з аналітичним розрахунком (див. вище).

Лінія впливу згинального моменту в точці K складається з алгебраїчної суми двох ліній впливу:

$$\text{л.в. } M_K = \text{л.в. } R_A \cdot 2 - \text{л.в. } H \cdot 5.$$

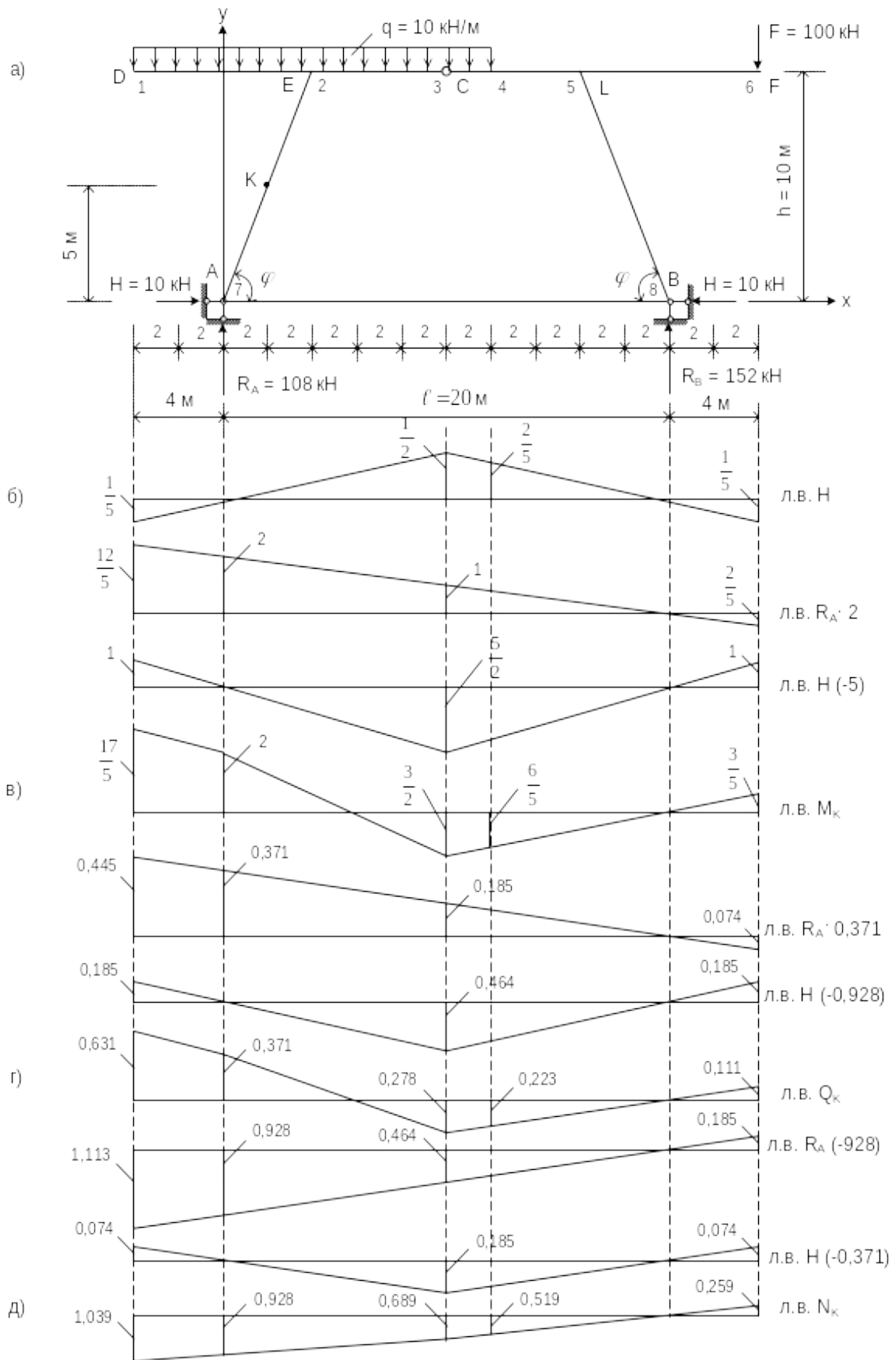


Рис. 6.4. Лінії впливу H , M_K , Q_K , N_K

Побудову цієї лінії впливу виконано на рис. 6.4, в. Перевіримо правильність обчислення моменту в перерізі K , виконаного раніше аналітичним методом. Для цього скористаємося лінією впливу M_K :

$$M_K = \frac{17+2}{2} \cdot 4 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 10 - \frac{3+6}{2} \cdot 2 \cdot 10 + 100 \cdot \frac{3}{5} = 166 \text{ кНм.}$$

Лінію впливу поперечної сили в перерізі K побудуємо, використовуючи таку формулу:

$$Q_K = R_A \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \text{л.в. } Q_K &= \text{л.в. } R_A \cdot \cos \varphi_K - \text{л.в. } H \cdot \sin \varphi_K = \\ &= \text{л.в. } R_A \cdot 0,371 - \text{л.в. } H \cdot 0,928. \end{aligned}$$

Побудову цієї лінії впливу виконано на рис. 6.4, г.

Знайдемо поперечну силу в точці K у відповідності з побудованою лінією впливу:

$$\begin{aligned} Q_K &= \frac{0,631+0,371}{2} \cdot 4 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 0,371 \cdot 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 0,278 \cdot 10 \cdot 10 - \\ &- \frac{0,278+0,223}{2} \cdot 2 \cdot 10 + 100 \cdot 0,111 = 30,788 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Цей результат збігається з результатом аналітичного розрахунку.

Побудуємо лінію впливу N_K , використовуючи таку формулу:

$$\begin{aligned} \text{л.в. } N_K &= - \text{л.в. } R_A \cdot \sin \varphi_K - \text{л.в. } H \cdot \cos \varphi_K = \\ &= - \text{л.в. } R_A \cdot 0,928 - \text{л.в. } H \cdot 0,371. \end{aligned}$$

Лінія впливу N_K показана на рис. 6.4, д.

Поздовжнє зусилля по лінії впливу

$$N_K = \frac{1,0394 + 0,928}{2} \cdot 4 \cdot 10^6 - \frac{0,928 + 0,6495}{2} \cdot 10 \cdot 10^6 - \frac{0,645 + 0,5196}{2} \cdot 2 \cdot 10^6 + 100 \cdot 0,2598 = -103,934 \text{ кН.}$$

І цей результат збігається з даними аналітичного розрахунку.

Складемо вихідну інформацію для розрахунку тришарнірної рами на ПЕОМ. Схема розбиття на ділянки, нумерація вузлів і напрям координатних осей показані на рис. 6.4. Зазначимо, що точки *A, B, D, E, C, L, F* мають подвійну нумерацію, відповідно *A.7; B.8; D.1; E.2; C.3; L.5; F.6*, необхідну для аналітичного розрахунку і розрахунку на ПЕОМ.

Вихідні дані для розрахунку тришарнірної рами на ПЕОМ наведено в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Вихідні дані для розрахунку на ПЕОМ

Загальні дані					
Кількість вузлів – 8					
Кількість елементів – 7					
Кількість типів поперечних перерізів – 1					
Кількість завантажень – 1					
Дані про вузли системи					
Номер вузла	Код вузла			Координати вузла	
				Х, м	У, м
1	1	1	1	-4.00	10.00
2	1	1	1	4.00	10.00
3	1	1	0	10.00	10.00
4	1	1	1	12.00	10.00
5	1	1	1	16.00	10.00
6	1	1	1	24.00	10.00
7	0	0	0	0.00	0.00
8	0	0	0	20.00	0.00

Продовження табл. 6.4

Дані про жорсткість перерізів	
Жорсткість перерізу при згинанні: $EJ = 223848 \text{ кНм}^2$	

Жорсткість перерізу при розтягуванні і стисканні: $EA = 4,72 \cdot 10^6$ кН			
Дані про стрижні системи			
Код стрижня		Тип поперечного перерізу	
1	2	1	
2	-3	1	
-3	4	1	
4	5	1	
5	6	1	
2	-7	1	
5	-8	1	
Дані щодо завантаження вузлів і стрижнів:			
Кількість вузлів, завантажених зосередженим навантаженням – 1			
Кількість стрижнів, завантажених розподіленим навантаженням – 3			
Дані щодо завантаження вузлів			
Вузол	F_x , кН	F_y , кН	M_z , кНм
6	0	-100	0
Дані щодо завантаження стрижнів			
Стрижень		q_x , кН/м	q_y , кН/м
1	2	0	-10
2	-3	0	-10
-3	4	0	-10

Результати машинного рахунку наведено в табл. 6.5 і 6.6.

Таблиця 6.6

Переміщення вузлів

Номер вузла	Переміщення, м	Кут повороту
-------------	----------------	--------------

	горизонтальне	вертикальне	
1	7.066E-04	-6.537E-02	-9.057E-03
2	7.066E-04	-5.382E-04	-5.245E-03
3	6.939E-04	3.399E-02	0.000E+00
4	6.896E-04	2.477E-02	4.844E-03
5	6.811E-04	-8.351E-05	8.203E-03
6	6.811E-04	-1.420E-01	2.250E-02
7	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
8	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

За даними табл. 6.5 і 6.6 побудуємо епюри M , Q , N і епюру переміщень (рис. 6.5).

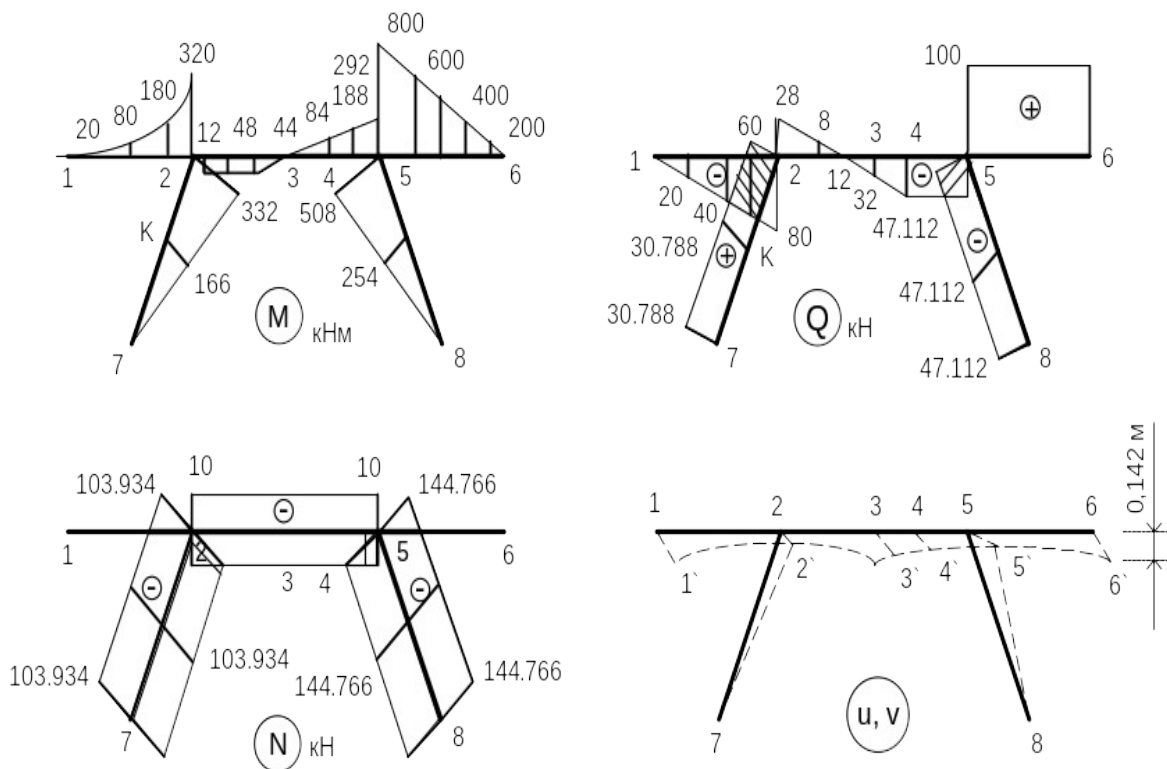


Рис. 6.5. Епюри внутрішніх зусиль M , Q , N і переміщень U , V

Порівнюючи результати машинного рахунку з результатами аналітичного розрахунку і розрахунку по лініях впливу значень M_K , Q_K , N_K , бачимо їх повну збіжність.

6.3. Розрахунок аркової ферми

Розрахункова схема аркової ферми показана на рис. 6.6. Поперечні перерізи аркової ферми складаються з чотирьох рівнобоких кутників. Ураховуючи те, що стрижні ферми працюють тільки на розтягання і стискання, жорсткість при згинанні приймається рівній нулю, тобто $EJ = 0$. Жорсткість при розтяганні і стисканні дорівнює $EA = 808 \cdot 10^3$ кН.

Спочатку знайдемо опорні реакції (див. формулу (2.1)):

$$R_A = \frac{200 \cdot 24 + 100 \cdot 18 + 50 \cdot 9}{30} = 235 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{50 \cdot 21 + 100 \cdot 12 + 200 \cdot 6}{30} = 115 \text{ кН}.$$

Сума опорних реакцій дорівнює:

$$\sum R = 235 + 115 = 350 \text{ кН}.$$

Сума зовнішніх навантажень:

$$\sum F = 200 + 100 + 50 = 350 \text{ кН}.$$

Умова рівноваги $\sum F_y = 0$ виконується. Отже, вертикальні опорні реакції знайдено правильно.

Обчислимо балковий згинальний момент у перерізі C . Розглянемо сили, розташовані справа від перерізу C . Тоді

$$M_C^0 = R_B \cdot 15 - 50 \cdot 6 = 115 \cdot 15 - 50 \cdot 6 = 1425 \text{ кНм}.$$

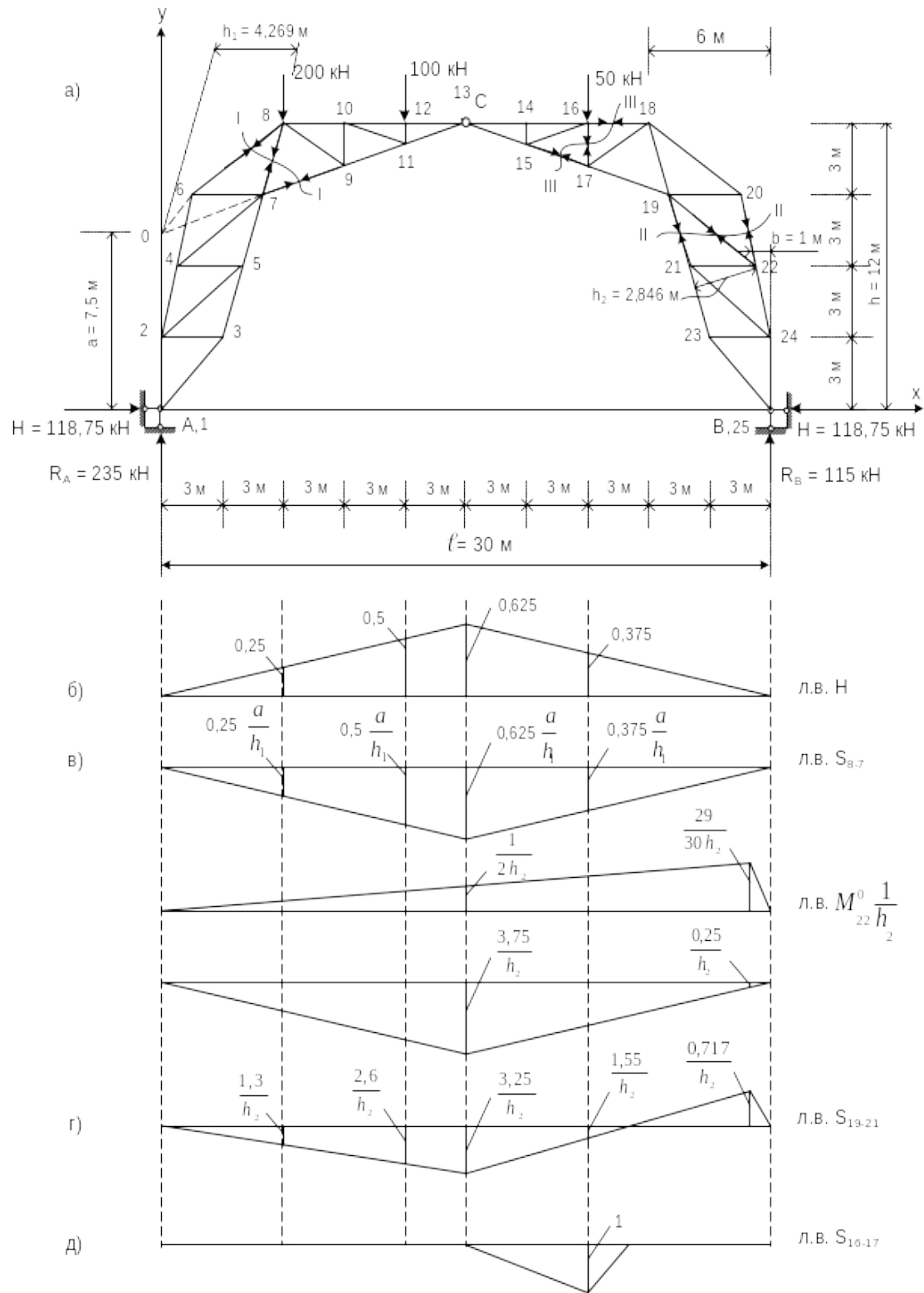


Рис. 6.6. Розрахункова схема аркової ферми і лінії впливу зусиль у стрижнях

Перевіримо правильність обчислення цього моменту. Для цього скористаємося силами, розташованими зліва від перерізу C :

$$M_C^0 = R_A \cdot 15 - 200 \cdot 9 - 100 \cdot 3 = 235 \cdot 15 - 1800 - 300 = 1425 \text{ кНм},$$

тобто одержали той самий результат, що і вище.

Тепер знайдемо горизонтальну опорну реакцію H (див. формулу (2.27)):

$$H = \frac{M_C^0}{h} = \frac{1425}{12} = 118,75 \text{ кН}.$$

Опорні реакції знайдені, приступимо до визначення зусиль у стрижнях аркової ферми.

Зусилля в стрижні 8-7

Проведемо переріз I-I (рис. 6.6, а). Моментна точка O . Відстань (перпендикуляр, опущений з точки O на напрям стрижня 8-7) від моментної точки до невідомого зусилля – h , а від горизонтальної опорної реакції до тієї самої моментної точки – a .

Складемо рівняння рівноваги у формі моментів лівих сил відносно точки O :

$$H \cdot a + S_{8-7} \cdot h_1 = 0.$$

Звідси

$$S_{8-7} = -H \frac{a}{h_1},$$

при $a = 7,5 \text{ м}$; $h_1 = 4,269 \text{ м}$

$$S_{8-7} = -118,75 \frac{7,5}{4,269} = -208,63 \text{ кН}.$$

Зусилля в стрижні 19-21

Проведемо переріз II-II. Моментна точка 22 (рис. 6.6, а). Довжину перпендикуляра, опущеного з точки 22 на напрям

стрижня 19-21 позначимо через h_2 . Відстань від точки 22 до реакції R_B (перпендикуляр, опущений з точки 22 на напрям R_B) – через b .

Складемо рівняння моментів правих сил відносно точки 22:

$$R_B \cdot b - H \cdot 2d - S_{19-21} \cdot h_2 = 0.$$

Звідси

$$S_{19-21} = R_B \cdot \frac{b}{h_2} - H \cdot \frac{2d}{h_2};$$

при $b = 1$ м; $h_2 = 2,846$ м

$$S_{19-21} = 115 \cdot \frac{1}{2,846} - 118,75 \cdot \frac{6}{2,846} = -209,94 \text{ кН.}$$

Зусилля в стрижні 16-17

Проведемо переріз III-III (рис. 6.6, а). Моментна точка C . Складемо рівняння рівноваги у вигляді $\sum M_C^{прав} = 0$.

$$R_B \cdot 5d - H \cdot 4d + S_{16-17} \cdot 2d = 0.$$

Звідси

$$S_{16-17} = 118,75 \cdot 2 - 115 \cdot \frac{5}{2} = -50 \text{ кН.}$$

Зусилля в стрижні 16-17 дорівнює – 50 кН.

Побудуємо лінію впливу розпору H і лінії впливу в тих стрижнях, у яких знаходили зусилля аналітичним способом.

Лінія впливу розпору H

У відповідності з формулою (2.27):

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{h} = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{12}.$$

Лінія впливу показана на рис. 6.6, б.

Знайдемо величину розпору по побудованій лінії впливу:

$$H = 200 \cdot 0,25 + 100 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,375 = 118,75 \text{ кН.}$$

Одержаний результат збігається з результатом аналітичного розрахунку.

Лінія впливу зусилля в стрижні 8-7

Переріз I-I, моментна точка 0, розрахункова панель 6-8 (рис. 6.6, а).

1. Вантаж на ділянці 8-13. Складаємо рівняння $\sum M_0^{лів} = 0$;

$$S_{8-7} \cdot h_1 + H \cdot a = 0.$$

Це рівняння було одержано при аналітичному розрахунку. Звідси

$$\text{л.в. } S_{8-7} = - \text{л.в. } H \frac{a}{h_1}.$$

2. Вантаж на ділянці 6-А. Складемо рівняння моментів правих сил відносно точки 0:

$$\sum M_0^{прав} = 0, \quad R_B \cdot 30 - H \cdot a - S_{8-7} \cdot h_1 = 0.$$

Замінімо $R_B \cdot 30 = M_0^0$ (через балковий згинальний момент у точці 0). Тоді

$$S_{8-7} = \text{л.в. } M_0^0 \frac{1}{h_1} - \text{л.в. } H \frac{a}{h_1}.$$

У зв'язку з тим, що лінія впливу балкового згинального моменту M_0^0 в точці 0 і лінія впливу розпору H в цій же точці мають нульові ординати, то сумарна ордината тут буде також дорівнювати нулю. Слід звернути увагу (див. рис. 6.6, а), що точки 0 і А лежать на одній вертикалі.

Лінія впливу в стрижні 8-7 показана на рис. 6.6, в. Зусилля в цьому стрижні, яке визначено по лінії впливу S_{8-7} , дорівнює

$$S_{8-7} = - 118,75 \frac{a}{h_1},$$

що в точності сходиться з результатом аналітичного розрахунку.

Лінія впливу в стрижні 19-21.

У процесі аналітичного розрахунку була одержана формула

$$S_{19-21} = R_B \frac{b}{h_2} - H \frac{2d}{h_2}.$$

Скористаємося цією залежністю для побудови лінії впливу. Замінімо $R_B \cdot b = M_{22}^0$. Тоді рівняння шуканої лінії впливу при будь-якому положенні одиничного вантажу запишеться так:

$$\text{л.в. } S_{19-21} = \text{л.в. } M_{22}^0 \frac{1}{h_2} - \text{л.в. } H \frac{2d}{h_2}.$$

Процес побудови цієї лінії впливу показано на рис. 6.6, г.

Визначимо зусилля в стрижні 19-21 по побудованій лінії впливу:

$$\begin{aligned} S_{19-21} &= 200 \left(-\frac{1,3}{h_2} \right) + 100 \left(-\frac{2,6}{h_2} \right) + 50 \left(-\frac{1,55}{h_2} \right) = \\ &= -\frac{597,5}{h_2} = -\frac{597,5}{2,846} = -209,94 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Результати аналітичного розрахунку і розрахунку, виконаного по лінії впливу, збігаються.

Лінії впливу в стрижні 16-17.

Стрижень 16-17 належить до основної ферми. Тому лінію впливу зусилля в ньому будуюмо без урахування роботи шпренгеля С-14-16-15. Розглянемо два положення вантажу:

1) вантаж у вузлі 16, $S_{16-17} = -1$;

2) вантаж поза вузлом (на ділянках 18-В і С-А), $S_{16-17} = 0$.

Лінія впливу S_{16-17} показана на рис. 6.6, д. Зусилля, яке знайдено за допомогою побудованої лінії впливу, дорівнює $S_{16-17} = -50 \cdot 1 = -50$ кН, що збігається з результатом аналітичного розрахунку.

Розглянемо інший метод побудови цієї лінії впливу. Переріз III-III, моментна точка С. Розрахункова панель 16-18. Розглянемо два положення вантажу.

1. Вантаж $F = 1$ на ділянці 18-В. Складаємо рівняння моментів лівих сил відносно точки C :

$$R_A \cdot 15 - H \cdot 12 + S_{16-17} \cdot 6 = 0.$$

Звідси

$$S_{16-17} = -R_A \cdot \frac{15}{6} + H \cdot \frac{12}{6}.$$

2. Вантаж на ділянці 16-А. Складаємо рівняння моментів правих сил відносно шарніра C :

$$R_B \cdot 15 - H \cdot 12 + S_{16-17} \cdot 6 = 0.$$

Звідси

$$S_{16-17} = -R_B \cdot \frac{15}{6} + H \cdot \frac{12}{6}.$$

Виконавши побудову лінії впливу за одержаними формулами, приходимо до результату, зображеному на рис. 6.6, д.

Складаємо вихідну інформацію для розрахунку аркової ферми на ПЕОМ. Нумерація вузлів і напрям координатних осей показані на рис. 6.6, а.

Вихідні дані для розрахунку аркової ферми на ПЕОМ наведені в табл. 6.7.

Таблиця 6.7

Вихідні дані для розрахунку на ПЕОМ

Загальні дані		
Кількість вузлів – 25		
Кількість стрижнів – 46		
Кількість типів поперечних перерізів – 1		
Кількість завантажень – 1		
Дані про вузли стержневої системи		
Номер	Код вузла	Координати вузла

вузла				X, м	У, м
1	0	0	0	0.00	0.00
2	1	1	0	0.00	3.00
3	1	1	0	3.00	3.00
4	1	1	0	1.00	6.00
5	1	1	0	4.00	6.00
6	1	1	0	2.00	9.00
7	1	1	0	5.00	9.00
8	1	1	0	6.00	12.00
9	1	1	0	9.00	10.20
10	1	1	0	9.00	12.00
11	1	1	0	12.00	11.10
12	1	1	0	12.00	12.00
13	1	1	0	15.00	12.00
14	1	1	0	18.00	12.00
15	1	1	0	18.00	11.00
16	1	1	0	21.00	12.00
17	1	1	0	21.00	10.20
18	1	1	0	24.00	12.00
19	1	1	0	25.00	9.00
20	1	1	0	28.00	9.00
21	1	1	0	26.00	6.00
22	1	1	0	29.00	6.00
23	1	1	0	27.00	3.00
24	1	1	0	30.00	3.00
25	0	0	0	30.00	0.00

Дані про жорсткість стрижнів

Жорсткість перерізу при розтягуванні і стисканні:

$$EA = 808 \cdot 10^3 \text{ кН}$$

Продовження табл. 6.7

Дані про стрижні системи		
Код стрижня		Тип поперечного перерізу
1		2
-1	-2	1
-2	-4	1
-4	-6	1
-6	-8	1
-8	-10	1

-10	-12	1
-12	-13	1
-13	-14	1
-14	-16	1
-16	-18	1
-18	-20	1
-20	-22	1
-22	-24	1
-24	-25	1
-1	-3	1
-3	-5	1
-5	-7	1
-7	-9	1
-9	-11	1
-11	-13	1
-13	-15	1
-15	-17	1
-17	-19	1
-19	-21	1
-21	-23	1
-23	-25	1
-2	-3	1
-2	-5	1
-4	-5	1
-4	-7	1
-6	-7	1
-7	-8	1
-8	-9	1

Продовження табл. 6.7

1		2
-9	-10	1
-10	-11	1
-11	-12	1
-14	-15	1
-15	-16	1
-16	-17	1
-17	-18	1

-18	-19	1	
-19	-20	1	
-19	-22	1	
-21	-22	1	
-21	-24	1	
-23	-24	1	
Дані про навантаження вузлів і стрижнів			
Кількість вузлів, завантажених зосередженим навантаженням, – 3			
Кількість стержнів, завантажених розподіленим навантаженням, – 0			
Дані про завантаження вузлів			
Вузол	F_x , кН	F_y , кН	M_z , кНм
5	0	-200	0
7	0	-100	0
10	0	-50	0

Результати машинного рахунку наведено в табл. 6.8 і 6.9.

Таблиця 6.8

Внутрішні зусилля в стрижнях

Стрижень		Поздовжня сила, кН		Стрижень		Поздовжня сила, кН	
		початок	кінець			початок	кінець
-1	-2	-1.16E+02	-1.16E+02	-17	-19	-	-
						2.84E+02	2.84E+02
-2	-4	-7.99E+01	-7.99E+01	-19	-21	-	-
						2.10E+02	2.10E+02

-4	-6	-3.73E+01	-3.73E+01	-21	-23	-	-
						1.25E+02	1.25E+02
-6	-8	-5.90E+01	-5.90E+01	-23	-25	-	-
						1.68E+02	1.68E+02
-8	-10	-1.69E+02	-1.69E+02	-2	-3	7.92E+01	7.92E+01
-10	-12	-3.35E+02	-3.35E+02	-2	-5	-	-
						6.74E+01	6.74E+01
-12	-13	-3.35E+02	-3.35E+02	-4	-5	4.04E+01	4.04E+01
-13	-14	9.79E+01	9.79E+01	-4	-7	-	-
						6.74E+01	6.74E+01
-14	-16	9.79E+01	9.79E+01	-6	-7	3.54E+01	3.54E+01
-16	-18	9.79E+01	9.79E+01	-7	-8	-	-
						2.09E+02	2.09E+02
-18	-20	2.74E+02	2.74E+02	-8	-9	6.48E+01	6.48E+01
-20	-22	1.73E+02	1.73E+02	-9	-10	-	-
						5.00E+01	5.00E+01
-22	-24	8.87E+01	8.87E+01	-10	-11	1.74E+02	1.74E+02
-24	-25	3.75E+00	3.75E+00	-11	-12	-	-
						1.00E+02	1.00E+02
-1	-3	-1.68E+02	-1.68E+02	-14	-15	0.00E+00	0.00E+00
-3	-5	-1.25E+02	-1.25E+02	-15	-16	2.10E-09	2.10E-09
-5	-7	-1.68E+02	-1.68E+02	-16	-17	-	-
						5.00E+01	5.00E+01
-7	-9	-5.80E+00	-5.80E+00	-17	-18	6.48E+01	6.48E+01
-9	-11	5.22E+01	5.22E+01	-18	-19	-	-
						2.09E+02	2.09E+02
-11	-13	2.26E+02	2.26E+02	-19	-20	-	-
						1.65E+02	1.65E+02
-13	-15	-2.26E+02	-2.26E+02	-19	-22	-	-
						1.34E+02	1.34E+02
-15	-17	-2.26E+02	-2.26E+02	-21	-22	8.04E+01	8.04E+01
				-21	-24	-	-
						1.34E+02	1.34E+02
				-23	-24	7.92E+01	7.92E+01

Таблиця 6.9

Переміщення вузлів

Номер вузла	Переміщення, м		Кут повороту
	горизонтальне	вертикальне	
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	3.531E-03	-4.316E-04	0.000E+00
3	3.825E-03	-5.072E-03	0.000E+00
4	7.744E-03	-2.166E-03	0.000E+00
5	7.894E-03	-6.945E-03	0.000E+00
6	1.234E-02	-3.851E-03	0.000E+00
7	1.247E-02	-9.162E-03	0.000E+00
8	1.786E-02	-1.182E-02	0.000E+00
9	1.489E-02	-1.732E-02	0.000E+00
10	1.723E-02	-1.743E-02	0.000E+00
11	1.653E-02	-2.210E-02	0.000E+00
12	1.599E-02	-2.221E-02	0.000E+00
13	1.474E-02	-1.308E-02	0.000E+00
14	1.510E-02	-2.611E-03	0.000E+00
15	1.696E-02	-2.611E-03	0.000E+00
16	1.547E-02	2.380E-03	0.000E+00
17	1.758E-02	2.492E-03	0.000E+00
18	1.583E-02	5.952E-03	0.000E+00
19	1.751E-02	7.373E-03	0.000E+00
20	1.690E-02	4.548E-03	0.000E+00
21	1.249E-02	6.566E-03	0.000E+00
22	1.279E-02	2.463E-03	0.000E+00
23	6.248E-03	5.001E-03	0.000E+00
24	6.542E-03	1.392E-05	0.000E+00
25	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

Дані табл. 6.8 і 6.9 показані на рис. 6.7. Проведемо аналіз результатів розрахунку зусиль S_{8-7} , S_{19-21} , S_{16-17} . Значення

цих зусиль, знайдених у результаті аналітичного розрахунку, по лініях впливу і за допомогою програми на ПЕОМ, відповідають один одному. Величина максимального вертикального переміщення аркової ферми дорівнює 2,21 см (табл. 6.9, вузли 11, 12), що складає 1/3500 прогону.

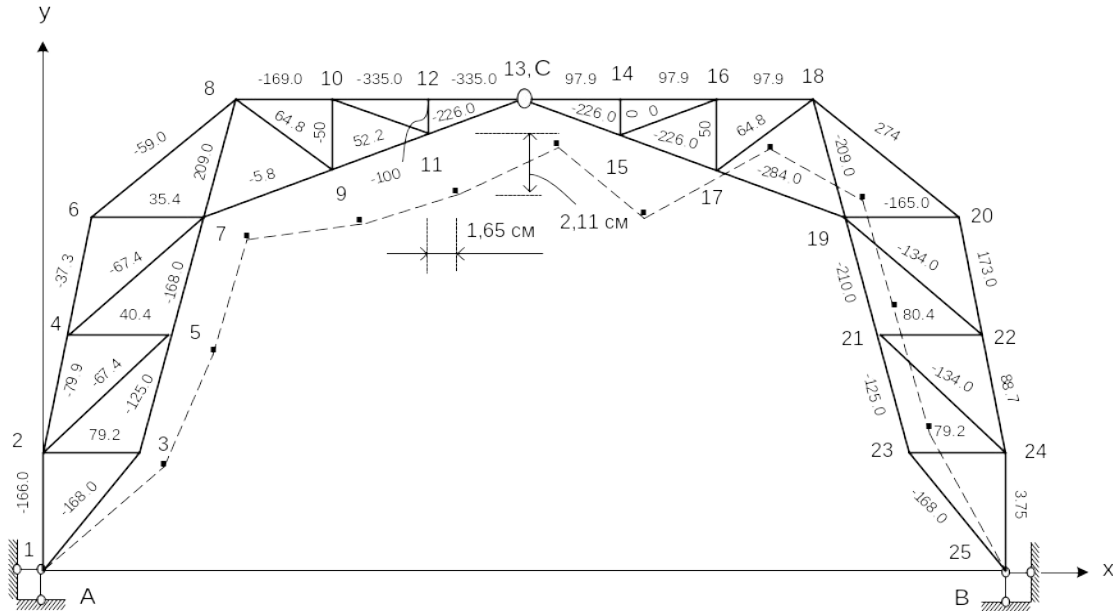


Рис. .6.7. Величини зусиль у стрижнях ферми (кН) і епюра переміщень внутрішніх вузлів (см)

6.4. Розрахунок комбінованої системи

Розрахункова схема комбінованої системи показана на рис. 6.8. Поперечний переріз балки прийнято у вигляді двох двотаврів № 50 (ДСТ 8239-89). Жорсткість перерізу балки при згинанні $EJ_1 = 158908 \text{ кНм}^2$, при розтягуванні $EA_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ кН}$. Для інших елементів застосовано канати подвійного сплітання з площею поперечного перерізу $A_2 = 50 \text{ см}^2$. У зв'язку з тим, що канати не працюють на згинання, то $EJ_2 = 0$. Жорсткість при розтяганні $EA_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ кН}$.

Використовуючи формули (4.1) і (4.2), визначимо балкові опорні реакції:

$$R_A^0 = \frac{20 \cdot 32 \cdot 56 + 100 \cdot 32 + 15 \cdot 32 \cdot 16}{80} = 584 \text{ кН};$$

$$R_B^0 = \frac{15 \cdot 32 \cdot 64 + 100 \cdot 48 + 20 \cdot 32 \cdot 24}{80} = 636 \text{ кН.}$$

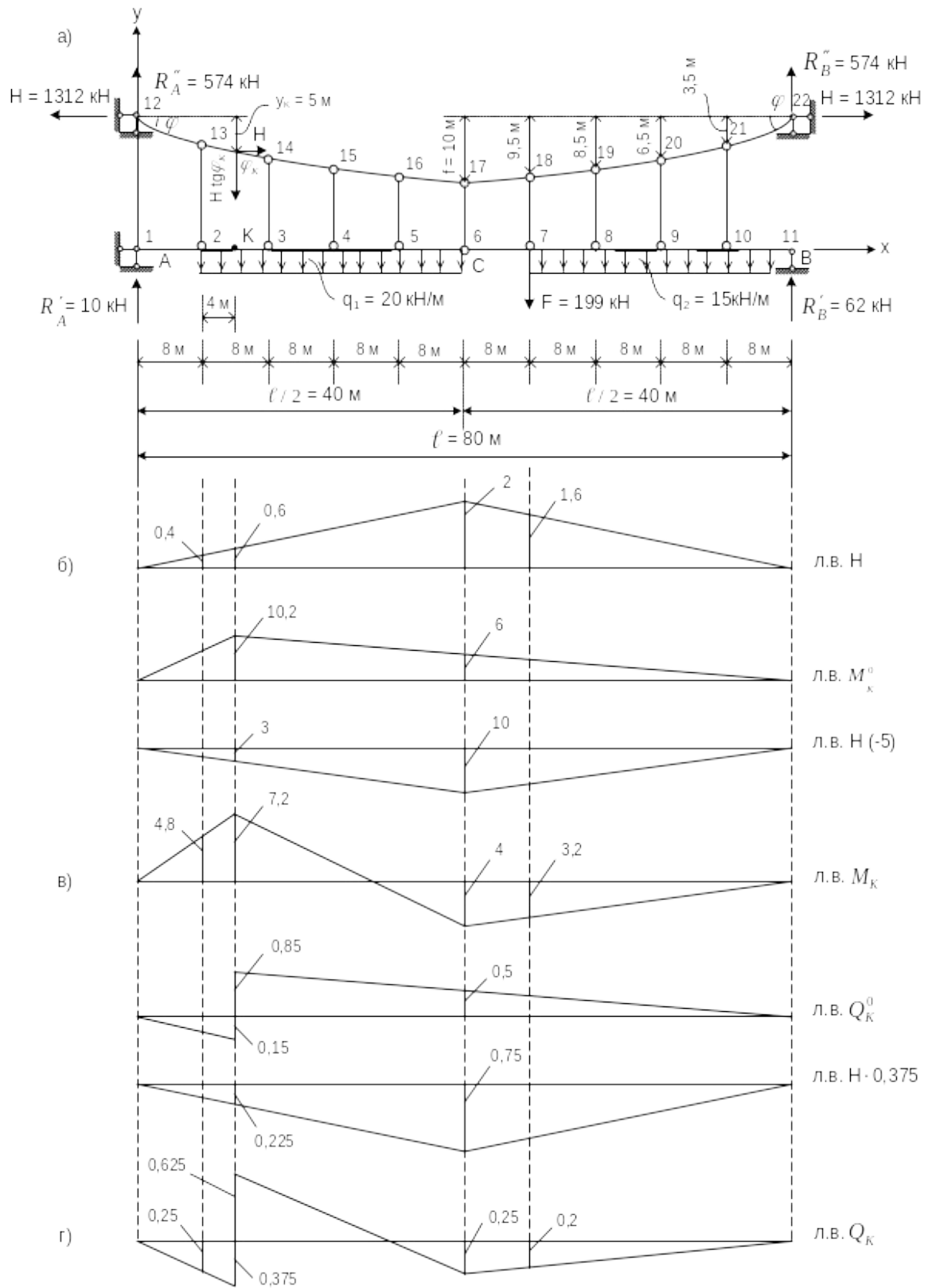


Рис. 6.8. Розрахункова схема комбінованої системи і лінії впливу H , M_K , Q_K

Перевіримо правильність визначення вертикальних опорних реакцій:

$$\sum F_y = 0, \quad 584 + 636 + -20 \cdot 32 - 100 - 15 \cdot 32 = 0.$$

Реакції знайдено правильно.

Визначимо балковий згинальний момент у перерізі C . Скористаємося спочатку рівнянням рівноваги для частини, розташованої зліва від перерізу, а потім – справа.

Момент лівих сил:

$$M_C^0 = 584 \cdot 40 - 20 \cdot 32 \cdot 16 = 13120 \text{ кНм.}$$

Момент правих сил (для перевірки):

$$M_C^0 = 636 \cdot 40 - 15 \cdot 32 \cdot 24 - 100 \cdot 8 = 13120 \text{ кНм.}$$

Балковий згинальний момент знайдено правильно. За формулою (4.4) визначимо горизонтальну складову зусилля в тросі:

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{13120}{10} = 1312 \text{ кН.}$$

За формулами (4.3) знаходимо вертикальні складові зусилля в тросі R_A'' і R_B'' і вертикальні реакції в балці R_A' і R_B' . Попередньо визначимо $\text{tg} \varphi$ (див. рис. 6.8, а).

$$\text{tg} \varphi = \frac{3,5}{8} = 0,4375; \quad \varphi = 23,63^\circ.$$

Далі (див. формули (4.3))

$$R_A'' = R_B'' = H \text{tg} \varphi = 1312 \cdot 0,4375 = 574 \text{ кН;}$$

$$R_A' = R_A^0 - H \text{tg} \varphi = 584 - 574 = 10 \text{ кН;}$$

$$R'_B = R_B^0 - H \operatorname{tg} \varphi = 636 - 574 = 62 \text{ кН.}$$

Знайдемо балковий згинальний момент у точці K (див. рис. 6.8, а). Складаємо рівняння моментів сил, розташованих зліва від перерізу:

$$M_K^0 = 584 \cdot 12 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 6848 \text{ кНм.}$$

Визначимо стрілу провисання троса в точці K :

$$y_K = \frac{3,5 + 6,5}{2} = 5 \text{ м,}$$

тангенс кута нахилу троса до горизонталі в цій точці:

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{3}{8} = 0,375$$

і балкову поперечну силу:

$$Q_K^0 = 584 \cdot 20 \cdot 4 = 504 \text{ кН.}$$

Тепер за формулами (4.8) і (4.9) знайдемо внутрішні зусилля в перерізі K балки:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K = 6848 - 1312 \cdot 5 = 288 \text{ кНм;}$$

$$Q_K = Q_K^0 - H \operatorname{tg} \varphi_K = 504 - 1312 \cdot 0,375 = 12 \text{ кН.}$$

Приступимо до побудови ліній впливу H , M_K і Q_K . У відповідності з формулою (4.4)

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \frac{1}{f}.$$

Цей графік побудовано на рис. 6.8, б.

Перевіримо правильність аналітичного визначення горизонтальної складової зусилля в тросі. Для цього скористаємося побудованою лінією впливу:

$$H = 20 \cdot \frac{0,4+2}{2} \cdot 32 + 100 \cdot 1,6 + \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 32 \cdot 15 =$$

$$= 768 + 160 + 384 = 1312 \text{ кН.}$$

Одержаний результат збігається з раніше обчисленим аналітичним способом.

Лінія впливу M_K

У відповідності з формулою (4.8) одержимо

$$\text{л.в. } M_K = \text{л.в. } M_K^0 - \text{л.в. } H \cdot y_K = \text{л.в. } M_K^0 - \text{л.в. } H \cdot 5.$$

Побудову цієї лінії впливу виконано на рис. 6.8, в.

Знайдемо по цій лінії впливу згинальний момент у точці K :

$$M_K = \frac{4,8+7,2}{2} \cdot 4 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 7,2 \cdot 2,8 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 28 \cdot 20 - 100 \cdot 3,2 -$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 32 \cdot 15 = 480 + 2016 - 1120 - 320 - 768 = 288 \text{ кНм.}$$

Результат збігається з даними аналітичного розрахунку.

Лінія впливу Q_K

Формула (4.9) показує, що

$$\text{л.в. } Q_K = \text{л.в. } Q_K^0 - \text{л.в. } H \cdot \text{tg} \varphi_K.$$

Побудову цієї лінії впливу виконано на рис. 6.8, г.

Визначимо зусилля по цій лінії впливу:

$$Q_K = - \left(\frac{0,25+0,375}{2} \cdot 4 \right) \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 0,625 \cdot 28 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 28 \cdot 20 -$$

$$- 100 \cdot 0,2 - \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 32 \cdot 15 = -25 + 175 - 70 - 20 - 48 = 12 \text{ кН.}$$

Одержаний результат збігається з результатом аналітичного розрахунку.

Розрахуємо тепер задану систему на ПЕОМ. Нумерація вузлів і напрям координатних осей показані на рис. 6.8. Вихідні

дані для розрахунку комбінованої системи на ПЕОМ наведені в табл. 6.10.

Таблица 6.10

Вихідні дані для розрахунку на ПЕОМ

Загальні дані					
Кількість вузлів – 22					
Кількість стержнів – 29					
Кількість типів поперечних перерізів – 2					
Кількість завантажень – 1					
Дані про вузли комбінованої системи					
Номер вузла	Код вузла			Координати вузла	
				X, м	У, м
1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	8	0
3	1	1	1	16	0
4	1	1	1	24	0
5	1	1	1	32	0
6	1	1	1	40	0
7	1	1	1	48	0
8	1	1	1	56	0
9	1	1	1	64	0
10	1	1	1	72	0
11	1	1	1	80	0
12	0	0	0	0	15
13	1	1	0	8	11,5
14	1	1	0	16	8,5
15	1	1	0	24	6,5
16	1	1	0	32	5,5
17	1	1	0	40	5,0
18	1	1	0	48	5,5
19	1	1	0	56	6,5
20	1	1	0	64	8,5
21	1	1	0	72	11,5
22	0	0	0	80	15,0

Продовження табл. 6.10

Дані про жорсткість стрижнів		
Жорсткість перерізу балки при згинанні $EJ_1 = 158908 \text{ кНм}^2$		
Жорсткість перерізу балки при розтяганні $EA_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ кН}$		
Жорсткість перерізу каната при розтяганні $EA_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ кН}$		
Дані про стрижні системи		
Код стрижня		Тип поперечного перерізу
-1	2	1
2	3	1
3	4	1
4	5	1
5	-6	1
-6	7	1
7	8	1
8	9	1
9	10	1
10	11	1
-2	-13	2
-3	-14	2
-4	-15	2
-5	-16	2
-6	-17	2
-7	-18	2
-8	-19	2
-9	-20	2
-10	-21	2
-12	-13	2
-13	-14	2
-14	-15	2
-15	-16	2
-16	-17	2
-17	-17	2
-18	-19	2
-19	-20	2
-20	-21	2
-21	-22	2

Дані про завантаження вузлів і стрижнів			
Кількість вузлів, завантажених зосередженим навантаженням – 1			
Кількість стрижнів, завантажених розподіленим навантаженням – 8			
Дані про завантаження вузлів			
Вузол	F_x , кН		M_z , кНм
7	0		0
Стрижень		Q_x , кН/м	Q_y , кН/м
2	3	0	-20
3	4	0	-20
4	5	0	-20
5	-6	0	-20
7	8	0	-15
8	9	0	-15
9	10	0	-15
10	-11	0	-15

Результати машинного рахунку наведено в табл. 6.11 і 6.12.

За результатами машинного рахунку побудовано епюри M і Q в балці, епюри поздовжніх сил у ланцюгу і підвісках, а також пружна лінія балки в деформованому стані (рис. 6.9). Значення згинального моменту і поперечної сили в точці K , знайдені в результаті аналітичного розрахунку і розрахунку по лініях впливу, збігаються з результатом розрахунку комбінованої системи на ПЕОМ. Максимальна величина вертикального переміщення балки складає 0,46 м (рис. 6.9, вузол 4), що дорівнює 1/175 прогону.

Переміщення вузлів

Номер вузла	Переміщення, м		Кут повороту
	горизонтальне	вертикальне	
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	-2.285E-01	2.722E-02
3	0.000E+00	-4.023E-01	1.541E-02
4	0.000E+00	-4.601E-01	-2.042E-03
5	0.000E+00	-3.503E-01	-2.674E-02
6	0.000E+00	-5.257E-02	0.000E+00
7	0.000E+00	-5.387E-02	-3.328E-03
8	0.000E+00	2.823E-03	-7.356E-03
9	0.000E+00	3.160E-02	6.994E-04
10	0.000E+00	6.669E-03	3.116E-03
11	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
12	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
13	-8.241E-02	-2.274E-01	0.000E+00
14	-1.314E-01	-4.006E-01	0.000E+00
15	-1.316E-01	-4.587E-01	0.000E+00
16	-1.045E-01	-3.497E-01	0.000E+00
17	-7.266E-02	-5.155E-02	0.000E+00
18	-5.936E-02	-5.331E-02	0.000E+00
19	-5.311E-02	4.156E-03	0.000E+00
20	-4.604E-02	3.334E-02	0.000E+00
21	-2.050E-02	2.848E-03	0.000E+00
22	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

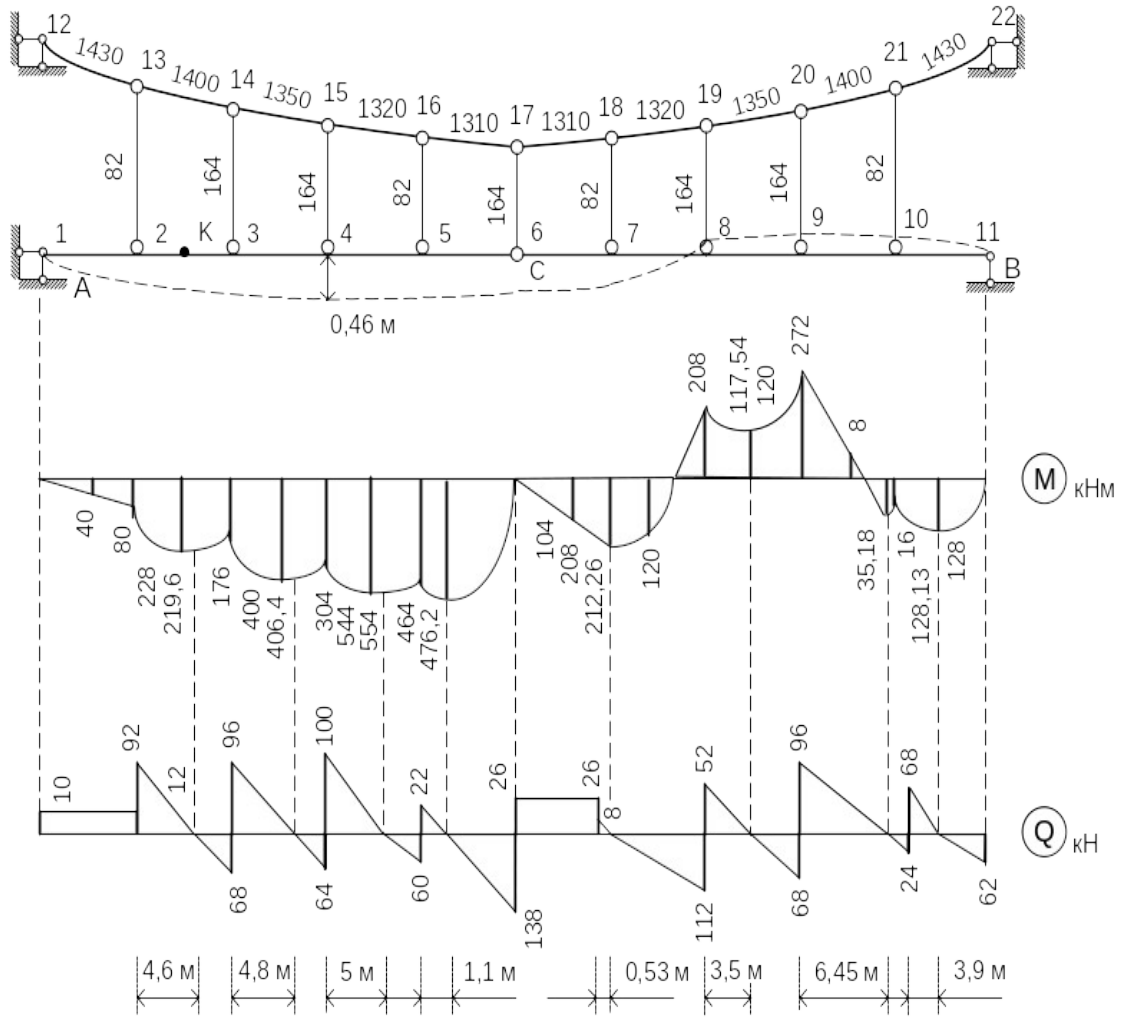


Рис. 6.9. Результати розрахунку комбінованої системи на ПЕОМ

7. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ ВІД ЗАДАНОГО ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ, ТЕМПЕРАТУРНИХ ВПЛИВІВ І ЗСУВУ ЗВ'ЯЗКІВ

Переміщенням даної точки споруди називається зміна її координати, викликана деформацією споруди, тобто відносним подовженням (укороченням) або скривленням його стрижнів. Деформації споруди залежать від згинальних і крутних моментів, поздовжніх і поперечних сил, що виникають у перерізах елементів споруди від заданого зовнішнього навантаження, температури, зсуву опорних або інших зв'язків. Тому визначенню переміщень звичайно передують визначення зусиль і побудова відповідних епюр (див. розд. 2 – 4).

Загальний метод визначення переміщень, який буде викладено далі, застосовний до лінійно-деформованих систем, тобто до таких систем, що виконані з ідеально пружного матеріалу; мають ідеально гладкі, позбавлені тертя шарнірні з'єднання; геометричну незмінюваність; припускають малі переміщення (наприклад, припустимі переміщення в мостових фермах складають 1/500 - 1/1000 прогону); підпорядковуються принципу незалежності дії сил. До лінійно-деформованої не можна в загальному випадку віднести комбіновану систему, розглянуту в підрозділах 4.1 і 6.4. Проте, якщо зафіксувати повний розпір H , то і ця система реагує лінійно на будь-яке поперечне навантаження.

Отже, якщо на пружну систему, складену з прямолінійних, ламаних або слабо скривлених стрижнів, діють зовнішні сили F , температурні впливи T , а також задано зміщення C будь-яких зв'язків, то переміщення довільної точки або перерізу K по заданому напрямку може бути обчислено за формулою

$$\Delta_{ij} = \sum \int \frac{N_i N_j ds}{EA} + \sum \int \frac{M_i M_j ds}{EJ} + \sum \int \frac{u Q_i Q_j ds}{GA} + \sum \int \alpha t N_i ds + \sum \int \frac{d\bar{t}}{h} M_i ds - \sum RC. \quad (7.1)$$

Отримана формула (7.1) дає загальний розв'язок, придатний для всіх плоских пружних геометрично незмінних стрижневих

систем. Справедлива вона тільки в тому випадку, коли деформації, викликані окремими факторами – навантаженням, температурою та переміщеннями опор, досить малі, щоб виправдати застосування закону незалежності дії сил.

Перші три доданки в цій формулі являють собою переміщення від дії зовнішнього навантаження (інтеграл О. Мора, 1874 р.). Четвертий і п'ятий члени формули (7.1) являють собою переміщення від зміни температури T . Останній член є переміщенням від заданого зсуву зв'язків. Символ $\sum \int$ у формулі (7.1) означає, що інтегрування провадиться по довжинах усіх стержнів, що складають споруду. В останньому члені формули (7.1) передбачено підсумовування добутоків RC . Техніку обчислення переміщень за формулою (7.1) розглянемо надалі від кожного з трьох впливів.

7.1. Визначення переміщень від заданого зовнішнього навантаження

Для обчислення переміщень від заданого зовнішнього навантаження використовуємо перші три члени універсальної формули (7.1), замінивши індекси j на F , а i на k :

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{N_k N_F ds}{EA} + \sum \int \frac{M_k M_F ds}{EJ} + \sum \int \frac{u Q_k Q_F ds}{GA}, \quad (7.2)$$

де N_k , M_k , Q_k – вираження внутрішніх зусиль як функції координати S довільного перерізу від одиничної узагальненої сили, прикладеної в точці K в напрямку шуканого переміщення;

N_F , M_F , Q_F – вираження внутрішніх сил як функції координати S від заданого зовнішнього навантаження;

E – модуль пружності матеріалу стрижня;

$G = E / 2(1 + \nu)$ – модуль зсуву;

ν – коефіцієнт Пуассона;

A – площа поперечного перерізу стрижня;

J – момент інерції відносно осі, яка проходить через центр ваги перерізу, тобто нейтральної осі (якщо стержень має велику кривизну $h/R > 1/5$, нейтральний шар при чистому згинанні не

збігається з центром ваги перерізу, тому використовувати формулу (7.2) у цьому випадку не можна);

μ – коефіцієнт форми перерізу (для прямокутного перерізу $\mu = 1,2$; для кругового перерізу $\mu = 32/27$; для прокатних профілів $\mu = A/A_s$, де A_s – площа вертикальної стінки).

При $EA = \text{const}$, $EJ = \text{const}$, $GA = \text{const}$ по довжині кожного стрижня вираз (7.2) набуває вигляду

$$\Delta_{kF} = \sum \frac{1}{EA} \int N_k N_F ds + \sum \frac{1}{EJ} \int M_k M_F ds + \sum \frac{\mu}{GA} \int Q_k Q_F ds. \quad (7.3)$$

Формули (7.2) і (7.3) дозволяють визначити будь-які узагальнені переміщення. При цьому в ролі узагальненої сили приймаються: при обчисленні лінійного переміщення – зосереджена одинична сила $F = 1$; при обчисленні кутового переміщення – зосереджений одиничний момент $M = 1$; при обчисленні взаємного лінійного переміщення двох точок – дві рівні і в протилежні боки спрямовані зосереджені сили по прямій, яка з'єднує точки; при обчисленні взаємного повороту двох перерізів – зосереджені одиничні моменти в обох перерізах, спрямовані в протилежні боки.

Якщо розглядаються споруди, що працюють переважно на згинання (балки, рами, а часто й арки), то у формулах переміщень (7.2) і (7.3) без істотної похибки можна залишити тільки інтеграл, що залежить від згинальних моментів. Покажемо це. Розглянемо консольну балку (рис. 7.1). Прийmemo $EJ = \text{const}$, $GA = \text{const}$. Визначимо вертикальне переміщення точки k (рис. 7.1, а). Через те що тут $N_k = 0$, формула (7.3) набуває такого вигляду:

$$\Delta_{kF} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_k M_F dx + \frac{\mu}{GA} \int_0^l Q_k Q_F dx;$$

$$M_F = -Fx; \quad M_k = -1 \cdot x; \quad Q_F = -F; \quad Q_k = -1; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

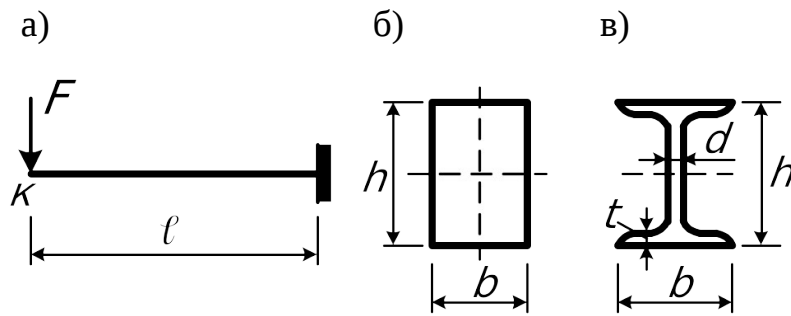


Рис. 7.1. Розрахункова схема консольної балки (а) і схеми поперечних перерізів (б, в)

Після інтегрування та найпростіших перетворень, маємо

$$\Delta_{kF} = \frac{F\ell^3}{3EJ} \left[1 + \frac{6\mu(1+\nu)J}{A\ell^2} \right]. \quad (7.4)$$

Розглянемо прямокутний переріз із розмірами b і h (рис. 7.1, б). Площа перерізу $A = bh$, момент інерції $J = bh^3/12$. Після підстановки A та J у вираз (7.4) одержуємо

$$\Delta_{kF} = \frac{F\ell^3}{3EJ} \left[1 + \frac{\mu(1+\nu)}{2} \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \right].$$

При коефіцієнті Пуассона $\nu = 0,3$ і коефіцієнті форми перерізу $\mu = 1,2$ прогин, викликаний деформацією зсуву (другий член формули) порівняно з прогином, викликаним деформацією згину (перший член формули), складає

$$\text{при } \frac{h}{\ell} = \frac{1}{5} - 3,12\%; \quad \text{при } \frac{h}{\ell} = \frac{1}{10} - 0,78\%.$$

Таким чином, вплив поперечних сил на згин тим менший, чим менше відношення $\frac{h}{\ell}$.

При $\frac{h}{\ell} < \frac{1}{10}$ без істотної похибки можна знехтувати деформаціями зсуву.

Тепер розглянемо переріз балки з прокатного профілю (двотавра) (рис. 7.1, в). Прийнемо двотавр № 20 (див. сортамент

прокатної сталі, ДСТ 8239-89). Для нього $A = 26,8 \text{ см}^2$, $J_x = 1840 \text{ см}^4$; $h = 20 \text{ см}$; $d = 0,52 \text{ см}$; $t = 0,84 \text{ см}$.

Нехай $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{5}$, тоді $\ell = 100 \text{ см}$.

Визначимо коефіцієнт форми перерізу

$$\mu = \frac{A}{A_s} = \frac{26,8}{0,52(20 - 1,68)} = 2,813.$$

Підставивши μ у формулу (7.4), знайдемо, що прогин, викликаний деформацією зсуву, складає 15,06 % від прогину, викликаного деформацією згину.

При $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{10}$ вплив деформацій зсуву оцінюється в 3,76 %.

При $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{15}$ – 1,67 %; при $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{20}$ – 0,94 %. Такий саме результат можна отримати, розглядаючи інші балки, поперечний переріз яких складається з прокатних профілів. Отже, якщо балка, яка розглядається, складається з прокатних профілів, то відношення $\frac{h}{\ell}$, коли можна знехтувати деформаціями зсуву, має бути $\frac{h}{\ell} < \frac{1}{10}$.

Отже, для елементів, що згинаються,

$$\Delta_{kF} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_k M_F ds. \quad (7.5)$$

При розрахунку споруд, елементи яких працюють на центральне розтягання або стискання (ферма), відсутні деформації згинання і зсуву, тобто

$$\Delta_{kF} = \sum \frac{1}{EA} \int N_k N_F ds = \sum_{i=1}^n \frac{N_{k,i} N_{F,i} \ell_i}{E_i A_i}, \quad (7.6)$$

де n – кількість стрижнів ферми.

Обчислення інтегралів, що входять у формулу (7.5), коли одне з зусиль M_k або M_F змінюється за лінійним законом, може бути здійснене за правилом Верещагіна шляхом

“перемножування” епюр, тобто

$$\int_A^B M_k M_F ds = \omega Y_0, \quad (7.7)$$

де ω – площа криволінійної епюри;

Y_0 – ордината під центром ваги криволінійної епюри, що узята на прямолінійній епюрі.

Якщо обидві епюри прямолінійні, то байдуже, для якої епюри брати площу ω , а для якої ординату Y_0 . У табл. 7.1 наведені приклади обчислення інтеграла (7.7) для деяких найпростіших епюр. Зауважимо, що будь-яку складну епюру завжди можна подати сумою простих фігур (трикутників і парабол) (табл. 7.1).

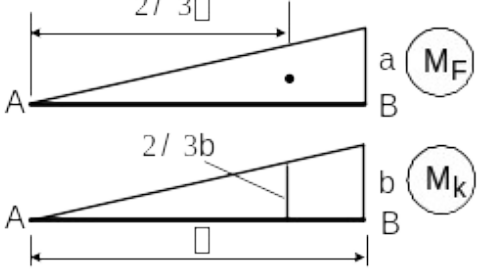
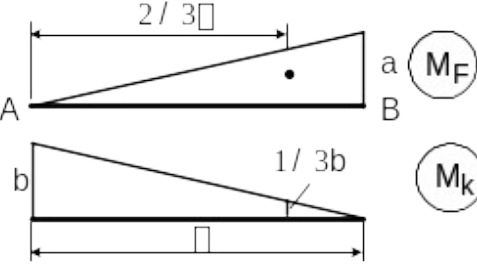
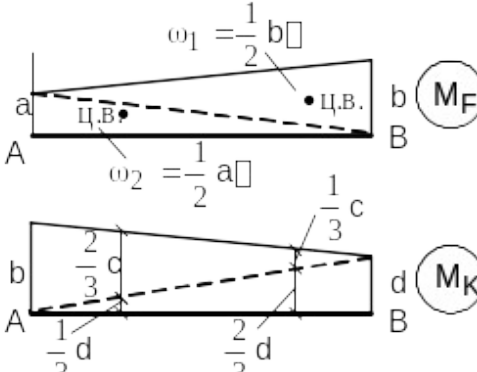
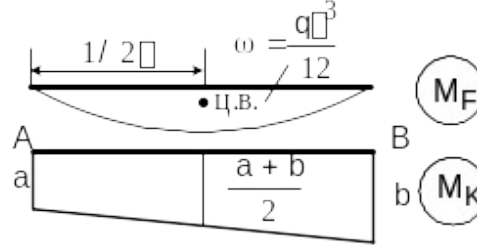
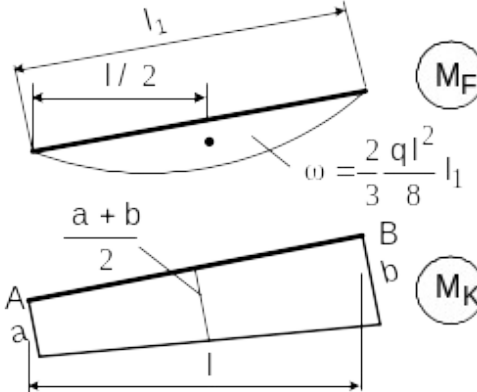
Для криволінійних ділянок стрижнів і стрижнів із змінною жорсткістю при обчисленні переміщень необхідно робити інтегрування, попередньо виразивши всі підінтегральні величини у функції від однієї змінної. Якщо підінтегральна функція важко піддається інтегруванню, інтеграл із достатнім ступенем точності можна обчислити приблизно. З цією метою вісь стрижня розбивається на декілька ділянок довжиною ΔS , а потім кожна ділянка приймається прямолінійною, і всі змінні величини в межах ділянки приймаються постійними, що дорівнюють середнім їхнім значенням. Тоді (якщо враховувати тільки згинальні моменти)

$$\int \frac{M_k M_F}{EJ} ds = \sum \frac{M_{k(\text{сеп})} M_{F(\text{сеп})}}{EJ_{\text{сеп}}} \Delta S. \quad (7.8)$$

Точність обчислення збільшується за рахунок більшої кількості прийнятих ділянок.

Таблиця 7.1

Приклади обчислення інтеграла (7.7)

Епюри M_F і M_K	Значення інтеграла
	$\int_A^B M_F M_K dx = \frac{abl}{3}$
	$\int_A^B M_F M_K dx = \frac{abl}{6}$
	$\int_A^B M_F M_K dx = \frac{1}{6} [a(2c + d) + b(2d + c)]$
	$\int_A^B M_F M_K dx = \frac{ql^3}{24} (a + b)$
	$\int_A^B M_F M_K dx = \frac{2 ql^2}{3 \cdot 8} l_1 \frac{1}{2} (a + b) = \frac{ql^2 l_1}{24} (a + b)$

7.2. Визначення переміщень від заданої зміни температури

Для визначення переміщень від зміни температури використовуємо четвертий і п'ятий члени універсальної формули (7.1)

$$\Delta_{kF} = \pm \sum \int \alpha t N_k ds \pm \sum \int \frac{\alpha t}{h} M_k ds. \quad (7.9)$$

Тут використано позначення величин, прийняті раніше (див. рис. 7.2). Порівняно з загальною формулою тут індекс i замінено на k . Значення температурних коефіцієнтів наведені в табл. 7.2.

Розглянемо приклад, коли до балки прикладаються температурні впливи (рис. 7.2, а).

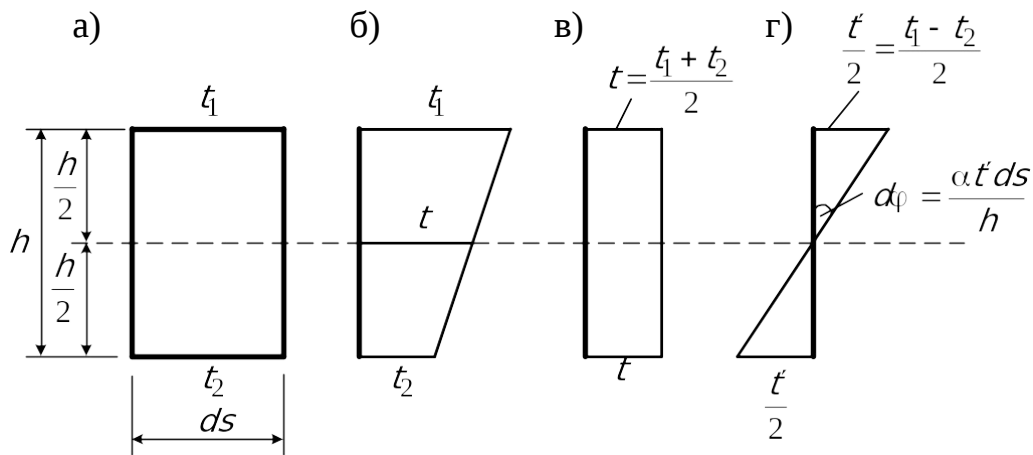


Рис. 7.2. Схема температурних впливів на елемент ds

Епюра температурних впливів на елемент ds показана на рис. 7.2, б. Прийнято, що по висоті перерізу температура змінюється за лінійним законом. Епюра температурних впливів розкладена на епюру, що характеризує симетричні впливи з осьовою температурою t (рис. 7.2, в), і епюру, що характеризує обернено симетричні впливи (скривлення) із температурою $\frac{t'}{2}$ (рис. 7.2, г).

Симетричні температурні впливи викликають переміщення елемента ds , що дорівнюють

$$\alpha t ds,$$

де A – температурний коефіцієнт, що залежить від матеріалу, із якого виготовлена конструкція, а кососиметричні температурні впливи викривляють елемент ds , викликаючи нахил вертикальних граней на малий кут

$$\alpha_p = \frac{\alpha t ds}{h}.$$

Таблиця 7.2

Коефіцієнти лінійного розширення α (на 1°C)

Матеріал	α
Алюміній	$255 \cdot 10^{-7}$
Магній	$255 \cdot 10^{-7}$
Мідь	$167 \cdot 10^{-7}$
Бронза й латунь	$(170 - 220) \cdot 10^{-7}$
Бетон	$(100 - 140) \cdot 10^{-7}$
Сталь	$(100 - 130) \cdot 10^{-7}$
Кам'яна кладка	$(40 - 70) \cdot 10^{-7}$
Дерево	$(20 - 50) \cdot 10^{-7}$

Якщо A , t , t' , h – постійні по довжині стержня, то формула (7.9) набуває такого вигляду:

$$\Delta_{kt} = \pm \sum \alpha t \omega_{N_k} \pm \sum \frac{\alpha t'}{h} \omega_M, \quad (7.10)$$

де ω_{N_k} , ω_{M_k} – площі епюр N_k і M_k на ділянках, що розглядаються.

Правила знаків перед першим і другим членами формули (7.10) прийняті такими.

Перед першим членом знак “плюс” приймається в тому випадку, якщо поздовжня сила і температура t викликають одночасно укорочення або подовження елемента. Якщо температура вкорочує (подовжує) елемент, а поздовжня сила подовжує (укорочує), то перед першим членом формули (7.10) ставиться знак “мінус”.

Перед другим членом формули (7.10) знак “плюс” приймається в тому випадку, якщо температура і згинальний момент викривляють елемент, що розглядається, в один бік. Якщо в різні боки – приймається знак “мінус”.

Таким чином, щоб визначити будь-яке переміщення від заданого температурного впливу, необхідно до споруди прикласти узагальнену одиничну силу в задану точку K і побудувати одиничні епюри N_k і M_k . Далі переміщення визначається за формулами (7.9) або (7.10).

7.3. Визначення переміщень від заданого зсуву зв'язків

Для знаходження переміщень від заданого зсуву зв'язків використовуємо останній член універсальної формули (7.1):

$$\Delta_{kc} = - \sum_{i=1}^y R_{ki} C_i, \quad (7.11)$$

де R_{ki} – реакція, що виникає від одиничної узагальненої сили, прикладеної в точці k за напрямком шуканого переміщення в можливому стані, в i -му зв'язку, зсув якого задано;

C_i – заданий зсув зв'язку.

Добуток $R_{ki} C_i$ вважається додатним, якщо напрямок зсуву зв'язку і напрямок зусилля, що в ньому виникає, збігаються.

Для того щоб знайти переміщення якоїсь точки від заданого зсуву зв'язків, необхідно в точці K за напрямком шуканого переміщення прикласти одиничну силу (момент) і знайти реакції в тих зв'язках системи, що за умовою задачі переміщуються. Далі слід скористатися формулою (7.11).

8. ЗАВДАННЯ: ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У РАМАХ ВІД ЗАДАНОГО ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ, ТЕМПЕРАТУРНИХ ВПЛИВІВ І ЗСУВУ ЗВ'ЯЗКІВ

У перерізі K рам визначити лінійні або кутові переміщення від зовнішнього навантаження, температури і зсув опорних зв'язків.

Для плоских статично визначних рам, показаних на рис. 8.1 – 8.4, визначити вказані на схемах переміщення.

У кожному варіанті завдання наведено три розрахункові схеми рами. Для першої рами необхідно визначити переміщення від заданого зовнішнього навантаження, для другої – від заданої зміни температури, для третьої – від заданого зсув опорних зв'язків.

$\Delta_{KF}^x, \Delta_{KI}^x, \Delta_{KC}^x$ – горизонтальне переміщення точки K відповідно зовнішнього навантаження, температури, зсув опорних зв'язків.

$\Delta_{KF}^y, \Delta_{KI}^y, \Delta_{KC}^y$ – вертикальне переміщення точки K відповідно зовнішнього навантаження, температури, зсув опорних зв'язків.

$\Delta_{KF}^\varphi, \Delta_{KI}^\varphi, \Delta_{KC}^\varphi$ – кутове переміщення точки K відповідно зовнішнього навантаження, температури, зміщення опорних зв'язків.

Дані для розрахунку наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Дані для розрахунку

Варіант	ℓ_1	ℓ_2	h	F	Q	t_{BH}	t_3	d	c
	м	м	м	кН	кН/м	град	град	м	м
1	4	6	4	2	2	10	-30	0.4	0.06
2	6	8	6	4	2	-10	-50	0.5	0.08

3	2	4	4	6	1	15	35	0.3	0.04
4	4	8	6	10	4	20	-10	0.5	0.08
5	6	10	4	12	2	30	-10	0.8	0.1
6	12	8	6	12	2	-30	-6	0.9	0.12
7	10	12	5	10	1	12	28	0.7	0.12
8	6	12	5	12	2	25	-35	0.8	0.12
9	8	10	4	6	2	14	-16	0.7	0.1
10	6	8	4	10	2	24	-36	0.5	0.08
11	8	6	6	8	1	-14	26	0.6	0.08
12	10	6	5	8	2	5	-25	0.7	0.1
13	8	12	6	10	3	-6	14	0.9	0.12
14	6	4	4	12	2	10	-2	0.4	0.06
15	8	10	4	8	4	12	-8	0.6	0.1
16	12	6	5	10	2	18	12	0.8	0.12
17	4	8	4	12	2	-20	10	0.5	0.08
18	12	10	6	8	4	8	12	0.9	0.12

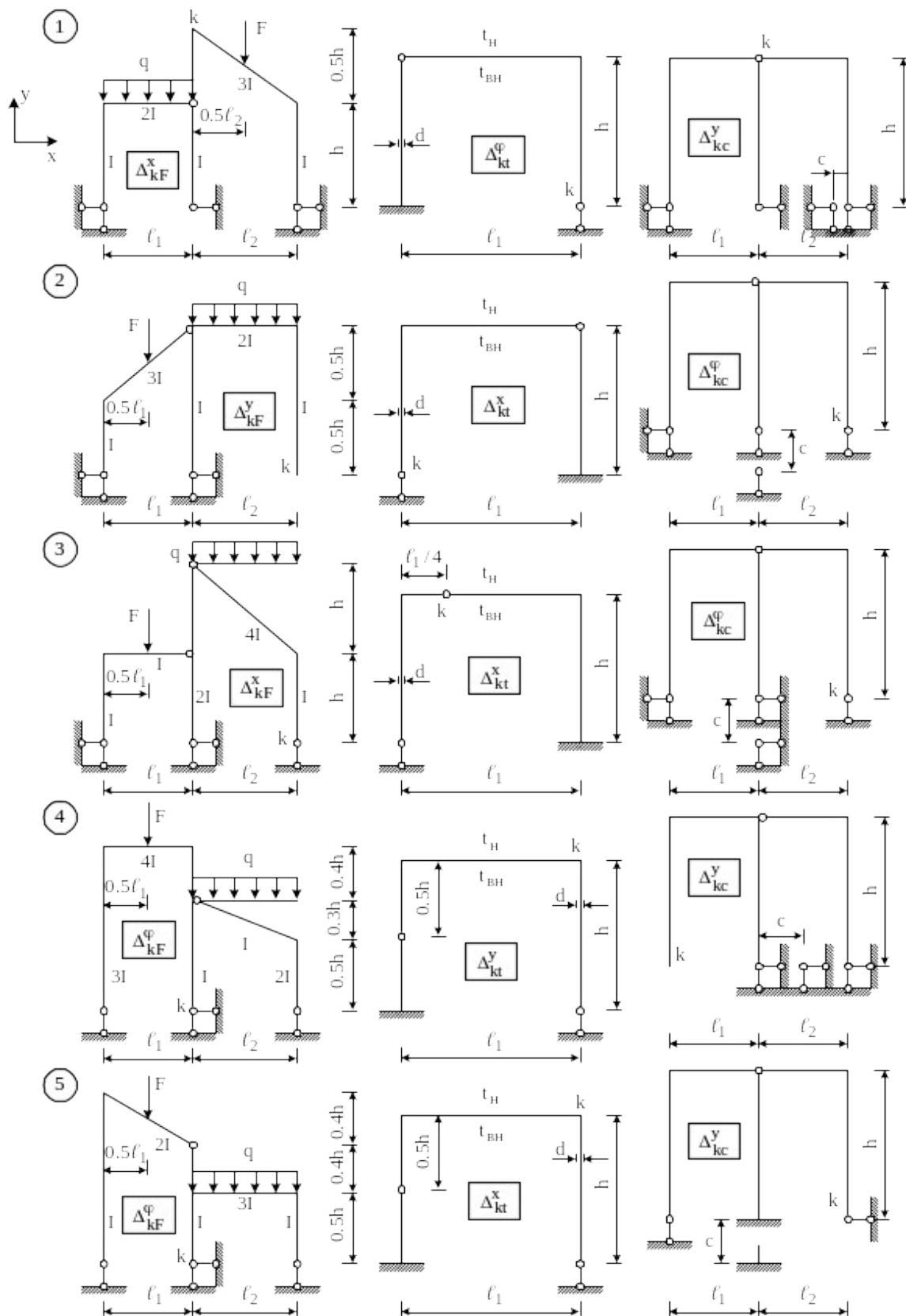


Рис. 8.1. Розрахункові схеми рам

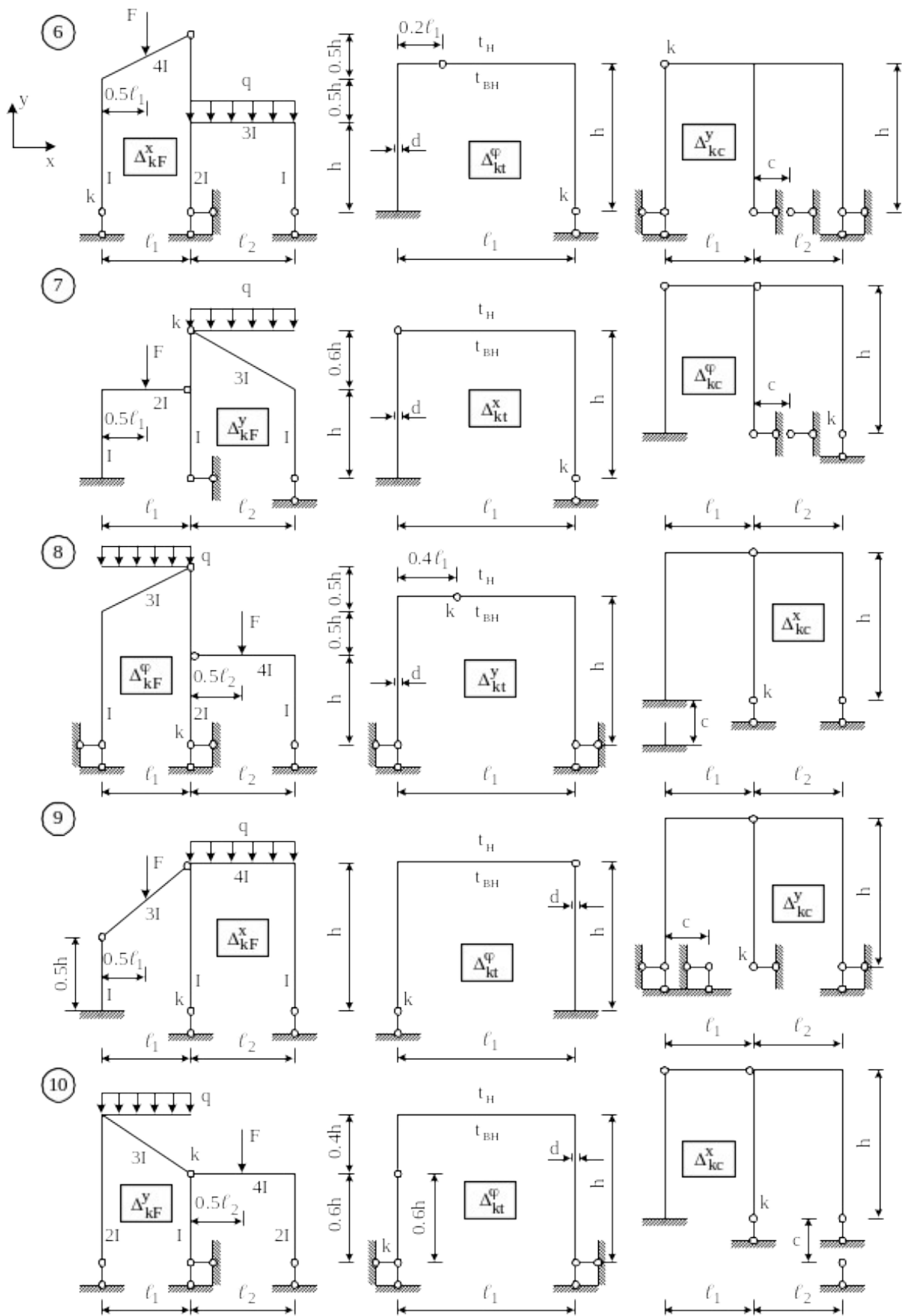


Рис. 8.2. Розрахункові схеми рам

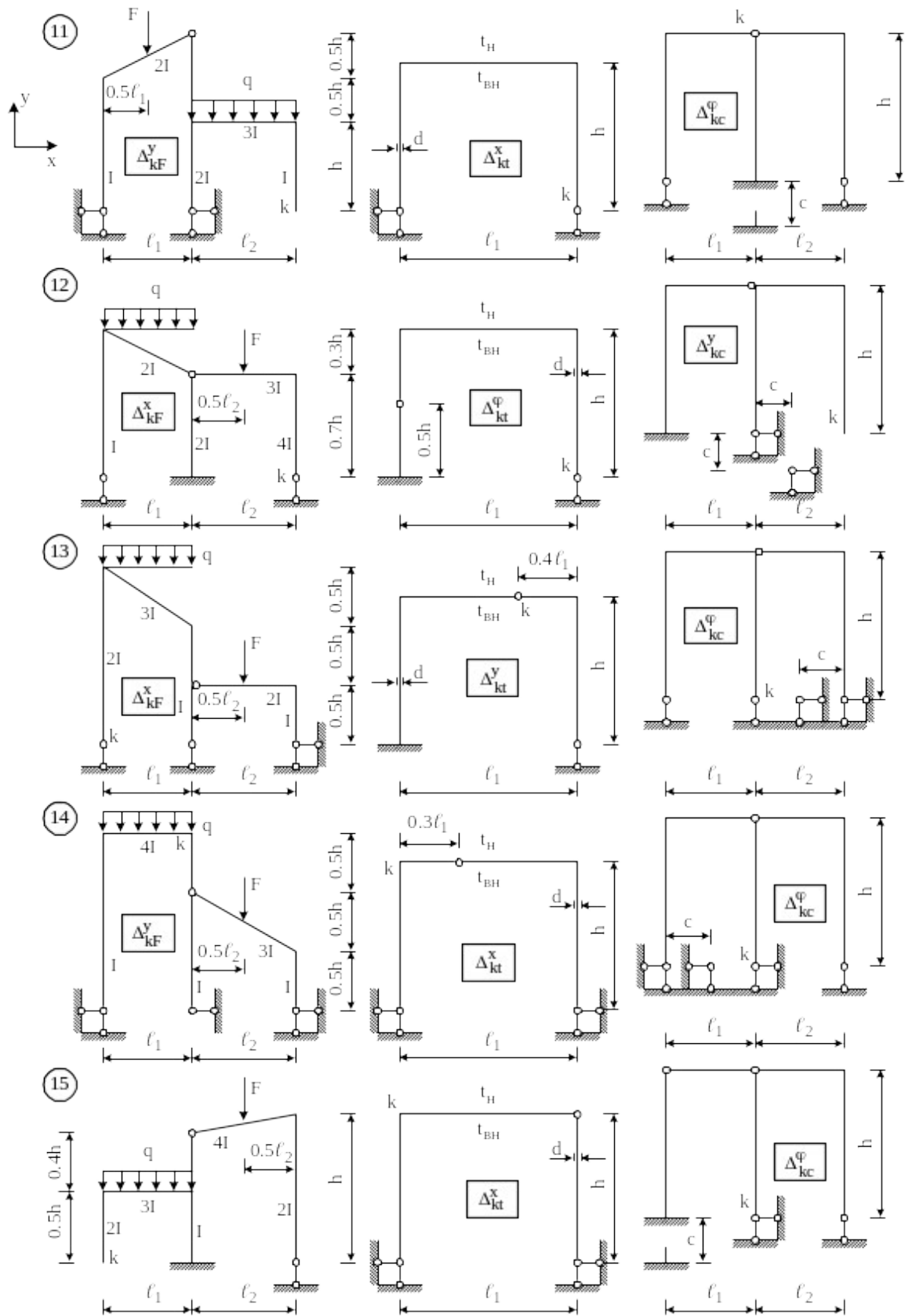


Рис. 8.3. Розрахункові схеми рам

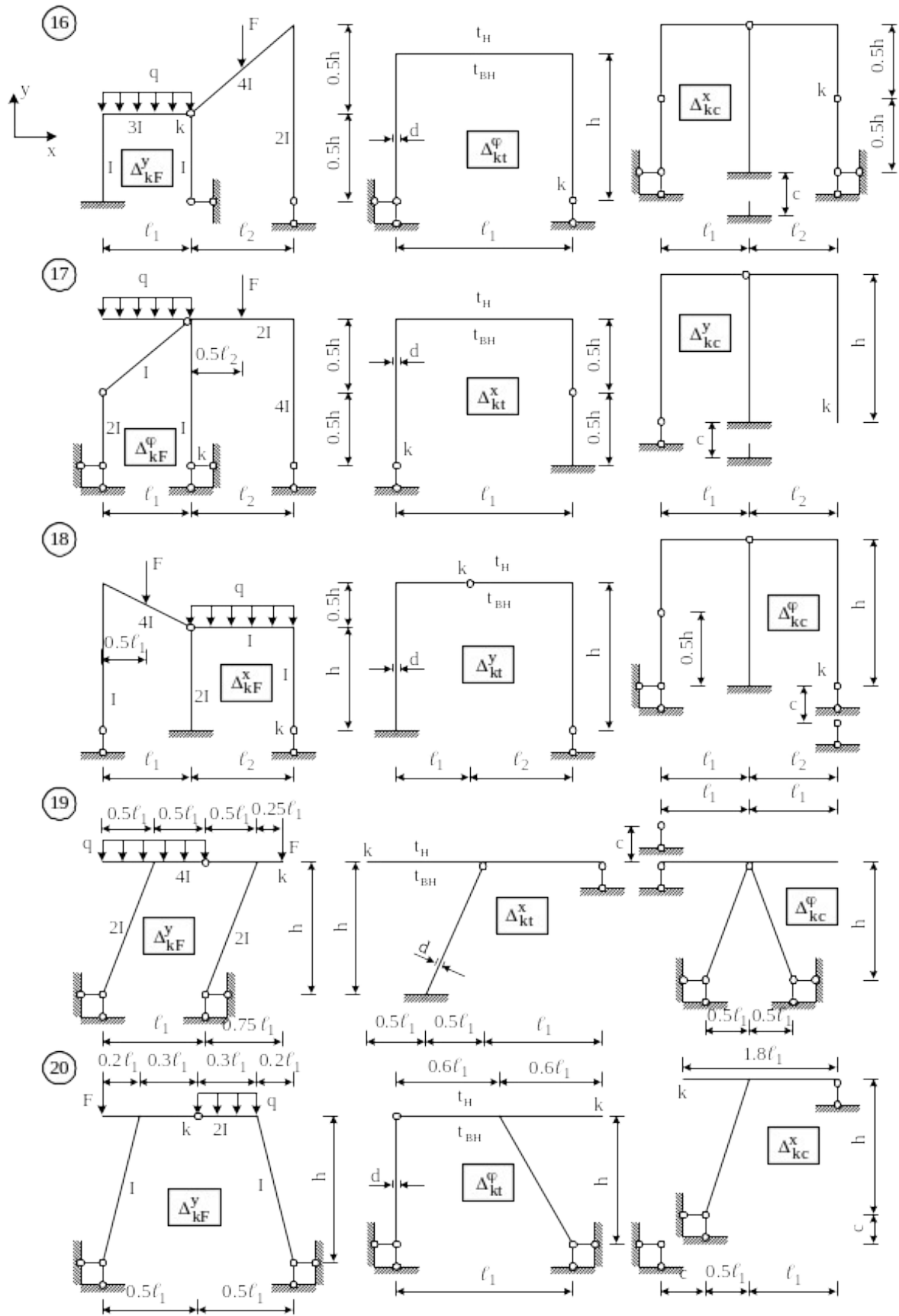


Рис. 8.4. Розрахункові схеми рам

8.1. Визначення переміщень від зовнішнього навантаження

Для заданої рами (рис. 8.5) потрібно визначити взаємний поворот перерізів A і B з урахуванням тільки згинальних деформацій.

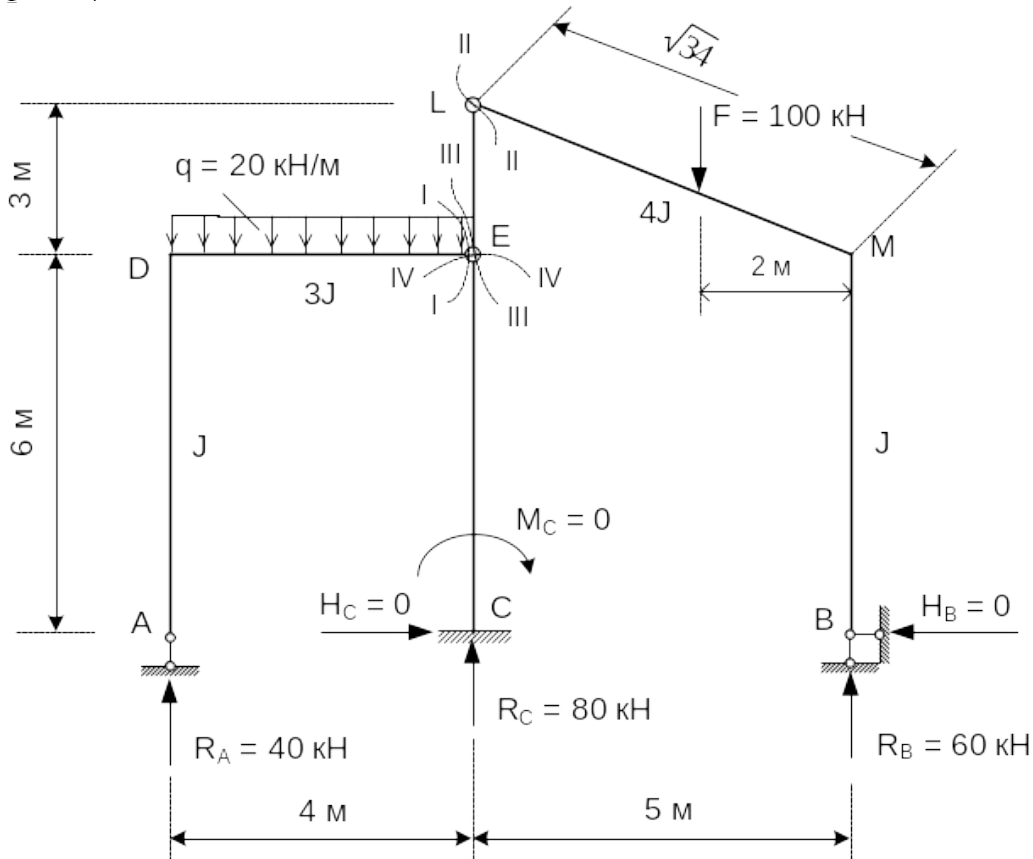


Рис. 8.5. Розрахункова схема рами

Побудуємо спочатку епюру моментів від заданого зовнішнього навантаження. Знайдемо опорні реакції. Для знаходження реакції R_A складемо рівняння моментів лівих сил відносно шарніра E (переріз I-I):

$$R_A \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

Звідси $R_A = 40$ кН.

Для визначення реакцій R_B і H_B складемо систему рівнянь правих сил відносно шарнірів L і E (переріз II-II і III-III):

$$R_B \cdot 5 - H_B \cdot 9 - 100 \cdot 3 = 0,$$

$$R_B \cdot 5 - H_B \cdot 6 - 100 \cdot 3 = 0.$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо $H_B = 0$; $R_B = 60$ кН.
Спроектуємо всі сили, що діють на раму, на горизонталь:

$$H_C - H_B = 0.$$

Звідси $H_C = 0$.

Складемо рівняння моментів сил, розташованих нижче шарніра E на стояку EC (переріз IV-IV). Одержуємо $M_C = 0$.
Спроектувавши всі сили на вертикаль, знайдемо $R_C = 80$ кН.
Епюра моментів показана на рис. 8.6, а.

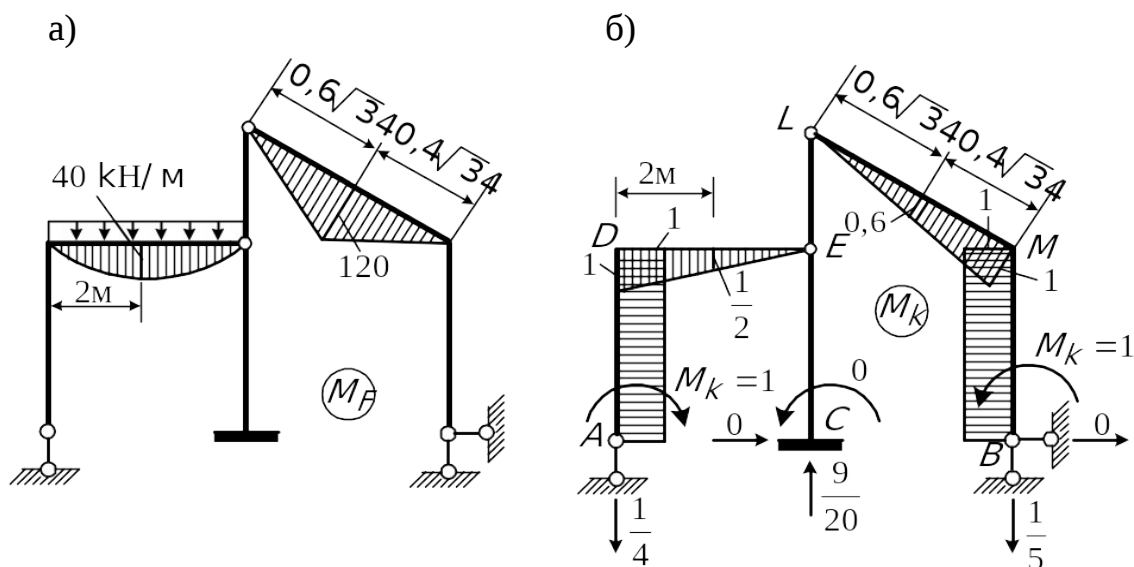


Рис. 8.6. Епюра моментів від зовнішнього навантаження (а)
і одинична епюра моментів (б)

Для знаходження взаємного повороту перерізів A і B прикладемо до допоміжного стану рами два рівних і в протилежні боки спрямованих одиничних моменти (рис. 8.6, б). Як і раніше, знайдемо опорні реакції та побудуємо одиничну епюру.

Визначимо шукане взаємне переміщення перерізів A і B . Ділянки, де є епюри M_k і M_F , – DE і LM (рис. 8.6, а, б).

$$\Delta_{KF}^{\varphi} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 0,6 \sqrt{34} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 0,4 \times \right. \\ \left. \times \sqrt{34} \left(\frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{64,43}{EJ} \text{ рад.}$$

Переміщення здійснилося зі знаком “плюс”, отже, перерізи *A* і *B* повертаються назустріч один одному (за напрямком одиничних моментів (рис. 8.6, б)).

8.2. Визначення переміщень від температурних впливів

Для заданої рами (рис. 8.7) потрібно визначити горизонтальне переміщення точки *K*.

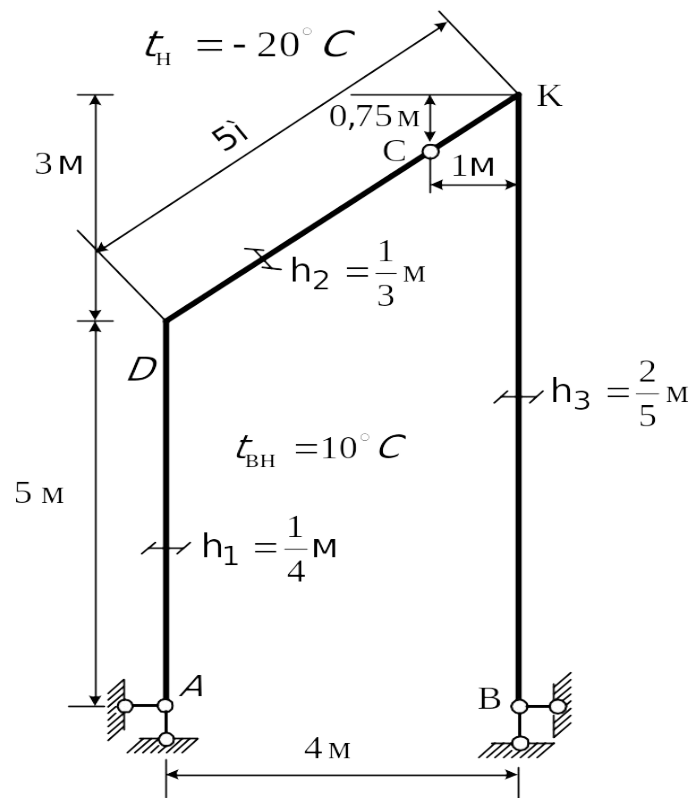


Рис. 8.7. Розрахункова схема рами

Відповідно до викладеного в підрозділі 7.2 порядку визначення переміщень, прикладаємо в точці *K* горизонтальну одиничну силу (рис. 8.8).

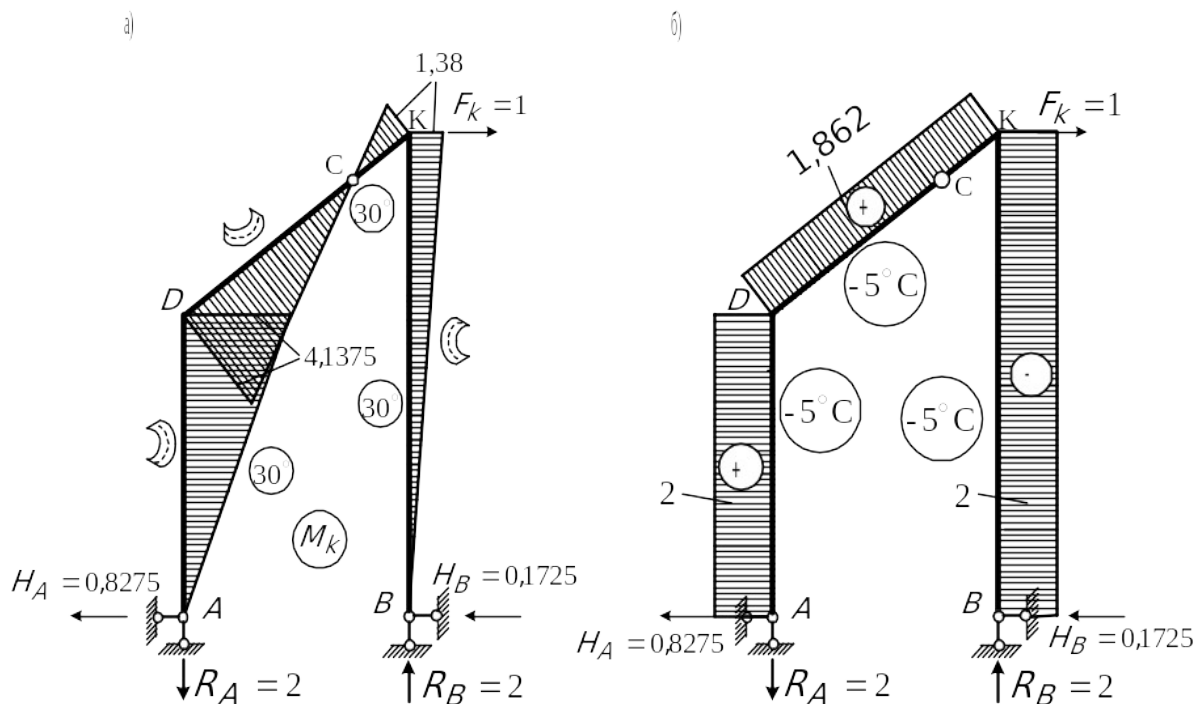


Рис. 8.8. Епюри згинальних моментів M_k і поздовжніх сил N_k

Визначаємо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0: R_A \cdot 4 - 1 \cdot 8 = 0, \quad R_A = 2; \\ \sum F_y = 0: R_A - R_B = 0, \quad R_A = R_B = 2; \\ \sum M_C^{лів} = 0: R_A \cdot 3 - H_A \cdot 7,25 = 0, \quad H_A = 0,8275; \\ \sum F_x = 0: H_A + H_B - 1 = 0, \quad H_B = 0,1725. \end{aligned}$$

Перевірка: $\sum M_C^{пра} = 0: R_B \cdot 1 - H_B \cdot 7,25 - 1 \cdot 0,75 = 0.$

Епюри моментів і поздовжніх сил побудовано на рис. 8.8, а, б.

Визначимо температуру по осі елементів, що складають раму, і модуль різниці внутрішньої та зовнішньої температур:

$$t = \frac{10 - 20}{2} = -5^\circ\text{C}, \quad t = |10 + 20| = |30|^\circ\text{C}.$$

За формулою (7.10) обчислюємо шукане переміщення. Знаки перед першим членом формули (7.10): на ділянках AD і DK – мінус (температура вкорочує елементи AD і DK , а поздовжня сила подовжує (рис. 8.8, б), на ділянці BK – плюс.

Знаки перед другим членом формули (7.10): на ділянках AD і DC – плюс (момент і температура викривляють елементи в один бік (рис. 8.8, а)), на ділянках $СК$ і $КВ$ – мінус.

$$\Delta_{kt} = -\alpha \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 - \alpha \cdot 5 \cdot 1,862 \cdot 5 + \alpha \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 + \frac{\alpha \cdot 30}{1/4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,1375 \cdot 5 + \frac{\alpha \cdot 30}{1/3} \times \\ \times \frac{1}{2} \cdot 4,1375 \cdot 3,75 - \frac{\alpha \cdot 30}{1/3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,38 \cdot 1,25 - \frac{\alpha \cdot 30}{2/5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,38 \cdot 8 = 1381,27\alpha.$$

Якщо вважати, що рама сталева (за табл. 7.2 $\alpha = 115 \cdot 10^{-7}$), то шукане переміщення буде дорівнювати

$$\Delta_{kt} = 1381,27 \cdot 115 \cdot 10^{-7} = 0,016 \text{ м} = 1,6 \text{ см.}$$

8.3. Визначення переміщень від зсуву зв'язків

Для заданої рами (рис. 8.9, а) потрібно визначити вертикальне переміщення точки K .

У точці K можливого стану рами прикладаємо вертикально одиничну силу і визначаємо опорні реакції (рис. 8.9, б).

Вертикальні реакції рівні між собою, оскільки рама симетрична щодо вертикальної осі, тобто

$$R_A = R_B = 1/2.$$

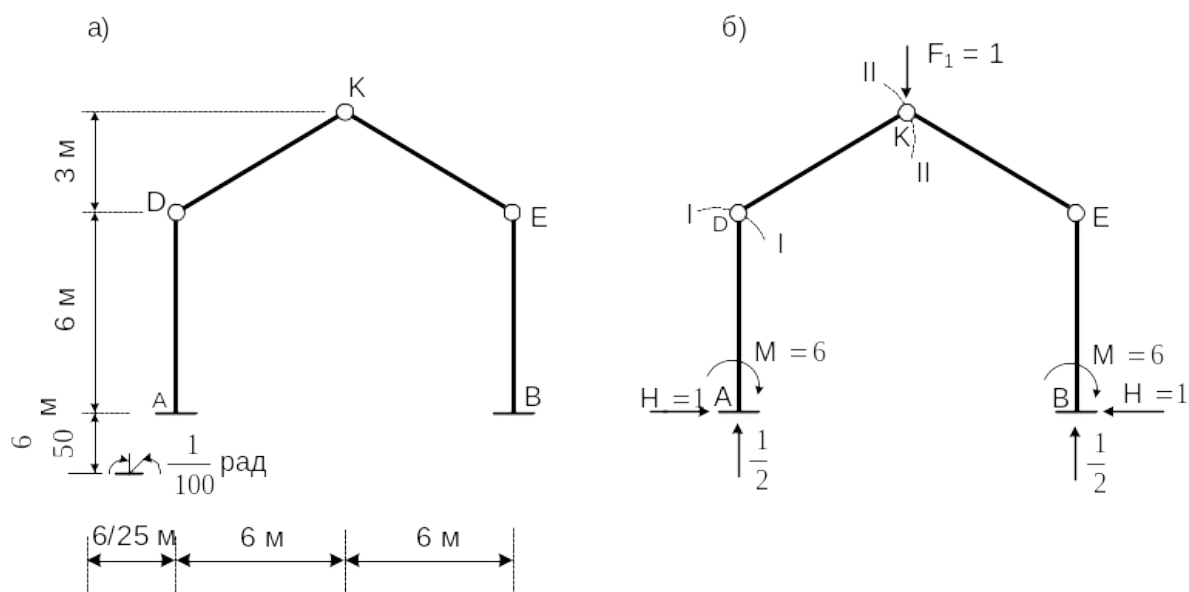


Рис. 8.9. Розрахункова схема рами (а) і реакції у зв'язках, що переміщуються (б)

Складемо рівняння:

$$\sum M_D^{\text{лів}} = 0 \text{ (переріз I-I на рис. 8.9, б):}$$
$$H \cdot 6 - M = 0, H = \frac{M}{6};$$

$$\sum M_K^{\text{лів}} = 0 \text{ (переріз II-II на рис. 8.9, б):}$$
$$\frac{1}{2} \cdot 6 + M - H \cdot 9 = 0 \quad \text{або} \quad 3 + M - \frac{M}{6} \cdot 9 = 0;$$
$$M = 6, H = 1.$$

Тепер за формулою (7.11) знайдемо переміщення

$$\Delta_{kc} = - \left(- \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{50} - 1 \cdot \frac{6}{25} + 6 \cdot \frac{1}{10} \right) = 24 \text{ см.}$$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Чихладзе, Е.Д. Будівельна механіка [Текст] / Е.Д. Чихладзе. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 320 с.
2. Чихладзе, Э.Д. Строительная механика [Текст] / Э.Д. Чихладзе. – Харьков: УкрГАЖТ, 2011. – 320 с.
3. Расчет распорных систем с применением ПЭВМ [Текст]: учеб. пособие / Э.Д. Чихладзе, Н.Г. Черненко, А.Г. Кислов. – Харьков: ХарГАЖТ, 1998. – 120 с.
4. Снитко, Н.К. Строительная механика [Текст] / Н.К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1980. – 431 с.
5. Строительная механика [Текст] / Ю.И. Бутенко [и др.]; под ред. Ю.И. Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 480 с.
6. Строительная механика. Стержневые системы [Текст] / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, В.Я. Лащеников,

Н.Н. Шапошников; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.

7. Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы [Текст] / А.В. Александров, Б.Я. Лащенко, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.

8. Строительная механика: Руководство к практическим занятиям [Текст] / Ю.И. Бутенко, Н.А. Засядько, С.Н. Кан и др.; под ред. Ю.И. Бутенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.

9. Ржаницын, А.Р. Строительная механика [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.

10. Дарков, А.В. Строительная механика [Текст] / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: Высшая школа, 1986. – 606 с.

11. Тимошенко, С.П. Теория упругости [Текст] / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 575 с.

12. Розин, Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам [Текст] / Л.А. Розин. – М.: Стройиздат, 1977. – 248 с.

13. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

14. Определение усилий и перемещений в статически определимых расчетных схемах инженерных сооружений на автомобильных дорогах [Текст] / Э.Д. Чихладзе, В.Д. Зинченко, В.А. Голеско, А.Г. Кислов. – К.: УМКВО, 1989. – 127 с.

15. Матричные алгоритмы в строительной механике стержневых систем [Текст] / Д.К. Бендюг, Б.Г. Брадул-Кириллов, Ю.И. Бутенко и др. – М.: Высшая школа, 1980. – 123 с.

16. Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела [Текст] / А.П. Филин. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 616 с.

17. Фадеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры [Текст] / Д.К. Фадеев, В.Н. Фадеева. – М.: Физматгиз, 1965. – 230 с.

18. Зенкевич, О.К. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О.К. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 118 с.

19. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов [Текст] / И.Н. Бронштейн; под ред. Г. Гроше и В. Циглера. – М.: Наука, 1981. – 718 с.

20. Ватуля, Г.Л. Розрахунково-проектувальні завдання з опору матеріалів та будівельної механіки [Текст]: метод. вказівки / Г.Л. Ватуля. – Харків: ХарДАЗТ, 2001. – 28 с.

21. Кітов, Ю.П. Програмний комплекс для контролю і розв'язання задач на ПЕОМ за курсом "Будівельна механіка" [Текст] / Ю.П. Кітов, М.А. Веревічева, М.Г. Черненко. – Харків: УкрДАЗТ, 2007. – 35 с.

22. Чихладзе, Е.Д. Розрахунок статично визначних ферм із застосуванням комп'ютера [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Л.Б. Кравців. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 26 с.

ДОДАТОК 1

Програма розрахунку стрижневих систем на ПЕОМ з використанням методу кінцевих елементів (МКЕ)

1. Основні положення методу кінцевих елементів

З курсу опору матеріалів при вивченні основ теорії пружності відомо, що для опису напружено-деформованого стану тіла необхідно розраховувати 15 функціями. Це $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, U, V, W$. Для визначення цих функцій необхідно розв'язати систему з 15 рівнянь, у яку входять:

– статичні рівняння:

$$A\sigma + P = 0, \quad (\text{Д.1.1})$$

де

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};$$

– геометричні рівняння:

$$\varepsilon = Au, \quad (\text{Д.1.2})$$

де

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix};$$

– фізичні рівняння:

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (\text{Д.1.3})$$

де

$$D = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix},$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Delta, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Розв'язання систем рівнянь (Д.1.1), (Д.1.2), (Д.1.3) має задовольняти кінематичні граничні умови $u = u_s$, де u_s – вектор заданих переміщень на контурі, і статистичні граничні умови:

$$N^T \sigma = P_s,$$

де P_s – вектор заданих зусиль на контурі:

$$N = \begin{bmatrix} \ell & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \\ m & \ell & 0 \\ 0 & n & m \\ n & 0 & \ell \end{bmatrix},$$

де ℓ , m , n – напрямні косинуси, які визначають положення зовнішньої нормалі до поверхні тіла розглянутої точки.

Рівняння (Д.1.1), (Д.1.2), (Д.1.3) і умови на контурі в традиційній (нематричній) формі мають такий вигляд:

– статистичні рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \chi &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0; \end{aligned}$$

– геометричні рівняння:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

– фізичні рівняння:

$$\sigma_x = \lambda\Delta + 2G\varepsilon_x; \quad \sigma_y = \lambda\Delta + 2G\varepsilon_y; \quad \sigma_z = \lambda\Delta + 2G\varepsilon_z;$$

– умови на контурі:

$$\bar{X} = \ell\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz};$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + n\tau_{yz} + \ell\tau_{xy};$$

$$\bar{Z} = n\sigma_z + \ell\tau_{xz} + m\tau_{yz}.$$

Аналітичні розв'язки наведених диференціальних рівнянь можна виконати лише для найпростіших випадків [11, 13]. Виходом із створеного положення виявився перехід до ідеалізованих розрахункових моделей, наприклад подання суцільного середовища у вигляді складання кінцевих елементів простої ферми, з'єднаних між собою в остаточній кількості точок.

За допомогою такої апроксимації, як показали подальші дослідження, можна досягти задовільної для практики точності розрахунків, якщо тільки базисні елементи вибирати достатньо малими. Кінцево-елементну дискредитацію континуума проведемо для просторової задачі.

Виділимо з суцільного середовища невелику область нескладної форми. Уведемо для розглядання вектори Q вузлових переміщень і P – вузлових сил:

$$\vec{q}_i = |q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{is}|^T;$$

$$P_i = |P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{is}|^T.$$

Припустимо, що переміщення вузлів $1, 2, \dots, s$ даного елемента повністю визначають зусилля у відповідних вузлових точках. Очевидно, що ці зусилля лише статично еквівалентні безлічі виникаючих у дійсності зусиль, діючих на гранях будь-якого елемента. Установимо зв'язок між зусиллями і переміщеннями.

Будемо уважати, що переміщення усередині елемента виявляються лінійними функціями координат

$$u = F\alpha, \quad (\text{Д.1.4})$$

де F – матриця координатних функцій;
 α – вектор невідомих параметрів.

Статичні поліноми, поліноми Ерміта [18], тригонометричні рядки можуть використовуватися як координатні функції.

Геометричні і фізичні рівняння (Д.1.2), (Д.1.3) усередині елемента з урахуванням формули (Д.1.4) запишуться так:

$$\varepsilon = AF\alpha, \quad (\text{Д.1.5})$$

$$\sigma = DAF\alpha. \quad (\text{Д.1.6})$$

Підставимо у формулу (Д.1.4) координати вузлових точок елемента і знайдемо вектор вузлових переміщень:

$$q = C\alpha, \quad (\text{Д.1.7})$$

де C – матриця вузлових координат.

З формули (Д.1.7) знайдемо

$$\alpha = C^{-1}q. \quad (\text{Д.1.8})$$

Тепер підставимо (Д.1.8) в (Д.1.4). В результаті знайдемо

$$u = FC^{-1}q = \Phi q, \quad (\text{Д.1.9})$$

де $\Phi = FC^{-1}$ – матриця функцій форми, яка за фізичним значенням показує переміщення точок елемента у випадку, коли компоненти зсуву вузла i дорівнюють одиниці ($u_i = 1, v_i = 1, w_i = 1$), а зсув інших вузлів відсутній. В i -му вузлі $\Phi_i = 1$, в інших вузлах $\Phi_i = 0$.

З урахуванням формул (Д.1.7), (Д.1.8), (Д.1.9) рівняння (Д.1.5) і (Д.1.6) набувають такого вигляду:

$$\varepsilon = A\Phi q = Bq; \quad (\text{Д.1.10})$$

$$\sigma = DBq, \quad (\text{Д.1.11})$$

де $B = A\Phi = AFC^{-1}$.

На основі принципу Лагранжа [7, 12] прирівнюємо роботу зовнішніх вузлових зусиль до внутрішньої можливої роботи – роботи напружень:

$$\int_{\nu} \int \int \varepsilon^T \sigma dv = q^T P, \quad (\text{Д.1.12})$$

Підставивши формули (Д.1.10) і (Д.1.11) у формулу (Д.1.12) і скоротивши

$$q^T \int_{\nu} \int \int B^T DB dv \cdot q = q^T P,$$

одержимо основне рівняння МКЕ

$$Kq = P, \quad (\text{Д.1.13})$$

де $K = \int_{\nu} \int \int B^T DB dv$ – матриця жорсткості.

Одержане рівняння (Д.1.13) можна розглядати і так:

$$q = K^{-1}P, \quad (\text{Д.1.14})$$

де K^{-1} – матриця податливості.

Системи рівнянь (Д.1.13) і (Д.1.14) є замкненими системами рівнянь для всієї конструкції, повний розрахунок якої – задача не більш складна, ніж розв'язання системи лінійних рівнянь високого порядку з симетричною додатною матрицею стрічкової структури. Покажемо це на прикладі стрижневого елемента, працюючого на розтягання і стискання (рис. Д.1.1).

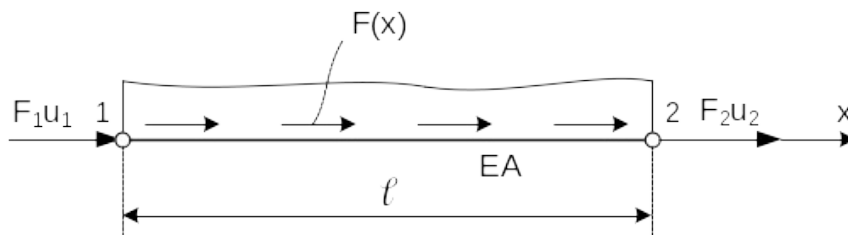


Рис. Д1.1. Стрижневий елемент

Побудуємо спочатку для стрижневого елемента матрицю жорсткості.

Переміщення в межах елемента опишемо таким виразом:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x.$$

У матричній формі вектор переміщень (Д.1.4) для розглянутого елемента має вигляд

$$u = F\alpha = [1 \quad x] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

а вектор вузлових переміщень –

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = C\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ell \end{bmatrix} \alpha.$$

Враховуючи формулу (Д.1.8), знайдемо вектор невідомих параметрів $\alpha = C^{-1}q$ або

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \ell & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Тепер запишемо матричне рівняння для вектора переміщень (Д.1.9):

$$u = [1 \quad x] \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \ell & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell-x}{\ell} & \frac{x}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [\Phi_1 \quad \Phi_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

або

$$\vec{u} = \Phi_1 u_1 + \Phi_2 u_2 = \frac{\ell-x}{\ell} u_1 + \frac{x}{\ell} u_2.$$

Якщо відомі форми, можна знайти вузлові сили з такого рівняння:

$$P_i = \int_0^{\ell} P(x) \Phi_i dx, \quad i = 1, 2.$$

При $P = \text{const}$ $P_1 = P_2 = \frac{P\ell}{2}$.

Тепер знайдемо: $A = \frac{d}{dx}$ (див. формулу (Д.1.1));

$B = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ (див. формулу (Д.1.11)); $D = E$ (див. формулу (Д.1.3)) і, зрештою,

$$K = \frac{EA\ell}{\ell^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{Д.1.13})$$

Розглянемо стрижень, який складається з двох кінцевих елементів (рис. Д.1.2).

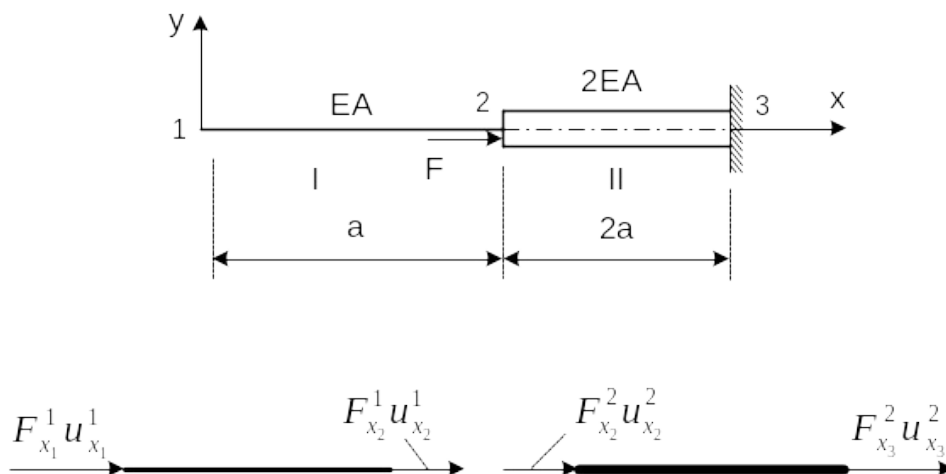


Рис. Д.1.2. Схема ступінчастого стрижня

Запишемо рівняння (Д.1.13) для всієї системи:

$$\begin{bmatrix} F_{x_1}^1 \\ F_{x_2}^1 \\ F_{x_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{22}^2) & K_{23}^2 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Тут матриці K_{ij} містять компоненти зусиль в i -му вузлі при одиничному зсуві j -го вузла за умови, що інші вузли зсувів не мають. Враховуючи кінематичні граничні умови, виключаємо в матриці жорсткості стовпець i рядок, відповідні нульовим переміщенням (у нашому випадку – це третій стовпець і третій рядок). Тоді

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{22}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо елементи матриць жорсткості кінцевих елементів:

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Перетворюючи матрицю жорсткості, знаходимо переміщення вузлів:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{a}{EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix},$$

або

$$u_1 = u_2 = \frac{Pa}{EA}.$$

2. Підготовка вихідних даних і виконання розрахунків

У подальшому при розрахунку на ПЕОМ методом кінцевих елементів розглядаються плоскі стрижневі системи, які в загальному випадку можуть складатися з прямолінійних і криволінійних елементів, з'єднаних між собою, а також із «землею» різними способами: жорстко, за допомогою циліндричних шарнірів, одинарних кінематичних зв'язків, а також за допомогою різної їх комбінації (рис. Д.1.3).

Програма розрахунку таких систем методом кінцевих елементів використовує чотири типи прямолінійних стрижневих

елементів, які відрізняються між собою умовами закріплення лівого і правого кінців.

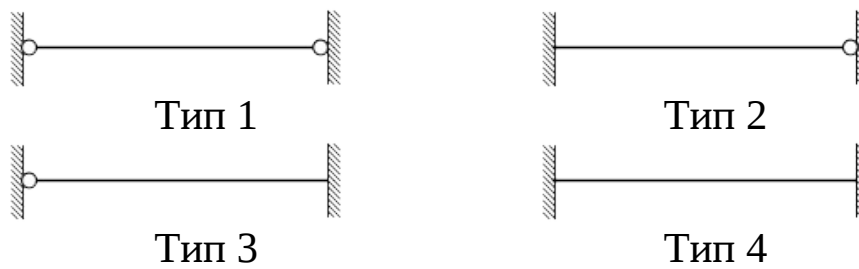


Рис. Д.1.3. Типи прямолінійних стрижневих елементів

При переході від вихідної системи до її кінцево-елементної моделі параметри жорсткості елементів мають бути постійними в межах елементів і мати кінцеві значення. Навантаження у вигляді зосереджених сил і моментів повинно бути прикладене на кінцях елемента, а розподілене навантаження, яке діє на елемент, має бути рівномірно розподіленим.

Ці обмеження призводять, як правило, до необхідності перетворення початкової конструкції шляхом розбиття її достатньою кількістю проміжних перерізів, які в подальшому матимуть назву «вузли».

Якщо вихідна система включає криволінійні стрижні, то кожний стрижень необхідно замінити набором прямолінійних елементів шляхом постановки проміжних вузлів. Кількість елементів, які необхідно замінити, залежить від необхідної точності обчислень.

Аналогічно діють і у випадку, коли жорсткість стрижня змінна по довжині. Шляхом постановки достатньої кількості проміжних вузлів такий стрижень можна розглядати як систему кінцевих елементів з постійними по довжині характеристиками жорсткості.

Усі вузли, включаючи і опорні, нумеруються без пропускання, починаючи з номера один. Кожному елементу відповідають номери двох вузлів, які він з'єднує.

Для опису стрижневої системи уводиться декартова система координат. Початок і напрям координатних осей може бути обрано довільно, однак бажано при цьому враховувати геометричні особливості розрахункової схеми з метою спрощення її опису. В

обраній системі координат описується положення і переміщення вузлів, діюче на систему вузлове і розподілене навантаження.

Інформація, необхідна для розрахунку конструкції, включає загальні дані про систему, дані стосовно координат вузлів, характеристик жорсткості кінцевих елементів, списку елементів і діючих на систему навантажень.

У загальних даних указується кількість вузлів, кількість елементів, кількість типів поперечних перерізів елементів, кількість завантажень.

Дані про координати вузлів включають коди і значення координат X_i і Y_i кожного вузла. Код вузла характеризується трьома числами, які указують на можливість переміщення вузла за напрямком координатних осей і його повороту. Перше число відповідає переміщенню уздовж осі X , друге – уздовж осі Y , третє відповідає повороту вузла.

Якщо переміщення розглянутого вузла за напрямком координатної осі можливо, то відповідна величина компонента кода дорівнює одиниці, в іншому разі записується нуль. При приєднанні всіх елементів до вузла за допомогою циліндричних шарнірів компонента, яка відповідає повороту вузла, приймається рівною нулю.

Тип поперечного перерізу елемента характеризується двома числами – жорсткістю поперечного перерізу елемента при згинанні і розтяганні-стисканні. У списку типів поперечних перерізів вказуються значення жорсткостей для всіх зустрічаючих типів поперечних перерізів елементів, що зустрічаються.

Кожний елемент в списку кінцевих елементів позначається двома цифрами – номерами вузлів, які він з'єднує. Якщо елемент приєднується до вузла за допомогою циліндричного шарніра, то цей номер вузла записується зі знаком «мінус». Далі вказується порядковий номер типу поперечного перерізу, відповідного розглянутому елементу. Розміщення елементів у списку довільне.

Для кожного завантаження системи зовнішнім навантаженням записуються такі дані: кількість вузлів, завантажених зосередженим навантаженням, кількість стрижнів, завантажених розподіленим навантаженням. За наявності зосереджених навантажень для кожного завантаженого вузла записується його номер і складові силових і моментних впливів.

Силкові дії визнаються додатними, якщо їх напрямки збігаються з напрямками координатних осей. Моментній складовій приписується знак «плюс», якщо вона направлена за годинниковою стрілкою.

При дії розподілених навантажень для кожного завантаженого елемента записуються номери вузлів, які цей елемент з'єднує, і складові інтенсивності, паралельні координатним осям. Додатні значення складових збігаються з додатними напрямними координатних осей.

За наявності другого і наступних завантажень вихідна інформація стосовно навантажень записується так само, як і для першого завантаження. Приклади складання вихідної інформації наведено в підрозділах 6.1, 6.2, 6.3 і 6.4 для різних видів розпірних систем.

На диску файл вихідних даних розташований у підкаталозі FEA\VALUE.

Програма розрахунку розміщена в підкаталозі FEA\EXE. Назва файлу FEA.EXE. Тут також розташовані файли підтримки графічного режиму GRAPH.TPU, CGA.BGI, EGAVGA.BGI, а також файл конфігурації FEA.EXT.

Результати обчислень направляються у файл, який має те саме ім'я, що і файл вихідних даних, але з поширенням LST. Файл розташовується в підкаталозі FEA\LISTING і містить загальні дані про розрахунок конструкції, таблицю координат вузлів і діючих вузлових навантажень, список елементів і діючих розподілених навантажень, таблицю лінійних зсувів вузлів і кутів повороту, таблицю внутрішніх зусиль в елементах системи.

Правило знаків для переміщень вузлів таке саме, як і для відповідних зосереджених навантажень. Для внутрішніх зусиль прийнято таке правило знаків: поздовжня сила при розтяганні є додатною; поперечна сила визнається додатною, якщо вона повертає елемент за годинниковою стрілкою; додатний згинальний момент спричиняє розтягування волокон справа при переході від вузла з меншим номером до вузла з більшим номером.

Результати розрахунку передаються на принтер засобами MS-DOS або програми-оболонки Norton Commander.

ДОДАТОК 2

Вплив кількості проміжних вузлів на точність обчислення поперечних і поздовжніх сил в арці

Як було зазначено в підрозділі 6.1, поперечні і поздовжні сили в арці при використанні кінцево-елементної програми обчислюються приблизно. Уточнити значення цих зусиль можна різними способами. По-перше, можна збільшити кількість елементів, якщо ввести додаткові проміжні вузли. По-друге, можна використати елементи більш високого порядку, у тому числі і криволінійних. Оскільки використовується програма розрахунку не дозволяє реалізувати останню можливість, розглянемо перший спосіб.

Проміжні вузли можна вводити на всій криволінійній частині арки або на окремі її ділянки, якщо потрібно уточнити величини внутрішніх зусиль саме на цій ділянці. Розглянемо останній випадок.

Припустимо потрібно уточнити епюри поперечних і поздовжніх сил на ділянці 10-11 арки, показаній на рис. 6.1. Уведемо спочатку один проміжний вузол з координатами $x_1 = 25,5$ м і $y_1 = 10,71$ м. На рис. Д.2.1, а і б наведено точні і приблизні значення ординат епюр поперечних і поздовжніх сил на ділянці 10-11.

З порівняння цих координат випливає, що похибка обчислень значно зменшилась порівняно з наближенням, одержаним у підрозділі 6.1. Так, якщо при розбитті осі арки на ділянки, за рис. 6.1, похибка обчислення, наприклад поперечної сили в перерізі 10, складала 24,5 %, то при введенні одного проміжного вузла ця похибка зменшилась до 11,4 %.

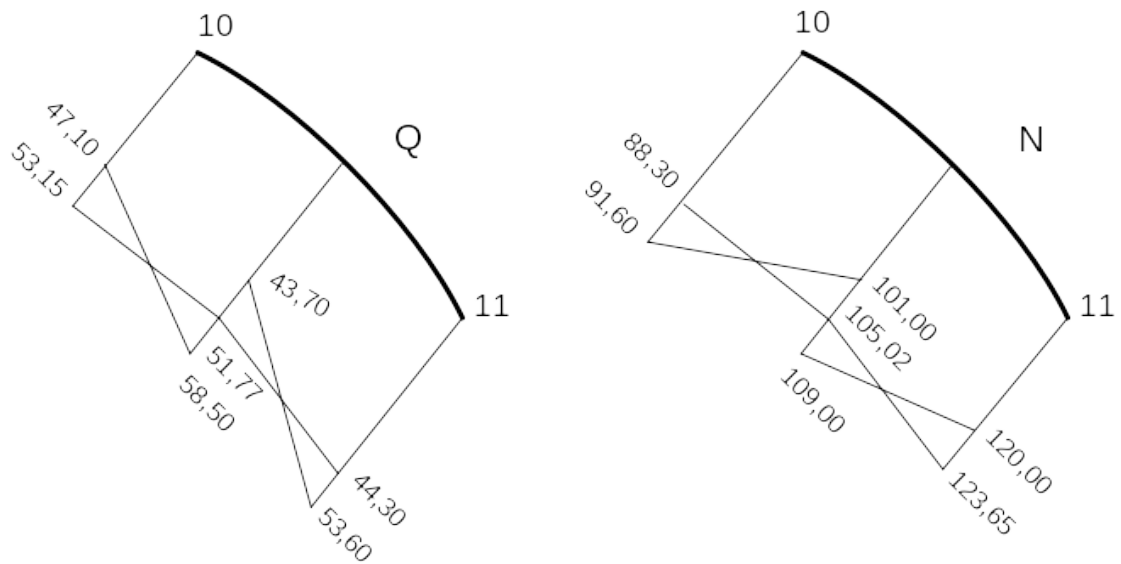


Рис. Д.2.1. Епюри поперечних і поздовжніх сил на ділянках 10-11

Уведемо тепер два проміжних вузли на ділянці 10-11 арки. Вузли розташовані в перерізах з координатами $x_1 = 25,00$ м, $y_1 = 11,18$ м, $x_2 = 26,00$ м і $y_2 = 10,20$ м. Результати обчислень поперечних і поздовжніх сил на ділянці 10-11 наведено на рис. Д.2.2, а і б.

Різниця ординат епюр поперечних сил у перерізі 10 точного і наближеного розрахунків складає для розглянутого випадку 7,24 %.

З порівняння результатів обчислень для різних випадків розподілу на ділянки впливає, що збіжність методу до точного розв'язку виявляється досить повільною. Оскільки звично точний розв'язок завчасно невідомий, про величину похибки можна міркувати за величиною сходінки в проміжному вузлі на епюрах поперечних і поздовжніх сил.

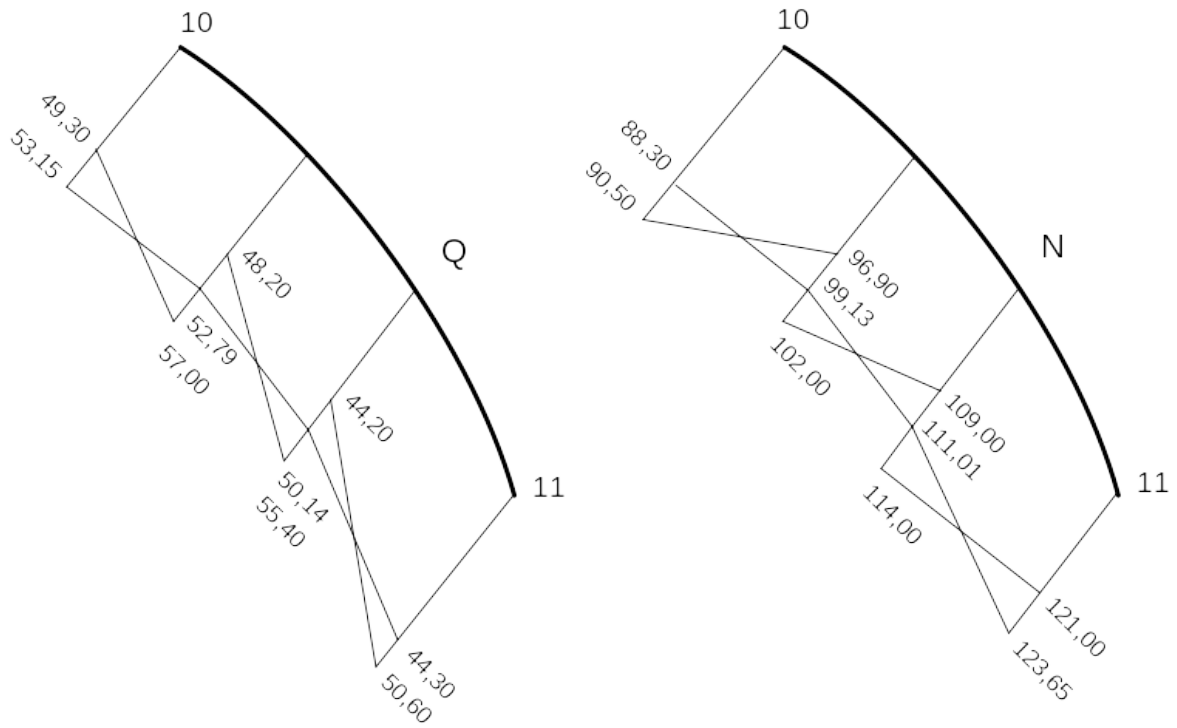


Рис. Д.2.2. Епюри поперечних і поздовжніх сил на ділянці 10-11

Таблиця 6.2

Внутрішні зусилля в стрижнях

Стрижень	Згинальний момент, кНм			Поперечна сила, кН		Поздовжня сила, кН	
	початок	середина	кінець	початок	кінець	початок	кінець
-1 2	0.00E+00	-2.91E+02	-5.81E+02	-3.88E+01	-3.88E+01	-1.84E+02	-1.84E+02
2 3	-5.81E+02	-4.79E+02	-3.77E+02	2.16E+01	2.16E+01	-1.87E+02	-1.87E+02
3 4	-3.77E+02	-3.08E+02	-2.39E+02	3.24E+01	3.24E+01	-8.72E+01	-8.72E+01
4 5	-2.39E+02	-1.57E+02	-9.82E+01	5.37E+01	2.77E+01	-7.59E+01	-6.09E+01
5 6	-9.82E+01	-4.63E+01	-1.69E+01	4.01E+01	1.15E+01	-5.35E+01	-4.44E+01
6 -7	-1.69E+01	2.81E+00	0.00E+00	2.05E+01	-9.33E+00	-4.10E+01	-3.80E+01
-7 8	0.00E+00	-1.37E+01	-4.99E+01	-1.62E+00	-3.15E+01	-3.91E+01	-4.21E+01
8 9	-4.99E+01	-9.58E+01	-1.64E+02	-2.20E+01	-5.06E+01	-4.77E+01	-5.69E+01
9 10	-1.64E+02	-2.40E+02	-3.38E+02	-3.72E+01	-6.32E+01	-6.64E+01	-8.14E+01
10 11	-3.38E+02	-4.35E+02	-5.53E+02	-4.01E+01	-6.13E+01	-9.49E+01	-1.16E+02
11 12	-5.53E+02	-5.67E+02	-5.81E+02	-2.93E+01	-2.93E+01	-1.31E+02	-1.31E+02
12 -13	-5.81E+02	-2.91E+02	0.00E+00	3.87E+01	3.87E+01	-1.25E+02	-1.25E+02

Таблиця 6.5

Внутрішні зусилля в стержнях

Стержень		Згинальний момент, кНм			Поперечна сила, кН		Поздовжня сила, кН	
		початок	середина	кінець	початок	кінець	початок	кінець
1	2	1.75E-10	-8.00E+01	-3.20E+02	1.16E-10	-8.00E+01	0.00E+00	0.00E+00
2	-3	1.20E+01	5.10E+01	0.00E+00	2.80E+01	-3.20E+01	-1.00E+01	-1.00E+01
-3	4	0.00E+00	-3.70E+01	-8.40E+01	-3.20E+01	-5.20E+01	-1.00E+01	-1.00E+01
4	5	-8.40E+01	-1.88E+02	-2.92E+02	-5.20E+01	-5.20E+01	-1.00E+01	-1.00E+01
5	6	-8.00E+02	-4.00E+02	0.00E+00	1.00E+02	1.00E+02	0.00E+00	0.00E+00
2	-7	-3.32E+02	-1.66E+02	0.00E+00	3.08E+01	3.08E+01	-1.04E+02	-1.04E+02
5	-8	5.08E+02	2.54E+02	0.00E+00	-4.72E+01	-4.72E+01	-1.45E+02	-1.45E+02

Таблиця 6.12

Внутрішні зусилля в стрижнях

Стрижень		Згинальний момент, кНм			Поперечна сила, кН		Поздовжня сила, кН	
		початок	середина	кінець	початок	кінець	початок	кінець
-1	2	0.00E+00	4.00E+01	8.00E+01	1.00E+01	1.00E+01	0.00E+00	0.00E+00
2	3	8.00E+01	2.88E+02	1.76E+02	9.20E+01	-6.80E+01	0.00E+00	0.00E+00
3	4	1.76E+02	4.00E+02	3.04E+02	9.60E+01	-6.40E+01	0.00E+00	0.00E+00
4	5	3.04E+02	5.44E+02	4.64E+02	1.00E+02	-6.00E+01	0.00E+00	0.00E+00
5	-6	4.64E+02	3.92E+02	0.00E+00	2.20E+01	-1.38E+02	0.00E+00	0.00E+00
-6	7	0.00E+00	1.04E+02	2.08E+02	2.60E+01	2.60E+01	0.00E+00	0.00E+00
7	8	2.08E+02	1.20E+02	-2.08E+02	8.00E+00	-1.12E+02	0.00E+00	0.00E+00
8	9	-2.08E+02	-1.20E+02	-2.72E+02	5.20E+01	-6.80E+01	0.00E+00	0.00E+00
9	10	-2.72E+02	-8.00E+00	1.60E+01	9.60E+01	-2.40E+01	0.00E+00	0.00E+00
10	-11	1.60E+01	1.28E+02	0.00E+00	5.80E+01	-6.20E+01	0.00E+00	0.00E+00
-2	-13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.20E+01	8.20E+01
-3	-14	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.64E+02	1.64E+02
-4	-15	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.64E+02	1.64E+02
-5	-16	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.20E+01	8.20E+01
-6	-17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.64E+02	1.64E+02
-7	-18	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.20E+01	8.20E+01
-8	-19	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.64E+02	1.64E+01
-9	-20	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.64E+02	1.64E+02

Продовження табл. 6.12

Стрижень		Згинальний момент, кНм			Поперечна сила, кН		Поздовжня сила, кН	
		початок	середина	кінець	початок	кінець	початок	кінець
-10	-21	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.20E+01	8.20E+01
-12	-13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.43E+03	1.43E+03
-13	-14	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.40E+03	1.40E+03
-14	-15	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.35E+03	1.35E+03
-15	-16	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.32E+03	1.32E+03
-16	-17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.31E+03	1.31E+03
-17	-18	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.31E+03	1.31E+03
-18	-19	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.32E+03	1.32E+03
-19	-20	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.35E+03	1.35E+03
-20	-21	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.40E+03	1.40E+03
-21	-22	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.43E+03	1.43E+03