Є.З. Могульський, Г.П. Бородай,
В.І. Храбустовський

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Харків – 2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО
ТРАНСПОРТУ

**Є.З. Могульський, Г.П. Бородай,
В.І. Храбустовський**

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Харків – 2016

УДК 519.212
ББК 22.17
М 7426

Рекомендовано вченою радою Українського державного університету залізничного транспорту як навчальний посібник (витяг з протоколу № 5 від 30 червня 2015 р.)

Рецензенти:

професор В.Д. Гордевський (ХНУ ім. В.Н. Каразіна),
професор В.М. Золотарьов (ФТІНГ НАНУ ім. Б.І. Вєркіна),
професор Л.В. Курпа (НТУ "ХПІ")

М 7426 Могульський Є.З., Бородай Г.П., Храбустовський В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2016. – 366 с., рис. 103, табл. 14.
ISBN 978-617-654-053-3

Посібник базується на лекціях, які протягом багатьох років читалися в ХУПС ім. Івана Кожедуба та УкрДАЗТ. Він призначений для студентів тих спеціальностей, для яких програма з дисциплін теорія ймовірностей і математична статистика, теорія ймовірностей і випадкові процеси не перевищує 90 аудиторних годин.

Мета посібника – допомогти майбутнім бакалаврам і магістрам технічних та економічних спеціальностей оволодіти засобами та методами теорії ймовірностей, випадкових процесів і математичної статистики, які необхідні для розв'язання сучасних практичних задач, що виникають в інженерів та економістів.

Основні поняття і теореми ілюструються великою кількістю прикладів. Наприкінці кожного розділу наведено багато задач, які необхідні для кращого засвоєння матеріалу. До всіх задач надані відповіді, що дозволить студенту здійснювати самоконтроль. Таким чином, навчальний посібник поєднує функції підручника та задачника.

Посібник призначено для студентів загальнотехнічних та економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Він є результатом суттєвої переробки та вдосконалення конспекту лекцій [16] і задачника [17].

УДК 519.212
ББК 22.17

ISBN 978-617-654-053-3

Навчальний посібник

Могульський Євгеній Зіновійович,
Бородай Геннадій Прокопович,
Храбустовський Володимир Іванович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Відповідальний за випуск Бородай Г.П.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 25.05.15 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 12,0. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ЗМІСТ

Розділ 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Випадкові події та їх алгебра

1.1.1. Первісні поняття. Подія

Теорія ймовірностей вивчає математичну модель реального випробування, наслідок якого неможливо заздалегідь передбачити. При цьому припускається, що таке випробування може повторятися необмежену кількість разів при незмінних основних умовах. Комплекс другорядних умов, які неможливо проконтролювати, змінюється від випробування до випробування. Саме ці умови призводять до того, що результати однотипних випробувань можуть бути різними.

Приклад 1. Підкидається монета. Результатом випробування (спостереження) є випадання монети гербом або ціною вгору.

Урахувати всі причини, що впливають на результат випробування з підкиданням монети, неможливо. Деякі з цих причин невідомі, а вплив інших (опір повітря, пружні властивості монети і поверхні, на яку вона падає, висота піднімання монети, кутова швидкість і т. д.) вдається оцінити тільки приблизно. Тому неможливо точно передбачити, впаде **в даному випробуванні** монета гербом вверх чи ні. Однак є можливість оцінити, як часто монета, яку **підкидають багато разів,** впаде гербом вгору.

Позначимо через Ω множину всіх можливих взаємно виключних наслідків випробування (припускаємо, що ця множина є відомою до здійснення випробування). Множина Ω та її різні підмножини використовуються при побудові імовірнісної моделі цього випробування. Множину Ω називають **простором елементарних подій.** При цьому кожному наслідку випробування ставиться у відповідність одна і тільки одна точка простору Ω – **елементарна подія** ω.

Випадкова подія (далі просто **подія**) – будь-який факт, про який заздалегідь невідомо, настане він чи ні в результаті проведення випробування (тобто подія є непередбаченим результатом випробування). Для кожної випадкової події A і кожної елементарної події ω можна сказати, сприяє чи ні елементарна подія ω появі події A. Подію A можна розглядати як підмножину Ω, яка складається з тих точок ω, що сприяють появі події A.

Рис. 1.1 відповідає тому випадку, коли елементарна подія ω_1 сприяє події A, а елементарна подія ω_2 не сприяє.

Множина Ω може бути як дискретною (рис. 1.2, а), так і неперервною (рис. 1.2, б,в). У першому випадку вона складається зі скінченної або зліченної (такої, яку можна перерахувати) кількості точок, а у другому – із незчисленної кількості точок.

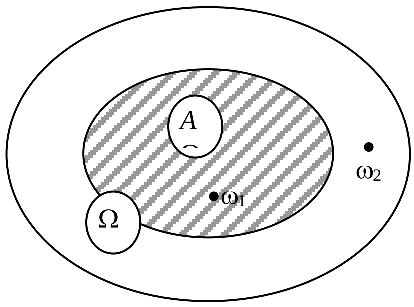


Рис. 1.1

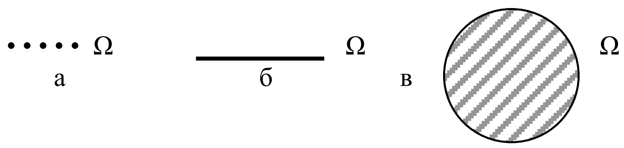


Рис. 1.2

Приклад 2. Підкидається гральний кубик (кубик, зроблений з однорідного матеріалу, грані якого позначені числами 1, 2, 3, 4, 5, 6). Результатом випробування (спостереження) є число, що випало на верхній грані кубика.

Простір Ω складається з шести точок ω_i, де через ω_i позначено елементарні події, що відповідають випаданню грані, на якій написано число i (i=1,2,3,4,5,6): $\Omega\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$. Події A (випадання парного числа) сприяють елементарні події ω_2, ω_4, ω_6 $- A\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$.

Приклад 3. Монета підкидається до першого випадання герба. Простір Ω складається зі зчисленної кількості точок ω_i, де через ω_i позначено елементарну подію, що відповідає випаданню ціни (Ц) у перших i-1 підкиданнях монети і герба (Г) при i-му підкиданню. Отже, ω_1 – Г, ω_2 – Ц$_1$Г, ω_3 – Ц$_1$Ц$_2$Г, ..., ω_n – Ц$_1$Ц$_2$...Ц$_{n-1}$Г, ..., ω_∞ – Ц$_1$Ц$_2$...Ц$_n$... (ω_∞– відповідає випадку, коли герб не з'являється ніколи) і $\Omega\{\omega_\infty,\omega_1,\omega_2,\omega_3, ...\}$.

Нехай подія A – це випадання герба при другому підкиданні монети, а подія B – випадання герба не раніше другого підкидання. Тоді події A сприяє лише елементарна подія ω_2 – $A\{\omega_2\}$, а події B – елементарні події $\omega_2, \omega_3, ..., \omega_\infty$ – $B\{\omega_2, \omega_3, ..., \omega_\infty\}$.

Приклад 4. Визначається термін безвідмовної роботи приладу. Простір Ω складається з незчисленної множини додатних чисел (ці числа не можна перерахувати та пронумерувати).

Нехай подія A полягає в тому, що прилад працював не більше 100 годин. Тоді $\Omega\{t: t>0\}$, а $A\{t: 0<t\le100\}$.

Приклад 5. Проводиться стрільба по плоскій круглій мішені радіуса R кулею, розмірами якої можна знехтувати (кидається точка на площину).

Елементарною подією ω є точка влучення в мішень (припускаємо, що непопадання умовами випробування виключається). Простір Ω складається з незчисленної множини точок, які неможливо пронумерувати $\Omega\{(x;y): x^2+y^2\le R^2\}$, $(x;y)$ – прямокутні координати точки попадання в системі координат, початок якої співпадає з центром мішені (рис. 1.2, в).

Нехай події A та B полягають у тому, що точка влучення знаходиться відповідно на відстані $R/2$ і на відстані, не меншій, ніж $R/2$. Тоді $A\{(x;y): x^2+y^2=R^2/4\}$, $B\{(x;y): R^2/4\le x^2+y^2\le R^2\}$.

Зауваження. У зв'язку з прикладом 5 відзначимо:

1. Якщо нас цікавить тільки відстань від точки влучення до центра мішені, то доцільно ототожнити всі точки, які знаходяться на колі $x^2+y^2=r^2$, $r\in[0,R]$. Це приводить нас до одномірного простору елементарних подій $\Omega_1\{\tilde\omega: \tilde\omega\in[0,R]\}$, який має простішу структуру, ніж Ω (рис. 1.2, б). Подія A співпадає з елементарною подією $\tilde\omega=R/2$.

2. Нехай мішень розбита концентричними колами $x^2+y^2=(kR/10)^2$ $(k=1,2,3...,10)$ на 10 зон, кожна з яких відповідає певному числу вибитих очок (рис. 1.3). Усі точки, що потрапля-ють в одну зону, вважатимемо тотожними. У результаті при-ходимо до дискретного простору $\Omega_2\{\tilde\omega_{10},\tilde\omega_9,\ldots,\tilde\omega_2,\tilde\omega_1\}$ (рис. 1.2, а). Події B сприяють елементарні події $\tilde\omega_5$, $\tilde\omega_4$, $\tilde\omega_3,\tilde\omega_2,\tilde\omega_1$.

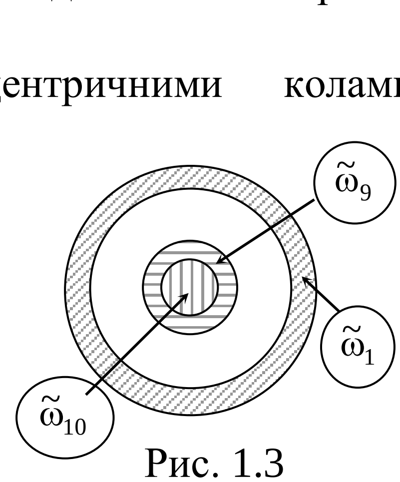


Рис. 1.3

Подія, що наступає при будь-якому наслідку випробування, називається **вірогідною**. Вона співпадає з множиною Ω і позначається надалі також літерою Ω. Подія, яка не наступає при жодному з наслідків випробування, називається **неможливою**. Вона співпадає з пустою множиною і надалі позначається символом $\varnothing$. В умовах прикладу 2 випадання не більше шести очок – вірогідна подія, а випадання семи очок – неможлива.

Зазначимо, що коли дискретний простір Ω якогось випробування складається з n точок, то кількість всіх подій, пов'язаних з цим випробуванням, дорівнює 2^n.

Подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що подія A не наступає, називається **протилежною** події A або **запереченням** A ($\overline{A}$ доповнює множину A до Ω: $\overline{A}=\Omega\backslash A$). Зрозуміло, що $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\Omega} =\varnothing$. В умовах прикладу 2 подія $\overline{A}\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$.

Той факт, що з появи події A випливає поява події B (тобто подія A тягне за собою подію B), будемо позначати символом $A\subset B$. Наприклад, якщо подія A означає ураження цілі, а подія B – влучення у ціль, то $A\subset B$ (тобто можна влучити у ціль, але не уразити її).

1.1.2. Алгебра випадкових подій

Алгебра подій дає математичний опис можливих наслідків випробування.

Визначення 1. Подія, яка полягає в тому, що наступає принаймні одна з подій A або B, називається **об′єднанням** або **сумою** цих подій (рис. 1.4, а,б,в). Таку подію будемо позначати $A\cup B$ або $A+B$.

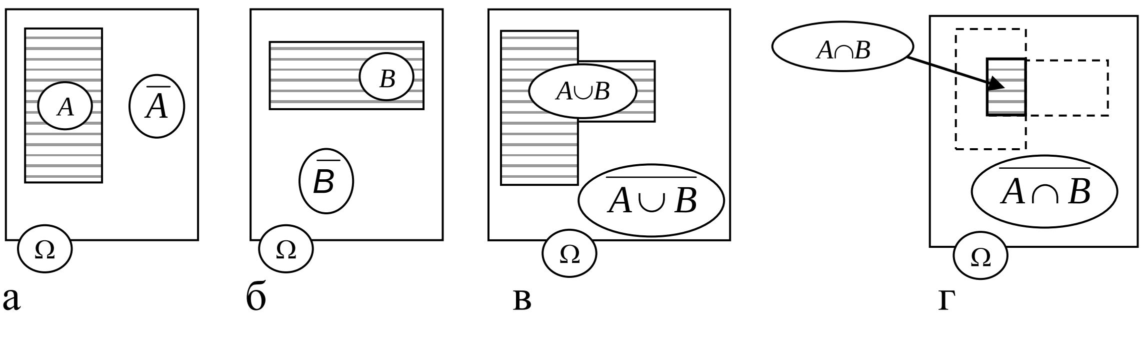


Рис. 1.4

Визначення 2. Подія, яка полягає в тому, що наступають обидві події A та B, називається **перерізом** або **добутком** цих подій (рис. 1.4, а,б,г). Таку подію будемо позначати $A \cap B$ або $A \cdot B$.

Із визначення операцій $\cup$ та $\cap$ випливають такі співвідношення:

$$A \cup A = A,\ A \cap A = A,\ A \cup \Omega = \Omega,\ A \cap \Omega = A,$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Операції $\cup$ та $\cap$ пов‘язані одна з одною двома важливими формулами:

$$\text{а) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \text{б) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (1.1)$$

При побудові теорії припускається, що сукупність Ã подій, пов’язаних з даним експериментом, задовольняє такі умови:

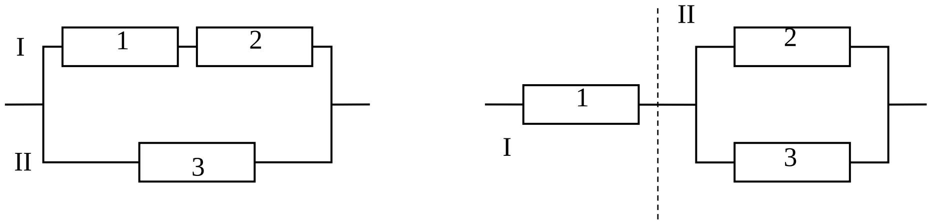
1) $\Omega \in$ Ã; 2) якщо $A \in$ Ã, то $\overline{A} \in$ Ã;
3) якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in$ Ã, то $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in$ Ã.

Приклад 6. Нехай простір елементарних подій складається з чотирьох точок $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, а події $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$, $C = \{\omega_1, \omega_4\}$. Тоді $A \cdot B = A \cdot C = B \cdot C = A \cdot B \cdot C = \{\omega_1\}$, а $A + B + C = \Omega$.

Далі будуть зустрічатись системи, які з точки зору їхньої надійності складаються з послідовно або паралельно з’єднаних елементів (блоків). До відмови системи в цілому призводить у першому випадку відмова будь-якого одного елемента, у другому – відмова всіх її елементів.

Приклад 7. Нехай подія A_i полягає в тому, що i-й елемент схеми справний. Потрібно виразити через A_i подію A, яка полягає в тому, що схема, показана на рис. 1.5, також справна.

***Розв’язання*:** а) система справна, якщо справна хоч одна з гілок I і II. Подія, яка полягає у функціонуванні гілки I, виражається добутком $A_1 \cdot A_2$. Таким чином, $A = A_1 \cdot A_2 + A_3$;



а б

Рис. 1.5

б) система справна за умови функціонування обох гілок I і II. Подія, яка полягає у функціонуванні гілки II, виражається сумою A_2+A_3 . Тому $A=A_1\cdot(A_2+A_3)$.

Визначення 3. Події A та B називаються **несумісними**, якщо їх переріз є неможливою подією:

$$\boxed{A\cdot B=\varnothing\ .} \tag{1.2}$$

Зрозуміло, якщо події A та B є несумісними, то будуть несумісними також події $A\cdot C$ і $B\cdot C$.

Попарно несумісні події A_i (i=1,2,...,n) утворюють **повну систему подій** (розбиття Ω), якщо їх сума є вірогідною подією:

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=\ \Omega,\quad A_i\cdot A_k=\varnothing\quad (i\neq k).$$

Події A та $\overline{A}$ утворюють повну систему подій:

$$\boxed{A+\overline{A}=\Omega,\quad A\cdot\overline{A}=\varnothing.}$$

Приклад 8. Проводяться два постріли по мішені. Позначимо через A_i (i=1,2) подію, що полягає у вилученні по мішені при i-му пострілі. Потрібно виразити через A_i події A та B, які відповідно означають, що в мішені буде: а) точно один A отвір; б) хоча б один отвір.

Розв'язання: а) $A=A_1\cdot\overline{A_2}+\overline{A_1}\cdot A_2$ (доданки суми є несумісними подіями); б) $B=A_1+A_2$ (доданки суми є сумісними подіями) або $B=A_1\cdot A_2+A_1\cdot\overline{A_2}+\overline{A_1}\cdot A_2$ (доданки суми є несумісними подіями, але не утворюють повної системи подій).

Приклад 9. Три локатори проводять пошук цілі. Позначимо через Λ_i (i=1,2,3) подію, що полягає у знаходженні цілі i-м локатором. Потрібно виразити через Λ_i події, які відповідають умові, що ціль зафіксовано: а) тільки першим локатором; б) хоча б одним локатором; в) лише одним локатором; г) не більше, ніж одним локатором.

Розв'язання: множина Ω елементарних подій складається з восьми точок:

$$\omega_1 = \overline{\Lambda}_1 \cdot \overline{\Lambda}_2 \cdot \overline{\Lambda}_3, \quad \omega_2 = \Lambda_1 \cdot \overline{\Lambda}_2 \cdot \overline{\Lambda}_3, \quad \omega_3 = \overline{\Lambda}_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \overline{\Lambda}_3, \quad \omega_4 = \overline{\Lambda}_1 \cdot \overline{\Lambda}_2 \cdot \Lambda_3,$$

$$\omega_5 = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \overline{\Lambda}_3, \quad \omega_6 = \Lambda_1 \cdot \overline{\Lambda}_2 \cdot \Lambda_3, \quad \omega_7 = \overline{\Lambda}_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_3, \quad \omega_8 = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_3.$$

а) $A_1 = \omega_2$;   б) $A_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = \overline{\overline{\Lambda}_1 \cdot \overline{\Lambda}_2 \cdot \overline{\Lambda}_3} = \Omega \backslash \omega_1$;

в) $A_3 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$;   г) $A_4 = \overline{\Lambda}_1 \cdot \overline{\Lambda}_2 + \overline{\Lambda}_1 \cdot \overline{\Lambda}_3 + \overline{\Lambda}_2 \cdot \overline{\Lambda}_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$.

1.2. Аксіоми та властивості ймовірності

1.2.1. Частота та ймовірність випадкової події

Імовірність події A – це число, яке характеризує об'єктивну можливість (частку впевненості) появи цієї події в розглядуваному випробуванні. Тобто ймовірність є **кількісною** мірою здійснення події.

Якщо експеримент є інтуїтивно симетричним по відношенню до будь-якого можливого результату, імовірність елементарної події можна знайти безпосередньо. На цьому засновано **класичне** визначення ймовірності.

Приклад 10. У випробуванні з підкиданням правильної монети можливості випадання герба і ціни одинакові (рівні) і тому цілком природно вважати, що ймовірність випадання герба дорівнює 1/2.

Приклад 11. У випробуванні з підкиданням грального кубика всі шість наслідків є рівноможливими. Тому ймовірність будь-якого з наслідків дорівнює 1/6.

Частотний (стохастичний) підхід до визначення ймовірності полягає в такому. Нехай A – подія, пов'язана з деяким випробуванням. Якщо при n-кратному повторенні випробування подія A наступає n_A разів, то **частотою** появи події A у **даній серії** випробувань називається відношення n_A/n. Зрозуміло, що частоті притаманні такі властивості:

1) $n_A/n \geq 0$; 2) $n_\Omega/n = 1$;
3) якщо $A \cdot B = \varnothing$, то $n_{A+B}/n = n_A/n + n_B/n$.

Частота випадково змінюється від однієї серії випробувань до іншої. Однак якщо довжини серій достатньо великі, то частоти в різних серіях мало розрізняються між собою і групуються навколо деякого числа $P(A)$, яке і називається **ймовірністю** події A. У цьому полягає **емпірична властивість (закономірність) стійкості** частоти. Таким чином, поняття ймовірності тісно пов'язане з властивістю стійкості частоти. При зростанні n відхилення частоти n_A/n від ймовірності $P(A)$ зменшується для переважної більшості серій. Тому частота може бути використана для обчислення ймовірності.

Приклад 12. У трьох серіях підкидання монети отримано такі результати: із 4040 підкидань герб випав 2048 разів, із 12000 – 6019 разів, із 24000 – 12012 разів. Відповідні частоти дорівнюють 0.5069, 0.5016, 0.5005 і надзвичайно близькі до ймовірності випадання герба, яка дорівнює 0.5 (рис. 1.6).

Відзначимо, що статистичний спосіб є непридатним у тому разі, коли експеримент є дуже складним або його вартість велика.

Загальновизнаним нині є **аксіоматичний** підхід до визначення ймовірності, який запропонував у 1933 році один із найбільш визначних математиків XX ст. А.М. Колмогоров.

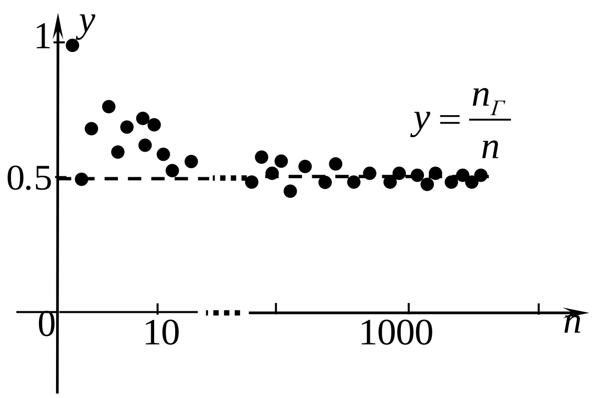


Рис. 1.6

При цьому абстрактне поняття ймовірності події ґрунтується на частоті цієї події. Один з найважливіших результатів теорії ймовірностей полягає в тому, що в моделі нескінченної серії випробувань частота n_A/n прямує до ймовірності $P(A)$.

Теорія ймовірностей розробляє прийоми, які дозволяють у задачі, що розглядається, за відомими ймовірностями одних подій знаходити ймовірності інших подій (більш складних), які утворюються з перших за допомогою операцій об′єднання, перерізу, заперечення. При цьому одержані результати мають практичне значення лише тоді, коли задані вихідні ймовірності близькі до відповідних частот у достатньо довгих серіях випробувань.

1.2.2. Аксіоми ймовірності та її властивості

Визначення 1. Імовірністю називається числова функція $P(A)$, визначена на множині всіх подій, пов'язаних з даним експериментом, яка задовольняє такі аксіоми:

1. $P(A) \geq 0$. 2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, якщо $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Аксіома 3 допускає узагальнення на випадок суми скінченної (або зліченної) кількості попарно несумісних подій:

$$3'.\ P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n). \tag{1.3}$$

Із аксіом 1, 2, 3 випливають такі властивості ймовірності:

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

Дійсно:

$A + \overline{A} = \Omega,\ A \cdot \overline{A} = \varnothing \Rightarrow P(A+\overline{A}) = P(A)+P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
Зокрема, $P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$.

Зауваження. Звернемо увагу на те, що з рівності $P(A)=0$, взагалі кажучи, не випливає, що A є неможливою подією (випливає лише те, що частота цієї події при зростанні кількісті випробувань стає як завгодно малою).

$\boxed{2)\ 0 \le P(A) \le 1;}$ Дійсно: $P(\overline{A}) \ge 0 \Rightarrow 1 - P(A) \ge 0 \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1;$

3. Теорема додавання ймовірностей. Для будь-яких подій *A* та *B* справедливе співвідношення

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).} \tag{1.4}$$

Доведення. Подамо події $A \cup B$ та *B* у вигляді суми попарно несумісних подій (рис. 1.6):

$$B = A \cap B + \overline{A} \cap B, \ A \cup B = A + \overline{A} \cap B.$$

Тоді на підставі аксіоми 3 одержимо

$P(A \cup B) = P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$ і

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right).$$

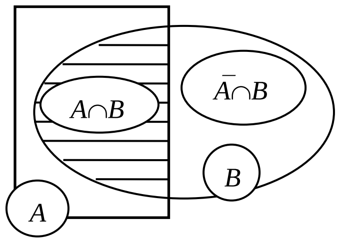


Рис. 1.7

Підставляючи вираз $P(\overline{A} \cap B)$ із другого співвідношення в перше, приходимо до рівності (1.4).

Між іншим, з виразу (1.4) випливає, якщо $P(A)+P(B)>1$, то $P(A \cap B)>0$ і, отже, події *A* та *B* є сумісними.

Приклад 13. Нехай є заданими ймовірності $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Знайти ймовірності подій: 1) $\overline{A} \cup \overline{B}$; 2) $\overline{A} \cap \overline{B}$; 3) $\overline{A} \cap (A \cup B)$.

Розв'язання: 1) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} \Rightarrow P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;

2) $\overline{A} \cap \overline{B} =$

$= \overline{A \cup B} \Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{31}{60}$;

3) $\overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap B$.

Оскільки подія *B* є об'єднанням несумісних подій $A \cap B$ та $\overline{A} \cap B$, то $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$. Таким чином, $P(\overline{A} \cap (A \cup B)) = \frac{3}{20}$.

1.2.3. Принцип практичної вірогідності

Застосування результатів теорії ймовірності ґрунтується на "принципі практичної вірогідності". А саме якщо ймовірність настання події A достатньо близька до 1, то при одноразовому проведенні випробування слід знехтувати можливістю настання малоймовірної події $\overline{A}$. У цих умовах A та $\overline{A}$ називають відповідно практично вірогідною та практично неможливою подіями.

Визначення тієї межі, починаючи з якої подію слід вважати практично неможливою, знаходиться за рамками теорії ймовірностей. Зрозуміло, що чим більші збитки може принести нехтування можливості настання події, тим меншою повинна бути межа. Одна і та сама ймовірність може бути малою в одній ситуації і неприпустимо великою в іншій. Наприклад, межа 0.01 достатня для того, щоб вважати практично неможливим перегорання нової електричної лампочки, але абсолютно недопустима для того, щоб вважати практично неможливою аварію скафандра космонавта або парашута.

1.3. Теорема множення та її наслідки

1.3.1. Умовна ймовірність

Нехай у серії з n випробувань події A, B, $A \cdot B$ з'явились відповідно n_A, n_B, $n_{A \cdot B}$ разів. Умовною частотою події A за умови, що подія B настала, називається відношення $\dfrac{n_{A \cdot B}}{n_B}$. Зрозуміло, що умовну частоту можна подати у вигляді $\dfrac{n_{AB}/n}{n_B/n}$. Отже, умовна частота події A за умови, що подія B настала, є відношенням частоти події $A \cdot B$ до частоти події B.

Поняття умовної ймовірності базується на понятті умовної частоти.

Нехай A та B є подіями, пов'язаними з деяким випробуванням і $P(B)>0$.

Визначення 5. Умовною ймовірністю $P(A/B)$ події A за умови здійснення події B називається відношення

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.} \qquad (1.5)$$

Умовна ймовірність задовольняє аксіоми імовірності 1-3 п. 1.2.2:

1) $P(A/B)\geq 0$; 2) $P(\Omega/B)=1$; 3)$P(A_1+A_2/B)=P(A_1/B)+P(A_2/B)$,

якщо $A_1\cap A_2=\varnothing$.

Доведемо, наприклад, властивість 3).

$$P(A_1+A_2/B)=\frac{P((A_1+A_2)\cdot B)}{P(B)}=\frac{P(A_1\cdot B+A_2\cdot B)}{P(B)}.$$

Оскільки $A_1\cap A_2=\varnothing$, то $(A_1\cdot B)\cap(A_2\cdot B)=\varnothing$ і, отже, $P(A_1\cdot B+A_2\cdot B)=P(A_1\cdot B)+P(A_2\cdot B)$. Таким чином,

$$P(A_1+A_2/B)=\frac{P(A_1\cdot B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cdot B)}{P(B)}=P(A_1/B)+P(A_2/B).$$

Із співвідношення (1.5) негайно випливає теорема множення ймовірностей

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B).} \qquad (1.6)$$

Якщо поміняти A і B місцями, то теорема множення може бути записана як

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A).} \qquad (1.6a)$$

Теорема множення дозволяє знайти ймовірність добутку подій, якщо зі змісту задачі зрозумілі (або обчислюються) значення умовних імовірностей. Вона узагальнюється на випадок скінченної кількості множників. Наприклад,

$$P(A\cdot B\cdot C)=P((A\cdot B)\cdot C)=P(A\cdot B)\cdot P(C/A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cdot B).$$

Приклад 1.4. Імовірність аварії при запуску ракети дорівнює 0,15. Імовірність аварії на старті є 0,12. Яка ймовірність аварії за умови успішного старту.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що запуск ракети успішний, а подія B - це успішний старт ракети. Із умов задачі випливає, що $A\cdot B=A$. Отже,

$$P(A/B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0{,}85}{0{,}88}=0.966.$$

Таким чином, $P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)=0.034$.

Визначення 26. Подія A називається **незалежною** від події B, якщо

$$P(A/B)=P(A) \quad (P(B)>0).$$

Нехай подія A незалежна від події B і $P(A)>0$. Тоді з формул (1.6) та (1.6а) випливає, що подія B незалежна від події A. Таким чином, поняття незалежності подій є взаємним.

Події A та B **незалежні тоді і тільки тоді**, коли виконується рівність

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).} \tag{1.7}$$

Якщо події A та B незалежні, то будуть незалежними такі пари подій: $\overline{A}$ та B, A та $\overline{B}$, $\overline{A}$ та $\overline{B}$ (наприклад, незалежність подій A та $\overline{\overline{B}}$ можна довести таким чином

$$P(A)=P(A\cdot B)+P(A\cdot\overline{B})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A)=P(A)\cdot P(B)+P(A\cdot\overline{B})\Rightarrow P(A)\cdot(1-P(B))=P(A\cdot\overline{B})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A)\cdot P(\overline{B})=P(A\cdot\overline{B})).$$

Якщо події A і B $(P(A)>0, P(B)>0)$ несумісні, то вони є залежними:

$$P(A\cdot B)=P(\varnothing)=0\neq P(A)\cdot P(B).$$

Зазначимо, що коли $P(A)=0$, то події A і B є незалежними:

$$A\cdot B\subset A\Rightarrow P(A\cdot B)\le P(A)=0\Rightarrow P(A\cdot B)=0=P(A)\cdot P(B).$$

У тому випадку, коли кількість подій перевищує два, вводиться поняття **незалежних у сукупності** (**взаємно незалежних**) подій. Останнє означає, що ймовірність якої-небудь події не залежить від здійснення інших. Наприклад, для трьох подій A_1, A_2, A_3, незалежних у сукупності, повинні виконуватись співвідношення $P(A_1/A_2)=P(A_1)$, $P(A_1/A_3)=P(A_1)$, $P(A_1/A_2\cdot A_3)=P(A_1)$, $P(A_2/A_3)=P(A_2)$, $P(A_2/A_1\cdot A_3)=P(A_2)$, $P(A_3/A_1\cdot A_2)=P(A_3)$. Для подій A_1, A_2,..., A_n, незалежних у сукупності, справедливе співвідношення

$$\boxed{P\left(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n\right).}\qquad (1.7а)$$

Зазначимо, що події можуть бути попарно незалежними, але залежними в сукупності. Наприклад, якщо в умовах прикладу 6 п. 1.1.2 $P\{\omega_i\}=\dfrac{1}{4}\ (i=1,2,3,4)$, то $P(A)$ = $P(B)$ = $P(C)$ = $\frac{1}{2}$ і $P(A\cdot B)$ = $P(A\cdot C)$ = $P(B\cdot C)$= $P(A\cdot B\cdot C)$ = $\frac{1}{4}$. Оскільки $P(A\cdot B)$ = $P(A)\cdot P(B)$, $P(A\cdot C)$ = $P(A)\cdot P(C)$, $P(B\cdot C)$= $P(B)\ \cdot P(C)$, то події A, B, C є попарно незалежними. Однак $P(A\cdot B\cdot C)$ = $\dfrac{1}{4}$ $\neq$ $\neq P(A)\cdot P(B)\ \cdot P(C)=\dfrac{1}{8}$.

Приклад 15. Здійснюється два постріли по мішені. Імовірності влучення при першому та другому пострілі дорівнюють відповідно 0.3 і 0.6. Яка ймовірність, що в мішені буде: а) точно один отвір; б) хоча б один отвір?

Розв'язання. Позначимо через A_i (i=1,2) подію, яка полягає в тому, що при i-му пострілі буде влучення в мішень. Події A_1 та A_2 незалежні, але сумісні.

а) нехай A – подія, яка полягає в тому, що в мішені буде точно один отвір. Тоді $A=A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2$. Оскільки події $A_1\cdot\overline{A}_2$ і $\overline{A}_1\cdot A_2$ несумісні, то на підставі аксіоми 3 і теореми множення ймовірностей одержимо

$$P(A)=P\left(A_1\cdot\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1\cdot A_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(A_2\right)=$$
$$=0.3\cdot 0.4+0.7\cdot 0.6=0.5;$$

б) нехай B – подія, яка полягає в тому, що в мішені буде хоча б один отвір. Тоді $B=A_1+A_2$ і на підставі теорем додавання та множення ймовірностей матимемо

$$P(B)=P\left(A_1+A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-P\left(A_1\cdot A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)=$$
$$=0.3+0.6-0.3\cdot 0.6=0.72.$$

Інший спосіб розв'язання:

$$\overline{B}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\Rightarrow P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\right)=P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)=$$
$$=0.7\cdot 0.4=0.28\quad\Rightarrow\quad P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-0.28=0.72.$$

Приклад 16. Для умов прикладу 6 п. 1.1.2 знайти ймовірність безвідмовної роботи (надійність) схеми, елементи якої виходять із ладу незалежно один від одного з імовірностями, що дорівнюють відповідно $1-p_i$ (i=1,2,3). Яка схема надійніша за умови $p_i=p$ (i=1,2,3)?

Розв'язання. Зрозуміло, що події A_i, які розглядаються в прикладі, незалежні в сукупності.

а) на підставі теорем додавання та множення ймовірностей одержимо

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)+P(A_3)-P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)+P(A_3)-$$
$$-P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=p_1\cdot p_2+p_3-p_1\cdot p_2\cdot p_3;$$

б) аналогічно знаходимо

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2+A_3)=P(A_1)\cdot[P(A_2)+P(A_3)-P(A_2)\cdot P(A_3)]=$$
$$=p_1\cdot(p_2+p_3-p_2\cdot p_3).$$

Більш надійною є перша схема, оскільки при $p\in(0;1)$

$$p^2+p-p^3>2p^2-p^3.$$

Зазначимо, що при знаходженні ймовірності суми сумісних подій доцільно переходити до протилежної події.

Приклад 17. Система (рис. 1.8) складається з n паралельно з’єднаних елементів, які виходять з ладу протягом деякого проміжку часу незалежно один від одного з імовірностями $1-p_i$ (i=1,…,n). Знайти ймовірність безвідмовної роботи (надійність) системи.

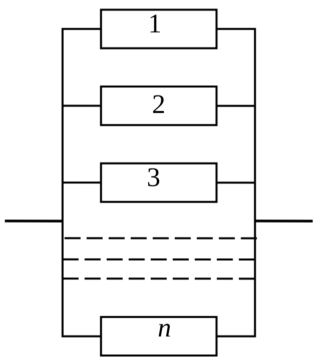


Рис. 1.8

Розв’язання. Нехай подія A_i (i=1,…,n) означає, що i-й елемент не вийшов з ладу (справно працює).

Позначимо через A подію, яка полягає в безвідмовній роботі системи. Оскільки система безвідмовно працює лише тоді, коли працює хоча б один її елемент, то $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Перейдемо до події, протилежної A (система виходить з ладу, якщо перестали функціонувати всі її елементи): $\overline{A} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$. Оскільки події A_i незалежні в сукупності, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdot P\left(\overline{A}_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\overline{A}_1\right) = 1 - (1-p_1)...(1-p_n).$$

Внаслідок того, що $1 - p_i < 1$, одержаний результат узгоджується з припущенням про зростання надійності системи при зростанні n.

Використаємо результат прикладу 17 для того, щоб знайти найменшу кількість однотипних елементів, необхідних для забезпечення заданої надійності $P_{зад}$ системи:

$$P_{зад} = 1 - (1-p)^n \;\Rightarrow\; n_{найменше} = \left\lfloor \frac{ln\left(1 - P_{зад}\right)}{ln\left(1 - p\right)} \right\rfloor + 1, \qquad (1.8)$$

де $\lfloor a \rfloor$ – найбільше ціле число, менше від a.

Приклад 18. Знайти $P(A)$, якщо $P(A/B)=p$, $P(B/A)=q$, $P(A/\overline{B}) = r$.

Розв’язання.

$$P(A) = P(A \cdot B) + P(A \cdot \overline{B}) = P(B)p + (1 - P(B))q = q + P(B)(p-q) =$$

$$= q + P(A) \cdot \frac{r}{p} \cdot (p-q), \text{ оскільки } \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P(B/A)}{P(A/B)} = \frac{r}{p} \Rightarrow P(A) = \frac{p \cdot q}{p - r \cdot (p-q)}.$$

1.3.2. Формула повної ймовірності

Нехай є n припущень H_k (k=1,...,n) щодо умов проведення випробування, з яким пов'язана подія A. При цьому з тих чи інших міркувань відомі ймовірності $P(H_k)$, $P(A/H_k)$. Як можна прогнозувати спроможність появи події A?

Теорема. Нехай події H_k (k=1,...,n) складають повну систему. Тоді для будь-якої події A справедлива рівність

$$\boxed{P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+...+P(H_n)\cdot P(A/H_n).} \qquad (1.9)$$

Доведення. Оскільки $\Omega=H_1\cup H_2\cup...\cup H_n$, то подію A можна подати у вигляді суми попарно несумісних подій (рис. 1.9)

$$A = A\cdot H_1\cup A\cdot H_2\cup...\cup A\cdot H_n \,.$$

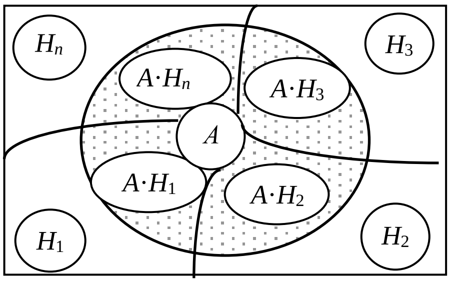


Рис. 1.9

Послідовно застосовуючи теореми додавання та множення ймовірностей (формулу (1.7) з аксіом імовірності п. 1.2 та формулу (1.6) п. 1.3), одержимо

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(A\cdot H_k)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A/H_k).$$

Якщо $P(A\cdot H_i)$=0, то відповідна складова в сумі повинна бути пропущена.

Приклад 19. По каналу зв'язку можуть передаватись з імовірностями, що дорівнюють p_0 та $p_1=1-p_0$, два сигнали – "0" та "1". Внаслідок дії перешкод можливі викривлення сигналів: "0" переходить в "1" з імовірністю $p_{0,1}$, а "1" в "0" з імовірністю $p_{1,0}$ (рис. 1.9). Яка ймовірність одержати на приймальному кінці каналу сигнал "0"?

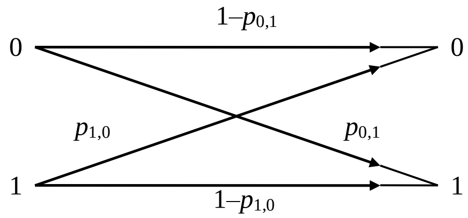


Рис. 1.10

Розв'язання. Розглянемо припущення: H_0 – послано сигнал "0", H_1 – послано "1". Нехай подія A – це одержання сигналу "0". Тоді $P(A/H_0)=1-p_{0,1}$, $P(A/H_1)=p_{1,0}$, $P(H_0)=p_0$, $P(H_1)=1-p_0$. З формули повної ймовірності (1.9) маємо

$$P(A) = p_0\,(1-p_{0,1}) + (1-p_0)\,p_{1,0}.$$

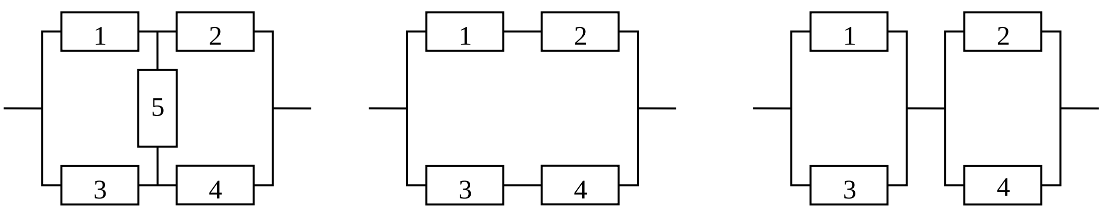
Приклад 20. Урна містить 5 чорних і 2 червоних кулі. Навмання з урни витягається куля, вона повертається в урну і з нею в урну додаються ще дві кулі того самого кольору і одна куля іншого кольору. Після цього з урни витягається куля. Знайти ймовірність того, що це чорна куля.

Розв'язання. Основна невизначеність у задачі полягає в тому, що невідомо, яка куля була витягнута з урни в перший раз. Тому зробимо такі припущення: H_1– перша куля, яка витягнута з урни, є чорною; H_2– перша куля, яка витягнута з урни, є червоною. Подія A полягає в тому, що друга куля, витягнута з урни, є чорною. З умов задачі випливає, що $P(H_1)=\dfrac{5}{7}, P(H_2)=\dfrac{2}{7}$.

Якщо гіпотеза H_1 виявиться справедливою, то $P(A/H_1)=\dfrac{7}{10}$ (в урні містяться 7 чорних куль і 3 червоні). Аналогічно, $P(A/H_2)=\dfrac{6}{10}$ (в урні містяться 6 чорних і 4 червоні кулі). Отже, за формулою повної ймовірності, маємо

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)\ =\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{10}+\frac{2}{7}\cdot\frac{6}{10}=\frac{47}{70}.$$

Приклад 21. Система складається з п'яти незалежних елементів, з'єднаних так, як показано на рис. 1.11,а. Знайти надійність (імовірність безвідмовної роботи) системи, якщо надійність k-го елемента дорівнює p_k.



а б в

Рис. 1.11

Розв'язання. Нехай подія A означає, що система працює безвідмовно. Розглянемо такі припущення: H_1 – п'ятий елемент працює безвідмовно, H_2 – п'ятий елемент виходить з ладу. Надійність системи за умови безвідмовної роботи п'ятого елемента – $P(A/H_1)$ – співпадає з надійністю системи, зображеної на рис. 1.11,в. Отже, на основі результату прикладу 16,б п. 1.3.1 одержимо

$$P(A/H_1) = (p_1+p_3 - p_1 \cdot p_3) \cdot (p_2+p_4 - p_2 \cdot p_4).$$

Якщо п'ятий елемент виходить з ладу, то надійність системи – $P(A/H_2)$ – співпадає з надійністю системи, зображеної на рис. 1.11,б. Скористаємося результатом прикладу 16,а п. 1.3.1:

$$P(A/H_2) = p_1 \cdot p_2+p_3 \cdot p_4 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4.$$

Оскільки за умовою задачі $P(H_1) = p_5$, а $P(H_2) = 1 - p_5$, то за допомогою формули повної ймовірності знаходимо:

$$P(A) = p_5 \cdot (p_1+p_3 - p_1 \cdot p_3) \cdot (p_2+p_4 - p_2 \cdot p_4)+(1 - p_5) \cdot (p_1 \cdot p_2+p_3 \cdot p_4 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4).$$

У тому випадку, коли всі елементи працюють з однаковою надійністю (p_i=p): $P(A) = p^2 \cdot (2+2p - 5p^2+2p^3)$.

Зауваження. Припустимо, що деяка система може знаходитись в одному зі станів E_1, E_2,...,E_n (наприклад, система, що складається з двох однотипних пристроїв, які відразу після виходу з ладу починають ремонтувати, може знаходитись в одному з чотирьох станів: E_1 – обидва пристрої працюють, E_2 – перший ремонтується, другий працює, E_3 – другий ремонтується, перший працює, E_4 – обидва ремонтуються). Позначимо через $E_k(s)$ подію, яка означає, що на момент часу s система знаходиться у стані E_k. Припустимо, що умовні ймовірності $P(E_j(t+s)/E_k(s))$ переходу системи зі стану E_k в момент часу s в стан E_j в момент часу $t+s$ залежать тільки від тривалості проміжку часу $[s; t+s)$ і не залежать від його положення на осі часу (рис. 1.12). Назвемо ці

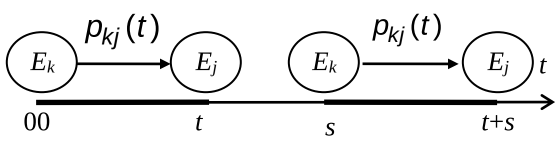


Рис. 1.12

умовні ймовірності **перехідними ймовірностями системи** і введемо позначення

$$P(E_j(t+s)/E_k(s)) = p_{kj}(t),\ \forall s\geq 0,\ t>0.$$

Будемо вважати, що поведінка системи на проміжку часу $[s;\, t+s)$ визначається її станом на момент часу s і не залежить від поведінки системи на проміжку часу $[0;\, s)$.

Скористаємося формулою повної ймовірності для виведення рівняння, яке задовольняють перехідні ймовірності.

Оскільки події $E_1(s)$, $E_2(s)$,..., $E_n(s)$ складають повну систему, то перехід від стану E_i в момент часу 0 у стан E_j в момент часу $t+s$ можна виконати n способами (рис.1.13):

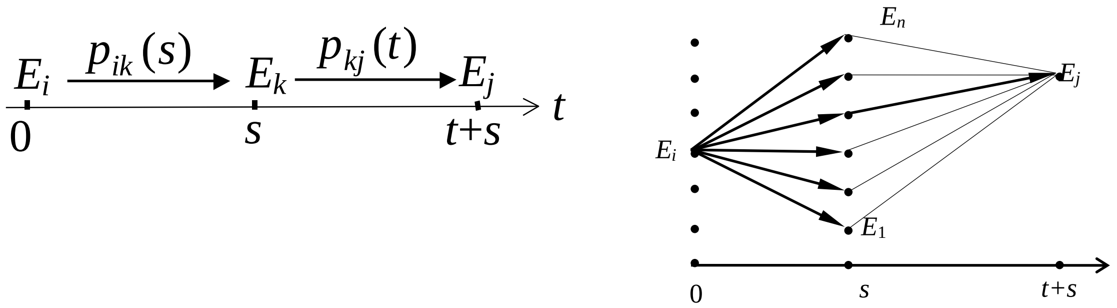


Рис. 1.13

Таким чином, перехідні ймовірності задовольняють рівняння Колмогорова-Чепмена

$$\boxed{p_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(s)\cdot p_{kj}(t)\ .} \qquad (1.10)$$

1.3.3. Теорема гіпотез (формули Байєса)

Ця теорема є наслідком формули повної ймовірності.

Теорема. Нехай події H_k $(k=1,...,n)$ утворюють повну систему подій $(P(H_k)>0)$. Тоді для будь-якої події A $(P(A)>0)$, що настала внаслідок проведення випробування, виконується співвідношення

$$\boxed{P(H_k/A) = \frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A/H_n)}\ .} \qquad (1.11)$$

Доведення. Оскільки

$P(A\cdot H_k)=P(A)\cdot P(H_k/A)=P(H_k)\cdot P(A/H_k)$, то на підставі формули (1.9) одержимо

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(H_1)P(A/H_1)+\ldots+P(H_n)P(A/H_n)}.$$

Події H_k прийнято називати **гіпотезами**, $P(H_k)$ - апріорними (відомими до проведення випробування), а $P(H_k/A)$ - апостеріорними (обчисленими після випробування за умови, що подія A настала) імовірностями цих гіпотез. Формула (1.11) показує, як треба переоцінити ймовірності здійснення кожної гіпотези, якщо подія A настала.

Приклад 22. В умовах прикладу 19 п. 1.3.2 на приймальному кінці каналу одержано сигнал "0". Яка ймовірність того, що було послано сигнал "1"?

Розв'язання. Апріорна ймовірність гіпотези H_1 (до випробування) дорівнює $1-p_0$, а її апостеріорна ймовірність $P(H_1/A)$ (після випробування) знаходиться за формулою (1.11)

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{(1-p_0)p_{1,0}}{p_0(1-p_{0,1})+(1-p_0)p_{1,0}}.$$

Приклад 23. Надійність приладів (імовірність безвідмовної роботи протягом заданого проміжку часу) залежно від якості одного з елементів дорівнює відповідно 0.95, 0.9, 0.8. Відомо, що 20 % приладів випускають у першому варіанті, 30 % – у другому і 50 % – у третьому. Довільно вибраний прилад безвідмовно працював протягом заданого проміжку часу. Яка ймовірність, що він був виконаний у кожному з варіантів?

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в безвідмовній роботі приладу. Нехай гіпотеза H_k (k=1,2,3) означає, що прилад виконано в k-му варіанті. Тоді апріорні ймовірності гіпотез та умовні ймовірності A дорівнюють

$$P(H_1)=0.2,\ P(H_2)=0.3,\ P(H_3)=0.5,$$

$$P(A/H_1)=0.95,\ P(A/H_2)=0.9,\ P(A/H_3)=0.8.$$

За формулами Байєса знаходимо апостеріорні ймовірності гіпотез

$$P(H_1/A) = \frac{0.2 \cdot 0.95}{0.2 \cdot 0.95 + 0.3 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.8} = \frac{0.19}{0.86} \approx 0.221,$$

$$P(H_2/A) = \frac{0.3 \cdot 0.9}{0.86} \approx 0.314, \quad P(H_3/A) = \frac{0.5 \cdot 0.8}{0.86} \approx 0.465.$$

Приклад 24. Двоє стрільців роблять по одному пострілу. Імовірність влучення по мішені для першого стрільця – 0.7, а для другого – 0.8. У мішені знайдено один отвір. Яка ймовірність того, що у мішень влучив перший стрілець?

Розв'язання. Подія A означає наявність одного отвору в мішені. Введемо гіпотези H_1 – обидва стрільці не влучають, H_2 – перший стрілець влучає, другий – ні, H_3 – другий стрілець влучає, перший – ні, H_4 – обидва стрільці влучають. Знайдемо апріорні ймовірності гіпотез:

$$P(H_1)=0.3 \cdot 0.2=0.06, \; P(H_2)=0.7 \cdot 0.2=0.14,$$
$$P(H_3)=0.3 \cdot 0.8=0.24, \; P(H_4)=0.7 \cdot 0.8=0.56.$$

Умовні ймовірності події A дорівнюють

$$P(A/H_1)=0, P(A/H_2)=P(A/H_2)=1, P(A/H_4)=0.$$

Таким чином, апостеріорна ймовірність гіпотези H_2 така:

$$P(H_2/A) = \frac{0.14 \cdot 1}{0.14 \cdot 1 + 0.24 \cdot 1} = \frac{7}{19} \approx 0.368.$$

Приклад 25. В умовах прикладу 21 п. 1.3.2 знайти ймовірність безвідмовної роботи п'ятого елемента, якщо система працює безвідмовно.

Розв'язання. Припустим, що $p_i = p$. Тоді

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{p(2-p)^2}{2+2p-5p^2+2p^3}.$$

Приклад 26. Імовірність перекручення одиниці, що передається по каналу зв'язку, дорівнює 0.2, нуля 0.1. Відомо, що при передачі "слова" 1010001 перекручено один символ. Знайти ймовірність того, що зазнала перекручення одиниця .

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що у "слові" 1010001 перекручений один символ. Введемо гіпотези: H_0 є перекрученим лише один нуль, H_1 є перекрученою лише одна одиниця, H_2 – інші варіанти.

$$P(H_1)=3\cdot 0.2\cdot 0.8^2\cdot 0.9^4, P(H_0)=4\cdot 0.1\cdot 0.8^3\cdot 0.9^3, P(A/H_0)=P(A/H_1)=1, P(A/H_2)=0.$$

$$P(A)=P(H_0)\cdot P(A/H_0)+P(H_1)\cdot P(A/H_1)=3\cdot 0.2\cdot 0.8^2\cdot 0.9^4+4\cdot 0.1\cdot 0.8^3\cdot 0.9^3,$$

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{27}{43}.$$

Теорему гіпотез і формулу повної ймовірності корисно використовувати у випадку, коли потрібно знайти ймовірність $P(B/A)$ появи події B при наступному випробуванні, якщо при попередньому випробуванні здійснилась подія A.

Приклад 27. З урни, яка містить всього шість білих і чорних куль, навмання було витягнуто дві кулі. Вони виявились різного кольору. Яка ймовірність того, що з куль, які залишилися в урні, знову навмання будуть витягнути дві кулі різного кольору?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що з урни в перший раз було витягнуто кулі різного кольору. До першого витягнення двох куль відносно складу урни можна було висунути сім рівноможливих гіпотез $H_0, H_1, \ldots, H_6$, де припущення H_k ($k=0,\ldots,6$) означає, що в складі урни знаходиться k білих куль. Після першого витягнення двох куль гіпотези H_0 і H_6 слід відкинути, а апріорні (до витягнення) імовірності $P(H_k)$ ($k=1,\ldots,5$) покладемо рівними $\frac{1}{5}$.

Оскільки $P(A/H_k)=\frac{k(6-k)}{15}(k=1,2,\ldots,5)$, то

$$P(A)=\sum_{k=1}^{5}P(H_k)\cdot P(A/H_k)=\frac{1}{75}(1\cdot 5+2\cdot 4+3\cdot 3+4\cdot 2+5\cdot 1)=\frac{7}{15}.$$

Таким чином, апостеріорні (після першого витягнення) імовірності гіпотез за формулою Байєса дорівнюють

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{P(A)} = \frac{15 \cdot k(6-k)}{7 \cdot 5 \cdot 15} = \frac{k(6-k)}{35} (k = 1,...,5).$$

Позначимо через B подію, яка полягає в тому, що при другому витягненні двох куль з чотирьох куль, які залишилися в урні, вони будуть різного кольору. Знайдемо умовні ймовірності $P(B/H_к)$ (k=1,…,5). Маємо:

1)$P(B/H_1) = 0$ (в урні після першого витягнення залишились чотири чорних кулі);

2) $P(B/H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ (в урні після першого витягнення залишились одна біла і три чорних кулі);

3) $P(B/H_3) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ (в урні після першого витягнення залишились дві білих і дві чорних кулі);

4) $P(B/H_4) = \frac{1}{2}$ (в урні після першого витягнення залишились три білих і одна чорна кулі);

5) $P(B/H_5)$=0 (в урні після першого витягнення залишились чотири білих кулі).

Тоді за формулою повної ймовірності ймовірність $P(B/A)$ появи події B за умови, що при першому витягненні з'явилась подія A, дорівнює

$$P(B / A) = \sum_{k=1}^{5} P(H_k / A) \cdot P(B / H_k) = \frac{8}{35} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{35} \cdot \frac{2}{3} + \frac{8}{35} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

1.4. Випробування зі скінченною кількістю наслідків

1.4.1. Класичне визначення ймовірності

Розглянемо випробування, простір елементарних подій якого складається з N точок (випробування зі скінченною кількістю наслідків). Якщо ймовірності елементарних подій відомі, то ймовірність будь-якої події A у випробуванні можна знайти підсумовуючи ймовірності тих елементарних подій, які сприяють A. У тому разі, коли симетрія умов випробування забезпечує рівну можливість різних елементарних подій (наприклад, при підкиданні грального кубика рівноможливими є всі шість елементарних подій), імовірність однієї елементарної події визначається їхньою загальною кількістю. Дійсно, із виразу $\Omega=\omega_1+\omega_2+...+\omega_N$ випливає рівність $1=P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_N)=N\cdot P(\omega_i)$, на підставі якої одержимо

$$P(\omega_i)=\frac{1}{N}\quad(i=1,2,...,N).$$

Теорема. Якщо у випробуванні з N рівноможливими елементарними подіями події A сприяють M елементарних подій, то

$$\boxed{P(A)=\frac{M}{N}.} \tag{1.12}$$

Доведення. Оскільки події A сприяють M елементарних подій, то

$$P(A)=M\cdot P(\omega_i)=\frac{M}{N}.$$

1.4.2. Комбінаторні методи підрахунку кількості наслідків

Для того щоб знайти ймовірність події за формулою (1.12), потрібно знати і загальну кількість наслідків випробування і кількість наслідків, які сприяють настанню цієї події. Суттєву роль при підрахунках кількості наслідків відіграють комбінаторні методи, основою яких є такі два правила.

Правило додавання. Нехай деякий об’єкт α можна обрати m_1 способами, а інший об’єкт β – m_2 способами. Тоді вибір одного з цих об’єктів (або α, або β) можна виконати m_1+m_2 способами (сполучник «або» розділовий).

Правило множення. Нехай об’єкт α можна обрати m_1 способами, а після кожного такого вибору об’єкт β можна обрати m_2 способами. Тоді обидва вибори можуть бути виконані $m_1\cdot m_2$ способами (рис. 1.14).

Обидва правила узагальнюються на випадок будь-якої скінченної кількості дій.

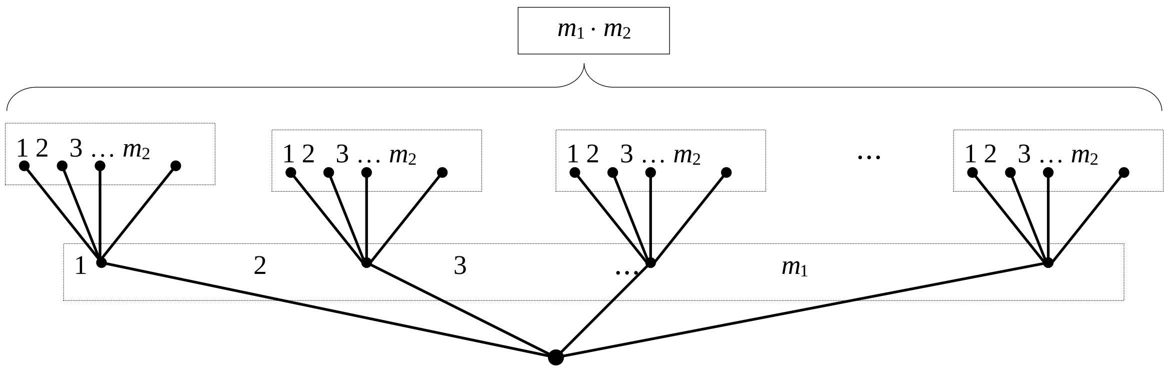


Рис. 1.14

Приклад 28. Для складання номера об'єкта використовуються цифри 1, 2, 3, 4. Скільки об'єктів можна пронумерувати, якщо один номер повинен складатися не більше, ніж з трьох цифр?

Розв'язання: а) цифри в номері не повторюються. Для складання тризначного номера потрібно виконати послідовно одну за іншою три дії – вибір першої, другої та третьої цифр. Ці вибори можна здійснити відповідно 4, 3 та 2 способами. Отже, на підставі правила множення тризначних номерів буде N_3=4·3·2=24. Аналогічно знаходимо кількість двозначних N_2=4·3=12 та однозначних номерів N_1=4. Тепер за правилом додавання знаходимо загальну кількість підрозділів, які можна занумерувати: $N= N_1+N_2+N_3=40$;

б) цифри в номері можуть повторюватись. Вибір будь-якої цифри можна здійснити 4 способами. Тому $N=N_1+N_2+N_3=4\cdot 4\cdot 4+4\cdot 4+4=84$.

Нехай задана множина з n різних елементів.

Сукупність k ($k \le n$) із цих елементів, розташованих у певному порядку (упорядкована підмножина), називається **розміщенням** із n елементів по k. Різні розміщення відрізняються одне від одного порядком чи складом елементів. Наприклад, у множини $\{a,b,c\}$ із трьох елементів розміщеннями по два елементи є упорядковані підмножини (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b). Кількість таких розміщень позначають A_n^k. Застосовуючи правило множення, одержимо

$$\boxed{A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}.$$

Розміщення з n елементів по n називаються **перестановками**. Різні перестановки відрізняються одна від одної лише порядком елементів. Наприклад, перестановками у множини $\{a,b,c\}$ із трьох елементів будуть упорядковані підмножини (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a). Кількість перестановок дорівнює

$$\boxed{A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1.}$$

Добуток цілих чисел від 1 до n прийнято позначати $n!$ (n–факторіал). Тоді

$$\boxed{A_n^n = n!,\ A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

(за визначенням 0!=1).

Зазначимо, що в тому разі, коли серед n елементів, що переставляються, є n_1 однакових, $n_1!$ перестановок співпадають. Кількість різних перестановок у цьому випадку дорівнює $\frac{n!}{n_1!}$. Цей результат узагальнюється на випадок кількості різних перестановок $P_n(n_1,n_2,...,n_k)$, що можна скласти з n елементів, серед яких n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу , …, n_k елементів k-го типу:

$$\boxed{P_n(n_1,n_2,...,n_k) = \frac{n!}{(n_1)!\cdot(n_2)!\cdot\ldots\cdot(n_k)!},\ \left(n_1+n_2+\ldots+n_k=n\right).}$$

Набір k ($k \le n$) із заданих n елементів називається **сполученням** із n елементів по k. Різні сполучення відрізняються одне від одного хоча б одним елементом. Наприклад, у множини $\{a,b,c\}$ із трьох елементів сполученнями по два елементи є підмножини $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$. Кількість сполучень із n елементів по k позначають C_n^k. Оскільки $A_n^k = C_n^k \cdot k!$, то

$$\boxed{C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.}$$

Справедливі такі співвідношення:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^n = C_n^0 = 1, \quad C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n, \quad C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

На відміну від сполучення з n елементів по k, у яке кожен елемент входить не більш ніж один раз, у **сполученні з *n* елементів по *k* з повторюванням** кожен елемент може повторюватися кожну припустиму (від 0 до k) кількість разів. Кількість таких сполучень з повторюванням позначають $\overline{C_n^k}$. Має місце рівність

$$\boxed{\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k.}$$

Наприклад, у множини $\{a,b,c\}$ із трьох елементів сполученнями по два елементи з повторюванням є набори *<a,a>*, *<b,b>*, *<c,c>*, *<a,b>*, *<a,c>*, *<b,c>*.

Приклад 29. Скільки є чотиризначних чисел (числа можуть починатись з нуля), у яких: а) 2 цифри однакові; б) 3 цифри однакові; в) 2 цифри повторюються двічі; г) хоча б 2 цифри збігаються?

Розв'язання: а) вибір цифр, які збігаються (перша дія), можна виконати 10 способами, а їх розташування в числі (друга дія) – C_4^2 способами. Одержимо "числа" у вигляді •11•, де кружок "•" позначає місця цифр, що не збігаються. Вибір цифри замість правого кружка (третя дія) можна виконати 9 способами, а замість лівого (четверта дія) – 8 способами. На підставі правила множення робимо висновок, що поставлену умову задовольняють $10\cdot C_4^2\cdot 9\cdot 8=4320$ чисел.

Другий спосіб розв'язання: набір із трьох цифр (перша дія) виконується C_{10}^3 способами; вибір цифри, що збігається (друга дія), виконується 3 способами; розміщення одержаних 4 цифр (наприклад, 1, 5, 1, 8) на чотирьох місцях виконується 4!/2! способами (третя дія), всього маємо $C_{10}^{3}\cdot3\cdot4!/2!=4320$ варіантів;

б) вибір трьох цифр, які збігаються, виконується 10 способами, а їх розташування C_4^3 способами. Вибір цифри, яка не збігається, виконується 9 способами. Всього одержуємо $10\cdot C_4^3\cdot9=360$ варіантів.

Другий спосіб розв'язання: $C_4^2\cdot2\cdot4!/3!=360$;

в) вибір пари цифр відбувається C_{10}^{2} способами; розстановка на чотирьох місцях двох пар цифр, що збігаються, може бути виконана $4!/2!\cdot2!$ способами; одержуємо $C_{10}^{2}\cdot6=270$ варіантів;

г) маємо 10 чисел, у яких усі 4 цифри збігаються. Поставлену умову з урахуванням результатів пунктів а), б), в) задовольняє 4320+360+270+10=4960 чисел.

Приклад 30. Скільки існує способів витягнути 6 карт з колоди, яка містить 36 карт, щоб серед них були усі чотири масті?

Розв'язання. Є два варіанти витягнення карт: 1) (3; 1; 1; 1) – три карти однієї масті і по одній карті інших мастей; 2) (2; 2; 1; 1) – дві карти однієї масті, дві карти другої масті і по одній карті інших мастей.

Кількість способів у першому варіанті: $C_4^1\cdot C_9^3\cdot(\,C_9^1)^3=244944$ (вибір масті у трійки, вибір трійки, вибір по одній карті інших мастей).

Кількість способів у другому варіанті: $C_4^2\cdot(C_9^2)^2\cdot(C_9^1)^2=629856$ (вибір мастей у пар, вибір пар, вибір по одній карті інших мастей).

Отже, всього існує 874800 способів.

Другий спосіб розв'язання: $C_{36}^{6}-4\cdot C_{27}^{6}+6\cdot C_{18}^{6}-4\cdot C_9^6$.

Приклад 31. Кожна з m частинок може потрапити в будь-яку з n комірок. Знайти ймовірність того, що в деякій комірці опиняться m_1 частинок.

Розв'язання. Загальна кількість N розташувань m частинок по n комірках дорівнює n^m. Вибір m_1 частинок, які потрапили в обрану комірку, можна зробити $C_m^{m_1}$ способами. Решта m-m_1

частинок розподілиться по *n-1* комірках $(n-1)^{m-m_1}$ способами. Отже, кількість *M* сприятливих розташувань буде дорівнювати $C_m^{m_1}\cdot(n-1)^{m-m_1}$. Таким чином, шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{C_m^{m_1}\cdot(n-1)^{m-m_1}}{n^m}$.

Приклад 32. Колода з 52 карт ретельно перетасована (всі 52! перестановок є рівноможливими). Кожен із гравців одержує по п'ять карт. Знайти ймовірність того, що гравцеві будуть здані: а) карти одної масті і послідовних достоїнств (наприклад, сімка, вісімка, дев'ятка, десятка і валет черв), така комбінація називається флеш ройалем; б) три карти одного достоїнства (наприклад, три дами) і дві карти іншого достоїнства (наприклад, два королі), така комбінація називається фулом.

Розв'язання. Оскільки порядок одержання гравцем карт не має значення, то кількість *N* різних варіантів роздачі йому карт дорівнює C_{52}^5:

а) у кожній масті є 9 можливих варіантів вибору, а оскільки мастей 4, то за принципом множення кількість *M* сприятливих результатів роздачі дорівнює 9·4=36. Таким чином, імовірність одержання гравцем флеш ройаля дорівнює $\dfrac{36}{C_{52}^5}=\dfrac{36\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48}=0.000014$;

б) три карти одного достоїнства можна вибрати $13\cdot C_4^3$ способами, а пару карт іншого достоїнства – $12\cdot C_4^2$ способами. Тому кількість *M* сприятливих результатів роздачі дорівнює $13\cdot C_4^3\cdot 12\cdot C_4^2$ і, таким чином, імовірність одержання гравцем фула дорівнює $\dfrac{13\cdot C_4^3\cdot 12\cdot C_4^2}{C_{52}^5}=\dfrac{13\cdot4\cdot12\cdot6\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48}=0.00144.$

Приклад 33. Знайти ймовірність того, що при випадковому розташуванні колоди з 52 карт ніякі два тузи не будуть йти поряд.

***Розв'язання*.** Кількість різних варіантів розташування колоди *N =52*!. Карти, які не є тузами, можна розташувати 48! способами. Після цього виберемо 4 з 49 міст, на яких можна розташувати тузи. Тому кількість сприятливих результатів розташування $M=A_{49}^4\cdot 48!$. Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$\frac{A_{49}^{4}\cdot 48!}{52!}=\frac{A_{49}^{4}}{A_{52}^{4}}=0.7826\,.$$

Приклад 34. З n деталей, серед яких m мають дефект, беремо k деталей. Знайти ймовірність того, що серед них буде l дефектних деталей (рис. 1.15).

Розв'язання. Нехай подія A означає, що взято l дефектних деталей. Оскільки порядок вибору деталей не має значення, то кількість способів N взяти k деталей із n дорівнює $N=C_n^k$. Кількість способів M, якими можна взяти заданий набір деталей, дорівнює на підставі правила множення добутку кількості способів взяти l дефектних деталей із m (C_m^l) на кількість способів взяти k-l стандартних деталей із n-m (C_{n-m}^{k-l}): $M=C_m^l\cdot C_{n-m}^{k-l}$.

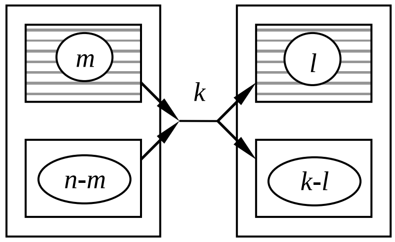


Рис. 1.15

Таким чином, на підставі формули (1.12) одержуємо

$$\boxed{P(A)=\frac{C_m^l\cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}\,.} \tag{1.13}$$

Приклад 35. Електронний пристрій складається з 2 блоків, у кожному з яких по 5 однакових мікросхем. Пристрій функціонує, якщо в кожному з блоків працюють не менше 2 мікросхем. Яка ймовірність того, що при відмові 4 мікросхем пристрій буде функціонувати.

Розв'язання. Нехай подія A означає функціонування пристрою при вказаних умовах. Скористаємося тим самим методом, що і при розв'язанні попереднього прикладу: n=10 (загальна кількість мікросхем), m=4 (кількість бракованих мікросхем), k=5 (кількість мікросхем, які використані в першому блоці), l=1, або 2, або 3 (кількість бракованих мікросхем серед використаних у першому блоці) (рис. 1.16). Загальна кількість способів сформувати блоки $N=C_{10}^5$, а кількість способів, сприятливих функціонуванню прикладу, $M = C_4^2 \cdot C_6^3 + C_4^3 \cdot C_6^2 + C_4^1 \cdot C_6^4$ (ми скористались правилом додавання). Таким чином, $P(A) = \frac{M}{N} = \frac{20}{21}$.

Другий спосіб розв'язання. Кількість варіантів, при яких перший блок виходить із ладу, дорівнює $C_4^4 \cdot C_6^1 = 6$. Отже, кількість варіантів, при яких прилад не буде функціонувати, дорівнює 12. Тому

$$P(\overline{A}) = \frac{12}{C_{10}^5} = \frac{12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{21}$$

і, таким чином, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{20}{21}$.

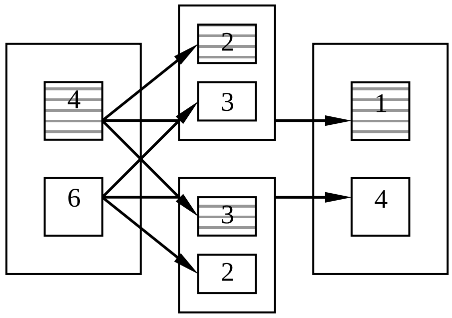


Рис. 1.16

Третій спосіб розв'язання: $P(A) = \dfrac{2 \cdot C_5^1 \cdot C_5^3 + C_5^2 \cdot C_5^2}{C_{10}^4}$.

Приклад 36. У поштовому відділенні продаються різдвяні картки 10 видів. Скількома способами можна купити: 1) 8 карток; 2) 8 різних карток?

Розв'язання: 1) порядок придбання карток не відіграє ролі (неупорядкована вибірка). Картки можна придбати в декількох екземплярах. Отже, приходимо до сполучень із 10 по 8 з повторюваннями. Їхня кількість дорівнює $\overline{C_{10}^8} = C_{10+8-1}^8 = C_{17}^8$;

2) 8 різних карток можна придбати C_{10}^8 способами.

Приклад 37. В аудиторії знаходяться m студентів. Знайти ймовірність того, що ніякі два студенти не мають один і той самий день народження.

***Розв'язання*.** Нехай подія A полягає в тому, що дні народження всіх студентів є різними. Для днів народження m студентів є $N = 365^m$ варіантів. Припустимо, що всі вони є рівноможливими. Знайдемо тепер кількість варіантів, у яких жоден день народження не зустрічається більш ніж один раз: $M = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - m + 1)$. Тоді

$$P(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - m + 1)}{365^m} = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{m-1}{365}\right).$$

При m=5 це число дорівнює 0.973, при m=16 – 0.716, при m=23 – 0.493, при m=64 – 0.003. Отже, імовірність того, що серед 23 людей хоча б у двох співпадають дні народження, більше 0.5. Несподіваний результат.

Зауваження. Якщо кількість елементарних подій незліченна, то класична схема непридатна. У цій ситуації застосовують геометричну інтерпретацію, яка полягає в такому.

Нехай множині Ω елементарних подій взаємно однозначно відповідають точки деякої фігури G, а підмножині множини елементарних подій, які сприяють події A, – точки частини G_1 цієї фігури. Якщо всі точки Ω «однаково можливі», то за визначенням покладемо

$$P(A)=\frac{міра\,G_1}{міра\,G},$$

де міра $G(G_1)$ є відповідно об’ємом, площею або довжиною фігури $G(G_1)$.

У зв’язку з цим слід зазначити рівномірні розподіли (формула (2.8), формула (2.24)).

Приклад 38. У крузі радіуса R навмання обирають 6 точок. Яка ймовірність, що 2 з них будуть віддалені від центра круга не більш ніж на r $(r < R)$?

Розв’язання. Нехай подія A полягає в тому, що відстань від обраної точки до центра круга не більш ніж r. Тоді маємо $P(A)=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\left(\frac{r}{R}\right)^2$. Кількість способів, якими можна обрати дві точки з шости, дорівнює C_6^2. Отже, шукана ймовірність дорівнює $C_6^2\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^4\cdot\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^4$.

Приклад 39. У круг радіуса $R=1$, у який вписано квадрат, навмання кинути 10 точок. Знайти ймовірність події A, яка полягає в тому, що 4 точки влучають у квадрат, 3 точки – в один сегмент круга та по одній в інші 3 сегменти (рис. 1.17).

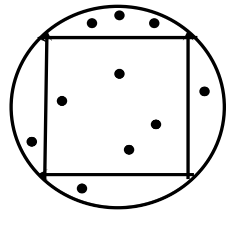


Рис. 1.17

Розв'язання. Кількість способів розмістити 10 точок (4 у квадраті, 6 у сегментах круга) є таким: $C_{10}^4 \cdot 4 \cdot C_6^3 \cdot 3!$.

Імовірність влучення 4 точок у квадрат дорівнює $\left(\frac{2}{\pi}\right)^4$, а ймовірність влучення 6 точок у сегменти дорівнює $\left(1-\frac{2}{\pi}\right)^6 \cdot \frac{1}{4^6}$. Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = C_{10}^4 \cdot 4 \cdot C_6^3 \cdot 3! \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{2}{\pi}\right)^6 \cdot \frac{1}{2^8} = 383.75 \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{2}{\pi}\right)^6.$$

1.5. Повторні випробування

1.5.1. Схема Я. Бернуллі. Узагальнення А. Маркова

Багато прикладних задач (наприклад, контроль якості партії виробів) зводяться до такої схеми.

Розглядається послідовність (серія) незалежних випробувань з двома випадковими наслідками A і $\overline{A}$, імовірності яких p і $1\text{-}p$ не змінюються від випробування до випробування (випробування незалежні, якщо ймовірність будь-якого наслідку будь-якого випробування не залежить від того, які були наслідки інших випробувань). Така послідовність незалежних випробувань називається схемою Бернуллі.

Теорема. Імовірність $p_n(k)$ того, що в серії з n незалежних випробовувань схеми Бернуллі подія A настає точно k раз, задається рівністю

$$\boxed{p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).} \qquad (1.14)$$

Доведення. Наставання події A у j-му випробуванні позначимо через A_j (j=1,2,...,n). Тоді кожну з 2^n елементарних подій серії можна зобразити у вигляді добутку n множників, кожен з яких дорівнює A_j або $\overline{A}_j$. Події, що нас цікавить, сприяють ті елементарні події, у яких події A_j спостерігаються k раз, а події $\overline{A}_j$ – (n – k) раз (наприклад, $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \overline{A}_{k+1} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$,

$A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{k-1} \cdot \overline{A}_k \cdot A_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \cdot ... \cdot \overline{A}_n$ і т. ін.). Через незалежність подій A_j ймовірність кожної такої елементарної події на підставі теореми множення ймовірностей дорівнює $p^k(1-p)^{n-k}$. Оскільки подібних елементарних подій буде C_n^k, то з урахуванням їхньої несумісності і теореми додавання ймовірностей остаточно одержимо

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot \left(1-p\right)^{n-k}.$$

Імовірність того, що подія A у серії з n незалежних випробовувань схеми Бернуллі настає не менш ніж m раз, обчислюється за формулою

$$p_n\left\{k \ge m\right\} = \sum_{k=m}^{n} p_n(k) \quad \text{або} \quad p_n\left\{k \ge m\right\} = 1 - p_n\left\{k < m\right\} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_n(k).$$

Зокрема ймовірність того, що подія A настає хоча б один раз, обчислюється за формулою $p_n\left\{k \ge 1\right\} = 1 - p_n(0) = 1 - (1-p)^n$. Остання формула дає відповідь на таке важливе питання: скільки випробувань n треба провести, щоб подія A настала хоча б один раз з імовірністю не менш ніж $P_{зад}$?

А саме $1-(1-p)^n \ge P_{зад} \Rightarrow n \ge \dfrac{\ln(1-P_{зад})}{\ln(1-p)}$.

Цей результат збігається з результатом прикладу 17 п. 1.3.1.

Значення k_0, при якому ймовірність $p_n(k)$ є найбільшою, називається **найбільш імовірним значенням** кількості появ події A у серії з n випробовувань схеми Бернуллі. Якщо число $(n+1)p$ не є цілим, то існує одно найбільш ймовірне число k_0= $[(n+1)p]$, де [...] символ цілої частини числа. Якщо ж число $(n+1)p$ є цілим, то існують два найбільш імовірних числа: $(n+1)p-1$, $(n+1)p$.

Приклад 40. Точки і тире телеграфного коду спотворюються незалежно одне від одного з імовірністю 0.12. Знайти ймовірність події, яка полягає в тому, що в слові з 5 символів буде спотворено: а) 2 символи; б) не більше одного символу.

Розв'язання. Задача зводиться до схеми Бернуллі при $n=5$ і $p=0.12$.

а) $k=2$ і на підставі формули (1.14) маємо

$$p_5(2)=C_5^2\cdot 0.12^2\cdot 0.88^3=0.0981;$$

б) $k=0$ або $k=1$ і тому ймовірність дорівнює

$$p_5\{k\le 1\}=p_5(0)+p_5(1)=0.88^5+5\cdot 0.12\cdot 0.88^4=0.5377+0.3598=$$
$$=0.8975.$$

Приклад 41. На кожному з 2 крил літака установлено по 2 двигуни, кожен з яких може вийти з ладу під час польоту незалежно один від одного з імовірністю $p=0.1$. Яка ймовірність того, що політ закінчиться нормально, якщо: а) літак може летіти на будь-яких 2 двигунах; б) літак може летіти за умови, що на кожному крилі працює хоча б один двигун.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що політ закінчиться нормально:

а) нехай D_k – подія, яка полягає в тому, що під час польоту вийдуть із ладу лише k ($k=0,1,2,3,4$) двигунів. Тоді $\overline{A}=D_3\cup D_4$, де події D_3 і D_4 несумісні. Таким чином, $P(\overline{A})=P(D_3)+P(D_4)$. При обчисленні $P(D_3)$ і $P(D_4)$ скористаємося схемою Бернуллі при $n=4$ і $p=0.1$:

$P(D_3)=p_4(3)=C_4^3\cdot p^3\cdot(1-p)=4\cdot(0.1)^3\cdot 0.9=0.0036;$

$P(D_4)=p_4(4)=C_4^4\cdot p^4\cdot(1-p)^0=4\cdot(0.1)^4=0.0001.$

Тому $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.0036-0.0001=0.9963;$

б) нехай $П_k$ ($Л_k$) – подія, яка полягає в тому, що під час польоту на правому (лівому) крилі вийдуть із ладу лише k ($k=0,1,2$) двигуни. Тоді подію A можна подати у вигляді суми несумісних подій: $A=П_1\cdot Л_0+П_0\cdot Л_1+П_1\cdot Л_1+П_0\cdot Л_0$. При обчисленні $P(П_0)=P(Л_0)$ і $P(П_1)=P(Л_1)$ скористаємося схемою Бернуллі при $n=2$ і $p=0.1$:

$P(П_0)=p_2(0)=C_2^0\cdot p^0\cdot(1-p)^2=(0.9)^2=0.81;$

$P(П_1)=p_2(1)=C_2^1\cdot p\cdot(1-p)=2\cdot 0.1\cdot 0.9=0.18.$

Таким чином, з урахуванням незалежності подій $П_k$ і $Л_j$ одержимо

$P(A) = P(П_1)\cdot P(Л_0) + P(П_0)\cdot P(Л_1) + P(П_1)\cdot P(Л_1) + P(П_0)\cdot P(Л_0) =$
$= 0.18\cdot 0.81 + 0.81\cdot 0.18 + 0.18\cdot 0.18 + 0.81\cdot 0.81 = 0.9801.$

Приклад 42. Бомбардувальник атакує ціль, яку захищає винищувач з трьома ракетами. Імовірність влучення однієї ракети в бомбардувальник дорівнює 0.6. Щоб бомбардувальник було знищено, достатньо двох влучень, а при одному влученні він знищується з ймовірністю 0.8. Якщо бомбардувальник не було знищено, то він скидає на ціль дві бомби. Ймовірність влучення однієї бомби у ціль дорівнює 0.7. Для знищення цілі достатньо одного влучення . Знайти ймовірність знищення цілі.

Розв'язання. Введемо до розгляду таки події: A – знищення бомбардувальника, H_1 – у бомбардувальник влучила одна ракета, H_2 – у бомбардувальник влучила більш ніж одна ракета. Імовірність знищення бомбардувальника знайдемо за формулою повної ймовірності:
$P(H_1)=C_3^1\cdot 0.6\cdot (0.4)^2 =0.288$, $P(H_2)=C_3^2\cdot (0.6)^2\cdot 0.4 +(0.6)^3 =0.648$,
$P(A/H)=0.8$, $P(A/H_2) =1$. Отже, $P(A)=0.8\cdot 0.288 + 1\cdot 0.648 =0.878$.

Нехай подія C означає знищення цілі, а подія B полягає в тому, що хоча б одна бомба влучає в ціль. Оскільки $C=\overline{A}\cdot B$, то за теоремою множення маємо

$$P(C)=P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})=P\left(\overline{A}\right)\cdot\left(1-P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)\right)=0.122\cdot(1-(1-0.7)^2)=0.111.$$

Приклад 43. Випробується партія приладів. Імовірність відмови одного приладу дорівнює 0.15. Скільки приладів необхідно перевірити, щоб з імовірністю 0.92 спостерігати хоча б одну відмову?

Розв'язання. За умови маємо: $P_{зад}=0.92$, $p=0.15$. Отже,

$$n\ge\frac{\ln(1-0.92)}{\ln(1-0.15)}=\frac{-2.5257}{-0.1625}=15.5428.$$

Таким чином, найменша кількість випробувань дорівнює 16.

Важливим узагальненням схеми Бернуллі є схема однорідного ланцюга А. Маркова. У цьому випадку припускаємо, що ймовірність будь-якого наслідку в j-му випробуванні залежить лише від наслідку попереднього $(j-1)$-го випробування, але не залежить ні від j (номера випробування), ні від наслідків

випробувань з номерами $j-2, j-3, ..., 1$ (марковська властивість). Введемо позначення:
A_j – подія, яка означає наставання події A у j-му випробуванні,
$p_{11}=P\left(A_j / A_{j-1}\right),\ p_{12}=P\left(\overline{A}_j / A_{j-1}\right),\ p_{21}=P\left(A_j / \overline{A}_{j-1}\right),\ p_{22}=P\left(\overline{A}_j / \overline{A}_{j-1}\right).$

Якщо подіям A та $\overline{A}$ поставити у відповідність стани E_1 та E_2 деякої системи, то орієнтовний граф переходу цієї системи з одного стану в інший матиме вигляд, показаний на рис. 1.18. Нагадаємо, що **орієнтований граф –** це сукупність точок, деякі пари яких сполучені орієнтованими дугами. Вершинами графа є стани системи. З вершини E_1 виходять дві стрілки. Стрілка з числом p_{12}, що йде з вершини E_1 у вершину E_2, означає, що умовна ймовірність переходу системи зі стану E_1 у стан E_2 дорівнює p_{12}. Стрілка з числом p_{11} означає, що система залишається у стані E_1.

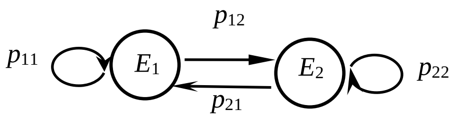


Рис. 1.18

Зрозуміло, що $p_{11} + p_{12} = 1$. Аналогічний сенс мають і стрілки з числами p_{21} і p_{22}. Числа p_{ik} $(i=1,2;\ k=1,2)$ називаються **ймовірностями переходу** зі стану E_i у стан E_k, а матриця

$$\Pi=\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1-p_{12} & p_{12} \\ p_{21} & 1-p_{21} \end{Vmatrix}$$ – **матрицею перехідних імовірностей.**

У випадку послідовності незалежних випробувань Бернуллі матриця перехідних імовірностей має вигляд $\Pi=\begin{Vmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{Vmatrix}$.

Позначимо через $p_{ik}(n)$ імовірність переходу зі стану E_i у стан E_k за n випробувань. Тоді $\Pi(n)=\begin{Vmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) \end{Vmatrix}$ – матриця ймовірностей переходу за n випробувань. З формули повної ймовірності випливає співвідношення

$$\boxed{\Pi(n)=\Pi^n.}$$

Подамо матрицю Π у вигляді

$$\Pi = \frac{1}{p_{12}+p_{21.}} \begin{Vmatrix} p_{21} & p_{12} \\ p_{21} & \dot{p}_{12} \end{Vmatrix} + \frac{1-p_{12}-p_{21}}{p_{12}+p_{21}} \begin{Vmatrix} p_{12} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{21} \end{Vmatrix}.$$

Відзначимо, що

$$\begin{Vmatrix} p_{21} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} p_{21} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p_{21} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{Vmatrix} = \left(p_{12}+p_{21}\right) \begin{Vmatrix} p_{21} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} p_{21} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p_{12} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{21} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} p_{12} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{21} \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} p_{12} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{21} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p_{12} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{21} \end{Vmatrix} = (p_{12}+p_{21}) \cdot \begin{Vmatrix} p_{12} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{21} \end{Vmatrix}.$$

Якщо використати останні рівності, то одержимо співвідношення

$$\Pi^n = \frac{1}{p_{12}+p_{21}} \begin{Vmatrix} p_{21} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{Vmatrix} + \frac{(1-p_{12}-p_{21})^n}{p_{12}+p_{21}} \begin{Vmatrix} p_{12} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{21} \end{Vmatrix}.$$

Нехай $|1 - p_{12} - p_{21}| < 1$ (зокрема, коли всі елементи $p_{ik} > 0$), тоді при $n \to \infty$ $\Pi(n) = \Pi^n \to \frac{1}{p_{12}+p_{21}} \cdot \begin{Vmatrix} p_{21} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{Vmatrix}$. Отже, при $n \to \infty$, незалежно від початкового стану, система буде знаходитися в стані E_1 з імовірністю $\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}$ і в стані E_2 – з імовірністю $\frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}$.

1.5.2. Асимптотичні формули для схеми Бернуллі

Формула (1.14) приводить до громіздких обчислень при великих значеннях n і k, а також при малих значеннях p або $1-p$. Тому доцільно мати наближені, але прості формули для розрахунку відповідних ймовірностей або їх сум.

1. Формула Пуассона

$$\boxed{p_n(k) \approx \frac{(n\cdot p)^k}{k!} e^{-n\cdot p}} \qquad (1.15)$$

є справедливою для великих n і малих p (нечасті події), $k \ll n$. Якщо $n\cdot p \le 10$ і $n \ge 100$, то похибка від заміни формули (1.14) на формулу (1.15) є дуже малою.

Доведення. Якщо позначити $\lambda = n\cdot p$, то

$$p_n(k) = C_n^k \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1,$$

то при великих n і малих p і k значно менших, ніж n, отримуємо наближену рівність $p_n(k) \approx \frac{(n\cdot p)^k}{k!} e^{-n\cdot p}$.

Приклад 44. Імовірність виходу мікросхеми з ладу протягом заданого проміжку часу дорівнює 0.003. Яка ймовірність того, що з 200 мікросхем: а) жодна не вийде з ладу; б) вийдуть з ладу не більше двох?

Розв'язання. Точний розв'язок прикладу одержуємо за формулою (1.14) при n=200 і p=0.003:

а) $p_{200}(0) = 0.997^{200} = 0.5483$;

б)

$$p_{200}\{k \le 2\} = p_{200}(0) + p_{200}(1) + p_{200}(2) = 0.997^{200} + 200\cdot 0.997^{199}\cdot 0.003 +$$
$$+19900\cdot 0.997^{198}\cdot 0.003^2 = 0.9771.$$

Наближений розв'язок знаходимо за формулою (1.15) при $np = 200\cdot 0.003 = 0.6 < 10$:

а) $p_{200}(0) \approx e^{-0.6} = 0.5488$;

б) $p_{200}\{k \le 2\} = p_{200}(0) + p_{200}(1) + p_{200}(2) \approx e^{-0.6}\left(1 + 0.6 + \dfrac{0.6^2}{2}\right) = 0.9769$.

Приклад 45. ВТК перевіряє партію з 200 деталей. Імовірність того, що деталь задовольняє стандарт, дорівнює 0.97. Знайти ймовірність того, що буде знайдено не більше п'яти деталей, які не задовольняють стандарт.

Розв'язання. Оскільки малою є ймовірність того, що деталь не задовольняє стандарт, то маємо $n = 200,\ p = 0.03, 1 - p = 0.97$. За точною формулою (1.14) шукана ймовірність $p_{200}\{k \le 5\} = \sum_{k=0}^{5} p_{200}(k) = \sum_{k=0}^{5} C_{200}^{k} \cdot (0.03)^k \cdot (0.97)^{200-k}$.

Оскільки $np = 200 \cdot 0.03 = 6 < 10,\ \ n > 100$, то за формулою (1.15) одержуємо $p_{200}\{k \le 5\} = \sum_{k=0}^{5} p_{200}(k) \approx \sum_{k=0}^{5} \dfrac{6^k}{k!} e^{-6} = 0.4457.$

2. Формули Муавра-Лапласа

Локальна формула

$$\boxed{p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot np \cdot (1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np\cdot(1-p)}}} \qquad (1.16)$$

має місце при p і $1\text{-}p$, істотно відмінних від 0, і великих значеннях n і k. Відносна похибка цієї формули зменшується при зростанні n і зменшенні $|k\text{-}np|$. Вона застосовується звичайно при $n > 100$, $np(1-p) > 20$ і $|k\text{-}np| < 3 \cdot \sqrt{np \cdot (1-p)}$.

Інтегральна формула

$$\boxed{P\{c \le k \le d\} = \sum_{k=c}^{d} p_n(k) \approx \Phi\left(\frac{d-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{c-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}\right),} \qquad (1.17)$$

де

$$\boxed{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt},\qquad (1.18)$$

так звана **функція Лапласа** (або **інтеграл імовірностей**). Значення цієї непарної зростаючої функції наведені в табл. Д.1.1, а її графік дано на рис. 1.19.

Формула (1.17) є твердженням теореми Муавра-Лапласа з п. 3.2.4. Вона використовується тоді, коли і формула (1.16).

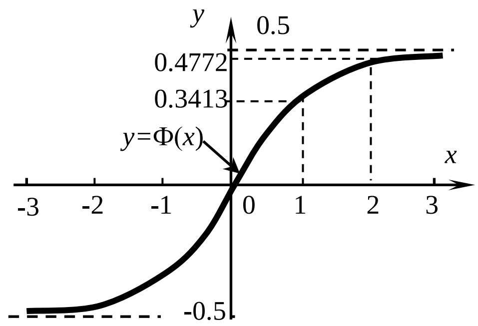


Рис. 1.19

Для доведення формул (1.16) і (1.17) є суттєвим використання формули Стірлінга для факторіалів

$$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot e^{-n}\cdot n^n\left(1+\alpha(n)\right),\text{ де } \alpha(n)\to 0\ ,\ n\to\infty.$$

Приклад 46. Гральний кубик підкидається 1200 раз. Знайти ймовірність того, що кількість випадань одиниці знаходиться в діапазоні між 195 та 210 включно.

Розв'язання. Оскільки n=1200, p=1/6, то маємо

$$P\{195\le k\le 210\}=\sum_{k=195}^{210}p_{1200}(k)=\sum_{k=195}^{210}C_{1200}^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{1200-k}.$$

Подальше обчислення пов'язано з великими труднощами. Тому скористаємося формулою (1.17). Оскільки np=200, $\sqrt{np(1-p)}\approx 12.91$, $d-np$ =10, $c-np=-5$, то шукана ймовірність приблизно дорівнюватиме

$$P\{195\le k\le 210\}\approx\Phi(0.7746)-\Phi(-0.3873)\approx 0.2807+0.1507=0.4314.$$

Приклад 47. Скільки разів потрібно підкинути монету, щоб із імовірністю, не меншою за 0.95, частота $\frac{k}{n}$ появи герба відрізнялась від імовірності p=0.5 появи герба не більше, ніж на 0.03.

Розв'язання. За умовою задачі потрібно знайти n з нерівності $P\{|k/n-0.5|\le 0.03\}\ge 0.95$.

Оскільки $|k/n\text{-}0.5|\le 0.03 \Leftrightarrow n/2-0.03n\le k\le \le n/2+0.03n$, то $P\{|k/n-0.5|\le 0.03\}=P\{n/2-0.03n\le k\le n/2+0.03n\}$. Отже, з формули (1.17) при $np=n/2$, $d=n/2+0.03n$, $c=n/2-0.03n$ випливає співвідношення

$$P\{|k/n-0.5|\le 0.03\}\approx \Phi\left(0.06\sqrt{n}\right)-\Phi\left(-0.06\sqrt{n}\right)=2\Phi\left(0.06\sqrt{n}\right)\ge 0.95.$$

З табл. Д.1.1 знаходимо, що $0.06\sqrt{n}\ge 1.96$. Таким чином $n\ge 1067$.

Приклад 48. Яку найменшу кількість n деталей треба перевірити, щоб з імовірністю, не меншою за 0.97, частота $\frac{k}{n}$ бракованих деталей відхилялась від імовірності p бракованої деталі не більш ніж на 0.01.

Розв'язання. Отже, яким за умов прикладу повинно бути n, щоб виконувалась нерівність $P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\le 0.01\right\}\ge 0.97$?

Оскільки нерівність $\left|\frac{k}{n}-p\right|\le 0.01$ еквівалентна нерівності $0.1n-0.01n\le k\le 0.1n+0.01n$, то на підставі (4) маємо

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\le 0.01\right\}\ge 0.97\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p\cdot(1-p)}}\right)\ge 0.97\ .$$

Остання нерівність визначає n як функцію невідомої ймовірності p. Тому скористуємось тепер оцінкою $p\cdot(1-p)\le\frac{1}{4}$. Тоді отримуємо нерівність

$$\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p\cdot(1-p)}}\right)\ge\Phi\left(0.02\sqrt{n}\right)\ge 0.485.$$

За табл. Д.1.1 знаходимо, що

$$0.02\cdot\sqrt{n}\ge 2.17\Leftrightarrow\sqrt{n}\ge 108.5\Rightarrow n=11773.$$

Аналогічно можна знайти межу Δ абсолютної величини можливих відхилень частоти $\frac{k}{n}$ появи події в серії з n випробувань від її ймовірності p в одному випробуванні:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\Delta\right\}=P_{зад}\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{p\cdot(1-p)}}\right)=P_{зад}\ .$$

Так, при $n=625$, $p=0.8$, $P_{зад}=0.4938$ отримуємо

$$\frac{\Delta\cdot 25}{0.4}=2.5\Rightarrow\Delta=0.04.$$

Приклад 49. У селищі мешкає 2500 людей. Кожен з них приблизно 6 разів у місяць їздить до міста, обираючи дні поїздок незалежно від інших. Яку найменшу місткість повинен мати потяг, який йде один раз на добу, щоб він переповнювався не більше одного разу в 100 днів?

Розв'язання. Імовірність того, що мешканець селища обере наданий день для поїздки, дорівнює 6/30 = 0.2. Отже, задача зводиться до схеми послідовності незалежних випробувань при p=0.2 і n =2500. Нехай N – місткість потяга. N треба знайти з умови задачі $P\{N+1\le k\le 2500\}==\sum_{k=N+1}^{2500}p_{2500}(k)\le 0.01$. Оскільки np = $2500\cdot 0.2$=500, а $\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{400}=20$, то на підставі формули (1.17) маємо

$$P\{N+1\le k\le 2500\}\approx\Phi\left(\frac{2500-500}{20}\right)-\Phi\left(\frac{N-499}{20}\right)=\Phi(100)-\Phi\left(\frac{N-499}{20}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{N-499}{20}\right)\le 0.01\Rightarrow\Phi\left(\frac{N-499}{20}\right)\ge 0.49.$$

За табл.Д.1.1 додатка знаходимо, що

$\frac{N-499}{20}\ge 2.33\Rightarrow N\ge 546$ людей.

Формула (1.17) може бути використана і для оцінки невідомої ймовірності події, якщо відомо, скільки разів ця подія з'явилась в серії з n випробувань. Нехай імовірність p появи події A в кожному випробуванні невідома. Проводиться серія з n випробувань, у якій подія A з'являється k разів. Потрібно знайти проміжок, який з заданою ймовірністю $1-\varepsilon$ накриває невідоме експериментатору значення p.

Задамо довільне мале число $\varepsilon > 0$ і визначимо число $u(\varepsilon)$ зі співвідношення $2\Phi(u(\varepsilon))=1-\varepsilon$ за допомогою табл. Д.1.1 (наприклад, $u(0.05)=1.96$, $u(0.01)=2.576$, $u(0.0027)=3$). Тоді з формули (1.17) випливає, що незалежно від невідомої ймовірності p маємо

$$P\left\{|k-np| \le u(\varepsilon)\cdot\sqrt{np(1-p)}\ \right\} \approx 2\Phi\big(u(\varepsilon)\big)=1-\varepsilon.$$

Отже, практично вірогідно, що має місце нерівність

$$|k-np| \le u(\varepsilon)\cdot\sqrt{np(1-p)}.$$

Після піднесення останньої нерівності до квадрата отримуємо квадратну нерівність відносно невідомої ймовірності p. Одержаний залежно від n і k при цьому проміжок значень для p прийнято називати **довірчим проміжком з рівнем надійності** 1- ε (докладніше про це говориться у п. 5.3). Наприклад, 1- ε=0.95 відповідає $u(\varepsilon)=1.96$ і при n=10000, k=4000 для ймовірності p маємо проміжок $p \in (0.39;0.41)$.

Задачі до глави 1

1. Алгебра подій. Комбінаторика

1.1. Гральний кубик підкидають один раз. Описати простір елементарних подій. Описати події: а) A={випало кількість очок, яка ділиться на 2}; б) B={випало кількість очок більше чотирьох}; в) C={випало кількість очок не менше трьох}; г) D={не випало п'ять очок}; д) E={не випало ні найменша, ні найбільша можлива кількість очок}.

1.2. Монету підкидають тричі. Описати простір елементарних подій. Описати події: а) A={двічі з'явиться герб}; б) B={принаймні двічі з'явиться герб}; в) C={принаймні один раз з'явиться герб}.

1.3. Підкидають монету поки не випаде герб. Описати простір елементарних подій. Описати подію A = {кількість підкидань не більше п'яти}.

1.4. Проводяться три постріли по мішені. Позначимо через $A_i\left(i=1,2,3\right)$ подію, яка полягає у влученні в мішень при i-му пострілі. Потрібно виразити через $A_i\left(i=1,2,3\right)$ події $B_i\left(i=0,1,2,3\right)$, які відповідно означають, що буде точно i влучень у мішень.

1.5. Нехай $\Omega=\left\{0,1,2,3\right\}$, $A=\left\{1,2\right\}$, $B=\left\{1,3\right\}$. Описати події $\overline{A}, A\bigcup B,\ A\bigcap B, A\bigcup \overline{B}$.

1.6. Нехай $\Omega=\left\{\omega : \omega\in\left[0;1\right]\right\}$, $A=\left\{\omega : \omega\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\right\}$,

$B=\left\{\omega : \omega\in\left[\frac{1}{3};1\right]\right\}$. Описати події $\overline{A}, A\bigcup B, A\bigcap B, \overline{A}\bigcup B$.

1.7. Чи збігаються події A та B, якщо: а) $\overline{A}=\overline{B}$; б) $A\bigcup C=B\bigcup C$; в) $A\bigcap C=B\bigcap C$ (C – деяка подія)?

1.8. Чи утворюють повну систему подій такі події: A, $\overline{A}\bigcap B, \overline{A}\bigcap \overline{B}$?

1.9. Виразити подію $A\bigcup B\bigcup C$ як суму трьох подій, що парами несумісні.

1.10. Нехай $A_i\left(i=1,2,3,4,5,6\right)$ – подія, яка полягає в тому, що при підкиданні шестигранного кубика випаде відповідно

1,2,3,4,5,6 очок. Виразити через події A_i такі події: а) випало 3 очки; б) випало кількість очок менше трьох; в) випало кількість очок більше чотирьох; г) випало парна кількість очок; д) не випала п'ятірка; е) не випало ні найменша, ні найбільша можлива кількість очок.

1.11. Нехай A_i - подія, яка полягає в тому, що при і-му підкиданні монети випав герб. Виразити через події A_i такі події: а) монета була кинута двічі і обидва рази випадала тією самою стороною; б) при двох підкиданнях монета випадала неоднаково; в) монета була кинута двічі, при другому разі випав герб; г) монета була кинута тричі, при першому і третьому разі вона випадала однаково.

1.12. Позначимо $A_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$ той факт, що i-й канал зв'язку налагоджений. Виразити через події A_i такі події: а) усі канали зв'язку налагоджені; б) усі канали зв'язку неналагоджені; в) неналагоджені два канали, між яких є третій; г) один з каналів неналагоджений; д) перший канал налагоджений, другий і третій неналагоджені; е) принаймні один канал налагоджений.

1.13. Схема освітлення приміщення зображена на рис. 1.20. Нехай $A_i(i=1,2,3,4,5)$ – подія, яка полягає в тому, що лампа з номером i функціонує нормально. Виразити через A_i такі події: а) лампа 1 не працює, схема працює; б) лампа 1 працює, лампа 2 не працює, схема працює; в) лампи 2 та 4 не працюють, схема працює; г) лампа 4 не працює, схема працює; д) схема не працює; е) схема працює; ж) три лампи не працюють, схема працює.

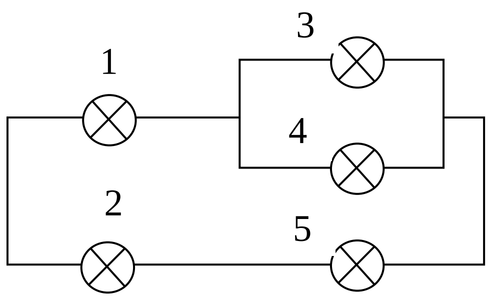


Рис. 1.20

1.14. На гору ведуть 7 стежок. Турист піднімається на гору, а потім через деякий час спускається з неї. Скільки існує різних маршрутів, якщо для підйому та спуску будуть використані різні стежки?

1.15. З пункту А до пункту Б ведуть 4 дороги, з пункту Б до пункту В – 7 доріг: а) скількома способами турист може пройти з А до В та повернутися назад; б) скільки існує маршрутів, якщо повернення відбувається новим шляхом?

1.16. У фіналі першості України з шахів грають 20 шахістів. Знайти: а) скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна та бронзова медаль серед учасників; б) скільки існує четвірок переможців, які увійдуть до складу збірної команди країни.

1.17. Скільки існує семизначних телефонних номерів, якщо: а) у них усі цифри не рівні; б) цифри можуть повторюватись? Номер не може починатися з нуля.

1.18. У колоді 32 карти. Роздаються 5 карт. Скільки існує способів одержати: а) одну карту пік; б) дві; в) три?

1.19. Збори з 25 осіб обирають голову зборів, секретаря і трьох членів лічильної комісії. Скількома способами це можна зробити?

1.20. Скільки існує можливих способів для утворення патруля з 3-х солдатів та одного офіцера, якщо є 25 солдатів і 4 офіцери?

1.21. Скільки є шестизначних чисел, які: а) починаються з двох однакових цифр; б) закінчуються на цифру 3?

1.22. При передачі повідомлення телеграфом використовують код Морзе. Вказати: а) чи достатньо комбінацій, складених не більш ніж з п’яти символів, щоб закодувати будь-яке повідомлення українською мовою; б) чи достатньо для цього комбінацій, складених не більше ніж з чотирьох символів?

1.23. Скільки існує чотиризначних чисел, включно з “числами”, які починаються з цифри 0 (тут і далі розуміється на увазі десяткова система числення) і не містять: а) цифри 6; б) жодної з цифр 0, 7, 9?

1.24. Автомобільні номери складаються з букв українського алфавіту та цифр. Яку кількість номерів можна скласти за таких умов: а) у номері 2 букви та 4 цифри; б) у номері 3 букви та 4 цифри; в) одночасно використовуються номери обох типів.

Врахувати, що не існує номерів, складених з чотирьох нулів, і не використовуються букви ї, й, ь.

1.25. Скількома способами можна: а) розставити 6 бігунів на 6 доріжках; б) як зміниться відповідь, якщо бігун під номером 1 має бути ближче до бровки за бігуна під номером 2; в) як зміниться відповідь, якщо, крім того, вони повинні стартувати поруч; г) розв'язати ці самі задачі, якщо доріжок не 6, а 8.

1.26. Скільки різних слів можна утворити переставленням букв у слові а) ОЛЕКСАНДР; б) АНАСТАСІЯ; в) МОЛОКО; г) БУТЕРБРОД; д) ЙМОВІРНІСТЬ? Розв'язати задачу «д» за умови, що утворені слова не можуть починатися з букви «Ь».

1.27. Скільки слів, що містять 4 приголосних і 3 голосних, можна утворити з букв слова ЛОГАРИФМ? Скільки серед них таких, у яких ніякі дві голосні не стоять поруч?

1.28. Скільки чотиризначних чисел можна скласти (числа можуть починатися з цифри 0) за таких умов: а) усі цифри однакові; б) усі цифри різні; в) дві цифри збігаються; г) три цифри збігаються; д) дві пари цифр збігаються; е) принаймні дві цифри збігаються?

1.29. Скількі "слів" з чотирьох букв можна утворити з букв а, в, с, якщо відомо, що буква а зустрічається у слові не більше двох разів, в – не більше одного разу, с – не більше трьох разів?

1.30. Скільки існує способів розташувати в рядок 5 одиниць і 6 нулів таким чином, щоб жодні дві одиниці не стояли поруч?

1.31. З ретельно перемішаної колоди, яка містить 36 карт, витягнули 8 карт. Скільки існує способів витягнути ці карти, щоб серед них: а) був хоча б один туз; б) тільки один туз; в) не менше двох тузів; г) тільки два тузи?

1.32. Скільки існує способів роздати 36 карт 4 гравцям (кожному по 9 карт), щоб: а) кожен гравець отримав даму; б) два конкретних гравці не отримали жодної дами; в) конкретний гравець отримав 5 різних за значенням карт?

Відповіді

1.1. $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, $B=\{\omega_5,\omega_6\}$, $C=\{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$, $D=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$, $E=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$. **1.2.** $\Omega=$ {ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ГЦЦ, ЦГГ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ}; A={ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ}; B={ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГГГ}; C={ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГГГ}. **1.3.** Ω = {Г, ЦГ, ЦЦГ, …, ЦЦ…ЦГ, …}; A= {Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ЦЦЦЦГ}. **1.4.** $B_0=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $B_1=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$, $B_2=$ $=A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$, $B_3=A_1A_2A_3$. **1.5.** $\{0,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1\}$, $\{0,1,2\}$. **1.6.** $\left(\frac{2}{3};1\right]$, $[0;1]$, $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3};1\right]$. **1.7.** а) так; б) ні; в) ні. **1.8.** так. **1.9.** $A\cup(B\cup C)=A\cup\left(\bar{A}\cap B\right)\cup\left(C\cap\bar{A}\cap\bar{B}\right)$. **1.10.** а) A_3; б) A_1+A_2; в) A_5+A_6; г) $A_1+A_4+A_6$; д) $\overline{A_5}$; е) $\overline{A_1+A_6}$. **1.11.** а) $A_1A_2+\bar{A}_1\bar{A}_2$; б) $A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2$; в) A_2; г) $A_1A_3+\bar{A}_1\bar{A}_3$. **1.12.** а) $A_1A_2A_3A_4A_5$; б) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4\bar{A}_5$; в) $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4A_5+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4A_5+A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5+A_1A_2\bar{A}_3A_4\bar{A}_5$; г) $\bar{A}_1A_2A_3A_4A_5+A_1\bar{A}_2A_3A_4A_5+A_1A_2\bar{A}_3A_4A_5+A_1A_2A_3\bar{A}_4A_5+A_1A_2A_3A_4\bar{A}_5$; д) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; е) $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$. **1.13.** а) $\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_5$; б) $A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\left(A_3+A_4\right)$; в) $\overline{A_2}\cdot\overline{A_4}\cdot A_1\cdot A_3$; г) $\overline{A_4}\cdot\left(A_1\cdot A_3+A_2\cdot A_5\right)$; д) $\left(\overline{A_1}+\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}\right)\cdot\cdot\left(\overline{A_2}+\overline{A_5}\right)$; е) $A_1\cdot\left(A_3+A_4\right)+A_2\cdot A_5$; ж) $\overline{A_2}\cdot\overline{A_5}\cdot A_1\cdot\left(\overline{A_3}\cdot A_4+\overline{A_4}\cdot A_3\right)$. **1.14.** 42. **1.15.** а) 784; б) 504. **1.16** а) A_{20}^3; б) C_{20}^4. **1.17.** а) $9\cdot A_9^6$; б) $9\cdot 10^6$. **1.18.** а) $C_8^1\cdot C_{24}^4$; б) $C_8^2\cdot C_{24}^3$; в) $C_8^3\cdot C_{24}^2$. **1.19.** $A_{25}^2\cdot C_{23}^3$. **1.20.** $C_4^1\cdot C_{25}^3$. **1.21.** а) $9\cdot 10^4$; б) $9\cdot 10^4$. **1.22.** а) так; б) ні. **1.23.** а) 6561; б) 2401. **1.24.** а) $29^2\cdot 9999=8409159$; б) $29^3\cdot 9999=243865611$; в) $29^2\cdot 30\cdot 9999=252274770$. **1.25.** а) 6!=720; б) $\frac{6!}{2}=360$; в) 5!=120; г) A_8^6, $C_8^2\cdot A_6^4$, $7\cdot A_6^4=2520$. **1.26.** а) 9!=362880; б) $\frac{9!}{3!2!}$=30240; в) $\frac{6!}{3!}=120$; г) $\frac{9!}{(2!)^2}=90720$; д) $\frac{11!}{2!}=19960000$; е) $\frac{10\cdot 10!}{2!}$=18140000. **1.27.** а) $5\cdot 7!=25200$; б) C_6^3. **1.28.** а) 10; б) $A_{10}^4=5\,040$; в) $10\cdot C_4^2\cdot 9\cdot 8=4320$; г) $10\cdot 4\cdot 9=360$; д) $C_{10}^2\cdot C_4^2=270$; е) 4 960.

1.29. 38. **1.30.** 21. **1.31.** а) $C_{36}^{8}-C_{32}^{8}$; б) $C_{4}^{1}\cdot C_{32}^{7}$; в) $C_{36}^{8}-C_{32}^{8}-C_{4}^{1}\cdot C_{32}^{7}$; г) $C_{4}^{2}\cdot C_{32}^{6}$. **1.32.** а) $C_{4}^{1}\cdot C_{32}^{8}\cdot C_{3}^{1}\cdot C_{24}^{8}\cdot C_{2}^{1}\cdot C_{16}^{8}$; б) $C_{32}^{9}\cdot C_{23}^{9}$; в) $C_{9}^{5}\cdot 112960$=14232960. **Вказівка.** Існує 4 варіанти отримання 5 різних за значенням карт з 9 розданих: (4,2,1,1,1) (наприклад, (К,К,К,К,Д,Д,10,8,6), (3,3,1,1,1), (3,2,2,1,1), (2,2,2,2,1) (див. приклад 30, п. 1.4.2). Загальна кількість способів M відповідно до цих варіантів за правилами додавання та множення дорівнює

$$M=C_{9}^{5}\cdot\left[C_{4}^{4}\cdot C_{4}^{2}\cdot\left(C_{4}^{1}\right)^{3}\cdot\frac{5!}{3!}+\left(C_{4}^{3}\right)^{2}\cdot\left(C_{4}^{1}\right)^{3}\cdot\frac{5!}{3!2!}+C_{4}^{3}\cdot\left(C_{4}^{2}\right)^{2}\cdot\left(C_{4}^{1}\right)^{2}\cdot\frac{5!}{2!2!}+\right.$$
$$\left.+\left(C_{4}^{2}\right)^{4}\cdot C_{4}^{1}\cdot\frac{5!}{4!}\right]=C_{9}^{5}\cdot\left(6\cdot 4^{3}\cdot 20+4^{5}\cdot 10+4\cdot 6^{2}\cdot 4^{2}\cdot 30+6^{4}\cdot 4\cdot 5\right)=C_{9}^{5}\cdot 112960.$$

2. Класичне та аксіоматичне визначення ймовірності

1.33. Знайти ймовірність того, що при підкиданні грального кубика: а) випадає 1 очко; б) випадає 3 очки; в) випадає 1 або 3 очки; г) випадає кількість очок більше 3; д) випадає кількість очок не більше 3; е) випадає кількість очок, яка більше або дорівнює 3; ж) випадає парна кількість очок.

1.34. Кубик підкинуто тричі. Знайти ймовірність того, що при цьому в сумі випадає не менше, ніж 17 очок.

1.35. Один за одним підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок не менша 10 і при цьому: а) на першому з кубиків випало 5 очок; б) хоча б на одному з кубиків випало 5 очок; в) на одному і тільки на одному з кубиків випало 5 очок.

1.36. В урні 3 білих і 5 чорних куль. Кулю, що обрана, кожного разу повертають в урну. Знайти ймовірність: а) витягнути білу кулю; б) витягнути чорну кулю; в) двічі витягнути білу кулю; д) двічі витягнути білу кулю, а потім – чорну кулю?

1.37. Знайти ймовірність того, що при трьох підкиданнях монети: а) герб випадає тричі; б) герб випадає двічі; в) герб випадає хоча б два рази.

1.38. Цифровий замок складається з 4 дисків на одній осі, кожний з яких розподілений на 7 секторів з заданими числами. Замок відкривається, якщо цифри утворюють певне число. Яка ймовірність відкрити замок, набираючи навмання довільне число?

1.39. У скриньці міститься 5 куль з номерами від 1 до 5. Виймаються 3 кулі з поверненням до скриньки. Яка ймовірність того, що номери першої і третьої куль виявляться однаковими.

1.40. На книжній полиці у випадковому порядку стоять 10 томів. З них 3 томи Пушкіна, 5 томів Толстого та 2 томи Шевченка. Навмання обирають 2 томи. Яка ймовірність того, що вони виявились одного автора?

1.41. Яка ймовірність витягнути з колоди 52 карти фігуру або туза, або карту трефової масті (фігурою називається валет, дама або король)?

1.42. Яка ймовірність витягнути з колоди 52 карти фігуру або карту пікової чи трефової масті?

1.43. В одному ящику 7 білих і 8 чорних куль, у другому 10 білих і 5 чорних куль. З кожного ящика витягнуто по одній кулі. Знайти ймовірність того, що принаймні з одного ящика витягнуто одну білу кулю.

1.44. У першій урні 6 білих і 11 чорних куль, у другій – 12 білих і 5 чорних. З кожної урни навмання витягують по одній кулі. Знайти ймовірність того що обидві кулі одного кольору.

1.45. Троє стрільців, для яких імовірності влучення в мішень дорівнюють відповідно 0.8, 0.7, 0.6, роблять по одному пострілу. Знайти ймовірність: а) одного влучення; б) двох; в) трьох; г) хоча б одного влучення.

1.46. Імовірності своєчасного виконання студентом домашнього завдання по трьох предметах дорівнюють відповідно 0.5, 0.7, 0.4. Знайти ймовірності своєчасного виконання студентом домашнього завдання: а) по двох предметах; б) хоча б по двох; в) хоча б по одному предмету.

1.47. Імовірність влучення в мішень кожним з двох стрільців дорівнює відповідно 0.6, 0.7. Кожний зробив по 2 постріли. Знайти ймовірність того, що було: а) не більше 2 влучень; б) 3 влучення; в) принаймні одне влучення.

1.48. У 20 екзаменаційних білетах міститься по 3 питання, які не повторюються. Студент знає відповіді лише на 40 питань. Яка ймовірність того, що вибраний білет містить: а) одне; б) два; в) три; г) хоча б одне питання, відповіді на які студент знає?

1.49. Із колоди в 36 карт навмання виймається 4 карти. Знайти ймовірності того, що: а) усі обрані карти пікової масті; б) усі обрані карти однієї масті; в) буде обраний хоча б один король або туз.

1.50. Із колоди 36 карт навмання виймають 5 карт. Знайти ймовірність того, що це будуть 2 валети, 2 дами та 1 король.

1.51. У студентській раді 3 другокурсника, 5 третьокурсників і 2 четвертокурсники. З цього складу навмання обирають 5 делегатів на міську студентську конференцію. Знайти ймовірність того, що буде обрано: а) одного другокурсника, трьох третьокурсників та одного четвертокурсника; б) двох другокурсників і трьох третьокурсників.

1.52. У ящику міститься 10 червоних, 8 зелених і 12 синіх куль. Навмання обирається 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони зеленого кольору?

1.53. На книжній полиці у випадковому порядку стоять 10 книг. Знайти ймовірності того, що: а) дві певні книги стоять поруч; б) три певні книги стоять поруч.

1.54. Група з 10 осіб займає місця за круглим столом. Яка ймовірність того, що: а) дві певні особи сидітимуть поруч; б) три певні особи сидітимуть поруч?

1.55. На книжній полиці у випадковому порядку стоять 10 книг. Знайти ймовірності того, що між двома певними книгами стоять: а) дві інші книги; б) три інші книги.

1.56. На книжній полиці навмання розставлено 10 томів енциклопедії. Знайти ймовірність того, що перші 3 томи стоятимуть поруч у порядку зростання номерів (зліва направо або навпаки).

1.57. Колода з 36 карт ретельно перемішана. Знайти ймовірність того, що тузи розташовані поруч.

1.58. У коробці міститься 7 карток, на яких написані букви А, А, А, Б, Б, Р, Н. Знайти ймовірність того, що буде складено слово БАРАБАН, якщо: а) картки навмання витягують по одній і складають їх у ряд; б) навмання витягують картку, записують букву та повертають картку в коробку.

1.59. В урні 3 білих і 5 чорних куль. З урни навмання витягують кулю, відзначають її колір і повертають в урну. Цю операцію повторюють тричі. Знайти ймовірність того, що 2 з витягнутих куль білі.

1.60. В урні 2 білих, 3 чорних і 4 червоних кулі. З урни навмання витягують кулю, відзначають її колір і повертають в урну. Цю операцію повторюють тричі. Знайти ймовірність того, що: а) всі 3 кулі різних кольорів; б) серед витягнутих куль немає червоних.

1.61. Студент прийшов на контрольну роботу, зрозумівши розв'язання задач з 6 тем з тих 8 тем, задачі з яких будуть у білетах контрольної роботи. Яка ймовірність одержати оцінку не нижче "добре", якщо для цього треба розв'язати принаймні 3 задачі з 4 запропонованих у білетах (усі задачі з різних тем)?

1.62. Із колоди з 36 карт навмання витягують 4 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде принаймні один туз або король.

1.63. Навмання обирають шестизначний номер. Знайти ймовірність того, що всі цифри цього номера кратні трьом.

1.64. Із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 навмання складають шестизначне число, всі цифри якого різні. Знайти ймовірність того, що воно ділиться на 5.

1.65. На 20 картках написані числа від 1 до 20. Навмання обирають 2 картки. Яка ймовірність того, що на одній з них буде число менше 7, а на другій – більше 7?

1.66. Колода з 36 карт навмання ділиться навпіл. Знайти ймовірність того, що в кожній половині виявиться по 2 тузи.

1.67. Стрілець зробив 2 постріли в мішень. Імовірності влучення при першому і другому пострілах однакові та дорівнюють p. Імовірність точно одного влучення при двох пострілах 0.42. Знайти: а) p; б) імовірність двох влучень; в) принаймні одного влучення.

1.68. Стрілець зробив 2 постріли в мішень. Імовірність влучення при першому пострілі дорівнює $2p$, а при другому p. Імовірність точно одного влучення при двох пострілах 0.54. Знайти: а) p; б) імовірність двох влучень; в) принаймні одного влучення.

1.69. У ліфт 12-поверхового дома на першому поверсі зайшло 6 пасажирів, кожний з яких з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що всі пасажири вийдуть: а) на одному поверсі; б) на 12 поверсі; в) на різних поверхах.

1.70. Гардеробниця у спорткомплексі видала одночасно номерки на куртки 5 студентам, після чого вона переплутала всі куртки та повісила їх навмання. Знайти ймовірність того, що: а) 2 студенти одержать свої куртки; б) усі одержать свої; в) принаймні один одержить свою куртку.

1.71. З повного набору доміно (28 костей) беруть 5 костей. Знайти ймовірність того, що серед них не буде жодної кості з 6 очками.

1.72. На 9 однакових картках написані відповідно числа 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14. Навмання беруть 2 картки. З отриманих чисел складено дріб. Знайти ймовірність того, що він нескоротний.

1.73. З повного набору доміно (28 костей) навмання беруть дві. Знайти ймовірність того, що з них можна скласти ланцюжок згідно з правилами гри.

1.74. Знайти ймовірність того, що серед 8 навмання обраних цифр: а) не зустрінеться 2; б) не зустрінеться 3; в) не зустрінеться ні 2, ні 3; г) не зустрінеться хоча б одна з цифр 2 або 3.

1.75. У серії з трьох підкидань грального кубика кількість очок жодного разу не повторювалась. Знайти ймовірність такої події: а) не випало 6; б) випало 6; в) не випало кількість очок менше 3.

1.76. У серії з 6 підкидань монети герб випав двічі. Знайти ймовірність того, що: а) ці випадання відбулися підряд; б) між цими випаданнями один раз з'явилася ціна; в) одне з випадань співпало з останнім підкиданням.

1.77. З 8 ламп, потужності яких вказано на рис. 1.21, відмовили 3. Знайти ймовірність того, що сумарна потужність зменшилась менше, ніж на 100 Вт?

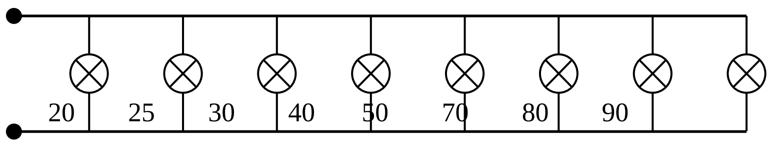


Рис. 1.21

1.78. Для функціонування десятиканальної системи зв'язку необхідно, щоб 6 її перших каналів обов'язково працювали.

Знайти ймовірність відмови системи при виході з ладу двох каналів.

1.79. Після того, як 8 стрільців однакової кваліфікації зробили залп по мішені, у ній знайшли 5 отворів. Знайти ймовірність того, що перший і другий стрілки влучили в мішень.

1.80. У серії 8 пострілів по мішені стрілець зробив 3 промахи. Знайти ймовірність того, що вони зроблені підряд.

1.81. В електронному приладі два блоки. У кожному з них по 4 однакові мікросхеми. Для надійності приладу необхідно, щоб у кожному з блоків працювали не менше 2 мікросхем. Яка ймовірність того, що при відмові 3 мікросхем прилад буде працездатним?

1.82. Всі слова деякого коду складаються з 3 одиниць і 5 нулів. Знайти ймовірність того, що навмання обране слово починається з одиниці.

1.83. Знайти для спортлото “6 з 49” ймовірності таких подій: а) вгадано 3 номери; б) вгадано хоча б 3 номери.

1.84. Яка з подій відбувається з більшою ймовірністю: а) з 4 підкидань кубика хоча б один раз випаде 6; б) з 24 підкидань двох кубиків хоча б один раз випаде дві 6.

Примітка: ця задача була поставлена та розв’язана ще в XVII столітті. Вона відіграла стимулюючу роль у подальшому розвитку теорії ймовірностей.

1.85. 15 куль помічені числами від 1 до 15 і випадково розміщені порівну по 3 урнах. Знайти ймовірності таких подій:

а) 1-ша та 15-та кулі знаходяться в першій урні;

б) 1-ша та 15-та кулі знаходяться в одній урні;

в) номера куль, які знаходяться в одній урні, можна поділити на 3;

г) номера куль в кожній з урн ідуть один за одним.

Відповіді

1.33. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{2}{3}$; ж)$\frac{1}{2}$. **1.34.** $\frac{4}{6^3}=\frac{1}{54}$. **1.35.** а) $\frac{1}{18}$; б) $\frac{1}{12}$; в)$\frac{1}{18}$. **1.36.** а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{25}{64}$; г) $\frac{9}{64}$; д) $\frac{45}{512}$. **1.37.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{1}{2}$. **1.38.** $\frac{1}{7^4}$. **1.39.** $\frac{1}{5}$. **1.40.** $\frac{14}{45}$. **1.41.** $\frac{25}{32}$.

1.42. $\frac{8}{13}$**.** **1.43.** $\frac{37}{45}$. **1.44.** $\frac{127}{289} \approx 0.4394$. **1.45.** а) 0.188; б) 0.452; в) 0.336; г) 0.976. **1.46.** а) 0.41; б) 0.55; в) 0.91. **1.47.** а) 0.4372; б) 0.3864; в) 0.9856. **1.48.** а) 0.2221; б) 0.4559; в) 0.2887; 0.9667. **1.49.** а) 0.0021; б) 0.0086; в) 0.6524. **1.50.** $\frac{1}{34 \cdot 77}$. **1.51.** а) $\frac{5}{21}$; б) $\frac{5}{42}$. **1.52.** $\frac{28}{15 \cdot 29}$. **1.53.** а) 0.2; б) $\frac{1}{15}$. **1.54.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{1}{12}$. **1.55.** а) $\frac{7}{45}$; б) $\frac{2}{15}$. **1.56.** $\frac{1}{45}$. **1.57.** 0.00056. **1.58.** а) $\frac{3!2!}{7!}$; б) $\frac{2^2 3^3}{7^7}$. **1.59.** $\frac{135}{8^4}$. **1.60.** а) $\frac{8}{243}$; б) $\frac{125}{729}$. **1.61.** $\frac{11}{14}$. **1.62.** $\frac{172}{187}$. **1.63.** 0.3^6. **1.64.** 0.36. **1.65.** $\frac{79}{95}$. **1.66.** $\frac{C_4^2 \cdot C_{28}^{16}}{2C_{36}^{18}}$. **1.67.** а) 0.3, 0.7; б) 0.09, 0.49; в) 0.51, 0.91. **1.68.** а) 0.45, 0.3; б) 0.405, 0.18; в) 0.945, 0.72. **1.69.** а) $\frac{1}{11^5}$; б) $\frac{1}{11^6}$; в) $\frac{6! \cdot C_{11}^6}{11^6}$. **1.70.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{5!}$; в) $\frac{19}{30}$. **1.71.** $\frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = 0{,}1962$**.** **1.72.** $1 - \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{5}{6}$**.** **1.73.** $\frac{21 \cdot 7}{C_{28}^2} = 0{,}39$**.** **1.74.** а) $\left(\frac{9}{10}\right)^8$; б) $\left(\frac{9}{10}\right)^8$; в) $\left(\frac{8}{10}\right)^8$; г) $2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^8 - \left(\frac{8}{10}\right)^8$=0.6932. **1.75.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{5}$. **1.76.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{15}$; в) $\frac{1}{3}$. **1.77.** $\frac{5}{56}$**.** **1.78.** $\frac{13}{15}$. **1.79.** $\frac{5}{14}$. **1.80.** $\frac{3}{28}$**.** **1.81.** $1 - \frac{2 \cdot C_4^3}{C_8^3} = \frac{6}{7}$**.** **1.82.** $\frac{3}{8}$. **1.83.** а) 0.01765; б) 0.01864. **1.84.** а) 0.518; б) 0.491. **1.85.** а) $\frac{C_{13}^3}{C_{15}^5} = \frac{2}{21}$; б) $3 \cdot \frac{C_{13}^3}{C_{15}^5} = \frac{2}{7}$; в) $3 \cdot \frac{1}{C_{15}^5}$; г) $\frac{3!}{C_{15}^5 \cdot C_{10}^5}$.

3. Умовна ймовірність та незалежність подій

1.86. Чи будуть незалежними події A і C в задачі 1.2?

1.87. Підкидають два гральних кубики. Введемо такі події: A= {кількість очок, що з’явилась на першому кубику, парна},

B= {сума очок, які з'явились на обох кубиках, парна},

C= {кількість очок, що з'явилась на першому кубику, ділиться на 4},

D= {сума очок, які з'явились на обох кубиках, ділиться на 4}.

Довести, що: а) події A і B незалежні; б) події C і D залежні.

1.88. Нехай $P(B)>0$ і виконується рівність $P\left(A/B\right)+P\left(\overline{A}\right)=1$. Довести, що події A і B незалежні.

1.89. Нехай $P(B)>0$ і $P\left(A/B\right)=P\left(A/\overline{B}\right)$. Довести, що події A і B незалежні.

1.90. Нехай події A і B несумісні і $P(A\cup B)>0$. Довести, що $P\left(A/A\cup B\right)=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

1.91. Нехай події A і B незалежні. Довести, що події $\overline{A}$ і B, A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ теж незалежні.

1.92. Вимірювальний прилад функціонує безвідмовно, коли безвідмовно працюють обидва блоки, що входять до його складу. Імовірність безвідмовної роботи k-го блока дорівнює $1-\alpha_k$ $(k=1,2)$. Знайти ймовірність того, що прилад працює безвідмовно, коли: а) поломки у блоках з'являються незалежно; б) про залежність між поломками блоків нічого не відомо.

1.93. Імовірність того, що деякий прилад космічного корабля вийде з ладу, дорівнює p. Скільки запасних приладів треба мати на кораблі, щоб імовірність безвідмовної роботи була не менша, ніж P?

1.94. Спрощена система контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. У результаті k-ї перевірки $(k=1,2)$ виріб, що задовольняє стандарт, відбраковується з імовірністю β_k, а бракований виріб признається придатним з імовірністю α_k. Виріб приймається, коли він пройшов обидві перевірки. Знайти ймовірності подій: а) A= {бракований виріб буде прийнято}; б) B= {виріб, що задовольняє стандарт, буде відбраковано}.

1.95. При одному циклі огляду РЛС, що стежить за космічним об'єктом, об'єкт буде виявлено з імовірністю p.

Виявлення об’єкта в кожному циклі відбувається незалежно від інших циклів. Проведено 5 циклів огляду. Знайти ймовірність того, що об’єкт буде виявлено?

1.96. Кожна з двох РЛС за один цикл огляду виявляє об’єкт незалежно від інших циклів і іншої РЛС з імовірністю p. За час спостереження кожна РЛС встигає зробити n циклів. Знайти ймовірності таких подій: а) A={об’єкт буде виявлено}; б) B={об’єкт буде виявлено кожною РЛС}.

1.97. Є 6 ракет, якими стріляють по цілі. Імовірність влучення кожної ракети в ціль дорівнює p, а влучення окремих ракет – незалежні події. Кожна ракета, яка влучила в ціль, вражає її з імовірністю p_1. Стріляють до знищення цілі або до витрати всіх ракет. Знайти ймовірність таких подій: а) A={всі ракети буде витрачено}; б) B={після знищення цілі залишиться не менше двох ракет}; в) C={буде витрачено не більше трьох ракет}.

1.98. РЛС веде спостереження за 3 цілями. За час спостереження i-та ціль може бути втрачена з імовірністю $p_i\left(i=1,2,3\right)$. Знайти ймовірність таких подій: а) A={жодна ціль не буде втрачена}; б) B={буде втрачена принаймні одна ціль}; в) C= {буде втрачено не більше однієї цілі}.

1.99. Нехай $P\left(A/B\right)=0{,}6$, $P\left(B/A\right)=0{,}8$, $P\left(A/\overline{B}\right)=0{,}1$. Обчислити $P\left(A\right)$.

1.100. Імовірність того, що при наборі номера телефона цифра буде набрана правильно, – однакова для всіх цифр і дорівнює p: а) знайти ймовірність правильного з’єднання при наборі шестизначного номера, якщо $p=0{,}98$; б) знайти значення p_1, при якому ймовірність правильного з’єднання при наборі семизначного номера буде не менша за 0.95.

1.101. По каналу зв’язку передають слово 11100. Імовірність перекручення кожної одиниці дорівнює $\frac{2}{5}$, нулі не перекручуються. Знайти ймовірність правильного приймання цього слова. Розв’язати цю ж задачу для слів 10010, 10111.

1.102. Під час передавання повідомлень телеграфом використовують код Морзе. Імовірність перекручення кожної точки при проходженні по каналу зв'язку дорівнює $\frac{1}{8}$, для тире ця ймовірність дорівнює $\frac{1}{5}$. Яка з комбінацій з більшою ймовірністю не буде перекручена: **...** або $--$?

1.103. Імовірність безвідмовної роботи кожної з ламп дорівнює 0.9. Знайти ймовірність безвідмовної роботи схем на рис. 1.22.

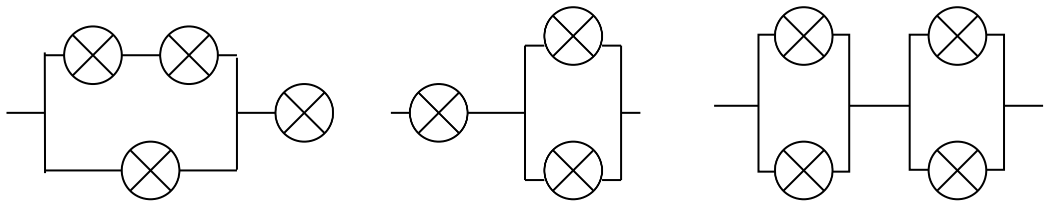


Рис. 1.22

1.104. З гаманця, у якому знаходяться 20 монет – 6 по 25 копійок і 14 по 5 копійок – беруть і повертають монети, поки не буде витягнута монета в 25 копійок. Знайти ймовірність таких подій: а) монета у 25 копійок витягнута першою; б) другою; в) монета у 25 копійок витягнута не раніше, ніж третьою.

1.105. Нехай A та B - події, що спостерігають у деякому експерименті, причому $P(A)=0.3, P(B/A)=0.4, P\left(B/\overline{A}\right)=0.2$. Знайти $P(B)$, $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$, $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$.

1.106. Кожну секунду з імовірністю p по дорозі проїжджає машина. Пішоходу потрібно 2 с, щоб перейти дорогу. Знайти ймовірність того, що пішохід, який підійшов до дороги буде очікувати: а) 2 с; б) 3 с; в) 4 с.

1.107. Знайти ймовірність події A у задачі 1.3.

1.108. Прилад складається з 6 блоків, які виходять з ладу незалежно один від одного з ймовірністю p. Знайти імовірність безвідмовної роботи приладу, схема якого подана на рис. 1.23.

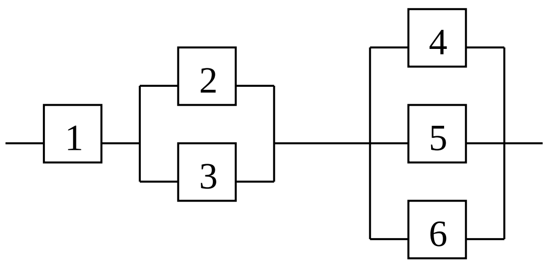


Рис. 1.23

Відповіді

1.92. а) $(1-\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)$; б) $\geq 1-\alpha_1-\alpha_2$. **1.93.** $\geq\left\lfloor \frac{ln(1-P)}{ln(1-p)} \right\rfloor+1$.

1.94. а) $\alpha_1\cdot\alpha_2$; б) $1-(1-\beta_1)\cdot(1-\beta_2)$. **1.95.** $1-(1-p)^5$.

1.96. а) $1-\left(\left(1-p\right)^n\right)^2$; б) $(1-(1-p)^n)^2$. **1.97.** а) $P(A)=(1-p_1p)^5$; б) $P(B)=1-(1-p_1p)^4$; в) $P(C)=3pp_1-3p_1^2p^2+p_1^3p^3$.

1.98. а) $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$; б) $1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$; в) $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)+p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+$ $+(1-p_1)(1-p_2)p_3$. **1.99.** 0.3. **1.100.** а) $(0{,}98)^6=0.8858$; б) $p\geq 0.9927$.

1.101. $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$. **1.102.** комбінація…

1.103. а) 0.8829; б) 0.891; в) 0.9801. **1.104.** а) 0.3; б) 0.21; в) 0.49.

1.105. $P(B)=0.26$; $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.56$; $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0.88$.

1.106. а) $p(1-p)^2$; б) $p^2(2-p)(1-p)^2$; в) $p^2\left(1+p-p^2\right)(1-p)^2$.

1.107. $\frac{31}{32}$. **1.108.** $p^3(2-p)\left(3-3p+p^2\right)$.

4. Формули повної ймовірності і Байєса

1.109. В одній урні 3 білих і 5 чорних куль, у другій – 2 білих і 7 чорних. З навмання вибраної урни витягнена куля. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

1.110. З урни, у якій є 3 білих і 5 чорних куль, витягають одну за одною без повернень 2 кулі. Знайти ймовірність того, що: а) обидві кулі одного кольору; б) друга куля – чорна; в) друга куля – біла.

1.111. Урна містить 5 чорних і 3 червоних кулі. Навмання з урни витягається куля, вона повертається в урну та додаються ще 2 кулі того самого кольору. Після цього з урни витягається куля. Знайти ймовірність того, що це: а) чорна куля; б) червона куля.

1.112. У першій урні 3 білих і 5 чорних куль, у другій – 2 білих і 7 чорних. З обох урн витягнені по кулі. Знайти ймовірність того, що: а) усі витягнені кулі одного кольору; б) серед витягнених куль не більше однієї чорної.

1.113. У першій урні 3 білих і 5 чорних куль, у другій – 2 білих і 7 чорних. Дві кулі можуть бути витягнені з рівною ймовірністю одним з трьох способів: обидві з першої, обидві з другої, по одній з кожної. Знайти ймовірність того, що: а) обидві кулі одного кольору; б) серед витягнених куль не більше однієї чорної.

1.114. Розв'язати задачу 1.113 за умови, що урна, з якої виймається кожна з двох куль, визначається жеребкуванням: кидається монета, і якщо випаде герб, то куля виймається з першої урни, якщо випаде ціна – з другої.

1.115. У групі з 25 стрільців є 6 чудових, 12 добрих і 7 посередніх стрільців. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі для чудового стрільця є 0.9, для доброго – 0.75, для посереднього – 0.4. Знайти ймовірність того, що: а) навмання обраний стрілець влучить у ціль; б) 2 навмання обраних стрільця влучать у ціль.

1.116. З 7 стрільців 3 влучають у ціль з імовірністю 0.6, а 4 – з імовірністю 0.45: а) який наслідок більш імовірний: влучить у ціль навмання обраний стрілець або ні; б) навмання обраний стрілець влучив у ціль. Що ймовірніше: належить він до перших трьох або чотирьох останніх?

1.117. У першому ящику є 7 стандартних і 3 бракованих деталі, у другому – 5 стандартних і 5 бракованих. З навмання обраного ящика обирають навмання 2 деталі. Знайти ймовірність того, що вони обидві стандартні.

1.118. Маємо 5 монет. При цьому одна з них має герб з двох боків, а решта є звичайними монетами. Навмання береться одна монета та підкидається 5 разів, а герб при цьому з’явився 5 разів. Знайти ймовірність того, що була обрана монета з двома гербами.

1.119. У 3 урнах містяться білі та чорні кулі. У 1-й 3 білі та 4 чорні кулі, у 2-й – 3 білі та 3 чорні, у 3-й – 4 білі та 3 чорні кулі. З 1-ї урни навмання перекладено кулю до 2-ї. Після цього кулю з 2-ї урни навмання перекладено до 3-ї. Нарешті з 3-ї урни кулю навмання перекладено до 1-ї урни: а) який склад куль у 1-й урні є найбільш ймовірним; б) знайти ймовірність того, що в кожній урні склад куль залишиться без змін.

1.120. Є 2 урни. У першій 5 білих і 4 чорних куль, у другій 4 білих і 7 чорних. З першої урни навмання перекладають до другої 2 кулі, а потім з другої урни виймають одну кулю. Який склад перекладених куль є найбільш ймовірним, якщо куля, вийнята з другої урни, виявиться білою?

1.121. Батарея з 3 гармат зробила залп, причому 2 снаряди влучили в ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата влучила в ціль, якщо ймовірності влучення для першої, другої та третьої гармат відповідно дорівнюють 0.4, 0.3, 0.5.

1.122. Троє стрільців зробили постріли по мішені, але влучив тільки один. Імовірність влучення для кожного з них відповідно дорівнює 0.3, 0.5, 0.7. Знайти ймовірність того, що 3-й стрілець влучив у мішень.

1.123. Прилад складається з 3-х вузлів. Імовірність безвідмовної роботи кожного з них за час T відповідно дорівнює 0.6, 0.7, 0.8. Відмови вузлів незалежні один від одного. Коли минув час T, з'ясувалося, що два вузли відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили 1-й і 2-й вузли.

1.124. З 25 студентів, які прийшли на іспит, 8 підготовлені чудово, 7 – добре, 6 – задовільно та 4 – незадовільно. В екзаменаційних білетах 50 питань. Студент, який підготувався відмінно, знає усі питання, добре – 40 питань, задовільно – 25 питань, незадовільно – 10 питань. Деякий студент цілком відповів на усі 3 питання білета. Знайти ймовірність того, що він підготовлений: а) відмінно; б) добре; в) задовільно; г) незадовільно.

1.125. Телеграфне повідомлення складається з сигналів "точка" та "тире". Імовірність перекручення "точки" $\frac{2}{5}$, а "тире" $\frac{1}{3}$. При передачі сигналів "точка" і "тире" зустрічаються у відношенні 5:3. Знайти ймовірність того, що прийнятий сигнал є "тире", якщо відомо, що він прийнятий правильно.

1.126. У першій урні 5 білих і 4 чорних кулі, у другій – 3 білих і 2 чорних. З кожної урни навмання витягують по одній кулі та перекладають у третю, порожню, урну. Знайти ймовірність того, що куля, взята навмання з третьої урни, виявиться чорною.

1.127. Одна з друкарок надрукувала $\frac{1}{3}$ тексту, друга – $\frac{2}{5}$, а третя – решту. Імовірність безпомилкового друкування для 1-ї, 2-ї, 3-ї друкарки дорівнює відповідно 0.8, 0.7, 0.9. У навмання взятій сторінці тексту виявилась помилка. Яка друкарка найімовірніше за все зробила помилку?

1.128. У першій урні є 2 білих та 11 чорних куль, у другій 7 білих і 4 чорних кулі. З кожної урни витягнуто випадково по одній кулі, а кулі, що залишилися, зсипали у третю (порожню) урну. Знайти ймовірність того, що куля, витягнута з третьої урни виявиться білою.

1.129. У скриньку, що містить 3 кулі, покладено білу кулю. Після цього з неї навмання витягнуто одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою, якщо будь-які припущення відносно початкової кількості білих куль у скриньці рівноймовірні.

1.130. Куля, що лежить в урні, з рівною ймовірністю є білою або чорною. У цю урну кладуть білу кулю і після перемішування навмання дістають одну кулю. Вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що в урні залишилась біла куля?

1.131. При переливанні крові треба враховувати групу крові донора та хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або тієї самої групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33.7 % мають першу, 37.5 % – другу, 20.9 % – третю, 7.9 % – четверту групу крові. Знайти ймовірність того, що випадково обраному хворому можна перелити кров: а) випадково обраного донора; б) випадково обраних 2-х донорів; в) випадково обраних 3-х донорів.

1.132. У першому ящику є 4 стандартних і 3 бракованих деталі, у другому – одна стандартна. З першого ящика навмання беруть 3 деталі та перекладають їх у другий. Навмання взята деталь з другого ящика виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що з першого в другий ящик перекладено 3 браковані деталі.

1.133. Знайти ймовірність безвідмовної роботи схеми освітлення, яка зображена на рис. 1.24, при вказаних імовірностях безвідмовної роботи ламп. Окремо розглянути випадки: $p_1 = 0;\ p_1 = 1;\ p_1 = p_0$.

Вказівка: Можна обрати такі системи гіпотез або H_0, H_1, H_2: H_0 - лампи 1 і 2 справні, H_1 - лампа 1 справна, лампа 2 несправна, H_2 - лампа 1 несправна, лампа 2 справна; або H_0, H_1: H_0 - лампа 5 справна, H_1 - лампа 5 несправна.

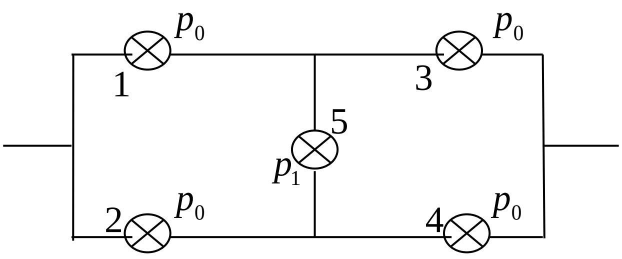


Рис. 1.24

1.134. Відсутність сигналу від будь-якої з трьох систем телеметрії, що контролюють стан супутника, може бути викликано або відмовою самої системи телеметрії (імовірність $p_1 = p_2 = 0.1, p_3 = 0.12$), або заглушенням сигналу перешкодами (імовірності $q_1 = 0.05, q_2 = q_3 = 0.08$). Знайти ймовірність відсутності сигналу від обраної навмання системи телеметрії.

1.135. З 5 білетів, що залишилися для 2 студентів наприкінці іспиту, один більш переважний за інші. Студент стверджує, що послідовність заходу до аудиторії треба розіграти жеребкуванням (наприклад, шляхом підкидання монети) тому, що в останнього може не бути можливості вибрати бажаний білет. Перевірити, справедливо чи ні це затвердження, – порівняти ймовірність витягнути більш переважний білет без додаткового жеребкування та з ним.

1.136. У першій урні 3 білих і 5 чорних куль, у другій – 2 білих і 7 чорних. З навмання обраної урни витягнена куля, яка виявилася чорною. Яка ймовірність того, що вона була витягнена з першої урни?

1.137. З урни, у якій знаходились 3 білих і 5 чорних куль, по черзі були витягнуті 2 кулі, причому друга куля виявилась чорною. Яка ймовірність того, що перша витягнута куля була: а) чорною; б) білою?

1.138. З умов задачі 1.111 знайти ймовірність того, що перша вийнята куля була чорною, якщо іншим разом була витягнута: а) чорна куля; б) червона куля.

1.139. Для контролю великої партії конденсаторів використовувався метод, при якому справний конденсатор визнається придатним з імовірністю 0.9, а пошкоджений бракується з імовірністю 0.75. Знайти ймовірність того, що конденсатор, який пройшов контроль, справний, якщо в партії, що перевіряється, було 15 % браку.

1.140. Імовірність перекручення одиниці, що передається по каналу зв'язку, дорівнює 0.1, нуля – 0.2. Відомо, що при передачі "слова" 1010001 перекручено один символ. Знайти ймовірність того, що був перекрученим нуль.

1.141. При передачі телеграфним кодом тире перекручується з імовірністю 0.08, точка – з імовірністю 0.15. У "слові" - - .. -, що передавалось, відбулося два перекручення. Що ймовірніше – перешкоджено два однакових або два різних символи?

1.142. Відсутність сигналу від однієї з трьох систем телеметрії, що контролюють супутник, може бути викликана або відмовою самої системи телеметрії (імовірності $p_i\ (i=1,2,3)$), або заглушенням сигналу перешкодами (імовірності $q_i\ (i=1,2,3)$). Одержано сигнал тільки від однієї системи. Яка ймовірність того, що це перша система, якщо $p_1=p_2=0.1,\ p_3=0.12,\ q_1=0.05,\ q_2=q_3=0.08$?

1.143. Імовірності проходження сигналу по каналах триканальної системи зв'язку дорівнюють відповідно 0.8, 0.7, і 0.9. Сигнал пройшов по двох каналах. Яка ймовірність того, що це перший і другий канал?

1.144. Сигнал, що надходить на вхід приймача, може бути або сумішшю корисного сигналу і перешкоди (з імовірністю p), або тільки перешкодою. Імовірність того, що амплітуда перешкоди перевищить величину порога чутливості приймача, дорівнює $2/5$, для суміші корисного сигналу і перешкоди ця ймовірність дорівнює $4/7$: а) приймач прийняв якийсь сигнал. Знайти ймовірність того, що, крім перешкоди, був прийнятий і корисний сигнал, якщо $p=3/5$; б) при якому значенні p ця ймовірність більша за $1/2$?

1.145. При передачі по каналу зв'язку символ "0" може через перешкоди перейти в "1" з імовірністю $p_{01}=0.3$; для символу "1" відповідна ймовірність p_{10} дорівнює 0.4. Відомо, що повідомлення, які передаються, утримують у середньому 40 % одиниць і 60 % нулів. Які ймовірності подій, що полягають у тому, що: а) передавали одиницю, якщо прийнята одиниця; б) передавали нуль, якщо прийнято нуль?

1.146. Імовірність влучення в мішень, яка після влучення забирається, при одному пострілі в першого, другого і третього стрільців дорівнює, відповідно $2/5$, $3/7$ і $4/9$. Відомо, що навмання обраний стрілець влучив у мішень трьома пострілами. Знайти ймовірність того, що це перший стрілець.

1.147. Сигнал може з однаковою ймовірністю передаватися по будь-якому з 3 каналів, при цьому він перекручується в першому, другому і третьому каналі з імовірністю відповідно 0.1, 0.15 і 0.2. Відомо, що по якомусь з каналів сигнал пройшов без перешкод. Знайти ймовірність того, що по цьому ж каналу пройде без перешкод ще один сигнал.

1.148. Імовірність того, що аркуш паперу знаходиться в столі, дорівнює p, причому він з однаковою ймовірністю може знаходитися в будь-якій з 8 шухляд столу. Перевірили 7 шухляд стола, але аркуш не виявлено. Яка ймовірність того, що аркуш знаходиться у восьмій шухляді?

1.149. По цілі, що складається з двох різноманітних за уразливістю частин, зроблено 3 незалежних постріли з імовірністю влучення при кожному $p = 0.7$. Ціль уражена. Для ураження цілі достатньо одного влучення в першу частину або двох влучень у другу. При влученні снаряда в ціль він із імовірністю $p_1 = 0.4$ влучає в першу частину і з імовірністю $1 - p_1 = 0.6$ у другу. Яка ймовірність того, що ураження цілі відбулося тільки внаслідок влучення у другу частину?

1.150. Повідомлення з рівними ймовірностями можуть бути передані по будь-якому з двох каналів зв'язку. Імовірність викривлення повідомлення при передачі по першому каналу дорівнює 0.1, а по другому – 0.15. Навмання обрано канал і по ньому передано 3 повідомлення, жодне з яких не викривлено. Знайти ймовірність того, що і четверте повідомлення, яке передано по тому самому каналу, не буде викривлено.

Відповіді

1.109. $\frac{43}{144}$. **1.110.** а) $\frac{13}{28}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{3}{8}$. **1.111.** а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{3}{8}$. **1.112.** а) $\frac{41}{72}$; б) $\frac{37}{72}$. **1.113.** а) 0.5483; б) 0.5244. **1.114.** а) 0.5536;

б) 0.5218; **1.115.** а) 0.688; б) 0.4718. **1.116.** а) імовірніше, що влучить; б) імовірності однакові. **1.117.** $\frac{31}{90}$. **1.118.** $\frac{8}{9}$. **1.119.** а) 3 білих і 4 чорних, 0.5; б) 0.3163. **1.120.** перекласти білу та чорну кулю. **1.121.** $\frac{20}{29}$. **1.122.** 0.6203. **1.123.** 0.5106. **1.124.** а) 0.7185; б) 0.2490; в) 0.0322; г) 0.0003. **1.125.** $\frac{2}{5}$. **1.126.** $\frac{19}{45}$. **1.127.** друга. **1.128.** 0.3732. **1.129.** $\frac{5}{8}$. **1.130.** $\frac{2}{3}$. **1.131.** а) 0.5737; б) 0.7777; в) 0.8733. **1.132.** $\frac{1}{95}$. **1.133.** $p_0^2(2+2p_1-p_0^2-4p_1p_0+2p_1p_0^2)$; $p_0^2\left(2-p_0^2\right)$; $p_0^2\left(2-p_0\right)^2$; $p_0^2\left(2+2p_0-5p_0^2+2p_0^3\right)$. **1.134.** 0.1691. **1.135.** імовірність не змінюється. **1.136.** $\frac{45}{101}$. **1.137.** а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{3}{7}$. **1.138.** а) 0.7; б) 0.5. **1.139.** $\frac{102}{107}$. **1.140.** $\frac{1}{4}$. **1.141.** два різних (0.6311). **1.142.** 0.3938. **1.143.** 0.141. **1.144.** а) $\frac{15}{22}$; б) $\geq\frac{7}{17}$. **1.145.** а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{21}{29}$. **1.146.** 0.3420. **1.147.** 0.8520. **1.148.** $\frac{p}{8-7p}$. **1.149.** 0.2708. **1.150.** 0.8771.

5. Схема повторних незалежних випробувань

1.151. Монета була підкинута 8 разів. Знайти ймовірність подій, які полягають у тому, що: а) герб випав 4 рази; б) герб випав не менше 2 раз; в) кількість випадань герба ділиться на 3.

1.152. Стрілець влучає в десятку з імовірністю 0,7. Яка ймовірність подій, які полягають у тому, що у серії з 10 пострілів відбудеться: а) 8 десяток; б) не менше 8 десяток; в) не менше 2 десяток.

1.153. Стрілець влучає в мішень при одному пострілі з імовірністю 0,6. Знайти ймовірність подій, які полягають у тому, що на 5 пострілів припадає: а) три влучення; б) не менше трьох влучень; в) хоча б одне влучення.

1.154. Імовірність відмови будь-якої з 8 однакових мікросхем у блоці дорівнює 0,02. Знайти ймовірність подій, які полягають у тому, що: а) усі мікросхеми справні; б) відмовило не більше двох мікросхем.

1.155. Кожен з символів 0 та 1 слова, яке містить 8 символів, перекручується незалежно від інших з імовірністю 0,15. Знайти ймовірність подій, які полягають у тому, що: а) перекручено 3 символи; б) перекручено не більше 2 символів.

1.156. Імовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних випробувань 0.9. Скільки треба провести випробувань, щоб найімовірніша кількість появ події A дорівнювала 36.

1.157. Є 4 урни. У трьох по 8 білих і 2 чорних кулі, четверта – порожня. З кожної урни навмання обирають по одній кулі та перекладають у четверту. Знайти ймовірність того, що навмання обрана з четвертої урни куля виявиться білою.

1.158. Імовірність влучення в літак зенітної гармати при одному пострілі дорівнює 0.001. Зроблено 500 пострілів. Знайти: 1) імовірності одного, двох, принаймні одного влучення у ціль; 2) чому дорівнює ймовірність промаху по цілі.

1.159. Яке значення повинна мати ймовірність виготовлення стандартної деталі, якщо при контролі 300 деталей найімовірніша кількість стандартних деталей виявилась рівною 200?

1.160. Студент виконує контрольну роботу в комп'ютерному класі. Робота складається з 3 задач. Для отримання доброї оцінки потрібно знайти правильні відповіді не менш, ніж на 2 задачі. Для кожної задачі додаються 5 різних відповідей, з яких тільки одна є правильною. Студент вибирає відповіді навмання. Яка ймовірність того, що він одержить добру оцінку?

1.161. Імовірність влучення в літак зенітної гармати при одному пострілі дорівнює 0.002. Скільки треба зробити пострілів, щоб імовірність влучення в літак стала: а) більше 0.7; б) більше 0.9?

1.162. Скільки раз треба підкинути два гральні кубики, щоб імовірність випадання двох шестірок стала більше 0.8?

1.163. По каналу зв'язку треба передати повідомлення з 10 символів 0 та 1. Кожен символ перекручується незалежно від інших з імовірністю 0,45. Для підвищення ймовірності правильної передачі кожний символ повідомлення повторюють п'ять разів. Вважають, що п'яти прийнятим символам відповідає у повідомленні той, який складає серед прийнятих більшість. Знайти ймовірність того, що повідомлення буде правильно прийнято на приймальному кінці каналу.

1.164. Відмова будь-якої з 10^5 деталей системи управління ракетою під час старту призводить до аварії. Кожна з деталей може відмовити незалежно від інших з імовірністю p. Знайти: а) імовірність вдалого пуску при $p=10^{-6}$; б) яким повинно бути значення p, щоб імовірність вдалого пуску була не менша за 0,95.

1.165. У партії з 1000 тріодів є 15 бракованих. Для контролю взято навмання 50 тріодів. Знайти ймовірність того, що серед них: а) нема бракованих; б) кількість бракованих тріодів менше 2.

1.166. По каналу зв'язку передають 1000 символів. Кожний символ може бути перекручений незалежно від інших з імовірністю 0,005. Знайти ймовірність того, що буде перекручено не більше 3 символів.

1.167. З великої партії конденсаторів, яка має 5 % браку, випадковим чином обираються для монтажу приладу 60 конденсаторів. Знайти ймовірність того, що серед обраних конденсаторів будуть: 1) три бракованих; 2) більше, ніж два бракованих.

1.168. n куль розподілено по m урнам таким чином, що кожна куля може з однаковою ймовірністю потрапити в будь-яку урну. Знайти ймовірність того, що в першій урні знаходиться точно одна куля, якщо: а) $n=6, m=4$; б) $n=12, m=8$; в) $n=150, m=100$. Розв'язати поставлену задачу за допомогою формули Пуассона, порівняти результати.

1.169. Оцінити ймовірність того, що кількість випадань одиниці після 12000 підкидань кубика лежить між: а) 1970 та 2030; б) 1990 та 2040; в) 1960 та 2000.

1.170. Здійснюється 600 підкидань кубика. Імовірність того, що кількість шісток, що випали, належить проміжку $[100-\Delta;100+\Delta]$, дорівнює 0,9. Знайти значення Δ.

1.171. Здійснюється серія з n незалежних випробувань, імовірність успіху при кожному з яких дорівнює $p=\frac{1}{6}$. Знайти, скільки треба провести випробувань n, щоб кількість успіхів m задовольняло нерівність

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|<0{,}1\right\}\geq 1-\varepsilon,$$

якщо: а) $1-\varepsilon=0{,}9$; б) $1-\varepsilon = 0{,}95$; в) $1-\varepsilon = 0{,}99$?

Відповіді

1.151. а) $C_8^4\cdot 2^{-8}$; б) $1-(1+C_8^1)\cdot 2^{-8}$; в) $(C_8^3+C_8^6)\cdot 2^{-8}$. **1.152.** а) $C_{10}^8\cdot(0.7)^8\cdot(0.3)^2$; б) $0.7^8\cdot(C_{10}^8\cdot 0.3^2+C_{10}^9\cdot 0.3\cdot 0.7+0.7^2)$; в) $1-0.3^9\cdot(0.3+\ +C_{10}^1\cdot 0.7)$. **1.153.** а) $C_5^3\cdot 0.6^3\cdot 0.4^2$; б) $0.6^3\cdot(C_5^3\cdot 0.4^2+C_5^4\cdot 0.6\cdot 0.4+0.6^2)$; в) $1-0.4^5$. **1.154.** а) 0.98^8; б) $0.98^6\cdot(C_8^6\cdot 0.02^2+C_8^7\cdot 0.98\cdot 0.02+0.98^2)$. **1.155.** а) $C_8^3\cdot 0.15^3\cdot 0.85^5$; б) $0.85^6\cdot\left(0.85^2+C_8^1\cdot 0.15\cdot 0.85+C_8^2\cdot 0.15^2\right)$. **1.156.** 40. **1.157** 0.8. **1.158.** 1) 0.3032,0.0758,0.3935;2)0.6065. **1.159.** $2/3$. **1.160.** $13/125$. **1.161.** а) $n\geq 602$; б) $n\geq 1152$. **1.162.** $n\geq 58$. **1.163.** 0.005386. **1.164.** а) 0.9048; б) $5.13\cdot 10^{-7}$. **1.165.** а) 0.4724; б) 0.8266. **1.166.** 0.2651. **1.167.** 1) 0.2240; 2) 0.5768. **1.168.** а) 0.3560; б) 0.3453; в) 0.3355, 0.3347. **1.169.** а) 0.5402; б) 0.4312; в) 0.3365. **1.170.** 15. **1.171.** а) 38; б) 54; в) 93.

Розділ 2
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. Одновимірні випадкові величини

2.1.1. Випадкова величина та її функція розподілу

Визначення 1. **Випадковою величиною** (скорочено ВВ) називається змінна величина, яка набуває значень, що залежать від наслідку експерименту. Заздалегідь, до проведення експерименту, визначити, яке значення прийме величина, неможливо.

Інакше кажучи, випадкова величина є числовою функцією, яка визначена на просторі елементарних подій Ω. ВВ дає змогу разом з простором Ω розглянути інший, більш простий, простір Ω_1, у якому елементарні події є значеннями випадкової величини (про це, по суті, йшлося в зауваженні до прикладу 5 п. 1.1.1).

Позначатися ВВ звичайно будуть великими літерами X, Y, Z латинського алфавіту, а їхні можливі значення – відповідними малими літерами x, y, z.

Наведемо кілька прикладів випадкових величин: 1) кількість пострілів до першого влучення в мішень; 2) кількість відмов приладу протягом майбутньої доби; 3) тривалість проміжку часу очікування трамвая або автобуса на зупинці; 4) можливий результат вимірювання деякої фізичної величини; 5) відстань від точки влучення в мішень до її центра.

Визначення 2. Функцією розподілу випадкової величини X називається задана на всій осі Ox функція, яка визначається співвідношенням

$$\boxed{F_X(x) = P\{X < x\} \quad (-\infty < x < +\infty).} \tag{2.1}$$

Відзначимо такі властивості функції розподілу:

1) $0 \le F_X(x) \le 1$ (імовірність довільної події належить відрізку [0;1]);

2) $F_X(-\infty) = 0$. ($F_X(-\infty) = P\{X < -\infty\}$, а подія $\{X < -\infty\}$ є неможливою);

3) $F_X(+\infty) = 1$. ($F_X(+\infty) = P\{X < +\infty\}$, а подія $\{X < +\infty\}$ є вірогідною);

4) $F_X(x)$ є неспадною функцією змінної x (якщо $c<d$, то подія $\{X<d\}$ є сумою несумісних подій $\{X<c\}$ і $\{c\le X<d\}$ (рис. 2.1) $\Rightarrow P\{X<d\} = = P\{X<c\} + P\{c \le X < d\} \ge P\{X<c\} \Rightarrow F_X(c) \le F_X(d)$);

5) функція $F_X(x)$ в довільній точці є неперервною зліва: $F(x-0) = F(x)$.

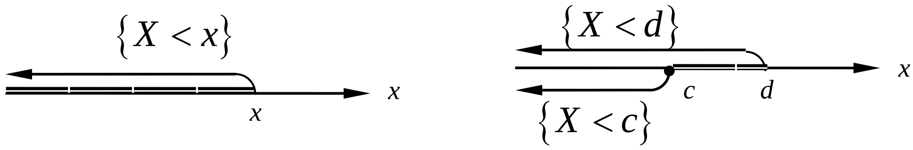


Рис. 2.1

Знаючи функцію розподілу, можна знайти ймовірність того, що випадкова величина попадає у проміжок $[c; d)$ (рис. 2.1)

$$\boxed{P\{X\in[c;d)\} = P\{X<d\} - P\{X<c\} = F_X(d) - F_X(c).} \qquad (2.2)$$

2.1.2. Дискретні випадкові величини

Визначення 3. ВВ X називається **дискретною**, якщо сукупність її можливих значень є скінченною ($x_1, x_2, ..., x_n$) або зліченною ($x_1, x_2, ..., x_n, ...$).

Прикладами дискретної ВВ є: 1) кількість деталей, що не задовольняють стандарт, серед обраних для контролю 100 деталей; 2) кількість викликів, що надійдуть на станцію швидкої допомоги за добу; 3) кількість перекручених символів у кодовій комбінації, яка передається по каналу зв'язку з перешкодами.

Набір імовірностей $P\{X = x_k\} = p_k$ ($k=1,2,..,n$) (або $k=1,2,...,n,...$) називають **розподілом** дискретної ВВ X, яка сконцентрована в точках x_k.

Якщо у проміжок $[c; d)$ потрапляють лише значення x_i, $x_{i+1}, ..., x_j$ ВВ X, то

$$\boxed{P\{X\in[c,d)\} = \sum_{k=i}^{j} p_k\, .} \qquad (2.3)$$

Дійсно, подія $X\in[c;d)$ є сумою попарно несумісних подій $\{X=x_i\}$, $\{X=x_{i+1}\}$, …, $\{X=x_j\}$. Тому на підставі формули (1.3) одержимо

$$P\{X\in[c,d)\}=P\{X=x_i\}+\ldots+P\{X=x_j\}=\sum_{k=i}^{j}p_k\,.$$

Із формули (2.3) випливають такі наслідки:

1) **умова нормування** –

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n(+\infty)}p_k=1} \qquad (2.4);$$

2) $\boxed{F_X(x)=\sum p_k}$, де знак суми стосується лише тих значень k, для яких $x_k < x$.

Звідси випливає, що значення функції розподілу дискретної ВВ у проміжку $(x_k;\,x_{k+1}]$ дорівнює $p_1+p_2+\ldots+p_k$. Точки розриву функції розподілу дискретної ВВ X співпадають з можливими значеннями x_k.

Величина стрибка в точці x_k дорівнює p_k: $F_X(x_k+0)-F_X(x_k)=p_k$. Графік функції розподілу дискретної ВВ X зображено на рис. 2.2.

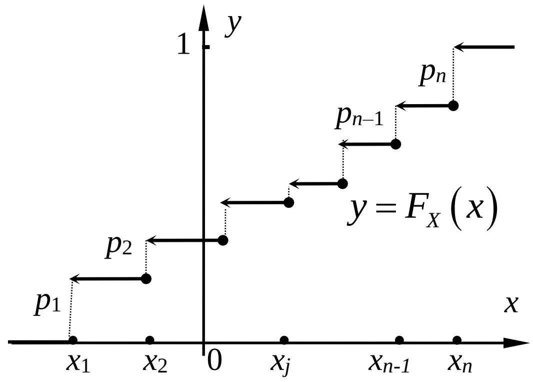


Рис. 2.2

Модою дискретної ВВ називають таке її можливе значення x_m, яке має найбільшу ймовірність $P\{X=x_m\}=p_m$.

Приклад 1. Дискретна ВВ X задається таблицею розподілу

X	-1	0	2	5
P	0.3	0.1	C	0.35

Знайти: 1) C; 2) $F_X(x)$; 3) $P\{X>-0.3\}$; 4) $P\{X\le 1.7\}$.

Розв'язання: 1) значення C знаходиться з умови нормування (2.4):

$$0.3+0.1+C+0.35=1 \;\Rightarrow C=0.25;$$

2) функцію розподілу знаходимо на основі наслідку 2, а її графік наведено на рис. 2.3

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1;\\ 0.3 & \text{при } -1<x\le 0;\\ 0.4 & \text{при } 0<x\le 2;\\ 0.65 & \text{при } 2<x\le 5;\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

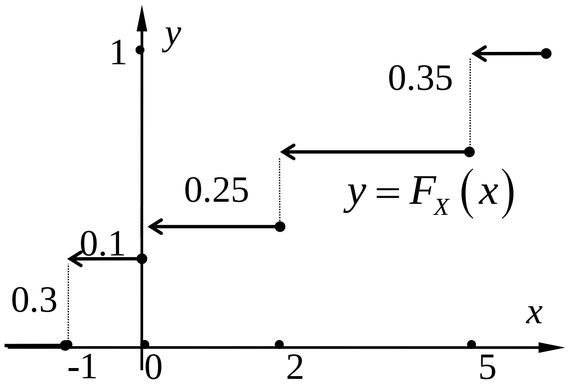


Рис. 2.3

3) $P\{X > -0.3\} = P\{X = 0\}+$
$+ P\{X = 2\}+ P\{X = 5\} = 0.7$;
4) $P\{X\le 1.7\} = P\{X = 0\} + P\{X = -1\} = 0.4$.

Приклад 2. Стрілець, який має m патронів, влучає в мішень з імовірністю p при кожному пострілі. Стрільба йде до першого влучення в мішень. Знайти закон розподілу кількості X витрачених патронів.

Розв'язання. Зрозуміло, що X набуває значення $1,2,\ldots, m-1,m$. Нехай подія A_i означає влучення в мішень при i-му пострілі. Тоді на підставі теореми множення для незалежних у сукупності подій одержимо

$$P\{X=k\}=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_{k-1}}\cdot A_k)=p(1-p)^{k-1}\ (k=1,\ldots,m-1),$$
$$P\{X=m\} = P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_{m-1}})=(1-p)^{m-1}.$$

Отже,

X	1	2	3	…	m-1	m
P	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	…	$p(1-p)^{m-2}$	$(1-p)^{m-1}$

Приклад 3. Стрілець, який має 4 патрони, влучає в мішень при кожному пострілі з імовірністю p. Стрільба йде до двох влучень у мішень. Знайти закон розподілу кількості X витрачених патронів, якщо відомо, що при першому пострілі стрілець влучив у мішень.

Розв'язання. Нехай подія A_i ($i=1,2,3,4$) означає влучення в мішень при i-му пострілі. Тоді

$$P\{X{=}2/A_1\}=\frac{P\{X=2,A_1\}}{P(A_1)}=\frac{P(A_1\cdot A_2)}{P(A_1)}=\frac{p^2}{p}=p,$$

$$P\{X{=}3/A_1\}=\frac{P\{X=3,A_1\}}{P(A_1)}=\frac{P(A_1\cdot \overline{A_2}\cdot A_3)}{P(A_1)}=\frac{p^2(1-p)}{p}=p(1-p),$$

$$P\{X{=}4/A_1\}=\frac{P\{X=4,A_1\}}{P(A_1)}=\frac{P(A_1\cdot \overline{A_2}\cdot \overline{A_3}\cdot A_4+A_1\cdot \overline{A_2}\cdot \overline{A_3}\cdot \overline{A_4})}{P(A_1)}=$$

$$=\frac{p^2(1-p)^2+p(1-p)^3}{p}=p(1-p)^2+(1-p)^3=(1-p)^2.$$

Отже,

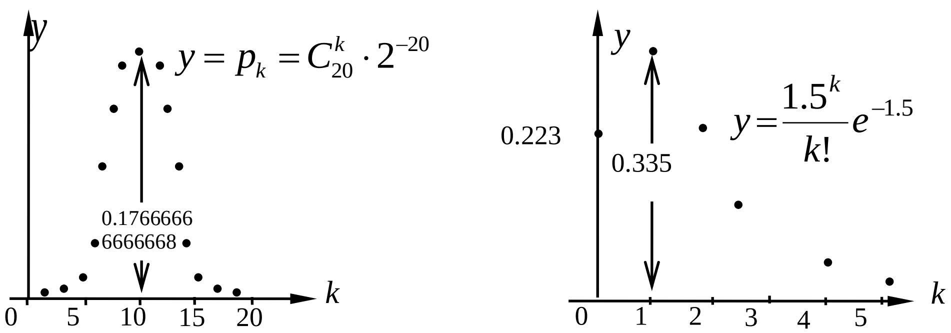
X	2	3	4
$P(X/\mathrm{A}_1)$	p	$p(1\text{-}p)$	$(1\text{-}p)^2$

Розглянемо кілька найбільш важливих дискретних розподілів.

1. **Біноміальний розподіл (розподіл Я. Бернуллі).** Випадкова величина X набуває значення $0,1,...,n$ і при цьому

$$\boxed{p_k=P\{X=k\}=C_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}\ (k=0,1,...,n),\ p\in(0;1)}. \qquad (2.5)$$

Біноміальний розподіл має ВВ, що дорівнює кількості появ події A у серії з n незалежних випробувань при ймовірності p її появи в кожному випробуванні. Графік біноміального розподілу при n=20, p=0.5 наведено на рис. 2.4, а.



а б

Рис. 2.4

Приклад 4. Для влучення в п’ять мішеней на вогневому рубежі біатлоніст отримав сім патронів. Імовірність влучення в кожну мішень при одному пострілі дорівнює 0.78. Знайти найбільш імовірну кількість невикористаних патронів, якщо відомо, що біатлоніст влучив в усі мішені.

Розв'язання. Позначимо через A_m подію, яка полягає в тому, що біатлоніст влучив у всі мішені та не використав m патронів. Тоді:

1) подія A_0 означає влучення в мішень при сьомому пострілі і влучення в чотири мішені при перших шести пострілах. Отже, за формулою (2.5) маємо: $P(A_0) = 0.78 \cdot C_6^4 \cdot (0.78)^4 \cdot (0.22)^2 = 0.2096$;

2) подія A_1 означає влучення в мішень при шостому пострілі і влучення в чотири мішені при перших п'яти пострілах. Тоді за формулою (2.5) маємо: $P(A_1) = 0.78 \cdot C_5^4 \cdot \left(0.78\right)^4 \cdot 0.22 = 0.3176$;

3) подія A_2 означає влучення в п'ять мішеней при перших п'яти пострілах. За формулою (2.5) маємо: $P(A_2) = (0.78)^5 = 0.2887$.

Отже, найбільш імовірна кількість невикористаних патронів дорівнює одиниці.

2. **Геометричний розподіл**. Випадкова величина X набуває значення 1,2,... і при цьому $p_k = P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1}$ $(k = 1,2,...)$.

Геометричний розподіл має ВВ, яка дорівнює кількості повторень випробування до першої появи події A при ймовірності p її появи в кожному випробуванні.

3. **Гіпергеометричний розподіл**

$$P\{X = l\} = \frac{C_m^l C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k},\ l = 0,1,...,min(k,m).$$

Такий розподіл має кількість X дефектних деталей серед k деталей, обраних з n деталей (див. приклад 34, п. 1.4.1).

4. **Розподіл Пуассона**. Випадкова величина X має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо вона набуває значення $k = 0,1,2,...$ з імовірностями

$$\boxed{p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ \lambda > 0.} \tag{2.6}$$

На підставі формули (1.15) кількість рідких подій має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = n \cdot p$. На рис. 2.4, б наведено графік розподілу Пуассона з параметром λ=1.5 (мода ВВ у цьому разі дорівнює 1).

Приклад 5. Кількість влучень метеоритів у супутник протягом проміжку часу тривалістю Δt *с* описується законом Пуассона з параметром $\lambda=\alpha\cdot\Delta t$, де $\alpha=10^{-7}$ c^{-1}. Пошкодження супутника влученням метеориту відбувається з імовірністю 0.05. Знайти ймовірність того, що за рік супутник не буде пошкоджено.

Розв'язання. Позначимо через A_k (k=0,1,…) подію, яка полягає в тому, що супутник не буде пошкоджено, якщо в нього влучає за рік k метеоритів. Оскільки $\alpha \cdot \Delta t = 10^{-7} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$=3.15, то на підставі формули (2.6) маємо

$$P(A_k) = p_k \cdot (0.95)^k = \frac{(\alpha \cdot \Delta t)^k}{k!} e^{-\alpha \cdot \Delta t} \cdot (0.95)^k = \frac{(3.15)^k}{k!} e^{-3.15} \cdot (0.95)^k .$$

Нехай подія A полягає в тому, що супутник не було пошкоджено за рік. Ця подія є сумою попарно несумісних подій A_k і, отже,

$$P(A) = e^{-3.15}[1 + 3.15 \cdot 0.95 + \frac{(3.15 \cdot 0.95)^2}{2!} + ...] = e^{-3.15} \cdot e^{3.15 \cdot 0.95} = e^{-3.15 \cdot 0.05} = 0.8543.$$

2.1.3. Неперервні випадкові величини

Визначення 4. Випадкова величина X називається **неперервною**, якщо ймовірність того, що вона набуває будь-якого можливого значення x_0, дорівнює нулю: $P\{X = x_0\} = 0$.

$P\{X=x_0\}=0$ не означає, що подія $X=x_0$ є неможливою (див. зауваження до аксіоми 3).

З цього визначення випливає, що множина значень неперервної ВВ є незліченною і співпадає з проміжком (кількома проміжками) числової осі.

При вивченні неперервної ВВ достатньо визначити ймовірність її потрапляння в довільний проміжок малої довжини.

Аналогія: маса окремої точки стержня дорівнює нулю, але маса відрізка стержня відмінна від нуля, хоча відрізок складається з окремих точок.

Прикладами неперервної ВВ є: 1) час безвідмовної роботи приладу; 2) похибка вимірювань; 3) відхилення розміру деталі від номіналу.

Визначення 5. Невід'ємна функція $p_X(x)$ називається **щільністю розподілу ймовірностей** (або **щільністю ймовірності**) ВВ X, якщо ймовірність потрапляння ВВ у довільний проміжок $[x_0; x_0+\Delta x)$ малої довжини Δx приблизно дорівнює $p_X(x_0)\cdot\Delta x$:

$$\boxed{P\{X\in[x_0; x_0+\Delta x)\} = p_X(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x),} \tag{2.7}$$

де $o(\Delta x)$, як звичайно, нескінченно мала вищого порядку мализни, ніж Δx.

Таким чином, число $p_X(x_0)\cdot\Delta x$ характеризує частку тих випробувань у досить довгій серії, у яких ВВ X потрапляє у проміжок $[x_0; x_0+\Delta x)$.

Щільність імовірності $p_X(x)$ ВВ X має розмірність, обернену до розмірності X.

За допомогою щільності ймовірності $p_X(x)$ можна знайти ймовірність потрапляння ВВ X у довільний проміжок.

Теорема. Імовірність потрапляння неперервної випадкової величини X у проміжок $[c; d)$ знаходиться за формулою

$$\boxed{P\{X\in[c;d)\} = \int_c^d p_X(x)dx\,.} \tag{2.8}$$

Для доведення формули (2.8) потрібно розбити проміжок $[c; d)$ на велику кількість проміжків $[x_k; x_{k+1})$ малої довжини Δx_k (проміжки не перетинаються). Імовірність потрапляння ВВ X у проміжок $[x_k; x_{k+1})$ на підставі формули (2.7) приблизно дорівнює $p_X(x_k)\Delta x_k$. Підсумовуючи ці ймовірності і переходячи до границі при $max\,\Delta x_k \to 0$,одержимо формулу (2.8).

Геометричний зміст теореми (площа криволінійної трапеції) дає рис. 2.5. У лівій частині формули (2.8) можна замінити проміжок $[c; d)$ на $[c; d]$, $(c; d)$.

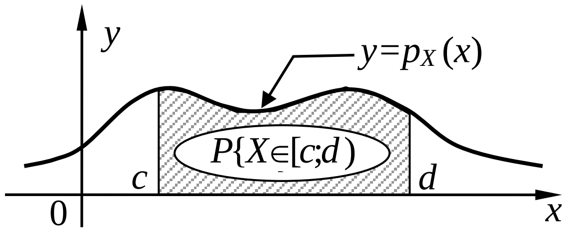


Рис. 2.5

Із співвідношення (2.8) випливають такі наслідки:

1) **умова нормування –**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,dx = 1}, \tag{2.9}$$

яка означає, що площа під кривою з рівнянням $y = p_X(x)$ і віссю $0x$ дорівнює одиниці;

2) $$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\,dt}. \tag{2.10}$$

Функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною кусково-гладкою функцією. Її характерний вигляд наведено на рис. 2.6.

У точках неперервності функції $p_X(x)$ виконується рівність

$$\left(F_X(x)\right)' = p_X(x).$$

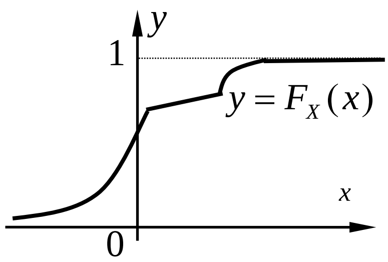


Рис. 2.6

Модою неперервної ВВ називають довільну точку максимуму щільності ймовірності $p_X(x)$. Розподіли з однією модою називають **одномодальними**.

Визначення 6. Квантилем, який відповідає заданому рівню ймовірності p, називається таке значення x_p випадкової величини X, що

$$\boxed{F_X\left(x_p\right) = P\left\{X < x_p\right\} = p}.$$

Для неперервної ВВ для довільного рівня $p \in (0\,;1)$ існують квантилі x_p.

Квантиль $x_{1/2}$ називається **медіаною** випадкової величини *X*.

Приклад 6. Щільність імовірності неперервної ВВ *X* має вигляд

$$p_X(x) = \begin{cases} Cx^3, \text{ якщо } & x \in [0;1]; \\ 0 \ , \text{ якщо } & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Знайти: 1) C; 2) $F_X(x)$; 3) $P\{X \in [1/3;\, 4]\}$; 4) квантиль $x_{4/9}$.

Розв'язання: 1) коефіцієнт C знаходимо з умови нормування

$$\int_0^1 Cx^3 dx = C\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{C}{4} = 1 \ \Rightarrow \ C = 4\,;$$

2) $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \int_0^x 4t^3 dt = x^4 & \text{при } x \in [0;1]; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

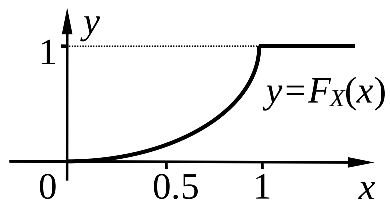


Рис. 2.7

Графік функції розподілу наведено на рис. 2.7.

3) $$P\left\{X \in \left[\frac{1}{3};4\right]\right\} = P\left\{X \in \left[\frac{1}{3};1\right]\right\} = F_X(1) - F_X\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}.$$

4) $$F_X\left(x_{4/9}\right) = 4/9 \Leftrightarrow \left(x_{4/9}\right)^4 = 4/9 \Leftrightarrow x_{4/9} = \sqrt{2/3} \approx 0.8165.$$

Розглянемо деякі найбільш важливі неперервні розподіли.

1. Рівномірний (прямокутний) розподіл. Випадкова величина *X* рівномірно розподілена у проміжку $[c\,;d]$, якщо її щільність імовірності має вигляд (рис. 2.8, а)

$$\boxed{p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c} & \text{при } x \in [c;d]; \\ 0 & \text{при } x \notin [c;d]. \end{cases}} \qquad (2.11)$$

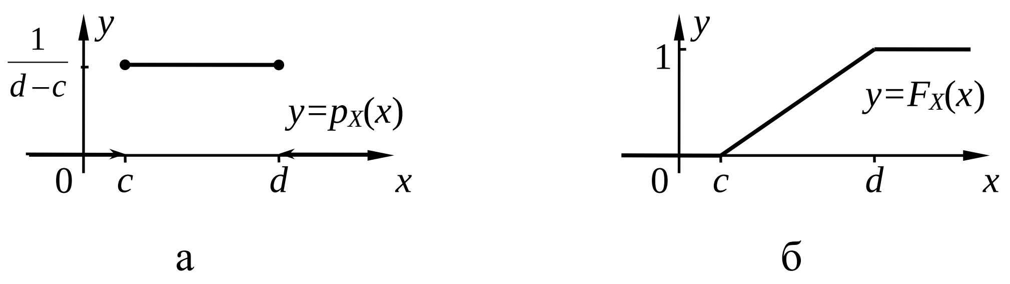


Рис. 2.8

Цей розподіл є неперервним аналогом класичного визначення ймовірності (відповідає припущенню про рівноможливий вибір точки у проміжку $[c;d]$). Дійсно, нехай $[c_1;d_1]\subset[c;d]$. Тоді $P\{X \in [c_1;d_1]\} = \int_{c_1}^{d_1} \frac{1}{d-c}dx = \frac{d_1-c_1}{d-c}$.

Графік функції розподілу наведено на рис. 2.8, б.

Якщо шкала приладу має ціну поділки Δ і відлік робиться з точністю до цілої поділки шкали, то похибка вимірювання є неперервною випадковою величиною, яка рівномірно розподілена у проміжку $[-0.5\Delta\,;\,0.5\Delta]$.

Помилка, яка допускається при округленні числа з точністю до 10^{-m}, рівномірно розподілена у проміжку $[-0.5\cdot10^{-m}\,;\,0.5\cdot10^{-m}]$.

Приклад 7. Шкала має ціну поділки один градус. Знайти ймовірність похибки в межах 10 хвилин, якщо відлік округляється до найближчої поділки шкали.

Розв'язання. Оскільки похибка рівномірно розподілена у проміжку [–30;+30] хвилин, то шукана ймовірність дорівнює $\frac{10-(-10)}{30-(-30)} = \frac{1}{3}$.

2. Показниковий розподіл. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром $\lambda>0$, якщо її щільність розподілу

$$\boxed{p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\cdot 1(x)}, \qquad (2.12)$$

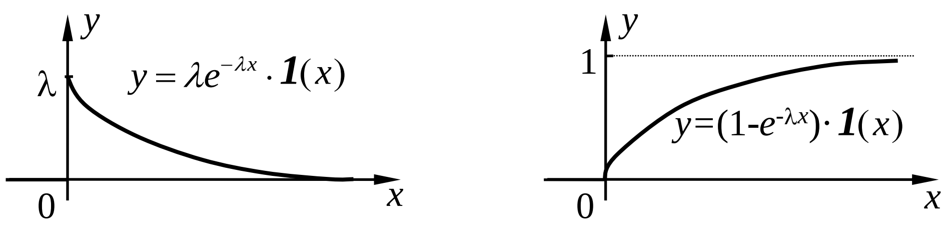
де $\boldsymbol{1}(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x<0, \\ 1, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$ – так звана одинична функція.

Відповідна функція розподілу має на підставі формули (2.10) вигляд

$$F_X(x) = P\{X < x\} = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0) .$$

Таким чином, $P\{X \geq h\} = 1 - P\{0 \leq X < h\} = 1 - F_X(h) = 1 - (1 - e^{-\lambda h}) = e^{-\lambda h}$.

Графіки щільності ймовірності та функції розподілу наведені на рис. 2.9, а, б.



а б

Рис. 2.9

У теорії масового обслуговування (див. п. 3.4.1.1) припускається, що час обслуговування $T_{обсл}$ підкоряється показниковому закону $p_{T_{обсл}}(t) = \mu e^{-\mu t} (\mu > 0)$.

Приклад 8. Нехай кількість відмов приладу на проміжку часу $[0\,;t)$ розподілена за законом Пуассона з параметром λt

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \ (k = 0,1,2,\ldots) ,$$

а ВВ T – тривалість проміжку часу між двома послідовними відмовами приладу (рис. 2.10). Знайти закон розподілу ВВ T.

Розв'язання. Оскільки подія $T \geq t$ означає, що на проміжку $[0\,;t)$ прилад працює безвідмовно, то $P\{T \geq t\} = p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

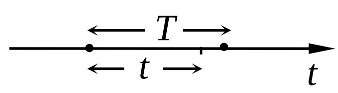


Рис. 2.10

Отже,

$$F_T(t)=P\{T<t\}=1-P\{T\geq t\}=1-e^{-\lambda t}$$

і, таким чином,

$$p_T(t)=\frac{dF_T(t)}{dt}=\lambda e^{-\lambda t} \quad (t\geq 0).$$

Звідси випливає, що тривалість проміжку часу між двома послідовними відмовами приладу розподілена за показниковим законом з параметром λ.

Приклад 9. Нехай тривалість T безвідмовного функціонування приладу розподілена за показниковим законом

$$p_T(t)=\lambda\, e^{-\lambda t} \quad (t\geq 0).$$

Відомо, що прилад безвідмовно функціонував протягом часу t_1. Знайти умовну ймовірність $P\{T\geq t_1+t_2/T\geq t_1\}$ того, що прилад буде безвідмовно функціонувати ще протягом часу t_2.

Розв'язання:

$$P\{T\geq t_1+t_2/T\geq t_1\}=\frac{P\{T\geq t_1+t_2, T\geq t_1\}}{P\{T\geq t_1\}}=\frac{P\{T\geq t_1+t_2\}}{P\{T\geq t_1\}}=$$

$$=\frac{1-F_T(t_1+t_2)}{1-F_T(t_1)}=\frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_1}}=e^{-\lambda t_2}=1-F_T(t_2)=P\{T\geq t_2\} \quad (t_1,t_2>0).$$

Звідси випливає, що

$$P\{T-t_1<t_2/T\geq t_1\}=P\{T<t_2\}.$$

Таким чином, ВВ $T-t_1$ має той самий розподіл, що і ВВ T.

Отже, умовна ймовірність того, що прилад буде безвідмовно функціонувати ще протягом проміжку часу тривалістю t_2 за умови, що він вже безвідмовно пропрацював протягом проміжку часу тривалістю t_1, не залежить від t_1 і дорівнює ймовірності безвідмовно функціонувати протягом часу t_2 (рис. 2.11).

Ця властивість **відсутності післядії** (відсутність пам'яті) притаманна серед неперервних розподілів лише показниковому розподілу.

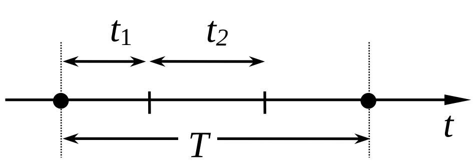


Рис. 2.11

Приклад 10. Блок складається з трьох незалежних елементів, які з'єднанні паралельно. Час безвідмовної роботи k-го елемента ($k=1,2,3$) розподілений відповідно за показниковим законом з параметром $\mu_1 = 0.01\frac{1}{год}$, $\mu_2 = 0.015\frac{1}{год}$, $\mu_3 = 0.02\ \frac{1}{год}$. Знайти ймовірність того, що з п'яти блоків, які випробували протягом 200 годин, відмовлять три блока.

Розв'язання. Позначимо через A_k (k=1,2,3) подію, яка полягає в тому, що k-й елемент блока протягом 200 годин працює безвідмовно. Нехай подія A означає, що блок працює безвідмовно протягом 200 годин. Далі скористаємось результатом прикладу 17 п. 1.3.1:

$$P(A)=1-(1-P(A_1))\cdot(1-P(A_2))\cdot(1-P(A_3)).$$

Оскільки час T_k безвідмовної роботи кожного елемента має показниковий розподіл, то $P(A_k)=P\{T_k \geq 200\}=e^{-\mu_k\cdot 200}$ (k=1,2,3).

Отже,

$$P(A)=1-(1-e^{-0.01\cdot 200})\cdot(1-e^{-0.015\cdot 200})\cdot(1-e^{-0.02\cdot 200})=1-0.865\cdot 0.95\cdot 0.982=0.193.$$

Тоді на підставі біноміального розподілу (2.5) при n=5, k=2, p=0.193 отримуємо, що шукана ймовірність дорівнює $p_5(2)=C_5^2\cdot 0.193^2\cdot 0.807^3=0.196.$

3. Нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Випадкова величина X має **нормальний розподіл** з параметрами a та σ^2, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд (рис. 2.12,а)

$$\boxed{p_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\quad (\sigma>0).} \tag{2.13}$$

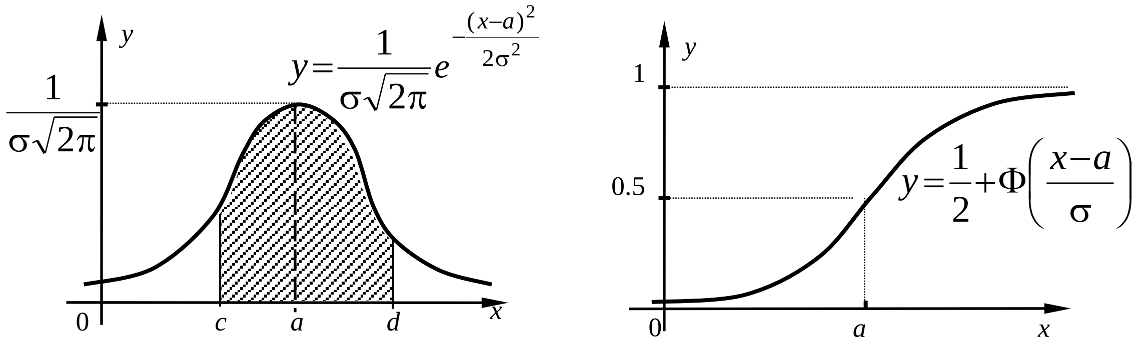
У подальшому запис $X\sim N(a;\sigma^2)$ означатиме, що ВВ X має розподіл Гаусса з параметрами a та σ^2. Графік розподілу Гаусса є симетричним відносно прямої $x=a$. Єдиний максимум досягається при $x=a$ і дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Оскільки площа під графіком за умови нормування (2.9) дорівнює 1, то при зменшенні σ графік стає більш «високим» і «вузьким».

Первісна від нормальної щільності $p_X(x)$ не виражається явно через елементарні функції. Функція розподілу випадкової величини $X \sim N(a;\sigma^2)$ виражається через функцію Лапласа $\Phi(x)$ (формула (1.18)). Дійсно,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{перший інтеграл дорівнює } 1/2 \text{ в силу умови норму–} \\ \text{вання та симетрії кривої } y = p_X(x) \text{ відносно прямої} \\ x = a, \text{ а у другому робимо підстановку } (t-a)/\sigma = s \end{array} \right| = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Графік функції розподілу наведено на рис. 2.12, б.



а б

Рис. 2.12

Розподіл Гаусса відіграє фундаментальну роль у теорії ймовірності і її застосуваннях. Похибка вимірювання деякої фізичної величини, флуктуаційна шумова напруга радіоприймального пристрою розподілені за нормальним законом.

Оскільки ймовірність потрапляння ВВ $X \sim N(a;\sigma^2)$ у проміжок дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього проміжку, то

$$\boxed{P\{X \in [c;d]\} = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right).} \qquad (2.14)$$

Якщо проміжок $[c; d]$ довжиною $2s\sigma$ розташований симетрично відносно точки $x=a$, то формула (2.14) набирає особливо простого вигляду

$$\boxed{P\{X\in[a-s\sigma\,;\,a+s\sigma]\}=\Phi(s)-\Phi(-s)=2\Phi(s)}. \qquad (2.14а)$$

Зокрема: 1) імовірність потрапляння у проміжок $[a\text{-}3\sigma;\ a+3\sigma]$ дорівнює $2\Phi(3) = 0.9973$. Таким чином, можна стверджувати, що подія $\{X\notin[a\text{-}3\sigma;\ a+3\sigma]\}$ є практично неможливою (нехтуємо можливістю при одному випробуванні отримати значення, яке відхиляється від a більше, ніж на 3σ). У цьому полягає знамените **правило «трьох сигм»**;

2) $P\{X\in[a-0.6745\sigma; a+0.6745\sigma]\}=2\Phi(0.6745)=0.5$. Отже, події $\{|X-a|>0.6745\sigma\}$, $\{|X-a|<0.6745\sigma\}$ є рівноймовірними. Величина $E=0.6745\sigma$ називається **серединним** або **імовірним** відхиленням.

Приклад 11. Відхилення розміру деталі від стандартного розподілено за законом $N(0;16\text{ мм}^2)$. Деталь вважається придатною, якщо відхилення від стандарту не перевищує 6 мм.

1. Який відсоток випуску непридатних деталей?

2. Яким має бути σ, щоб при відхиленні від стандарту 3 мм імовірність придатності деталі була не менше, ніж 0.95?

Розв'язання. Нехай ВВ X – відхилення розміру деталі від номінального.

1. Знайдемо ймовірність того, що деталь буде забраковано:

$$P\{|X|>6\}=1-P\{|X|\le 6\}=1-\left(\Phi\left(\frac{6}{4}\right)-\Phi\left(-\frac{6}{4}\right)\right)=1-2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=1-2\cdot 0.4332=0.134.$$

Таким чином, брак складає майже 13.5%.

2. $P\{|X|\le 3\}=2\Phi\left(\dfrac{3}{\sigma}\right)\ge 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\dfrac{3}{\sigma}\right)\ge 0.475$. За таблицею функції Лапласа маємо $\dfrac{3}{\sigma}\ge 1.96 \Leftrightarrow \sigma\le\dfrac{3}{1.96}\approx 1.53$ мм.

Приклад 12. Похибка показань вольтметра розподілена за законом N (0.5 В; 0.16 В^2). Знайти ймовірність того, що в трьох вимірюваннях абсолютна величина похибки не більше двох разів перевищить 0.7 В.

Розв'язання. Нехай V – похибка показань вольтметра. Імовірність того, що абсолютна величина похибки одного вимірювання не перевищує 0.7 В, знаходимо за формулою (2.14)

$$P\{|V|\le 0.7\}=P\{-0.7\le V\le 0.7\}=$$

$$= \Phi\left(\frac{0.7-0.5}{0.4}\right)-\Phi\left(\frac{-0.7-0.5}{0.4}\right)=\Phi(0.5)+\Phi(3)=0.191+0.499=0.69.$$

Отже, імовірність того, що абсолютна величина похибки кожного з трьох вимірювань перевищить 0.7 В, дорівнює $(1\text{-}0.69)^3=0.03$. Таким чином, шукана ймовірність дорівнює 0.97.

Приклад 13. Щільність ймовірності випадкової величини X має вигляд $p_X(x)=C\cdot e^{-2x^2+x-3}$. Довести, що $X\sim N(a;\sigma^2)$, знайти C і параметри a,σ^2.

Розв'язання. Оскільки $-2x^2+x-3=-2(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16})-3=$ $=-2(x-\frac{1}{4})^2-\frac{23}{8}$, то $p_X(x)=C\cdot e^{-\frac{23}{8}}\cdot e^{-2(x-0.25)^2}$. Таким чином, ВВ X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=\frac{1}{4}$, $\sigma^2=\frac{1}{4}$ і $C\cdot e^{-\frac{23}{8}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Leftrightarrow C=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{\frac{23}{8}}$. Отже, $p_X(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{-H}$, де $H=-2(x-0.25)^2$.

2.1.4. Перетворення розподілів

Нехай розподіл ВВ X є відомим. Потрібно знайти розподіл ВВ Y, яка пов'язана з X функціональною залежністю $Y=g(X)$. Це означає, що ВВ Y приймає значення $g(x)$, коли ВВ X приймає значення x.

1. Випадкова величина X є дискретною. Тоді знаходять сукупність значень ВВ Y і ймовірності, з якими ці значення приймаються. У тому випадку, коли серед значень $g(x_k)$ немає однакових, маємо $P\{Y=g(x_k)\}=P\{X=x_k\}=p_k$. Якщо серед значень $g(x_k)$ є однакові, потрібно додавати відповідні ймовірності.

Приклад 14. ВВ X задана таблицею розподілу. Знайти таблицю розподілу ВВ: 1) $Y=2X+5$; 2) $Y=X^2$.

X	-2	-1	1	3
P	0.2	0.1	0.4	0.3

Y	1	3	7	11
P	0.2	0.1	0.4	0.3

Розв'язання: 1) $P\{Y=1\}=P\{X=-2\}=0.2$, $P\{Y=3\}=P\{X=-1\}=0.1$, $P\{Y=7\}=P\{X=1\}=0.4$, $P\{Y=11\}=P\{X=3\}=0.3$.

2) Метод побудови таблиці розподілу ВВ Y зрозумілий з рис. 2.13: $P\{Y=1\} = P\{X=-1\}+P\{X=1\} = 0.1+0.4 = 0.5$, $P\{Y=4\}= =P\{X=-2\}= 0.2$, $P\{Y=9\}=P\{X=3\}= 0.3$.

Вона має вигляд

Y	1	4	9
P	0.5	0.2	0.3

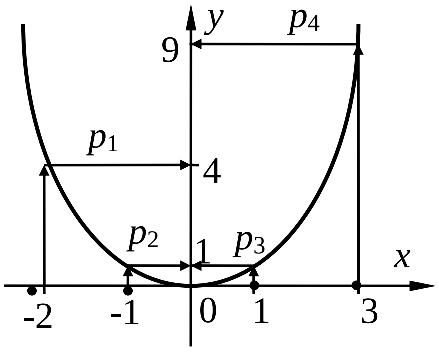


Рис. 2.13

2 ВВ X є неперервною. Нехай щільність розподілу ймовірностей $p_X(x)$ випадкової величини X є відомою. Потрібно знайти щільність розподілу ймовірностей $p_Y(y)$ випадкової величини $Y = g(X)$.

Теорема. Нехай функція $y = g(x)$ на інтервалі значень випадкової величини X є монотонною і диференційованою. Тоді щільність розподілу ймовірностей ВВ $Y = g(X)$ пов'язана зі щільністю розподілу ймовірностей ВВ X співвідношенням

$$\boxed{p_Y(y) = p_X(h(y)) \cdot \left| \frac{dh(y)}{dy} \right|}, \tag{15}$$

де функція $x = h(y)$ є оберненою відносно функції $y = g(x)$.

Доведення. Припустимо, що функція $g(x)$ є зростаючою. Оскільки

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta F_Y(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P\{Y \in [y; y + \Delta y)\}}{\Delta y},$$

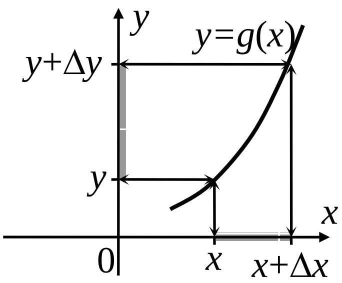


Рис. 2.14

то на підставі рівності $P\{X\in[x; x+\Delta x)\} = = P\{Y\in[y; y+\Delta y)\}$ (рис. 2.14), одержимо $(\Delta x \to +0 \Leftrightarrow \Delta y \to +0)$

$$p_Y(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P\{X\in[x;x+\Delta x)\}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P\{X\in[x;x+\Delta x)\}}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{X\in[x;x+\Delta x)\}}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F_X(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=$$

$$F_X'(x)\cdot\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}==p_X(x)\cdot x'(y)=p_X(h(y))\cdot h'(y).$$

Для спадної функції $g(x)$ слід врахувати, що

$P\{X\in(x+\Delta x;\, x]\}=P\{Y\in[y;\, y+\Delta y)\}$ ($\Delta x\to -0\Leftrightarrow\Delta y\to +0$).

Зауваження. Якщо функція $g(x)$ не є строго зростаючою або строго спадною, то формулу (2.15) слід використати на кожному інтервалі монотонності, а потім, враховуючи значення y, підсумувати одержані результати.

Приклад 15. ВВ $X\sim N(a;\sigma^2)$. Знайти щільність імовірності ВВ:

1) $Y=k\cdot X+l$ $(k\neq 0)$; 2) $Y=e^X$.

Розв'язання. 1) оскільки $y=kx+l$, то $x=\frac{y-l}{k}$ і $\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{|k|}$. Тому на підставі формули (15) одержимо

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-l}{k}-a\right)^2}\cdot\frac{1}{|k|}=\frac{1}{\sigma\cdot|k|\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-l-ka)^2}{2\sigma^2k^2}}.$$

Таким чином, якщо випадкова величина X розподілена нормально, то її лінійна функція $Y=k\cdot X+l$ розподілена нормально: $Y\sim N(k\cdot a+l;\ \sigma^2\cdot k^2)$;

2) оскільки оберненою відносно функції e^x ($g(x)$) є функція $\ln y$ ($h(y)$), то $\frac{d\ln y}{dy}=\frac{1}{y}$ і на підставі формули (2.15) одержимо

$$p_Y(y)=\frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}}\quad (y>0). \tag{2.16}$$

Розподіл (2.16) називається **логнормальним.** Він використовується при опису амплітуди, потужності та обвідної радіосигналу. Графік логнормального розподілу наведено на рис. 2.15.

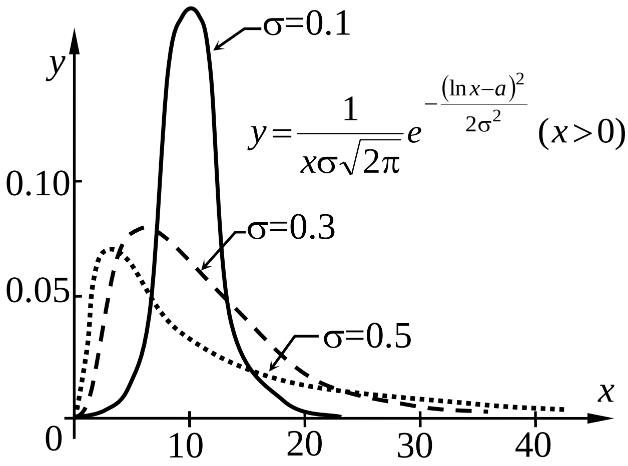


Рис. 2.15

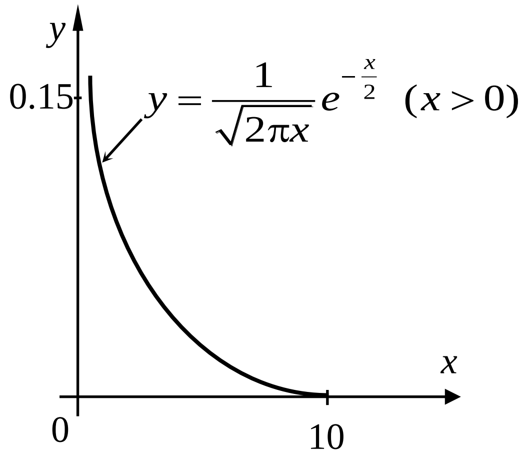


Рис. 2.16

Приклад 16. ВВ X~$N(0;\sigma^2)$. Знайти щільність імовірності ВВ: 1) $Y=|X|$; 2) $Y=X^2$;

$$3)\ Y=\begin{cases} X, & \text{якщо}\quad X<1, \\ 2-X, & \text{якщо}\ 1\le X<2, \\ X-2, & \text{якщо}\quad X\ge 2. \end{cases}$$

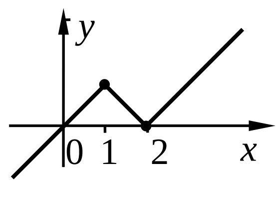


Рис. 2.17

Розв'язання: 1) функція $y=|x|$ при $x\in(0;+\infty)$ строго зростає і має обернену $x=y$, а при $x\in(-\infty;0)$ строго спадає і має обернену $x=-y$. Тоді за формулою (2.15) з урахуванням зауваження знаходимо

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\cdot|-1|=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}(y>0).$$

2) функція $y=x^2$ має 2 обернені: $h_1(y)=\sqrt{y}$ $(x\in(0;+\infty))$, $h_2(y)=-\sqrt{y}$ $(x\in(-\infty;0))$. Отже,

$$p_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2\cdot\sigma^2}}+\frac{1}{2\cdot\left|-\sqrt{y}\right|\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2\cdot\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2\cdot\sigma^2}}(y>0).$$

Графік цього розподілу при σ=1 наведено на рис. 2.16;

3) оберненими до функцій $y=x$ ($x<1$), $y=2-x$ ($1\le x<2$), $y= x-2$ ($x \ge 2$) (рис. 2.17) є відповідно функції

$$x = y\ (y<1),\ x = 2-y\ (0 \le y < 1),\ x = y+2\ (y \ge 0)\ .$$

Тоді отримуємо на підставі зауваження

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\ (y<0), \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} + \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(2-y)^2}{2\sigma^2}} + \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(2+y)^2}{2\sigma^2}}\ \left(0 \le y < 1\right), \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y+2)^2}{2\sigma^2}}\ (y \ge 1)\ . \end{cases}$$

Крім дискретних і неперервних ВВ, зустрічаються неперервно-дискретні ВВ, для яких щільність імовірності існує скрізь за винятком не більше, ніж зліченної множини значень $x_1, x_2, ...,$ які мають відмінні від нуля ймовірності $p_1, p_2, ...$. Функція розподілу неперервно-дискретної ВВ є кусково-неперервною функцією, яка має не більше, ніж зліченну кількість стрибків. Наприклад, функція розподілу ВВ, яка з імовірністю 0.4 дорівнює 2 і з імовірністю 0.6, рівномірно розподілена у проміжку [0;3] і має вигляд, наведений на рис. 2.18:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & якщо\, x \le 0, \\ 0.2x, & якщо\ 0 < x \le 2, \\ 0.2x + 0.4, & якщо\ 2 < x \le 3, \\ 1 & ,якщо\ x > 3. \end{cases},$$

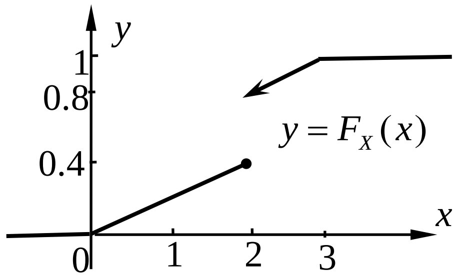


Рис. 2.18

2.2. Випадкові вектори

2.2.1. Функція розподілу випадкового вектора

Нехай X_1, X_2 ,…, X_n – сукупність випадкових величин, які визначені на множині елементарних подій Ω. Будемо розглядати їх як випадкові координати випадкової точки ($X_1;...;\ X_n$) в n-вимірному просторі. Таким чином, під n-вимірним випадковим вектором $\vec{X}$ ($X_1;...;\ X_n$) розуміють упорядковану сукупність n випадкових величин.

Виявляється, що для повного опису випадкового вектора (ВВ-ра) потрібно мати не тільки інформацію про властивості його координат, але і про їх взаємодію.

Наведемо приклади випадкових векторів:

1) точка влучення у плоску мішень характеризується двовимірним випадковим вектором $\vec{X}(X;Y)$, де X та Y координати точки влучення в системі координат, яка розміщена в площині мішені;

2) місце розташування літака за допомогою системи радіонавігації описується тривимірним випадковим вектором $\vec{X}(X;Y;Z)$;

3) рівномірний рух повітряної цілі характеризується шістьома параметрами: трьома координатами X,Y,Z цілі і трьома проекціями $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$ її швидкості на координатні осі. Результати вимірювань цих параметрів можна розглядати як випадкові координати 6-вимірного випадкового вектора $\vec{X}\left(X;Y;Z;\dot{V}_x;\dot{V}_y;\dot{V}_z\right)$.

У подальшому найчастіше мова йтиметься про двовимірний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$.

Функцією розподілу двовимірного випадкового вектора $\vec{X}$ ($X;Y$) називається задана у площині xOy функція $F_{\vec{X}}(x,y)$ така, що

$$\boxed{F_{\vec{X}}(x,y) = P\{X < x, Y < y\}}\ . \qquad (2.17)$$

З геометричної точки зору функція розподілу $F_{\vec{X}}(x,y)$ дорівнює ймовірності потрапляння точки ($X;\ Y$) у нескінченний прямокутник з вершиною в точці $(x;y)$, який розташовано зліва та нижче цієї точки (рис. 2.19). Відзначимо деякі властивості двовимірної функції розподілу:

1) $F_{\vec{X}}(x,y)$ є не спадною, неперервною зліва по кожному аргументу;

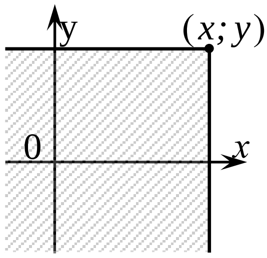


Рис. 2.19

2) $F_{\vec{X}}\left(+\infty,+\infty\right)=1,\ F_{\vec{X}}\left(-\infty,y\right)=0,$
$F_{\vec{X}}\left(x,-\infty\right)=0;$

3) $F_X\left(x\right)=F_{\vec{X}}\left(x,+\infty\right),\ F_Y(y)=F_{\vec{X}}\left(+\infty,y\right).$

2.2.2. Дискретний випадковий вектор

Якщо обидві координати вектора $\vec{X}$ є дискретними випадковими величинами, то вектор $\vec{X}$ називають **дискретним випадковим вектором**. Дискретний ВВ-р задається набором значень $(x_k; y_j)$ та ймовірностями $p_{kj}=P\{X=x_k,Y=y_j\}$, з якими ці значення приймаються. Зрозуміло, що сума всіх імовірностей p_{kj} дорівнює одиниці.

Дискретний ВВ-р, як правило, задають таблицею розподілу.

X \ Y	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

У таблиці розподілу дискретного ВВ-ра міститься вся інформація про нього. Зокрема ця таблиця дозволяє знайти закони розподілу координат вектора.

Дійсно, оскільки подія $\{X=x_k\}$ складається з суми попарно несумісних подій $\{X=x_k,Y=y_1\}$, $\{X=x_k,Y=y_2\}$,..., $\{X=x_k,Y=y_m\}$, то щоб одержати ймовірність $p_k=P\{X=x_k\}$, потрібно просумувати ймовірності p_{kj}, які стоять у k-му рядку таблиці розподілу:

$$\boxed{p_k = P\{X=x_k\} = p_{k1}+ p_{k2}+...+p_{km}.} \qquad (2.18)$$

Аналогічно, щоб одержати ймовірність $P\{Y=y_j\}$, потрібно просумувати ймовірності p_{kj}, які стоять у j-му стовпцю таблиці розподілу:

$$\boxed{p_j =P\{Y=y_j\}=p_{1j} +p_{2j} +\ldots+p_{nj}\ .} \qquad (2.18а)$$

Приклад 17. Знайти: а) розподіл координат дискретного ВВ-ра $\vec{X}(X;Y)$, заданого таблицею розподілу; б) знайти ймовірності: $P\{X=1,Y<0\}$, $P\{X<0.5,Y>-1.5\}$, $P\{X+Y>0\}$.

Y \ X	-2	-1	2
0	0.15	0.05	0.25
1	0.35	0.2	0

Розв'язання: а) на підставі формул (2.18), (2.18а) одержимо розподіли координат X та Y:

X	0	1
P	0.4	0.5

Y	-2	-1	2
P	0.5	0.2	0.2

б) $P\{X=1,Y<0\}=0.35+0.2=0.55$, $P\{X<0.5,Y>-1.5\}=0{,}05+0.25=0.3$, $P\{X+Y>0\}=0.25$.

Виникає запитання: коли можливо за розподілом координат знайти розподіл вектора?

Приклад 18. Знайти розподіл координат дискретного ВВ-ра $\vec{X}(X;Y)$, який заданий таблицею розподілу ймовірностей.

Y \ X	–2	**-1**	**2**
0	0.15	0.15	0.15
1	0.35	0.1	0.1

Розв'язання. На підставі формул (2.18), (2.18а) одержимо розподіли координат X та Y

X	0	1
P	0.4	0.5

Y	-2	-1	2
P	0.5	0.2	0.2

Отже, розподіли координат X та Y співпадають з розподілами координат з прикладу 17, хоча розподіли векторів $\vec{X}(X;Y)$ відрізняються.

Введемо подібно до умовної ймовірності події поняття **умовного розподілу** координати X дискретного ВВ-ра $\vec{X}(X;Y)$ за умови, що його координата $Y=y_j$

$$\boxed{P\{X=x_k/Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_k,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{kj}}{P\{Y=y_j\}}\quad (k=1,...,n).} \tag{2.19}$$

Зрозуміло, що $\sum_{k=1}^{n} P\{X = x_k / Y = y_j\} = 1 \ (j = 1,...,m)$. Аналогічно визначається умовний розподіл випадкової величини *Y* за умови, що $X = x_k$.

Визначення 7. Дискретні випадкові величини *X* та *Y* називаються **незалежними** тоді, коли при всіх значеннях *k* та *j* є справедливими співвідношення

$$\boxed{P\{X = x_k / Y = y_j\} = P\{X = x_k\}}. \tag{2.20}$$

Випадкові величини *X* та *Y* незалежні тоді і тільки тоді, коли при всіх значеннях *k* та *j* виконується рівність

$$\boxed{P\{X = x_k, Y = y_j\} = P\{X = x_k\} \cdot P\{Y = y_j\}}. \tag{2.21}$$

Іншими словами, двовимірний розподіл дискретного вектора відновлюється по одновимірних розподілах його координат лише в тому випадку, коли координати вектора є незалежними випадковими величинами.

Приклад 19. В умовах прикладу 17 знайти умовні розподіли $P\{X = x_k / Y = -2\}, P\{Y = y_j / X = 0\}$ та з'ясувати питання про те, чи є випадкові величини *X* та *Y* залежними.

Розв'язання. За допомогою формули (2.19) знайдемо умовний розподіл випадкової величини *X* при *Y*= –2:

$$P\{X = 0/Y = -2\} = \frac{0.15}{0.5} = 0.3, \quad P\{X = 1/Y = -2\} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7.$$

Аналогічно одержуємо умовний розподіл випадкової величини *Y* за умови, що випадкова величина *X* =0:

$$P\{Y = -2/X = 0\} = \frac{P\{X = 0, Y = -2\}}{P\{X = 0\}} = \frac{0.15}{0.45} = \frac{1}{3},$$

$$P\{Y = -1/X = 0\} = \frac{0.05}{0.45} = \frac{1}{9}, \qquad P\{Y = 2/X = 0\} = \frac{0.25}{0.45} = \frac{5}{9}.$$

Випадкові величини *X* та *Y* є залежними, наприклад, тому що

$$P\{X = 0\} = 0.45 \neq P\{X = 0/Y = -2\} = 0.3.$$

Приклад 20. Двічі підкидається гральний кубик. Нехай X – кількість появ шістки, а Y – кількість появ непарної цифри. Знайти: 1) закон розподілу випадкового вектора $\vec{X}(X;Y)$; 2) закони розподілу його координат.

Розв'язання: 1) кожна з величин X і Y може приймати одне зі значень 0, 1, 2. Подія $\{X=0,Y=0\}$ означає, що випадати можуть лише двійки або четвірки: (2,4), (4,2), (2,2), (4,4). Загальна кількість наслідків випробування дорівнює $6\cdot 6=36$. Отже, $p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Подія $\{X=0,Y=1\}$ означає, що випадає одна непарна цифра і або 2, або 4: (1,2), (2,1) ,(1,4), (4,1), (3,2), (2,3), (3,4), (4,3), (5,2), (2,5), (5,4), (4,5). Таким чином, $p_{12}=P\{X=0,Y=1\}= =\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$. Події $\{X=0,Y=2\}$ сприятливі лише такі 9 наслідків випробування: (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (3,5), (5,3), (1,1), (3,3), (5,5). Отже, $p_{13}=P\{X=0,Y=2\}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$. Події $\{X=1,Y=0\}$ сприятливі лише таки наслідки (6,2), (2,6), (6,4), (4,6), а подіям $\{X=1,Y=1\}$ і $\{X=2,Y=0\}$ сприятливі відповідно наслідки (6,1), (1,6), (6,3), (3,6), (6,5), (5,6) і (6,6). Таким чином,

$$p_{21}=P\{X=1,Y=0\}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},$$

$$p_{22}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

$$p_{31}= =P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{36}.$$

Зрозуміло, що $p_{23}=P\{X=1,Y=2\}=0$, $p_{32}= =P\{X=2,Y=1\}=0$, $p_{33}=P\{X=2,Y=0\}=0$.

Отримані результати подамо у вигляді таблиці розподілу та одержимо розподіли координат X і Y.

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Координати X і Y є залежними, оскільки, наприклад,

$$p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{9}\neq$$

$$\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{4}.$$

2.2.3. Неперервний випадковий вектор

Визначення 8. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ називається **неперервним**, якщо його координати X та Y є неперервними випадковими величинами. Іншими словами, випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ є неперервним, якщо ймовірність $P\{X = x_0, Y = y_0\}$ потрапляння його в будь-яку наперед фіксовану точку $(x_0; y_0)$ площини xOy дорівнює нулю.

У цьому випадку існує невід'ємна функція $p_{\vec{X}}(x,y)$ – **щільність розподілу ймовірностей ВВ-ра** – така, що ймовірність потрапляння ВВ-ра $\vec{X}$ у довільний малий прямокутник $\Pi\{[x_0; x_0+\Delta x), [y_0; y_0+\Delta y)\}$ (рис. 2.20) наближено дорівнює $p_{\vec{X}}(x_0; y_0)\Delta x \cdot \Delta y$:

$$\boxed{P\{\vec{X} \in \Pi\} = p_{\vec{X}}(x_0, y_0) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + o((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2),} \tag{2.22}$$

де $o((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)$ є нескінченно малою вищого порядку мализни, ніж $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

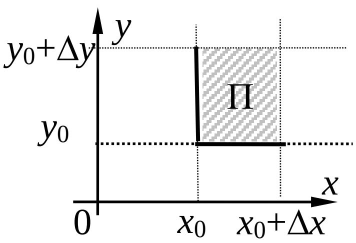


Рис. 2.20

Співвідношення (2.22) дозволяє довести, що ймовірність потрапляння вектора $\vec{X}$ в будь-яку область D площини знаходиться за формулою

$$\boxed{P\{\vec{X} \in D\} = \iint_D p_{\vec{X}}(x,y)\,dxdy.} \tag{2.23}$$

Із формули (2.23) випливають такі наслідки:

1) **умова нормування** – $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x,y)\,dy\right)dx = 1}$, (2.24)

яка означає, що об'єм тіла, обмеженого поверхнею з рівнянням $z = p_{\vec{X}}(x,y)$ та площиною xOy, дорівнює одиниці;

2) $\boxed{F_{\vec{X}}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y} p_{\vec{X}}(t,s)\,dt\right)ds}$. (2.25)

Оскільки $F_X(x)=F_{\vec{X}}(x,+\infty)$ і $F_Y(y)=F_{\vec{X}}(+\infty,y)$, то з наслідку 2 випливають вирази для щільностей розподілу ймовірностей координат X,Y випадкового вектора через інтеграли від щільності розподілу ймовірності вектора $\vec{X}$ – так звані **умови погодженості:**

$$\boxed{p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x,y)dy, \quad p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x,y)dx} . \tag{2.26}$$

Відновити щільність розподілу ймовірності випадкового вектора за щільностями розподілу ймовірностей його координат можна не завжди.

Умовна щільність розподілу ймовірностей $p_X(x/Y=y)$ випадкової величини X за умови $Y=y$ визначається співвідношенням

$$\boxed{p_X(x/Y=y)=\frac{p_{\vec{X}}(x,y)}{p_Y(y)}.} \tag{2.27}$$

Аналогічно умовна щільність розподілу ймовірностей випадкової величини Y за умови $X=x$ має вигляд

$$\boxed{p_Y(y/X=x)=\frac{p_{\vec{X}}(x,y)}{p_X(x)}} . \tag{2.27а}$$

Останні співвідношення можна записати у вигляді, подібному до теореми множення ймовірностей

$$\boxed{p_{\vec{X}}(x,y)=p_Y(y)\cdot p_X(x/Y=y)=p_X(x)\cdot p_Y(y/X=x).} \tag{2.28}$$

Умовній щільності розподілу притаманні всі властивості звичайної щільності розподілу, зокрема умова нормування

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x/Y=y)dx=1} . \tag{2.29}$$

Визначення 9. Неперервна випадкова величина X називається **незалежною** від випадкової величини Y, якщо при всіх можливих значеннях x і y виконується рівність

$$\boxed{p_X(x / Y=y)=p_X(x)}. \qquad (2.30)$$

Із (2.30) випливає, що поняття незалежності є взаємним.

Випадкові величини X та Y **незалежні** тоді і тільки тоді, коли справедливе співвідношення

$$\boxed{p_{\vec{X}}(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y).} \qquad (2.31)$$

Зазначимо, що випадкові величини X і Y є незалежними тоді і тільки тоді, коли при довільних x і y події $\{X<x\},\{Y<y\}$ є незалежними. Надалі знадобиться такий факт. Нехай X, Y – незалежні випадкові величини, а $f(x)$, $g(x)$ довільні функції. Тоді випадкові величини $f(X)$, $g(Y)$ є незалежними.

Якщо випадкові величини X та Y не є незалежними, то вони називаються **залежними**. Ця залежність може бути або функціональною – $Y=g(X)$, або мати більш слабкий імовірнісний (стохастичний) характер, коли значення, яке приймає одна величина, лише впливає на закон розподілу іншої.

Проінтегрувавши рівність (2.27) по змінній y і скориставшись умовою погодженості (2.26), знайдемо аналоги формул повної ймовірності та Байєса

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)\cdot p_X(x/Y=y)\,dy,$$

$$p_Y(y/X=x)=\frac{p_Y(y)\cdot p_X(x/Y=y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)\cdot p_X(x/Y=y)dy}.$$

Приклад 21. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ розподілений в області $D\{(x;y):0<x<1,\ x<y<1\}$ зі щільністю ймовірності $p_{\vec{X}}(x,y)=Cx$.

Знайти: 1) коефіцієнт C; 2) щільності ймовірності координат; 3) умовні щільності ймовірності; 4) імовірність потрапляння в область $D_1\{(x;y):\ 0<x<1/2,\ x<y<1-x\}$.

Розв'язання: 1) з умови нормування (2.24) одержуємо (рис. 2.21,а)

$$\iint\limits_D Cxdxdy = C\int\limits_0^1\left(x\int\limits_x^1 dy\right)dx = \frac{C}{6} = 1$$

$\Rightarrow C = 6.$

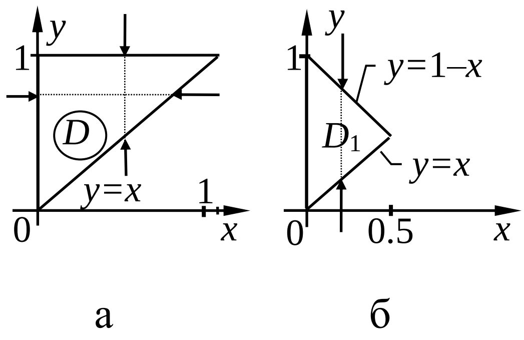


Рис. 2.21

2) із умов погодженості (2.26) одержуємо:

$p_X(x) = \int_x^1 6xdy = 6x(1-x)$, якщо $x \in [0;1]$,

$p_Y(y) = \int_0^y 6xdx = 3y^2$, якщо $y \in [0;1]$.

3) на підставі формули (2.22) і результатів пункту 2 знаходимо:

$$p_X(x/Y = y) = \frac{6x}{3y^2} = \frac{2x}{y^2},\ \text{якщо}\ 0<x<y,\ y\in(0;1),$$

$$p_Y(y/X = x) = \frac{6x}{6x(1-x)} = \frac{1}{1-x},\ \text{якщо}\ x<y<1,\ x\in(0;1).$$

Зрозуміло, що випадкові величини X та Y є залежними. Перевіримо виконання умови нормування.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(x/Y = y)dx = \int\limits_0^y \frac{2x}{y^2}dx = \frac{1}{y^2}\cdot x^2\Big|_0^y = 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y/X = x)dy = \int\limits_x^1 \frac{1}{1-x}dy = \frac{1}{1-x}\cdot(1-x) = 1;$$

4) $P\{\vec{X} \in D_1\} = 6\int_0^{1/2}(x\int_x^{1-x}dy)\,dx = \frac{1}{4}$ (рис. 2.21,б).

Приклад 22. У крузі $D = \{(x;y): x^2 + y^2 < 4\}$ розподілений двовимірний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ зі щільністю розподілу ймовірностей $p_{\vec{X}}(x,y) = \begin{cases} C(x^2+y^2) & ,\textit{якщо}\ (x;y)\in D, \\ 0 & ,\textit{якщо}\ (x;y)\notin D. \end{cases}$

Знайти: 1) значення C; 2) щільність імовірності координат; 3) умовну щільність $p_X(x/Y = \sqrt{3})$; 4) $P\{\vec{X} \in G = \{(x;y): x^2 + y^2 > 1\}\}$ (рис. 2.22).

***Розв'язання*:** 1) стала C визначається з умови нормування (2.24):

$$\iint\limits_D p_{\overline{X}}(x,y)dxdy = C\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy =$$

= |переходимо до полярних координат| =

$= C\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^2 \rho^2\cdot\rho d\rho)d\varphi = C\cdot 8\pi = 1.$ Отже, $C=\dfrac{1}{8\pi}$;

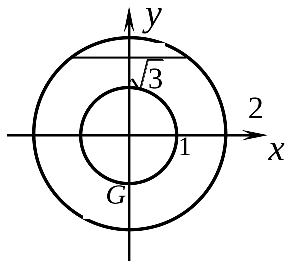


Рис. 2.22

2) щільності розподілу ймовірностей координат знаходимо за допомогою умов погодженості (2.26):

$$p_X(x) = \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{8\pi}(x^2+y^2)dy = \frac{1}{4\pi}(x^2\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{3}(\sqrt{4-x^2})^3) =$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{6\pi}(2+x^2)\ \left(x\in[-2;2]\right),\ p_Y(y) = \frac{\sqrt{4-y^2}}{6\pi}(2+y^2)\ \ \left(y\in[-2;2]\right);$$

3) умовну щільність розподілу ймовірностей знайдемо за формулою (2.27):

$$p_X(x/Y=\sqrt{3}) = \frac{p_{\overline{X}}(x,y=\sqrt{3})}{p_Y(\sqrt{3})} = \frac{(x^2+3)6\pi}{8\pi(2+(\sqrt{3})^2)} = \frac{3(x^2+3)}{20}\ .$$

Між іншим,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(x/Y=\sqrt{3})dx = \frac{3}{20}\int\limits_{-1}^{1}(x^2+3)dx = \frac{3}{20}\cdot\frac{20}{3} = 1\ ;$$

4) $P\{\overrightarrow{X}\in G\} = 1 - P\{\overrightarrow{X}\notin G\} = 1 - \dfrac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^1 \rho^2\cdot\rho d\rho)d\varphi = 1-\dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}.$

Визначення і поняття, що пов'язані з двовимірним випадковим вектором $\vec{X}(X;Y)$, автоматично узагальнюються на n-вимірні випадкові вектори $\vec{X}\,(X_1;\ldots;X_n)$ (n>2). Як приклад наведемо декілька результатів щодо неперервного тривимірного випадкового вектора $\vec{X}(X;Y;Z)$:

1) невід'ємна функція $p_{\vec{X}}(x,y,z)$ є щільністю ймовірності випадкового вектора $\vec{X}$, якщо ймовірність потрапляння цього вектора в довільний малий паралелепіпед $\Pi\{[x_0; x_0+\Delta x), [y_0; y_0+\Delta y), [z_0; z_0+\Delta z)\}$ приблизно дорівнює $p(x_0, y_0, z_0)\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$;

2) імовірність потрапляння вектора $\vec{X}$ у будь-яку область G простору виражається за допомогою потрійного інтеграла

$$P\{\vec{X} \in G\} = \iiint\limits_G p_{\vec{X}}(x,y,z)dxdydz \;;$$

3) умова нормування набуває вигляду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x,y,z)dxdydz = 1$;

4) щільності ймовірності координат знаходяться за допомогою подвійного інтеграла, зокрема $p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x,y,z)dydz$;

5) щільність імовірності довільної пари випадкових величин знаходиться шляхом інтегрування по змінній, що залишилася. Зокрема

$$p_{(X;Y)}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x,y,z)dz \,.$$

Визначення 10. Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називаються **незалежними**, якщо при довільних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є незалежними (у сукупності) події $\{X_1<x\}$, $\{X_2<x\}, \ldots, \{X_n<x\}$.

Якщо неперервні випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є незалежними, то

$$p_{\vec{X}(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\cdot p_{X_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot p_{X_n}(x_n).$$

Приклад 23. Тривимірний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y;Z)$ є розподіленим у півкулі $G = \{(x;y;z): 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$ зі сталою щільністю ймовірності. Знайти: 1) $p_{\vec{X}}(x,y,z)$; 2) $p_X(x)$, $p_Y(y)$, $p_Z(z)$; 3) $P\{\vec{X} \in G_1\}$, де

$G_1 = \{(x;y;z): x^2+y^2 \le \dfrac{1}{4}, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

Розв'язання: 1) оскільки об'єм півкулі G дорівнює $\frac{2}{3}\pi$, то з умови нормування випливає $p_{\vec{X}}(x,y,z)=\begin{cases}\frac{3}{2\pi}, \text{ якщо } (x;y;z)\in G,\\ 0 \quad, \text{ якщо } (x;y;z)\notin G;\end{cases}$

2) $p_{(X;Y)}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x,y,z)dz = \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{3}{2\pi}dxdydz=\frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}$

($x^2+y^2\le 1$).

$$\text{Отже, } p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{\pi}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}dy, \text{ якщо } x\in[-1;1],\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad, \text{ якщо } x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Оскільки $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-t^2}dt=\frac{\pi a^2}{4}$, то $p_X(x)=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi(1-x^2)}{4}=\frac{3}{4}(1-x^2)$ при $x\in[-1;1]$. Цілком аналогічно одержимо

$$p_Y(y)=\frac{3}{4}(1-y^2) \text{ при } y\in[-1;1], \ p_Z(z)=\frac{3}{2}(1-z^2) \text{ при } z\in[0;1];$$

3) $P\{\vec{X}\in G_1\}=\iiint\limits_{G_1}\frac{3}{2\pi}dxdydz.$ Інтеграл обчислимо в циліндричних координатах. Оскільки

$$G_1=\{(\varphi;\rho;z):0\le\varphi<2\pi;0\le\rho\le\frac{1}{2};0\le z\le\sqrt{1-\rho^2}\},$$

то $P\{\vec{X}\in G_1\}=3\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \ =1-\frac{3\sqrt{3}}{8}.$

2.2.4. Найважливіші види двовимірних розподілів

1. **Рівномірний розподіл**. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ називається рівномірно розподіленим в області D, якщо

$$\boxed{p_{\vec{X}}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S}, \quad \text{якщо } (x;y)\in D;\\ 0, \quad \text{якщо } (x;y)\notin D,\end{cases}} \qquad (2.32)$$

де S - площа області D.

Якщо двовимірний вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений у прямокутнику, то координати X та Y будуть незалежними рівномірно розподіленими випадковими величинами лише тоді, коли сторони прямокутника є паралельними осям координат.

Приклад 24. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений у квадраті зі стороною $\sqrt{2}$ і діагоналями співпадаючими з осями координат (рис. 2.23). Знайти розподіли координат X та Y.

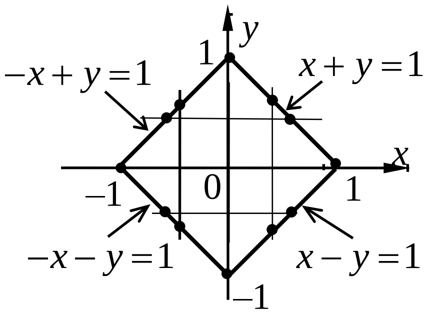


Рис. 2.23

Розв'язання. Оскільки площа квадрата дорівнює 2, то на підставі формули (2.32) щільність розподілу вектора $\vec{X}(X;Y)$ має вигляд

$$p_{\vec{X}}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ , \textit{якщо}\ \ (x;y)\in D\ ,\\ 0\ \ , \textit{якщо}\ \ (x;y)\notin D\ .\end{cases}$$

Щільність розподілу ймовірностей координати X знаходимо за допомогою умови погодженості (2.26)

$$p_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{x-1}^{1-x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(2-2x)=1-x,\ \textit{якщо}\ x\in[0;1]\ ,\\ \displaystyle\int\limits_{-1-x}^{1+x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(2+2x)=1+x,\ \textit{якщо}\ x\in[-1;0]\ ;\quad 0,\ \textit{якщо}\ x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Таким чином, $\quad p_X(x)=\begin{cases}1-|\,x\,|\ \ , \textit{якщо}\ |\,x\,|\le 1\ ,\\ 0 \qquad\quad , \textit{якщо}\ |\,x\,|>1\ .\end{cases}$

Аналогічно одержимо, що щільність розподілу ймовірностей координати Y дорівнює

$$p_Y(y)=\begin{cases}1-|\,y\,|\ \ , \textit{якщо}\ |\,y\,|\le 1\ ,\\ 0 \qquad\quad , \textit{якщо}\ |\,y\,|>1\ .\end{cases}$$

Випадкові величини X і Y є залежними, оскільки не виконується умова (2.31): $p_{\vec{X}}(x,y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$. Відповідно до формул (2.27)-(2.27а) знайдемо умовні щільності розподілу ймовірностей:

$$p_X(x/Y=y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|y|)} & при \quad |x| \leq 1-|y|, \\ 0 & при \quad |x| > 1-|y|, \end{cases} \qquad |y|<1$$

$$p_Y(y/X=x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|x|)} & при \ |y| \leq 1-|x|, \\ 0 & при \ |y| > 1-|x|. \end{cases} \qquad |x|<1$$

Звернемо увагу на те, що умовний закон розподілу $p_X(x/Y=y)$ $(p_Y(y/X=x))$ залежить від $y(x)$ і є рівномірним у проміжку $[|y|-1;\ 1-|y|]$ $([|x|-1;\ 1-|x|])$.

Наведемо приклад залежних величин, які самі і в сукупності розподілені рівномірно.

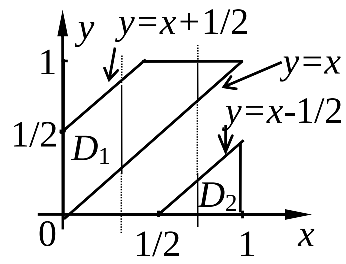


Рис. 2.24

Приклад 25. Нехай випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений в області $D=D_1 \cup D_2$ (рис. 2.24). Знайти щільності ймовірності координат вектора.

Розв'язання. Сума площ фігур D_1 і D_2 дорівнює 1/2 (половина площі квадрата зі стороною 1) і тому

$$p_{\vec{X}}(x,y) = \begin{cases} 2, \ \text{якщо} \ (x;y) \in D; \\ 0, \ \text{якщо} \ (x;y) \notin D. \end{cases}$$

На підставі умов погодженості (2.26) маємо

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ \text{якщо} \ x \notin [0;1]; \\ \int_x^{x+1/2} 2dy = 1 & , \ \text{якщо} \ x \in [0;\frac{1}{2}]; \\ \int_0^{x-1/2} 2dy + \int_x^1 2dy = 1, & \text{якщо} \ x \in [\frac{1}{2};1]. \end{cases}$$

Таким чином, випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку [0;1]. Аналогічно доводиться, що випадкова величина Y також рівномірно розподілена на відрізку [0;1]. Оскільки $p_{\vec{X}}(x,y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$, то не виконується умова (2.31) і випадкові величини X та Y будуть залежними.

Приклад 26. Випадкові величини X та Y незалежні і розподілені рівномірно у проміжку [0;1]. Знайти ймовірність того, що корені квадратного рівняння $Xx^2+x+Y=0$ дійсні.

Розв'язання. Невід'ємність дискримінанта рівносильна умові $X \cdot Y \leq 1/4$. Вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений у квадраті $D\{(x;\, y)\colon 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ і тому $p_{\vec{X}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x;y) \in D; \\ 0, & \text{якщо } (x;y) \notin D. \end{cases}$

Таким чином, за формулою (2.23)

$$P\left\{X \cdot Y \leq \tfrac{1}{4}\right\} = 1 - P\left\{X \cdot Y > \tfrac{1}{4}\right\} = 1 - \iint\limits_{D_1} p_{\vec{X}}(x;y)\,dxdy =$$

$$= 1 - \int\limits_{1/4}^{1} \left(\int\limits_{1/4x}^{1} dy \right) dx = 1 - \int\limits_{1/4}^{1} \left(1 - \frac{1}{4x} \right) dx = \frac{1+2\ln 2}{4} \approx 0.6.$$

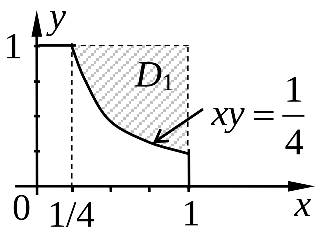


Рис. 2.25

Область інтегрування D_1 розташована у квадраті D вище гіперболи $xy=1/4$ (див. рис. 2.25).

2. Двовимірний нормальний розподіл. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ називається розподіленим за нормальним законом (законом Гаусса) у загальній формі, якщо його щільність розподілу ймовірностей має вигляд

$$\boxed{p_{\vec{X}}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},} \qquad (2.33)$$

де $|r|<1$, $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$. П'ять параметрів a_1, a_2, σ_1^2, σ_2^2, r повністю визначають двовимірний закон Гаусса.

При $r=0$ із формули (2.33) одержуємо двовимірний закон Гаусса в найпростішій формі

$$p_{\vec{X}}\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x-a_1\right)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\left(y-a_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]}. \qquad (2.34)$$

Можна показати, що щільності розподілу ймовірностей координат ВВ $\vec{X}\left(X;Y\right)$, який є розподіленим за законом Гаусса в загальній формі (2.33), є також гауссовими. А саме за умовами погодженності (2.26) маємо $X\sim N(a_1;\sigma_1^2)$ та $Y\sim N(a_2;\sigma_2^2)$:

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\vec{X}}(x,y)dy=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad (2.35)$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\vec{X}}(x,y)dx=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \qquad (2.36)$$

Проте добуток щільностей розподілу (2.35), (2.36) дає розподіл (2.34), а не (2.33). Тому координати двовимірного випадкового вектора, розподіленого за законом Гаусса в найпростішій формі, є незалежними випадковими величинами, а за законом Гаусса в загальній формі – залежними.

Умовні щільності ймовірності розподілу (2.33) також є гауссовими: умовна щільність

$$p_X\left(x/Y=y\right)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-r^2)}[x-a_1-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)]^2}$$

є гауссовою з параметрами

$$a=a_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2),\ \ \sigma^2=\sigma_1^2(1-r^2), \qquad (2.37)$$

перший з яких залежить від y лінійно.

Аналогічно умовна щільність $p_Y(y/X=x)$ є гауссовою з параметрами

$$a=a_2+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1),\quad \sigma^2=\sigma_2^2(1-r^2). \qquad (2.37а)$$

Функція $p_{\vec{X}}(x,y)$, яка визначена рівністю (2.33), набуває максимального значення $\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$ у точці (a_1;a_2) (**центрі розсіювання**). Кривими рівної щільності $p_X(x,y)=C$ ($0<C<1/2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}$) є подібні концентричні еліпси

$$\boxed{\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\cdot\sigma_2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}=\delta^2,} \qquad (2.38)$$

де $\delta^2=-2(1-r^2)ln(C2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2})$.

Ці еліпси, що називаються еліпсами рівної ймовірності або **еліпсами розсіювання**, дають уявлення про форму поверхні $z=p_{\vec{X}}(x,y)$. При $|r|\approx 1$ еліпси стають «витягнутими» і «тонкими». а при $r=0$ і $\sigma_1=\sigma_2$ перетворюються в кола, при цьому розподіл називається круговим. Більша вісь еліпса повернута на кут $\frac{1}{2}\text{arctg}\dfrac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}$ відносно осі Ox (рис. 2.26).

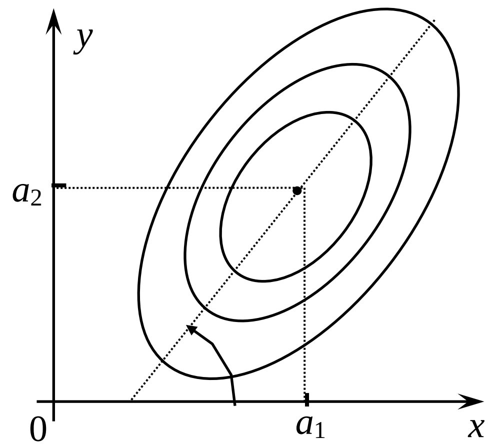


Рис. 2.26

Приклад 27. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ є розподіленим за нормальним законом у загальній формі $p_{\vec{X}}(x,y)=Ce^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(x-1)(y+2)}{2}+\frac{(y+2)^2}{3}\right]}$. Знайти:

1) параметри закону; 2) C; 3) умовні щільності ймовірностей розподілу.

Розв'язання: 1) з формули (2.33) безпосередньо випливає, що a_1=1, a_2 = –2. Крім того, маємо $(1-r^2)\sigma_1^2=4$, $(1-r^2)\sigma_2^2=3$, $\dfrac{(1-r^2)\sigma_1\sigma_2}{-2r}=2$. Звідси випливає, що $\sigma_1^2=16$, $\sigma_2^2=12$, $r=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $C=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}=\dfrac{1}{8\pi\sqrt{3}}$;

3) $p_X(x/Y=y)=\dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-r^2)}[x-(a_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)]^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+y+1)^2}{8}}$,

$$p_Y(y/X=x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-r^2)}[y-(a_2+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)]^2}=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+0.75x+1.25)^2}{6}}.$$

Імовірність потрапляння нормально розподіленого випадкового вектора в область D може бути знайдена точно, наприклад, тоді, коли область D є прямокутником зі сторонами, паралельними осям еліпса розсіювання (2.38), або коли D – область, обмежена еліпсом розсіювання, або коли D є нескінченною прямолінійною смугою.

Приклад 28. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ є розподіленим за нормальним законом у найпростішій формі (2.34) з параметрами $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ (кругове розсіювання). Знайти ймовірність потрапляння вектора $\vec{X}(X;Y)$ у круг $D_r=\{(x;y):(x-a_1)^2+(y-a_2)^2<r^2\}$.

Розв'язання. Оскільки $P\{\overrightarrow{X}\in D_r\}=\iint\limits_{D_r}\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}{2\sigma^2}}dxdy$, то після переходу в останньому інтегралі до полярних координат $x-a_1=\rho cos\varphi,\ \ y-a_2=\rho sin\varphi$ з полюсом у центрі розсіювання $(a_1;a_2)$ одержимо

$$P\{\overrightarrow{X}\in D_r\}=\int\limits_0^r\frac{\rho}{\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\rho=e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Зазначимо, що ймовірність потрапляння в область, яка обмежена еліпсом розсіювання (2.38), дорівнює $1-e^{-\frac{\delta^2}{2}}$ для вектора $\vec{X}(X;Y)$, який розподілено за нормальним законом (2.33).

Приклад 29. Стрілець влучає в круг радіуса 25 см з імовірністю 0.6. Розсіювання розподілено за круговим нормальним законом з параметрами $a_1=a_2=0,\ \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$. Знайти довжину сторони квадрата, центр якого співпадає з центром круга, у який стрілець влучає з імовірністю 0.7.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що стрілець влучає в круг. Тоді на підставі результату прикладу 28

$P(A)=1-e^{-\frac{25^2}{2\sigma^2}}=0.6$. Таким чином,

$$e^{-\frac{25^2}{2\sigma^2}}=0.4 \Leftrightarrow \frac{25^2}{2\sigma^2}=0.9163 \Leftrightarrow \sigma=18.47 \text{ см.}$$

Нехай подія B полягає в тому, що стрілець влучає у квадрат зі стороною Δ. Тоді

$$P(B)=P\left\{-\frac{\Delta}{2}\le X\le\frac{\Delta}{2},-\frac{\Delta}{2}\le Y\le\frac{\Delta}{2}\right\}=P\left\{-\frac{\Delta}{2}\le X\le\frac{\Delta}{2}\right\}\cdot P\left\{-\frac{\Delta}{2}\le Y\le\frac{\Delta}{2}\right\}=$$

$$=\left(2\Phi\left(\frac{\Delta}{2\sigma}\right)\right)^2=4\Phi^2\left(\frac{\Delta}{36.94}\right)=0.7.$$

Таким чином, $\Phi\left(\frac{\Delta}{36.94}\right)=0.4183$. За допомогою табл. Д.1.1 знаходимо $\frac{\Delta}{36.94}=1.395 \Leftrightarrow \Delta=51.5$ см.

Приклад 30. Гармата обстрілює злітно-посадкову смугу шириною 60 м та довжиною 200 м. Координати точки влучання снаряда відносно системи координат, осі якої направлені вздовж і поперек смуги, а початок знаходиться у її центрі (рис. 2.27), розподілені за законом

$$p_{\vec{X}}(x,y)=\frac{1}{3250\pi}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2}{25^2}+\frac{(y+20)^2}{65^2}\right]} \text{ м}^{-2}.$$

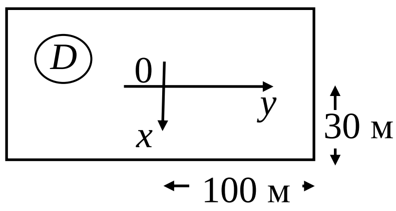


Рис. 2.27

Знайти: 1) імовірність влучання у смугу при одному пострілі; 2) імовірність знищення смуги при чотирьох пострілах, якщо при влученні одного снаряду смуга знищується з імовірністю 0.4, при влученні двох снарядів – з імовірністю 0.7, при влученні більш, ніж двох снарядів – з імовірністю 1.

Розв'язання: 1) випадкові величини X та Y незалежні і, таким чином, $P\{\vec{X}\in D\}=P\{|X|<30,|Y|<100\}=P\{|X|<30\}\cdot P\{|Y|<100\}$. Оскільки $X\sim N$ (1 м; 25^2 м^2), $Y\sim N$ (–20 м; 65^2 м^2), то на підставі формули (2.10) одержуємо

$P\{|X|<30\}=\Phi\left(\frac{30-1}{25}\right)-\Phi\left(\frac{-30-1}{25}\right)=\Phi(1.16)+\Phi(1.24)=0.7695,$

$P\{|Y|<100\}=\Phi\left(\frac{100+20}{65}\right)-\Phi\left(\frac{-100+20}{65}\right)\approx\Phi(1.85)+\Phi(1.23)=0.4678+0.3907\approx 0.86.$

Отже, імовірність попадання у смугу дорівнює 0.66;

2) нехай подія A означає, що смуга знищена, а припущення H_k (k=0,1,2,3,4) полягає в тому, що в смугу влучило k снарядів. Тоді за формулою повної ймовірності маємо

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)+$$
$$+P(H_4)\cdot P(A/H_4).$$

Оскільки за схемою Бернуллі $P(H_k)=C_4^k\cdot 0.66^k\cdot 0.34^{4-k}$, а за умовою задачі $P(A/H_1)=0.4$, $P(A/H_2)=0.7, P(A/H_3)=P(A/H_4)=1$, то $P(A)\approx$ 0.83.

3. Розподіл Релея. Нехай випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ розподілений за законом Гаусса в найпростішій формі (2.34) з параметрами $a_1=a_2=0$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ (круговий нормальний закон). Покажемо, що випадкова величина $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ – відстань від точки $(X;Y)$ до початку координат – розподілена за законом Релея з параметром σ^2 (графік щільності наведено на рис. 2.28):

$$\boxed{p_R(r)=\frac{r}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\ (r>0).} \qquad (2.39)$$

Дійсно, на підставі результату прикладу 28 $P\{\vec{X}\in D_r\}=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$. Оскільки

$P\{\vec{X}\in D_r\}=P\{R<r\}=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}=F_R(r),$

то $p_R(r)=(F_R(r))'=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ (r >0).

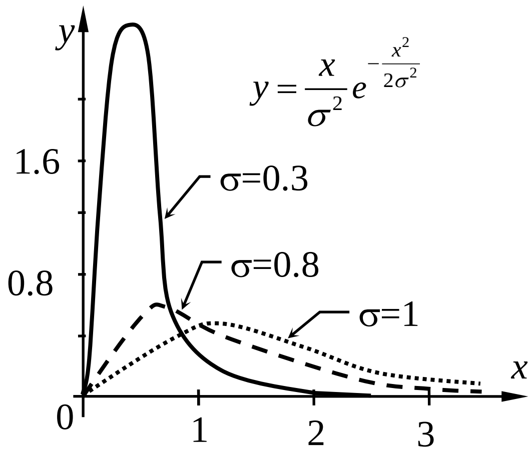


Рис. 2.28

Розподіл Релея виникає в такій важливій задачі. Розглянемо гармонічні коливання з періодом T:

$$X \cdot \cos\frac{2\pi}{T}t + Y \cdot \sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Як відомо з курсу елементарної математики (фізики), такі коливання можна зобразити у вигляді

$$\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right).$$

Нехай X та Y незалежні випадкові величини, розподілені за законом Гаусса $N(0;\sigma^2)$. Тоді виявляється, що амплітуда $\sqrt{X^2+Y^2}$ та початкова фаза коливань φ будуть незалежними випадковими величинами. При цьому амплітуда буде мати розподіл Релея з параметром σ^2, а початкова фаза буде рівномірно розподілена у проміжку $[0;2\pi)$.

У тому випадку, коли випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ розподілений за законом Гаусса в найпростішій формі (2.34) з параметрами $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, випадкова величина $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ виявляється розподіленою за законом Райса

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2+a_1^2+a_2^2}{2\sigma^2}} \cdot I_0\left(\frac{r \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{\sigma^2}\right) \quad (r > 0),$$

де $I_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$.

При великих значеннях $\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}/\sigma$ закон Райса є близьким до нормального $N\left(\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2};\sigma^2\right)$.

4. Розподіли χ^2 (Пірсона), τ (Стьюдента) і F (Фішера). Ці розподіли будуть використовуватися в розд. 5.

Нехай випадкові величини X_0, X_1,X_2,..., X_n є незалежними та розподілені за законом Гаусса $N(0;1)$. Розподіл випадкової величини $\chi^2(n)=X_1{}^2+X_2{}^2+...+X_n{}^2$ називається **χ^2-розподілом** (хі-квадрат розподілом) з n степенями вільності. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\chi^2(n)$ задається формулою

$$\boxed{p_{\chi^2(n)}(x)=K_n\cdot x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\quad (x>0)\,,} \tag{2.40}$$

де стала K_n визначається умовою нормування. Графік щільності наведено на рис. 2.29 для n=4 і n=10. Зазначимо, що щільність імовірності випадкової величини $\chi^2(1) = X_1^2$ була знайдена в прикладі 16 п. 2.1.4.

Розподіл випадкової величини $\tau(n)=X_0\Big/\sqrt{\chi^2(n)/n}$ називається **τ-розподілом (розподілом Стьюдента)** з n степенями вільності. Щільність імовірності випадкової величини $\tau(n)$ має вигляд

$$\boxed{p_{\tau(n)}(x)=L_n\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},} \tag{2.41}$$

де стала L_n визначається умовою нормування ($L_1=1/\pi>L_2=1/2\sqrt{2}>...;\quad L_n\to 1/\sqrt{2\pi}, n\to\infty$). Графік щільності наведено на рис. 2.30.

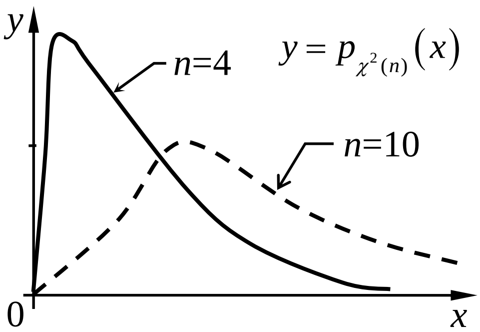


Рис. 2.29

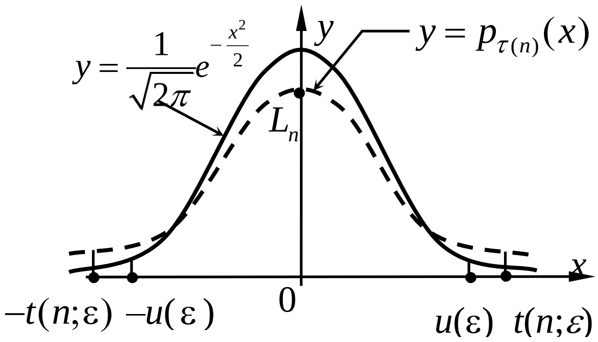


Рис.2.30

Графік щільності розподілу Стьюдента є симетричним відносно прямої x=0 і подібний до графіка щільності нормального розподілу N(0;1). Із зростанням кількості степеней вільності n розподіл Стьюдента наближається до нормального N(0;1). У табл. Д.1.2 наведено значення $t(n;\varepsilon)$, які задовольняють рівність $\int\limits_0^{t(n;\varepsilon)} p_{\tau(n)}(x)\,dx=\frac{1-\varepsilon}{2}$.

Ці значення більші, ніж значення $u(\varepsilon)$, які визначаються співвідношенням $\int\limits_0^{u(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1-\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \Phi(u(\varepsilon)) = \frac{1-\varepsilon}{2}$. Але зі зростанням кількості степеней вільності $t(n;\varepsilon)$, спадаючи, наближається до $u(\varepsilon)$. Наприклад, для $\varepsilon = 0.05$ маємо $t\,(5; 0.05) = 2.5706$, $t\,(10; 0.05) = 2.2281$, $t\,(20; 0.05) = 2.0860$, $t\,(+\infty; 0.05) = u(0{,}05) = 1.9600$ (рис. 2.30).

Зазначимо, що $u(\varepsilon)$ і $t(n;\varepsilon)$ є квантилями (визначення 6 п. 2.1.3) рівня $1-\frac{\varepsilon}{2}$ відповідно розподілів $N(0;1)$ і Стьюдента з n степенями вільності. Дійсно, наприклад, якщо $X{\sim}N(0;1)$, то маємо

$$\Phi\big(u(\varepsilon)\big) = \frac{1-\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \Phi\big(u(\varepsilon)\big) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow F_X\big(u(\varepsilon)\big) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Розглянемо випадкову величину $F(n,m) = \frac{\chi^2(n)/n}{\chi^2(m)/m}$, де $\chi^2(n)$ і $\chi^2(m)$ – незалежні випадкові величини, розподілені за законом χ^2 відповідно з n та m степенями вільності. Розподіл випадкової величини $F(n,m)$ називається **розподілом Фішера** з n та m степенями вільності. Щільність імовірності цього розподілу має вигляд

$$\boxed{p_{F(n,m)}(x) = M_{n,m} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(1+\frac{n}{m}\cdot x)^{\frac{n+m}{2}}} \cdot 1(x)\ ,} \qquad (2.42)$$

де стала $M_{n,m}$ знаходиться з умови нормування.

2.2.5. Закон розподілу суми випадкових величин

Питання про поведінку суми незалежних випадкових величин є дуже важливою задачею теорії ймовірностей. Центральним у цьому колі питань є такий результат.

Теорема. Нехай випадкові величини X та Y незалежні та мають щільності ймовірностей $p_X(x)$ і $p_Y(y)$. Тоді щільність імовірності випадкової величини $Z=X+Y$ є згорткою щільностей імовірності доданків

$$\boxed{p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(u) \cdot p_Y(z-u)\,du\,.} \qquad (2.43)$$

Наслідки. 1. Якщо випадкові величини X_i незалежні і $X_i \sim N(a_i;\sigma_i^2)$, то $X_1+...+X_n \sim N(a_1+...+a_n;\ \sigma_1^2+...+\sigma_n^2)$.

2. Якщо випадкові величини X_i незалежні і розподілені за показниковим законом з параметром λ, то їх сума $\eta=X_1+...+X_n$ розподілена за законом Ерланга n–1-го порядку з параметром λ

$$\boxed{p_\eta(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} 1(x).} \qquad (2.44)$$

3. Сума $Y=X_1+X_2$ двох незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена рівномірно у проміжку [-1;1], має «трикутний» розподіл

$$p_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|x|),\ \textit{якщо}\, |x|<2\,, \\ \quad 0 \quad ,\ \textit{якщо}\ |x| \ge 2. \end{cases}$$

4. Сума незалежних випадкових величин $\chi^2(n)$ і $\chi^2(m)$ розподілена за законом хі-квадрат з $n+m$ степенями вільності: $\chi^2(n)+\chi^2(m)=\chi^2(n+m)$.

Для суми $Z=X+Y$ незалежних дискретних випадкових величин X, Y має місце аналог формули (2.43):

$$P\{Z=z_k\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P\{X=x_m\} \cdot P\{Y=z_k-x_m\}\,.$$

Звідси випливає, що сума двох незалежних випадкових величин, розподілених за законом Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda_1+\lambda_2$. Дійсно,

$$P\{Z=k\} = \sum_{m=0}^{k} P\{X=m\} \cdot P\{Y=k-m\} = \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda_1^m}{m!} \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-m}}{(k-m)!} \cdot e^{-\lambda_2} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \sum_{m=0}^{k} \frac{C_k^m}{k!} \cdot \lambda_1^m \cdot \lambda_2^{k-m} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^k\,.$$

Приклад 31. Знайти щільність розподілу суми двох показникових розподілів: а) з параметрами відповідно λ_1 та λ_2; б) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

***Розв'язання*:** а) у випадку, коли X та Y додатні, формула (2.43) набуває вигляду $p_Z(z) = \int_0^Z p_X(u) \cdot p_Y(z-u)du$, оскільки $Z=X+Y$, а X та $У$ не можуть перевищувати Z. Тоді

$$p_Z(z) = \int_0^Z \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \lambda_2 e^{-(z-u)\lambda_2} du = \lambda_1\lambda_2 \int_0^Z e^{-z\lambda_2 - u(\lambda_1-\lambda_2)} du =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \int_0^z e^{-z\lambda_2 - u(\lambda_1-\lambda_2)} du = -\frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-z\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2} e^{-u(\lambda_1-\lambda_2)}\Big|_0^z = -\frac{\lambda_1\lambda_2 (e^{-z\lambda_1} - e^{-z\lambda_2})}{\lambda_1-\lambda_2} \boldsymbol{1}(z);$$

б) оскільки $\lim\limits_{\lambda_1 \to \lambda_2 = \lambda} \frac{e^{-z\lambda_1} - e^{-z\lambda_2}}{-(\lambda_1-\lambda_2)} = -(e^{-z\lambda})' = ze^{-z\lambda}$, то $p_Z(z) = \lambda^2 z e^{-z\lambda} \boldsymbol{1}(z)$ закон Ерланга 1-го порядку.

Приклад 31. Літак розраховано на 4 пасажирів або вантаж вагою не більше 360 кг. Припустимо, що вага пасажирів є випадковою величиною, розподіленою за законом Гаусса N(75 кг; 256 кг^2). Як часто літак буде перевантаженим, якщо на борт береться 4 пасажири?

Розв'язання. Позначимо через X_i (i=1,...,4) вагу i-го пасажира. Оскільки випадкові величини X_i незалежні, то на підставі наслідку 1 одержимо

$X= X_1+X_2+X_3+X_4 \sim N$(300 кг; 1024 кг^2).

Застосуємо формулу (2.11):

$$P\{X > 360\} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\tfrac{360-300}{32}\right) = \tfrac{1}{2} - \Phi(1.875) = 0.5 - 0.4696 = 0.03.$$

Таким чином, тільки в трьох рейсах із ста очікується перевантаження літака.

Приклад 32. Система складається з 10000 деталей. Кожна деталь незалежно від інших виходить з ладу з імовірністю p_i, причому

$p_i=0.0007$ ($i=1,\dots,1000$), $p_i=0.0002$ ($i=1001,\dots,5000$), $p_i=0.0003$ ($i=5001,\dots,10000$) .

Система не функціонує, якщо виходять з ладу не менш, ніж три деталі. Знайти наближене значення ймовірності того, що система вийде з ладу.

Розв'язання. Нехай $X_l (l=1,2,3)$ – кількість деталей, що вийшли з ладу в l-й групі, а X – кількість деталей, що вийшли з ладу в системі. Оскільки випадкова величина X_l наближено розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda_l = n_l \cdot p_l$, то випадкова величина $X = X_1 + X_2 + X_3$ також наближено розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1000 \cdot 0.0007 + 4000 \cdot 0.0002 + 5000 \cdot 0.0003 = 3.$ Отже,

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!}\right) \cdot e^{-\lambda} = 1 - 8.5 \cdot e^{-3} = 1 - 0.4232 \approx 0.58.$$

Приклад 33. Незалежні випадкові величини X_1, X_2, X_3 розподілені відповідно за законами $N(0.5;0.25)$,$N(-3;8)$,$N(-0.5;1)$. Знайти $P\{1 < 2X_1 - 0.5X_2 + X_3 < 4\}$.

Розв'язання. Випадкові величини $2X_1$, $-0.5 \cdot X_2$ розподілені відповідно за законами $N(1;1), N(1.5;2)$ і, отже, випадкова величина $2X_1 - 0.5X_2 + X_3$ на підставі наслідку 1 є розподіленою за нормальним законом з параметрами (2;4). Таким чином,

$$P\{1 < 2X_1 - 0.5X_2 + X_3 < 4\} = \Phi\left(\frac{4-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 0.3413 + 0.1915 = 0.5328.$$

Задачі до розділу 2

1. Одновимірні випадкові величини

2.1. Кубик підкинуто два рази. Записати таблицю розподілу ВВ X, яка дорівнює сумі кількості очок, що випали при обох підкиданнях; знайти $P\{X>8\}$.

2.2. В урні 8 куль; на трьох з них написано число 1, на інших – число 3. З урни виймають дві кулі. Нехай X - сума чисел, що написані на цих кулях. Скласти таблицю розподілу ВВ X, якщо: а) першу кулю повертали в урну; б) першу кулю не повертали в урну.

2.3. Сукупність значень ВВ X така: $x_k = \cos k\frac{\pi}{6}$, $k=1,2,3,4,5,6$. Імовірності $P\{X=x_k\}$ дорівнюють одна одній. Знайти: а) розподіл ВВ X і функцію розподілу $F_X(x)$; б) $P\{|X|\}>\frac{1}{3}$; в) розподіл ВВ $Y=X^2$.

2.4. Сукупність значень ВВ X така: $x_k = \sin k\frac{\pi}{4}$, $k=0,\pm1,\pm2$. Відношення імовірностей $P\{X=x_k\}$ для $k=-2,-1,0,1,2$ 3:2:1:2:3. Знайти: а) розподіл ВВ X та функцію розподілу $F_X(x)$; б) $P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$; в) розподіл імовірностей ВВ $Y=X^2$.

2.5. Стрілець влучає в мішень при одному пострілі з імовірністю 0.5. Записати таблицю розподілу кількості влучень у мішень у серії з 5 пострілів. Знайти ймовірності таких подій: а) у мішені не більше 4 отворів; б) у мішені не менше 3 отворів; в) у мішені парна кількість отворів.

2.6. Кожна з 3 мікросхем блока може вийти з ладу з імовірністю 0.1. Записати розподіл імовірностей ВВ X, яка дорівнює кількості несправних мікросхем, і знайти ймовірність виходу з ладу не більше однієї з них.

2.7. При передачі слів, що складаються з нулів та одиниць, кожен з символів перекручується незалежно від інших з імовірністю 0.2. Скласти таблицю розподілу кількості помилок у словах довжиною 3 та 4 символи. Знайти ймовірність правильного декодування, якщо декодер може виправити одну помилку.

2.8. У схемі освітлення шкали, що наведена на рис. 2.31, кожна з ламп може незалежно від інших вийти з ладу з імовірністю $\frac{1}{4}$.

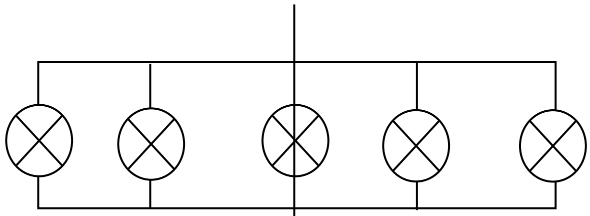


Рис. 2.31

Знайти розподіл імовірностей кількості несправних ламп. Знайти ймовірності того, що: а) шкала буде освітлена; б) вийде з ладу не більше половини ламп.

2.9. Радіолокаційний сигнал складається з 4 імпульсів, кожен з яких незалежно від інших може бути заглушений перешкодами з імовірністю 0.1. Записати таблицю розподілу кількості імпульсів, що незаглушені.

2.10. Стрілець, що влучає в мішень при одному пострілі з імовірністю $\frac{2}{5}$, веде вогонь до першого влучення. Записати таблицю розподілу ймовірностей ВВ X, яка дорівнює кількості пострілів, що були зроблені. Відомо, що у мішень влучили і стрілець мав 4 патрони.

2.11. Розв'язати задачу 2.10 за умови, що вогонь ведеться до 2 влучень.

2.12. ВВ X рівномірно розподілена в проміжку $[-1;1]$. Записати $p_X(x)$ і знайти ймовірності подій: а) $\{X \geq 1\}$; б) $\left\{X \geq \frac{1}{2}\right\}$; в) $\left\{|X| \leq \frac{1}{3}\right\}$; г) $\left\{-\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{5}\right\}$; д) $\left\{\left|X - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{4}\right\}$.

2.13. ВВ X рівномірно розподілена в проміжку $\left[\frac{1}{2};4\right]$. Записати $p_X(x)$ і знайти ймовірності подій: а) $\{X < 1\}$; б) $\{|X-2| > 1\}$; в) $\{X \geq 3\}$; г) $\{0 \leq X \leq 2\}$.

Щільності ймовірностей ВВ X в задачах 2.14-2.16 відповідно дорівнюють:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{H}{2}, x \in [-1;0), \\ H, x \in [0;1), \\ 0, x \notin [-1;1); \end{cases} \quad p_X(x) = \begin{cases} H, |x| \leq 1, \\ \frac{H}{2}, 1 < |x| \leq 3, \\ 0, |x| > 3; \end{cases} \quad p_X(x) = \begin{cases} H(1-4x^2), & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.14. Знайти: а) H; б) $P\{X\in[0;1)\}$; в) $F_X(x)$.

2.15. Знайти: а) H; б) $P\left\{X\in\left[-\frac{1}{2};1\right)\right\}$; в) $F_X(x)$.

2.16. Знайти: а) H; б) $P\left\{X\in\left[\frac{1}{4};1\right)\right\}$; в) $F_X(x)$.

2.17. ВВ X розподілена за нормальним законом $N(5;4)$. Знайти ймовірності таких подій: а) $\{X>5\}$; б) $\{X<0\}$; в)$\{|X-5|<1\}$; г) $\{|X-5|>6\}$; д) $\{|X|<2\}$.

2.18. ВВ X розподілена за нормальним законом $N(-2;9)$. Знайти ймовірності таких подій: а) $\{X>0\}$; б) $\{X<-1\}$; в) $\{|X+2|<9\}$; г) $\{|X+2|<1\}$; д) $\{|X|<2\}$.

2.19. ВВ X розподілена за нормальним законом $N(2;0.16)$. Знайти ймовірності таких подій: а) $\{X>0\}$; б) $\{X<1.5\}$; в) $\{|X-2|<1\}$; г) $\{|X-2|>0.5\}$; д) $\{|X|<1.6\}$.

2.20. ВВ X розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda=2$. Знайти ймовірності таких подій: а) $\{X>1\}$; б) $\{X\in[1;4)\}$; в) $\left\{\left|X-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{3}\right\}$; г) $\{X<0.5\}$; д) $\{2X<5\}$.

2.21. ВВ X розподілена за законом Релея з параметром $\sigma^2=2$. Знайти ймовірності таких подій: а) $\left\{X<\frac{1}{2}\right\}$; б) $\{X\in[1;4)\}$; в) $\{X>3\}$; г) $\{|X-2|<1.5\}$.

2.22. Щільність імовірності ВВ X дорівнює $p_X(x)$. Знайти щільність імовірності ВВ Y, якщо: а) $Y=AX+B$; б) $Y=X^3$; в) $Y=|X|$; г) $Y=X^2$; д) $Y=X^{-\frac{1}{2}}$.

2.23. ВВ X рівномірно розподілена в проміжку $[0;1]$. Знайти щільність імовірності ВВ Y, якщо: 1) $Y=-3X+2$; 2) $Y=X^3$; 3) $Y=X^2$; 4) $Y=X^{-\frac{1}{2}}$; 5) $Y=\sin\pi X$; 6) $Y=-\ln(1-X)$; 7) $Y=\operatorname{tg}\left(\pi\left(X-\frac{1}{2}\right)\right)$.

2.24. ВВ X розподілена за законом: $p_X(x)=\begin{cases}2x, & \text{якщо } x\in[0;1),\\ 0, & \text{якщо } x\notin[0;1).\end{cases}$ Знайти щільність імовірності ВВ Y, якщо: а) $Y=3X$; б) $Y=3X+2$; в) $Y=X^2$; г) $Y=\sqrt{2X}$; д) $Y=2X^{-\frac{1}{2}}$.

2.25. ВВ X розподілена за законом: $p_X(x)=\begin{cases}3x^2, & \text{якщо } x\in[0;1],\\ 0, & \text{якщо } x\notin[0;1].\end{cases}$ Знайти щільність імовірності ВВ Y, якщо: а) $Y=\dfrac{X}{2}$; б) $Y=\sqrt{\dfrac{X}{3}}$; в) $Y=\dfrac{2}{1+X}$.

2.26. ВВ X має нормальний розподіл $N(3;16)$. За яким законом розподілена ВВ $Y=k\cdot X+l$? Записати закони розподілу ВВ: а) $-3X+5$; б) $2X+4$; в) $-\dfrac{X}{2}+1$; г) $\dfrac{X}{3}+7$.

2.27. ВВ X розподілена за показниковим законом з параметром λ. Знайти щільність імовірності ВВ Y, якщо: а) $Y=2X+3$; б) $Y=\sqrt{X}$; в) $Y=X^2$; г) $Y=\dfrac{1}{\lambda}\ln X$.

2.28. Рівень сигналу на вході нелінійного перетворювача з характеристикою $y=\sqrt[4]{x}$ є ВВ X, яка розподілена за законом $p_X(x)=e^{-x}1(x)$. Знайти щільність імовірності рівня сигналу на виході перетворювача.

2.29. ВВ X рівномірно розподілена на відрізку $[0;4]$. Знайти щільність розподілу і функцію розподілу ВВ $Y=|X-3|$.

2.30. ВВ X розподілена за законом Гаусса $N(100;225)$. Знайти ймовірність таких подій: 1) $\{X<95\}$; 2) $\{X>90\}$; 3) $\{80\le X<85\}$; 4) $\{|X-100|<15\}$. Знайти також такі значення b, c, d, щоб: 5) $P\{X<b\}=0.975$; 6) $P\{X>c\}=0.9$; 7) $P\{|X-100|<d\}=0.95$.

2.31. Винищувач випускає дві ракети по цілі в напрямку, що знайдено за допомогою бортового радіопеленгатора. Пеленгатор визначає напрямок на ціль з помилкою, яка розподілена за законом Гаусса: $a=0, \sigma=20'$. Ракета виводиться на ціль за допомогою своєї системи самонаведення, коли помилка пеленгу не перевищує $40'$. Ракета, що виведена на ціль, знищує її з імовірністю 0.8. Знайти ймовірність того, що ціль буде знищена.

2.32. Помилка витримування курсу літака розподілена за законом Гаусса: $a=0, \sigma=2^0$. Якого бокового відхилення літака від лінії шляху можна чекати з імовірністю 0.82, коли відстань, яку пройшов літак, дорівнює 150 км?

2.33. Кількість викликів, що надходять на АТС протягом t секунд, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = \alpha \cdot t$, де $\alpha = 2c^{-1}$. Знайти ймовірність таких подій: A={за дві секунди жодного виклику}, B={за дві секунди надійде менше двох викликів}, C={за одну секунду надійде принаймні один виклик}, D={за три секунди надійде не менше, ніж 4 виклики}.

2.34. Кількість помилок X на одній сторінці розподілена за законом Пуассона з параметром λ=2.6. Знайти $P\{X=k\}$ $(k=0,1,2,3)$.

2.35. Кількість замовлень на таксі, що надходять до диспетчера таксопарку за проміжок часу тривалістю t, описується формулою Пуассона з параметром $\lambda = \alpha \cdot t$, де $\alpha = 30\,год^{-1}$. Знайти ймовірність того, що: 1) за чотири хвилини надійдуть три замовлення; 2) за шість хвилин надійде не менше, ніж два замовлення.

2.36. Кількість збоїв у роботі автомата за проміжок часу тривалістю t описується формулою Пуассона з параметром $\lambda = \alpha \cdot t$, $\alpha = 10^{-5} c^{-1}$. Знайти ймовірності: а) безперебійної роботи автомата протягом доби; б) не більше двох збоїв роботи автомата протягом 5 діб.

2.37. Кількість влучень метеоритів у супутник протягом проміжку часу тривалістю Δt описується законом Пуассона з параметром $\lambda = \alpha \cdot \Delta t$, де $\alpha = 2 \cdot 10^{-7} c^{-1}$. Пошкодження супутника влученням метеорита відбувається з імовірністю 0,08. Знайти ймовірність того, що за рік супутник не буде пошкоджено.

2.38. **Імовірним відхиленням** називається таке значення E, при якому $P\{-E \le X - MX \le E\}$=0.5. Нехай $X \sim N\left(a; \sigma^2\right)$: 1) показати, що $E \cong 0.674\sigma$; 2) при розрахунках у теорії стрільби застосовують правило 25–16–7–2: $P\left\{X-a \in (0;E)\right\}$=0.25, $P\left\{X-a \in (E;2E)\right\}$=0.16, $P\left\{X-a \in (2E;3E)\right\}$ =0.07, $P\left\{X-a \in (3E;4E)\right\} = 0.02$ Перевірити точність цього правила.

Відповіді

2.1. $\frac{5}{18}$. **2.3.** б) $\frac{5}{6}$. **2.4.** б) $\frac{6}{11}$. **2.5.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{31}{32}$; в) $\frac{15}{32}$. **2.6.** 0.972. **2.7.** 0.896; 0.8192. **2.8.** а) $\frac{1023}{1024}$; б) $\frac{918}{1024}$. **2.10.** 0.4596; 0.2757; 0.1655; 0.0993. **2.11.** $\frac{25}{82}$; $\frac{15}{41}$; $\frac{27}{82}$. **2.12.** а) 0; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{11}{30}$; д) $\frac{3}{4}$. **2.13.** а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{3}{7}$. **2.14.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **2.15.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{8}$. **2.16.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{5}{32}$. **2.17.** а) $\mathbf{\frac{1}{2}}$; б) 0.0062; в) 0.3830; г) 0.0027; д) 0.0668. **2.18.** а) 0.2526; б) 0.6304; в) 0.9973; г) 0.2608; д) 0.4086. **2.19.** а) 1; б) 0.1056; в) 0.9876; г) 0.2113; д) 0.1587. **2.20.** а) 0.1353; б) 0.1350; в) 0.5277; г) 0.6321; д) 0.9933. **2.21.** а) 0.06059; б) 0.7605; в) 0.1054; г) 0.8926.

2.22. а) $\frac{1}{|A|}p_X\left(\frac{y-B}{A}\right)$; б) $\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}p_X\left(y^{\frac{1}{3}}\right)$; в) $\left(p_X(y)+p_X(-y)\right)\cdot 1(y)$; г) $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\left(p_X\left(\sqrt{y}\right)+p_X\left(-\sqrt{y}\right)\right)\cdot 1(y)$; д) $2y^{-3}\left(p_X\left(y^{-2}\right)+p_X\left(-y^{-2}\right)\right)\cdot 1(y)$.

2.23. 1) $\begin{cases}\frac{1}{3}, & y\in[-1;2],\\ 0, & y\notin[-1;2]\end{cases}$; 2) $\begin{cases}3^{-1}y^{-\frac{2}{3}}, & 0<y<1,\\ 0, & \{y\le 0\}\cup\{y\ge 1\}\end{cases}$; 3) $\begin{cases}2^{-1}y^{-\frac{1}{2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \{y\le 0\}\cup\{y\ge 1\}\end{cases}$;

4) $\begin{cases}2y^{-3}, & y>1,\\ 0, & y\le 1\end{cases}$; 5) $\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \{y\le 0\}\cup\{y\ge 1\}\end{cases}$; 6) $\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$; 7) $\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$.

2.24. а) $\begin{cases}\frac{2}{9}y, & y\in[0;3],\\ 0, & y\notin[0;3]\end{cases}$; б) $\begin{cases}2\frac{y-2}{9}, & y\in[2;5],\\ 0, & y\notin[2;5]\end{cases}$; в) $\begin{cases}1, & y\in[0;1],\\ 0, & y\notin[0;1]\end{cases}$;

г) $\begin{cases}y^3, & y\in\left[0;\sqrt{2}\right],\\ 0, & y\notin\left[0;\sqrt{2}\right]\end{cases}$; д) $\begin{cases}\frac{64}{y^5}, & y\in[2;+\infty[,\\ 0, & y\notin[2;+\infty[.\end{cases}$ **2.25.** а) $\begin{cases}24y^2, & y\in\left[0;\frac{1}{2}\right],\\ 0, & y\notin\left[0;\frac{1}{2}\right]\end{cases}$;

б) $\begin{cases}162y^5, & y\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right],\\ 0, & y\notin\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\end{cases}$; в) $\begin{cases}\frac{6}{y^2}\left(\frac{2}{y}-1\right)^2, & y\in[1;2],\\ 0, & y\notin[1;2]\end{cases}$. **2.26.** $N\left(3k+l;16k^2\right)$;

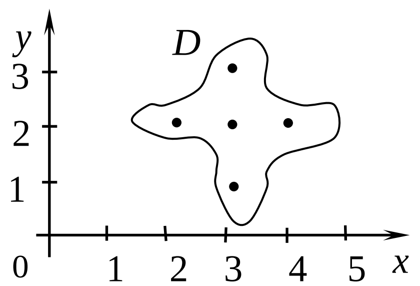
а) $N\left(-4;144\right)$; б) $N\left(10;64\right)$, в) $N\left(-\frac{1}{2};4\right)$; г) $N\left(8;\frac{16}{9}\right)$.

2.27. а) $\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}(y-3)}\cdot 1\left(y-3\right)$; б) $2\lambda y e^{-\lambda y^2}\cdot 1\left(y\right)$; в) $\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot 1\left(y\right)$; г) $\lambda^2 e^{-\lambda\left(e^{-\lambda y}-y\right)}$. **2.28.** $4y^3e^{-y^4}\cdot 1\left(y\right)$. **2.29.** $p_Y(y)=\left\{\frac{1}{2}, x\in\left[0;1\right); \frac{1}{4}, x\in\left(1;3\right)\right\}$; $F_Y(y)=\left\{\frac{x}{2}, x\in\left[0;1\right); \frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-1), x\in\left(1;3\right); 1, x>3\right\}$. **2.30.** 1) 0.3707; 2) 0.7486; 3) 0.0669; 4) 0.6827; 5) 129.4; 6) 80.8; 7) 29.4. **2.31.** 0.9441. **2.32.** 7.014 км. **2.33.** $P\left(A\right)=0.0183$, $P(C)=0.8647$, $P\left(D\right)=0.8488$. **2.34.** $p_0=0.0743$, $p_1=0.1931$, $p_2=0.2510$, $p_3=0.2176$. **2.35.** 1) 0.1804 ; 2) 0.8008. **2.36.** а) 0.4215; б) 0.1949. **2.37.** 0.6041.

2. Випадкові вектори

У задачах 2.39 – 2.42 двовимірний дискретний випадковий вектор рівномірно розподілений на множині точок, які мають цілочисельні координати та розташовані в області D. Знайти: а) розподіл випадкового вектора; б) розподіли координат; в) умовні розподіли (умови вказані); г) імовірність потрапляння $\vec{X}\left(X;Y\right)$ в область G.

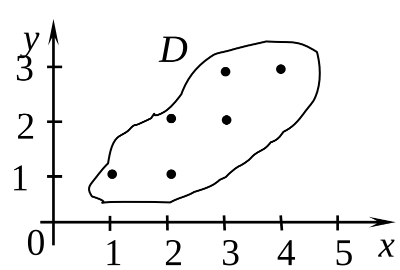
2.39.



в) $P\left\{X=x_k/Y=2\right\}$;

г) $G\left\{\left(x;y\right): \begin{array}{l}1{,}5<x<3{,}5\\ 1{,}5<y<2{,}5\end{array}\right\}$.

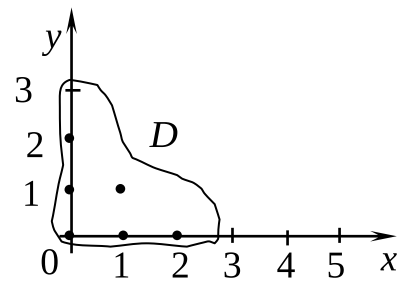
2.40.

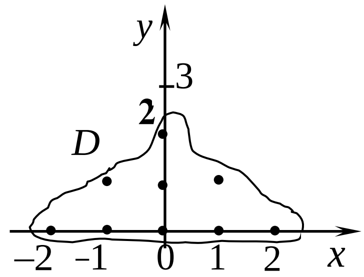


в) $P\left\{X=x_k/Y=3\right\}$;

г) $G\left\{\left(x;y\right): x^2+y^2>7\right\}$.

2.41. 2.42.





в) $P\{X = x_k / Y = 0\}$;
г) $G\{(x;y): x^2 + y^2 < 3\}$.

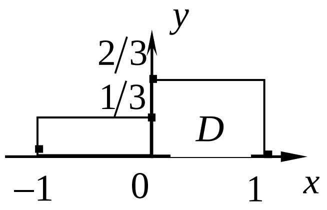
в) $P\{Y = y_k / X = 1\}$;
г) $G\{(x;y): -1 < x < 2\}$.

2.43. Двовимірний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений в області $D\{(x;y): 0 < x < 1, 0 < y < 2\}$. Знайти: а) двовимірну щільність імовірності; б) щільності ймовірності координат X, Y; в) імовірність потрапляння в області: $D_1\{(x;y): y < x\}$, $D_2\{(x;y): y < x^2\}$, $D_3\{(x;y): y < 4x^2\}$. Чи будуть координати X та Y незалежними ВВ?

2.44. Двовимірний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений в області $D\{(x;y): x^2 + y^2 < 4\}$. Знайти: а) двовимірну щільність імовірності $p_{\vec{X}}(x,y)$; б) щільності ймовірності координат; в) умовну щільність імовірності $p_Y(y / X = 1)$; г) імовірність потрапляння $\bar{X}(X;Y)$ в області $G_1\{(x;y): 1 < x^2 + y^2 < 3\}$, $G_2\{(x;y): y > x, y < \sqrt{3}\, x\}$.

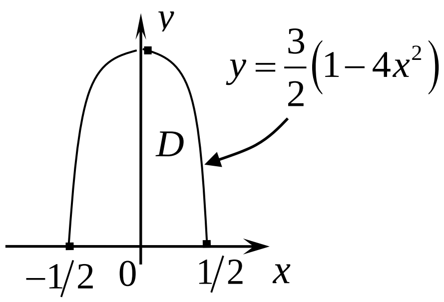
У задачах 2.45 - 2.47 двовимірний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений в області D. Знайти щільності розподілу ймовірностей координат X, Y та ймовірність потрапляння вектора $\vec{X}(X;Y)$ в область G. Чи будуть координати незалежними ВВ?

2.45.



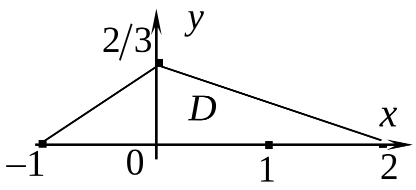
$G\{(x;y): x+y>2/3\}$

2.46.



$G\{(x;y): |x|<1/4\}$

2.47.



$G\left\{\begin{matrix}(x;y): x+y<2/3, \\ x>0, y>0\end{matrix}\right\}$

2.48. Випадковий вектор $\bar{X}(X;Y)$ має щільність розподілу:
а) $p_{\bar{X}}(x,y)=\dfrac{C}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}$; б) $p_{\bar{X}}(x,y)=\dfrac{C}{1+x^2+y^2+x^2\cdot y^2}$.

Знайти: 1) величину C; 2) імовірність потрапляння в квадрат, що обмежений прямими $x=0, x=1, y=0, y=1$.

2.49. Які умови повинні задовольняти числа $a,b,c,$ щоб при відповідному виборі множника C функція $f(x,y)=Ce^{-(ax^2+2bx+cy^2)}$ була щільністю розподілу ймовірностей на площині.

2.50. Двовимірний випадковий вектор $\bar{X}(X;Y)$ розподілений за нормальним законом $p_{\bar{X}}(x,y)=\dfrac{1}{18\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{18}}$. Знайти ймовірність того, що $\bar{X}(X;Y)$ потрапить в області: а) $G_1\{(x;y): 1<x^2+y^2<4\}$; б) $G_2\left\{(x;y): y>\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y<\sqrt{3}x\right\}$. Знайти умовні щільності ймовірності $p_X(x/Y=0)$ та $p_Y(y/X=3)$.

2.51. Двовимірний випадковий вектор $\bar{X}(X;Y)$ розподілений за нормальним законом $p_{\bar{X}}(x,y)=\dfrac{1}{32\pi}e^{-\frac{(x-2)^2+y^2}{32}}$. Знайти: а) умовну щільність імовірності $p_X(x/Y=0)$; б) імовірність того, що $\bar{X}(X;Y)$ потрапить в область $G\{(x;y): x>0\}$.

2.52. Двовимірний випадковий вектор $\bar{X}(X;Y)$ має щільність імовірності $p_{\bar{X}}(x,y)=\begin{cases} C\left(x^2+y^2\right), \text{ якщо } x^2+y^2<4, \\ 0 \quad , \text{ якщо } x^2+y^2\geq 4. \end{cases}$ Знайти: а) значення C; б) щільності імовірності координат; в) умовну щільність імовірності $p_X\left(x/Y=\sqrt{3}\right)$; г) імовірність того, що $\bar{X}\in G\left\{(x;y): x^2+y^2>1\right\}$.

2.53. Двовимірний випадковий вектор $\bar{X}(X;Y)$ має щільність імовірності $p_{\bar{X}}(x,y)=\begin{cases} Cxy, \text{ якщо } (x;y)\in D\left\{x>0, y>0, x^2+y^2<1\right\}, \\ 0 \text{ , якщо } (x;y)\notin D. \end{cases}$
Знайти: а) значення C; б) щільності ймовірностей координат; в) умовну щільність ймовірності $p_X\left(x/Y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) імовірність того, що $\bar{X}(X;Y)\in G\left\{(x;y): y>x, y<x\sqrt{3}\right\}$.

2.54. Стрілок стріляє по мішені, що розділена на зони 10 концентричними колами радіусів $R_1=5$ мм, $R_2=10$ мм, …, $R_{10}=50$ мм. Нехай X, Y - координати отвору в системі координат із початком у центрі мішені. Стрілок одержує 10 очок, якщо $\rho=\sqrt{X^2+Y^2}$ (відстань від отвору до центра мішені) менше за R_1, і $10-i$ очок, якщо $R_i\leq\rho<R_{i+1}(i=1,2,...,9)$. Припустимо, що випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ розподілений за нормальним круговим законом з параметрами $a_1=a_2=0$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=225$ мм^2. Знайти ймовірність вибити: а) 10 очок; б) не менше 8 очок.

2.55. Розв'язати задачу 2.54 за умови, що випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений у колі з радіусом 35 мм. Як зміниться результат, якщо щільність імовірності ВВ ρ має вигляд $p_\rho(r)=C\cdot e^{-\frac{r}{25}}\cdot 1(r)$?

2.56. Двовимірний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ розподілений за нормальним законом $p_{\bar{X}}(x,y)=\dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}}$. Знайти ймовірність того, що $\vec{X}$ потрапить в область: а) $G_1=\left\{(x;y):|x|\leq 2,|y|\leq 1\right\}$; б) $G_2=\left\{(x;y):|x|\leq 2, 0\leq y\leq 2\right\}$;

в) $G_3=\left\{(x;y):0\le x\le 4,0\le y\le 2\right\}$;   г) $G_4=\left\{(x;y):y-x\le 0,|x|\le 2,y\ge -2\right\}$;

д) $G_1=\left\{(x;y):\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1\right\}$.

2.57. Ведеться стрільба по цілі, координати якої задовольняють нерівності: $|x|\le 10$, $|y|\le 100$. Випадкова точка $\vec{X}(X;Y)$ влучення снаряда (у тій самій системі координат) розподілена за законом Гаусса в найпростішій формі з параметрами $a_1,a_2,\sigma_1^2=100$ м^2, $\sigma_2^2=1600$ м^2. "Точкою прицілювання" назвемо точку $(a_1;a_2)$. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі, якщо: а) $a_1=a_2=0$ м; б) $a_1=5$ м, $a_2=0$ м; в) $a_1=10$ м, $a_2=20$ м.

2.58. Щільність розподілу випадкового вектора $\vec{X}(X;Y)$ має вигляд $p_{\vec{X}}(x,y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Знайти: а) щільність розподілу випадкового вектора $(R=\sqrt{X^2+Y^2};\Phi)$, де R та Φ - полярні координати точки X; б) щільність розподілу ВВ R; в) щільність розподілу ВВ Ф.

2.59. Щільність розподілу випадкового вектора $\vec{X}(X;Y)$ має вигляд: а) $p_{\vec{X}}(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$;

б) $p_{\vec{X}}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left(1-x^2-y^2\right), & \text{якщо } 0\le x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2>1.\end{cases}$

Використати результат задачі 2.58 та знайти щільність розподілу випадкового вектора $(R=\sqrt{X^2+Y^2};\Phi)$, де R та Φ - полярні координати точки X.

2.60. Випадкові величини *X, Y* та *Z* є незалежними та розподілені рівномірно на проміжку [0;1]. Знайти ймовірність того, що корені квадратного рівняння – дійсні, якщо: а) $x^2+Yx+Z=0$; б) $Xx^2+x+Z=0$; в) $Xx^2+Yx+Z=0$.

2.61. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ розподілений за законом Гаусса в найпростішій формі $(a_1=a_2=0;\sigma_1=\sigma_2=1)$. Знайти ймовірності подій: 1) $A=\{Y>X\}$; 2) $B=\{|Y|>X\}$; 3) $C=\{Y<3X\}$; 4) $D=\{|X|<1\}$; 5) $E=\{X<1, Y<2\}$; 6) $K=\{1\le X^2+Y^2\le 2\}$.

2.62. Відбувається стрільба по цілі, зона враження якої являє собою коло радіуса r з центром на початку координат. Розсіювання точки влучення снаряда підкоряється нормальному закону в найпростішій формі $(a_1=a_2=0; \sigma_1=\sigma_2=2r)$. Скільки пострілів треба зробити, щоб вразити ціль із імовірністю не менше 0.95.

2.63. Помилка вимірювання деякої величини за одним способом дорівнює $2X$, а за другим – $X+Y$, де X та Y - незалежні ВВ, що розподілені за законом Гаусса $N(0;25$ см$^2)$. Який спосіб вимірювання є більш точним?

2.64. Проводять 100 незалежних вимірювань деякої невідомої величини a. Помилки вимірювань X_1 ,…, X_{100} - ВВ, MX_k=0, $DX_k=0.16$ см^2 (k=1,…, 100). За значення величини a беруть середнє арифметичне результатів вимірювань. Знайти ймовірність того, що помилка не перевищує 0.05 см.

2.65. Підкидають гральний кубик 1000 разів. Знайти проміжок, у якому з імовірністю більше 0.92 буде знаходитись сума очок, що випали.

2.66. Гральний кубик підкидають поки сума очок, що випали, не більше 720. Знайти ймовірність того, що для цього буде потрібно не більше, ніж 210 підкидань.

Відповіді

2.39. а)

X \ Y	1	2	3
2	0	1/5	0
3	1/5	1/5	1/5
4	0	1/5	0

б)

X	2	3	4
P	1/5	3/5	1/5

Y	1	2	3
P	1/5	3/5	1/5

в)

X	2	3	4
$P(X=x_k/Y=2)$	1/3	1/3	1/3

г) 2/5.

2.40. а)

Y \ X	1	2	3
1	1/6	0	0
2	1/6	1/6	0
3	0	1/6	1/6
4	0	0	1/6

б)

X	1	2	3	4
P	1/6	1/3	1/3	1/6

Y	1	2	3
P	1/3	1/3	1/3

в)

X	3	4
$P(X{=}x_k/Y{=}3)$	1/2	1/2

г) 1/2.

2.41. а)

Y \ X	0	1	2
0	1/6	1/6	1/6
1	1/6	1/6	0
2	1/6	0	0

б, в)

X,Y	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

X	0	1	2
$P(X{=}x_k/Y{=}0)$	1/3	1/3	1/3

г) 2/3.

2.42. а)

Y \ X	0	1	2
-2	1/9	0	0
-1	1/9	1/9	0
0	1/9	1/9	1/9
1	1/9	1/9	0
2	1/9	0	0

б, в)

X	-2	-1	0	1	2
P	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

Y	0	1	2
P	5/9	3/9	1/9

Y	0	1
$P(X{=}x_k/Y{=}0)$	1/2	1/2

г) 2/3.

2.43. а) $p_{\bar{X}}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$; б) $p_X(x)=1,\ \ x\in[0;1]$; $p_Y(y)=\frac{1}{2},\ \ y\in[0;2]$;

в) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},1-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

2.45. $p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[-1;0),\\ \frac{2}{3}, & x\in[0;1]\end{cases}$; $\quad p_Y(y)=\begin{cases}2, & y\in\left[0;\frac{1}{3}\right),\\ 1, & y\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]\end{cases}$; $\quad\frac{4}{9}$.

2.46. $p_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(1-4x^2\right), & x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\end{cases}$; $p_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{1-\frac{2}{3}y}, & y\in\left[0;\frac{3}{2}\right),\\ 0, & y\notin\left[0;\frac{3}{2}\right)\end{cases}$; $\frac{11}{16}$.

2.47. $p_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}(1+x), & x\in[-1;0),\\ \frac{1}{3}(2-x), & x\in[0;2),\\ 0, & \{x\geq 2\}\cup\{x<-1\};\end{cases}$ $\quad p_Y(y)=3-\frac{9}{2}y, y\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$; $\quad\frac{2}{9}$.

2.44. а) $p_{\bar{X}}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi}, & (x;y)\in D,\\ 0, & (x;y)\notin D\end{cases}$; б) $p_X(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}$,

$p_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}$; в) $p_Y\left(y/X=1\right)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{3}}, & |y|\leq 3,\\ 0, & |y|>3\end{cases}$; г) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{24}$.

2.48. а) $C=\sqrt{3}$, $\frac{1}{24}$; б) $C=\frac{1}{\pi^2}$, $\frac{1}{16}$. **2.49.** $a,c>0, C=\frac{\sqrt{a\cdot c}}{\pi}e^{-\frac{b^2}{a}}$.

2.50. а) 0.1452; б) $\frac{1}{12}$; в) $p_X\left(x/Y=0\right)=p_X(x)==\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{18}}$,

$p_Y\left(y/X=3\right)=p_Y(y)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{18}}$. **2.51.** а) $p_X\left(x/Y=0\right)=p_X(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$;

б) 0.6915. **2.52.** а) $\frac{1}{8\pi}$; б) $p_X(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{6\pi}\cdot\left(2+x^2\right)$;

в) $p_X\left(x/Y=\sqrt{3}\right)=\frac{3}{20}\left(x^2+3\right)$; г) $\frac{15}{16}$. **2.53.** а) 8;

б) $p_X(x)=4x\left(1-x^2\right), x\in[0;1]$; в) $p_X\left(x/Y=\sqrt{3}/2\right)=8x$; г) $\frac{1}{4}$.

2.54. а) 0.0540; б) 0.3935. **2.55.** $\frac{1}{49}$; $\frac{9}{49}$; 0.01813; 0.4512.

2.56. а) 0.4659; б) 0.3257; в) 0.2277; г) 0.3257; д) $1-e^{-0.5}$.

2.57. а) 0.6204; б) 0.6169; в) 0.4657. **2.58.** а) $p_{(R;\Phi)}(r,\varphi)=r\cdot g(r)$;

б) $p_R(r)= =2\pi r\cdot g(r)$; в) $p_\Phi(\varphi)=\frac{1}{2\pi},\varphi\in[0;2\pi$ **). 2.59.**

а) $p_{(R;\Phi)}(r,\varphi)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}r^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$;

б) $p_{(R;\Phi)}(r,\varphi)=\frac{2r}{\pi}\left(1-r^2\right),\ r\in[0;1]$. **2.60.** а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{1+2\ln 2}{4}\approx 0.6$;

в) $\frac{5+6\ln 2}{36}\approx$ 0.25. **2.61.** 1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$; 2) $\mathbf{\frac{3}{4}}$; 3) $\mathbf{\frac{1}{2}}$; 4) $\Phi(1)=0.3413$;

5) $\left(\Phi(1)+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\Phi(2)+\frac{1}{2}\right)$= 0.8222; 6) $e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$. **2.62.** $n\geq 24$.

2.63. другий. **2.64.** 0.7887. **2.65.** (3405;3595). **2.66.** 0.2723.

Розділ 3
ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Математичне сподівання та його властивості

3.1.1. Стійкість середнього арифметичного

Повну інформацію про ВВ дає її розподіл імовірностей. Проте для розв'язання багатьох задач така надмірна інформація не є необхідною. Загальне уявлення про ВВ величину можна отримати за допомогою кількох чисел, які характеризують окремі суттєві риси її розподілу (подібно до того, як уявлення про геометричну форму твердого тіла дається його довжиною, висотою, об'ємом і моментами інерції). Найчастіше використовують дві характеристики ВВ X – її математичне сподівання (м.с.) (інакше середнє значення) і дисперсію.

Нехай ВВ X приймає відповідно значення $x_1, x_2, \ldots, x_m$ з імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Проведемо серію з n випробувань, у кожному з яких будемо спостерігати значення ВВ. Припустимо, що в цій серії ВВ X прийняла n_k раз значення x_k ($k=1, 2, \ldots, m$). Складемо середнє арифметичне результатів спостереження випробувань:

$$\bar{x}=\frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_m \cdot n_m}{n} = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots + x_m \cdot \frac{n_m}{n} .$$

Середнє арифметичне є ВВ, оскільки воно залежить від конкретної серії випробувань і від n. Однак із емпіричного закону стійкості частоти ($n_k / n \approx p_k$ при досить великому n) випливає статистична **стійкість середнього арифметичного**, а саме при досить великому n маємо $\bar{x} \approx x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_m \cdot p_m$.

3.1.2. Математичне сподівання випадкової величини

Визначення 1. Математичним сподіванням ВВ X називається число MX, яке залежно від типу ВВ визначається формулою

$$MX=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n(+\infty)} x_k\cdot p_k\,, & \text{якщо ВВ } X \text{ є дискретною;}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p_X(x)dx\,, & \text{якщо ВВ } X \text{ є неперервною.}\end{cases} \tag{3.1}$$

При цьому завжди будемо припускати, що відповідні ряди і інтеграли збігаються абсолютно.

Математичне сподівання дає уявлення про розташування значень ВВ. Розмірність математичного сподівання MX співпадає з розмірністю ВВ X. Інколи для математичного сподівання використовуються інші позначення, наприклад m_X, EX.

Вибір математичного сподівання як характеристики розподілу значною мірою пояснюється можливістю його статистичного тлумачення.

Приклад 1. Нехай подія A з'являється у випробуванні з імовірністю p. Знайти математичне сподівання кількості появ події A в даному випробуванні.

Розв'язання. Позначимо кількість появ події A у випробуванні через X. Величина X – випадкова, приймає свої значення 0 і 1 з імовірностями $1-p$ та p. Тоді на підставі формули (3.1) (верхній рядок) одержимо

$$MX=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p\,.$$

Приклад 2. ВВ X дорівнює модулю різниці кількості очок, що випали при двох підкиданнях грального кубика. Знайти: 1) MX; 2) $P\{X>1\}$, $P\{2<X\leq 4\}$.

Розв'язання. ВВ X може прийняти одне зі значень $x_1=0, x_2=1,\ \ x_3=2,\ x_4=3, x_5=4, x_6=5$.

Значенню 0 відповідають 6 з 36 рівноможливих результатів експерименту. Значенню 1 відповідають 10 сприятливих результатів експерименту: (1;2), (2;1), (2;3), (3;2), (3;4), (4;3), (4;5), (5;4), (5;6), (6;5). Отже, маємо

$$p_1=P\{X=0\}=\frac{6}{36},\ p_2=P\{X=1\}=\frac{10}{36},\ p_3=P\{X=2\}=\frac{8}{36},$$

$$p_4=P\{X=3\}=\frac{6}{36},\ p_5=P\{X=4\}=\frac{4}{36},\ p_6=P\{X=5\}=\frac{2}{36}.$$

1) за формулою (3.1) отримуємо

$$MX = \sum_{k=1}^{6} x_k P\{X = x_k\} = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{35}{18};$$

2) $P\{X > 1\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = \dfrac{5}{9};$

$P\{2 < X \le 4\} = P\{X = 3\} + P\{X = 4\} = \dfrac{5}{18}.$

Приклад 3. Знайти математичне сподівання ВВ X, розподіленої за законом Пуассона з параметром λ (формула (2.6)).

Розв'язання. Оскільки $p_k = P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ (k=0,1,...), то за формулою (3.1) маємо

$$MX = 0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots + k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \left(1 + \lambda + \ldots + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots \right) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda .$$

Приклад 4. Знайти математичне сподівання ВВ X, розподіленої за показниковим законом з параметром λ (формула (2.12)).

Розв'язання. На підставі формули (3.1) (нижній рядок) одержимо шляхом інтегрування частинами

$$MX = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Звідси випливає, що середній проміжок часу T між двома послідовними відмовами апаратури дорівнює $1/\lambda$, якщо тривалість проміжку часу між двома послідовними відмовами апаратури розподілена за показниковим законом з параметром λ. З цієї причини показниковий розподіл у теорії надійності записується як

$$p_T(t) = \frac{1}{T_0} e^{-t/T_0} \cdot \mathbf{1}(t),$$

де T_0 - середній час роботи до відмови.

Приклад 5. Стрілець, який має m патронів, влучає в мішень при кожному пострілі з імовірністю p. Стрільба йде до першого влучення в мішень. Знайти математичне сподівання кількості витрачених патронів.

Розв'язання. Нехай X – кількість витрачених патронів. На підставі результату прикладу 2 п. 2.1.2 отримуємо

$$MX = p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2 p + \ldots + (m-1)(1-p)^{m-2} p + m(1-p)^{m-1} =$$
$$= p[1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \ldots (m-1)(1-p)^{m-2}] + m(1-p)^{m-1}.$$

Позначимо через S суму у квадратних дужках. Тоді

$$(1-p)S = 1 - p + 2(1-p)^2 + \ldots + (m-1)(1-p)^{m-1}$$

і, отже, є справедливим співвідношення

$$pS = S - (1-p)S = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots + (1-p)^{m-2} - (m-1)(1-p)^{m-1} =$$
$$= \frac{1-(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)} - (m-1)(1-p)^{m-1} = \frac{1-(1-p)^{m-1} - (m-1)(1-p)^{m-1} p}{p}$$

(тут була використана формула для суми геометричної прогресії зі знаменником 1-p). Таким чином,

$$MX = \frac{1-(1-p)^{m-1} - (m-1)p(1-p)^{m-1} + mp(1-p)^{m-1}}{p} = \frac{1-(1-p)^{m-1} + p(1-p)^{m-1}}{p} =$$
$$= \frac{1-(1-p)^m}{p}.$$

Якщо кількість патронів необмежена, то за допомогою граничного переходу при $m \to \infty$ маємо $MX = \frac{1}{p}$. Цей результат є інтуїтивно зрозумілим.

При обчисленні математичного сподівання доцільно використовувати такий результат.

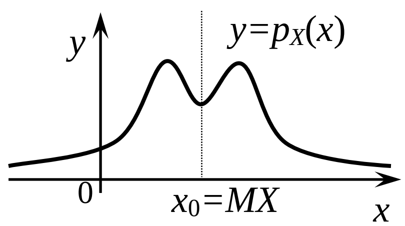


Рис.3.1

Теорема 1. Якщо розподіл ВВ X є симетричним відносно прямої $x=x_0$, то $MX=x_0$ (рис. 3.1).

Наслідки:

1. Математичне сподівання ВВ, розподіленої за законом Гаусса $N(a;\sigma^2)$ (формула (2.13)), дорівнює a.

2. Математичне сподівання рівномірного у проміжку $[c;\,d]$ розподілу (формула (2.1)) дорівнює $(c+d)/2$.

3. Математичне сподівання ВВ, розподіленої за законом Стьюдента $\tau(n)$ (формула (2.41)), дорівнює 0.

Приклад 6. Знайти математичне сподівання ВВ, розподіленої: 1) за законом Релея з параметром σ^2 (формула (2.39)); 2) за логнормальним законом (формула (2.16)).

***Розв'язання*:** 1) за формулою (3.1) маємо

$$MX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}\cdot e^{-x^2/2\sigma^2}dx=-\int_0^{+\infty}x\cdot d\left(e^{-x^2/2\sigma^2}\right)=-x\cdot e^{-x^2/2\sigma^2}\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+\int_0^{+\infty}e^{-x^2/2\sigma^2}dx=\sigma\sqrt{2\pi}\,\Phi(+\infty)=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

2) після підстановки $\ln x-a=t$ отримуємо

$$MX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{t+a}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=$$

$$=e^a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{2}}dt=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

За умови нормування останній інтеграл дорівнює 1 (підінтегральна функція являє собою щільність імовірності випадкової величини, яка розподілена за законом $N(\sigma^2;\sigma^2)$ і, таким чином,

$$MX=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Теорема 2 (А.А. Марков). Якщо випадкова величина $X\geq 0$, то для довільного $\varepsilon>0$ має місце оцінка

$$\boxed{P\{X\geq\varepsilon\}\leq\frac{MX}{\varepsilon}.}\qquad(3.2)$$

Доведення. Доведення нерівності (3.2) наведемо лише для неперервної випадкової величини. Дійсно,

$$P\{X \geq \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} p_X(x)dx \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon} p_X(x)dx = \text{(оскільки } x \geq \varepsilon \text{ при } x \in [\varepsilon;+\infty)\text{)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{+\infty} xp_X(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{+\infty} xp_X(x)dx = \frac{1}{\varepsilon}MX .$$

Приклад 7. Середні витрати води в селище складають 50000 л за добу. Оцінити ймовірність того, що витрати води у визначену добу не перевищують 150000 л.

Розв'язання. Нехай X – витрати води за добу. Тоді на підставі формули (3.2) маємо

$$P\{X \geq 150000\} \leq \frac{1}{150000} \cdot 50000 = \frac{1}{3}.$$

3.1.3. Математичне сподівання функції випадкової величини

Математичне сподівання ВВ $Y = g(X)$ можна знайти, якщо є відомим лише закон розподілу ВВ X (тобто визначати закон розподілу ВВ $Y = g(X)$ не треба).

Теорема 3. Нехай розподіл ВВ X є відомим. Тоді математичне сподівання ВВ$Y = g(X)$ дорівнює

$$\boxed{MY = Mg(X) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n(+\infty)} g(x_k) \cdot p_k & \text{, якщо } BB\ X\ \text{є дискретною;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot p_X(x)dx, & \text{якщо } BB\ X\ \text{є неперервною.} \end{cases}} \tag{3.3}$$

Доведення. Доведення формули (3.3) проведемо лише для випадку функції неперервної ВВ X. При цьому будемо припускати, що $g(x)$ є зростаючою функцією, областю визначення і областю значень якої є відповідно вісь Ox і вісь Oy. Функцію, обернену до $g(x)$, позначимо $h(y)$. Тоді за формулою (2.15) маємо $p_Y\left(y\right)=p_X\left(h(y)\right)\cdot\dfrac{dh(y)}{dy}$ і, отже,

$$MY=Mg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p_X(h(y))\cdot h'(y)dy\,.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну

$$y=g\left(x\right)\Leftrightarrow dy=g'\left(x\right)dx\quad,\;p_X\left(h\left(y\right)\right)=p_X\left(h\left(g\left(x\right)\right)\right)=p_X\left(x\right),h'\left(y\right)=\frac{1}{g'\left(x\right)}\,.$$

Таким чином, остаточно маємо

$$MY=Mg\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot p_X\left(x\right)dx\,.$$

Наслідок. Якщо k і l – є сталими, то

$$\boxed{M(kX+l)=k\cdot MX+l.}\qquad(3.4)$$

Доведення. Дійсно,

$$M(kX+l)=\int_{-\infty}^{+\infty}(kx+l)p_X(x)dx=k\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx+l\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)dx=k\cdot MX+l.$$

Зокрема при k=0 отримуємо, що математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій.

ВВ називається **центрованою**, якщо її математичне сподівання дорівнює нулю. ВВ $\overset{o}{X}=X-MX$ називається флуктуацією ВВ X . Із формули (3.4) випливає, що флуктуація є центрованою ВВ. Дійсно,

$$M\overset{o}{X}=M(X-MX)=MX-MX=0\,.$$

Приклад 8. ВВ X задана щільністю $p_X(x)=4x^3$ ($x\in[0;1]$). Знайти математичне сподівання ВВ: 1) $Y=2X^2-X$; 2) $Y=e^{X^2}$.

***Розв'язання*.** На підставі формули (3.3) знаходимо:

1) $M(2X^2 – X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(2x^2 - x)p_X(x)dx = \int\limits_0^1 (2x^2 - x)\,4x^3dx = 8/15$;

2) $M\left(e^{X^2}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\cdot p_X(x)dx = \int\limits_0^1 e^{x^2}\cdot 4x^3dx = 2\int\limits_0^1 te^t dt = 2$.

Приклад 9. Закон розподілу ВВ X задано таблицею

X	0	1	2	3	4
P	0.05	0.25	0.40	0.20	0.10

Знайти математичне сподівання ВВ $Y = X^2 - 3X + 1$.

Розв'язання. За формулою (3.3) (перший рядок) маємо

$$MY = M(X^2 - 3X + 1) = 1\cdot 0.05 + (-1)\cdot 0.25 + (-1)\cdot 0.40 + 1\cdot 0.20 + 5\cdot 0.10 = 0.1.$$

3.1.4. Математичне сподівання функції випадкового вектора

Сформулюємо результат, у якому формули (3.1) та (3.3) містяться як окремі випадки.

Теорема 4. Нехай розподіл ВВ-ра $\vec{X}(X;Y)$ є відомим. Тоді математичне сподівання випадкової величини $Z = g(X,Y)$ знаходиться за формулою

$$\boxed{Mg(X,Y) = \begin{cases} \sum\limits_k \sum\limits_j g(x_k, y_j)\cdot p_{kj}, \text{якщо ВВ-р } \vec{X} \text{ є дискретним;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,p_{\vec{X}}(x,y)dxdy, \text{якщо ВВ-р } \vec{X} \text{ є неперервним.} \end{cases}} \quad (3.5)$$

Зокрема якщо ВВ $g(X,Y)$ дорівнює X, Y, $X+Y$, $X\cdot Y$, приходимо до формул (формули записані лише для випадку неперервних ВВ):

$$\boxed{MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp_{\vec{X}}(x,y)dxdy,\ MY = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yp_{\vec{X}}(x,y)dxdy,} \quad (3.6)$$

$$\boxed{M(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\cdot p_{\vec{X}}(x,y)\,dxdy,} \qquad (3.7)$$

$$\boxed{M(X\cdot Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot y\cdot p_{\vec{X}}(x,y)\,dxdy.} \qquad (3.8)$$

Із формул (3.6)-(3.8) випливають такі властивості математичного сподівання.

Теорема 5. Математичне сподівання суми ВВ дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$\boxed{M(X+Y)=MX+MY.} \qquad (3.9)$$

Доведення. Скористаємося лінійністю інтеграла у формулі (3.7), а потім формулою (3.6).

Рівність (3.9) має місце для будь-якої скінченної кількості випадкових величин

$$\boxed{M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=MX_1+MX_2+\ldots+MX_n.} \qquad (3.10)$$

Теорема 6. Математичне сподівання добутку незалежних ВВ *X* та *Y* дорівнює добутку математичних сподівань цих ВВ

$$\boxed{M(X\cdot Y)=MX\cdot MY.} \qquad (3.11)$$

Доведення. Оскільки ВВ *X* та *Y* незалежні, то на підставі формули (2.31) $p_{\vec{X}}(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$. У цьому випадку інтеграл у формулі (3.8) розпадається на добуток інтегралів, один із яких за формулою (3.1) є *MX*, а другий – *MY*.

Рівність (3.11) має місце для будь-якої скінченної кількості незалежних випадкових величин

$$\boxed{M(X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_n)=MX_1\cdot MX_2\cdot\ldots\cdot MX_n.} \qquad (3.12)$$

Зауваження. Із справедливості співвідношення (3.11) не випливає незалежність випадкових величин *X* та *Y*. Дійсно, нехай $Y=X^2$, а

X	–1	1
P	1/2	1/2

Тоді $MX = (-1)\cdot 1/2+1\cdot 1/2 = 0$, $MY = M(X^2) = 1\cdot 1/2+1\cdot 1/2 = 1$, $M(X\cdot Y) = M(X^3) = (-1)\cdot 1/2+1\cdot 1/2 = 0$.

Таким чином, $M(X\cdot Y)=MX\cdot MY$, але ВВ X та Y залежні не тільки в імовірнісному сенсі, а і функціонально. Співвідношення (3.1) є необхідною але не є достатньою умовою незалежності ВВ X та Y.

Приклад 10. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, яка має біноміальний розподіл (формула (2.5)).

Розв'язання. Будемо розглядати X як кількість появ події A у серії з n незалежних випробувань з імовірністю p появи в кожному з них. Позначимо через X_i (i=1,...,n) кількість появ події A у i-му випробуванні. Тоді $X=X_1+X_2+...+X_n$ і на підставі формули (3.8) одержимо $MX=MX_1+MX_2+...+MX_n$. Оскільки величини X_i мають однаковий розподіл, то на підставі результату прикладу 1 п. 3.1.2 одержимо

$$\boxed{MX = n\cdot MX_n= n\cdot p.}$$

Звідси випливає, що математичне сподівання частоти X/n появ події A дорівнює

$$\boxed{M(X/n)=\frac{1}{n}MX=\frac{np}{n}=p\,.}$$

Приклад 11. У теорії масового обслуговування зустрічається ВВ η, що є сумою n незалежних ВВ, кожна з яких розподілена за показниковим законом з параметром λ. Знайти математичне сподівання ВВ η.

Розв'язання. Враховуючи результат прикладу 3 п. 3.1.2, на підставі формули (3.9) будемо мати $M\eta=n/\lambda$.

Закон розподілу величини η – закон Ерланга n–1-го порядку (формула (2.44)).

Приклад 12. Випадковий вектор $\vec{X}=(X;Y)$ задано законом розподілу

Y / X	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
2	0.3	0.1	0.2

Знайти математичне сподівання ВВ $2X^2+3Y-X\cdot Y^2$.

Розв'язання. Враховуючи формулу (3.5), маємо $M(2X^2+3Y-X\cdot Y^2)=(0-3-0)\cdot 0.1+(0+3+0)\cdot 0.1+(8-3-2)\cdot 0.3+$ $+8\cdot 0.1+(8+3-2)\cdot 0.2=3.5.$

3.1.5. Кореляційний момент випадкових величин

Визначення 2. Кореляційним моментом (коваріацією) $K(X,Y)$ випадкових величин X та Y називається число

$$\boxed{K(X,Y)=M(\overset{o}{X}\cdot\overset{o}{Y}).} \tag{3.13}$$

Ця величина має розмірність, що дорівнює добутку розмірностей випадкових величин X та Y. Скориставшись властивостями математичного сподівання, можна привести формулу (3.13) до вигляду

$$\boxed{K(X,Y)=M(X\cdot Y)-MX\cdot MY.} \tag{3.14}$$

Дійсно,

$$K(X,Y)=M(\overset{o}{X}\cdot\overset{o}{Y})=M((X-MX)\cdot(Y-MY))=$$
$$=M(X\cdot Y)-MX\cdot MY-MX\cdot MY+MX\cdot MY=M(X\cdot Y)-MX\cdot MY.$$

Випадкові величини називаються **корельованими** при $K(X,Y)\neq 0$ і **некорельованими** при $K(X,Y)=0$. Незалежні ВВ X та Y є некорельованими. Дійсно, якщо X і Y незалежні ВВ, то з формули (3.11) випливає, що $K(X,Y)=M(X\cdot Y)-(MX)\cdot(MY)=0$. Однак із некорельованості ВВ X та Y ще не випливає незалежність цих величин (див. зауваження до теореми 6 п. 3.1.4). Отже, незалежність випадкових величин і їх некорельованість, взагалі кажучи, не є рівносильними умовами.

Приклад 13. Знайти кореляційний момент координат випадкового вектора, заданого таблицею

$X \backslash Y$	1	2
2	0.3	0.5
3	0.1	0.1

Розв'язання. За формулами (3.6) та (3.8) знаходимо

$$M(X\cdot Y)=\sum\sum x_k y_j p_{kj}=1\cdot 2\cdot 0.3+2\cdot 2\cdot 0.5+3\cdot 1\cdot 0.1+3\cdot 2\cdot 0.1=3.5,$$
$$MX=2\cdot 0.3+2\cdot 0.5+3\cdot 0.1+3\cdot 0.1=2.2,\ MY=1\cdot 0.3+1\cdot 0.1+2\cdot 0.5+3\cdot 0.1=1.6.$$

Тоді за формулою (3.14) одержимо

$$K(X,Y)=3.5–2.2\cdot 1.6=-0.02$$

і, таким чином, координати X та Y є залежними величинами.

Приклад 14. Випадковий вектор рівномірно розподілений в області $D\{(x,y): 0<y<x^3, 0<x<1\}$ (рис. 3.2). Знайти кореляційний момент його координат.

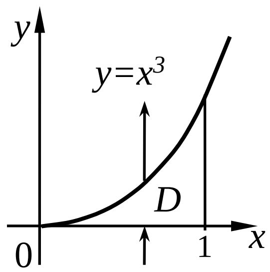


Рис. 3.2

Розв'язання. Площа області D дорівнює $\int_0^1\left(\int_0^{x^3} dy\right)dx=\frac{1}{4}$. Отже, $p_{\vec{X}}(x,y)=4$, якщо $(x,y)\in D$. Тому на підставі формул (3.6), (3.8), (3.14) маємо

$$M(X\cdot Y)=4\int_0^1\left(\int_0^{x^3} xydy\right)dx=2\int_0^1 x^7dx=\frac{1}{4},\quad MX=4\int_0^1\left(\int_0^{x^3} xdy\right)dx=\frac{4}{5},$$
$$MY=4\int_0^1\left(\int_0^{x^3} ydy\right)dx=\frac{2}{7}\quad\Rightarrow\quad K(X,Y)=\frac{1}{4}-\frac{8}{35}=\frac{3}{140}.$$

Оскільки $K(X,Y)\neq 0$, то величини X та Y є залежними.

Приклад 15. В умовах прикладу 21 п. 2.2.3 знайти кореляційний момент координат випадкового вектора $\vec{X}=(X;Y)$.

***Розв'язання*:**

$$M(X\cdot Y)=\int_0^1\left(\int_x^1 xy\cdot 6xdy\right)dx=6\int_0^1\left(x^2\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_x^1\right)dx=3\int_0^1(x^2-x^4)dx=3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5},$$

$$MX=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\quad MY=\int_0^1 y\cdot 3y^2dy=\frac{3}{4}.$$

Таким чином, $K(X,Y)=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{40}$.

3.2. Дисперсія випадкової величини

3.2.1. Дисперсія випадкової величини та її властивості

Після того як математичне сподівання ВВ знайдено, виникає питання, наскільки сильно значення ВВ відхиляється від математичного сподівання. Характеристикою міри розсіювання ВВ навколо математичного сподівання є математичне сподівання квадрата флуктуації ВВ (математичне сподівання флуктуації не придатне, тому що воно завжди дорівнює нулю). Інколи в якості характеристики розсіювання ВВ використовують математичне сподівання абсолютної величини її флуктуації.

Визначення 3. Дисперсією випадкової величини X (позначається DX або D_X) називається невід'ємне число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата флуктуації цієї величини:

$$\boxed{DX=D_X=M\,(\overset{\circ}{X})^2.}\tag{3.15}$$

Розмірність дисперсії дорівнює квадрату розмірності ВВ X. Тому зручно з практичної точки зору приймати як міру розсіювання ВВ **середнє квадратичне (стандартне)** відхилення (СКВ) $\sigma_X=\sqrt{DX}$, вимірність якого співпадає з вимірністю ВВ X.

Чим менше σ_X (DX), тим тісніше групуються значення випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Дисперсія допускає важливе енергетичне тлумачення. Нехай X – миттєве значення сили струму, що проходить через резистор з опором 1 Ом. Тоді миттєве значення потужності, яке виділяється флуктуаційною складовою струму на резисторі, дорівнює $(\mathring{X})^2$. Отже, дисперсія струму X дорівнює середньому значенню миттєвої потужності, яка виділяється флуктуаційною складовою струму на резисторі з одиничним опором.

При знаходженні дисперсії, як правило, використовують не формулу (3.15), а інший вираз, який одержується з правої частини цієї формули на підставі властивостей математичного сподівання:

$$M(\mathring{X})^2 = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2) =$$

$$= M(X^2) - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = M(X^2) - (MX)^2.$$

Таким чином,

$$\boxed{DX = M(X^2) - (MX)^2.} \tag{3.16}$$

Якщо $X = Y$, то кореляційний момент дорівнює дисперсії: $K(X, X) = DX$.

Запишемо формулу (3.16) у розгорнутому вигляді

$$\boxed{DX = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n(+\infty)} x_k^2 \cdot p_k - \left(\sum\limits_{k=1}^{n(+\infty)} x_k \cdot p_k \right)^2, & \text{якщо } BB\ X \text{ є дискретною;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p_X(x) dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x) dx \right)^2, & \text{якщо } BB\ X \text{ є неперервною.} \end{cases}} \tag{3.17}$$

Із формули (3.15) випливає, при сталих k і l важливою є властивість дисперсії

$$\boxed{D(kX + l) = k^2 DX.} \tag{3.18}$$

Дійсно, з урахуванням властивостей математичного сподівання одержимо

$$D(kX + l) = M(kX + \mathring{l})^2 = M(k\mathring{X})^2 = k^2 M(\mathring{X})^2 = k^2 DX .$$

Зокрема дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $Dl = 0$ – константа не має розкиду. Навпаки, якщо $DX = 0$, то $P\{X = l\} = 1$ для деякого числа l.

Приклад 16. За умови прикладу 1 п. 3.1.2 знайти дисперсію випадкової величини *X*.

Розв'язання. Із прикладу 1 п. 3.1.2 маємо $MX = p$. Оскільки

X^2	0	1
P	$1-p$	p

то $MX^2 = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$ і на підставі формули (3.16) одержимо

$$DX = p - p^2 = p(1-p).$$

Приклад 17. Сукупність значень випадкової величини X така: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$. Відомо, що $P\{X = 2\} = P\{X = 3\} = \frac{1}{2} P\{X = 4\}$. Знайти 1) $P\{1 < X < 4\}$; 2) $M(-2X + 3)$; 3) $D(-2X + 3)$.

Розв'язання. З умови нормування $P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + P\{X = 4\} = 1$ випливає, що $P\{X = 4\} = \frac{1}{2}$ і, отже, $P\{X = 2\} = P\{X = 3\} = \frac{1}{4}$.

1) $P\{1 < X < 4\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{1}{2}$;

2) $MX = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3\frac{1}{4} \Rightarrow M(-2X + 3) = -2 \cdot 3\frac{1}{4} + 3 = -3\frac{1}{2}$;

3) $DX = M\left(X^2\right) - \left(MX\right)^2 = 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(3\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{11}{16} \Rightarrow$

$D(-2X + 3) = 4 \cdot \frac{11}{16} = 2\frac{3}{4}$.

Приклад 18. Щільність імовірності $p_X(x) = Ae^{-\sqrt{x}}$ $(x \ge 0)$. Знайти:

1) $M(3X - 2)$; 2) $D(3X - 2)$.

Розв'язання. A знайдемо з умови нормування (формула (2.9)):

$$\int_0^{+\infty} Ae^{-\sqrt{x}}dx = 2A\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 2A(-te^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt) = 2A(-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}) = 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

1) $MX = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt = -t^3e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + 3\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt =$

$= 3(-t^2e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-t}dt) = 6 \Rightarrow \quad M(3X-2) = 3\cdot 6 - 2 = 16;$

2) $DX = M(X^2) - (MX)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-\sqrt{x}}dx - 6^2 = 84 \Rightarrow D(3X-2) = 3^2\cdot 84 = 756.$

Приклад 19. Знайти дисперсію випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона (формула (2.6)).

Розв'язання:

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}(k-1+1)\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda} + e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

(тут двічі використано розкладання експоненти в ряд $e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots$). Було показано (приклад 2 п. 3.1.2), що $MX = \lambda$. Отже, $DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ – параметр закону Пуассона співпадає як з математичним сподіванням, так і з дисперсією.

Приклад 20. Знайти дисперсію випадкової величини X, розподіленої: 1) рівномірно в проміжку $[c; d]$ (формула (2.11)); 2) за показниковим законом з параметром λ (формула (2.12)); 3) за законом Гаусса з параметрами a і σ^2 (формула (2.13)); 4) за законом Релея з параметром σ^2 (формула (2.39)); 5) за логнормальним законом (формула (2.16)).

Розв'язання. При розв'язанні будуть використані формули (3.15) та (3.16) і також результати пункту 3.1.2 (приклади 4, 6, наслідки теореми 1).

1) $DX = \int_c^d x^2\cdot\frac{1}{d-c}dx - \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 = \frac{d^3-c^3}{3(d-c)} - \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 = \frac{(d-c)^2}{12};$

2) $MX^2 = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{+\infty} x^2 d\left(e^{-\lambda x}\right) = -\left(x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx\right) =$

$$= 2\frac{1}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad DX = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2};$$

3) $$DX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sigma^2\left(\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty)\right) = \sigma^2.$$

Таким чином, параметрами a і σ^2 закону Гаусса є відповідно математичне сподівання і дисперсія випадкової величини X;

4) $$M\left(X^2\right) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}dx = -\int_0^{+\infty} x^2 \cdot d\left(e^{-x^2/2\sigma^2}\right) = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2\sigma^2}dx =$$

$$= -2\sigma^2\int_0^{+\infty} d\left(e^{-x^2/2\sigma^2}\right) = -2\sigma^2 e^{-x^2/2\sigma^2}\Big|_0^{+\infty} = 2\sigma^2.$$

Отже, $DX = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2$;

5) $$M(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}dx .$$

Виконаємо при інтегруванні заміну змінної $\ln x - a = t$. Тоді

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{2a+2t}dt = e^{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{2t}dt =$$

$$= e^{2a+2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-2\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dt .$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює 1 (підінтегральна функція являє собою щільність імовірності ВВ, яка розподілена за законом $N(2\sigma^2;\sigma^2)$), то на підставі прикладу 6 п. 3.1.2 одержимо

$$D(X) = e^{2a+2\sigma^2} - e^{2a+\sigma^2} = e^{2a+\sigma^2}\cdot\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

ВВ X називається **нормованою**, якщо $MX=0$, $DX=1$. Прикладом нормованої ВВ є ВВ $Y=\frac{X-MX}{\sqrt{DX}}$. Дійсно,

$$MY=\frac{1}{\sqrt{DX}}M\left(X-MX\right)=\frac{1}{\sqrt{DX}}\left(MX-MX\right)=0,$$

$$DY=D\left(\frac{X-MX}{\sqrt{DX}}\right)=\frac{1}{DX}D\left(X-MX\right)=\frac{1}{DX}\cdot DX=1.$$

Приклад 21. Знайти математичне сподівання і дисперсію ВВ $\chi^2(n)$ (χ^2-розподіл з n степенями вільності) (формула (2.40)).

***Розв'язання*:** $\chi^2(n)=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2$, де X_i - незалежні та розподілені за законом Гаусса $N(0;1)$. Використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, одержимо

$$M\chi^2(n)=M(X_1^2)+M(X_2^2)+\ldots+M(X_n^2)=nM(X_i^2).$$

Оскільки

$DX_i=M(X_i^2)-(MX_i)^2$, то $M(X_i^2)=DX_i+(MX_i)^2=1$.

Отже, $M\chi^2(n)=n$.

$$D\chi^2(n)=D(X_1^2)+\ldots+D(X_n^2)=nD(X_i^2).$$
$$D(X_i^2)=M(X_i^4)-(MX_i^2)^2=M(X_i^4)-1.$$

Залишилось лише знайти величину

$$M(X_i^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}x^3d\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=$$

$$=-x^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+3\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3M(X_i^2)=3.$$

Тому $D(X_i^2)$=3–1=2 і остаточно $D\chi^2(n)=2n$.

Приклад 22. Радіус R круга є випадковою величиною, яка розподілена за законом Гаусса $N(a,\sigma^2)$ ($a\gg\sigma$). Знайти математичне сподівання і дисперсію площі круга $S=\pi R^2$.

***Розв'язання*:**

1) $M(S) = \pi M(R^2) = \pi(DR + (MR)^2) = \pi(\sigma^2 + a^2)$;

2) $DS = \pi^2 D(R^2) = \pi^2 (M(R^4) - (M(R^2))^2) = \pi^2 (M(R^4) - (\sigma^2 + a^2)^2)$.

$$M(R^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} r^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}} dr = \left| t = \frac{r-a}{\sigma} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a)^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^4 t^4 + 4\sigma^3 t^3 a + 6\sigma^2 t^2 a^2 + 4\sigma t a^3 + a^4) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \sigma^4 \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 6\sigma^2 a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + a^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

оскільки інтеграл з симетричними межами від непарної функції дорівнює нулю. Другий інтеграл дорівнює 1 (дисперсія випадкової величини, яка розподілена за законом $N(0;1)$). Третій інтеграл дорівнює 1 за умови нормування. Перший інтеграл дорівнює 3 (його було знайдено в попередньому прикладі). Таким чином,

$$DS = \pi^2 (3\sigma^4 + 6\sigma^2 a^2 + a^4 - (\sigma^2 + a^2)^2) = 2\pi^2 \sigma^2 (2a^2 + \sigma^2).$$

Зауваження. Для знаходження математичного сподівання і дисперсії нелінійної функції $g(X)$ замість точної, але складної формули (3.3) часто користуються наближеними формулами

$$\boxed{\begin{array}{l} Mg(X) \approx g(MX), \\ Dg(X) \approx |g'(MX)|^2 \cdot DX. \end{array}}$$

Ці формули тим точніші, чим менше функція $g(X)$ відрізняється від лінійної в області практично можливих значень випадкової величини X.

В умовах прикладу 22 маємо

$$MS \approx \pi a^2,$$

$$DS \approx 4\pi^2 a^2 \sigma^2,$$

що добре узгоджується з точним результатом.

3.2.2. Дисперсія суми випадкових величин

Теорема 7. Якщо ВВ X та Y корельовані (отже, залежні), то

$$\boxed{D(X+Y)=DX+DY+K(X,Y).} \tag{3.19}$$

Теорема 8. Якщо ВВ X та Y незалежні (більш загальна умова – некорельовані), то

$$\boxed{D(X+Y)=DX+DY.} \tag{3.20}$$

Доведення:

1) $D(X+Y)=M\left((X\overset{\circ}{+}Y)^2\right)=M(\overset{\circ}{X}+\overset{\circ}{Y})^2=M(\overset{\circ}{X})^2+2M(\overset{\circ}{X}\cdot\overset{\circ}{Y})+M(\overset{\circ}{Y})^2=$

$=DX+DY+K(X,Y)$;

2) незалежність $\Rightarrow K(X,Y)=0\Rightarrow D(X+Y)=DX+DY$.

Рівність (3.20) має місце для будь-якої скінченної кількості незалежних (більш загальна умова - попарно некорельованих) ВВ

$$\boxed{D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=DX_1+DX_2+\ldots+DX_n.} \tag{3.21}$$

Нарешті зазначимо, якщо ВВ X,Y є незалежними та $MX=MY=0$, то

$$D(X\cdot Y)=DX\cdot DY.$$

Дійсно,

$$D(X\cdot Y)=M(X\cdot Y)^2-(MX)^2\cdot(MY)^2=M(X^2\cdot Y^2)=M(X^2)\cdot M(Y^2)=DX\cdot DY.$$

Приклад 23. Нехай ВВ $X_1, ..., X_n$ незалежні, причому $MX_i=a$, $DX_i=\sigma^2$ ($i=1,...,n$). Знайти математичне сподівання і дисперсію середнього арифметичного $\frac{1}{n}\cdot\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)$ цих ВВ.

***Розв'язання*.** Використовуючи властивості математичного сподівання (формули (3.4) і (3.7)) і дисперсії (формули (3.4) і (3.6)), одержимо

$$M\left(\frac{1}{n}\cdot\left(X_1+\ldots+X_n\right)\right)=\frac{1}{n}\cdot\left(MX_1+\ldots+MX_n\right)=\frac{1}{n}\cdot na=a,$$

$$D\left(\frac{1}{n}\cdot\left(X_1+\ldots+X_n\right)\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\left(DX_1+\ldots+DX_n\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Оскільки $D\left(\frac{1}{n}\cdot\left(X_1+\ldots+X_n\right)\right)\to 0\ (n\to+\infty)$, то практично можливе відхилення середнього арифметичного $\frac{1}{n}\cdot\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)$ ВВ $X_1,\ldots,X_n$ від його математичного сподівання a із зростанням n спадає. Позначимо через x_k спостережуване значення ВВ $X_k (k=1,\ldots,n)$. У тому разі, коли a є невідомим, отриманий результат означає, що як завгодно точно при досить великому n середнє арифметичне результатів спостережень $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ можна прийняти в якості невідомого значення a.

Приклад 24. Знайти дисперсію випадкової величини X - кількості появ події A у серії з n незалежних випробувань.

Розв'язання. Застосуємо метод, використаний при розв'язанні прикладу 10 п. 3.1.4, використаємо формулу (3.21) і результат прикладу 16 п. 3.2.1. Оскільки $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$, де незалежні ВВ X_i приймають значення 0,1 з імовірностями відповідно $1-p$, p, то $DX=DX_1+DX_2+\ldots+DX_n=nDX_i=np(1-p)$. Звідси випливає, що дисперсія частоти X/n появ події A така:

$$D\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}DX=\frac{np(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}.$$

Отже, дисперсія $D\left(\dfrac{X}{n}\right)$ частоти появ події A наближається до нуля при $n\to+\infty$. Оскільки $M\left(\dfrac{X}{n}\right)=p$, то практично можливі відхилення частоти $\dfrac{X}{n}$ від імовірності p появи події A в одному випробуванні при досить великому n є як завгодно малими. Це дає можливість при великих n приймати частоту появи події за її ймовірність. Таким чином, з результатів теорії ймовірностей, яка ґрунтується на аксіомах і визначеннях, випливає властивість стійкості частоти, яка спостерігається в експерименті.

Приклад 25. В умовах прикладу 11 п. 3.1.4 знайти дисперсію випадкової величини η.

Розв'язання. На підставі формули (3.21) і результату прикладу 18 п. 3.2.1 $D\eta = \frac{n}{\lambda^2}$.

Приклад 26. В умовах прикладу 23 знайти математичне сподівання ВВ $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\cdot\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right)\right)^2$.

Розв'язання. Позначимо $Y_n = \frac{1}{n}\cdot\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right)$ і перетворимо суму квадратів до зручного для обчислень вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Y_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a + a - Y_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)\left(a - Y_n\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(a - Y_n\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2 + 2\left(a - Y_n\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right) + n\left(a - Y_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2 + 2\left(a - Y_n\right)\cdot n\left(Y_n - a\right) +$$

$$+ n\left(a - Y_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2 - 2n\left(a - Y_n\right)^2 + n\left(a - Y_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2 - n\left(a - Y_n\right)^2.$$

Тому

$$M\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Y_n\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} M\left(X_i - a\right)^2 - nM\left(a - Y_n\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} DX_i - n\cdot DY_n = n\cdot\sigma^2 - n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \left(n-1\right)\cdot\sigma^2$$

і, таким чином,

$$M\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Y_n\right)^2\right) = \sigma^2.$$

Можна показати, що $D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Y_n\right)^2\right)$ із зростанням n прямує до нуля. З урахуванням одержаного вище результату це означає, що числа $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$, які є значеннями випадкової величини $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Y_n\right)^2$ у конкретних серіях вимірювань, групуються навколо числа σ^2.

Нарівні з середнім квадратичним відхиленням мірою розсіювання випадкової величини є також **середнє відхилення** δ - математичне сподівання модуля флуктуації:

$$\delta = M\,|\overset{\circ}{X}|\; = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x - MX \right| \cdot p_X\left(x\right) dx\,.$$

Приклад 27. Знайти середнє відхилення випадкової величини $X \sim N(a;\sigma^2)$.

***Розв'язання*:**

$$\delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x-a \right| e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| t \right| e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right)\Big|_0^{+\infty} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Зауваження. Нехай функція $g(x,y)$ мало відрізняється від лінійної в межах області можливих значень випадкового вектора $(X;Y)$. Тоді замість точної, але складної формули (3.5), у першому наближенні задача відшукання числових характеристик функції $g(X,Y)$ зводиться до відшукання числових характеристик її лінійного наближення

$$g(X,Y) \approx g(MX,MY) + g'_x(MX,MY)\cdot \overset{0}{X} + g'_y(MX,MY)\cdot \overset{0}{Y}:$$

1) $Mg(X,Y) \approx g(MX,MY)$,

2) $Dg(X,Y) \approx (g'_x(MX,MY))^2 \cdot DX + (g'_y(MX,MY))^2 \cdot DY +$
$+2g'_x(MX,MY)\cdot g'_y(MX,MY)\cdot K(X,Y)$.

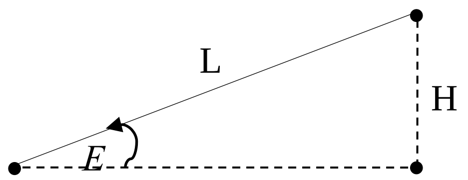


Рис. 3.3

Приклад 28. Висота H польоту літака визначається за допомогою радіолокатора за похилою дальності L і кутом місця цілі E за формулою (рис. 3.3)

$$H = L \cdot \sin E.$$

Обчислити наближено *MH* і *DH*, коли L і E є незалежними випадковими величинами з числовими характеристиками $ML = 20000$ м, σ_L =20 м, $ME = 30^\circ$, σ_E =10′ (=0.002909 у радіанах).

***Розв'язання*:**

1) $MH \approx (ML)\cdot\sin(M\mathrm{E}) = 2\cdot 10^4 \cdot \sin 30^\circ = 10^4\,м;$

2) оскільки $(L\sin\mathrm{E})'_L = \sin\mathrm{E}$; $(L\sin\mathrm{E})'_{\mathrm{E}} = L\cos\mathrm{E}$, то

$$DH \approx (\sin(M\mathrm{E}))^2\cdot DL + (ML\cdot\cos(M\mathrm{E}))^2\cdot D\mathrm{E} = 400/4 +$$

$$+\left(2\cdot 10^4\cdot\sqrt{3}/2\right)^2\cdot 0.002909^2 = 100 + 2538 = 2638\,м^2 \Rightarrow \sigma_H = 51.37\,м$$

3.2.3. Нерівність П. Чебишева

Нерівність П. Чебишева встановлює верхню межу для ймовірності відхилення ВВ X від її математичного сподівання MX (рис. 3.4).

Рис. 3.4

Теорема 9 (Нерівність П.Л. Чебишева). Якщо ВВ X має скінченні математичне сподівання MX і дисперсію DX, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\boxed{P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.} \qquad (3.22)$$

***Доведення*.** Нерівність (3.22) негайно випливає з оцінки (3.2).

Дійсно, оскільки події $\{|X - MX| \geq \varepsilon\}$ і $\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\}$ є еквівалентними, то

$$P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}=P\{(X-MX)^2\geq\varepsilon^2\}\leq\frac{M(X-MX)^2}{\varepsilon^2}=\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Ця оцінка ймовірності не залежить від закону розподілу випадкової величини X. З формули (3.22) видно, що чим менше DX, тим менші ймовірні великі відхилення значень випадкової величини X від її математичного сподівання MX.

Позначимо $\frac{1}{\varepsilon^2}DX=t^2$. Тоді нерівність (3.22) можна подати як

$$\boxed{P\{X\notin(MX-t\sigma_X;MX+t\sigma_X)\}\leq t^{-2}\qquad(t>0).}\tag{3.23}$$

Нерівність Чебишева, як правило, завищує ймовірності великих відхилень значень X від MX. Так поклавши t=3 у формулі (3.23), отримаємо

$$P\{X\notin[MX-3\sigma_X;MX+3\sigma_X]\}\leq 1/9.$$

Тим часом для закону Гаусса маємо

$$P\{X\notin[a-3\sigma;a+3\sigma]\}=1-P\{X\in[a-3\sigma;a+3\sigma]\}=1-\Phi(3)=0.0027.$$

Однак можна навести приклади розподілів, для яких нерівність Чебишева дає точну величину ймовірності відхилення випадкової величини від математичного сподівання (наприклад, розподіл $P\{X=-1\}=P\{X=1\}=1/18,\ P\{X=0\}=8/9,\ t=3$).

Якщо в нерівності Чебишева перейти до ймовірності протилежної події, то одержимо іншу еквівалентну форму оцінки ймовірності відхилення ВВ X від її математичного сподівання MX:

$$\boxed{P\{|X-MX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2},}\tag{3.24}$$

$$\boxed{P\{X\in(MX-t\sigma_X;MX+t\sigma_X)\}\geq 1-t^{-2}(t>0).}\tag{3.25}$$

Приклад 29. Оцінити ймовірність того, що значення ВВ X будуть відрізнятися від її математичного сподівання MX:

1) не менше, ніж на $1.25\sigma_X$; 2) менше, ніж на $1.75\sigma_X$.

***Розв'язання*:**

1) використовуємо нерівність (3.22) при $\varepsilon = 1.25\sigma_X$. Оскільки $DX = \sigma_X^2$, то $P\{| X - MX | \geq 1.25\sigma_X\} \leq \frac{\sigma_X^2}{(1.25\sigma_X)^2} = 0.64.$

2) використовуємо нерівність (3.24) при $\varepsilon = 1.75\sigma_X$. Маємо $P\{| X - MX | < 1.75\sigma_X\} \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{(1.75\sigma_X)^2} = \frac{33}{49}.$

Приклад 30. Оцінити за допомогою нерівності Чебишева ймовірність відхилення частоти появи події A в серії з n випробувань Я. Бернуллі від імовірності p появи події в одному випробуванні.

Розв'язання. Математичне сподівання і дисперсія частоти X/n появи події A були знайдені відповідно у прикладах 10 п. 3.1.4 та 24 п. 3.2.2: $M(X/n)=p$, $D(X/n)=p(1-p)/n$. Отже, на підставі нерівності (3.22) одержуємо

$$P\left\{\frac{X}{n} \notin \left(p - t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)\right\} \leq t^{-2}.$$

Оскільки $p(1-p) \leq 1/4$, то з попередньої нерівності випливає груба оцінка

$$P\left\{\frac{X}{n} \notin \left(p - t\frac{1}{2\sqrt{n}}; p + t\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\right\} \leq t^{-2}. \qquad (3.26)$$

При досить великому $t>0$ права частина останньої нерівності як завгодно мала. Таким чином, довільно малою є ймовірність відхилення частоти події A від імовірності p на величину, більшу за $t/2\sqrt{n}$. Вибираючи n досить великим, це відхилення можна зробити як завгодно малим. Інакше кажучи, при досить великому n значне відхилення частоти від імовірності є практично неможливим. Це виправдовує підхід до визначення ймовірності p як деякого числа, навколо якого групуються частоти (див. п. 1.2.1).

Нерівність (3.26) можна використати для розв'язання задачі **перевірки гіпотези** (докладно ця задача обговорюється в п. 5.4).

Перевірка гіпотези. Нехай імовірність p появи події A в одному випробуванні невідома, а кількість появ події A в даній серії з n випробувань Я. Бернуллі дорівнює k. Висунемо гіпотезу (припущення), що невідома ймовірність дорівнює p_0. Наскільки добре ця гіпотеза узгоджена з результатами експерименту? В основу розв'язання цієї задачі покладено такий принцип: **якщо в даному випробуванні відбувається подія, яка при зробленому припущенні є практично неможливою, то це припущення суперечить результатам експерименту**.

Вибираємо мале число $\varepsilon>0$ **(рівень значущості)** і вважаємо практично неможливими події, імовірність яких менша ε. Із формули (3.26) виходить, що практично неможливій події відповідає $t=1/\sqrt{\varepsilon}$, а допустиме відхилення значення частоти від імовірності дорівнює $1/2\sqrt{n\varepsilon}$. Якщо одержане в експерименті відхилення $|k/n-p_0|$ перевищує допустиме, то висунута гіпотеза суперечить результатам експерименту. Наприклад, якщо $\varepsilon=0.01$, n=1000, k=500 і p_0=2/3, то допустиме відхилення дорівнює $1/2\sqrt{10}$, а експериментальне відхилення дорівнює 1/6. Оскільки 1/6 $>1/2\sqrt{10}$, то припущення . що невідома ймовірність дорівнює 2/3, не узгоджується з результатами експерименту.

Приклад 31. Скільки разів потрібно підкинути монету, щоб із імовірністю не менше 0.975 частота появи герба потрапила в інтервал (0.4; 0.6)?

Розв'язання. Оскільки ймовірність появи герба p = 0.5, то на підставі формули (3.26) маємо $t\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=0.1$, $t^{-2}=0.025$. Отже,

$$n=\frac{t^2}{0.04}=\frac{1}{0.025\cdot 0.04}=1000.$$

Скористаємось тепер формулою Муавра-Лапласа (формула (1.17)). Маємо (див. приклад 47 п. 1.5.2)

$$P\{|k/n-0.5|\le 0.1\}\approx 2\Phi(0.2\sqrt{n})\ge 0.975.$$

З табл. Д.1.1 знаходимо, що $0.2\sqrt{n}\ge 2.24$. Отже, $n\ge 126$. Видно, що в цьому випадку оцінка (3.26) є грубою.

3.2.4. Граничні теореми теорії ймовірностей

Теореми закону великих чисел установлюють умови, за якими середнє арифметичне випадкових величин майже дорівнює своєму математичному сподіванню.

Теорема Чебишева. Нехай *X₁, X₂,… Xₙ,…* послідовність попарно некорельованих (зокрема незалежних) ВВ, дисперсії яких обмежені деяким числом: $DX_k \le C \ (k=1,2,\ldots)$. Тоді при довільно заданому $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| \ge \varepsilon\right\} = 0.$$

Доведення. Оскільки $M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k$, то на підставі нерівності Чебишева у формі формули (3.22) маємо

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_k} - \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{MX_k}\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{\mathrm{D}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_k}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{D}(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_k})}{\mathrm{n}^2\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{DX_1} + \ldots + \mathrm{DX_n}}{\mathrm{n}^2\varepsilon^2} \le$$

$$\le \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{n}^2\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{n}\varepsilon^2}.\text{Отже, для кожного } \varepsilon > 0 \ \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_k} - \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{MX_k}\right| \ge \varepsilon\right\} = 0.$$

Теорема Чебишева стверджує, що подія

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| \ge \varepsilon$$

при кожному досить великому n є практично неможливою.

Приклад 32. Відносною точністю ВВ X називається ВВ $\left|\frac{X - MX}{MX}\right|$. Провадиться n незалежних вимірювань деякої фізичної величини. Результатами цього є випадкові однаково розподілені незалежні величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Припустимо, що $MX_i = 0.1,\ DX_i = 0.0004 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Розглянемо ВВ $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$.

1. Нехай n=20. Яку максимальну можливу відносну точність ВВ Y_n можна гарантувати з імовірністю не менше 0.95?

2. Скільки потрібно провести вимірювань, щоб з імовірністю не менше 0.975 можна було гарантувати максимальну можливу відносну точність ВВ Y_n не більше 0.15?

Розв'язання:

1) $P\left\{\left|\frac{Y_n - MY_n}{MY_n}\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{\left|Y_n - MY_n\right| < \varepsilon \cdot \left|MY_n\right|\right\} = 1 - P\left\{\left|Y_n - MY_n\right| \ge \varepsilon \cdot \left|MY_n\right|\right\} \ge$

$$\ge 1 - \frac{DY_n}{\varepsilon^2 \cdot (MY_n)^2} = 1 - \frac{DX_i}{20 \cdot \varepsilon^2 \cdot (MX_i)^2} = 1 - \frac{0.0004}{20 \cdot \varepsilon^2 \cdot 0.01} \ge 0.95.$$

Отже, $\frac{0.04}{20\varepsilon^2} \le 0.05 \Leftrightarrow \varepsilon^2 \ge 0.04 \Rightarrow \varepsilon = 0.2.$

2) з попереднього випливає нерівність $1 - \frac{0.0004}{n \cdot (0.15)^2 \cdot 0.01} \ge 0.975$.

Звідки маємо $n \ge \frac{0.04}{0.025 \cdot 0.0225} \approx 71.11.$

Отже, потрібно не менше 72 вимірювань.

Відзначимо частинний випадок теореми Чебишева, який пов'язано з серією незалежних випробувань з імовірністю p появи події A в кожному з них. Позначимо через $X_k\ (k = 1, 2, \ldots)$ кількість появ події A у k-му випробуванні. Тоді ВВ $\frac{X_1 + ... + X_n}{n}$ є частотою появи події A в перших n випробуваннях. Оскільки на підставі результатів прикладу 1 п. 3.1.2 і прикладу 16 п. 3.2.1 $MX_k = p,\ DX_k = p(1 - p)\quad (k = 1, 2, \ldots)$, то з теореми Чебишева випливає таке твердження.

Теорема Я. Бернуллі. При довільно заданому ε>0

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \ge \varepsilon\right\} = 0.$$

Зміст цієї теореми полягає в тому, що аксіоматичне визначення ймовірності відповідає інтуїтивному розумінню ймовірності як границі частоти, а саме при кожному досить великому n частота $\frac{n_A}{n}$ частіше за все є близькою до ймовірності p появи події A.

Центральна гранична теорема (ЦГТ) встановлює, **що якими б не були** закони розподілу незалежних доданків, закон розподілу їх суми буде **близьким** до нормального, якщо вклади кожного з доданків у суму приблизно однакові і кількість доданків досить велика. Цей результат є теоретичною основою застосування нормального розподілу при розв'язанні багатьох прикладних задач. Так, наприклад, похибка вимірювання (або розсіювання при стрільбі, або завада на виході радіо приймального пристрою) породжується спільною дією великої кількості причин, кожна з яких мало впливає на похибку в цілому. Розподіл цих похибок добре узгоджується з нормальним законом.

Центральна гранична теорема (найпростіший варіант). Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин: $MX_k = a$, $DX_k = \sigma^2$ (k=1,2,…).

Тоді при досить великих n закон розподілу випадкової величини $\frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ необмежено наближається до закону Гаусса $N(0;1)$.

Зокрема для довільних $c < d$ має місце наближена формула

$$\boxed{\begin{aligned}&P\left\{c \le X_1 + X_2 + \ldots + X_n \le d\right\} = \\ &= P\left\{\frac{c - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{d - na}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{d - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{c - na}{\sigma\sqrt{n}}\right).\end{aligned}}$$

У розробці ЦГТ (яку вперше сформулював П. Лаплас) одну з головних ролей зіграв видатний математик, професор Харківського університету, академік О.М. Ляпунов. Виявилось, що основну умову цієї теореми – припущення про незалежність доданків – можна суттєво послабити. Цей напрямок бере початок від іншого видатного математика професора Харківського університету академіка С.Н. Бернштейна. Йому належить також і перша за часом аксіоматика теорії ймовірностей (1917 р.).

Відзначимо частинний випадок ЦГТ, який пов’язано з серією незалежних випробувань, коли подія A настає в кожному з них з імовірністю p.

Теорема Муавра-Лапласа. Нехай X – кількість появ події A в серії з n незалежних випробувань. Тоді закон розподілу випадкової величини $\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ при досить великих n ($n>100, np(1-p)>20$) наближається до закону Гаусса $N(0;1)$. Таким чином, для довільних $c<d$

$$\boxed{P\{c \le X \le d\} \approx \Phi\left(\frac{d-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).} \tag{3.27}$$

Приклад 33. Стрілець влучає при одному пострілі в десятку з імовірністю 0.7, у дев’ятку – з імовірністю 0.2 і у вісімку – з імовірністю 0.1: 1) знайти ймовірність того, що при 100 пострілах він отримає не менше 980 очок; 2) яку найбільшу кількість очок він може отримати з імовірністю 0.95?

Розв’язання. Нехай $X_к$ – кількість очок, яку отримує стрілець при k-му пострілі. Тоді

$MX_к=10\cdot 0.7+9\cdot 0.2+8\cdot 0.1=9.6$,

$DX_к=10^2\cdot 0.7+9^2\cdot 0.2+8^2\cdot 0.1-(9.6)^2=0.44$.

Отже, на підставі ЦГТ маємо

1) $P\{980 \le X_1+....+X_{100} \le 1000\} \approx \Phi\left(\dfrac{1000-960}{\sqrt{44}}\right)-\Phi\left(\dfrac{980-960}{\sqrt{44}}\right)=$

$=\Phi(6.03)-\Phi(3.02)=0.5-0.4987=0.0013.$

2) $P\{960-\Delta \le X_1+...+X_{100} \le 960+\Delta\} \approx 2\Phi\left(\dfrac{\Delta}{\sqrt{44}}\right)=0.95 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi\left(\dfrac{\Delta}{\sqrt{44}}\right)=0.475 \Rightarrow \dfrac{\Delta}{\sqrt{44}}=1.96 \Rightarrow \Delta=13.$

Отже, найбільша кількість очок дорівнює 973.

3.3. Кореляція

3.3.1. Коефіцієнт кореляції та кореляційна матриця

Визначення 4. Коефіцієнтом кореляції $r_{X,Y}$ ВВ X та Y називається число

$$\boxed{r_{X,Y} = \frac{K(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.} \tag{3,28}$$

Коефіцієнт кореляції – безрозмірна величина. Абсолютна величина коефіцієнта кореляції змінюється від нуля до одиниці: $0 \le |r_{X,Y}| \le 1$. Якщо $r_{X,Y} = 0$, то ВВ X та Y некорельовані, але можуть бути зв'язаними не тільки стохастичною, але і функціональною залежністю, відмінною від лінійної. Рівність $|r_{X,Y}| = 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли X та Y зв'язані лінійно – $Y=kX+l$. Якщо $0 < |r_{X,Y}| < 1$, то між X і Y є зв'язок, при цьому $r_{X,Y}$ характеризує міру лінійної залежності. Чим ближче коефіцієнт кореляції по модулю до одиниці, тим сильніше залежність між X і Y нагадує лінійну, і навпаки. Якщо $r_{X,Y} > 0$ (додатна кореляція, прямий зв'язок), то X і Y мають тенденцію зростати і спадати одночасно. Наприклад, додатна кореляція існує між часом безвідмовної роботи одного з елементів системи регулювання і часом безвідмовної роботи всієї системи, продуктивністю праці та заробітною платою. Якщо $r_{X,Y} < 0$ (від'ємна кореляція, обернений зв'язок), то при зростанні однієї ВВ інша має тенденцію спадати, і навпаки. Наприклад, від'ємна кореляція спостерігається між продуктивністю праці та вартістю одиниці продукції, між об'ємом продукції та затратами на один виріб.

Наведемо типові діаграми зв'язку між величинами X та Y при різних значеннях $r_{X,Y}$ (рис. 3.5).

Мірою залежності між величинами X та Y коефіцієнт кореляції є тільки тоді, коли випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ розподілений за нормальним законом (формула (2.33)). Дійсно, у цьому випадку можна показати, що $r_{X,Y}=r$. Отже, координати X та Y є некорельованими тоді і тільки тоді, коли $r=0$. Але при $r=0$

нормальний закон (формула (2.33)) переходить у нормальний закон у найпростішій формі (формула (2.54)), що відповідає незалежності координат X і Y. Таким чином, координати випадкового вектора, розподіленого за нормальним законом, є некорельованими тоді і тільки тоді, коли вони є незалежними.

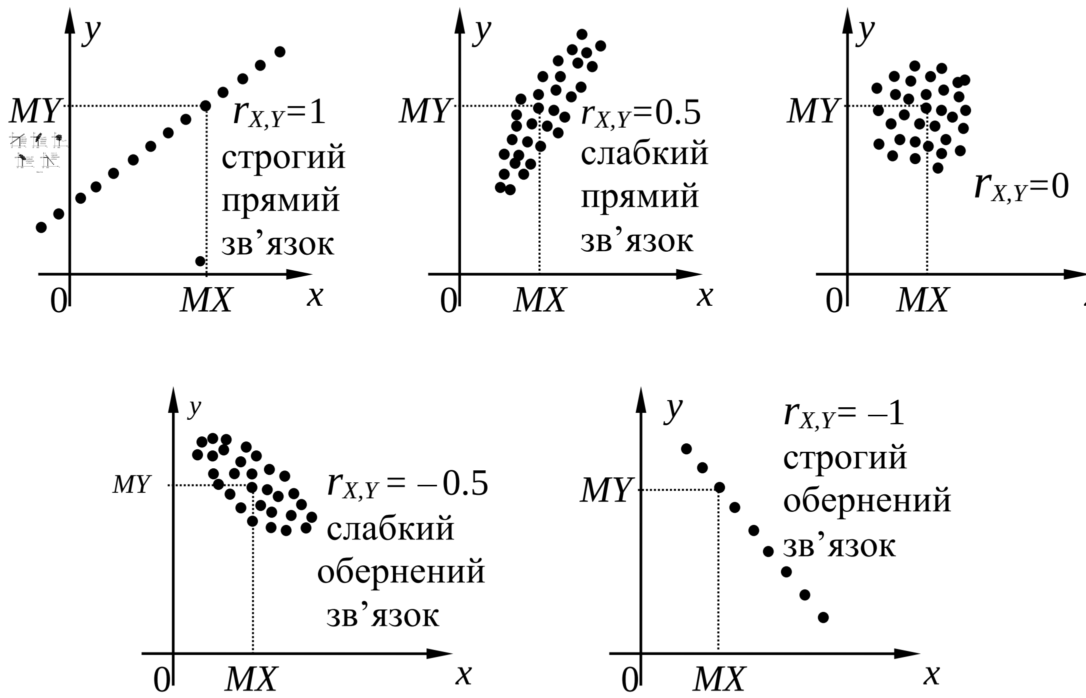


Рис. 3.5

Отже, параметрами закону Гаусса (формула (2.33)) є математичні сподівання і дисперсії ВВ X та Y, а також коефіцієнт кореляції цих величин.

Приклад 34. В умовах прикладу 13 п. 3.1.5 знайти коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$.

Розв'язання:

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 4 \cdot 0.8 + 9 \cdot 0.2 - (2.2)^2 = 0.16,$$

$$DY = M(Y^2) - (MY)^2 = 1 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.6 - (1.6)^2 = 0.24.$$

Отже, $r_{X,Y} = \dfrac{K(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{-0.02}{0.4 \cdot \sqrt{0.24}} \approx -0.102$.

Приклад 35. Нехай ВВ X рівномірно розподілена на відрізку $[-1;1]$. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$, якщо $Y = X^2$.

Розв'язання:

$$M(X\cdot Y)=M(X^3)=\int_{-1}^{1}x^3\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{8}x^4\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{8}(1-1)=0,$$

$M(X)=\dfrac{-1+1}{2}=0$, отже, $r_{X,Y}=0$.

Цей результат знов показує, що залежні ВВ можуть бути некорельованими.

Приклад 36. Показати, що $|r_{X,Y}|\le 1$.

Розв'язання. На підставі теореми 7 п. 3.2.2

$$D(\frac{X}{\sigma_X}\pm\frac{Y}{\sigma_Y})=D(\frac{X}{\sigma_X})+D(\frac{Y}{\sigma_Y})\pm 2K(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y})=\frac{1}{\sigma_x^2}DX+\frac{1}{\sigma_Y^2}DY\pm 2\frac{K(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=$$
$$=2(1\pm r_{X,Y})\ge 0.$$

Отже, $-1\le r_{X,Y}\le 1\Leftrightarrow |r_{X,Y}|\le 1$.

Зазначимо, що останню нерівність можна подати у вигляді $|K(X,Y)|\le\sigma_X\cdot\sigma_Y$.

Приклад 37. Випадкові величини X та Y є некорельованими. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин $Z=aX+bY$, $W=aX-bY$.

Розв'язання:

$$M(Z\cdot W)=M\left((aX+bY)(aX-bY)\right)=a^2M(X^2)-b^2M(Y^2),$$

$$M(Z)\cdot M(W)=(aMX+bMY)\cdot(aMX-bMY)=a^2(MX)^2-b^2(MY)^2,$$

$$K(Z,W)=a^2(M(X^2)-(MX)^2)-b^2(M(Y^2)-(MY)^2)=a^2DX-b^2DY,$$

$$DZ=DW=a^2DX+b^2DY.$$

Отже, $r_{Z,W}=\dfrac{a^2DX-b^2DY}{a^2DX+b^2DY}$.

Приклад 38. Випадкові величини X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 – попарно некорельовані і мають однакові дисперсії σ^2. Знайти коефіцієнти кореляції випадкових величин: 1) $Y_1=X_1+X_2$, $Y_2=X_3+X_4+X_5$; 2) $Y_3=X_1+X_2+X_3$, $Y_4=X_1+X_3+X_5$.

Розв'язання:

1) $\mathrm{K}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_2)=\mathrm{M}(\mathring{\mathrm{Y}}_1\cdot\mathring{\mathrm{Y}}_2)=\mathrm{M}((\mathring{\mathrm{X}}_1+\mathring{\mathrm{X}}_2)\cdot(\mathring{\mathrm{X}}_3+\mathring{\mathrm{X}}_4+\mathring{\mathrm{X}}_5))=$

$$= M(\overset{\circ}{X}_1 \cdot \overset{\circ}{X}_3) + \ldots + M(\overset{\circ}{X}_2 \cdot \overset{\circ}{X}_5) = 0 \Rightarrow r_{Y_1, Y_2} = 0;$$

$$2)\ \mathrm{K}(\mathrm{Y}_3, \mathrm{Y}_4) = \mathrm{M}(\overset{\circ}{\mathrm{Y}}_3 \cdot \overset{\circ}{\mathrm{Y}}_4) = \mathrm{M}(\overset{\circ}{\mathrm{X}}_1)^2 + \mathrm{M}(\overset{\circ}{\mathrm{X}}_1 \cdot \overset{\circ}{\mathrm{X}}_3) + \ldots +$$

$$+\ \mathrm{M}(\overset{\circ}{\mathrm{X}}_3)^2 + \mathrm{M}(\overset{\circ}{\mathrm{X}}_3 \cdot \overset{\circ}{\mathrm{X}}_5) = 2\sigma^2.$$

Внаслідок формули (3.2) одержимо $DY_3 = DY_4 = 3\sigma^2$. Отже, на підставі формули (3.28) $r_{Y_3, Y_4} = 2/3$.

Приклад 39. В умовах прикладу 27 п. 2.2.4 знайти математичне сподівання і дисперсію ВВ $2X - 3Y$.

Розв'язання:

$$M(2X - 3Y) = 2 \cdot MX - 3 \cdot MY = 2 - 3 \cdot (-2) = 8,$$

$$D(2X - 3Y) = 4 \cdot DX + 9 \cdot DY + 2 \cdot K(2X, -3Y) = 4 \cdot DX + 9 \cdot DY +$$

$$+ 2 \cdot 2 \cdot (-3) K(X, Y) = 4 \cdot 16 + 9 \cdot 12 - 12 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}/2) = 316.$$

Визначення 5. Кореляційною матрицею (матрицею коваріації) випадкового вектора $\vec{X}(X_1; X_2)$ називається симетрична матриця K другого порядку, елементами якої є $K_{ij} = K(X_i, X_j)$:

$$\boxed{K = \begin{Vmatrix} DX_1 & K(X_1, X_2) \\ K(X_1, X_2) & DX_2 \end{Vmatrix}.} \qquad (3.29)$$

З попереднього випливає, що вектор математичного сподівання і кореляційна матриця для закону Гаусса в загальній формі (формула (2.33)) мають вигляд

$$\boxed{M\vec{X} = \begin{Vmatrix} MX_1 \\ MX_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Vmatrix},\ K = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & r \cdot \sigma_1 \sigma_2 \\ r \cdot \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{Vmatrix}.}$$

Введемо в розгляд вектор $\vec{x} = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$. Тоді закон Гаусса в загальній формі (формула (2.33)) можна записати у стислому вигляді

$$\boxed{p_{\vec{X}}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\cdot\det K}}e^{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}-M\vec{X}\right)^T\cdot K^{-1}\cdot\left(\vec{x}-M\vec{X}\right)},}\qquad(3.30)$$

де T – операція транспонування;

K^{-1} – матриця, обернена до K;

$\det K$ - визначник матриці K.

Форма запису (3.30) справедлива і для n-вимірних нормальних розподілів $\vec{X}$ ($X_1; X_2; \ldots; X_n$). У цьому випадку

$$\vec{x}=\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{Vmatrix},\quad M\vec{X}=\begin{Vmatrix}MX_1\\MX_2\\\vdots\\MX_n\end{Vmatrix},$$

матриця K є симетричною матрицею n-го порядку

$$K=\begin{Vmatrix}K_{11}&K_{12}&\cdots&K_{1n}\\K_{21}&K_{22}&\cdots&K_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\K_{n1}&K_{n2}&\cdots&K_{nn}\end{Vmatrix}=\left\|K_{ij}\right\|=\left\|K\left(X_i,X_j\right)\right\|.$$

Крім того, число $(2\pi)^2$ під радикалом у формулі (3.30) потрібно замінити на $(2\pi)^n$. Таким чином, вектор MX та матриця K є вичерпними характеристиками n-вимірного нормального розподілу.

Приклад 40. В умовах прикладу 14 п. 3.1.5 знайти коефіцієнт кореляції і кореляційну матрицю випадкового вектора $\overrightarrow{X}(X;Y)$.

Розв'язання. Знайдемо дисперсію величин X і Y:

$$DX=4\int_0^1\int_0^{x^3}x^2dxdy-\frac{16}{25}=\frac{2}{3\cdot25},\qquad DY=4\int_0^1\int_0^{x^3}y^2dxdy-\frac{4}{49}=\frac{38}{15\cdot49}\ .$$

Використавши формули (3.28) та (3.29), одержимо

$$r_{X,Y}=\frac{\frac{3}{140}}{\sqrt{\frac{2}{3\cdot25}\cdot\frac{38}{15\cdot49}}}=\frac{9}{8}\cdot\sqrt{\frac{5}{19}}\approx0.58,\quad K=\begin{Vmatrix}\frac{2}{75}&\frac{3}{140}\\\frac{3}{140}&\frac{38}{735}\end{Vmatrix}.$$

3.3.2. Регресія

Якщо ми знаємо розподіл випадкового вектора $\vec{X}(X;Y)$, то можна розглядати умовні математичні сподівання і умовні дисперсії однієї координати випадкового вектора за умови, що інша координата набуває певного значення. Для цього потрібно у формулах (3.1) і (3.17), які визначають математичне сподівання і дисперсію, замінити безумовні розподіли на умовні.

Для неперервного випадкового вектора $\vec{X}(X;Y)$ отримуємо таке визначення.

Визначення 6. Умовним математичним сподіванням випадкової величини Y за умови, що випадкова величина $X=x$, називається число, яке знаходиться за формулою

$$m_Y(x) \equiv M(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p_Y(y/X=x)dy. \qquad (3.31)$$

Умовне математичне сподівання $m_X(y) \equiv M(X/Y=y)$ випадкової величини X за умови, що випадкова величина $Y=y$, визначається аналогічно.

Визначення 7. Умовною дисперсією випадкової величини Y за умови, що випадкова величина $X=x$, називається число, яке знаходиться за формулою

$$D_Y(x) \equiv D(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_Y(x))^2 \cdot p_Y(y/X=x)dy. \qquad (3.32)$$

Аналогічно визначається умовна дисперсія $D_X(y) \equiv D(X/Y=y)$.

Якщо випадкові величини X і Y є залежними, то при зміні x змінюється умовне математичне сподівання $m_Y(x)$, яке є функцією змінної x. Ця функція називається **регресією** величини Y на величину X (Y відносно X), а її графік $y=m_Y(x)$ **лінією регресії** Y на X (рис. 3.6).

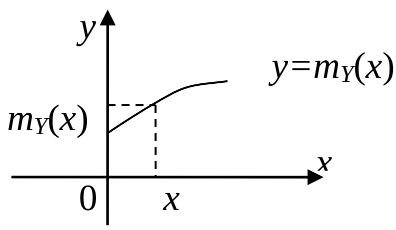


Рис. 3.6

Лінія регресії Y на X показує як у середньому змінюється величина Y при зміні значень x величини X, а умовна дисперсія

$D_Y(x)$ характеризує точність зміни величини Y при зміні величини X.

Аналогічно визначається регресія X на Y і лінія регресії X на Y: $x = m_X(y)$.

Приклад 41. В умовах прикладу 21 п. 2.2.3 знайти: 1) умовні математичні сподівання; 2) умовні дисперсії; 3) лінії регресії Y на X та X на Y.

Розв'язання: 1) на підставі формули (3.31) одержимо

$$M\left(Y \big/ X=x\right)=\int_x^1 y\cdot p_Y\left(y \big/ X=x\right)dy=\int_x^1 y\cdot\frac{1}{1-x}dy=\frac{1+x}{2}\quad (0<x<1);$$

$$M\left(X \big/ Y=y\right)=\int_0^y x\cdot p_X\left(x \big/ Y=y\right)dx=\int_0^y x\cdot\frac{2x}{y^2}dx=\frac{2}{3}y\quad (0<y<1).$$

2) за формулою (3.32) маємо при $0<x<1$

$$D(Y/X=x)=\int_x^1 y^2\cdot p_Y\left(y \big/ X=x\right)dy-\frac{(1+x)^2}{4}=$$

$$=\int_x^1 y^2\cdot\frac{1}{1-x}dy-\frac{(1+x)^2}{4}=\frac{1-x^3}{3\cdot(1-x)}-\frac{(1+x)^2}{4}=\frac{1+x+x^2}{3}-\frac{1+2x+x^2}{4}=\frac{(x-1)^2}{12};$$

аналогічно отримуємо при $0<y<1$:

$$D(X/Y=y)=\int_0^y x^2\cdot\frac{2x}{y^2}dx-\frac{4}{9}y^2==\frac{2y^4}{4y^2}-\frac{4}{9}y^2=\frac{y^2}{18};$$

3) лініями регресії є прямі $y = (1+x)/2$ (Y на X) і $x=(2/3)\cdot y$ (X на Y) (рис. 3.7).

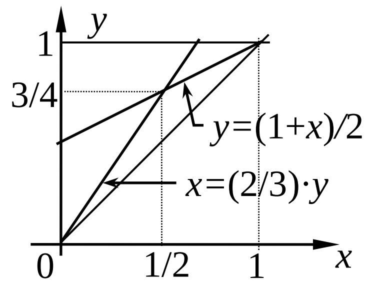


Рис. 3.7

Важлива властивість функції регресії $m_Y(x)$ полягає в тому, що математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини Y від випадкової величини $m_Y(X)$ менше, ніж від довільної іншої функції $f(X)$:

$$M\left(Y-m_Y(X)\right)^2\le M\left(Y-f(X)\right)^2. \tag{3.33}$$

Таким чином, $m_Y(X)$ є найкращим зображенням (за критерієм мінімуму математичного сподівання квадрата похибки) величини Y за допомогою величини X.

Аналогічна властивість притаманна і функції регресії $m_X(y)$:

$$M\left(X - m_X(Y)\right)^2 \le M\left(X - f\left(Y\right)\right)^2. \tag{3.33а}$$

Найбільш важливим і простим є той випадок, коли обидві функції регресії є лінійними. Припустимо, що $m_Y(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$. Коефіцієнти β_0 і β_1, які називаються **коефіцієнтами регресії**, можна знайти звичайно з умови мінімуму математичного сподівання квадрата похибки, що є функцією двох цих параметрів:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \beta_0}\left(M\left(Y - \beta_0 - \beta_1 X\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow m_Y - \beta_0 - \beta_1 m_X = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta_1}\left(M\left(Y - \beta_0 - \beta_1 X\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow K\left(X, Y\right) - \beta_1 D_X + m_X\left(m_Y - \beta_0 - \beta_1 m_X\right) = 0. \end{cases}$$

З цієї системи лінійних рівнянь знаходимо

$$\beta_0 = m_Y - r_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot m_X, \quad \beta_1 = r_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{K\left(X, Y\right)}{DX} \tag{3.34}$$

і, отже, **пряма регресії** Y на X має вигляд

$$\boxed{y = m_Y + r_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X).} \tag{3.35}$$

Аналогічно доводиться, що рівняння **прямої регресії** X на Y буде таким

$$\boxed{x = m_X + r_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_Y).} \tag{3.36}$$

У важливому для застосувань випадку, коли ВВ-р $\vec{X}(X;Y)$ розподілено за нормальним законом у загальній формі (формула (2.33)), умовні щільності ймовірності є нормальними з параметрами, які мають зміст умовного математичного сподівання і умовної дисперсії (див. формули (2.37), (2.37а)):

$$m_Y(x) = m_Y + r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot (x - m_X) \quad , \quad D(Y / X = x) = \sigma_Y^2 \cdot (1 - r^2) \ ;$$

$$m_X(y) = m_X + r \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot (y - m_Y) \quad , \quad D(X / Y = y) = \sigma_X^2 \cdot (1 - r^2) \, .$$

Звідси випливає, що для нормального вектора $\overrightarrow{X}(X;Y)$ істинні лінії регресії Y на X і X на Y є прямими.

У тому разі, коли функція регресії $m_Y(x)$ не є лінійною, можна довести, що функція $r_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot X + m_Y - m_X r_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ є найкращим наближенням до Y (за критерієм мінімуму математичного сподівання квадрата похибки) серед усіх лінійних функцій $kX + l$ випадкової величини X. А саме:

$$\min_{(k,\,l)} M\left(Y - kX - l\right)^2 = M\left(Y - r_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot X - m_Y + r_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} m_X\right)^2 = DY \cdot \left(1 - r_{X,Y}^2\right). \tag{3.37}$$

Це означає, що найкращим лінійним наближенням до істинної лінії регресії Y на X є **пряма наближеної регресії** Y на X, рівняння якої збігається з рівнянням прямої регресії Y на X (3.35). Аналогічно доводиться, що найкраще лінійне наближення до істинної лінії регресії X на Y дає **пряма наближеної регресії** X на Y, рівняння якої має такий самий вигляд, що і пряма регресії X на Y (3.36).

З останньої формули випливає, що $r_{X,Y}$ є мірою лінійної залежності між випадковими величинами X і Y.

Прями регресії (3.35), (3.36) проходять через точку з координатами (m_X ; m_Y). При $|r_{X,Y}|=1$ прямі регресії співпадають, а при $r_{X,Y}=0$ – паралельні осям координат.

Припустимо, що треба зробити прогноз щодо значення неспостереженої ВВ Y по спостереженому значенню x ВВ X. Виявляється, що найкращим прогнозом значення ВВ Y при $X = x$ за критерієм мінімуму середнього квадрата похибки є $m_Y(x)$. При цьому умовна дисперсія $D(Y/X=x)$ є мірою точності найкращого прогнозу в кожній точці x. Таким чином, математичне сподівання $D(Y/X)$ умовної дисперсії $D(Y/X=x)$ є мірою точності найкращого прогнозу на всьому проміжку значень випадкової величини X

$$D(Y/X) = MD(Y/X=x) = M(Y-m_Y(X))^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-m_Y(x))^2 \cdot p_{\vec{X}}(x,y)dxdy.$$

Приклад 42. Неперервний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ має такі числові характеристики: $MX=1$, $DX=4$, $MY=2$, $DY=9$, $r_{X,Y}=0.8$. У даному випробуванні випадкова величина X набула значення 1.3. Який прогноз можна зробити відносно значення випадкової величини Y?

Розв'язання. Щоб знайти точне значення $M(Y/X=1.3)$, потрібна умовна щільність $p_Y\left(y/X=1/3\right)$. Для того щоб знайти наближене значення $M(Y/X=1.3)$, скористаємося рівнянням прямої наближеної регресії Y на X (3.35):

$$y = 2 + \frac{3}{2}\cdot 0.8(x-1).$$

Підставляючи в це рівняння $x=1.3$, одержимо $y=2.36$. Таким чином, $M(Y/X=1.3)\approx 2.36$.

Відповідно для дискретного ВВ-ра умовні математичне сподівання і дисперсія визначаються таким чином

$$M(Y/X=x_k) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot P\{Y=y_j/X=x_k\} = \\ = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot \frac{p_{kj}}{P\{X=x_k\}} \quad (k=1,2,...,n), \tag{3.38}$$

$$D(Y/X=x_k) = \sum_{j=1}^{m}\left(y_j - M(Y/X=x_k)\right)^2 \cdot P\{Y=y_j/X=x_k\} = \\ = \sum_{j=1}^{m}\left(y_j - M(Y/X=x_k)\right)^2 \cdot \frac{p_{kj}}{P\{X=x_k\}} \quad (k=1,2,...,n). \tag{3.39}$$

У якості міри розсіювання випадкової величини Y відносно регресії $m_Y(X)$ (Y на X) розглядають **кореляційне відношення**

$$\boxed{\rho^2_{Y/X} = \frac{M[m_Y(X) - m_Y]^2}{DY} = 1 - \frac{D(Y/X)}{D(Y)}.} \qquad (3.40)$$

Із формули (3.40) випливають такі властивості кореляційного відношення:

1) $0 \le r^2_{X,Y} \le \rho^2_{Y/X} \le 1$;

2) $r^2_{X,Y} = \rho^2_{Y/X}$ при лінійній регресії;

3) $r^2_{X,Y} < \rho^2_{Y/X} = 1$ тоді і тільки тоді, коли $D(Y/X) = 0$ (тобто розподіл зосереджено на лінії регресії) і між ВВ X та Y є точна функціональна залежність $Y = m_Y(X)$, відмінна від лінійної;

4) $\rho^2_{Y/X} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $D(Y/X) = D(Y)$, тобто лінія регресії є горизонтальною прямою і, таким чином, ВВ X та Y є некорельованими.

Взагалі кажучи, $\rho^2_{Y/X} \ne \rho^2_{X/Y}$.

Приклад 43. Двовимірний випадковий вектор задано таблицею розподілу

$X \backslash Y$	0	2	3
1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0	0.2
3	0	0.1	0.1

Знайти: 1) регресію Y на X; 2) коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$; 3) рівняння прямих наближеної регресії; 4) кореляційне відношення $\rho^2_{Y/X}$.

Розв'язання: 1) регресія Y на X або умовне математичне сподівання $M(Y/X = x_k)$ знаходиться за формулою (3.38).

Оскільки

$$P\{X = 1\} = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4,\ P\{X = 2\} = 0.2 + 0.2 = 0.4,\ P\{X = 3\} = 0.2,$$

то

$$M\left(Y/X=1\right)=2\cdot\frac{0.2}{0.4}+3\cdot\frac{0.1}{0.4}=1.75\ ,\ M\left(Y/X=2\right)=3\cdot\frac{0.2}{0.4}=1.5,$$

$$M\left(Y/X=3\right)=2\cdot\frac{0.1}{0.2}+3\cdot\frac{0.1}{0.2}=2.5;$$

2) $MX=1\cdot0.4+2\cdot0.4+3\cdot0.2=1.8,\quad MY=2\cdot0.3+3\cdot0.4=1.8,$

$M\left(X^2\right)=1\cdot0.4+4\cdot0.4+9\cdot0.2=3.8\ ,\ M\left(Y^2\right)=4\cdot0.3+9\cdot0.4=4.8,$

$$M\left(X\cdot Y\right)=\sum\sum x_k\cdot y_j\cdot p_{kj}=1\cdot2\cdot0.2+1\cdot3\cdot0.1+2\cdot3\cdot0.2+3\cdot2\cdot0.1+3\cdot3\cdot0.1=3.4$$

$DX=3.8-3.24=0.56,\quad \sigma_X=\sqrt{0.56}\approx0.748,\quad DY=4.8-3.24=1.56,$

$\sigma_Y=\sqrt{1.56}\approx1.249,\qquad K\left(X,Y\right)=3.4-1.8\cdot1.8=0.16,$

$$r_{X,Y}=\frac{K\left(X,Y\right)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{0.16}{0.748\cdot1.249}\approx0.17;$$

3) знайдемо кутові коефіцієнти прямих наближеної регресії:

$$\beta_1=\frac{K\left(X,Y\right)}{DX}=\frac{0.16}{0.56}\approx0.29,\ \beta_1'=\frac{K\left(X,Y\right)}{DY}=\frac{0.16}{1.56}\approx0.10.$$

Таким чином, рівняння прямих наближеної регресії мають вигляд

$$y=1.8+0.29\left(x-1.8\right)\Leftrightarrow y=0.29x+1.33\quad (Y \text{ на } X),$$

$$x=1.8+0.10\left(y-1.8\right)\Leftrightarrow x=0.10y+1.62\quad (X \text{ на } Y);$$

4) знайдемо за формулою(3.39) умовні дисперсії:

$$D\left(Y/X=1\right)=\left(0-M\left(Y/X=1\right)\right)^2\cdot P\left\{Y=0/X=1\right\}+$$

$$+\left(2-M\left(Y/X=1\right)\right)^2\cdot P\left\{Y=2/X=1\right\}+\left(3-M\left(Y/X=1\right)\right)^2\cdot P\left\{Y=3/X=1\right\}=$$

$$=1.75^2\cdot\frac{0.1}{0.4}+0.25^2\cdot\frac{0.2}{0.4}+1.25^2\cdot\frac{0.1}{0.4}=1.1875,$$

$$D\left(Y/X=2\right)=\left(0-1.5\right)^2\cdot\frac{0.2}{0.4}+\left(2-1.5\right)^2\cdot0+\left(3-1.5\right)^2\cdot\frac{0.2}{0.4}=2.25,$$

$$D\left(Y/X=3\right)=\left(0-2.5\right)^2\cdot0+\left(2-2.5\right)^2\cdot\frac{0.1}{0.2}+\left(3-2.5\right)^2\cdot\frac{0.1}{0.2}=0.25.$$

Таким чином, $D\left(Y/X\right)=1.1875\cdot0.4+2.25\cdot0.4+0.25\cdot0.2=1.425$ і кореляційне відношення дорівнює

$$\rho^2_{Y/X} = 1 - \frac{D(Y/X)}{DY} = 1 - \frac{1.425}{1.56} \approx 0.0865 > 0.0289 \approx r^2_{X,Y}.$$

Приклад 44. Випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений в області D, яка обмежена прямими $y = x$, y=1, y=0, x=2 (трапеція на рис. 3.8). Знайти кореляційне відношення $\rho^2_{Y/X}$ і коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$.

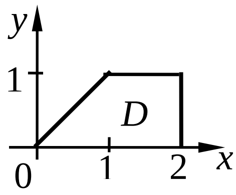


Рис. 3.8

Розв'язання. Оскільки площа трапеції дорівнює $3/2$, то

$$p_{\overline{X}}(x,y) = \begin{cases} 2/3, \textit{якщо}\,(x;y) \in D, \\ 0, \textit{якщо}\,(x;y) \notin D. \end{cases}$$

$$MX = \iint_D \frac{2}{3} x dxdy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\int_y^2 x dx \right) dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(4 - y^2\right) dy = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{9},$$

$$MY = \iint_D \frac{2}{3} y dxdy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\int_y^2 y dx \right) dy = \frac{2}{3}\int_0^1 y(2-y) dy = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9},$$

$$M(X \cdot Y) = \iint_D \frac{2}{3} xy dxdy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\int_y^2 xy dx \right) dy = \frac{1}{3}\int_0^1 y\left(4 - y^2\right) dy = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12},$$

$$DX = M\left(X^2\right) - (MX)^2 = \iint_D \frac{2}{3} x^2 dxdy - \frac{121}{81} = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\int_y^2 x^2 dx \right) dy - \frac{121}{81} =$$

$$= \frac{2}{9}\int_0^1 \left(8 - y^3\right) dy - \frac{121}{81} = \frac{2}{9}\left(8 - \frac{1}{4}\right) - \frac{121}{81} = \frac{37}{162},$$

$$DY = M\left(Y^2\right) - (MY)^2 = \iint_D \frac{2}{3} y^2 dxdy - \frac{16}{81} = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\int_y^2 y^2 dx \right) dy - \frac{16}{81} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 y^2 (2 - y) dy - \frac{16}{81} = \frac{13}{162}.$$

Таким чином, коефіцієнт кореляції дорівнює

$$r_{X,Y} = \frac{K(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{M(X \cdot Y) - (MX)\cdot(MY)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{\left(\frac{7}{12} - \frac{44}{81}\right)162}{\sqrt{37 \cdot 13}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{37}}.$$

Оскільки $p_x(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{x}}(x,y)\,dy=\begin{cases}0, & якщо\ x\notin[0;2]\\ 2x/3, & якщо\ x\in[0;1],\\ 2/3, & якщо\ x\in[1;2],\end{cases}$ то умовна щільність імовірності $p_Y\left(y/X=x\right)=\dfrac{p_{\vec{x}}(x,y)}{p_x(x)}=\begin{cases}0, & якщо\ x\notin[0;2],\\ 1/x, & якщо\ x\in(0;1],\\ 1, & якщо\ x\in[1;2].\end{cases}$

Тепер можна знайти умовні математичні сподівання та дисперсію:

$$M\left(Y/X=x\right)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\dfrac{1}{x}dy=\dfrac{x}{2}, & \text{якщо } x\in[0;1],\\ \int\limits_{0}^{1} ydy=\dfrac{1}{2}, & \text{якщо } x\in[1;2];\end{cases}$$

$$D\left(Y/X=x\right)=M\left(Y^2/X=x\right)-\left(M\left(Y/X=x\right)\right)^2,$$

$$M\left(Y^2/X=x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_Y\left(y/X=x\right)dy=\begin{cases}\int\limits_{0}^{x} y^2\cdot\dfrac{1}{x}dy=\dfrac{x^2}{3}, & \text{якщо } x\in[0;1],\\ \int\limits_{0}^{1} y^2dy=\dfrac{1}{3}, & \text{якщо } x\in[1;2];\end{cases}$$

отже,

$$D\left(Y/X=x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{x^2}{12}, & \text{якщо } x\in[0;1],\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}, & \text{якщо } x\in[1;2].\end{cases}$$

Оскільки

$$D\left(Y/X\right)=MD\left(Y/X=x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} D\left(Y/X=x\right)\cdot p_x(x)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{12}\cdot\frac{2}{3}xdx+\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{72}+\frac{1}{18}=\frac{5}{72},$$

то кореляційне відношення дорівнює

$$\rho^2_{Y/X} = 1 - \frac{D\left(Y/X\right)}{DY} = 1 - \frac{5\cdot 162}{72\cdot 13} = 0.1346 > r^2_{X,Y} = 0.0878 .$$

3.3.3. Ентропія та інформація

Розглянемо тут деякі поняття, які виникають у задачах теорії зв’язку. Нехай $\vec{X}\left(X;Y\right)$ – випадковий вектор.

Визначення 8. Кількістю інформації (інформацією) відносно випадкової величини *Y*, яка міститься у випадковій величині *X*, називається число *I*(*X*,*Y*), яке визначається формулою

$$I(X,Y)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} P\{X=x_k, Y=y_j\}\log_2 \dfrac{P\{X=x_k, Y=y_j\}}{P\{X=x_k\}\cdot P\{Y=y_j\}}, \text{якщо ВВ-р } \vec{X} \text{ є дискр.;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}\left(x,y\right)\log_2 \dfrac{p_{\vec{X}}\left(x,y\right)}{p_X\left(x\right)p_Y\left(y\right)}dxdy, \text{якщо ВВ-р } \vec{X} \text{ є неперервним.} \end{cases}$$

Оскільки наведена формула є симетричною відносно *X* та *Y*, то *I*(*X*,*Y*)=*I*(*Y*,*X*). Зрозуміло, що *I*(*X*,*Y*)> 0, якщо випадкові величини *X* та *Y* є залежними. У тому разі, коли випадкові величини *X* та *Y* є незалежними, то *X* не містить ніякої інформації про *Y* і *I*(*X*,*Y*)=0. Інформація *I*(*X*,*Y*), яку містить випадкова величина *X* відносно випадкової величини *Y*, не перевищує інформації, яку містить випадкова величина *X* відносно себе, тобто *I*(*X*,*Y*)≤*I*(*X*,*X*).

Якщо випадковий вектор $\vec{X}\left(X;Y\right)$ є неперервним, то *I*(*X*,*Y*) можна подати у вигляді

$$I(X,Y) = M(\log_2 \frac{p_{\vec{X}}(X,Y)}{p_X(X)\cdot p_Y(Y)}).$$

Нехай випадковий вектор $\vec{X}\left(X;Y\right)$ є розподіленим за законом Гаусса в загальній формі (формула (2.33)). Тоді кількість інформації про одну координату, яка міститься у другій його координаті, дорівнює

$$I\left(X,Y\right) = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}},$$

де *r* – коефіцієнт кореляції випадкових величин *X* і *Y*.

Визначення 9. Ентропією $H(X)$ випадкової величини X називається найбільша інформація $I(X,X)$, яка міститься у випадкової величині X

$$H(X)=I(X,X)=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{n}P\{X=x_k\}\log_2 P\{X=x_k\}, \text{якщо ВВ } X \text{ є дискретною};\\ -\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)\log_2 p_X(x)dx, \text{якщо ВВ } X \text{ є неперервною.}\end{cases}$$

Зазначимо, що ентропію неперервної випадкової величини можна подати у вигляді

$$H(X)=-M\,(log_2 p_X(X)).$$

Ентропія дискретної випадкової величини є мірою невизначеності значення випадкової величини до проведення спостереження. Ентропія дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ймовірність одного зі значень дорівнює одиниці і, таким чином, невизначеність в інформації про випадкову величину відсутня. За одиницю вимірювання степені невизначеності приймають невизначеність для випадкової величини, яка приймає лише два рівноймовірних значення. Ця одиниця вимірювання називається бітом (скорочення англійських слів **bi***nary digi***t=bit**). Ентропія дискретної випадкової величини є максимальною, якщо всі її значення рівноймовірні: $p_1= p_2=...= p_n=1/n$, а саме

$$H(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log_2 n=\frac{1}{n}\log_2 n\cdot n=\log_2 n.$$

Ентропія $H(X)$ дискретної випадкової величини показує, скільки потрібно в середньому двійкових знаків для запису можливих значень випадкової величини X.

Можна показати, що інформація та ентропія пов’язані співвідношенням

$$I(X,Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y),$$

де величина $H(X,Y)$, яка називається ентропією вектора $\vec{X}(X;Y)$, розраховується за формулою

$$H(X,Y)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}P\{X=x_k,Y=y_j\}\log_2 P\{X=x_k,Y=y_j\}, \text{якщо ВВ-р } \vec{X} \text{ є дискр.};\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x,y)\log_2 p_{\vec{X}}(x,y)dxdy, \text{якщо ВВ-р } \vec{X} \text{ є неперервним.}\end{cases}$$

Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $H(X,Y)=H(X)+H(Y)$.

Приклад 45. Знайти: 1) інформацію $I(X,Y)$, яка міститься в координаті Y по відношенню до координати X; 2) ентропії $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$.

X \ Y	-1	0	1
-1	4/15	1/15	4/15
0	1/15	2/15	1/15
1	0	2/15	0

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо суми по рядках і стовпчиках таблиці:

$P\{X=-1\}=9/15$, $P\{X=0\}=4/15$, $P\{X=1\}=2/15$,

$P\{Y=-1\}=P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=1/3$.

$$1)\ I(X,Y)=\frac{4}{15}\log_2\frac{\frac{4}{15}}{\frac{9}{15}\cdot\frac{5}{15}}+\frac{1}{15}\log_2\frac{\frac{1}{15}}{\frac{9}{15}\cdot\frac{5}{15}}+\frac{4}{15}\log_2\frac{\frac{4}{15}}{\frac{9}{15}\cdot\frac{5}{15}}+\frac{1}{15}\log_2\frac{\frac{1}{15}}{\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{15}}+$$

$$+\frac{2}{15}\log_2\frac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{15}}+\frac{1}{15}\log_2\frac{\frac{1}{15}}{\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{15}}+\frac{2}{15}\log_2\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{15}}=0.35\ \text{á³ò};$$

$$2)\ H(X)=\frac{9}{15}\log_2\frac{1}{\frac{9}{15}}+\frac{4}{15}\log_2\frac{1}{\frac{4}{15}}+\frac{2}{15}\log_2\frac{1}{\frac{2}{15}}\approx 0.44+0.51+0.39=1.34\ \text{біт};$$

$$H(Y)=3\left(\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)=\log_2 3\approx 1.58\ \text{біт};$$

$$H(X,Y)=\frac{8}{15}\log_2\frac{1}{\frac{4}{15}}+\frac{3}{15}\log_2\frac{1}{\frac{1}{15}}+\frac{4}{15}\log_2\frac{1}{\frac{2}{15}}=\log_2 15-\frac{4}{3}\approx 2.57\ \text{біт}.$$

Отже, $I(X,Y)=1.34+1.58-2.57=0.35$ біт, що співпадає з результатом, одержаним у пункті 1).

Приклад 46. Знайти ентропію ВВ: 1) X розподілена рівномірно на проміжку $[c;d]$; 2) $X\sim N(a;\sigma^2)$.

Розв'язання: 1) $H(X)=\int\limits_{c}^{d}\frac{1}{d-c}\log_2(d-c)=\log_2(d-c)$.

Серед усіх неперервних ВВ, для яких $p_X(x)=0$ при $x \notin [c;d]$, рівномірно розподілена у проміжку $[c;d]$ ВВ має найбільшу ентропію;

2) зрозуміло, що ентропія ВВ X не залежить від її математичного сподівання MX і дорівнює ентропії відповідної центрованої величини $\overset{0}{X}$. Отже,

$$H(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot\log_2(\sqrt{2\pi}\,\sigma\cdot e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}})dx=\sqrt{2\pi}\,\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}(\log_2(\sqrt{2\pi}\,\sigma)+$$

$$+\frac{x^2}{2\sigma^2}\log_2 e)dx=\log_2(\sqrt{2\pi}\,\sigma)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx+\frac{1}{2\sigma^2}\log_2 e\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\log_2(\sqrt{2\pi}\,\sigma)+\frac{1}{2\sigma^2}\log_2 e\cdot\sigma^2=\log_2(\sqrt{2\pi e}\,\sigma).$$

Зазначимо, що серед усіх неперервних випадкових величин, які мають одну і ту саму дисперсію σ^2, випадкова величина $X \sim N(a;\sigma^2)$ має найбільшу ентропію.

3.4. Прикладні задачі

3.4.1. Теорія масового обслуговування

Ця теорія є одним з найважливіших розділів прикладної теорії ймовірності. Теорія масового обслуговування вивчає функціонування систем, у які поступають виклики (вимоги) на обслуговування. Моменти надходження викликів, а також тривалість проміжку обслуговування кожного виклику є випадковими величинами. З такими системами і викликами зустрічаємося скрізь: телефонна станція і виклики на розмову, автозаправна станція і автомобілі, квиткова каса і пасажири, злітно-посадкова смуга і літаки, перукарня і клієнти. Мета теорії полягає в тому, щоб виявити, наскільки добре організована система обслуговування.

3.4.1.1. Основні поняття

Якщо в момент надходження чергового виклику в системі обслуговування є вільні пристрої (канали), то один з них негайно повинен бути зайнятим викликом, який надійшов.

Нехай у момент надходження чергового виклику всі обслуговуючі пристрої системи зайняті. Залежно від того, як організована схема обслуговування, системи масового обслуговування (СМО) поділяються на такі три категорії:

1) системи з втратами – виклик одержує відмову (не обслуговується, губиться) і залишає систему (АТС);

2) системи з очікуванням – виклик ставиться в чергу і очікує, доки не буде розпочато обслуговування (станція швидкої медичної допомоги). Зазначимо, що не завжди виклики обслуговуються в порядку надходження до системи. Наприклад, деякі відмови ЕОМ повинні виявлятись і усуватись відразу;

3) системи з очікуванням при обмеженні на довжину черги або на час очікування.

Теорія масового обслуговування дозволяє за відомими законами розподілу кількості викликів, що надходять, і тривалістю їх обслуговування одержати імовірнісні характеристики організованості СМО: імовірність відмови на обслуговування виклику в системах з відмовами, математичне сподівання часу очікування початку обслуговування, а також математичне сподівання довжини черги в системах з очікуванням.

Позначимо через $N(t)$ кількість викликів на обслуговування, що поступили до системи на проміжку часу $[0; t)$. Щодо характеру надходження викликів до СМО, як правило, припускають таке:

1) імовірність $P\{N(t+\tau)-N(t)=k\}$ появи точно k викликів за проміжок часу $[t;\ t+\tau)$ залежить лише від його довжини τ, але не від його положення на осі часу (властивість **стаціонарності);**

2) поява хоча б двох викликів за досить малий проміжок часу Δt є практично неможливою подією (властивість **ординарност**і). Тобто

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t), P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$
$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\ >1\}=o(\Delta t)\text{, де } \lambda>0;$$

3) кількість появ викликів на деякому проміжку часу не залежить від кількості появ викликів на будь-якому проміжку, який з ним не перетинається (властивість **відсутності післядії**).

Потоком викликів називається послідовність викликів, яка надходить у СМО. Потік викликів називається **найпростішим,**

якщо йому притаманні властивості стаціонарності, ординарності та відсутності післядії. У найпростішому потоці випадкова величина $N(t)$ розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda\, t$:

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad (k=0,1,2,...),$$

де параметр λ, який називається **інтенсивністю потоку викликів**, дорівнює математичному сподіванню кількості викликів, що поступили до системи за одиницю часу.

Тривалості обслуговування різних викликів вважаються взаємно незалежними випадковими величинами, які розподілені за показниковим законом з параметром μ:

$$p_{T\,Обсл}(t)=\mu e^{-\mu t}(\mu>0)\Rightarrow M\,T_{Обсл}=\frac{1}{\mu} \quad \text{(приклад 3 п. 3.1.2).}$$

Оскільки математичне сподівання тривалості обслуговування дорівнює 1/μ, то **інтенсивність потоку обслужених викликів** (кількість за одиницю часу) за умови неперервної роботи одного пристрою (каналу) дорівнює μ.

Вибір показникового розподілу для часу обслуговування $T_{Обсл}$ пояснюється тим, що властивість відсутності післядії (приклад 9 п. 2.1.3), притаманна показниковому розподілу, дозволяє спростити розв'язання задачі порівняно з іншими законами розподілу. При цьому отримані результати є цілком задовільними з практичної точки зору.

Приклад 47. Нехай s пристроїв незалежно зайняті обслуговуванням s викликів у деякий момент часу t. Знайти ймовірність того, що в момент часу $t+h$ ($h>0$) будуть вільними точно l пристроїв $(l\le s)$.

Розв'язання. Оскільки час обслуговування розподілений за показниковим законом $p_{Тобсл}(t)=\mu e^{-\mu t}(\mu>0)$, то на підставі властивості відсутності післядії ймовірність того, що деякий пристрій до моменту часу $t+h$ буде вільним, дорівнює

$$P\{T_{Обсл}-t<h/T_{Обсл}\ge t\}=P\{T_{Обсл}<h\}=1-e^{-\mu h}.$$

Тоді ймовірність того, що цей пристрій буде зайнятим обслуговуванням до моменту часу $t+h$, дорівнює $e^{-\mu h}$. Отже, на підставі схеми Бернуллі шукана ймовірність дорівнює $C_s^l \cdot (1-e^{-\mu h})^l \cdot (e^{-\mu h})^{s-l}$.

3.4.1.2. *n*-канальна система з втратами (*n* телефонних ліній)

Така система в кожен момент часу може знаходитись в одному з $n+1$ станів: E_0 (всі канали вільні), E_1 (зайнятий один канал),..., E_n (зайняті всі канали). Враховуючи припущення про характер потоку викликів і час їх обслуговування, можна побудувати орієнтований граф переходів із одного стану до іншого та знайти відповідні інтенсивності переходів (рис. 3.9). Перехід із стану E_k у стан E_{k+1} (зліва направо) ($k=0,1, \ldots, n-1$) відбувається за рахунок потоку викликів на обслуговування інтенсивністю λ. Перехід із стану E_{k+1} у стан E_k (справа наліво) ($k=1, 2,\ldots, n$) відбувається за рахунок потоку обслужених викликів, інтенсивність якого дорівнює $(k+1)\mu$. Наприклад, для переходу $E_2 \to E_1$ байдуже, який з двох зайнятих каналів звільниться. Тому інтенсивність потоку викликів, які обслуговуються, буде дорівнювати сумі інтенсивностей потоків викликів, які обслуговуються цими каналами, $\mu+\mu=2\mu$ (приклад 11 п. 3.1.4).

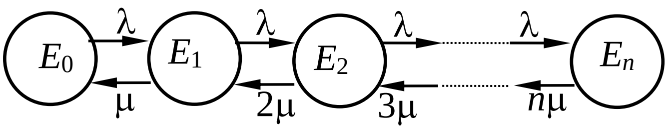


Рис. 3.9

Нехай $X(t)$ – кількість каналів, зайнятих у момент часу t ($t \geq 0$) і $p_k(t)=P\{X(t)=k\}=P\{E_k(t)\}$ – імовірність перебування системи у стані E_k ($k=0,1,\ldots,n$) в момент часу t. Імовірності $p_k(t)$ ($k=0,1,\ldots,n$) задовольняють систему диференціальних рівнянь А.М. Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\ \dots \\ \dfrac{dp_n}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t), \end{cases}$$

яку треба розв'язати при задаванні початкових імовірностей $p_k(0) \geq 0 (k = 0,1,...,n),$ де $p_0(0) + p_1(0) + ... + p_n(0) = 1.$ При цьому виявляється, що для ймовірностей $p_k(t)$ при $t \to +\infty$ існують границі p_k, які не залежать від початкових імовірностей $p_k(0) \geq 0 (k = 0,1,...,n)$:

$$p_k = \lim_{t \to +\infty} p_k(t) \quad (p_0 + p_1 + ... + p_n = 1).$$

Таким чином, у СМО встановлюється **граничний стаціонарний** режим з **граничними** ймовірностями станів $p_k (k = 0,1,...,n)$ $(p_0 + p_1 + ... + p_n = 1)$. Ці граничні ймовірності можна знайти з системи однорідних алгебраїчних рівнянь, яку отримуємо з попередньої системи диференціальних рівнянь за умови $\dfrac{dp_k}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 = 0, \\ \dots \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0, \end{cases} \qquad p_0 + ... + p_n = 1.$$

Шукані ймовірності дорівнюють

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0 \ \ (k = 1,...,n),$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – середня кількість викликів, що надійшли за час обслуговування одного виклику. Імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм}$, тобто ймовірність того, що в момент надходження виклику всі n каналів зайняті, дорівнює p_n: $P_{відм} = p_n$.

Знайдемо математичне сподівання $\bar{k}$ кількості зайнятих каналів у граничному стаціонарному режимі (математичне сподівання кількості викликів, що знаходяться у СМО):

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \rho \cdot \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}-\frac{\rho^n}{n!}\right)\cdot\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} = \rho\cdot(1-p_n).$$

Приклад 48. З метою збільшення дальності без посадкового польоту здійснюється дозаправлення літаків у повітрі. У районі дозаправлення постійно чергують 4 літаки-дозаправники. Якщо дозаправлення почалось, то воно триває до кінця у середньому 10 хвилин. Якщо всі дозаправники зайняті, то літак сідає на запасний аеродром. У середньому за годину в район дозаправлення прибуває 24 літаки. Знайти ймовірність того, що літак буде дозаправленим і середню кількість зайнятих літаків-дозаправників.

Розв'язання. Маємо СМО з втратами, у якої $n=4$, $\lambda=24$ літак/год, $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{6}$ год/літак. Оскільки $\rho=\lambda/\mu=4$, то ймовірність p_4 чергового виклику одержати відмову в дозаправленні (усі дозаправники зайняті) дорівнює

$$p_4 = \left(1+4+\frac{16}{2!}+\frac{64}{3!}+\frac{256}{4!}\right)^{-1}\cdot\frac{256}{4!}=\frac{32}{103}.$$

Математичне сподівання кількості зайнятих літаків–до заправників дорівнює $4\cdot(1\text{-}32/103)=2.76$. Таким чином, приблизно третина дозаправників не зайнята дозаправкою, хоча майже 30% літаків отримують відмову у дозаправленні. Ця типова ситуація викликана хаотичним характером надходження вимог на дозаправлення і тим, що тривалість проміжку дозаправлення літака є випадковою величиною. Якби ці причини були відсутніми, відмов у дозаправленні не було б: за одну годину прибувають 24 літаки, один дозаправник обслуговує 6 літаків, а 4 дозаправники – 24 літаки.

Зауваження. Зупинимось коротко на виведенні першого і другого рівнянь системи А.М. Колмогорова (цілком аналогічно можна одержати і інші рівняння цієї системи).

1. За формулою повної ймовірності маємо:

$$p_0(t+h) = p_0(t)\cdot P(E_0(t+h)/E_0(t)) + p_1(t)\cdot P(E_0(t+h)/E_1(t)) + \ldots +$$
$$+p_n(t)\cdot P(E_0(t+h)/E_n(t)) = p_0(t)\cdot p_{00}(h) + p_1(t)\cdot p_{10}(h) + \ldots + p_n(t)\cdot p_{n0}(h) \quad (3.41)$$

Подія $E_0(t) \to E_0(t+h)$ є сумою нескінченної кількості несумісних подій $C_m (m = 0,1,\ldots)$, кожна з яких є добутком незалежних подій A_m={за проміжок часу $[t;\ t+h)$ у СМО надійшло m викликів} і B_m={за проміжок часу $[t;\ t+h)$ закінчилось обслуговування m викликів}. Отже, на підставі прикладу 47 п. 3.4.1.1 маємо

$$P(C_m) = P(A_m)\cdot P(B_m) = \frac{(\lambda h)^m}{m!}e^{-\lambda h}\cdot\left(1-e^{-\mu h}\right)^m.$$

Таким чином,

$$p_{00}(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(C_m) = e^{-\lambda h} + \lambda h\, e^{-\lambda h}\left(1-e^{-\mu h}\right) + \ldots = 1 - \lambda h + o(h).$$

Подія $E_1(t) \to E_0(t+h)$ є сумою нескінченної кількості несумісних подій $D_m = A_m \cdot B_{m+1}$ (m=0, 1, …). Отже,

$$p_{10}(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(D_m) = e^{-\lambda h}\cdot(1-e^{-\mu h}) + \ldots = \mu h + o(h).$$

Аналогічно отримуємо $p_{20}(h) = 0(h),\ldots, p_{n0}(h) = 0(h)$. Тоді з формули (3.41) випливає, що

$$p_0(t+h) = p_0(t) - \lambda h p_0(t) + \mu h p_1(t) + 0(h) \Rightarrow \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} =$$
$$= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Оскільки $\frac{o(h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$, то переходячи до границі при $h \to 0$, остаточно одержимо

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

2. $p_1(t+h) = p_0(t) \cdot p_{01}(h) + p_1(t) \cdot p_{11}(h) + p_2(t) \cdot p_{21}(h) + ... + p_n(t) \cdot p_{n1}(h).$

Подія $E_0(t) \to E_1(t+h)$ є сумою нескінченної кількості несумісних подій $G_m = A_m \cdot B_{m-1}$ (m=1, 2,…).

Оскільки на підставі прикладу 47 п. 3.4.1.1

$$P(G_m) = P(A_m) \cdot P(B_{m-1}) = \frac{(\lambda h)^m}{m!} e^{-\lambda h} \cdot C_m^{m-1} \cdot \left(1 - e^{-\mu h}\right)^{m-1} \cdot e^{-\mu h},$$

то $p_{01}(h) = \lambda h \cdot e^{-\lambda h} \cdot e^{-\mu h} + \frac{(\lambda h)^2}{2!} e^{-\lambda h} \cdot 2(1 - e^{-\mu h}) \cdot e^{-\mu h} + ... = \lambda h + o(h).$

Події $E_1(t) \to E_1(t+h)$ і $E_2(t) \to E_1(t+h)$ є сумою нескінченної кількості несумісних подій: за проміжок часу [$t;t+h$) у СМО надійшло m нових викликів (m=0, 1,…) і за той самий проміжок часу закінчилось обслуговування відповідно m або $m+1$ викликів. Отже знайдемо:

$$\begin{aligned}
&p_{11}(h) = e^{-\lambda h} \cdot e^{-\mu h} + \lambda h e^{-\lambda h} \cdot 2(1 - e^{-\mu h}) e^{-\mu h} + ... = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h),\\
&p_{21}(h) = e^{-\lambda h} \cdot 2(1 - e^{-\mu h}) e^{-\mu h} + \lambda h e^{-\lambda h} \cdot 3(1 - e^{-\mu h})^2 e^{-\mu h} + ... = 2\mu h + o(h),\\
&p_{31}(h) = o(h), ..., p_{n1}(h) = o(h).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
&p_1(t+h) = \lambda h p_0(t) + p_1(t) - (\lambda + \mu) h p_1(t) + 2\mu h p_2(t) + o(h) \Rightarrow\\
&p_1'(t) = \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t).
\end{aligned}$$

3.4.1.3. Одноканальна система з чергою довжиною *m* з обслуговуванням у порядку надходження (АЗС з однією колонкою і площадкою, що вміщує не більше *m* машин)

Система може знаходитись в одному з m+2 станів: E_0 – канал обслуговування вільний, E_1 – канал зайнятий, E_2 – канал зайнятий і один виклик стоїть у черзі, ..., E_{m+1} – канал зайнятий і в черзі стоять m викликів (рис. 3.10).

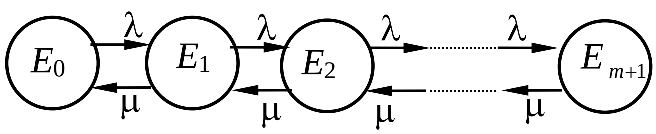


Рис. 3.10

Нехай $X(t)$ – кількість викликів, що знаходяться в системі в момент часу t ($t \geq 0$) і $p_k(t)=P\{X(t)=k\}$ – імовірність перебування системи у стані E_k ($k=0,1,...,m+1$).

Можна показати, що в системі з часом виникає граничний стаціонарний режим:

$$p_k = \lim_{t \to +\infty} p_k(t),$$

причому $p_0 = (1-\rho)/(1-\rho^{m+2})$, $p_k = \rho^k \cdot p_0$ ($k=1,..., m+1$), де $\rho = \lambda / \mu$.

Імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм} = p_{m+1}$. Математичне сподівання кількості зайнятих каналів $\bar{k} = 1 - p_0$.

Математичні сподівання $\bar{r}$ кількості викликів у черзі (середня довжина черги) і $\bar{t}_{чер}$ часу очікування до початку обслуговування (середній час перебування в черзі) відповідно дорівнюють

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{m} k p_{k+1} = \rho^2 (1+\rho+...+\rho^{m-1} - m\rho^m)/(1-\rho^{m+2}), \quad \bar{t}_{чер} = \bar{r} / \lambda.$$

3.4.1.4. *n*-канальна система з очікуванням (обслуговування в порядку надходження викликів)

Система може знаходитись в одному з нескінченої кількості станів E_k ($k=0, 1, 2,...$), де стан E_k означає, що в системі знаходиться k викликів. Стани E_k ($k=0, 1, 2,..., n$) відповідають відсутності черги. У станах E_k ($k=n, n+1,...$) є черга довжиною $k–n$. Схема переходів з одного стану в інший наведена на рис .3.11.

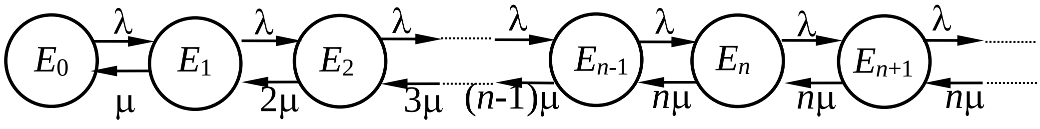


Рис. 3.11

Нехай $X(t)$ – кількість викликів, що знаходяться в системі в момент часу t ($t \geq 0$) і $p_k(t)=P\{X(t)=k\}$ – імовірність перебування системи у стані E_k (k=0,1,2,...). Можна довести, що граничний стаціонарний режим $p_k = \lim\limits_{t\to+\infty} p_k(t)$ є можливим лише при λ/(nμ)<1 («швидкість» обслуговування більша за «швидкість» надходження викликів). При цьому

$$p_0 = \left(1+\rho+...+\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{\rho^n}{(n-1)!\cdot(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!}\cdot p_0 \quad (1 \le k \le n),\ p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}\cdot p_0 \quad (r \ge 1).$$

Імовірність П=p_n+p_{n+1}+... того, що виклик на обслуговування потрапляє в чергу, дорівнює $\Pi = p_0 \cdot \frac{\rho^n}{(n-1)!\cdot(n-\rho)}$.

Математичні сподівання кількості викликів у черзі $\bar{r}$ і часу очікування до початку обслуговування $\bar{t}_{чер}$ відповідно дорівнюють

$$\bar{r} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(k-n)\,p_k = \Pi\rho/(1-\rho),$$
$$\bar{t}_{чер} = \bar{r}/\lambda\ .$$

Зокрема для одноканальної системи одержимо формули

$$p_0 = 1-\rho,\ p_k = (1-\rho)\rho^k (k=1,2,...), \Pi=\rho, \bar{r} = \rho^2/(1-\rho), \bar{t}_{чер} = \rho^2/\lambda(1-\rho).$$

Приклад 49. Бензозаправна станція має п’ять бензоколонок, у кожній з яких на заправку автомобіля витрачається в середньому 8 хвилин. Знайти середню довжину черги і середній час перебування в черзі, якщо потік автомобілів, що прибувають на заправку, має інтенсивність λ=0.5 авто/хв.

Розв’язання. Маємо СМО з очікуванням, у якої n=5, 1/μ=8 хв/авто, λ/nμ=4/5. Імовірність p_0 того, що система вільна, дорівнює

$$p_0 = \left(1+4+\frac{16}{2!}+\frac{64}{3!}+\frac{256}{4!}+\frac{1024}{4!\cdot(5-4)}\right)^{-1} = \frac{1}{77} \approx 0.013\ .$$

Імовірність П того, що автомобіль, який надійшов, потрапить у чергу, дорівнює

$$\Pi = \frac{1}{77} \cdot \frac{4^5}{4! \cdot (5-4)} = \frac{128}{231} \approx 0.554 .$$

Середня довжина черги $\bar{r}$ дорівнює

$$\bar{r} = \frac{128}{231} \cdot \frac{0.8}{1-0.8} = \frac{512}{231} \approx 2.22 \text{ авто.}$$

Середній час очікування у черзі $\bar{t}_{чер}$ дорівнює

$$\bar{t}_{чер} = \frac{512}{231 \cdot 0.5} = \frac{1024}{231} \approx 4.43 \text{ хв.}$$

Приклад 50. Довідкове бюро обслуговує одна телефоністка, у якої два телефони. Якщо під час відповіді по одному телефону дзвонить інший, то вона, піднявши трубку, пропонує абоненту почекати і обслуговує його після того, як покладе трубку першого телефону. Інтенсивність потоку викликів λ=2 виклик/хв, середня тривалість відповіді 1/μ=3/2 хв/виклик. Знайти середній час очікування відповіді і середню довжину черги.

Розв'язання. Маємо одноканальну СМО з чергою довжиною m=1, ρ=λ/μ=3. Середня довжина черги $\bar{r}$ дорівнює

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1-\rho)}{1-\rho^3} = \frac{9}{13} \text{ виклик.}$$

Середній час очікування відповіді $\bar{t}_{чер}$ дорівнює

$$\bar{t}_{чер} = \frac{9}{13 \cdot 2} \approx 0.35 \text{ хв.}$$

3.4.2. Найпростіші задачі теорії надійності

Головне питання теорії надійності полягає у визначенні імовірнісних характеристик працездатності системи, якщо відома її структура і імовірнісні характеристики працездатності окремих елементів.

Нехай ВВ T – час роботи системи (або окремого її вузла) до моменту втрати працездатності (до відмови). Функцією надійності P(t) приладу називається ймовірність $P\{T \geq t\}$ його безвідмовної роботи протягом проміжку часу тривалістю t:

$$\text{P}(t) = P\{T \geq t\}.$$

У деяких задачах (пов'язаних із старінням апаратури) вважають, що ВВ T – тривалість проміжку часу між двома послідовними відмовами приладу розподілена за законом Вейбулла-Гнеденка $p_T(t) = \alpha\lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}} \cdot 1(t)$. У цьому випадку функція надійності має вигляд $\text{P}(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}} \cdot 1(t)$ $(\lambda > 0,\ \alpha \geq 1)$.

Зазначимо, що при α=1 закон Вейбулла-Гнеденка збігається з показниковим розподілом (формула (2.28)), а при α=2 – з розподілом Релея (формула (2.39)).

Важливою характеристикою працездатності є математичне сподівання часу безвідмовної роботи MT.

Приклад 51. Показати, що $MT = \int_0^{+\infty} \text{P}(t)\,dt$, де P($t$) – функція надійності.

Розв'язання. Нехай $p_T(t)$ – щільність імовірності ВВ T. Оскільки $F_T(t) = 1 - \text{P}(t)$, то $p_T(t) = \dfrac{dF_T(t)}{dt} = \dfrac{d(1-\text{P}(t))}{dt} = -\dfrac{d\text{P}(t)}{dt}$. Використавши формулу інтегрування частинами, одержимо

$$MT = \int_0^{+\infty} t p_T(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} t \cdot \frac{d\text{P}}{dt}\,dt = -t\text{P}(t)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \text{P}(t)\,dt.$$

Оскільки $\text{P}(+\infty) = 0$, то $MT = \int\limits_0^{+\infty} \text{P}(t)\,dt$.

Приклад 52. Час безвідмовної роботи кожного з двох незалежних паралельно з'єднаних елементів (навантажений резерв) розподілений за показниковим законом з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. Знайти середній час безвідмовної роботи блока (рис. 3.12).

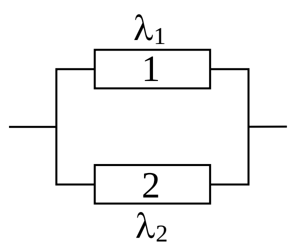


Рис. 3.12

Розв'язання. Із теорем додавання і множення ймовірностей випливає, що $\text{P}(t) = \text{P}_1(t) + \text{P}_2(t) - \text{P}_1(t)\cdot\text{P}_2(t)$, де P($t$), $\text{P}_1(t)$, $\text{P}_2(t)$ –

відповідно функції надійності блока, першого і другого елемента. Оскільки $\mathrm{P}_1(t)=e^{-\lambda_1 t}\ (t\geq 0)$, $\mathrm{P}_2(t)=e^{-\lambda_2 t}\ (t\geq 0)$, то $\mathrm{P}(t)=e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\quad (t\geq 0)$.

Таким чином, середній час безвідмовної роботи блока на підставі результату прикладу 51 дорівнює

$$MT=\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{P}(t)dt=\int\limits_0^{+\infty}(e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t})dt=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Якщо $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то $MT=3/(2\lambda)$, що в півтора разу перевищує час безвідмовної роботи одного елемента.

Приклад 53. Система складається з двох паралельно з'єднаних незалежних елементів. Час безвідмовної роботи кожного розподілений за показниковим законом з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. До моменту виходу з ладу елемента 1 елемент 2 вимкнено. Він включається в роботу в момент виходу з ладу елемента 1 (ненавантажений резерв). Знайти функцію надійності системи і середній час роботи блока до відмови.

Розв'язання. Нехай T_1 і T_2 – відповідно час безвідмовної роботи першого і другого елементів, T – час безвідмовної роботи системи (рис. 3.13). Тоді $T=T_1+T_2$ і, таким чином, на підставі результату прикладу 51 маємо

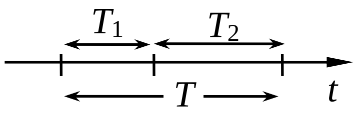


Рис. 3.13

$$MT=MT_2+MT_2=\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{P}_1(t)dt+\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{P}_2(t)dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1 t}dt+\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2 t}dt=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$$

(тут $\mathrm{P}_1(t)$, $\mathrm{P}_2(t)$ – функції надійності першого і другого елементів відповідно).

Оскільки щільності ймовірностей незалежних випадкових величин T_1 і T_2 відомі, то щільність імовірності їх суми $T=T_1+T_2$ можна знайти за формулою (2.43) (потрібно замінити границі інтегрування: $-\infty$ на 0 внаслідок додатності T_1, а $+\infty$ на z внаслідок додатності T_2):

$$p_T(z)=\int\limits_0^z\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\cdot\lambda_2 e^{-\lambda_2(z-u)}du=\lambda_1\cdot\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\int\limits_0^z e^{-(\lambda_1-\lambda_2)u}du=$$

$$=\lambda_1\cdot\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\cdot\frac{e^{-(\lambda_1-\lambda_2)u}}{\lambda_2-\lambda_1}\Bigg|_0^z=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\left(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}\right).$$

Після цього, як звичайно, знайдемо функцію надійності системи Р(t):

$$\mathrm{P}(t)=P\{T_1+T_2\geq t\}=\int\limits_t^{+\infty}\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\left(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}\right)dz=$$

$$=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 z}+\frac{1}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 z}\right)\Bigg|_t^{+\infty}=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}-\frac{1}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}\right)=\frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}-\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Якщо $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то на підставі формули (2.44) $p_T(t)=\lambda^2 te^{-\lambda t}\cdot 1(t)$, і, таким чином,

$$\mathrm{P}(t)=\int_t^{+\infty}\lambda^2 xe^{-\lambda x}dx=-\lambda\int_t^{+\infty}x\cdot(e^{-\lambda x})'dx=-\lambda\left(x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_t^{+\infty}-\int_t^{+\infty}e^{-\lambda x}dx\right)=$$

$$=-\lambda\left(-t\cdot e^{-\lambda t}+\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\Big|_t^{+\infty}\right)=-\lambda\left(-t\cdot e^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)=(1+\lambda t)\cdot e^{-\lambda t}.$$

При цьому $MT=\frac{2}{\lambda}$.

Задачі до розділу 3

1. Числові характеристики випадкових величин

3.1. Сукупність значень ВВ X така: $x_1=0, x_2=1, x_3=2$. Відповідні ймовірності $P\{X=x_k\}$ дорівнюють $\frac{5}{9},\frac{1}{3}$ та $\frac{1}{9}$. Знайти MX, DX та DX^2.

3.2. ВВ X має розподіл:

X	1	2	3	4
P	C	3C	C^2	$4C^2$

Знайти: а) значення С; б) MX; в) DX; г) $P\{X<3\}$.

3.3. ВВ X має розподіл:

X	1	3	6	7	8
P	2C	5C	C^2	$3C^2$	$4C^2$

Знайти: а) значення С;
б) MX ;в) DX ;
г) $P\{|X-5|\le 2\}$.

3.4. Сукупність значень ВВ X така: $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4$. Відомо, що $P\{X=2\}=P\{X=4\}=\dfrac{1}{3}P\{X=3\}$: а) скласти таблицю розподілу ВВ X ; б) знайти MX і DX .

3.5. Сукупність значень ВВ X така $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$. Відомо що $P\{X=1\}=P\{X=4\}, P\{X=2\}=P\{X=3\}=2P\{X=1\}$: а) записати таблицю розподілу ВВ X ; б) знайти MX і DX ; в) знайти $P\{1<X\le 3\}$.

3.6. Сукупність значень ВВ X така: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$. Відповідні ймовірності відносяться як $3:2:1$. Знайти: а) MX ; б) DX ; в) DX^2.

3.7. Лампи, серед яких дві справні і три несправні, по одній беруться з ящика і випробуються. Випробування припиняють, якщо справні лампи відділено від несправних. Нехай ВВ X дорівнює кількості ламп, що були випробувані. Знайти: а) $P\{X\le 3\}$; б) MX та DX .

3.8. З партії деталей, яка містить 5 стандартних і 3 нестандартні деталі, послідовно без повернення витягають деталі до появи стандартної. Нехай ВВ X дорівнює кількості витягнутих деталей.

Знайти: 1) $M(3X-0.5)$; 2) $D(-2\sqrt{7}X+5)$; 3) $P\{X\ge 2X-0.35\}$.

3.9. Кожен з двох стрільців двічі стріляє по мішені. Перший стрілець влучає в мішень при одному пострілі з імовірністю 0.7, а другий – з імовірністю 0.6. Нехай X і Y кількість влучень у мішень відповідно першим і другим стрільцем. Знайти: 1) $M(X^2+3X)$; 2) $M(X\cdot Y^2)$; 3) $D(X\cdot Y)$.

3.10. ВВ X рівномірно розподілена на відрізку $[0;d]$, її математичне сподівання дорівнює 10. Знайти: а) значення d ; б) дисперсію ВВ $Y=-3X+7$.

3.11. ВВ X рівномірно розподілена на відрізку $[c;d]$. Відомо, що $M(3X+4)=10$, $D(2X+5)=3$. Знайти значення c і d.

3.12. У задачі 2.14 знайти: а) MX; б) DX; в) $M|X|$.

3.13. У задачі 2.15 знайти: а) MX; б) DX; в) MX^3.

3.14. У задачі 2.16 знайти: а) MX; б) DX; в) $M\left(X+1/2\right)^3$.

3.15. Знайти постійну A, функцію розподілу $F_X(x)$, математичне сподівання, дисперсію ВВ X і $P\{X<MX\}$, якщо:

1) $p_X(x)=\begin{cases} Ax, & \text{якщо } x\in[0;3], \\ 0, & \text{якщо } x\notin[0;3]; \end{cases}$ 2) $p_X(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{x^4}, & \text{якщо } x\in[1;+\infty], \\ 0, & \text{якщо } x\notin[1;+\infty]; \end{cases}$

3) $p_X(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{x}}, & \text{якщо } x\in(0;4], \\ 0, & \text{якщо } x\notin(0;4]; \end{cases}$ 4) $p_X(x)=\begin{cases} Ax(1-x), & \text{якщо } x\in[0;1], \\ 0, & \text{якщо } x\notin[0;1]; \end{cases}$

5) $p_X(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & \text{якщо } x\in[-1;1], \\ 0, & \text{якщо } x\notin[-1;1]; \end{cases}$ 6) $p_X(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{якщо } x\in[-1;1], \\ 0, & \text{якщо } x\notin[-1;1]; \end{cases}$

7) $p_X(x)=\begin{cases} Ax^2(1-x), & \text{якщо } x\in[0;1], \\ 0, & \text{якщо } x\notin[0;1]; \end{cases}$ 8) $p_X(x)=\begin{cases} Ae^{-\sqrt{x}}, & \text{якщо } x\in[0;+\infty], \\ 0, & \text{якщо } x\notin[0;+\infty]. \end{cases}$

3.16. ВВ X розподілена за законом $p_X(x)=A\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}1(x)$. Знайти: а) значення постійної A; б) MX; в) DX; г) функцію розподілу $F_X(x)$; д) $P\{X\in[2;4]\}$.

3.17. ВВ X рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$. Знайти математичне сподівання і дисперсію таких ВВ: а) $Y=2X-3$; б) $Y=X^2$; в) $Y=\sin\pi X$; г) $Y=\sin 2\pi X$; д) $Y=X^{-\frac{1}{3}}$.

3.18. Нехай ВВ X розподілена за нормальним законом $N(0;1)$. Знайти: а) $M\cos X$; б) $D\cos X$; в) $D\sin X$.

3.19. При масовому виробництві шариків для шарикопідшипників довжина X діаметра шарика є ВВ. При певних умовах можна вважати, що вона рівномірно розподілена на відрізку $[c;d]$. Знайти: а) математичне сподівання і дисперсію об'єму шарика; б) значення математичного сподівання і дисперсії об'єму шарика при $c=10.0$ см, $d=10.4$ см.

3.20. ВВ X має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Знайти математичне сподівання і дисперсію ВВ: 1) $aX + b$; 2) e^{aX} $(2a < \lambda)$; 3) $\sin aX$; 4) $\cos aX$. Зокрема обчислити при $\lambda = 1$ математичне сподівання та дисперсію ВВ: а) $3X - 4$; б) $-2X + 3$; в) e^{-X}; г) $\sin X$; д) $\cos X$.

Умови задач 3.21 – 3.24 співпадають з умовами задач 2.39 – 2.42 відповідно.

3.21. У задачі 2.36 знайти: а) $M(X+3)$; б) $D(-2X+3)$; в) $M(X \cdot Y)$.

3.22. У задачі 2.37 знайти: а) $M\left(\frac{1}{2}X - 3\right)$; б) DX; в) $M(-X \cdot Y)$.

3.23. У задачі 2.38 знайти: а) MX; б) DX; в) $M(X+Y)$.

3.24. У задачі 2.39 знайти: а) MX; б) DX; в) $M(X-Y)$.

3.25. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$ координат ВВ-ра $\vec{X}$, який задано в задачах: а) 2.42; б) 2.43; в) 2.44; г) 2.49; д) 2.50.

3.26. ВВ-р $\vec{X}(X;Y)$ рівномірно розподілений в області D. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$ його координат, якщо: а) $D\left\{(x;y): 0 < y < \sqrt{1-x^2}, 0 < x < 1\right\}$; б) $D\left\{(x;y): 0 < y < x^2, 0 < x < 1\right\}$; в) $D\left\{(x;y): 0 < y < 2x,\ 0 < x < 1\right\}$; г) $D\left\{(x;y): 0 < y < \sin x,\ 0 < x < \pi\right\}$.

3.27. ВВ X рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$ ВВ; а) X і $Y = -2X$; б) X і $Y = X^2$; в) X і $Y = \sqrt{X}$.

3.28. ВВ X рівномірно розподілена на відрізку $[-1;1]$. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$ випадкових величин: 1) X і $Y = X^2$; 2) X і $Y = X^3$; 3) X і $Y = \sin \pi X$; 4) X і $Y = |X|$; 5) X і $Y = e^X$.

3.29. ВВ X рівномірно розподілена на відрізку $[-1;2]$. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$ ВВ: а) X і $Y = 3X$; б) X і $Y = X^2$.

3.30. ВВ X і Y некорельовані. Їхні імовірнісні характеристики: $MX = 1, DX = 3, MY = -2, DY = 5$. Знайти математичні сподівання таких ВВ: 1) $X \cdot Y$; 2) $X^2 + Y + 3$; 3) $2X^2 - 3X \cdot Y^2 + 4X + Y + 7$; 4) $(3X - 5Y)^2$.

3.31. Розв'язати задачі 3.30 1), 3) і 4) за умови, що $K(X,Y) = -1$.

3.32. ВВ X і Y некорельовані. Знайти дисперсію ВВ $aX+bY+c$, якщо відомі дисперсії ВВ X і Y. Знайти дисперсію ВВ $-5X+4Y+8$, якщо $DX=2, DY=3$.

3.33. Коефіцієнт кореляції ВВ X і Y дорівнює $r_{X,Y}$. Знайти дисперсію ВВ $aX+bY+c$, якщо відомі дисперсії ВВ X і Y. Зокрема знайти дисперсію ВВ $-5X+4Y+7$, якщо $r_{X,Y}=-1/20$, $DX=9, DY=4$.

3.34. Знайти коефіцієнт кореляції таких ВВ: 1) $Y=2X+3$ та $Z=-3X+7$; 2) $Y=5X+8$ та $Z=2X-7$; 3) $Y=aX+b$ та $Z=cX+d\,(a\cdot c\neq 0)$.

3.35. Знайти математичне сподівання і дисперсію ВВ $2X-Y+7$, якщо:

1) $MX=1, MY=-2, \ DX=4, DY=9, r_{X,Y}=1/2$;

2) $MX=-1, MY=1, \ DX=1, DY=2, r_{X,Y}=-1/\sqrt{2}$;

3) $MX=\frac{1}{2}, MY=-3, \ DX=2, DY=2, r_{X,Y}=-1$.

3.36. ВВ X і Y некорельовані та мають однакові дисперсії. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{Z,W}$ ВВ $Z=aX+bY$ та $W=aX-bY$.

3.37. ВВ X і Y попарно некорельовані та мають однакові дисперсії. Знайти коефіцієнт кореляції ВВ $X+Y$ та $Y+Z$.

3.38. Знайти коефіцієнт кореляції ВВ X і Y, якщо: 1) $DX=9$, $DY=16, D(X+Y)=29$; 2) $DX=4, DY=25, D(X+Y)=21$.

3.39. Тривимірний ВВ-р $\vec{X}=(X;Y;Z)$ рівномірно розподілений в області G. Знайти: щільність імовірності $p_{\vec{X}}(x,y,z)$, щільність імовірності $p_X(x)$, математичне сподівання $M\vec{X}$, кореляційну матрицю K, якщо:

1) $G=\{(x;y;z):|x|<1,|y|<1,|z|<1\}$;

2) $G=\{(x;y;z):x^2+y^2+z^2<1\}$;

3) $G=\left\{(x;y;z): \begin{matrix} x>0,\ y>0,\ z>0, \\ x+y+z<1 \end{matrix}\right\}$;

4) $G=\{(x;y;z):0<z<9-x^2-y^2\}$ (параболоїдний сегмент).

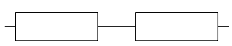
3.40. Математичне сподівання та кореляційна матриця двовимірного ВВ-ра $\vec{X}(X;Y)$ мають вигляд $M\vec{X}=\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix}, K=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$ та математичне сподівання таких ВВ: 1) $-3X+Y+1$; 2) X^2-Y+2; 3) $-X\cdot Y$; 4) $-X^2+2Y^2+4X-Y+2$; 5) $2X^2+3X\cdot Y-2Y^2++8X-7Y+3$; 6) $(2X-4Y+5)^2$.

3.41. Математичне сподівання та кореляційна матриця тривимірного ВВ-ра $\vec{X}(X;Y;Z)$ мають вигляд: $M\vec{X}=\begin{Vmatrix}3\\-2\\1\end{Vmatrix}, K=\begin{Vmatrix}3&2&0\\2&4&1\\0&1&5\end{Vmatrix}$. Знайти коефіцієнти кореляції $r_{X,Y}$, $r_{X,Z}$, $r_{Y,Z}$ та математичне сподівання таких ВВ: 1) $2X-Z+7$; 2) $XZ-2X\cdot Y+6$; 3)$(-2X+Y-3Z+4)^2$.

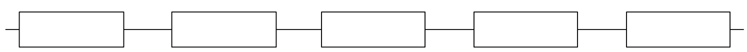
3.42. Двовимірний ВВ-р $\vec{X}$ розподілений за нормальним законом з математичним сподіванням $M\vec{X}$ і кореляційною матрицею K. Записати щільність розподілу вектора $\vec{X}$, якщо: 1) $M\vec{X}=\begin{Vmatrix}0\\1\end{Vmatrix}, K=\begin{Vmatrix}2&0\\0&3\end{Vmatrix}$; 2) $M\vec{X}=\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix}, K=\begin{Vmatrix}2&1\\1&3\end{Vmatrix}$; 3) $M\vec{X}=\begin{Vmatrix}2\\5\end{Vmatrix}, K=\begin{Vmatrix}2&-1\\-1&1\end{Vmatrix}$.

3.43. Тривимірний ВВ-р $\vec{X}$ розподілений за нормальним законом з математичним сподіванням $M\vec{X}$ і кореляційною матрицею K. Записати щільність розподілу вектора $\vec{X}$, якщо: 1) $M\vec{X}=\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix}, K=\begin{Vmatrix}3&1&0\\1&2&0\\0&0&4\end{Vmatrix}$; 2) $M\vec{X}=\begin{Vmatrix}-1\\0\\3\end{Vmatrix}, K=\begin{Vmatrix}3&-1&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{Vmatrix}$.

3.44. Опір R резисторів типу МЛТ з номіналом 20 кОм має нормальний розподіл. Припустимо, що вказаний на резисторах розкид 10 % відповідає відхиленню 3σ опору від номінального значення. Знайти: а) $P\{19\text{кОм}<R<21\text{кОм}\}$; б) закони розподілу опору ланцюгів, які складено з цих резисторів:



а)



б)

3.45. Довжина олівця X є ВВ, яка має розподіл N(12.5см; 0.01см^2). Довжина внутрішньої частини коробки, у яку упаковують олівці, має розподіл N(12.75см; 0.0056см^2). Яка ймовірність того, що олівець не поміститься в коробці?

3.46. При виготовленні партії однакових деталей витримують деякий розмір 10 см з допуском ±0.2 см. Оцінити за допомогою нерівності Чебишева ймовірність того, що обрана навмання деталь буде бракованою, якщо розкид розмірів характеризують дисперсією 0.01 см^2.

3.47. З 2000 тріодів було обрано навмання 100 тріодів. Серед них опинились 15 бракованих. Прийнявши частку бракованих деталей за ймовірність виготовлення бракованої деталі, оцінити ймовірність того, що серед всієї партії буде не більше 17 % і не менше 13 % бракованих деталей.

3.48. ВВ X має характеристики $MX=2$ та $DX=0.0625$. Оцінити за допомогою нерівності Чебишева ймовірність таких подій: 1) $A=\{1.5\le X<2.5\}$; 2) $B=\{1.55<X\le 2.35\}$; 3) $C=\{X<2.8\}$.

3.49. ВВ X - кількість телевізорів, що надходять за годину до майстерні для ремонту. Прийнявши $MX=5$, оцінити ймовірність того, що за годину надійдуть до ремонту менше 15 телевізорів, якщо: а) про DX нічого не відомо; б) $DX=5$; в) ВВ X розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda=5$.

3.50. ВВ X - результат виміру деякої фізичної величини, причому $MX=0.1$ та $DX=0.0004$. Визначити, яку максимально можливу відносну точність виміру можна гарантувати з імовірністю, не меншою 0.95, при таких умовах: а) проводять одне вимірювання; б) проводять 5 вимірювань і за результат вважають середнє арифметичне отриманих значень; в) проводять 100 вимірювань і за результат вважають середнє арифметичне отриманих значень (див. приклад 32 п. 3.2.4).

Відповіді

3.1. $\frac{5}{9}$; $\frac{38}{81}$; $\frac{122}{81}$. **3.2.** а)$\frac{1}{5}$; б)$2\frac{4}{25}$; в)$\frac{534}{625}$; г)$\frac{4}{5}$. **3.3.** а)$\frac{1}{8}$; б)$\frac{211}{64}$; в)$\frac{10711}{4096}$; г)$\frac{11}{16}$. **3.4.** б)3; в)0.4. **3.5.** б)2.5, $\frac{11}{12}$; в)$\frac{2}{3}$. **3.6.** а)$\frac{2}{3}$; б)$\frac{5}{9}$; в)2. **3.7.** а)0.4; б)$3.5,\ 0.45$. **3.8.** 1)4; 2)15; 3)$\frac{3}{28}$. **3.9.** 1)6.58; 2)2.688; 3) 1.2572. **3.10.** а)20; б)300. **3.11.** $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{7}{2}$. **3.12.** а)$\frac{1}{6}$; б)$\frac{11}{36}$; в)$\frac{1}{2}$. **3.13.** а)0; б)$\frac{7}{3}$; в)0. **3.14.** а)0; б)$\frac{1}{20}$; в)$\frac{1}{5}$. **3.15.** 1)$\frac{2}{9},2,\frac{1}{2},\frac{4}{9}$; 2)$3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{9}$; 3)$\frac{1}{4},\frac{4}{3},\frac{64}{45},\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4)$6,\frac{1}{2},\frac{1}{20},\ \frac{1}{2}$; 5)$\frac{2}{\pi},0,\frac{4}{\pi}-1,\frac{1}{2}$; 6)$\frac{1}{\pi},0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$;

7) $12, \frac{3}{5}, \frac{1}{25}, \frac{297}{625}$; 8) $\frac{1}{2}, 6{,}84, 1-e^{-\sqrt{6}}\left(1+\sqrt{6}\right)$. **3.16.** а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) 20; д) $e^{-\sqrt{2}}-e^{-2}$. **3.17**. а) $-2, \frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}, \frac{4}{45}$; в) $\frac{2}{\pi}, \frac{\pi^2-8}{2\pi^2}$; г) $0, \frac{1}{2}$; д) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$.
3.18. а) $e^{-\frac{1}{2}}$; б) $\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)^2$; в) $\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)$. **3.19.** а) $\frac{\pi}{24}\cdot\frac{d^4-c^4}{d-c}, \frac{\pi^2}{252}\cdot\frac{d^7-c^7}{d-c}-$ $-\frac{\pi^2}{576}\left(\frac{d^4-c^4}{d-c}\right)^2$; б) 555.86, 356.2. **3.20.** 1) $\frac{a+\lambda b}{\lambda}, \frac{a^2}{\lambda^2}$;
2) $\frac{\lambda}{\lambda-a}, \frac{\lambda a^2}{(\lambda-2a)(\lambda-a)^2}$; 3) $\frac{\lambda a}{\lambda^2+a^2}, \frac{a^2\left(\lambda^4+2a^4\right)}{\left(\lambda^2+a^2\right)^2\left(\lambda^2+4a^2\right)}$;
4) $\frac{\lambda^2}{\lambda^2+a^2}, \frac{a^4\left(5\lambda^2+2a^2\right)}{\left(\lambda^2+a^2\right)^2\left(\lambda^2+4a^2\right)}$; а)–1,9; б) $1{,}4$; в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{12}$; г) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{20}$; д) $\frac{1}{2}, \frac{7}{20}$. **3.21.** а)6; б)1.6; в) 6. **3.22.** а) -1.75; б) $\frac{11}{12}$; в) $-\frac{17}{3}$. **3.23**. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{4}{3}$. **3.24**. а) 0; б) $\frac{4}{3}$; в) $-\frac{5}{9}$. **3.25.** а) $\frac{4}{11}$; б) 0; в) $\frac{-1}{2\sqrt{7}}$; г) $\frac{3(25\pi-32)}{50\pi^2}$; д) $\frac{75\pi-256}{44}$. **3.26.** а) $\frac{2(9\pi-32)}{9\pi^2-64}$; б) $\sqrt{\frac{35}{111}}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 0.
3.27. а) -1; б) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **3.28.** 1)0; 2) $\frac{\sqrt{21}}{5}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$; 4)0; 5) $\sqrt{\frac{6}{e^2-1}}$.
3.29. а)1; б) $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **3.30.** 1)–2; 2)5; 3)32; 4)321. **3.31**. 1)–3; 3)35; 4)351. **3.32**. a^2DX+b^2DY; 98.
3.33. $a^2DX+b^2DY+2ab\sqrt{DX\cdot DY}\cdot r_{X,Y}$; 301. **3.34.** 1)–1; 2)1; 3) $\frac{ac}{|ac|}$.
3.35. 1) 11, 13; 2) 4,10; 3) 11,18. **3.36.** $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. **3.37.** $\frac{1}{2}$. **3.38.** 1) $\frac{1}{6}$; 2)–0.4. **3.39.** 1) $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \left\|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right\|$, $\frac{1}{3}E_3$, де E_3 – одинична матриця;
2) $\frac{3}{4\pi}, \frac{3}{4}\left(1-x^2\right), \left\|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right\|, \frac{1}{5}E_3$; 3) $6, 3(1-x)^2, \frac{1}{4}\cdot\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|$, $\frac{1}{20}\cdot\left\|\begin{matrix}0.75 & 1 & 1\\1 & 0.75 & 1\\1 & 1 & 0.75\end{matrix}\right\|$;

4) $\frac{2}{81\pi}, \frac{8\left(9-x^2\right)^{3/2}}{243\pi}, \begin{Vmatrix}0\\0\\3\end{Vmatrix}, \frac{3}{2}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{Vmatrix}$. **3.40.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$; 1)-4; 2)7; 3)1; 4)19; 5)14; 6)265. **3.41.** $r_{X,Z}=0$; $r_{X,Y}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $r_{Y,Z}=\frac{1}{\sqrt{20}}$; 1)12; 2)17; 3)96. **3.42.** 1) $p_{\overline{X}}\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{6}}e^H$, $H=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)$; 2) $p_{\overline{X}}\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{5}}e^H$, $H=-\frac{3}{5}\left(\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{3}-\frac{(x-1)(y+1)}{3}\right)$; 3) $p_{\overline{X}}\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi}e^H$, $H=-\left(\frac{(x-2)^2}{2}+(x-2)(y+5)+(y+5)^2\right)$. **3.43.** 1) $p_{\overline{X}}\left(x,y,z\right)=\frac{1}{\sqrt{160\pi^3}}e^H$, $H=-\frac{3}{5}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{2}\right)-\frac{\left(z-1\right)^2}{8}$; 2) $p_{\overline{X}}\left(x,y,z\right)=\frac{1}{\sqrt{80\pi^3}}e^H$, $H=-\frac{\left(z-3\right)^2}{4}-$ $-\frac{3}{5}\left(\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(x+1)y}{3}+\frac{y^2}{2}\right)$. **3.44.** а) 0.8666; б) $N\left(40\textit{кОм};\frac{8}{9}\textit{кОм}^2\right)$, $N\left(100\textit{кОм};\frac{20}{9}\textit{кОм}^2\right)$. **3.45.** 0.0228. **3.46.** 0.25. **3.47.** 0.84. **3.48.** 1)$P(A)\geq 0.75$; 2)$P(B)\geq 0.489$; 3)$P(C)\geq 0.902$. **3.49.** 1)$2/3$; 2)0.95; 3) 0.9998. **3.50.** 1) 0.8945; 2) 0.4; 3) 0.0895 - Чебишев, 0.0392 - Лаплас.

2. Теорія масового обслуговування

У всіх задачах потік викликів є найпростішим.

3.51. В одноканальну СМО з очікуванням надходять у середньому за годину 4 виклики (λ=4 виклик/год). СМО в середньому обслуговує 6 викликів за годину (μ=6 виклик/год). Знайти: 1) імовірність p_1 того, що в момент надходження виклику система зайнята; 2) середній час очікування початку обслуговування; 3) середню довжину черги.

3.52. Знайти, при якому співвідношенні між параметром потоку викликів λ та середнім часом обслуговування $1/\mu$ середня довжина черги в одноканальній СМО з очікуванням буде не більша за одиницю.

3.53. Знайти ймовірність відмови, середню довжину черги та середній час очікування в черзі в одноканальній СМО, якщо максимально можлива довжина черги дорівнює 3. Параметри потоку викликів і часу обслуговування дорівнюють $\lambda = 3$ виклик/хв та $\mu = 2$ виклик/хв.

3.54.З'ясувати, чи вистачає одного каналу обслуговування з $\mu = 5$ замовл./год для того, щоб при потоці замовлень, який надходить до системи і має параметр $\lambda = 4$ замовл./год, середня довжина черги не перевищувала 3. Чи зміниться відповідь, якщо удвічі більший потік замовлень почнуть обслуговувати два таких самих канали?

3.55. Скільки каналів повинна мати СМО з очікуванням при $\lambda = 8$ замовл./год, $\mu = 2$ замовл./год для того, щоб існував сталий режим? Знайти в цьому випадку середню довжину черги та середній час очікування початку обслуговування.

3.56. АЗС має три бензоколонки (три канали обслуговування), на кожній з яких на заправку автомобіля витрачається в середньому $1/12$ год. Знайти середню довжину черги і середній час очікування в черзі, якщо потік автомобілів, що прибувають на заправку, можна вважати найпростішим з параметром λ, який дорівнює: а) 20 авт./год.; б) 30 авт./год.

3.57. Розглянуто п'ятиканальну систему обслуговування з очікуванням. Параметри потоку вимог і часу обслуговування відповідно дорівнюють $\lambda = 2$ вим./хвил. та $\mu = 0.5$ вим./хвил. Знайти середню довжину черги та середній час очікування початку обслуговування.

3.58. У майстерні працюють 4 майстри. У середньому за годину надходять 2 деталі, які потребують ремонту ($\lambda = 2$ деталь/год). Середній час ремонту $\frac{1}{\mu} = 1.5$ год/деталь. Знайти середню довжину черги та середній час перебування деталі в майстерні (до закінчення обслуговування).

Відповіді

3.51. $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}$. **3.52.** $\frac{\lambda}{\mu} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **3.53.** $\frac{81}{211}$; 1.834; 0.611. **3.54.** ні (3.2); так (2.844). **3.55.** 5; $\frac{512}{231}$; $\frac{64}{231}$. **3.56.** а) $\frac{625}{668}$; $\frac{125}{6672}$; б) $\frac{625}{178}$; $\frac{125}{1068}$. **3.57.** 2.216; 1.108. **3.58.** 1.53; 2.26.

3. Теорія надійності

3.59. Час безвідмовної роботи кожного з двох незалежних елементів, які з'єднані послідовно, розподілено за показниковим законом з параметром, що відповідно дорівнює λ_1 та λ_2. Знайти середній час безвідмовної роботи блока, що складено з цих елементів. Розглянути випадки: 1) $\lambda_1 = \lambda_2$; 2) $\lambda_2 >> \lambda_1$.

3.60. Знайти середній час безвідмовної роботи блока, незалежні елементи якого з'єднані за схемою, яка зображена на рис. 3.14. Час безвідмовної роботи кожного елемента розподілено за показниковим законом з параметрами відповідно λ_1, λ_2 та λ_3. Розглянути випадок $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

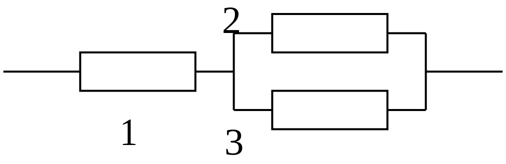


Рис. 3.14

3.61. Знайти середній час наробітку на відмову блока, елементи якого незалежні та з'єднані за однією зі схем, що зображені на рис. 3.15.

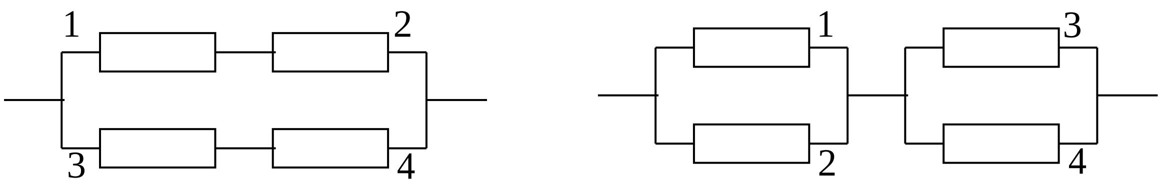


Рис. 3.15

Час безвідмовної роботи кожного елемента розподілено за показниковим законом з параметром λ. Порівняйте отримані результати.

3.62. Система складається з n незалежних елементів, що з'єднані послідовно. Час безвідмовної роботи i-го елемента (i=1,2,…,n) розподілено за показниковим законом з параметром λ_i. Знайти функцію надійності системи та середній час наробітку на відмову. Розглянути випадок однакових λ_i.

3.63. Система складається з m паралельно з'єднаних однотипних незалежних елементів. Час безвідмовної роботи кожного елемента розподілено за показниковим законом з параметром λ. Знайти: 1) функцію надійності; 2) середній час наробітку на відмову (при обчисленні інтеграла доцільно зробити підстановку $1 - e^{-\lambda t} = x$).

3.64. До ланцюга, який описано в задачі 3.62, паралельно приєднано $m-1$ однотипних з ним ланцюгів (загальне навантажене резервування). Знайти функцію надійності та середній час наробітку на відмову цієї системи.

3.65. Система складається з п’ятьох незалежних елементів, які з’єднані за схемою, яка показана на рис. 3.16. Час безвідмовної роботи кожного елемента розподілено за показниковим законом з параметром λ_0 для елементів $1, 2, 3, 4$ та λ_1 для елемента 5. Знайти функцію надійності системи та середній час наробітки на відмову.

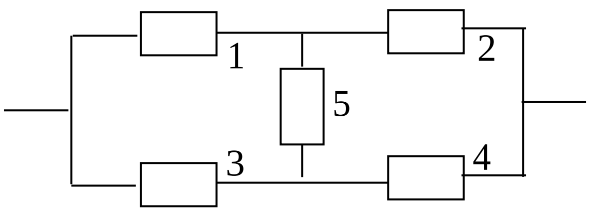


Рис. 3.16

Розглянути випадки: а) $\lambda_0 = \lambda_1$; б) $\lambda_1 = 0$; в) $\lambda_1 = +\infty$. Результати пунктів б), в) порівняти з результатами задачі 3.61.

Вказівка: при знаходженні функції надійності використовувати результати задачі 1.133.

Відповіді

3.59. а) $\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$; $\dfrac{1}{2\lambda_1}$; 0. **3.60.** $\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_3}-\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$; $\dfrac{2}{3\lambda}$.

3.61. а) $\dfrac{3}{4\lambda}$; б) $\dfrac{11}{12\lambda}$. **3.62.** $e^{-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)t}$; $\dfrac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$; $\dfrac{1}{n\lambda_1}$.

3.63. $1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)^m$; $\dfrac{1}{\lambda}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{m}\right)$. **3.64.** $1-\left(1-e^{-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)t}\right)^m$; $\dfrac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{m}\right)$. **3.65.** $\dfrac{1}{\lambda_0}+\dfrac{2}{\lambda_1+2\lambda_0}-$ $-\dfrac{4}{3\lambda_0+\lambda_1}+\dfrac{2}{\lambda_1+4\lambda_0}-\dfrac{1}{4\lambda_0}$; а) $\dfrac{49}{60\lambda_0}$; б) $\dfrac{11}{12\lambda_0}$; в) $\dfrac{3}{4\lambda_0}$.

Розділ 4
ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

4.1. Кореляційна теорія випадкових процесів

4.1.1. Основні поняття

При вивченні багатьох систем доводиться враховувати дію перешкод, які є функціями часу.

Приклад 1. Провадиться запуск декількох однотипних ракет. Унаслідок розкиду стартової ваги ракет, розкиду тяги двигунів, атмосферних збурень, похибок систем керування та багатьох інших причин політ кожної ракети відбувається за властивою їй траєкторією. Усі ці траєкторії розрізняються між собою і відхиляються більше або менше від розрахункової балістичної траєкторії.

Можна дати два еквівалентних визначення випадкового процесу.

Визначення 1. Будемо говорити, що на деякій множині G заданий **випадковий процес** $X(t)$ (скорочено ВП), якщо кожному наслідку випробування $\omega_k \in \Omega$ ставиться у відповідність цілком визначена невипадкова функція часу $x_k(t)$ ($t \in G$), яка спостерігається при проведенні випробування:

$$\omega_k \to x_k(t).$$

Функція $x_k(t)$ називається **реалізацією** (траєкторією) процесу $X(t)$. Внаслідок випадкових факторів реалізації відрізняються між собою. Процес $X(t)$ можна розглядати як множину реалізацій з заданим на цій множині розподілом імовірностей. Сукупність $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ реалізацій у деякому розумінні характеризує властивості процесу $X(t)$ (рис. 4.1).

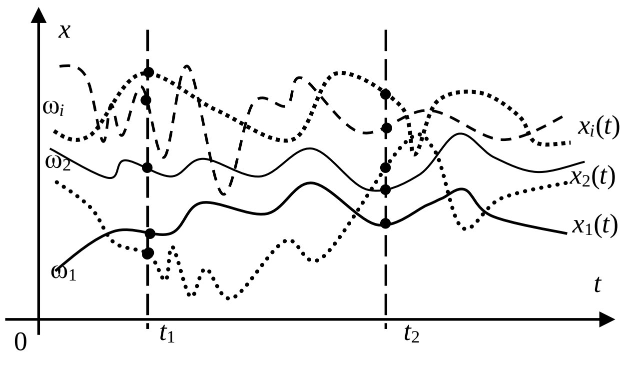


Рис. 4.1

Визначення 2. Випадковим процесом $X(t)$ називається сукупність залежних від часу випадкових величин. Випадкова величина $X(t_0)$ називається **перерізом** випадкового процесу $X(t)$ в момент часу t_0.

Більш формально: випадковий процес $X(t)$ є функцією двох змінних:

$$X(t)=g(t,\omega) \quad (t\in G,\ \omega\in\Omega\ ).$$

При фіксованому ω_k одержуємо конкретну функцію часу $x_k(t)=g(t,\omega_k)$ – реалізацію процесу. При фіксованому $t=t_0\in G$ одержуємо ВВ $X(t_0)=g(t_0,\omega)$ – переріз процесу.

Якщо множина G дискретна (її можна ототожнити з підмножиною множини натуральних чисел $\{1,2,3,\ldots\}$), то процес $X(t)$ називають **випадковим процесом** з **дискретним часом** або **випадковою послідовністю**.

Якщо множина G є проміжком, то процес $X(t)$ називають **випадковим процесом** *з* **неперервним часом**. Позначимо через E множину значень, яких набуває випадкова величина $X(t)$ $(t\in G)$. Якщо множина E є дискретною, то **випадковий процес** називають процесом з **дискретною** множиною станів. Якщо ж множина E є проміжком, то випадковий процес називається процесом з **неперервною** множиною станів.

Приклади випадкових процесів: 1) значення напруги і струму в електричному ланцюзі; 2) відстань до літака, яка визначається за допомогою радіолокатора; 3) рівень сигналу на виході приймача під дією перешкод; 4) кількість виходів із ладу радіоапаратури за проміжок часу $[0;t)$. Процеси 1–3 є процесами з неперервним часом і неперервною множиною станів; процес 4 є процесом з неперервним часом і дискретною множиною станів.

Характерні реалізації для різних типів процесів наведено на рис. 4.2.

Приклад 2: а) реалізаціями випадкового процесу $X(t)=A\cdot t$ $(t\in[0;+\infty))$, де A – випадкова величина, яка рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$, є промені, що виходять із початку координат і лежать не вище бісектриси першої четверті (рис. 4.3); б) реалізаціями випадкового процесу $X(t)=A\cdot\cos(2\pi t/T+\Phi)$, де $A>0$ і Φ – випадкові величини, будуть косинусоїди одного і того самого періоду T, але з різними значеннями амплітуди і початкової фази.

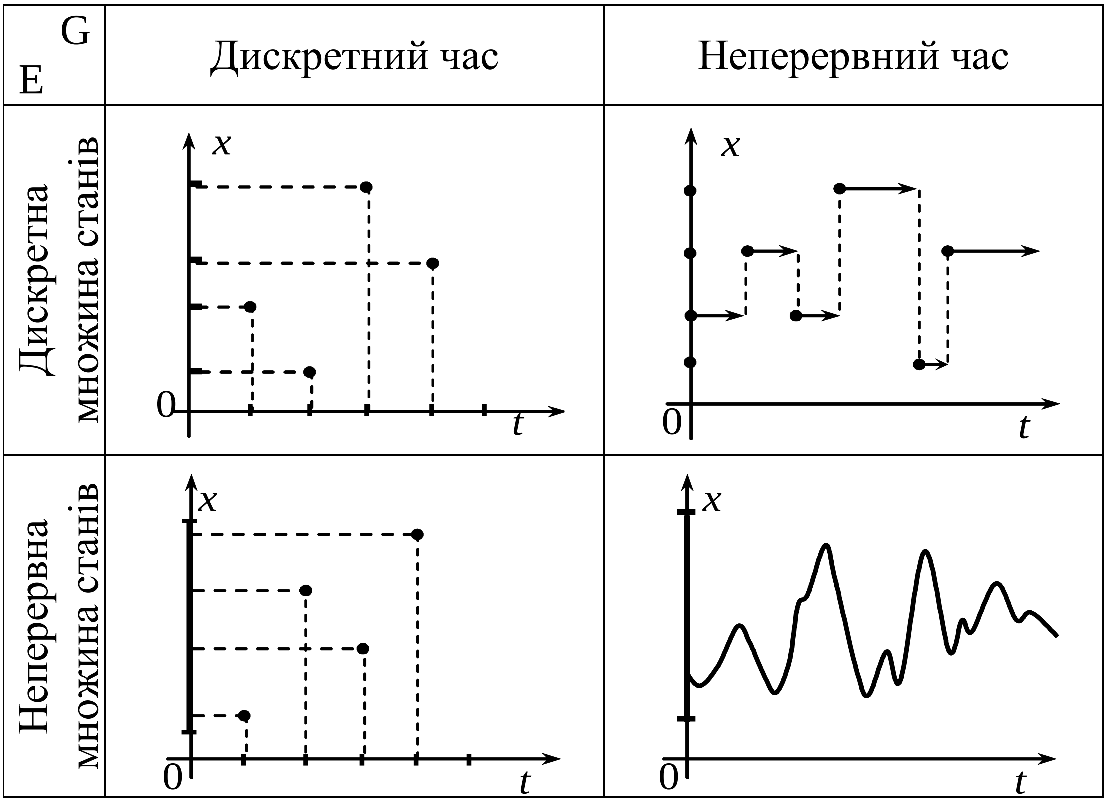


Рис. 4.2

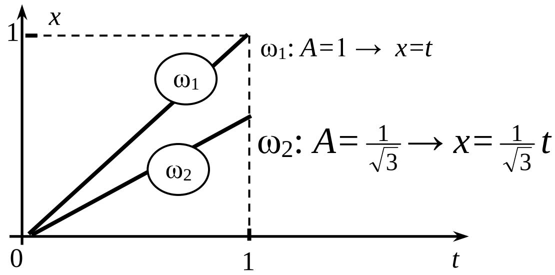


Рис. 4.3

Повний опис випадкового процесу $X(t)$ міститься в законах сумісного розподілу його перерізів $(X(t_1); X(t_2);\ldots; X(t_n))$ для всіх можливих значень $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in G$ і $n = 1, 2, \ldots$. З огляду на складність такого підходу звичайно обмежуються спрощеною моделлю, що базується на одновимірному та двовимірному законах розподілу

$$F_1(t,x) = P\{X(t) < x\},\; F_2(t_1,x;t_2,y) = P\{X(t_1) < x, X(t_2) < y\}.$$

Ця модель описує багато суттєвих властивостей процесу і називається **кореляційною теорією**. Якщо припустити, що перерізи процесу є неперервними випадковими величинами, то кореляційна теорія ґрунтується на одновимірній (миттєвій) $p_1(t, x)$ і двовимірній (сумісній) $p_2(t_1, x; t_2, y)$ щільності ймовірності (рис. 4.1). З умови погодженості (формула (2.26)) випливає співвідношення

$$p_1(t_1, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(t_1, x; t_2, y) dy .$$

4.1.2. Характеристики випадкового процесу

Визначення 3. Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $m_X(t)$, значення якої в кожний даний момент часу дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу випадкового процесу

$$\boxed{m_X(t) = M\,X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_1(t, x) dx}. \tag{4.1}$$

Математичне сподівання $m_X(t)$ визначає в середньому характер поведінки можливих реалізацій процесу в тому розумінні, що функція $m_X(t)$ приблизно дорівнює при достатньо великому n середньому арифметичному n різних реалізацій процесу

$$m_X(t) \approx \frac{1}{n}\left(x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t)\right). \tag{4.1a}$$

Визначення 4. Флуктуаційною частиною випадкового процесу $X(t)$ називається випадковий процес

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t).$$

Звідси випливає, що будь-який випадковий процес можна подати у вигляді суми невипадкової функції і випадкового процесу з нульовим математичним сподіванням

$$X(t) = m_X(t) + \overset{\circ}{X}(t).$$

Визначення 5. Дисперсією випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $D_X(t)$, значення якої в кожний момент часу дорівнюють дисперсії відповідного перерізу процесу

$$\boxed{D_X(t) = M(\overset{\circ}{X}(t))^2.} \qquad (4.2)$$

Дисперсія процесу характеризує розкид реалізацій процесу відносно його математичного сподівання. Функція $\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}$ називається **середнім квадратичним відхиленням** процесу $X(t)$. Енергетичне тлумачення дисперсії процесу полягає в такому. Нехай $X(t)$ – змінний струм, що проходить через резистор з одиничним опором. Тоді $m_X(t)$ дорівнює регулярній складовій струму, а $D_X(t)$ – середньому значенню потужності, яка виділяється флуктуаційною складовою струму на цьому резисторі.

Існують випадкові процеси, у яких миттєві щільності збігаються, а двовимірні щільності різні. У таких процесів відповідно однакові математичні сподівання $(m_{X_1}(t) = m_{X_2}(t))$ і дисперсії $(D_{X_1}(t) = D_{X_2}(t))$, а реалізації можуть мати різний характер, наприклад плавний в одного процесу і стрибкоподібний в іншого (рис. 4.4). За значенням процесу $X_1(t)$ у момент часу t_1 можна зробити кращий прогноз про значення процесу в близький до t_1 момент часу t_2, ніж для процесу $X_2(t)$.

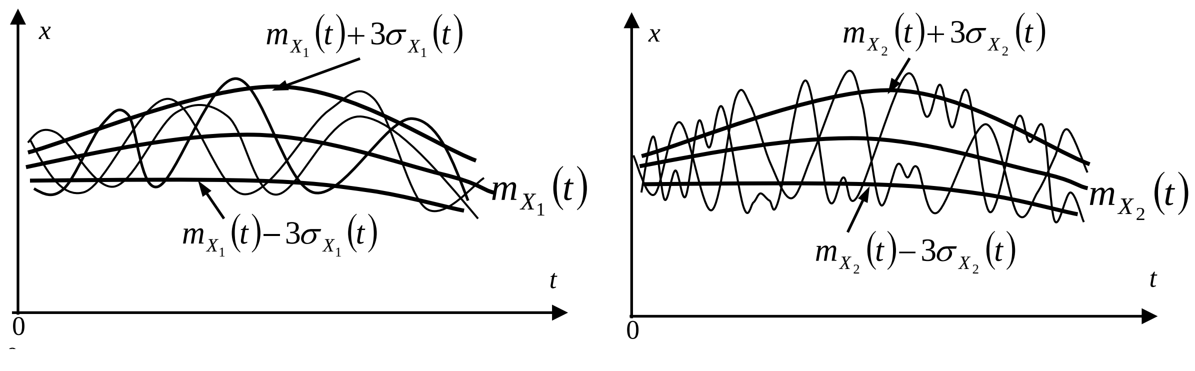


Рис. 4.4

Для розрізнення процесів з різною структурою реалізацій вводять у розгляд кореляційну функцію процесу. Кореляційна функція є найважливішою, але не вичерпною характеристикою імовірнісного зв'язку між перерізами процесу.

Визначення 6. Кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція двох змінних, значення якої дорівнює кореляційному моменту перерізів процесу у відповідні моменти часу

$$\boxed{K_X(t_1,t_2)=M(\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)).} \tag{4.3}$$

Використовуючи властивість лінійності математичного сподівання, одержимо із формули (4.3) такий вираз для кореляційної функції випадкового процесу:

$$\boxed{K_X(t_1,t_2)=M\left(X(t_1)\cdot X(t_2)\right)-m_X(t_1)\cdot m_X(t_2)}. \tag{4.4}$$

Із формули (4.3) випливають такі властивості кореляційної функції:

$$1)\ K_X(t_1,t_2)=K_X(t_2,t_1); \qquad 2)\ K_X(t,t)=D_X(t);$$
$$3)\ |K_X(t_1,t_2)|\le\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_X(t_2). \tag{4.5}$$

Чим швидше спадає кореляційна функція при зростанні $|t_1 - t_2|$, тим менше ймовірносний зв'язок між відповідними перерізами процесу.

Нормованою кореляційною функцією називається функція

$$\rho_X(t_1,t_2)=\frac{K_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_X(t_2)}.$$

Із властивостей кореляційної функції випливає нерівність

$$\left|\rho_X(t_1,t_2)\right|\le 1.$$

Приклад 3. Миттєва (одновимірна) щільність випадкового процесу $X(t)$ дорівнює $p_1(t,x)=\dfrac{1}{(2+\cos t)\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\sin t)^2}{2(2+\cos t)^2}}$. Знайти: а) математичне сподівання та дисперсію процесу; б) $P\{X(\pi/2)\in[1;2]\}$.

***Розв'язання*:** а) оскільки в кожний момент часу переріз процесу розподілено за законом Гаусса, то $m_X(t)=\sin t$, $D_X(t)=(2+\cos t)^2$; б) переріз $X(\pi/2)\sim N(1;2^2)$, і тому $P\{X(\pi/2)\in[1;2]\}=\Phi\left(\frac{2-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-1}{2}\right)=\Phi(1/2)\approx 0.191$.

Приклад 4. Знайти кореляційну функцію і дисперсію випадкового процесу $X(t) = X_1\cdot f_1(t)+X_2\cdot f_2(t)+f_3(t)$, де $f_i(t)$ $(i=1,2,3)$ – невипадкові функції, а X_1 і X_2 – випадкові величини, дисперсії яких відповідно дорівнюють DX_1 і DX_2.

Розв'язання. Із властивостей математичного сподівання випливає, що $MX(t) = f_1(t)\cdot MX_1+f_2(t)\cdot MX_2+f_3(t)$. Таким чином, $\mathring{X}(t) = X(t) - MX(t) = f_1(t)\cdot\mathring{X}_1+f_2(t)\cdot\mathring{X}_2$. Тому кореляційна функція процесу дорівнює

$$K_X(t_1,t_2) = M\big(\big(f_1(t_1)\cdot\mathring{X}_1 + f_2(t_1)\cdot\mathring{X}_2\big)\cdot\big(f_1(t_2)\cdot\mathring{X}_1 + f_2(t_2)\cdot\mathring{X}_2\big)\big) =$$

$$= f_1(t_1)\cdot f_1(t_2)\cdot M(\mathring{X}_1)^2 + f_2(t_1)\cdot f_1(t_2)\cdot M(\mathring{X}_1\cdot\mathring{X}_2) + f_1(t_1)\cdot f_2(t_2)\cdot$$
$$\cdot M(\mathring{X}_1\cdot\mathring{X}_2) + f_2(t_1)\cdot f_2(t_2)\cdot M(\mathring{X}_2)^2 = f_1(t_1)\cdot f_1(t_2)\cdot DX_1 +$$
$$+ f_2(t_1)\cdot f_2(t_2)\cdot DX_1 + \big(f_1(t_1)\cdot f_2(t_2) + f_2(t_1)\cdot f_1(t_2)\big)K(X_1,X_2).$$

Підставивши в одержаний вираз $t_1 = t_2 = t$, знайдемо

$$D_X(t) = f_1^2(t)\cdot DX_1 + f_2^2(t)\cdot DX_2 + 2\cdot f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot K(X_1,X_2).$$

Приклад 5. Використовуючи результат попереднього прикладу, знайти кореляційну функцію випадкового гармонічного коливання

$$X(t) = U\cdot\cos\omega t+V\cdot\sin\omega t,$$

де ω – невипадкова частота, а випадкові амплітуди U і V – некорельовані.

Розв'язання. Застосовуючи формули тригонометрії для добутків косинусів і синусів, одержимо

$$K_X(t_1, t_2) = \cos\omega t_1\cdot\cos\omega t_2\cdot DU + \sin\omega t_1\cdot\sin\omega t_2\cdot DV =$$

$$= \frac{DU+DV}{2}\cos\omega(t_1-t_2) + \frac{DU-DV}{2}\cos\omega(t_1+t_2).$$

Приклад 6. Виразити кореляційну функцію випадкового процесу $Y(t)=f_1(t)\cdot X(t)+f_2(t)$ через кореляційну функцію випадкового процесу $X(t)$, якщо $f_1(t)$, $f_2(t)$ – невипадкові функції.

Розв'язання. Оскільки $MY(t)=f_1(t)\cdot MX(t)+f_2(t)$, то $\mathring{Y}(t) = f_1(t)\cdot\mathring{X}(t)$. Таким чином, $K_Y(t_1, t_2) = M\big(\mathring{Y}(t_1)\cdot\mathring{Y}(t_2)\big) =$ $= f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot K_X(t_1, t_2)$.

Приклад 7. Знайти кореляційну функцію випадкового гармонічного коливання $X(t)=A\cdot\cos(\omega t+\Phi)$, де ω – невипадкова частота, $A>0$ – випадкова амплітуда коливань, Φ – незалежна від A випадкова початкова фаза коливань, яка рівномірно розподілена на відрізку $[0;2\pi)$.

Розв'язання. Реалізаціями процесу будуть гармоніки, амплітуди і початкові фази яких визначаються значеннями a і φ, які набувають випадкові величини A і Φ:

$$x = a\cdot\cos(\omega t+\varphi).$$

Оскільки A і Φ є незалежними випадковими величинами, то незалежними будуть також випадкові величини A і $\cos(\omega t+\Phi)$. Тому

$$m_X(t) = MX(t) = M(A\cdot\cos(\omega t+\Phi)) = MA\cdot M(\cos(\omega t+\Phi)) =$$

$$= MA\int_0^{2\pi}\frac{cos\left(\omega t+\varphi\right)}{2\pi}d\varphi = MA\cdot\frac{1}{2\pi}\sin(\omega t+\varphi)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= MA\cdot\frac{1}{2\pi}\left(\sin(\omega t+2\pi)-\sin(\omega t)\right)=0.$$

Тоді

$$K_X(t_1,t_2) = M(X(t_1)\cdot X(t_2)) - m_X(t_1)\cdot m_X(t_2) =$$

$$= M(A\cos(\omega t_1+\Phi)\cdot A\cos(\omega t_2+\Phi)) = M(A^2)\cdot M(\cos(\omega t_1+\Phi)\cdot\cos(\omega t_2+\Phi)) =$$

$$= M(A^2)\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega t_1+\varphi)\cdot\cos(\omega t_2+\varphi)d\varphi =$$

$$= M(A^2)\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi}(cos(\omega(t_1-t_2))-cos(\omega(t_1+t_2)+2\varphi))d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot M(A^2)\cdot\cos\omega(t_1-t_2).$$

Оскільки $K_X(t,t) = D_X(t)$, то дисперсія процесу

$$D_X(t) = \frac{1}{2}\cdot M(A^2).$$

4.2. Кореляційна теорія стаціонарних випадкових процесів

4.2.1. Стаціонарні процеси

Випадкові процеси часто породжуються причинами, які не змінюють свій характер при зміні початку відліку часу.

Визначення 7. Випадковий процес $X(t)$ називається **строго стаціонарним** (стаціонарним у вузькому розумінні), якщо закони розподілу його перерізів $(X(t_1); X(t_2);\ldots;X(t_n))$ не змінюються при зсуві часу на довільну величину τ $(t_1 \to t_1+\tau,\ t_2 \to t_2+\tau, \ldots,\ t_n \to t_n+\tau)$ при будь-яких можливих значеннях $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ і довільному $n \in N$.

Зокрема для одно- і двомірних розподілів відповідно при $\tau = -t$ і $\tau = -t_1$ одержимо

$$1)\, F_1(t, x) = F_1(t+\tau, x) \Rightarrow F_1(t, x) = F_1(0, x);$$
$$2)\, F_2(t_1, x; t_2, y) = F_2(t_1+\tau, x; t_2+\tau, y) \Rightarrow F_2(t_1, x; t_2, y) = F_2(0, x; t_2-t_1, y).$$

Таким чином, математичне сподівання і дисперсія, які визначаються одновимірним розподілом, не залежать від часу, а кореляційна функція, що визначається двовимірним розподілом, залежить не від двох змінних t_1, t_2, а лише від однієї – t_2-t_1.

Розглянемо більш широкий, порівняно зі строго стаціонарним, клас випадкових процесів.

Визначення 8. Випадковий процес $X(t)$ називається **стаціонарним** (стаціонарним у широкому розумінні), якщо його математичне сподівання є сталим, а кореляційна функція залежить від різниці моментів часу:

$$1)\ MX(t) = m_X; \quad 2)\ K_X(t_1, t_2) = k_X(\tau), \quad \text{де } \tau = t_2-t_1.$$

Модель стаціонарних випадкових процесів описує багато явищ у радіофізиці, теорії квантових генераторів і т. п.

Процес, розглянутий у прикладі 7 п. 4.1.2, є стаціонарним:

$$MX(t) = m_X = 0,\ K_X(t_1, t_2) = k_X(\tau) = \tfrac{1}{2}\cdot M(A^2)\cdot\cos\omega\tau.$$

При цьому кореляційна функція $k_X(\tau)$ є періодичною і має той самий період (частоту), що і будь-яка реалізація процесу $X(t) = A\cdot\cos(\omega t+\Phi)$.

Приклад 8. В умовах прикладу 5 п. 4.1.2 вияснити умови стаціонарності випадкового процесу $X(t)$.

Розв'язання: 1) оскільки $MX(t) = MU\cdot\cos\omega t + MV\cdot\sin\omega t$, то $MX(t)$ не залежатиме від часу лише при $MU = MV = 0$; 2) кореляційна функція буде залежати від різниці моментів часу t_1, t_2 лише тоді, коли $DU = DV$:

$$K_X(t_1, t_2) = DU\cdot\cos\omega(t_2 - t_1) = DU\cdot\cos\omega\tau = k_X(\tau).$$

Знову зауважимо, що кореляційна функція $k_X(\tau)$ коливання з випадковими амплітудами $X(t) = U\cdot\cos\omega t + V\cdot\sin\omega t$ має той самий період (частоту), що й саме коливання.

Із формули (4.5) випливають такі властивості кореляційної функції $k_X(\tau)$ стаціонарного процесу:

1) $k_X(\tau) = k_X(-\tau)$ – парність кореляційної функції;

2) $D_X(t) = k_X(0)$ – сталість дисперсії стаціонарного процесу;

3) $|k_X(\tau)| \le k_X(0)$.

Нормованою кореляційною функцією стаціонарного процесу $X(t)$ є функція $\rho_X(\tau) = k_X(\tau)/k_X(0)$. У застосуваннях зустрічаються нормовані кореляційні функції такого вигляду:

1) $\rho_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$; 2) $\rho_X(\tau) = e^{-a|\tau|}\cdot\cos b\tau$;

3) $\rho_X(\tau) = e^{-a|\tau|}\cdot(\cos b\tau + c\sin b|\tau|)$, $|c| \le \dfrac{a}{b}$, $(a, b > 0)$.

Величина $\tau_{кор} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\rho_X(\tau)\right| d\tau$ називається **часом кореляції** (інколи користуються іншими означеннями часу кореляції). При $t_2 - t_1 = \tau >> \tau_{кор}$ перерізи $X(t_1)$ і $X(t_2)$ випадкового процесу прийнято вважати некорельованими.

Кореляційну функцію вигляду $\rho_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$ мають процеси типу дробового шуму. Для таких процесів $\tau_{кор} = 2/a$.

4.2.2. Ергодичні стаціонарні процеси

Якщо є досить велика кількість реалізацій стаціонарного випадкового процесу, то його математичне сподівання m_X можна наближено знайти за допомогою середнього арифметичного (формула (4.1)). Проте в експериментатора часто є лише одна реалізація. Використовуючи цю одну реалізацію $x(t)$ ($t\in[0;T]$), можна знайти її середнє значення за часом на відрізку $[0;T]$:

$$\langle x(t)\rangle_{[0;T]} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt.$$

Це середнє являє собою можливе значення випадкової величини $\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$ і залежить від реалізації $x(t)$.

Існують стаціонарні випадкові процеси, у яких величина $\langle x(t)\rangle_{[0;T]}$ не залежить при досить великому T від вибору реалізації. Для таких процесів – вони називаються **ергодичними відносно математичного сподівання** – усереднення за сукупністю всіх реалізацій з імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна замінити усередненням за часом будь-якої однієї реалізації

$$m_X \approx \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad (T\to+\infty).$$

Як правило, питання про ергодичність процесу вирішується на підставі фізичних міркувань, які дозволяють вияснити, чи буде одна реалізація процесу типовою для всієї сукупності. Процес буде ергодичним, наприклад, якщо ймовірнісний зв’язок між його перерізами $X(t)$ та $X(t+\tau)$ є слабким (система досить швидко "забуває" свій попередній стан; одна досить довга реалізація процесу може розглядатися як сукупність декількох незалежних реалізацій меншої тривалості).

Теорема 1 (достатня умова ергодичності). Якщо кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ задовольняє умову

$$\boxed{\lim_{\tau\to+\infty} k_X(\tau)=0,} \qquad (4.6)$$

то процес є ергодичним відносно математичного сподівання.

Ця теорема може розглядатися, за суттю справи, як континуальний аналог теореми Чебишева.

Відзначимо іншу, більш тонку, ніж формула (4.6), достатню і необхідну умову ергодичності стаціонарного процесу відносно математичного сподівання

$$\boxed{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)k_X(\tau)d\tau=0\,.} \tag{4.7}$$

Приклад 9. Чи буде ергодичним відносно математичного сподівання стаціонарний процес, який розглянуто в умовах прикладу 7 п. 4.1.2?

Розв'язання. Знайдемо середнє за часом від довільної реалізації процесу:

$$\langle x(t)\rangle_{[0;T]}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T a\cdot cos(\omega t+\varphi)dt=\frac{a}{\omega T}(\sin(\omega T+\varphi)-\sin\varphi)\to 0=m_X \qquad (T\to+\infty)\,.$$

Отже, безпосередньо встановлено, що процес є ергодичним відносно математичного сподівання, хоча умова (4.6) теореми не виконана ($\cos\omega\tau$ не наближається до нуля при $\tau\to+\infty$). Зрозуміло, що умова (4.7) ергодичності процесу виконана:

$$\frac{1}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau}{T})k_X(\tau)d\tau=\frac{1}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau}{T}).\frac{1}{2}M(A^2)\cos\omega\tau d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot M(A^2)\cdot\frac{1}{T}\left[(1-\frac{\tau}{T})\frac{\sin\omega\tau}{\omega}-\frac{1}{T\omega^2}\cos\omega\tau\right]\Bigg|_0^T=\frac{M(A^2)}{2T^2\omega^2}(1-\cos\omega T)\to 0$$

при $T\to+\infty$.

Для знаходження миттєвої щільності ймовірності стаціонарного ергодичного процесу використовують такий спосіб. Позначимо через $T_{[x_0;x_0+\Delta x)}$ час, протягом якого реалізація $x(t)$ набуває значення у проміжку $[x_0;x_0+\Delta x)$. Наприклад, на рис. 4.5 $T_{[x_0;x_0+\Delta x)}$ дорівнює сумі довжин проміжків, виділених жирною лінією. Тоді справедливе

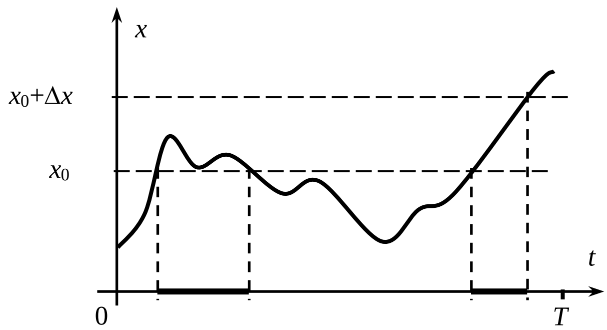


Рис. 4.5

співвідношення $p_1(x_0)\cdot\Delta x\approx\frac{T_{[x_0;x_0+\Delta x)}}{T}$. Звідси випливає, що відносний час $\dfrac{T_{[x_0;+\infty)}}{T}$ перебування реалізації стаціонарного ергодичного процесу $X(t)$ вище рівня x_0 протягом часу T наближається при великих значеннях T до $\int\limits_{x_0}^{+\infty} p_1(x)dx$.

Якщо ергодичним відносно математичного сподівання є процес $(X(t)-m_X)(X(t+\tau)-m_X)$, то кореляційна функція і дисперсія процесу $X(t)$ може бути знайдені за однією реалізацією за формулами

$$k_X(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau}(x(t)-m_X)\cdot(x(t+\tau)-m_X)dt;$$

$$D_X = k_X(0) \approx \frac{1}{T}\int\limits_0^{T}(x(t)-m_X)^2 dt.$$

4.2.3. Нормальний (гауссів) випадковий процес

Визначення 9. Випадковий процес називається **нормальним**, якщо розподіли всіх можливих його n-вимірних перерізів $(X(t_1); X(t_2); \ldots; X(t_n))$ є розподілами Гаусса.

Оскільки розподіл Гаусса задається вектором математичних сподівань і кореляційною матрицею (формула (2.19)), то кореляційна теорія для нормальних процесів буде повною. Отже, стаціонарний процес Гаусса повністю визначається математичним сподіванням і кореляційною функцією $k_X(\tau)$. При цьому елементи кореляційної матриці K дорівнюють

$$K_{ij} = K_X(t_i, t_j) = k_X(t_i - t_j).$$

Таким чином, для нормального процесу зі стаціонарності у широкому розумінні випливає стаціонарність у вузькому розумінні.

Приклад 10. Знайти щільність сумісного розподілу перерізів процесу $X(0)$, $X(\pi/2)$, $X(\pi)$, якщо випадковий процес є нормальним з характеристиками

$$MX(t) = m_X(t) = \sin t, \quad K_X(t_1, t_2) = \frac{\sin(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}\cdot\cos 2(t_2 - t_1).$$

Розв'язання. Вектор $\vec{X}\left(X(0);X(\frac{\pi}{2});X(\pi)\right)$ розподілений за тривимірним законом Гаусса з характеристиками

$$M\vec{X}=\begin{Vmatrix} m_X(0) \\ m_X\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ m_X(\pi) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix},\quad K=\begin{Vmatrix} K_X(0,0) & K_X\left(0,\frac{\pi}{2}\right) & K_X(0,\pi) \\ K_X\left(\frac{\pi}{2},0\right) & K_X\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) & K_X\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \\ K_X(\pi,0) & K_X\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right) & K_X(\pi,\pi) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & -\frac{2}{\pi} & 0 \\ -\frac{2}{\pi} & 1 & -\frac{2}{\pi} \\ 0 & -\frac{2}{\pi} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\det K=1-8/\pi^2$ і $K^{-1}=\dfrac{1}{1-\frac{8}{\pi^2}}\cdot\begin{Vmatrix} 1-\frac{4}{\pi^2} & \frac{2}{\pi} & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{2}{\pi} & 1 & \frac{2}{\pi} \\ \frac{4}{\pi^2} & \frac{2}{\pi} & 1-\frac{4}{\pi^2} \end{Vmatrix}$, то на підставі формули (3.30) одержимо

$$p_{\vec{X}}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\|x;y;z\|\cdot K^{-1}\cdot\begin{Vmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{Vmatrix}}.$$

4.2.4. Марковські процеси

За допомогою марковських процесів описуються стохастичні системи, у яких наставання деякого стану залежить від безпосередньо попереднього стану і лише тільки від нього.

Визначення 10. Випадковий процес $X(t)\,(t\in G)$ називається **марковським (процесом без післядії)**, якщо для двох довільних моментів часу $t_{n-1}<t_n\in G$ умовний розподіл випадкової величини $X(t_n)$ за умови, що задано всі значення $X(t)$ при $t\le t_{n-1}$, залежить лише від значення $X(t_{n-1})$.

Таким чином, для марковського процесу інформація щодо розподілу $X(t_n)$, яка міститься в рівності $X(t_{n-1})=x_{n-1}$ ("сучасне"), не зміниться, коли урахувати додаткову інформацію про значення процесу при $t<t_{n-1}$ ("минуле"). Отже, марковську властивість можна тлумачити як незалежність "майбутнього" $X(t_n)$ від "минулого" $X(t)(t<t_{n-1})$ при фіксованому "сучасному" $X(t_{n-1})=x_{n-1}$.

Приклади марковських процесів:

1) дискретна нескінченна множина станів і неперервний час – кількість викликів k (k=0,1,2,…), що знаходяться в СМО з очікуванням (п. 3.4.1) у довільний фіксований момент часу;

2) скінченна множина станів і дискретний час – номер стану k (k=1,2), у якому перебуває система, що описується узагальненням схеми Бернуллі (п. 1.5.1). У цьому випадку в якості аргументу, від якого залежить процес, зручно вибрати не час, а номер випробування;

3) скінченна множина станів і неперервний час – номер стану k (k=1,2,…,n), у якому знаходиться в момент часу t система, розглянута в зауваженні до п. 1.3.2.

4.2.4.1. Марковські процеси з неперервною множиною станів

Нехай $X(t)$ – марковський процес з неперервною множиною станів. Розглянемо його n-вимірний переріз $\vec{X}$ $(X(t_1); X(t_2);\ldots; X(t_n))$ при будь-яких можливих значеннях $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in G$. Марковість процесу $X(t)$ означає, що майбутній стан x_n процесу в момент часу t_n повністю визначається станом x_{n-1} процесу в момент часу t_{n-1} і не залежить від станів $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$ процесу в моменти часу t_{n-2}, $t_{n-3}, \ldots, t_1$. Тому для умовних щільностей імовірності виконується співвідношення

$$p(t_n, x_n / t_1, x_1; t_2, x_2; \ldots; t_{n-1}, x_{n-1}) = p(t_n, x_n / t_{n-1}, x_{n-1}).$$

Умовна щільність $p(t,x/s,y)$ $(t>s \in G)$ називається **перехідною функцією** марковського процесу. Можна довести, що n-вимірна щільність імовірності марковського процесу може бути знайдена, якщо відомі його одновимірна щільність і перехідна функція. Наприклад, при n =3 маємо

$$p_3(t_3, x_3; t_2, x_2; t_1, x_1) = p_1(t_1, x_1)\cdot p(t_2, x_2/t_1, x_1)\cdot p(t_3, x_3/t_1, x_1; t_2, x_2)=$$
$$=p_1(t_1, x_1)\cdot p(t_2, x_2/t_1, x_1)\cdot p(t_3, x_3/t_2, x_2) \qquad (t_1 < t_2 < t_3 \in G).$$

Якщо проінтегрувати останню рівність по змінній x_2 і використати умову погодженості, то одержимо співвідношення

$$p_2(t_1, x_1; t_3, x_3) = p_1(t_1, x_1)\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p(t_2, x_2/t_1, x_1)\, p(t_3, x_3/t_2, x_2)dx_2,$$

з якого випливає рівняння Колмогорова-Чепмена

$$p(t_3,x_3 / t_1,x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t_2 , x_2 /t_1 , x_1)\cdot p(t_3 , x_3 /t_2 , x_2)dx_2 .$$

Воно аналогічно рівнянню Колмогорова–Чепмена для марковських процесів з дискретною множиною станів і неперервним часом (формула (1.10)).

Якщо марковський процес є стаціонарним, то його перехідна функція залежить лише від одного часовового параметра $\tau=t\text{-}s>0$:

$$p(t,x /s,y)=p(x/\tau, y).$$

Стаціонарний процес Гаусса, перерізи якого розподілені за законом $N(0;1)$, буде марковським тоді і тільки тоді, коли його нормована кореляційна функція матиме вигляд $\rho_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$ $(a > 0)$.

4.2.4.2. Ланцюги Маркова

Важливим узагальненням послідовності незалежних випадкових величин є ланцюги Маркова.

4.2.4.2.1. Ланцюги Маркова з дикретним часом

Вивчимо більш детально, ніж в узагальненні схеми Бернуллі (п. 1.5.1), марковські випадкові процеси зі скінченною множиною станів і дискретним часом.

Нехай E_1, E_2, ..., E_m – множина станів деякої фізичної системи, яка може переходити з одного стану в інший у моменти часу $t_0=0$, t_1, $t_2,\ldots,$ $t_n,\ldots$. Кожен такий перехід будемо називати кроком.

Позначимо через $X(n)$ номер стану, у якому знаходиться система в момент часу t_n (на n-му кроці).

Визначення 11. Процес $X(n)$ називається **ланцюгом Маркова з дискретним часом,** якщо ймовірність потрапити в момент часу t_n у стан E_j залежить лише від того, у якому стані система знаходилась у момент часу t_{n-1} і не залежить від того, у яких станах вона знаходилась у моменти часу t_0 , t_1, $\ldots t_{n-2}$:

$$P\{X(n)=j/X(0)=q, X(1)=r,\ldots, X(n\text{-}2)=s, X(n\text{-}1)=i\}=P\{X(n)=j/X(n\text{-}1)=i\}$$

для всіх можливих значень $n, j, i,\ldots,q$.

Ланцюг Маркова називається **однорідним**, якщо ймовірності переходу за один крок не залежать від номера кроку, а залежать лише від того, з якого стану E_i та в який стан E_j здійснюється перехід

$$P\{X(n)=j/X(n-1)=i\}=p_{ij}\ .$$

Далі ітиметься лише про однорідні ланцюги Маркова.

Квадратна матриця $\Pi = \| p_{ij} \|_{i,j=1,\dots,m}$ називається **матрицею ймовірностей переходу за один крок.** Зрозуміло, що сума елементів кожного рядка матриці Π дорівнює 1. Для більшої наочності замість матриці Π часто запобігають до орієнтованого графа, вершинами якого є стани ланцюга, а стрілка, що має напрям зі стану E_i до стану E_j з числом p_{ij} над (під) нею, вказує на можливість переходу $E_i \to E_j$ з імовірністю p_{ij}. Квадратна матриця $\Pi(n)$ з елементами

$$p_{ij}(n)=P\{X(n)=j/X(0)=i\}$$

називається **матрицею ймовірностей переходу за n кроків.** Звернемо увагу на те, що ця матриця задовольняє при довільних натуральних n_1, n_2 рівняння Чепмена–Колмогорова

$$\Pi(n_1+n_2)=\Pi(n_1)\cdot\Pi(n_2),$$

у силу якого

$$\Pi(n)=(\Pi)^n.$$

Позначимо через $p_k(n)$ імовірність того, що система на n-му кроці (у момент часу t_n) буде знаходиться у стані E_k (k =1, 2, , m). Тоді початковий розподіл $\vec{p}_0(p_1(0);\ p_2(0);\dots;\ p_m(0))$ (розподіл випадкової величини $X(0)$) і матриця Π ймовірностей переходу за один крок цілком визначають всі розподіли $\vec{p}_n(p_1(n);p_2(n);\dots;\ p_m(n))$ (розподіли випадкової величини $X(n)$) однорідного ланцюга Маркова:

$$\vec{p}_n=\vec{p}_0\cdot(\Pi)^n.$$

Приклад 11. Матриця перехідних ймовірностей однорідного ланцюга Маркова має вигляд

$$\Pi = \begin{Vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Початковий розподіл імовірностей $\vec{p}_0\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. Знайти розподіл $\vec{p}_2$.

Розв'язання. Матриці Π відповідає орієнтований граф (рис. 4.6).

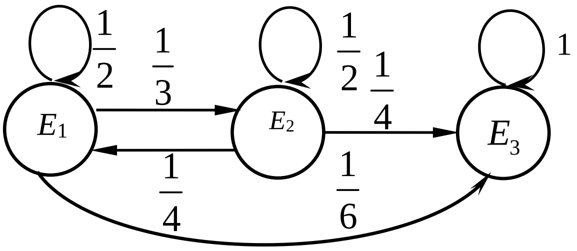


Рис. 4.6

Оскільки

$$\Pi^2 = \Pi \cdot \Pi = \begin{Vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

то $\vec{p}_2 = \left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{Vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \left(\frac{7}{48};\frac{1}{6};\frac{33}{48}\right).$

Визначення 12. Якщо існує $\lim\limits_{n\to+\infty} \vec{p}_n = \vec{p}\,(p_1;\ p_2;\ \ldots;\ p_m)$ і ця границя не залежить від початкового розподілу $\vec{p}_0$, то ланцюг Маркова називається **ергодичним,** а розподіл $\vec{p}$ $(p_1;\ p_2;\ldots;\ p_m)$ **фінальним.** Фінальний розподіл є єдиним розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\vec{p} = \vec{p}\cdot\Pi, \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

При цьому існує гранична матриця $\Pi(+\infty) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Pi(n)$ і всі її рядки тотожні: $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{ij}(n) = p_j\,(i,j=1,2,\ldots,m)$.

Теорема 2. Якщо при деякому $n \geq 1$ всі елементи $p_{ij}(n)$ матриці $\Pi(n)$ додатні, то ланцюг Маркова є ергодичним.

Приклад 12. Матриця перехідних імовірностей однорідного ланцюга Маркова має вигляд $\Pi = \begin{Vmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{Vmatrix}$. Знайти фінальний розподіл.

Розв'язання. Фінальний розподіл існує і задовольняє систему рівнянь:

$$\vec{p} = \vec{p} \cdot \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} 0.1p_1 + 0.6p_2 + 0.3p_3 = p_1, \\ 0.5p_1 + 0.2p_2 + 0.4p_3 = p_2,. \\ 0.4p_1 + 0.2p_2 + 0.3p_3 = p_3. \end{cases}$$

З урахуванням умови нормування $p_1+p_2+p_3 =1$ отримуємо систему

$$\begin{cases} 4p_1 - p_2 = 1, \\ p_1 - 12p_2 = -4, \end{cases}$$

розв'язок якої $p_1 = \frac{16}{47}$, $p_2 = \frac{17}{47}$. Таким чином, розподіл $\vec{p}\left(\frac{16}{47};\frac{17}{47};\frac{14}{47}\right)$ є фінальним.

Наведемо важливу для теорії ланцюгів Маркова класифікацію станів.

Будемо казати, що стан E_j **досягається** зі стану E_i, коли в графі існує шлях зі стану E_i у стан E_j (імовірність $p_{ij}(n)$ потрапити за n кроків з E_i до E_j, включаючи випадок $E_i = E_j$, додатня). Стани E_i і E_j називають **станами, що сполучаються**, коли вони один досягаються з другого. Стан E_i називається **неістотним**, коли існує стан E_j, який досягається з E_i, але E_i не досягається з E_j; у протилежному випадку стан E_i називається **істотним**.

Ланцюг Маркова називається **нерозкладним**, якщо всі стани сполучаються один з одним. Множина всіх істотних станів ланцюга Маркова розбивається на такі нерозкладні підланцюги, які не перетинаються між собою, що перехід з одного такого підланцюга до іншого є неможливим.

Так, наприклад, ланцюг Маркова, що зображено на рис. 4.7, розпадається на два нерозкладних підланцюги $\{E_1, E_2\}, \{E_4\}$ і один неістотний стан E_3.

Стан E_i називається **неперіодичним**, якщо найбільший спільний дільник d тих n, для яких $p_{ii}(n) > 0$, дорівнює 1.

Назвемо ланцюг Маркова **неперіодичним**, якщо всі його стани є неперіодичними. У нерозкладному ланцюгу Маркова всі стани одночасно є неперіодичними.

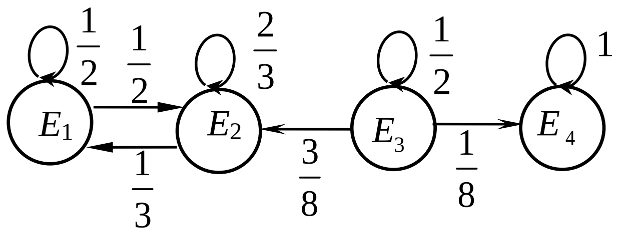
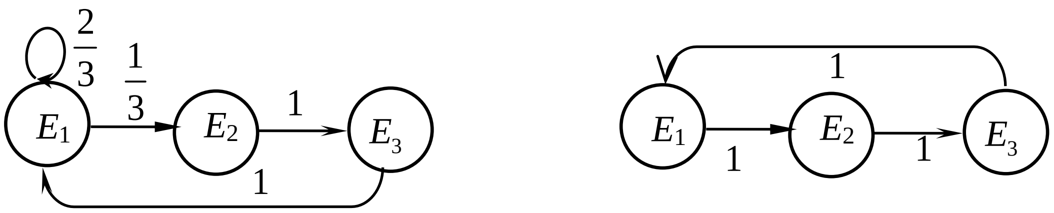


Рис. 4.7

На рис. 4.8,а зображено граф, що відповідає нерозкладному неперіодичному ланцюгу Маркова, а ланцюг, граф якого зображено на рис. 4.8,б, не є неперіодичним.

На рис. 4.8,а зображено граф, що відповідає нерозкладному неперіодичному ланцюгу Маркова, а ланцюг, граф якого зображено на рис. 4.8,б, не є неперіодичним.



а б

$p_{11}(n) > 0 : n = 1,2,3,4,\ldots \Rightarrow$ Н.С.Д d=1 $\quad p_{11}(n) > 0 : n$=3,6,9,… $\Rightarrow$ Н.С.Д d=3

Рис. 4.8

Теорема 3. Якщо ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів є нерозкладним і неперіодичним, то він є ергодичним.

Якщо ланцюг є розкладним і неперіодичним, то існує **граничний розподіл** $\vec{p}(\infty) = \lim\limits_{n \to +\infty} \vec{p}(n)$, який може залежати від початкового розподілу $\vec{p}(0)$.

Приклад 13. Матриця перехідних імовірностей ланцюга Маркова і початковий розподіл імовірностей мають вигляд

$$\text{а) } \Pi=\begin{Vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\ \vec{p}(0)=\left(1/6;1/2;1/3\right);\ \text{б) } \Pi=\begin{Vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$\vec{p}(0)=(0.1;0.2;0.4;0.3)$. Знайти граничний розподіл.

***Розв'язання*:**

а) ланцюг розпадається на два нерозкладних підланцюги $\{E_1,E_2\}$ та $\{E_3\}$ (рис. 4.9), для кожного з яких існує фінальний розподіл.

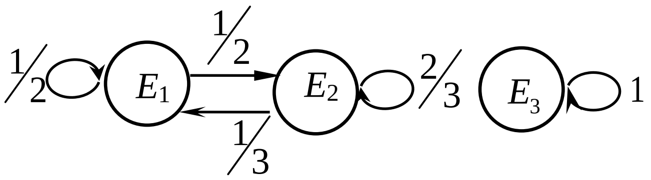


Рис. 4.9

Знайдемо їх:

1) $\{E_1,E_2\}:\ \vec{p}\left(p_1;\,p_2=1-p_1\right)$,

$$\vec{p}=\vec{p}\cdot\begin{Vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{Vmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} p_1=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{3}p_2, \\ p_2=\frac{1}{2}p_1+\frac{2}{3}p_2 \end{cases}\Leftrightarrow p_1=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{3}(1-p_1)\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow p_1=2/5\Rightarrow\vec{p}\left(2/5;3/5\right).$$

Доповнюючи цей розподіл нулем на стані E_3 початкового ланцюга, отримаємо розподіл $\vec{q}\left(2/5;3/5;0\right)$. Отже, при i=1,2 для будь-якого j=1,2,3 $\lim\limits_{n\to+\infty}p_{ij}(n)=q_j$;

2) $\{E_3\}:\vec{r}\,(0;0;1)$ та $\lim\limits_{n\to+\infty}p_{3j}(n)=r_j$.

Якщо в початковий момент часу система знаходиться в одному з класів $\{E_1,E_2\},\{E_3\}$, то і далі вона не виходить з цього класу. Тому граничний розподіл залежить від початкового розподілу $\vec{p}(0)$ і має вигляд $p_j(\infty)=\left(p_1(0)+p_2(0)\right)q_j+p_3(0)r_j$. Отже, знаходимо шуканий розподіл:

$$\vec{p}(\infty)=\frac{2}{3}\vec{q}+\frac{1}{3}\vec{r}=\left(\frac{4}{15};\frac{2}{5};\frac{1}{3}\right);$$

б) граф ланцюга наведено на рис. 4.7.

Ланцюг містить два ергодичних підланцюги $\{E_1,E_2\},\{E_4\}$ та один неістотний стан E_3. Якщо система в початковий момент часу знаходиться у стані E_3, то вона за скінченну кількість кроків потрапляє або в підланцюг $\{E_1,E_2\}$, або в підланцюг $\{E_4\}$. Оскільки $p_{32}=3p_{34}$, то ймовірність потрапити з E_3 в підланцюг $\{E_1,E_2\}$ дорівнює $\frac{3}{4}$, а ймовірність потрапити в підланцюг $\{E_4\}$ дорівнює $\frac{1}{4}$. Використовуючи результат пункту а), отримаємо

$$p_j(\infty)=\left(p_1(0)+p_2(0)+\frac{3}{4}p_3(0)\right)q_j+\left(\frac{1}{4}p_3(0)+p_4(0)\right)r_j,$$

де $\vec{q}\left(2/5;3/5;0;0\right)$, $\vec{r}(0;0;0;1)$.

Шуканий граничний розподіл має вигляд

$$\vec{p}(\infty)=0.6\vec{q}+0.4\vec{r}=\left(\frac{6}{25};\frac{9}{25};0;\frac{2}{5}\right).$$

4.2.4.2. Ланцюги Маркова з неперервним часом

Припустимо, що множина станів системи є скінченною – $E_1,\ldots,E_m$ (або зліченною – $E_1,\ldots,E_m,\ldots$), і перехід з одного стану до іншого можна здійснити в будь-який момент часу $t>0$ (наприклад, у системі масового обслуговування перехід з одного стану до іншого є пов'язаним або з надходженням нових заявок, або з завершенням обслуговування заявок, що надійшли раніше).

Нехай $X(t)$ – номер стану, у якому знаходиться система в момент часу t. Процес $X(t)$ називається **ланцюгом Маркова з неперервним часом** (рис. 4.10), якщо

$$P\{X(t+s)=j/X(s)=i,X(s-t_1)=k,\ldots,X(s-t_r)=l\}=$$
$$=P\{X(t+s)=j/X(s)=i\}$$

для будь-яких $t>0, s>0, 0<t_1<t_2<...<t_r \le s$ та для будь-яких можливих номерів станів $i, j, k,...,l$ (при відомому нинішньому $\{ X(s)=i \}$ імовірність події, що пов'язана з майбутньою поведінкою процесу, не залежить від минулого процесу).

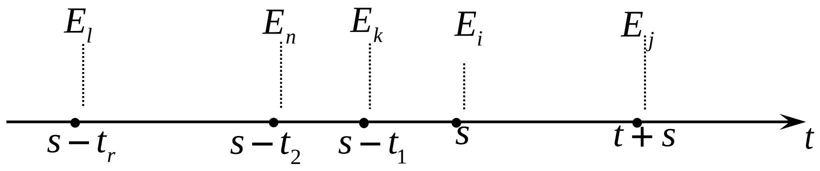


Рис. 4.10

Будемо розглядати лише **однорідні** ланцюги, для яких $P\{X(t+s)=j/X(s)=i\}=p_{ij}(t)$, де $p_{ij}(t)$ – імовірність переходу за час t зі стану E_i в стан E_j (залежність лише від тривалості проміжку часу, за який здійснюється перехід).

Матриця $\Pi(t)=\|p_{ij}(t)\|$ називається **матрицею ймовірностей переходу** за час t. Сума елементів будь-якого рядка матриці $\Pi(t)$ дорівнює 1. З формули повної ймовірності випливає рівняння Колмогорова-Чепмена

$$\Pi(t+s)=\Pi(t)\cdot\Pi(s).$$

За допомогою рівняння Колмогорова-Чепмена можна встановити, що матриця $\Pi(t)$ виражається через матрицю **щільностей (інтенсивностей) імовірностей переходу** $Q=\|p'_{ij}(0)\|$. Для щільностей переходу надалі будемо використовувати таке позначення $\lambda_{ij}=p'_{ij}(0)$.

Зазначимо, що сума елементів будь-якого рядка матриці щільностей переходу Q дорівнює 0 (це випливає з того, що сума елементів будь-якого рядка матриці ймовірностей переходу $\Pi(t)$ тотожньо дорівнює 1).

Оскільки

$$p_{ij}(0)=\begin{cases} 0, & якщо\ i\ne j\ ; \\ 1, & якщо\ i=j\ , \end{cases}$$

то щільності ймовірностей переходу дорівнюють

$$\lambda_{ij}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{p_{ij}(h)}{h}, \textit{якщо } i\neq j\ ;\\ \lim\limits_{h\to+0}\dfrac{p_{ii}(h)-1}{h}, \textit{якщо } i=j\ .\end{cases}$$

Нехай $\vec{p}(t)=\left(p_1(t);p_2(t);...;p_m(t)\right)$ – розподіл імовірностей ланцюга Маркова в момент часу t ($p_k(t)$– імовірність того, що в момент часу t система знаходиться у k–му стані), а $\vec{p}(0)=\left(p_1(0);...;p_n(0)\right)$ – початковий розподіл. Тоді розподіл імовірностей ланцюга Маркова в момент часу t визначається початковим розподілом і матрицею ймовірностей переходу:

$$\vec{p}(t)=\vec{p}(0)\cdot\Pi(t)\ .$$

За допомогою останнього співвідношення можна встановити, що розподіл $\vec{p}(t)$ є розв'язком системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами (так звана система рівнянь А.М. Колмогорова, з якою у випадку СМО з втратами зустрічались у п. 3.4.1.2)

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{p}(t)\cdot Q \qquad (4.8)$$

при початковій умові $\vec{p}(t)\big|_{t=0}=\vec{p}(0)$.

Ланцюг Маркова з неперервним часом називається **ергодичним**, якщо існує граничний розподіл

$$\vec{p}=\lim_{t\to+\infty}\vec{p}(t)\Leftrightarrow p_i=\lim_{t\to+\infty}p_i(t),$$

який не залежить від початкового розподілу $\vec{p}(0)$; при цьому сам розподіл $\vec{p}$ називається **фінальним.** Зрозуміло, що для фінального розподілу $\vec{p}$ маємо $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=0.$

Теорема 4. Якщо ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів і з неперервним часом є нерозкладним, то він є ергодичним.

У тому випадку, коли ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів є ергодичним, фінальний розподіл $\vec{p}\left(p_1; p_2; \ldots; p_m\right)$ є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка випливає з системи (4.8) при $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0$:

$$\vec{p} \cdot Q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \cdot \lambda_{11} + \ldots + p_m \cdot \lambda_{m1} = 0 \ , \\ p_1 \cdot \lambda_{12} + \ldots + p_m \cdot \lambda_{m2} = 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1 \cdot \lambda_{1m} + \ldots + p_m \cdot \lambda_{mm} = 0 \ , \end{cases} \tag{4.9}$$

до якої треба приєднати умову нормування $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$.

Зміст фінальних ймовірностей p_i у тому, що вони є середнім орієнтовним часом перебування системи в i-му стані.

Звичайно систему (4.9) перетворюють таким способом, щоб її складання було цілком прозорим. Пояснення дамо на прикладі системи, яка може перебувати в станах E_1, E_2, E_3, E_4. (рис. 4.11). Побудуємо орієнтований граф станів цієї системи і біля кожної стрілки поставимо відповідну щільність імовірності переходу (не будемо проставляти петлі, які відповідають затримці системи в даному стані). Такий граф у подальшому називатимемо **розміченим** графом станів.

Перетворимо спочатку перше рівняння системи (4.9). Оскільки

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} = 0 \,,$$

то

$$p_1 \cdot \lambda_{11} + p_2 \cdot \lambda_{21} + p_3 \cdot \lambda_{31} + p_4 \cdot \lambda_{41} = 0 \Leftrightarrow -p_1 \cdot \left(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}\right) + p_2 \cdot \lambda_{21} + \\ + p_3 \cdot \lambda_{31} + p_4 \cdot \lambda_{41} = 0 \Leftrightarrow p_1 \cdot \left(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}\right) = p_2 \cdot \lambda_{21} + p_3 \cdot \lambda_{31} + p_4 \cdot \lambda_{41} \,.$$

Щільності λ_{12}, λ_{13}, λ_{14} відповідають стрілкам, що виходять зі стану E_1, а щільності λ_{21}, λ_{31}, λ_{41} відповідають тим стрілкам, що входять у стан E_1.

При перетворенні другого рівняння системи (4.9) скористаємось рівністю $\lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{24} = 0$, третього – рівністю $\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{33} + \lambda_{34} = 0$, четвертого – рівністю $\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + \lambda_{44} = 0$.

Таким чином, система (4.9) набуває вигляду

$$\begin{cases} p_1 \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) = p_2 \cdot \lambda_{21} + p_3 \cdot \lambda_{31} + p_4 \cdot \lambda_{41}, \\ p_2 \cdot (\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24}) = p_1 \cdot \lambda_{12} + p_3 \cdot \lambda_{32} + p_4 \cdot \lambda_{42}, \\ p_3 \cdot (\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34}) = p_1 \cdot \lambda_{13} + p_2 \cdot \lambda_{23} + p_4 \cdot \lambda_{43}, \\ p_4 \cdot (\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43}) = p_1 \cdot \lambda_{14} + p_2 \cdot \lambda_{24} + p_3 \cdot \lambda_{34}. \end{cases} \quad (4.10)$$

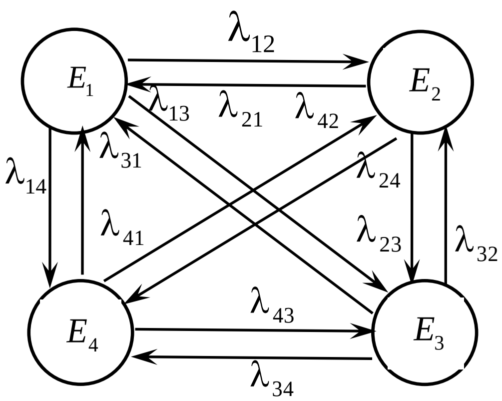


Рис. 4.11

Сформулюємо правило отримання i-го рівняння системи (4.10): добуток суми щільностей імовірності, які відповідають стрілкам, що виходять зі стану E_i, на ймовірність цього стану дорівнює сумі попарних добутків щільностей імовірності, які відповідають стрілкам, що входять у стан E_i, на ймовірності станів, з яких вони виходять.

Приклад 14. Деяка ремонтна майстерня (СМО) може перебувати у станах E_1, E_2, E_3. Розмічений граф станів системи наведено на рис. 4.12: 1) скласти систему лінійних алгебраїчних рівнянь для граничних імовірностей станів; 2) знайти граничні ймовірності p_1, p_2, p_3.

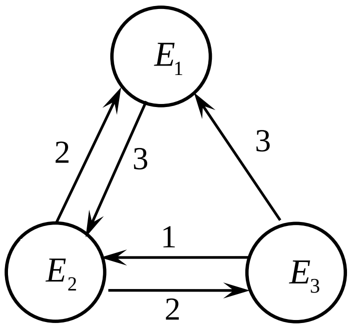


Рис. 4.12

Розв'язання. За правилом (4.10) одержимо систему та розв'язуємо її:

$$\begin{cases} 3p_1 = 2p_2 + 3p_3 \\ 4p_2 = 3p_1 + p_3 \\ 4p_3 = 2p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p_1 = 7p_3 \\ 8p_3 = 3p_1 + p_3 \\ p_2 = 2p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3p_1 = 7p_3 \\ 3p_1 = 7p_3 \\ p_2 = 2p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{3}p_3 + 2p_3 + p_3 = 1, \frac{16}{3}p_3 = 1,\ p_3 = \frac{3}{16} = \approx 0.19,\ p_2 = \frac{6}{16} \approx$$

$\approx 0.38,\ p_1 = \dfrac{7}{16} \approx 0.44$. Отже, у граничному стаціонарному режимі в середньому 44 % часу система перебуватиме у стані E_1, 38 % – у стані E_2, 19 % – у стані E_3.

Розглянемо важливий для застосувань **марковський процес розмноження та загибелі**. Система може знаходитись у будь-який момент часу t в одному зі станів: $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$. **Марковський процес** називається **процесом розмноження та загибелі,** якщо виконуються умови:

1) $p_{i,i+1}(h) = \lambda_{i,i+1} \cdot h + o(h)$ $\quad (i = 0,1,\ldots,n-1)$;

2) $p_{i,i-1}(h) = \mu_{i,i-1} \cdot h + o(h)$ $\quad (i = 1,\ldots,n)$;

3) $p_{i,k}(h) = o(h)$ $\quad (|i-k| \geq 2)$;

4) $p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_{i,i+1} + \mu_{i,i-1}) \cdot h + o(h)$ (тут і вище $o(h)$ - нескінченно мала більш високого порядку, ніж $h \to 0+$).

Тоді інтенсивності ймовірностей переходу мають вигляд:

$$p'_{i,i+1}(0) = \lambda_{i,i+1}, \quad p'_{i,i-1}(0) = \mu_{i,i-1}, \quad p'_{i,i}(0) = -(\lambda_{i,i+1} + \mu_{i,i-1}) .$$

Процес $X(t)$ є ланцюгом Маркова зі скінченною кількістю станів і неперервним часом, оскільки ймовірність потрапляння через проміжок часу тривалості h в будь-який стан залежить тільки від того, у якому стані знаходиться система в розглядуваний момент часу і не залежить від стану системи в попередні моменти часу.

Розмічений граф станів цієї системи має вигляд як на рис. 4.13.

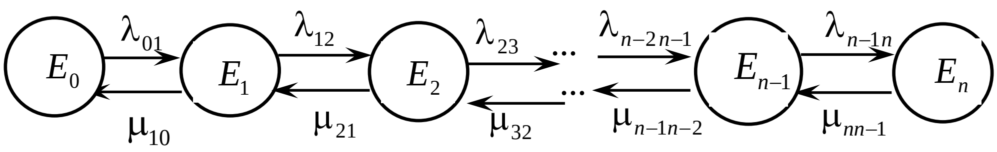


Рис. 4.13

Інтенсивності "розмноження" $\left(\lambda_{0,1},\lambda_{1,2},\ldots,\lambda_{n-1,n}\right)$ розташовані над стрілками, які ідуть зліва направо, а інтенсивності "загибелі" $\left(\mu_{1,0},\mu_{2,1},\mu_{3,2},\ldots,\mu_{n,n-1}\right)$ – під стрілками, які ідуть справа наліво.

Оскільки цей ланцюг нерозкладний, то він є ергодичним, і тоді існує фінальний розподіл $\vec{p}\left(p_0;p_1;\ldots;p_{n-1};p_n\right)$. Для знаходження фінального розподілу одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} p_0\cdot\lambda_{0,1}=p_1\cdot\mu_{1,0}, \\ p_1\left(\lambda_{1,2}+\mu_{1,0}\right)=p_0\lambda_{0,1}+p_2\mu_{2,1}, \\ \qquad\qquad\vdots \\ p_{n-1}\left(\lambda_{n-1,n}+\mu_{n-1,n-2}\right)=p_{n-2}\lambda_{n-2,n-1}+p_n\mu_{n,n-1}, \\ p_0+p_1+\ldots+p_n=1. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$p_1=\frac{\lambda_{0,1}}{\mu_{1,0}}\cdot p_0,\ \ p_2=\frac{\lambda_{0,1}\cdot\lambda_{1,2}}{\mu_{1,0}\cdot\mu_{2,1}}\cdot p_0,\ldots,\ p_n=\frac{\lambda_{0,1}\cdot\lambda_{1,2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1,n}}{\mu_{1,0}\cdot\mu_{2,1}\cdot\ldots\cdot\mu_{n,n-1}}p_0, \qquad (4.11)$$

де $p_0=\left(1+\frac{\lambda_{0,1}}{\mu_{1,0}}+\frac{\lambda_{0,1}\cdot\lambda_{1,2}}{\mu_{1,0}\cdot\mu_{2,1}}+\ldots+\frac{\lambda_{0,1}\cdot\lambda_{1,2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1,n}}{\mu_{1,0}\cdot\mu_{2,1}\cdot\ldots\cdot\mu_{n,n-1}}\right)^{-1}$.

За цією схемою можна знайти граничні ймовірності станів СМО (п. 3.4.1.2-3.4.1.4). Наприклад, СМО з втратами (п. 3.4.1.2) є процесом загибелі та розмноження при $\lambda_{0,1}=\lambda_{1,2}=\ldots=\lambda_{n-1,n}=\lambda$ і $\mu_{1,0}=\mu_{2,1}=\ldots=\mu_{n,n-1}=\mu$.

Приклад 15. Процес загибелі та розмноження представлений графом на рис. 4.12. Знайти граничні ймовірності станів при λ_{01}=2, μ_{10}=3, λ_{12}=2 , μ_{21}=1.

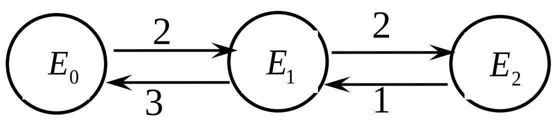


Рис. 4.14

Розв'язання. За формулами (4.11) знайдемо

$$p_0=\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 2}{3\cdot 1}\right)^{-1}=\frac{1}{3}\approx 0.33,$$

$$p_1=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}\approx 0.22,$$

$p_2 = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 1\cdot 3} = \frac{4}{9} \approx 0.45$, тобто у граничному стаціонарному режимі в середньому 33 % часу система буде перебувати в стані E_0, 22 % – у стані E_1, та 45 % – у стані E_2.

4.3. Спектральне представлення стаціонарних випадкових процесів

4.3.1. Стаціонарний процес з дискретним спектром

Розглянемо випадковий процес

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{n} U_k \cos\omega_k t + V_k \sin\omega_k t,$$

де U_k і V_k – центровані, попарно некорельовані випадкові величини, дисперсії яких парами рівні $DU_k = DV_k = d_k$, $\omega_k > 0$ – довільно обрані невипадкові кругові частоти (k=0,1,...n).

Покажемо, що процес $X(t)$ є стаціонарним:

1) оскільки $MU_k = MV_k = 0$ (k=0, 1,…, n), то

$$m_X(t) = MX(t) = m_X + \sum_{k=0}^{n} (MU_k) cos\,\omega_k t + (MV_k) sin\,\omega_k t = m_X;$$

2) оскільки $M(U_k \cdot U_l) = M(V_k \cdot V_l) = M(U_k \cdot V_l) = 0$,
$M(U_k^2) = M(V_k^2) = d_k$ (k, l = 0, 1,…, n, $k \neq l$), то, використовуючи результат прикладу 5 п. 4.1.2, отримуємо

$$K_X(t_1, t_2) = M\left[\left(\sum_{k=0}^{n} U_k\, cos\,\omega_k t_1 + V_k\, sin\,\omega_k t_1\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} U_k\, cos\,\omega_k t_2 + V_k\, sin\,\omega_k t_2\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} M\left(U_k^2\right) \cos\omega_k t_1 \cdot \cos\omega_k t_2 + M\left(V_k^2\right) \sin\omega_k t_1 \cdot \sin\omega_k t_2 = \sum_{k=0}^{n} d_k\, cos\,\omega_k (t_1 - t_2).$$

Отже, випадковий процес $X(t)$ є стаціонарним. Його кореляційна функція $k_X(\tau) = \sum_{k=0}^{n} d_k \cos\omega_k \tau$, а дисперсія $D_X = k_X(0) = \sum_{k=0}^{n} d_k$ (дисперсія процесу є сумою дисперсій окремих гармонік, із яких сформовано процес).

Нехай випадковий процес $X(t)$ визначає флуктуацію електричної напруги. Оскільки потужність електричного струму пропорційна квадрату напруги, то математичне сподівання середньої потужності гармонічного коливання $U_k \cdot \cos\omega_k t + V_k \cdot \sin\omega_k t$ за період $T_k = 2\pi/\omega_k$ пропорційне $M(U_k^2 + V_k^2)/2 = d_k$. Тому сукупність чисел d_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ прийнято називати **спектром потужності** випадкового процесу $X(t)$, який називається **процесом з дискретним спектром**.

Якщо частоти ω_k кратні основній частоті ($\omega_k = k \cdot \omega_1 = k\frac{2\pi}{T}$), то і кореляційна функція $k_X(\tau)$ і випадковий процес $X(t)$ (будь-яка його реалізація) є періодичними функціями одного і того самого періоду T. При цьому можна розглядати також і випадок $n = +\infty$:

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{\infty} U_k \cos\omega_k t + V_k \sin\omega_k t \Leftrightarrow k_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos\omega_k \tau,$$

$$D_X = k_X(0) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k.$$

Отже, стаціонарний процес $X(t)$ має скінченну дисперсію лише тоді, коли ряд, складений з дисперсій d_k випадкових величин U_k, V_k є збіжним.

4.3.2. Стаціонарний процес з неперервним спектром

Якщо стаціонарний випадковий процес $X(t)$ не є процесом з дискретним спектром, то він може бути сформованим накладенням випадкових гармонічних коливань, частоти яких заповнюють всю піввісь $[0; +\infty)$. При цьому спектр частот із дискретного ω_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ стає неперервним і тому суму випадкових гармонічних коливань з різними частотами і некорельованими на різних частотах випадковими амплітудами потрібно замінити інтегралом

$$\boxed{X(t) = m_X + \int_0^{+\infty} (U(\omega)\cos\omega t + V(\omega)\sin\omega t)\, d\omega}. \tag{4.12}$$

У формулі (4.12) випадкові амплітуди $U(\omega)$ і $V(\omega)$, які залежать від кругової частоти ω, є центрованими

($M(U(\omega))=M(V(\omega))=0$) і некорельованими випадковими величинами при будь-яких різних частотах ($M(U(\omega_1)\cdot U(\omega_2))=$ $=M(V(\omega_1)\cdot V(\omega_2))=M(U(\omega_1)\cdot V(\omega_2))=0$, $\omega_1\neq\omega_2$). При цьому дисперсії випадкових амплітуд є нескінченними ($DU(\omega))=D(V(\omega)) = +\infty$).

Кореляційна функція $k_X(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу з неперервним спектром є неперіодичною функцією. Якщо інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\left|k_X(\tau)\right|d\tau$ збігається, то її можна подати у вигляді

$$\boxed{k_X(\tau)=\int\limits_0^{+\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega.} \tag{4.13}$$

Невід'ємна функція частоти $S_X(\omega)$, яка називається **спектральною щільністю** процесу, визначається формулою

$$\boxed{S_X(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} k_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau\,.} \tag{4.14}$$

Представлення (4.13) і (4.14) прийнято називати формулами Н. Вінера–А. Хінчина. Підставивши у формулу (4.13) $\tau=0$, одержимо рівність

$$\boxed{D_X = k_X(0) = \int\limits_0^{+\infty} S_X(\omega)\,d\omega\,.} \tag{4.15}$$

У тому випадку, коли процес $X(t)$ описує флуктуації електричної напруги, його дисперсія пропорційна середній потужності цього процесу. Тому з рівності (4.15) випливає, що величина $S_X(\omega_0)\cdot\Delta\omega$ характеризує частину середньої потужності, яка припадає на частку тих випадкових гармонік із формули (4.12), частоти яких розташовані в інтервалі від ω_0 до $\omega_0+\Delta\omega$. Це пояснює назву спектральна щільність. При цьому розмірність спектральної щільності $S_X(\omega)$ є такою: В^{2}с.

При розв'язанні багатьох задач спектральна щільність виявляється більш зручною характеристикою випадкового процесу, ніж кореляційна функція. Величина

$$\Delta\omega_{еф}=\frac{\int\limits_{0}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega}{\max\limits_{(\omega)}S_X(\omega)}=\frac{D_X}{\max\limits_{(\omega)}S_X(\omega)}$$

називається **ефективною шириною** спектра. Чим більша величина $\Delta\omega_{еф}$ (чим ширший діапазон частот випадкових гармонік, необхідних для формування випадкового процесу), тим менший час кореляції $\tau_{кор}$ (тим слабше зв‘язані між собою перерізи процесу) і навпаки.

Приклад 16. Знайти кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, спектральна щільність якого має вигляд

$$S_X(\omega)=\begin{cases}S_0 & \text{при} \quad 0\le\omega\le\omega_0,\\ 0 & \text{при} \quad \omega>\omega_0.\end{cases} \qquad (\omega_0>0).$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.13):

$$k_X(\tau)=\int\limits_0^{+\infty}S(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega=\int\limits_0^{\omega_0}S_0\cos\omega\tau\,d\omega==S_0\cdot\left.\frac{\sin\omega\tau}{\tau}\right|_0^{\omega_0}=S_0\cdot\frac{\sin\omega_0\tau}{\tau}.$$

Графіки кореляційної функції та спектральної щільності наведені на рис.4.15. Видно, що зі збільшенням ω_0 перший графік стає "вузьким", а другий – "широким" і навпаки.

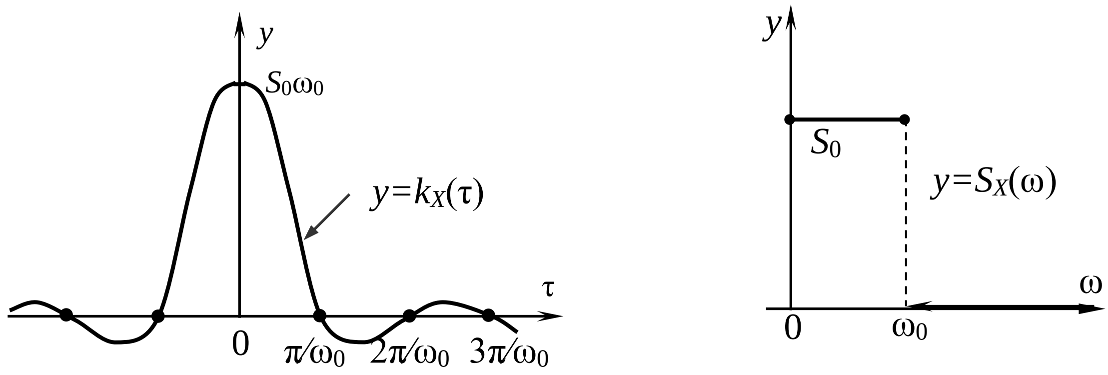


Рис. 4.15

Білим шумом інтенсивністю S_0 називається стаціонарний випадковий процес, у якого спектральна щільність дорівнює S_0 при всіх частотах.

Час кореляції цього процесу дорівнює нулю і, отже, є відсутнім імовірнісний зв'язок між його як завгодно близькими перерізами. Білий шум є ідеалізованим випадковим процесом, оскільки його середня потужність на підставі формули (4.15) нескінченна. Процес, розглянутий у прикладі 16, називається **низькочастотним білим шумом**.

Приклад 17. Знайти спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, кореляційна функція якого $k_X(\tau) = D_X \cdot e^{-a|\tau|}$ $(a>0)$.

Розв'язання. За формулою (4.14) маємо

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} D_X e^{-a|\tau|}\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{2D_X}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-a\tau}\cos\omega\tau\, d\tau \ .$$

Останній невласний інтеграл обчислимо шляхом інтегрування частинами:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-a\tau}\cos\omega\tau d\tau = -\frac{e^{-a\tau}}{a}\cos\omega\tau\Big|_0^{+\infty} - \frac{\omega}{a}\int_0^{+\infty} e^{-a\tau}\sin\omega\tau d\tau =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{\omega}{a}\int_0^{+\infty} e^{-a\tau}\sin\omega\tau d\tau \ ,$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-a\tau}\sin\omega\tau d\tau = -\frac{e^{-a\tau}}{a}\sin\omega\tau\Big|_0^{+\infty} + \frac{\omega}{a}\int_0^{+\infty} e^{-a\tau}\cos\omega\tau d\tau = \frac{\omega}{a} I_1 \ .$$

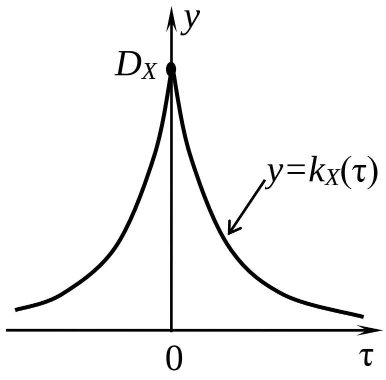
Таким чином, отримали систему рівнянь для обчислення інтегралів I_1 і I_2: $\begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{a} - \dfrac{\omega}{a} I_2 \ , \\ I_2 = \dfrac{\omega}{a} I_1 \ . \end{cases}$ Звідси випливає, що $I_1 = \dfrac{a}{a^2+\omega^2}$, $I_2 = \dfrac{\omega}{a^2+\omega^2}$.

Отже, спектральна щільність випадкового процесу $X(t)$ дорівнює $S_X(\omega) = \dfrac{2D_X \cdot a}{\pi(a^2+\omega^2)}$.

Час кореляції і ефективна ширина спектра процесу є такими:

$$\Delta\omega_{\text{еф}} = \frac{D_X \cdot \pi a}{2\cdot D_X} = \frac{\pi a}{2}, \quad \tau_{\text{кор}} = \frac{2}{a}.$$

Чим більше a, тим "вужчий" графік кореляційної функції і "ширший" графік спектральної щільності (рис. 4.16).



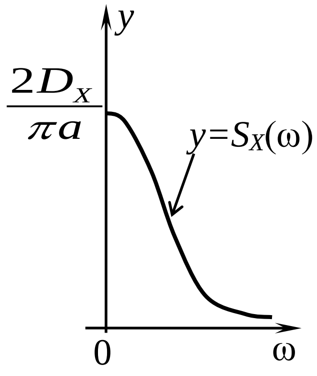


Рис. 4.16

Якщо підставити аналітичні вирази для кореляційної функції і спектральної щільності розглядуваного випадкового процесу у формулу (4.13), то одержимо значення такого важливого інтегралу:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega\tau}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\tau|} \quad (a > 0). \qquad (4.16)$$

Приклад 18. Знайти спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, кореляційна функція якого $k_X(\tau) = D_X \cdot e^{-a|\tau|} \cos\omega_0\tau$, ($a$>0, ω_0>0).

Розв'язання. За формулою (4.14) маємо

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} D_X e^{-a|\tau|} \cos\omega_0\tau \cdot \cos\omega\tau \, d\tau = \frac{2D_X}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a\tau} \cos\omega_0\tau \cdot \cos\omega\tau \, d\tau \ .$$

Застосовуючи формулу тригонометрії для добутку косинусів, одержимо

$$S_X(\omega) = \frac{D_X}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega + \omega_0)\tau \, d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega - \omega_0)\tau \, d\tau \right) .$$

Інтеграли у дужках дорівнюють інтегралу I_1 з попереднього прикладу, якщо відповідно замінити ω на $\omega+\omega_0$ і на $\omega-\omega_0$. Отже отримаємо

$$S_X(\omega)=\frac{D_X}{\pi}\left(\frac{a}{(\omega+\omega_0)^2+a^2}+\frac{a}{(\omega-\omega_0)^2+a^2}\right)=$$
$$=\frac{2D_X a}{\pi}\cdot\frac{\omega^2+a^2+\omega_0^2}{\omega^4+2(a^2-\omega_0^2)\omega^2+(a^2+\omega_0^2)^2}.$$

Аналогічно можна знайти, якщо врахувати значення інтеграла I_2 з попереднього прикладу, спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, кореляційна функція якого

$$k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-a|\tau|}\cdot(\cos\omega_0\tau+c\sin\omega_0|\tau|)\quad (a>0,\ \omega_0>0,\ |c|\le\frac{a}{\omega_0}).$$

Зокрема для важливого для застосувань випадку $c=\dfrac{a}{\omega_0}$ отримаємо

$$S_X(\omega)=\frac{4D_X a}{\pi}\cdot\frac{a^2+\omega_0^2}{\omega^4+2(a^2-\omega_0^2)\omega^2+(a^2+\omega_0^2)^2}.$$

4.3.3. Проходження стаціонарного випадкового процесу через лінійну динамічну систему

З математичної точки зору радіотехнічні пристрої (резистори, конденсатори, котушки та їх комбінації) являють собою систему, яка перетворює сигнал $X(t)$ на вході у сигнал $Y(t)$ на виході: $X(t)\to Y(t)$.

Розглянемо лінійну динамічну систему другого порядку, яка описується лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_2\frac{d^2x}{dt^2}+b_1\frac{dx}{dt}+b_0x, \qquad (4.17)$$

де $x(t)$ – реалізація вхідного випадкового процесу $X(t)$;

$y(t)$ – реалізація випадкового процесу $Y(t)$ на виході системи.

Передавальною функцією $W(p)$ системи, яка описується рівнянням (4.17), називається функція комплексної змінної p

$$W(p)=\frac{b_2p^2+b_1p+b_0}{a_2p^2+a_1p+a_0}. \qquad (4.18)$$

Лінійна динамічна система називається **стійкою**, якщо корені знаменника передавальної функції $W(p)$ мають від'ємні дійсні частини.

Якщо на вхід стійкої лінійної динамічної системи поступає стаціонарний випадковий процес $X(t)$, то на виході також буде стаціонарний випадковий процес $Y(t)$. При цьому виконуються співвідношення

$$m_Y=W(0)\cdot m_X, \qquad (4.19)$$

$$S_Y(\omega)=\left|W(i\omega)\right|^2\cdot S_X(\omega). \qquad (4.20)$$

Формула (4.20) показує, що залежно від виду лінійної системи розподіл середньої потужності за частотами в процесі на виході може суттєво відрізнятись від розподілу середньої потужності на вході. Зрозуміло, що при цьому має виконуватися умова $\int\limits_0^{+\infty} S_Y(\omega)d\omega<+\infty$.

Наведемо схему, на якій вказані формули для знаходження кореляційної функції процесу на виході за відомою кореляційною функцією процесу на вході.

$$\begin{tikzcd}
D_X & k_X(\tau) \arrow[l] \arrow[d, "(4.14)"] & & k_Y(\tau) \arrow[r] & D_Y \\
& S_X(\omega) \arrow[ul, "(4.15)"] \arrow[rr, "(4.20)"] & & S_Y(\omega) \arrow[u, "(4.13)"] \arrow[ur, "(4.15)"'] &
\end{tikzcd}$$

Стаціонарний процес Гаусса на вході перетворюється стійкою лінійною системою в стаціонарний процес Гаусса на виході. При цьому, якщо система описується рівнянням $y(t)=\frac{dx}{dt}$, процеси $Y(t)$ та $X(t)$ є незалежними в один і той самий момент часу.

Приклад 19. Напруга на вході *CR*-фільтра (рис. 4.17) є стаціонарним випадковим процесом, кореляційна функція якого $k_{\text{вх}}(\tau)=\sigma^2\cdot e^{-a|\tau|}$ $(a>0)$. Знайти кореляційну функцію напруги на виході.

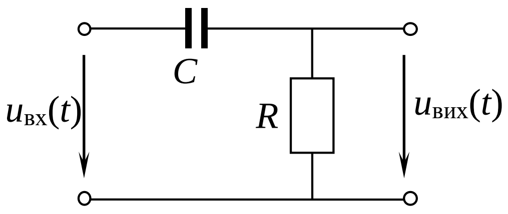


Рис. 4.17

Розв'язання. Позначимо напругу на вході фільтра $u_{вх}(t)$ через $X(t)$, а напругу $u_{вих}(t)$ на виході через $Y(t)$. Із законів Кірхгофа випливає, що CR-фільтр описується рівнянням $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{RC}y=\dfrac{dx}{dt}$.

Знайдемо, використавши формулу (4.18), передавальну функцію фільтра:

$$W(p)=\frac{p}{p+1/RC}.$$

Єдиний корінь знаменника передавальної функції $p=-1/RC$ має від'ємну дійсну частину. Тому CR-фільтр є стійким. Підставивши $p=i\omega$ у $W(p)$, одержимо комплексний коефіцієнт передачі CR-фільтра

$$W(i\omega)=\frac{i\omega}{i\omega+1/RC}.$$

Оскільки, на підставі результату прикладу 17 п. 4.3.2

$$S_{вх}(\omega)=2\frac{\sigma^2 a}{\pi(\omega^2+a^2)},$$

то з урахуванням формули (4.20) одержимо

$$S_Y(\omega)=\left|\frac{i\omega}{i\omega+b}\right|^2\cdot\frac{2\sigma^2 a}{\pi(\omega^2+a^2)}=2\frac{\sigma^2 a}{\pi}\cdot\frac{\omega^2}{(\omega^2+a^2)\left(\omega^2+b^2\right)}=$$

$$=2\frac{\sigma^2 a}{\pi\left(b^2-a^2\right)}\cdot\left(b^2\cdot\frac{1}{\omega^2+b^2}-a^2\cdot\frac{1}{\omega^2+a^2}\right),\text{ де } b=1/RC.$$

Тепер, використавши формули (4.13) і (4.16), знайдемо:

$$k_Y(\tau)=\frac{\sigma^2 a}{b^2-a^2}\cdot\left(b\cdot e^{-b|\tau|}-a\cdot e^{-a|\tau|}\right).$$

Оскільки $D_Y = k_Y(0) = \dfrac{\sigma^2 a}{1/_{RC} + a}$, то відношення дисперсії напруги на виході $u_{вих}(t)$ до дисперсії напруги на вході $u_{вх}(t)$ дорівнює $\dfrac{a}{1/_{RC} + a}$.

Приклад 20. Напруга на вході *RC*-фільтра є нормальним білим шумом, спектральна щільність якого дорівнює RC/π $В^2 \cdot с$ і $m_X = 1\,В$ (на рис. 4.18 наведена реалізація напруги на вході). Знайти: 1) одновимірну щільність розподілу ймовірностей напруги на виході; 2) щільність розподілу ймовірностей вектора $(u_{вих}(t); u_{вих}(t+RC))$.

Р*озв'язання*: 1) оскільки *RC*-фільтр описується рівнянням

$$RC\frac{dy}{dt} + y = x,$$

то передавальна функція *RC*-фільтра:

$$W(p) = \frac{1}{RCp + 1}.$$

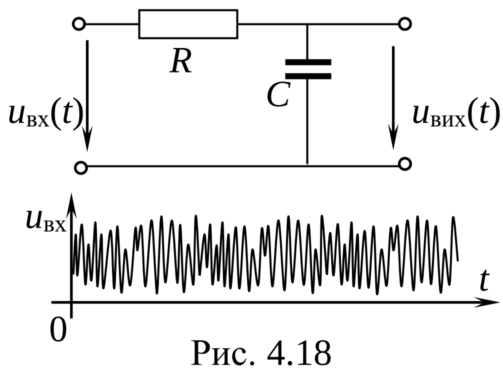


Рис. 4.18

Фільтр є стійким, тому що єдиний корінь $p = -1/RC$ знаменника передавальної функції має від'ємну дійсну частину. Оскільки $|W(i\omega)|^2 = \dfrac{1}{R^2C^2\omega^2 + 1}$, то *RC*-фільтр є фільтром низьких частот. З формули (4.20) одержимо

$$S_Y(\omega) = \frac{b}{\pi(\omega^2 + b^2)}.$$

Використавши формули (4.13) і (4.16), знайдемо:

$$k_Y(\tau) = \int_0^{+\infty} \frac{b}{\pi(\omega^2 + b^2)} \cdot \cos\omega\tau\, d\omega = \frac{1}{2}e^{-b|\tau|}.$$

Отже, *RC*-фільтр пропускає лише скінченну частину потужності процесу на вході, а саме $D_{вих} = k_{вих}(0) = 0.5$ $В^2$. Оскільки напруга на вході $u_{вх}(t)$ є процесом Гаусса, то і процес на виході $u_{вих}(t)$ буде процесом Гаусса. Через те, що на підставі формули (4.19) $m_Y = W(0)\cdot m_X = 1$ В, то

$$p_Y(y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-1)^2} \text{ В}^{-1},$$

2) знайдемо кореляційну матрицю перерізів ($u_{вих}(t)$; $u_{вих}(t+RC)$) напругі на виході ($\tau = RC$):

$$K = \begin{Vmatrix} k(0) & k(RC) \\ k(RC) & k(0) \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & e^{-1} \\ e^{-1} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже, щільність розподілу ймовірностей вектора ($u_{вих}(t)$; $u_{вих}(t+RC)$) має вигляд (формула (2.33):

$$p_{(Y(t);\,Y(t+RC))}(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-e^{-2}}} e^{-H} \;\; B^{-2},$$

$$H = \frac{1}{(1-e^{-2})}\Big((y_1-1)^2 + (y_2-1)^2 - 2e^{-1}(y_1-1)(y_2-1)\Big).$$

Задачі до розділу

4.1. Випадкові процеси

4.1. ВВ X має розподіл $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = 1/4$, $P\{X=2\} = 1/3$, $P\{X=3\} = 1/6$. На відрізку [0;1] розглядують такі ВП: $X_1(t) = X\cdot t$, $X_2(t) = X\cdot t^2, X_3(t) = X^2\cdot t, X_4(t) = X\cdot cos\,\pi t$. Вказати декілька реалізацій цих процесів. Знайти ймовірність подій: а) $\{|X_1(1/2)| = 1/2\}$; б) $\{X_2(\sqrt{2}/2) = 1\}$; в) $\{X_3(1) = 1\}$; г) $\{X_4(1/2) = 0\}$.

4.2. ВВ X рівномірно розподілена на відрізку [0;1]. Розглянемо процес $X(t) = X\cdot t, t\in[0;2]$. Знайти ймовірності подій: 1) $\{1/6 < X(1) < 1/3\}$; 2) $\{X(1/2) < 1/4\}$; 3) $\{X(2) > 2/3\}$.

4.3. Випадкові величини X_1 та X_2 незалежні та мають розподіли:

X_1	-2	-1	0	1	2
P	1/4	1/4	1/6	1/6	1/6

X_2	-2	-1	0	1
P	1/2	1/4	1/8	1/8

На відрізку [0;1] розглядають процес

$$X(t)=\begin{cases} X_1, & при\ t\in[0;1/2), \\ X_2, & при\ t\in[1/2;1]. \end{cases}$$

1) Побудувати графік якої-небудь реалізації процесу.
2) Знайти ймовірність подій: а) $\{-1/2 < X(t) < 3/2\}$;
б) $\{-1 \le X(t)\}$; в) $\{X(t) \le 0\}$.

4.4. Розглянемо процес $X(t)=\begin{cases} X_1 & при\ t\in(-\infty;t_1), \\ X_2 & при\ t\in[t_1;t_2), \\ X_3 & при\ t\in[t_2;+\infty), \end{cases}$ де X_1, X_2, X_3 - незалежні ВВ, що мають нормальний розподіл $N(1;4)$ $(t_1 < t_2)$:
1) побудувати графік якої-небудь реалізації процесу;
2) знайти ймовірність події $\{1/2 < X(t) < 3/2\}$.

4.5. Знайти м.с., дисперсію та кореляційну функцію процесу $X(t)= X \cdot f_1(t)+ f_2(t)$, де $f_1(t)$ та $f_2(t)$ - невипадкові функції, X - ВВ з характеристиками MX та DX.

4.6. Використовуючи результати задачі 4.5, знайти основні характеристики процесів:

а) $X_1(t)=X\cdot t+2sint$, де ВВ X розподілена за нормальним законом $N(a;\sigma^2)$;

б) $X_2(t)=X\cdot sint+t$, де ВВ X рівномірно розподілена на відрізку [0;2];

в) $X_3(t)=e^{-|t|}\left(-2X^2+3\right)$, де ВВ X має в проміжку [0;1] розподіл $p_X(x)=\dfrac{4}{\pi(1+x^2)}$.

Знайти одновимірну щільність імовірності $p_1(x;t)$ процесу $X_1(t)$.

4.7. Знайти кореляційну функцію та дисперсію процесів:

а) $X_1(t)=X_1\cdot cost+X_2\cdot sint+e^t$; б) $X_2(t)=X_1\cdot t+X_2+t^2$, де X_1 та X_2 - незалежні ВВ, які розподілені відповідно за законами $N\left(a_1;\sigma_1^2\right)$ та $N\left(a_2;\sigma_2^2\right)$.

Знайти одновимірну щільність імовірності процесу $X_2(t)$.

4.8. Знайти кореляційну функцію та дисперсію процесів:

а) $Y(t)=(2+cost)\cdot X(t)+t$, якщо $K_X(t_1,t_2)=e^{-|t_1-t_2|}$;

б) $Y(t)=t^2\cdot X(t)+sint$, якщо $K_X(t_1,t_2)=\dfrac{sin(t_1-t_2)}{t_1-t_2}$.

4.9. Знайти кореляційну функцію стаціонарного ВП, спектральна щільність якого дорівнює

$$S_X(\omega)=\begin{cases} S_0, & при\ \ \omega\in[a;a+b], \\ 0, & при\ \ \omega\notin[a;a+b] \end{cases}\quad (a,b>0)\ .$$

4.10. Знайти кореляційну функцію стаціонарного ВП, спектральна щільність якого дорівнює:

а) $S_X(\omega)=\dfrac{3}{\pi(\omega^2+9)}$; б) $S_X(\omega)=\dfrac{3}{\pi(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$;

в) $S_X(\omega)=\dfrac{2}{\pi(\omega^2+1)^2}$; г) $S_X(\omega)=e^{-\omega}$.

4.11. Знайти спектральну щільність стаціонарного ВП, кореляційна функція якого дорівнює $(a>0, b>0)$:

1) $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-a|\tau|}\left(cosb\tau+\dfrac{a}{b}sinb|\tau|\right)$(коливальний контур);

2) $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-a|\tau|}\left(1+a|\tau|\right)$ (два фільтри низьких частот);

3) $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-a|\tau|}\left(1+a|\tau|+\dfrac{a^2\tau^2}{3}\right)$ (три фільтри низьких частот);

4) $k_X(\tau)=\begin{cases} D_X\cdot\left(1-|\tau|\right)cos\dfrac{\pi\tau}{2}, & при\ \ |\tau|\le 1, \\ 0, & при\ \ |\tau|>1; \end{cases}$

5) $k_X(\tau)=\begin{cases} D_X\cdot\left(1-\dfrac{|\tau|}{a}\right), & при\ \ |\tau|\le a, \\ 0, & при\ \ |\tau|>a. \end{cases}$

4.12. Стаціонарний ВП $X(t)$надходить на вхід ідеального смугового фільтра (ідеального радіофільтра) з комплексним коефіцієнтом передачі

$$W(i\omega)=\begin{cases} 1, & при\ \ \omega_0\le\omega\le\omega_1, \\ 0, & при\ \ \omega<\omega_0\ \ або\ \ \omega>\omega_1. \end{cases}\quad \left(0<\omega_0<\omega_1\right).$$

Знайти дисперсію процесу на виході фільтра, якщо:

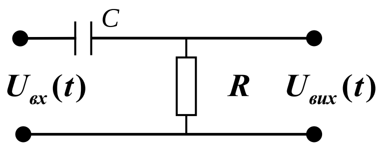
1) $S_X(\omega)=\dfrac{1}{\pi}$(білий шум); 2) $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-a|\tau|}(a>0)$;

3) $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-|\tau|}\cos\tau$; 4) $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-|\tau|}\left(\cos\tau+\sin|\tau|\right)$.

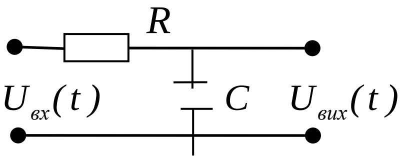
4.13. Знайти комплексний коефіцієнт передачі $W(i\omega)$ лінійної системи, що описується рівнянням:

а) $\dfrac{dy}{dt}+2y=3x$; б) $y=2\dfrac{dx}{dt}$; в) $\dfrac{dy}{dt}+3y=\dfrac{dx}{dt}$; г) $\dfrac{dy}{dt}+5y=8x+3\dfrac{dx}{dt}$.

4.14. Знайти комплексний коефіцієнт передачі $W(i\omega)$ систем:



1) *CR*-фільтр (ланцюг, що диференцює);



2) *RC*-фільтр (ланцюг, що інтегрує).

4.15. Напруга $X(t)$ на вході *CR*-фільтра (задача 4.14 1)) є стаціонарним ВП. Знайти кореляційну функцію і дисперсію напруги $Y(t)$ на виході фільтра, якщо $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-a|\tau|}\ (a>0)$.

4.16. Напруга $X(t)$ на вході *RC*-фільтра (задача 4.14, 2)) є стаціонарним ВП. Знайти кореляційну функцію і дисперсію напруги $Y(t)$ на виході фільтра, якщо:

1) $S_X(\omega)=\dfrac{1}{\pi}$; 2) $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-a|\tau|}(a>0)$.

4.17. На вхід лінійної системи, яка описується рівнянням

$$\frac{dy}{dt}+ay=b\frac{dx}{dt}+cx\ (a,b,c>0),$$

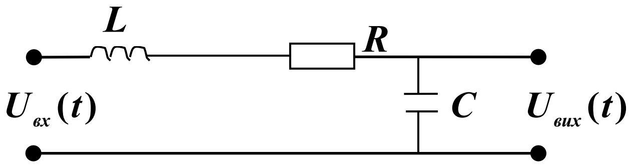
надходить стаціонарний ВП з м.с. m_X і кореляційною функцією $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-A|\tau|}\ (A>0)$. Знайти характеристики процесу на виході. Порівняти отриманий результат з результатами задач 4.15, 4.16.

4.18. На вхід системи, що описується рівнянням $\dfrac{dy}{dt}+\sqrt{2}\,y=x$, надходить стаціонарний ВП з характеристиками $m_X=4$ та $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-|\tau|}\cos\tau$. Знайти основні характеристики процесу на виході системи.

4.19. На вхід системи, що описується рівнянням $\frac{d\,y}{d\,t}+\sqrt{5}\,y=\frac{d\,x}{d\,t}+x$, надходить стаціонарний ВП з характеристиками $m_X=-2$ та $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-2|\tau|}cos\,\tau$. Знайти: 1) основні характеристики процесу $Y(t)$ на виході системи; 2) кореляційну матрицю вектора $\left(Y(t);Y\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

4.20. Стаціонарний ВП з характеристиками $m_X=4$ та $k_X(\tau)=D_X\cdot e^{-|\tau|}\left(1+|\tau|\right)$ надходить на вхід лінійної системи, яка описується рівнянням: 1) $y=\frac{dx}{dt}$; 2) $\frac{d\,y}{d\,t}+3y=\frac{d\,x}{d\,t}$; 3) $\frac{d^2y}{dt^2}+7\frac{d\,y}{d\,t}+12y=\frac{d\,x}{d\,t}+3x$. Знайти характеристики стаціонарного процесу на виході системи.

4.21. Знайти комплексний коефіцієнт передачі $W(i\omega)$ контуру, що утворений послідовно з'єднаними котушкою індуктивності *L*, конденсатором ємності *C* та резистором опору *R*.



Який вигляд має комплексний коефіцієнт передачі, якщо $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$?

4.22. Напруга на вході коливального контуру (задача 4.21) є білим шумом зі спектральною щільністю $S_X(\omega)=\frac{1}{\pi}$. Знайти при $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$: 1) кореляційну функцію і дисперсію напруги $Y(t)$ на виході контуру (використати результати задачі 4.11.2)); 2) кореляційну матрицю вектора $\left(Y(t);Y\left(t+\sqrt{LC}\right)\right)$.

4.23. Нехай $X(t)$ - нормальний стаціонарний ВП. Знайти щільність розподілу ВВ $\left(X(t_1);X(t_2)\right)$ (двовимірну щільність процесу), якщо:

а) $m_X=2,\ k_X(\tau)=3e^{-2|\tau|}, t_1=2, t_2=2.5$;

б) $m_X=-1,\ k_X(\tau)=2e^{-|\tau|}\left(1+|\tau|\right), t_1=0, t_2=2$;

в) $m_X = 0,\ k_X(\tau) = 4e^{-|\tau|}\left(cos\,2\tau + \frac{1}{2}\cdot sin\,2|\tau|\right), t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{4}$.

4.24. Знайти одновимірну (миттєву) щільність імовірності процесу на виході системи, що описана в задачі: 1) 4.18, 2) 4.19, 3) 4.20, додатково припускаючи, що процес на вході є нормальним.

4.25. Використовуючи результати задачі 4.20,а та додатково припускаючи, що ВП на вході є нормальним, знайти двовимірну щільність сумісного розподілу нормального стаціонарного процесу $X(t)$ і його похідної – процесу $Y(t)$ - у співпадаючі моменти часу.

4.26. На вхід системи, що описується рівнянням $y = \frac{dx}{dt}$, надходить нормальний стаціонарний процес з характеристиками:

а) $m_X = 2,\ k_X(\tau) = D_X e^{-|\tau|}\left(cos\,\tau + sin|\tau|\right)$;

б) $m_X = -1,\ k_X(\tau) = D_X e^{-|\tau|}\left(1 + |\tau| + \frac{1}{3}|\tau|^2\right)$.

Знайти сумісну щільність імовірності ВП $X(t)$ (процес на вході системи) і його похідної (процес $Y(t)$ на виході системи) у співпадаючі моменти часу.

4.27. У задачі 4.19, припускаючи додатково, що процес $X(t)$ на вході є нормальним, знайти щільність розподілу вектора $\left(Y(t); Y(t+\pi)\right)$.

Відповіді

4.1. а)$\frac{1}{2}$; б)$\frac{1}{3}$; в)$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$; г)1. **4.2.** а)$\frac{1}{6}$; б)$\frac{1}{2}$; в)$\frac{2}{3}$. **4.3.** а)$\frac{1}{12}$; б)$\frac{3}{8}$; в)$\frac{7}{12}$. **4.4.** 0.008. **4.5.** $m_X(t) = MX \cdot f_1(t) + f_2(t)$, $D_X(t) = DX \cdot f_1^2(t)$, $K_X(t_1,t_2) = DX \cdot f_1(t_1)\cdot f_1(t_2)$. **4.6.** а)$m_{X_1}(t) = a\cdot t + 2\,sint$, $D_{X_1}(t) = \sigma^2 t^2$, $K_{X_1}(t_1,t_2) = t_1\cdot t_2\sigma^2$; б) $m_{X_2}(t) = sint + t$, $D_{X_2}(t) = \frac{1}{3}sin^2 t$, $K_{X_2}(t_1,t_2) = \frac{1}{3}sint_1\cdot sint_2$, в) $m_{X_3}(t) = \frac{5\pi - 8}{\pi}e^{-|t|}$, $D_{X_3}(t) = = \frac{4}{3\pi^2}\left(16\pi - 48\right)e^{-2|t|}$, $K_{X_3}(t_1,t_2) = \frac{4}{3\pi^2}\left(16\pi - 48\right)e^{-|t_1|-|t_2|}$, $p_1(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma|t|}e^{-H}$, $H = \frac{\left(x - at - 2\,sint\right)^2}{2\sigma^2 t^2}$.

4.7. а) $K_{X_1}(t_1,t_2)=\sigma_1^2 cos t_1\cdot cos t_2+\sigma_2^2 sin t_1\cdot sin t_2$,

$D_{X_1}(t)==\sigma_1^2 cos^2 t+\sigma_2^2 sin^2 t$; б) $K_{X_2}(t_1,t_2)=\sigma_1^2 t_1\cdot t_2+\sigma_2^2$, $D_{X_2}(t)=\sigma_1^2 t^2+\sigma_2^2$,

$p_1(x;t)==\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2 t^2+\sigma_2^2\right)}}\,e^{-H}$, $H=\dfrac{\left(x-a_1 t-a_2 t^2\right)^2}{2\left(\sigma_1^2 t^2+\sigma_2^2\right)}$. **4.8.** а) $D_Y(t)=\left(2+cost\right)^2$,

$K_Y(t_1,t_2)=(2+cost_1)\cdot(2+cost_2)e^{-|t_1-t_2|}$; б) $K_Y(t_1,t_2)=t_1^2\cdot t_2^2\,\dfrac{sin(t_1-t_2)}{t_1-t_2}$,

$D_Y(t)=t^4$. **4.9.** $k_X(\tau)=\dfrac{2S_0}{\tau}cos\left(a+\dfrac{b}{2}\right)\tau\cdot sin\dfrac{b}{2}\tau$. **4.10.** а) $\dfrac{1}{2}e^{-3|\tau|}$;

б) $\dfrac{3}{16}\left(e^{-|\tau|}-\dfrac{1}{3}e^{-3|\tau|}\right)$; в) $\dfrac{1}{2}e^{-|\tau|}\left(1+|\tau|\right)$; г) $\dfrac{1}{1+\tau^2}$.

4.11. 1) $S_X(\omega)=\dfrac{4a\cdot D_X}{\pi}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{((\omega-b)^2+a^2)\cdot((\omega+b)^2+a^2)}$;

2) $S_X(\omega)=\dfrac{4a^3\cdot D_X}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\left(\omega^2+a^2\right)^2}$; 3) $S_X(\omega)=\dfrac{16a^5\cdot D_X}{3\pi}\cdot\dfrac{1}{\left(\omega^2+a^2\right)^3}$;

4) $S_X(\omega)==2D_X\,\dfrac{\omega^2-\pi\omega sin\,\omega+\pi^2/4}{\pi\left(\omega^2-\pi^2/4\right)^2}$; 5) $S_X(\omega)=\dfrac{4D_X\,sin^2\dfrac{\omega a}{2}}{\pi a\omega^2}$.

4.12. 1) $D_Y=\dfrac{\omega_1-\omega_0}{\pi}$; 2) $D_Y=\dfrac{2D_X}{\pi}\left(arctg\dfrac{\omega_1}{a}-arctg\dfrac{\omega_0}{a}\right)$;

3) $D_Y=\dfrac{D_X}{\pi}\left(arctg(\omega_1+1)+arctg(\omega_1-1)--arctg(\omega_0+1)-arctg(\omega_0+1)\right)$;

4) $D_Y=\dfrac{D_X}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}ln\dfrac{\left(\left(\omega_1+1\right)^2+1\right)\cdot\left(\left(\omega_0-1\right)^2+1\right)}{\left(\left(\omega_0+1\right)^2+1\right)\cdot\left(\left(\omega_1-1\right)^2+1\right)}+\right.$

$\left.+arctg\left(\omega_1+1\right)-arctg\left(\omega_0+1\right)+arctg\left(\omega_1-1\right)-arctg\left(\omega_0-1\right)\right)$. **4.13** а) $\dfrac{3}{i\omega+2}$;

б) $2i\varpi$; в) $\dfrac{i\omega}{i\omega+3}$; г) $\dfrac{3i\omega+8}{i\omega+5}$. **4.14.** 1) $\dfrac{iRC\omega}{iRC\omega+1}$; 2) $\dfrac{1}{iRC\omega+1}$.

4.15. $k_Y(\tau)=\dfrac{aR^2C^2D_X}{1-a^2R^2C^2}\cdot\left(-ae^{-a|\tau|}+\dfrac{1}{RC}e\;-\dfrac{|\tau|}{RC}\right)$.

4.16. 1) $k_Y(\tau)=\dfrac{1}{2RC}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$; 2) $k_Y(\tau)=\dfrac{aR^2C^2D_X}{1-a^2R^2C^2}\cdot\left(\dfrac{1}{aR^2C^2}e^{-a|\tau|}-\dfrac{1}{RC}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}\right)$.

4.17. $m_Y=\dfrac{c}{a}m_X$, $k_Y(\tau)=\dfrac{1}{a^2-A^2}\times\left(\left(c^2-A^2b^2\right)e^{-A|\tau|}+\dfrac{A}{a}\left(a^2b^2-c^2\right)e^{-a|\tau|}\right)$.

4.18. $m_Y=2\sqrt{2}$, $D_Y=\dfrac{D_X}{4}$, $k_Y(\tau)==\dfrac{D_X}{4}e^{-|\tau|}\left(cos\,\tau+sin|\tau|\right)$.

4.19. 1) $m_Y=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $k_Y(\tau)=\dfrac{D_X}{5}e^{-2|\tau|}\left(3cos\,\tau-4sin|\tau|\right)$, $D_Y=\dfrac{3D_X}{5}$;

2) $K=\dfrac{3D_X}{5}\begin{Vmatrix}1 & -\dfrac{4}{3}e^{-\pi}\\ -\dfrac{4}{3}e^{-\pi} & 1\end{Vmatrix}$. **4.20.** 1) $m_Y=0$, $k_Y(\tau)=D_Xe^{-|\tau|}\left(1-|\tau|\right)$,

$D_Y=D_X$; 2) $m_Y=0$, $k_Y(\tau)=\dfrac{D_X}{32}\left(5e^{-|\tau|}-4|\tau|e^{-|\tau|}-3|\tau|e^{-3|\tau|}\right)$, $D_Y=\dfrac{D_X}{16}$;

3) $m_Y=1$, $k_Y(\tau)=\dfrac{D_X}{450}\left(e^{-4|\tau|}+26e^{-|\tau|}+30|\tau|e^{-|\tau|}\right)$, $D_Y=\dfrac{3D_X}{50}$.

4.21. $\dfrac{1}{-\omega^2LC+i\omega RC+1}$, $\dfrac{1}{\left(i\omega\sqrt{LC}+1\right)^2}$. **4.22.** а) $\dfrac{1}{4\sqrt{LC}}e^{-\frac{|\tau|}{\sqrt{LC}}}\cdot\left(1+\dfrac{|\tau|}{\sqrt{LC}}\right)$,

б) $K=\dfrac{1}{4\sqrt{LC}}\begin{Vmatrix}1 & 2e^{-1}\\ 2e^{-1} & 1\end{Vmatrix}$. **4.23.** а) $p_2(x,y;2,2.5)=\dfrac{1}{6\pi\sqrt{1-e^{-2}}}e^{-H}$,

$H=\dfrac{1}{6\left(1-e^{-2}\right)}\left((x-2)^2+(y-2)^2-\dfrac{2(x-2)(y-2)}{e}\right)$; б) $p_2(x,y;0,2)=$

$=\dfrac{1}{4\pi\sqrt{1-9e^{-4}}}e^{-H}$, $H=\dfrac{1}{4\left(1-9e^{-4}\right)}\left((x+1)^2+(y+1)^2-\dfrac{6(x+1)(y+1)}{e^2}\right)$;

в) $p_2\left(x,y;0,\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{8\pi\sqrt{1-\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{2}}}}e^{-H}, H=\dfrac{1}{8\left(1-\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{2}}\right)}\left(x^2+y^2-e^{-\frac{\pi}{4}}xy\right)$.

4.24. 1) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi D_X}}e^{-\frac{2\left(x-2\sqrt{2}\right)^2}{D_X}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{5}{6\pi D_X}}e^{-\frac{5\left(x+2/\sqrt{5}\right)^2}{6D_X}}$; 3а) $\sqrt{\dfrac{1}{2\pi D_X}}e^{-\frac{x^2}{2D_X}}$;

3б) $\sqrt{\dfrac{1}{2\pi D_X}}e^{-\frac{8x^2}{D_X}}$; 3в) $\dfrac{5}{\sqrt{3\pi D_X}}e^{-\frac{25(x-1)^2}{3D_X}}$. **4.25.** $\dfrac{1}{2\pi D_X}e^{-\frac{(x-4)^2+y^2}{2D_X}}$.

4.26. а) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi D_X}e^{-\frac{(x-1)^2+\frac{y^2}{2}}{2D_X}}$, б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi D_X}e^{-H}, H=\dfrac{(x+1)^2+3y^2}{2D_X}$.

4.27. $p_2(x,y;t_1,t_1+\pi)=\dfrac{5}{6\pi D_X\sqrt{1-e^{-4\pi}}}e^{-H}$,

$$H=\frac{\left(x+2\big/\sqrt{5}\right)^{2}+\left(y+2\big/\sqrt{5}\right)^{2}+2e^{-2\pi}\left(x+2\big/\sqrt{5}\right)\left(y+2\big/\sqrt{5}\right)}{\frac{6}{5}D_X\left(1-e^{-4\pi}\right)}.$$

Наведемо значення деяких інтегралів, що зустрічаються при розв'язанні задач:

1. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{cos\omega\tau}{\omega^2+a^2}d\omega=\frac{\pi}{2a}e^{-a|\tau|}.$

2. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{cos\omega\tau}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}d\omega=\frac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{e^{-a|\tau|}}{a}-\frac{e^{-b|\tau|}}{b}\right).$

3. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{cos\omega\tau}{(\omega^2+a^2)^2}d\omega=\frac{\pi}{4a^3}e^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$; $(a>0, b>0).$

4. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{cos\,\omega\tau}{(\omega^2+a^2)^3}d\omega=\frac{3\pi}{16a^5}e^{-a|\tau|}\left(1+a|\tau|+\frac{a^2\tau^2}{3}\right).$

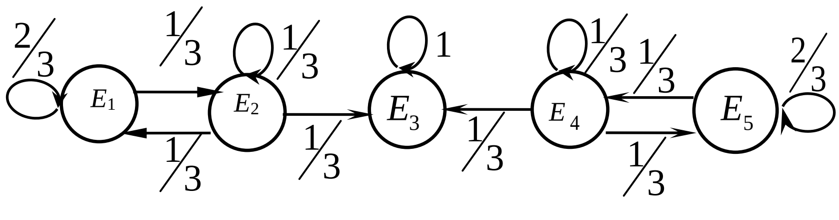
2. Ланцюги Маркова

4.28. Матриця перехідних імовірностей і початковий розподіл мають вигляд

$$\Pi=\begin{Vmatrix}0 & 1\big/2 & 1\big/2\\ 1\big/4 & 1\big/2 & 1\big/4\\ 1\big/2 & 1\big/2 & 0\end{Vmatrix},\ \vec{p}(0)=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Побудувати граф переходів. Довести ергодичність ланцюга. Знайти розподіл $\vec{p}(1)$. Знайти фінальний розподіл.

4.29. Граф переходів має вигляд



$\vec{p}(0)=\left(\frac{1}{5};\frac{1}{10};\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{3}{10}\right)$. Знайти за допомогою графа ймовірність $p_{12}(2)$. Знайти розподіл $\vec{p}(1)$.

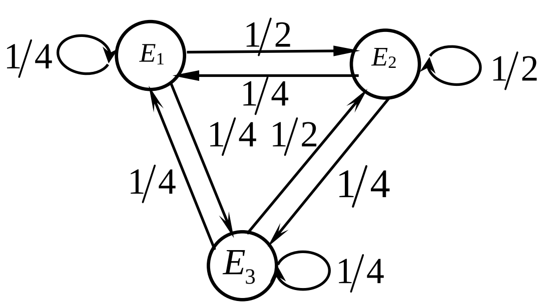
$$\Pi = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Vmatrix}$$

4.30. За заданою матрицею перехідних імовірностей побудувати граф переходів. Довести, що будь-який стан досягається з довільного стану за два кроки.

$$\Pi = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

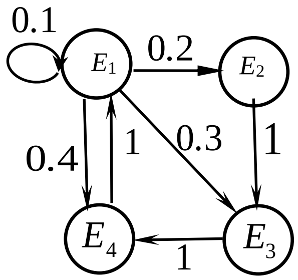
4.31. За заданою матрицею перехідних імовірностей побудувати граф переходів. Довести ергодичність підланцюга $\{E_3, E_4\}$, періодичність і нерозкладність підланцюга $\{E_1, E_2, E_5\}$.

4.32. Граф переходів має вигляд:



Скласти матрицю Π. Знайти Π^n та $\vec{p}(n)$ при довільних n і початковому розподілу $\vec{p}(0)$. Знайти фінальний розподіл.

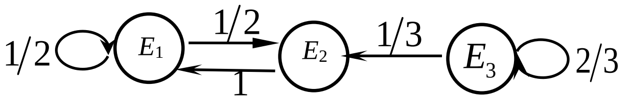
4.33. Граф переходів має вигляд:



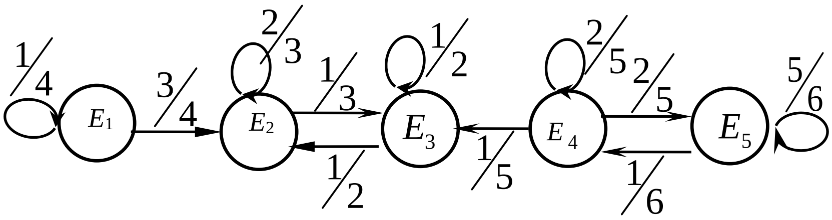
Чи є ергодичним цей ланцюг? Знайти фінальний розподіл.

4.34. Граф переходів зображено на рисунку:

а)



б)

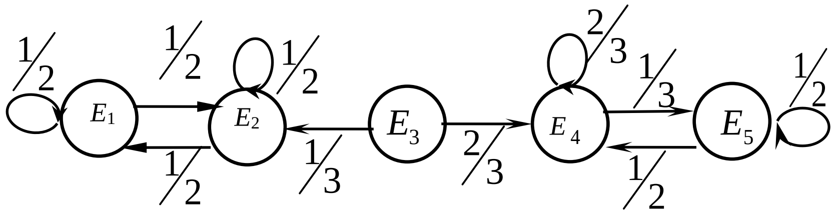


Знайти граничний розподіл $\vec{p}(\infty)$. Чому він не залежить від початкового розподілу?

4.35. Граф переходів представлено на рисунку:

а) $\vec{p}(0)=(0;0;1;0;0)$

б) $\vec{p}(0)=\left(0;0;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$



Знайти граничний розподіл при заданих $\vec{p}(0)$.

4.36. Задана матриця перехідних імовірностей ланцюга Маркова:

$$\Pi=\begin{Vmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Знайти ймовірності $P(E_i \to E_3)$, $P(E_i \to E_4)$, потрапити з початкового стану $E_i\,(i=1,2)$ до станів E_3 та E_4.

4.37. Задана матриця перехідних імовірностей ланцюга Маркова:

а) $$\Pi=\begin{Vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix};\ \text{б)}\ \Pi=\begin{Vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}.$$

1) довести неістотність станів $E_i\,(i=1,2)$;

2) довести ергодичність підланцюгів $K_1=\{E_3,E_4\}$ та $K_2=\{E_5,E_6\}$;

3) знайти ймовірності $p_i(K_1)$, $p_i(K_2)$ потрапляння в класи K_1, K_2 з початкового стану $E_i\,(i=1,2)$.

4.38. За даною матрицею інтенсивностей перехідних імовірностей $\boldsymbol{Q}$ знайти: 1) граф станів системи; 2) фінальні ймовірності станів, якщо вони існують.

а) $Q=\begin{Vmatrix} -0.6 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.2 & -1 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.4 & -1{,}3 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.3 \end{Vmatrix}$; б) $Q=\begin{Vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3.5 & 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -3.5 & 2 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$;

в) $Q=\begin{Vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$; г) $Q=\begin{Vmatrix} -2.25 & 2 & 0.25 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$; д) $Q=\begin{Vmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{Vmatrix}$.

Відповіді

4.28. $\vec{p}(1)=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right); \vec{p}=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$. **4.29.** $p_{12}(2)=\frac{1}{3}$; $\vec{p}(1)=\left(\frac{1}{6};\frac{2}{15};\frac{3}{10};\frac{1}{6};\frac{7}{30}\right)$.

4.32. $\vec{p}=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$. **4.33.** $\vec{p}=\left(\frac{5}{13};\frac{1}{13};\frac{5}{26};\frac{9}{26}\right)$. **4.34.** а) $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$; б) $\left(0;\frac{3}{5};\frac{2}{5};0;0\right)$. **4.35.** а) $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6};0;\frac{2}{5};\frac{4}{15}\right)$; б) $\left(\frac{1}{12};\frac{1}{12};0;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

4.36. $P(E_1\to E_3)=\frac{213}{385}$; $P(E_2\to E_3)=\frac{239}{385}$; $P(E_1\to E_4)=\frac{172}{385}$; $P(E_2\to E_4)=\frac{146}{385}$. **4.37.** 3а) $p_1(K_1)=\frac{19}{70}$; $p_2(K_1)=\frac{12}{35}$; $p_1(K_2)=1-p_1(K_1)=\frac{51}{70}$; 3б) $p_1(K_1)=\frac{52}{97}$; $p_2(K_1)=\frac{40}{97}$; $p_1(K_2)=\frac{45}{97}$; $p_2(K_2)=\frac{57}{97}$.

4.38. а) $p_0=\frac{1}{28}$; $p_1=\frac{3}{28}$; $p_3=\frac{18}{28}$; $p_4=\frac{6}{28}$; б) $p_0=\frac{3}{61}$; $p_1=\frac{6}{61}$; $p_2=\frac{14}{61}$; $p_3=\frac{56}{183}$; $p_4=\frac{1}{61}$; $p_5=\frac{55}{183}$; в) $p_0=\frac{1}{3}$; $p_1=\frac{4}{9}$; $p_2=\frac{2}{9}$; г) $p_0=\frac{12}{39}$; $p_1=\frac{16}{39}$; $p_2=\frac{11}{39}$; д) $p_0=p_1=\frac{6}{19}$; $p_2=\frac{9}{38}$; $p_3=\frac{5}{38}$.

Розділ 5
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

5.1. Початкові відомості

5.1.1. Предмет математичної статистики

На практиці значення деякої невідомої величини звичайно знаходять за допомогою вимірювань. Математична статистика вивчає методи найкращої обробки результатів вимірювань. Оскільки процедура вимірювання завжди пов'язана з похибками, то можливий результат вимірювання є випадковою величиною X, закон розподілу якої або деякі його параметри (наприклад, a та σ^2 у законі Гаусса або λ у розподілі Пуассона) невідомі. Для того щоб зробити деякі висновки про функціональний вигляд закону розподілу або про його параметри, проводять серію з n незалежних вимірювань. Будемо вважати конкретний результат x_i i-го вимірювання можливим значенням випадкової величини X_i $(i = 1,..., n)$. При цьому припускаємо, що всі ВВ X_i розподілені за тим самим законом, що і ВВ X, а ВВ $X_1, X_2,..., X_n$ є незалежними в сукупності. Випадковий вектор $\overrightarrow{X}(X_1; X_2;...; X_n)$ називається **випадковою (теоретичною) вибіркою об'єму *n***, а його розподіл називається **розподілом вибірки.** Вектор $\vec{x}(x_1; x_2;...; x_n)$, який отримано в конкретній серії вимірювань, назвемо **вибіркою об'єму *n***. Цей вектор є однією з можливих реалізацій ВВ-р $\overrightarrow{X}(X_1; X_2;...; X_n)$. Усі твердження щодо розподілу ВВ X повинні ґрунтуватися на підставі вибірки $\vec{x}$. При цьому ніколи не можна бути абсолютно впевненим у тому, що зроблені висновки є правильними. І тому виникає задача оцінки ймовірності помилки. Ми ознайомимося далі більш докладно з трьома задачами математичної статистики:

1) на підставі вибірки $\vec{x}(x_1; x_2;...; x_n)$ наближено знайти справжнє значення невідомого параметра розподілу ВВ X;

2) на підставі вибірки $\vec{x}(x_1; x_2;...; x_n)$ знайти інтервал, який з заданою надійністю містить справжнє значення невідомого параметра розподілу ВВ X;

3) на підставі вибірки $\vec{x}(x_1; x_2;...; x_n)$ прийняти одне з множини припущень щодо розподілу ВВ-ра X.

Приклад 1. ВВ X розподілена за законом Гаусса з параметрами a та σ^2. Знайти розподіл випадкової вибірки об'єму n.

Розв'язання. Оскільки координати X_i вектора $\vec{X}$ незалежні і кожна з них розподілена за законом Гаусса з параметрами a та σ^2, то

$$p_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot p_{X_n}(x_n) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{(x_1-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Тут $x_1, \ldots, x_n$ – набір незалежних змінних.

5.1.2. Найпростіші способи обробки результатів спостереження ВВ

Середнім вибірки $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ (емпіричним середнім) називається середнє арифметичне результатів вимірювання

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right).} \tag{5.1}$$

Дисперсією вибірки $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ (виправленою емпіричною дисперсією) називається величина

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 ,} \tag{5.2}$$

де значення $\bar{x}$ визначається формулою (5.1). При розрахунках інколи буває доцільним переписати формулу (5.2) у вигляді

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2\right).} \tag{5.2a}$$

Невиправленою дисперсією вибірки $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ називається величина

$$s_*^2 = \frac{n-1}{n} s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Приклад 2. Вимірювальним приладом було зроблено 5 незалежних випробувань: (–19; 36; 7; –37; 58). Знайти середнє і дисперсію вибірки.

Розв'язання

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\cdot 45 = 9, s^2 = \frac{1}{4}\cdot(28^2 + 27^2 + 4 + 46^2 + 49^2) = \frac{6034}{4} \approx 1508.$$

У випадку великої кількості вимірювань доцільно спочатку провести групування даних. Для цього розіб'ємо відрізок, на якому знаходяться результати вимірювань, на k проміжків рівної довжини Δ (число k повинно бути від 6 до 20). Нехай x^*_j – середина j-го проміжку, а n_j – кількість елементів вибірки, що належать до нього (елемент, який збігається з верхньою межею проміжку відносимо до наступного проміжку).

Середнім і дисперсією вибірки $\vec{x}\,(x_1; x_2; ...; x_n)$ **за згрупованими даними** називаються числа

$$\boxed{\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j^*}, \tag{5.3}$$

$$\boxed{s^{*2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} n_j (x_j^*)^2 - n(\bar{x}^*)^2\right)}. \tag{5.4}$$

Побудуємо графік східчастої функції (рис. 5.1), яка на j-му проміжку дорівнює $n_j/n\Delta$. Цей графік називається **гістограмою**. Площа під гістограмою на j-му проміжку дорівнює n_j/n – частоті потрапляння результатів експерименту в j-й проміжок. Отже, площа під гістограмою дорівнює одиниці. Гістограма є експериментальним аналогом щільності ймовірності. Згладжуючи гістограму (зберігаючи площу під кривою), можна з більшою чи меншою точністю знайти дійсний графік щільності розподілу ВВ X.

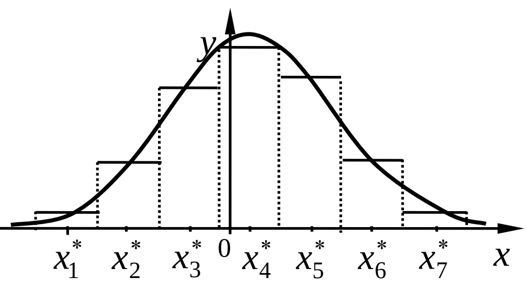


Рис. 5.1

Емпірична функція розподілу за згрупованими даними

$$F_n^*(x)=\frac{1}{n}\sum_{x^*_j<x} n_j$$

є кусково-сталою неспадною неперервною зліва функцією, яка має стрибки n_j/n в серединах x^*_j інтервалів групування. Ясно, що $F_n^*(x)=0$, якщо $x\le x^*_1$ та $F_n^*(x)=1$, якщо $x>x^*_n$..

Приклад 3. Побудувати гістограму і графік емпіричної функції розподілу для згрупованої вибірки, яка задана табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Номер проміжку j	Межі проміжку $[x_j; x_{j+1})$	Кількість елементів n_j у $[x_j; x_{j+1})$
1	33–35	1
2	35–37	2
3	37-39	8
4	39-41	13
5	41-43	25
6	43-45	16
7	45-47	13
8	47-49	2

Розв'язання. Об'єм вибірки $n=80$, $\Delta=2$, $n_j/n\Delta=n_j/160$. Гістограма (рис. 5.2) нагадує графік розподілу Гаусса, параметрами якого природно вибрати середнє та дисперсію згрупованої вибірки: $\overline{x}^*$, s^{*2}.

Середини відрізків групування такі: $x_1^*=34$, $x_2^*=36$, $x_3^*=38$, $x_4^*=40$, $x_5^*=42$, $x_6^*=44$, $x_7^*=46$, $x_8^*=48$.

За формулами (5.3) та (5.4) відповідно знаходимо:

$$\overline{x}^*=\frac{1}{80}\cdot(1\cdot34+2\cdot36+8\cdot38+13\cdot40+25\cdot42+16\cdot44+13\cdot46+2\cdot48)=42.225,$$

$$s^{*2}=\frac{1}{79}\cdot(1\cdot34^2+2\cdot36^2+8\cdot38^2+13\cdot40^2+25\cdot42^2+16\cdot44^2+13\cdot46^2+2\cdot48^2-$$
$$-80\cdot(42.225)^2)=8.303.$$

Питання про те, наскільки обґрунтовано припущення про те, що $X\sim N(42.225;8.303)$, може бути вирішене, наприклад, за критерієм узгодження χ^2 (п. 5.4.6). Графік емпіричної функції розподілу наведено на рис. 5.3.

5.2. Точкові оцінки

5.2.1. Властивості оцінок

Припустимо, що в закон розподілу ВВ X, функціональний вигляд якого є відомим, входить невідомий сталий параметр θ

(таким параметром, наприклад, може бути a та (або) σ^2 у нормальному законі, σ^2 у законі Релея, p у біноміальному розподілі). З метою знаходження значення цього параметра проводиться серія n незалежних дослідів, результатом яких буде вибірка $\vec{x}(x_1; x_2;...; x_n)$ – одна з можливих реалізацій вектора $\vec{X}(X_1; X_2;...; X_n)$.

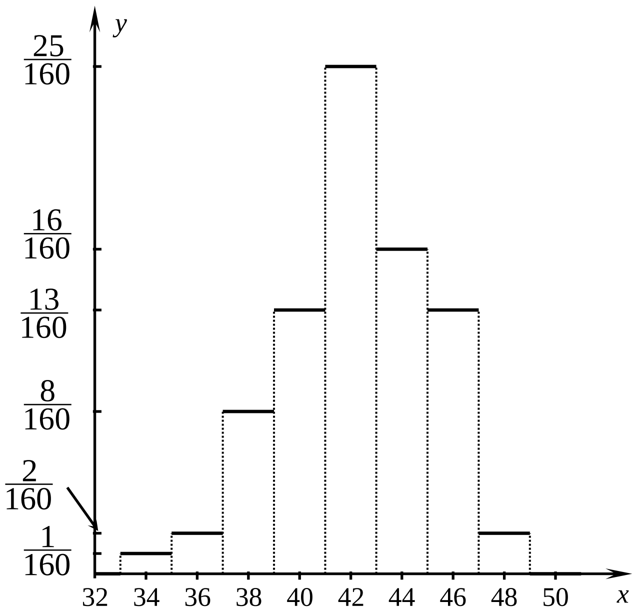


Рис. 5.2

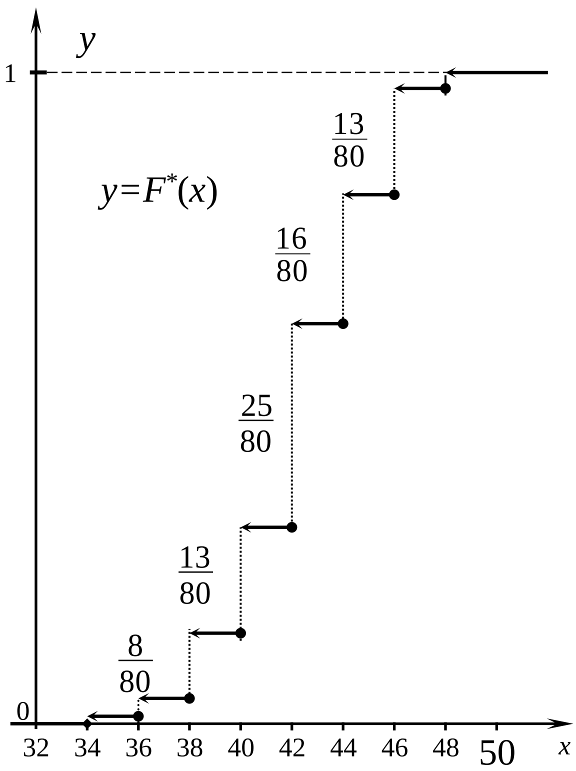


Рис. 5.3

Випадкову величину, яка є функцією лише від випадкової вибірки $\vec{X}(X_1; X_2;...; X_n)$, будемо далі називати **статистикою**.

Визначення 1. Точковою оцінкою невідомого параметра θ називається така статистика $\widehat{\Theta}(X_1, ..., X_n)$, реалізація якої $\widehat{\Theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на вибірці $\vec{x}$ $(x_1; x_2;...; x_n)$ приймається за невідоме істинне значення параметра θ:

$$\boxed{\theta \approx \widehat{\Theta}(x_1, x_2, ..., x_n).} \qquad (5.5)$$

Розподіл статистики $\widehat{\Theta}(X_1,\ldots,X_n)$ також залежить від невідомого параметра θ, оскільки кожна випадкова величина X_i (i=1,…,n) розподілена за тим самим законом, що і X.

Природно вважати добрими ті оцінки параметра θ, реалізації яких будуть близькими до значення оцінюваного параметра.

Визначення 2. Точкова оцінка $\widehat{\Theta}(X_1,\ldots,X_n)$ називається **незсуненою** оцінкою параметра θ, якщо її математичне сподівання дорівнює значенню оцінюваного параметра

$$\boxed{M\Theta(X_1,\ldots,X_n)=\theta}. \tag{5.6}$$

Систематична похибка оцінювання для незсуненої оцінки дорівнює нулю.

Мірою близькості незсуненої оцінки $\widehat{\Theta}(X_1,\ldots,X_n)$ до істинного значення параметра θ є її дисперсія $D\widehat{\Theta}$. Серед усіх незсунених оцінок $\widehat{\Theta}$ параметра θ найбільш прийнятною є оцінка $\widehat{\Theta}_{еф}$, у якої найменша можлива дисперсія.

Оцінка $\widehat{\Theta}_{еф}$ називається **ефективною.**

Якщо розподіл ВВ X задовольняє певні умови (вони виконуються, наприклад, для статистик нормального та біноміального розподілів), то можна знайти найменше можливе значення дисперсії незсуненої оцінки $\widehat{\Theta}$ невідомого параметра θ. А саме виконуються **нерівності Крамера-Рао**:

1) нехай $p_X(x, \theta)$ щільність розподілу неперервної ВВ X. Тоді

$$D\widehat{\Theta}(X_1,\ldots,X_n) \ge \left(n\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}[(\ln p_X(x,\theta))'_\theta]^2\cdot p_X(x,\theta)\,dx\right)^{-1}; \tag{5.7}$$

2) коли $p_k(\theta)$ (k=1,…,j) є розподілом дискретної ВВ X, то

$$D\widehat{\Theta}(X_1,\ldots,X_n) \ge \left(n\sum_{k=1}^{j}[(\ln p_k(\theta))'_\theta]^2\cdot p_k(\theta)\right)^{-1}. \tag{5.7a}$$

Визначення 3. Оцінка $\widehat{\Theta}\,(X_1,\dots,X_n)$ називається **спроможною** оцінкою параметра θ, якщо при довільному ε >0

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\{|\widehat{\Theta}(X_1,\dots,X_n)-\theta|<\varepsilon\}=1}$$

Спроможність оцінки $\widehat{\Theta}$ означає, що її розподіл при $n\to\infty$ концентрується в як завгодно малому околі істинного значення параметра θ, тобто точність цієї оцінки зростає зі збільшенням кількості спостережень.

За допомогою нерівності Чебишева (формула (3.22)) можна отримати таку **умову спроможності**: якщо

$$M\,\widehat{\Theta}\,(X_1,\dots,X_n)\to\theta \text{ та } D\,\widehat{\Theta}\,(X_1,\dots,X_n)\to 0 \text{ при } n\to\infty, \qquad (5.8)$$

то оцінка $\widehat{\Theta}\,(X_1,\dots,X_n)$ буде спроможною оцінкою параметра θ.

Приклад 4. Знайти найменше можливе значення дисперсії незсуненої *а* оцінки для параметра нормального закону (формула (2.13)).

Розв'язання. Оскільки $p_X(x,a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, то $\ln p_X(x,a)=$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}.$$

Отже,

$$(\ln p_X(x,a))'_a=\frac{x-a}{\sigma^2}\quad \mathrm{i}_{-}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-a)^2}{\sigma^4}\cdot p_X(x,a)dx=\frac{1}{\sigma^4}\cdot DX=\frac{\sigma^2}{\sigma^4}=\frac{1}{\sigma^2}.$$

На підставі формули (5.7) робимо висновок, що найменше можливе значення дисперсії незсуненої оцінки для математичного сподівання *а* дорівнює σ^2/n.

Приклад 5. Знайти найменше можливе значення дисперсії незсуненої оцінки $\hat{p}$ невідомої ймовірності *р* події *А*.

Розв'язання. Кількість появ події *А* у кожному з *n* незалежних випробувань є дискретною ВВ, яка приймає два значення 1 та 0 відповідно з імовірностями *р* та *1-р*. Оскільки

$$\left[(\ln p)'_p\right]^2 \cdot p + \left[(\ln(1-p))'_p\right]^2 \cdot (1-p) = \frac{1}{p^2}\cdot p + \frac{1}{(1-p)^2}\cdot(1-p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} =$$

$= \dfrac{1}{p(1-p)}$, то на підставі формули (5.7а) знаходимо, що найменше можливе значення дисперсії незсуненої оцінки для ймовірності p події A дорівнює $\dfrac{p(1-p)}{n}$.

Приклад 6. Розглянемо серію з n незалежних випробувань. Нехай імовірність p появи події A в одному випробуванні невідома. Показати, що частота появи події A є незсуненою і спроможною оцінкою ймовірності p.

Розв'язання. Позначимо через X_i – кількість появ події A в i-му випробуванні. Як оцінку ймовірності p виберемо частоту події – статистику $\hat{p} = \frac{1}{n}\cdot(X_1+...+X_n)$. У прикладах 10 п. 3.1.4 і 24 п. 3.2.2 було з'ясовано, що $M\hat{p} = p$, $D\hat{p} = \frac{p(1-p)}{n} \to 0$ при $n\to\infty$. У прикладі 5 було показано, що дисперсія оцінки $\hat{p}$ є мінімально можливою. Умова (5.8) виконана. Отже, частота появи події A – статистика $\hat{p} = \frac{1}{n}\cdot(X_1+...+X_n)$ – є незсуненою, спроможною і ефективною оцінкою невідомої ймовірності p.

Відзначимо, що розподіл статистики $(p-\hat{p})\cdot\sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}$ при досить великих n є близьким до $N(0;1)$.

Точкові оцінки, на жаль, не містять інформації щодо похибки, яка має місце при заміні значення невідомого параметра його оцінкою.

5.2.2. Метод максимуму правдоподібності

Одним із найважливіших методів одержання точкових оцінок невідомого параметра θ є метод **максимуму правдоподібності**. За цим методом, серед усіх можливих значень θ слід обрати те, при якому ймовірність отримати одержану реалізацію $\vec{x}\,(x_1; x_2;...; x_n)$ випадкової вибірки $\vec{X}\,(X_1; X_2;...; X_n)$ стає найбільшою.

Нехай $p_X(x,\theta)$ – щільність імовірності ВВ X, де θ – невідомий параметр, який потрібно оцінити. Тоді розподіл випадкової вибірки має вигляд

$$p_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = p_X(x_1,\theta)\cdot p_X(x_2,\theta)\cdot \ldots \cdot p_X(x_n,\theta)$$

(тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – набір незалежних змінних).

Визначення 4. Функція $p_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$, яка розглядається як функція аргументу θ при фіксованому значенні вектора реалізації $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, називається функцією **правдоподібності** і позначається $L(\theta)$.

Якщо ΔV є n-вимірним об'ємом досить малого околу точки $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, то добуток $L(\theta)\cdot\Delta V$ в першому наближенні дорівнює ймовірності потрапляння випадкової вибірки $\vec{X}(X_1; X_2; \ldots; X_n)$ у цей окіл. Отже, найбільш вірогідним при заданому $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ слід вважати те значення $\widehat{\Theta}$, при якому функція $L(\theta)$ досягає максимуму (припускаємо, що максимум існує і він єдиний). Оскільки точки максимуму функцій $L(\theta)$ і $\ln L(\theta)$ співпадають, то для відшукання $\widehat{\Theta}$ замість розв'язання рівняння $(L(\theta))'=0$ розглядають більш просте рівняння

$$\boxed{(\ln L(\theta))' = 0}, \tag{5.9}$$

яке називається **рівнянням правдоподібності**.

Зрозуміло, що розв'язок $\widehat{\Theta}$ є функцією від $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, тобто $\widehat{\Theta}=\widehat{\Theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Якщо підставити у функцію $\widehat{\Theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ X_i замість x_i ,то отримуємо оцінку $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, яка називається оцінкою **найбільшої правдоподібності** параметра θ. Якщо існує ефективна оцінка параметра θ, то ця оцінка є єдиним розв'язком рівняння правдоподібності. Як правило, оцінки максимальної правдоподібності є спроможними, асимптотично (при $n \to \infty$) незсуненими та ефективними.

Приклад 7. Знайти за методом найбільшої правдоподібності оцінку для невідомого параметра a розподілу Гаусса (формула (2.13)), якщо дисперсія σ^2 є відомою. Властивості цієї оцінки.

Розв'язання. У цьому випадку $\theta = a$. Функція правдоподібності буде мати вигляд $L(a) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{(x_1 - a)^2 + \ldots + (x_n - a)^2}{2\sigma^2}}$.

Оскільки $\ln L(a) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left((x_1 - a)^2 + \ldots + (x_n - a)^2\right)$, то

$$(\ln L(a))' = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2(x_1 - a) - \ldots - 2(x_n - a)\right) = \frac{1}{\sigma^2}(x_1 + \ldots + x_n - na).$$

Отже, рівняння правдоподібності має вигляд

$$x_1 + \ldots + x_n - na = 0.$$

Єдиним розв'язком цього рівняння є точка

$$a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Оскільки $(\ln L(a))'' = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$, то в точці a функція $\ln L(a)$ досягає найбільшого значення. Таким чином, точкова оцінка для невідомого параметра a розподілу Гаусса при відомій дисперсії σ^2 має вигляд

$$a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Статистику $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ називають **вибірковим середнім** і позначають символом $\bar{X}$. Отже, маємо

$$\boxed{a = \bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i}. \qquad (5.10)$$

На підставі результату прикладу 23 п. 3.2.2 маємо, що $Ma = a, Da = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$, коли $n \to \infty$. Отже, умова (5.8) виконана і оцінка (5.10) параметра a є незсуненою і спроможною. Крім того, на підставі результату прикладу 7 п. 5.2.1 маємо, що ця оцінка є ефективною.

Приклад 8. Знайти за методом найбільшої правдоподібності оцінку для невідомій дисперсії σ^2 розподілу Гаусса (формула (2.13)), якщо математичне сподівання a є відомим. Властивості цієї оцінки.

Розв'язання. У цьому випадку функція правдоподібності залежить від змінної $\theta=\sigma^2$ і для реалізації $\vec{x}\,(x_1; x_2;...; x_n)$ має вигляд

$$L(\theta)=\frac{1}{(2\pi\theta)^{n/2}}\cdot e^{-\frac{(x_1-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2}{2\theta}} \qquad (\theta>0).$$

Оскільки $\ln L(\theta)=\ln\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}-\frac{n}{2}\cdot\ln\theta-\frac{(x_1-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2}{2\theta}$, то

$$\left(\ln L(\theta)\right)'=-\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\left((x_1-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2\right)$$

і рівняння правдоподібності (5.9) набуває вигляду

$$-n+\frac{1}{\theta}\left((x_1-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2\right)=0.$$

Єдиним розв'язком цього рівняння є точка $\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$.

Оскільки $(\ln L(\theta))''=-\frac{n}{2\theta^2}<0$, то в точці θ функція $\ln L(\theta)$ досягає найбільшого значення. Таким чином, точкова оцінка для невідомого параметра σ^2 розподілу Гаусса при відомому математичному сподіванні a має вигляд

$$\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2.$$

Статистику $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$ позначимо символом S_0^2. Тоді оцінка найбільшої правдоподібності для дисперсії σ^2 розподілу Гаусса при відомому математичному сподіванні a має вигляд

$$\boxed{\hat{\sigma}^2=S_0^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}. \qquad (5.11)$$

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію оцінки $\hat{\sigma}^2 = S_0^2$:

$$MS_0^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} M\left(X_i - a\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot n\cdot M\left(X - a\right)^2 = \sigma^2,$$

$$DS_0^2 = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i - a\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot D\left(X - a\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\left(M\left(X - a\right)^4 - \left(M\left(X - a\right)^2\right)^2\right) =$$

$= \frac{1}{n}\cdot\left(3\sigma^4 - \left(\sigma^2\right)^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n}$ (тут були використані міркування з прикладу 22 п. 3.2.1). Отже, умова (5.8) виконана і оцінка (5.11) для дисперсії σ^2 при відомому параметрі a розподілу Гаусса є незсуненою і спроможною.

Щоб показати, що оцінка $\hat{\sigma}^2 = S_0^2$ для дисперсії σ^2 при відомому параметрі a розподілу Гаусса є ефективною, знайдемо на підставі нерівності Крамера-Рао (5.7) найменше можливе значення дисперсії незсуненої оцінки для параметра $\theta = \sigma^2$ нормального закону:

$$p_X(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\theta}} \Rightarrow \ln p_X(x,\theta) = \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} - \frac{(x-a)^2}{2\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln p_X(x,\theta))'_\theta = -\frac{1}{2\theta} + \frac{\left(x-a\right)^2}{2\theta^2}.$$

Знайдемо тепер

$$M\left(-\frac{1}{2\theta} + \frac{\left(X - a\right)^2}{2\theta^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{(x-a)^4}{4\theta^4} - \frac{(x-a)^2}{2\theta^3} + \frac{1}{4\theta^2}\right)\cdot p_X(x,\theta)dx =$$

$$= \frac{1}{4\theta^4}\cdot 3\theta^2 - \frac{1}{2\theta^3}\cdot\theta + \frac{1}{4\theta^2} = \frac{1}{2\theta^2}.$$

Отже, найменше можливе значення дисперсії незсуненої оцінки для параметра $\theta = \sigma^2$ дорівнює $\frac{2\sigma^4}{n}$ і, таким чином, статистика $\hat{\sigma}^2 = S_0^2$ є ефективною оцінкою теоретичної дисперсії σ^2.

Приклад 9. Знайти методом найбільшої правдоподібності оцінки обох невідомих параметрів a та σ^2 (теоретичних середнього та дисперсії) розподілу Гаусса (формула (2.13)). Властивості цих оцінок.

Розв'язання. У цьому випадку функція правдоподібності залежить від двох змінних $\theta_1 = a$ і $\theta_2 = \sigma^2$ і для реалізації $\vec{x}\,(x_1; x_2; ...; x_n)$ буде такою:

$$L(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\theta_1)^2+\ldots+(x_n-\theta_1)^2}{2\theta_2}} \quad (-\infty < \theta_1 < +\infty,\ \theta_2 > 0).$$

Оскільки

$$\ln L(\theta_1,\theta_2) = \ln\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} - \frac{n}{2}\cdot\ln\theta_2 - \frac{(x_1-\theta_1)^2+\ldots+(x_n-\theta_1)^2}{2\theta_2},$$

то необхідні умови максимуму функції двох змінних $\ln L(\theta_1,\theta_2)$ мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} = \dfrac{-1}{2\theta_2}\big(-2(x_1-\theta_1)-2(x_2-\theta_1)-\ldots-2(x_n-\theta_1)\big) = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} = \dfrac{-n}{2\theta_2} + \dfrac{1}{2\theta_2^2}\Big((x_1-\theta_1)^2+\ldots+(x_n-\theta_1)^2\Big) = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння системи правдоподібності знаходимо

$$\widehat{\Theta} = \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n),$$

а після цього з другого рівняння маємо

$$\widehat{\Theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(x_i - \widehat{\Theta}_1\big)^2 .$$

Ми не робитимемо стандартну перевірку того, що в точці $(\widehat{\Theta}_1;\ \widehat{\Theta}_2)$ функція правдоподібності досягає максимуму. Таким чином, оцінками найбільшої правдоподібності для невідомих математичного сподівання a і дисперсії σ^2 закону Гаусса є оцінки

$$a = \bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \,,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i)^2 .$$

Статистику $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i)^2$ звичайно позначають символом S_1^2 і називають **вибірковою дисперсією**. Тоді оцінка найбільшої правдоподібності для дисперсії σ^2 розподілу Гаусса при невідомому математичному сподіванні a має вигляд

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = S_1^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \vec{X})^2} \,. \tag{5.12}$$

Порівнюючи з формулою (5.10), бачимо, що статистика $\bar{X}$ найкраще оцінює невідоме математичне сподівання a розподілу Гаусса незалежно від того, відома теоретична дисперсія σ^2 чи ні.

Покажемо, що оцінка $\hat{\sigma}^2 = S_0^2$ для дисперсії є зсуненою. Дійсно, на підставі результату прикладу 26 п. 3.2.2 маємо

$$M\,\hat{\sigma}^2 = M\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i)^2\right) =$$
$$= \frac{n-1}{n} \cdot M\left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i)^2\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2.$$

Зсув $M\,\hat{\sigma}^2 - \sigma^2 = -\frac{1}{n} \cdot \sigma^2$ оцінки (5.12) наближається до нуля при $n \to \infty$. Можна довести, що $D\hat{\sigma}^2 = \frac{2}{n-1} \cdot \sigma^4$ і, таким чином, оцінка (5.12) параметра σ^2 нормального закону є спроможною, оскільки виконана умова спроможності (5.8). Оцінка (5.12) не є ефективною.

Статистика $\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ позначається символом S^2. На підставі результату прикладу 26 п. 3.2.2 оцінка $\hat{\sigma}^2 = S_0^2$ для теоретичної дисперсії σ^2 є незсуненою. Умова спроможності (5.8) для оцінки $\hat{\sigma}^2 = S_0^2$ виконується. Отже, оцінка $\hat{\sigma}^2 = S_0^2$ є спроможною. Ця оцінка не є ефективною. Статистика

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}.$$

називається **незсуненою вибірковою дисперсією.**

Метод максимуму правдоподібності можна також застосовувати для оцінки невідомих параметрів розподілу дискретної ВВ.

Нехай ВВ має дискретний розподіл

$$P\{X = a_k\} = p_k(\theta) \qquad (k=1,\dots r).$$

Якщо m_k з елементів вибірки $\vec{x}(x_1; x_2; \dots; x_n)$ дорівнюють a_k $(m_1 + m_2 + \dots + m_r = n)$, то рівняння правдоподібності має вигляд

$$m_1 \frac{\partial \ln p_1(\theta)}{\partial\theta} + m_2 \frac{\partial \ln p_2(\theta)}{\partial\theta} + \dots + m_r \frac{\partial \ln p_r(\theta)}{\partial\theta} = 0.$$

Приклад 10. Нехай m – кількість появ події A в серії з n незалежних випробувань Бернуллі. Імовірність p появи події в кожному випробуванні є невідомою величиною. Знайти оцінку найбільшої правдоподібності для p.

Розв'язання. Кількість появ X події A в кожному випробуванні є випадковою величиною: $P\{X = 0\} = 1 - p, P\{X = 1\} = p.$ Оскільки серед елементів вибірки 1 зустрічається m разів, а 0 – n-m разів, то рівняння правдоподібності набуває вигляду:

$$(n-m) \cdot \frac{-1}{1-p} + m \cdot \frac{1}{p} = 0.$$

Отже, $\hat{p} = \frac{m}{n}$. Таким чином, частота події є оцінкою найбільшої правдоподібності для невідомого параметра p.

5.2.3. Точкові оцінки математичного сподівання і дисперсії ВВ

Припустимо, що нам потрібно знайти оцінки математичного сподівання m_X і дисперсії D_X ВВ X. Нехай $\vec{X}\,(X_1; X_2;...; X_n)$ – теоретична вибірка об'єму n. За оцінки $\widehat{m_X}$ математичного сподівання m_X і $\widehat{D_X}$ дисперсії D_X ВВ X природно вибрати відповідно оцінки

$$\boxed{\widehat{m_X} = \bar{X} = \frac{1}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}, \tag{5.13}$$

$$\boxed{\widehat{D_X} = S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2.} \tag{5.14}$$

Реалізаціями цих оцінок є відповідно емпіричними середнім $\bar{x}$ і дисперсією s^2 вибірки.

Як показано в прикладі 26 п. 3.2.2, обидві оцінки $\widehat{m_X}=\bar{X}$ і $\widehat{D_X}=S^2$ є незсуненими. Можна показати, що $D(\widehat{D_X})\to 0$ при $n\to\infty$, а оскільки $D\widehat{m_X} = {D_X}/{n}$ (формула (3) прикладу 23), то обидві оцінки $\widehat{m_X}=\bar{X}$ і $\widehat{D_X}=S^2$ є спроможними. Взагалі кажучи, оцінки (5.13) і (5.14) не є ефективними.

Незсуненої оцінки для середнього квадратичного відхилення $\sigma=\sqrt{DX}$, справедливої при будь-якому розподілі, немає. Як оцінка для σ використовується, як правило, статистика $\hat{\sigma} = \sqrt{S^2}$.

5.2.4. Точкові оцінки математичного сподівання та коефіцієнта кореляції ВВ–ра. Емпіричні прямі лінійної регресії

Розглянемо ВВ–р $\vec{X}\,(X;Y)$. Нехай $((X_1;Y_1); (X_2;Y_2); ...; (X_n;Y_n))$ – двовимірна випадкова вибірка. Як оцінки $\widehat{m_X}$ математичного сподівання m_X та $\widehat{m_Y}$ математичного сподівання m_Y використаємо відповідно оцінку (5.13) і оцінку $\widehat{m_Y} = \bar{Y} = \frac{1}{n} \cdot (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)$.

За оцінку для кореляційного моменту $K(X,Y)$ використаємо оцінку

$$\boxed{\widehat{K}(X,Y) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})}. \tag{5.15}$$

Ця оцінка є незсуненою і спроможною. Її реалізацією буде емпіричний кореляційний момент вибірки

$$\boxed{\tilde{K}(X,Y) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}).}$$

Як оцінку коефіцієнта кореляції $r_{X,Y}$ використовують статистику

$$\boxed{\hat{R} = \frac{\hat{K}(X,Y)}{\sqrt{S_X^2 \cdot S_Y^2}},} \tag{5.16}$$

де оцінки S_X^2 і S_Y^2 – незсунені вибіркові дисперсії випадкових величин X і Y (вони задаються формулою (5.14)). Оцінка $\hat{R}$ є зсуненою оцінкою коефіцієнта кореляції $r_{X,Y}$, зсув оцінки спадає зі збільшенням n і наближається до нуля при $n \to \infty$.

Емпіричний коефіцієнт кореляції вибірки визначається формулою

$$\boxed{\tilde{r}_{X,Y} = \frac{\tilde{K}(X,Y)}{\sqrt{s_X^2 \cdot s_Y^2}}}. \tag{5.17}$$

Вибіркова лінійна регресія Y на X визначається рівнянням

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot x = \bar{y} + \tilde{r}_{X,Y} \cdot \frac{s_Y}{s_X}(x - \bar{x}) = \bar{y} + \frac{\tilde{K}(X,Y)}{s_X^2}(x - \bar{x}), \tag{5.18}$$

коефіцієнти $\tilde{\beta}_0$ і $\tilde{\beta}_1$ називаються вибірковими коефіцієнтами регресії і обчислюються за формулами

$$\boxed{\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\cdot(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad , \quad \tilde{\beta}_0 = \overline{y} - \tilde{\beta}_1 \cdot \overline{x}} \,. \qquad (5.19)$$

Аналогічно визначається вибіркова лінійна регресія X на Y

$$x = \tilde{\beta}'_0 + \tilde{\beta}'_1 \cdot y = \overline{x} + \tilde{r}_{X,Y} \cdot \frac{s_X}{s_Y}\left(y - \overline{y}\right) = \overline{x} + \frac{\tilde{K}\left(X,Y\right)}{s_Y^2}\left(y - \overline{y}\right) \,.$$

Ці прямі проходять через точку з координатами $(\overline{x};\overline{y})$. При $\left|\tilde{r}_{X,Y}\right|$, близькому до одиниці, кут між ними малий.

Емпіричні прямі лінійної регресії лише характеризують невідому істинну залежність між випадковими величинами X і Y.

Сума квадратів відхилень по вертикалі емпіричних значень y_i від емпіричної прямої лінійної регресії Y на X є меншою, ніж сума квадратів відхилень емпіричних значень y_i від довільної іншої прямої:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y} - \frac{\tilde{K}\left(X,Y\right)}{s_Y^2}(x_i - \overline{x})\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(ax_i + b\right)\right)^2 .$$

Аналогічно, сума квадратів відхилень по горизонталі емпіричних значень x_i від емпіричної прямої лінійної регресії X на Y є меншою, ніж сума квадратів відхилень емпіричних значень x_i від довільної іншої прямої:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x} - \frac{\tilde{K}\left(X,Y\right)}{s_X^2}(y_i - \overline{y})\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left(ay_i + b\right)\right)^2 .$$

Приклад 11. Знайти емпіричні прямі лінійної регресії X на Y та Y на X за такою вибіркою (x_i;y_i) (i=1,2,3,4,5).

x_i	8	10	5	8	9
y_i	1	3	1	2	3

Розв'язання. Знайдемо вибіркові середні і виправлені дисперсії цієї вибірки:

$$\bar{x}=\frac{1}{5}(8+10+5+8+9)=8, \quad \bar{y}=\frac{1}{5}(1+3+1+2+3)=2,$$

$$s_X^2=\frac{1}{4}\left((8-8)^2+(10-8)^2+(5-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2\right)=3.5,$$

$$s_Y^2=\frac{1}{4}\left((1-2)^2+(3-2)^2+(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2\right)=1.$$

Емпіричні кореляційний момент (5.16) і коефіцієнт кореляції (5.17) відповідно дорівнюють

$$\tilde{K}(X,Y)=\frac{1}{4}\cdot(2\cdot1+(-3)\cdot(-1)+1\cdot1)=1.5, \; \tilde{r}_{X,Y}=\frac{1.5}{\sqrt{3.5\cdot1}}=0.802.$$

Отже, кутові коефіцієнти емпіричних прямих лінійної регресії є такими:

$$\tilde{\beta}_1=0.802\cdot\frac{1}{\sqrt{3.5}}=0.427,$$

$$\tilde{\beta}_1'=0.802\cdot\sqrt{3.5}=1.50.$$

І, таким чином, рівняння емпіричних прямих регресії мають вигляд (рис. 5.4):

$y=-1.43+0.427x$ (Y на X),

$x=5+1.50y$ (X на Y).

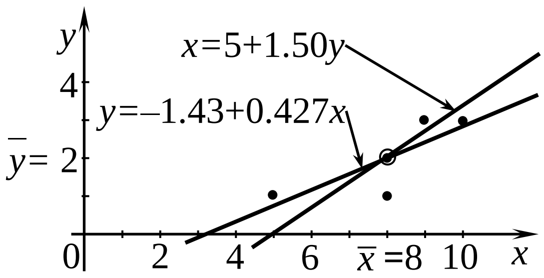


Рис. 5.4

Двовимірну вибірку великого об'єму прийнято подавати у вигляді **кореляційної таблиці**. У кожній клітинці цієї таблиці замість імовірностей $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$ стоять кількості n_{ij} відповідних значень $(X=x_i; Y=y_j)$ вибірки. Застосовані нижче формули (5.20), (5.21) є аналогом формули (3.38), коли замість імовірностей використовуються частоти.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1m}
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2m}
...	...	...	...	...
x_k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{km}

Приклад 12. Вибірка задана кореляційною табл. 5.2 для ВВ-ра ($X;Y$). Знайти вибіркові лінії регресії.

Таблиця 5.2

$X \backslash Y$	15	25	35	45	55	$n(x_i)$
10	6					6
15	4	6				10
20		8				8
25			21	4		25
30			2	12	1	15
35			5	6	5	16
$n(y_j)$	10	14	28	22	6	80

Розв'язання. Для кожного значення x_i (i=1,…,6), тобто для кожного рядка кореляційної таблиці обчислюється умовне середнє

$$\bar{y}(x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{5} y_j \cdot n_{ij}}{n(x_i)}, \tag{5.20}$$

де n_{ij} – кількість пар $(X = x_i; Y = y_j)$; $n(x_i) = \sum_{j=1}^{5} n_{ij}$ – кількість пар $(X = x_i; Y = y_j)$, у яких $X = x_i$.

Вибіркову лінію регресії Y на X утворюють точки $(x_i; \bar{y}(x_i))$, які зображені на рис. 5.5 значками $\circ$.

Аналогічно, для кожного значення y_j (j=1,…,5), тобто для кожного стовпчика кореляційної таблиці обчислюється умовне середнє

$$\bar{x}(y_j) = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot n_{ij}}{n(y_j)}, \tag{5.21}$$

де $n(y_j) = \sum_{i=1}^{6} n_{ij}$ – кількість пар $(X = x_i; Y = y_j)$, у яких $Y = y_j$.

Вибіркову лінію регресії X на Y утворюють точки $(\bar{x}(y_j); y_j)$, які зображені на рис. 5.5 значками $\square$.

Обчислимо умовні середні $\bar{y}(x_i)$ і $\bar{x}(y_j)$:

$$\bar{y}(x=10)=\frac{15\cdot 6}{6}=15,\quad \bar{y}(x=15)=\frac{15\cdot 4+25\cdot 6}{10}=21,\quad \bar{y}(x=20)=\frac{25\cdot 8}{8}=25,$$

$$\bar{y}(x=25)=\frac{35\cdot 21+45\cdot 4}{25}=36.6,\quad \bar{y}(x=30)=\frac{35\cdot 2+45\cdot 12+55\cdot 1}{15}=44.3,$$

$$\bar{y}(x=55)=\frac{35\cdot 5+45\cdot 6+55\cdot 5}{16}=45;\quad \bar{x}(y=15)=\frac{10\cdot 6+15\cdot 4}{10}=12,$$

$$\bar{x}(y=25)=\frac{15\cdot 6+20\cdot 8}{14}=17.9,\quad \bar{x}(y=35)=\frac{25\cdot 21+30\cdot 2+35\cdot 5}{28}=27.1;$$

$$\bar{x}(y=45)=\frac{25\cdot 4+30\cdot 12+35\cdot 6}{22}=29.1,\qquad \bar{x}(y=55)=\frac{30\cdot 1+35\cdot 5}{6}=34.2.$$

Результати обчислень переносимо на рис. 5.5,а.

Приклад 13. В умовах прикладу 12 знайти рівняння емпіричних прямих регресії.

Розв'язання. Обчислимо вибіркові середні і виправлені вибіркові дисперсії:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6} n(x_i)\cdot x_i}{n}=\frac{10\cdot 6+15\cdot 10+20\cdot 8+25\cdot 25+30\cdot 15+35\cdot 16}{80}=\frac{2005}{80}=$$

$$=25.0625,\ \bar{y}=\frac{1}{80}(15\cdot 10+25\cdot 14+35\cdot 28+45\cdot 22+55\cdot 6)=\frac{2800}{80}=35;$$

$$s_X^2=\frac{1}{79}\left(\sum_{i=1}^{6} n(x_i)x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{79}(6\cdot 100+10\cdot 225+8\cdot 400+25\cdot 625+15\cdot 900+$$

$$+16\cdot 1225-80\cdot \bar{x}^2)=57.2745,$$

$$s_Y^2=\frac{1}{79}\left(\sum_{j=1}^{5} n(y_j)\cdot y_j^2-n\bar{y}^2\right)=\frac{1}{79}(10\cdot 225+14\cdot 625+28\cdot 1225+22\cdot 2025+$$

$$+6\cdot 3055-80\cdot 35^2)=126.5823,\quad \Rightarrow\ s_X=7.568,\ s_Y=11.251.$$

Оскільки $\tilde{K}(X,Y)=\frac{1}{79}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5} n(x_i)\cdot n(y_i)\cdot(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})=74.674$, то емпіричний коефіцієнт кореляції $\tilde{r}_{X,Y}=\frac{\tilde{K}(X,Y)}{s_X\cdot s_Y}=0.877.$

Кутові коефіцієнти емпіричних прямих лінійної регресії є такими:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\tilde{K}(X,Y)}{s_X^2} = 1.304, \quad \tilde{\beta}_1' = \frac{\tilde{K}(X,Y)}{s_Y^2} = 0.59.$$

Емпіричні прямі регресії мають рівняння

$$y = 1.304x + 2.5 \ (Y \text{ на } X) \quad \text{і} \quad x = 0.59y + 4.41 \ (X \text{ на } Y).$$

Ці прямі наведені на рис. 5.5,б.

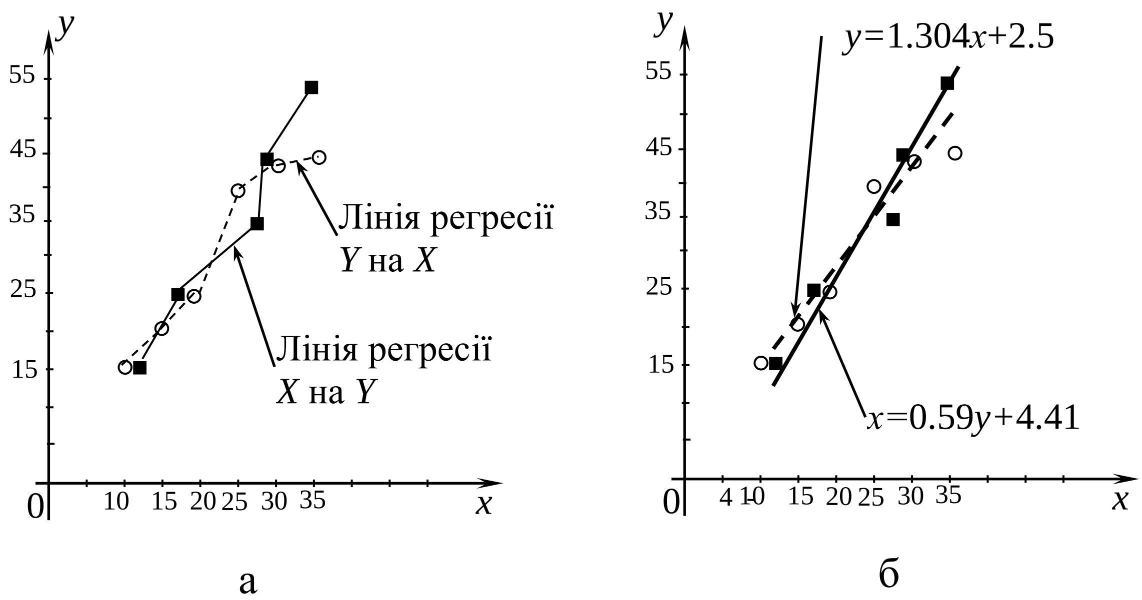


Рис. 5.5

5.3. Довірчі інтервали

5.3.1. Інтервальна оцінка параметра

Точкова оцінка ставить у відповідність кожній реалізації єдине число (значення оцінки), яке приймається за наближене значення невідомого параметра. Значення оцінки може відрізняться від значення параметра. Помилку, що виникає при заміні істинного значення невідомого параметра θ числом $\hat{\Theta}(x_1,...,x_n)$, можна схарактеризувати тим, що ймовірність відхилення $\left|\theta - \hat{\Theta}(X_1,...,X_n)\right|$ не перевищує достатньої точності.

Розглянемо дві такі статистики $\widehat{\Theta_1}(X_1,\dots,X_n), \widehat{\Theta_2}(X_1,\dots,X_n)$, що $\widehat{\Theta_1}(X_1,\dots,X_n) < \widehat{\Theta_2}(X_1,\dots,X_n)$ незалежно від значення θ.

Визначення 5. Довірчим інтервалом надійності 1–ε для невідомого параметра θ називається інтервал

$$\left(\widehat{\Theta_1}(X_1,\dots,X_n);\ \widehat{\Theta_2}(X_1,\dots,X_n)\right),$$

який накриває істинне значення невідомого параметра θ з імовірністю 1–ε

$$\mathrm{P}\{\theta \in (\widehat{\Theta_1}(X_1,\dots,X_n); \widehat{\Theta_2}(X_1,\dots,X_n))\} = 1 - \varepsilon.$$

Число ε називають **рівнем значущості**, воно характеризує ризик, що похибка вийде за межі довірчого інтервалу. Чим більш суттєві наслідки такої похибки, тим меншим слід задавати ε. Як правило, його вибирають рівним 0.1; 0.05; 0.01. При зростанні об’єму вибірки довжина довірчого інтервалу заданої надійності зменшується і, отже, точність інтервальної оцінки зростає. Якщо надійність 1–ε достатньо близька до 1, то накриття випадковим інтервалом $\left(\widehat{\Theta_1}(X_1,\dots,X_n);\ \widehat{\Theta_2}(X_1,\dots,X_n)\right)$, істинного значення параметра θ є практично вірогідною подією. Тобто припускається, що невипадковий інтервал $\left(\widehat{\Theta_1}(x_1,\dots,x_n); \widehat{\Theta_2}(x_1,\dots,x_n)\right)$, (рис. 5.6), який побудовано на підставі конкретної вибірки, накриває істинне значення θ.

При багаторазовому застосуванні цього правила лише у ε·100% випадків будуть зустрічатися інтервали $\left(\widehat{\Theta_1}(x_1,\dots,x_n); \widehat{\Theta_2}(x_1,\dots,x_n)\right)$, які не накривають істинне значення параметра θ.

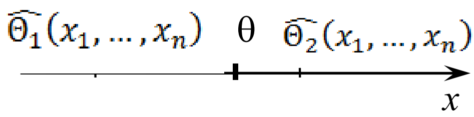


Рис. 5.6

Нижче будуть наведені точні методи побудови довірчих інтервалів для параметрів нормального закону розподілу.

5.3.2. Довірчий інтервал для математичного сподівання *a* при відомій дисперсії σ^2

Нехай випадкова величина X має розподіл Гаусса: $X \sim N(a;\sigma^2)$. Потрібно побудувати довірчий інтервал надійності

$1-\varepsilon$ для істинного значення невідомого параметра a за результатами n незалежних вимірювань, вважаючи дисперсію σ^2 відомою.

При заданому рівні значущості ε знайдемо за табл. Д.1.1 додатку (значення функції Лапласа) таке число $u(\varepsilon)$, що $2\Phi(u(\varepsilon))=1-\varepsilon$ (нагадаємо, що $u(\varepsilon)$ – квантиль нормального розподілу $N(0;1)$ порядку $1-\frac{\varepsilon}{2}$). Тепер покладемо

$$a_1=\overline{X}-u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad a_2=\overline{X}+u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Покажемо, що симетричний відносно точки $\overline{X}$ випадковий інтервал $(a_1;a_2)$ (рис. 5.7) довжини $2u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ є довірчим інтервалом надійності $1-\varepsilon$ для параметра a. Дійсно,

$$P\{a\in(a_1;a_2)\}=P\{\overline{X}-u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+u(\varepsilon)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}=$$
$$=P\{-u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\overline{X}-a<u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}=P\{-u(\varepsilon)<\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\cdot\sqrt{n}<u(\varepsilon)\}.$$

На підставі наслідку 1 п. 2.2.5 і результату прикладу 15 п. 2.1.4 робимо висновок, що випадкова величина $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$ розподілена за законом $N(a;\sigma^2/n)$, а випадкова величина $(\overline{X}-a)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$ – за законом $N(0;1)$. Отже,

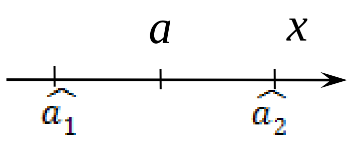


Рис. 5.7

$$P\left\{-u(\varepsilon)<\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n}<u(\varepsilon)\right\}=2\Phi(u(\varepsilon))=1-\varepsilon.$$

Таким чином, якою б не була невідома величина a, інтервал

$$\boxed{\left(\overline{X}-u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X}+u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}\qquad(5.22)$$

накриває істинне значення a з імовірністю $1-\varepsilon$:

$$P\left\{a \in \left(\bar{X} - u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)\right\} = 1-\varepsilon.$$

Останнє співвідношення зв'язує при заданому σ три величини: граничну похибку Δ (половину ширини довірчого інтервалу), кількість вимірювань n і надійність $1-\varepsilon$.

Задаючи будь-які дві з них, можна знайти третю:

1) відомі n та $1-\varepsilon \to u(\varepsilon) \to \Delta = u(\varepsilon)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$;

2) відомі n та $\Delta \to u(\varepsilon) = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma} \to 1-\varepsilon = 2\Phi(u(\varepsilon))$;

3) відомі Δ та $1-\varepsilon \to u(\varepsilon) \to n = \left(\frac{u(\varepsilon)\cdot\sigma}{\Delta}\right)^2$.

Відзначимо, що побудований інтервал серед усіх можливих довірчих інтервалів $(c(\varepsilon); d(\varepsilon))$ надійності $1-\varepsilon$ для параметра a при відомій дисперсії σ^2 має найменшу довжину (рис. 5.8).

Приклад 14. Проведено 36 незалежних вимірювань напруги випадкового радіосигналу, розподіленого за нормальним законом з невідомим математичним сподіванням a і з дисперсією $\sigma^2 = 4$ мкВ^2. Знайти довірчий інтервал надійності 0.9 для a, якщо емпіричне вибіркове середнє $\bar{x}$=10.23 мкВ.

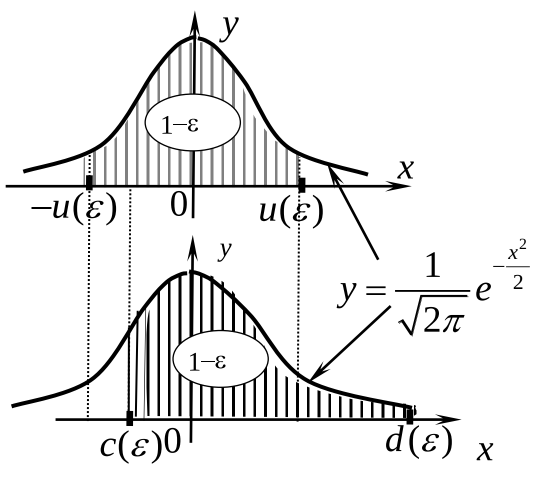


Рис. 5.8

Розв'язання. Рівень значущості $\varepsilon = 0.1$.

Оскільки $2\Phi(u(0.1)) = 0.9$, то $u(0.1) = 1.64$ і, таким чином, $u(0.1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.55$ мкВ. Це означає, що проміжку (10.23–0.55= = 9.68;10.23+0,55=10.78) мкВ на підставі принципу практичної вірогідності належатиме справжнє значення математичного сподівання a.

Приклад 15. Середня квадратична похибка методу вимірювання відстані дорівнює 20 м. Яка ймовірність того, що середнє арифметичне 16 результатів вимірювання відрізняється від справжнього значення відстані з похибкою, яка не більше 8 м?

Розв'язання. Оскільки $u(\varepsilon)=\dfrac{\Delta\cdot\sqrt{n}}{\sigma}=\dfrac{8\cdot 4}{20}=1{,}6$, то 1–ε =2Φ(1.6)= =0.8904.

Приклад 16. За умовами попереднього прикладу знайти об'єм вибірки, при якому гранична похибка 8 м гарантується з імовірністю 0.97.

Розв'язання. Δ=8 м, $\varepsilon=0.03$. Оскільки $2\Phi(u(0.03))=0.97$, то $u(0.03)=2.17$. Отже, $n=\left(\dfrac{u(0.03)\cdot\sigma}{\Delta}\right)^2\approx 30$.

5.3.3. Довірчий інтервал для математичного сподівання a нормального розподілу при невідомій дисперсії σ^2

Важливу роль надалі відіграє наступна теорема.

Теорема (Р. Фішер). Нехай $X_1,...,X_n$– випадкова вибірка з закону Гаусса $N(a;\sigma^2)$. Тоді статистики $\bar{X}$ і S^2 є незалежними ВВ, причому статистика $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ розподілена за законом χ^2 з n–1 степенями вільності .

Нехай ВВ $X\sim N(a;\sigma^2)$. Потрібно побудувати довірчий інтервал для a за результатами $X_1,...,X_n$ n незалежних вимірювань при невідомій дисперсії.

Природньо розглянути статистику $G=\sqrt{n}\left(\bar{X}-a\right)\big/\sqrt{S^2}$, яку подаємо у вигляді

$$G=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}-a)/\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}=\frac{Y}{\sqrt{Z/n-1}}.$$

Тут $Y=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-a)\sim N(0;1)$, а на підставі теореми Фішера незалежна від Y статистика $Z=\sum_{i=1}^{n}((X_i-\overline{X})/\sigma)^2$ має розподіл χ^2 з

n–1 степенями вільності. Отже, статистика G розподілена за законом Стьюдента (підрозділ 2.2.4 пункт 4)) з n–1 степенями вільності, який не залежить від параметрів a і σ^2 випадкової величини X.

Тепер знайдемо, використовуючи табл. Д.1.2, за заданим рівнем значущості ε число $t(n\text{-}1;\varepsilon)$ (нагадаємо, що $t(n\text{-}1;\varepsilon)$ – квантиль розподілу Стьюдента з n–1 степенями вільності порядку $1-\frac{\varepsilon}{2}$, більш детально див. п. 2.2.4). Тоді довірчий інтервал надійності $1-\varepsilon$ для невідомого параметра a записується так

$$\boxed{\left(\bar{X}-t(n-1;\varepsilon)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}};\,\bar{X}+t(n-1;\varepsilon)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)}, \qquad (5.23)$$

де випадкова величина $S=\sqrt{S^2}$.

Зазначимо, що і центр, і довжина цього інтервалу є випадковими величинами. Серед усіх можливих довірчих інтервалів надійності $1-\varepsilon$ для параметра a при невідомій дисперсії σ^2 цей інтервал має найменшу довжину.

При кількості вимірювань $n>25$ замість табл. Д.1.2 можна використовувати табл. Д.1.1. Проте при малих n це призводить до звуження довірчого інтервалу, оскільки $t(n\text{-}1;\varepsilon)>u(\varepsilon)$ (див. рис. 2.26).

Приклад 17. Проведено 9 незалежних вимірювань напруги випадкового радіосигналу, розподіленого за нормальним законом з невідомими математичним сподіванням a і дисперсією σ^2. Знайти довірчі інтервали надійності 0.9 і 0.99 для a, якщо емпіричні (вибіркові) середнє та виправлена дисперсія дорівнюють $\bar{x}=30$ мкВ, $s^2=9$ мкВ^2.

Розв'язання. Для рівня значущості $\varepsilon=0.1$ у табл. Д.1.2 знаходимо $t(8;0.1)=1.86$. Таким чином, $t(8;0.1)\frac{s}{\sqrt{9}}$=1.86, $\bar{x}-t(8;0.1)\frac{s}{\sqrt{9}}=28.14$ мкВ, $\bar{x}+t(8;0.1)\frac{s}{\sqrt{9}}=31.86$ мкВ і довірчий інтервал буде таким: (28.14;31.86) мкВ; аналогічно для ε=0.01 одержимо $t(8;0.01)\frac{s}{\sqrt{9}}$=3.36 і довірчий інтервал (26.64; 33.36) мкВ.

На цьому прикладі добре видно, як **розширюється довірчий інтервал із збільшенням надійності.** Якщо замість $t(8;0.1)$ і $t(8;0.01)$ використати $u(0.1) = 1.64$ і $u(0.01) = 2.58$, то одержимо інтервали (28.36; 31.64) мкВ і (27.42; 32.58) мкВ, кожен з яких вужчий за раніше побудовані довірчі інтервали.

5.3.4. Довірчий інтервал для дисперсії σ^2 нормального розподілу при невідомому математичному сподіванні a

Нехай $X\sim N(a;\sigma^2)$. Побудова довірчого інтервалу для σ^2 за результатами n незалежних вимірювань ґрунтується на тому, що статистика $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ розподілена за законом χ^2 з n–1 степенями вільності, який не залежить від невідомих параметрів a і σ^2.

Знайдемо проміжок, у який потрапляє ВВ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ з імовірністю 1-ε. Це можна зробити, наприклад, так:

1) визначимо за заданим рівнем значущості ε з табл. Д.1.3 такі два числа $\chi^2(n-1;\frac{\varepsilon}{2})$ та $\chi^2(n-1;1-\frac{\varepsilon}{2})$, що

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2\left(n-1;\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = \frac{\varepsilon}{2},\quad P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2\left(n-1;1-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = 1-\frac{\varepsilon}{2};$$

2) тоді $P\left\{\chi^2\left(n-1;1-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2\left(n-1;\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = 1-\varepsilon$ і, отже, остаточно будемо мати

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left(n-1;\frac{\varepsilon}{2}\right)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left(n-1;1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right\} = 1-\varepsilon.$$

З останнього випливає, що проміжок

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left(n-1;\frac{\varepsilon}{2}\right)};\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left(n-1;1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)} \tag{5.24}$$

є довірчим інтервалом надійності $1-\varepsilon$ для невідомого параметра σ^2. Для подальшого полегшення обчислень у табл. Д.1.4 наводяться значення величин $z^{(1)}(n;\varepsilon)=\dfrac{n-1}{\chi^2\left(n-1;\frac{\varepsilon}{2}\right)}$,

$z^{(2)}(n;\varepsilon)=\dfrac{n-1}{\chi^2\left(n-1;1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}$.

Отже, довірчий інтервал для дисперсії можна подати у формі

$$\boxed{\left(z^{(1)}(n;\varepsilon)S^2;\ z^{(2)}(n;\varepsilon)S^2\right),} \tag{5.24a}$$

а довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення буде мати вигляд

$$\left(\sqrt{z^{(1)}(n;\varepsilon)S^2};\sqrt{z^{(2)}(n;\varepsilon)S^2}\right).$$

Приклад 18. Проведено 16 незалежних вимірювань діаметра вала. Похибки вимірювань розподілені за нормальним законом з невідомими математичним сподіванням і дисперсією. Емпірична виправлена дисперсія дорівнює $s^2=4.5$ мм^2. Знайти довірчі інтервали надійністю 0.9 і 0.95 для справжнього значення середнього квадратичного відхилення.

Розв'язання. Для рівня значущості $\varepsilon=1-0.9=0.1$ у табл. Д.1.4 знаходимо $z^{(1)}(16;0.1)=0.6$, $z^{(2)}(16;0.1)=2.07$. Таким чином, довірчий інтервал для дисперсії надійністю 0.9 має вигляд $(0.6\cdot4.5=2.7;\ 2.07\cdot4.5=9.32)$ мм^2, а довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ буде (1.64; 3.05) мм.

Якщо $\varepsilon=1-0.95=0.05$, то $z^{(1)}(16;0.05)=0.545$, $z^{(2)}(16;0.05)=2.40$ та довірчий інтервал для σ має вигляд (1.56; 3.29) мм.

В основі побудови довірчого інтервалу для дисперсії при відомому математичному сподіванні *a* лежить статистика nS_0^2/σ^2, яка розподілена за законом χ^2 з *n* степенями вільності. У цьому випадку довірчий інтервал надійності $1-\varepsilon$ для σ^2 має вигляд

$$\boxed{\left(\frac{nS_0{}^2}{\chi^2\left(n;\frac{\varepsilon}{2}\right)};\frac{nS_0{}^2}{\chi^2\left(n;1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)}.$$

Приклад 19. При випробуванні нового зразка дальноміра зроблено 10 вимірювань еталонної відстані, яка дорівнює 1920 м. Результати вимірювань, м: 1925, 1915, 1920, 1920, 1923, 1916, 1917, 1922, 1921, 1919. Знайти довірчий інтервал надійності 0.95 для справжнього значення середнього квадратичного відхилення.

***Розв'язання*.** Маємо

$$s_0^2 = 0.1 \cdot ((1925-1920)^2 + (1915-1920)^2 + \ldots +$$
$$+(1919-1920)^2) = 9.$$

Оскільки $z^{(1)}(11;0.1) = 0.488$, $z^{(2)}(11;0.1)$=3.08, то довірчий інтервал для дисперсії має вигляд ($9 \cdot 0.488$=4.392; $9 \cdot 3.08$=27.72) м^2.

Отже, довірчий інтервал надійності 0.95 для справжнього значення середнього квадратичного відхилення буде (2.096; 5.26) м.

У тому разі, коли розподіл випадкової величини X не є нормальним, можна на підставі ЦГТ при досить великому об'ємі вибірки отримати наближені формули для довірчих інтервалів. Наприклад,

$$\boxed{P\{m_X \in (\overline{X} - u(\varepsilon)\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + u(\varepsilon)\frac{S}{\sqrt{n}})\} \approx 1-\varepsilon\,,} \qquad (5.25)$$

де випадкова величина $S = \sqrt{S^2}$.

5.3.5. Довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції

Нехай випадковий вектор $(X;Y)$ розподілений за законом Гаусса (формула (2.33)). Потрібно за вибіркою $((x_1;y_1);(x_2;y_2);\ldots;(x_n;y_n))$ побудувати довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції r.

Можна показати, що при $n \geq 10$ випадкова величина Z, яка зв'язана зі статистикою $\hat{R}$ (формула (5.16)) співвідношенням $\hat{R}$=th$Z$, наближено розподілена за законом $N(\text{Arth}\,r\;;\frac{1}{n-3})$. Тут функції th і Arth – відповідно гіперболічний тангенс і обернений гіперболічний тангенс, значення яких наведені в табл. Д.1.5.

Довірчий інтервал надійності $1-\varepsilon$ для коефіцієнта кореляції r має вигляд

$$\boxed{(\operatorname{th} Z_1; \operatorname{th} Z_2)}, \qquad (5.26)$$

де $Z_1 = Arth\hat{R} - \frac{u(\varepsilon)}{\sqrt{n-3}}$, $Z_2 = Arth\hat{R} + \frac{u(\varepsilon)}{\sqrt{n-3}}$, а число $u(\varepsilon)$ таке, що $2\Phi(u(\varepsilon))=1-\varepsilon$, знаходиться за табл. Д.1.1.

Якщо вибірковий коефіцієнт кореляції суттєво відрізняється від нуля, то для істинного коефіцієнта кореляції можна користатися наближеним довірчим інтервалом вигляду

$$\boxed{\hat{R} - u(\varepsilon)\cdot\frac{1-\hat{R}^2}{\sqrt{n}} < r < \hat{R} + u(\varepsilon)\cdot\frac{1-\hat{R}^2}{\sqrt{n}}}. \qquad (5.27)$$

Приклад 20. Побудувати довірчий інтервал рівня значущості $\varepsilon = 0.05$ для коефіцієнта кореляції r двовимірного нормально розподіленого випадкового вектора, якщо знайдений за вибіркою об'єму 28 вибірковий коефіцієнт кореляції $\tilde{r}_{X,Y} = 0.71$.

Розв'язання. З табл. Д.1.5 знаходимо $\operatorname{Arth}0.71=0.88$. Оскільки $u(0.05) = 1.96$, то $z_1=0.88-\frac{1.96}{5}=0.49$, $z_2=0.88+\frac{1.96}{5}=1.27$. Знову використаємо табл. Д.1.5, щоб знайти $\operatorname{th}0.49=0.46$ і $\operatorname{th}1.27=0.86$. Таким чином, довірчий інтервал надійністю 0.95 для коефіцієнта кореляції r буде (0.46; 0.86).

5.3.6. Довірча область для прямої регресії

5.3.6.1. Лінійна регресія

Нехай випадкова величина Y залежить від незалежної змінної x так, що при кожному фіксованому значенні x випадкова величина Y має деякий розподіл імовірності з математичним сподіванням, яке є функцією

$$M(Y/x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Припустимо, що модель спостережень (вимірювань) має вигляд

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + E, \qquad (5.28)$$

де випадкова похибка вимірювань $E \sim N\left(0;\sigma^2\right)$, причому параметри β_0, β_1 і σ^2 невідомі і їх оцінки визначають за результатами спостережень.

Нехай здійснюється n незалежних вимірювань випадкової величини Y при різних значеннях $x_1,...,x_n$ незалежної змінної x і при цьому отримано відповідно результати $y_1,...,y_n$. Зрозуміло, що за допомогою вибірки обмеженого об'єму знайти істинні значення параметрів β_0, β_1 і σ^2 неможливо. Оскільки можливий результат Y_i $i-$го вимірювання подається у вигляді суми $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x + E_i$, де випадкові похибки вимірювань $E_i \sim N\left(0;\sigma^2\right)$ є незалежними величинами, то $Y_i \sim N\left(Y = \beta_0 + \beta_1 x_i; \sigma^2\right)$.

Результат експерименту в цілому полягає в тому, що ВВ-р $\vec{Y}\left(Y_1;...;Y_n\right)$ з незалежними координатами набув значення $\vec{y}\left(y_1;...;y_n\right)$. Можна вважати, що найкраще узгоджуються з результатом експерименту такі значення параметрів β_0, β_1, (статистичні оцінки), які мінімізують суму квадратів відхилень спостережних значень випадкових величин Y_i від їхніх математичних сподівань

$$\Delta\left(\beta_0, \beta_1\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 x_i\right)\right)^2 .$$

Функція $\beta_0 + \beta_1 x$ визначає вибіркову (емпіричну) лінійну регресію і є статистичною оцінкою невідомої істинної лінійної регресії $\beta_0 + \beta_1 x$.

5.3.6.2. Параметри лінійної регресії

Необхідна умова мінімуму функції $\Delta\left(\beta_0, \beta_1\right)$ має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial \beta_0} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right) = 0\,, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right) \cdot x_i = 0\ . \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо такі точкові оцінки для невідомих параметрів β_0, β_1:

$$\beta_0=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}Y_i-\beta_1\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{Y}-\beta_1\cdot\bar{x},\tag{5.29}$$

$$\beta_1=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot Y_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}.\tag{5.30}$$

Оцінки β_0 і β_1 є лінійними функціями випадкових величин Y_i, що розподілені нормально, і, таким чином, самі оцінки мають нормальний розподіл.

Знайдемо числові характеристики оцінок β_0 і β_1. Оскільки $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)=0$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot\left(Y_i-\bar{Y}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot Y_i-\bar{Y}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot Y_i$$

і, отже,

$$M\beta_1=M\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot MY_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot\left(\beta_0+\beta_1\cdot x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=$$

$$=\beta_0\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}+\beta_1\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\beta_1\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\beta_1\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\left(\bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=$$

$$=\beta_1\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\beta_1.$$

Оскільки $M\beta_0=M\bar{Y}-\beta_1\cdot\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\left(n\beta_0+n\beta_1\cdot\bar{x}\right)-\beta_1\cdot\bar{x}=\beta_0$, то доведено, що β_0 і β_1 є відповідно незсуненими оцінками параметрів β_0 і β_1. Далі маємо

$$D\beta_1 = D\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot DY_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2};$$

оскільки $K\left(Y_j, \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot Y_i\right) = (x_j-\bar{x})\cdot\sigma^2$, то $K(\bar{Y},\beta_1)=0$ і

$$D\beta_0 = D(\bar{Y}-\beta_1\cdot\bar{x}) = D\bar{Y} + (\bar{x})^2\cdot D\beta_1 - 2\bar{x}\cdot K(\bar{Y},\beta_1) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{(\bar{x})^2\cdot\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} =$$

$$= \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

Отже, $\beta_0 \sim N_0\left(\beta_0; \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)$, $\beta_1 \sim N\left(\beta_1; \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)$.

5.3.6.3. Довірчі інтервали параметрів β_0, β_1 і σ^2

Статистика $\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i\right)^2$, яка характеризує розсіювання результатів спостережень відносно вибіркової прямої регресії, є незсуненою оцінкою дисперсії σ^2 похибок вимірювань.

Оскільки $Y_i \sim N(\beta_0+\beta_1 x_i; \sigma^2)$, то можна довести, що статистики β_0, β_1, $\frac{(n-2)\sigma^2}{\sigma^2}$ є незалежними випадковими величинами і остання з них має розподіл хі-квадрат з $n-2$ степенями вільності.

Таким чином, випадкові величини

$$\frac{\beta_0-\beta_0}{\sqrt{D\beta_0}} : \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}} = \frac{\beta_0-\beta_0}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\sigma} \quad \text{і} \quad \frac{\beta_1-\beta_1}{\sqrt{D\beta_1}} : \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}} = \frac{\beta_1-\beta_1}{\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\sigma}$$

розподілені за законом Стьюдента з $n-2$ степенями вільності. Це твердження дає можливість за формулою (5.23) знайти довірчі інтервали заданої надійності $1-\varepsilon$ для параметрів лінійної регресії β_0 і β_1:

$$\beta_0 - t(n-2;\varepsilon)\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} < \beta_0 < \beta_0 + t(n-2;\varepsilon)\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}, \quad (5.31)$$

$$\beta_1 - t(n-2;\varepsilon)\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} < \beta_1 < \beta_1 + t(n-2;\varepsilon)\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}, \quad (5.32)$$

де $t(n-2;\varepsilon)$ – квантиль рівня $1-\varepsilon/2$ розподілу Стьюдента з $n-2$ степенями вільності (табл. Д.1.2).

Оскільки випадкова величина $\frac{(n-2)\overline{\sigma}^2}{\sigma^2}$ розподілена за законом хі-квадрат з $n-2$ степенями вільності, то довірчий інтервал заданої надійності $1-\varepsilon$ для дисперсії σ^2 похибок вимірювань на підставі формули (5.24) має вигляд

$$\frac{(n-2)\cdot\overline{\sigma}^2}{\chi^2\left(n-2;\frac{\varepsilon}{2}\right)} < \sigma^2 < \frac{(n-2)\cdot\overline{\sigma}^2}{\chi^2\left(n-2;1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

5.3.6.4. Довірча область для лінії регресії

Оскільки $\beta_0 = \overline{Y} - \beta_1\cdot\overline{x},$ то статистичній функції регресії $\beta_0 + \beta_1\cdot x$ можна надати вигляду $\overline{Y} + \beta_1\cdot(x-\overline{x})$. Нехай незалежна змінна x набуває значення x_i. Знайдемо числові характеристики випадкової величини $\overline{Y} + \beta_1\cdot(x_i-\overline{x})$, яка розподілена за нормальним законом:

$$M\left(\overline{Y} + \beta_1\cdot(x_i-\overline{x})\right) = \beta_0 + \beta_1\cdot\overline{x} + \beta_1\cdot(x_i-\overline{x}) = \beta_0 + \beta_1\cdot x_i,$$

$$D\left(\overline{Y}+\beta_1\left(x_i-\overline{x}\right)\right)=D\overline{Y}+\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot D\beta_1+2\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot K\left(\overline{Y},\beta_1\right)=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}.$$

Можна довести, що випадкова величина

$$\frac{\beta_0+\beta_1\cdot x_i-\beta_0-\beta_1\cdot x_i}{\sigma\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}}$$

має розподіл Стьюдента з $n-2$ степенями вільності. Тепер можна знайти **довірчу область** (залежну від можливих результатів спостережень $\vec{Y}\left(Y_1;...;Y_n\right)$ випадкову область на площині *x*O*y*) для прямої регресії, що накриває цю пряму з імовірністю $1-\varepsilon$:

$$\beta_0+\beta_1\cdot x_i-t\left(n-2;\varepsilon\right)\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}<\beta_0+\beta_1\cdot x_i<$$

$$<\beta_0+\beta_1\cdot x_i+t\left(n-2;\varepsilon\right)\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}.$$

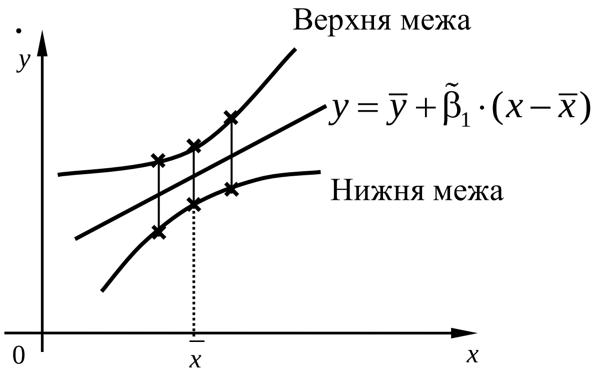


Рис. 5.9

Таким чином, довірча область міститься між двома вітками гіперболи, уявною віссю якої є пряма $y=\beta_0+\beta_1\cdot x$, яка є оцінкою прямої регресії.

З рис. 5.9 видно, що найбільш вузьким довірчий інтервал є при $x=\overline{x}$. Ця довірча область визначає лише місце розташування прямої регресії $\beta_0+\beta_1 x$ (середнього значення $M\left(Y/x\right)$ залежної змінної Y як функції незалежної змінної x), але не окремих можливих значень залежної змінної Y, які відхиляються від неї. Для того щоб знайти довірчий інтервал для прогнозних значень залежної змінної $Y(x_П)$, необхідно визначити дисперсію $Y(x_П)$. При цьому, крім дисперсії величини $\bar{Y}+\beta_1\cdot(x_П-\bar{x})$, необхідно врахувати дисперсію, яка відповідає розкиду значень $Y(x_П)$ відносно прямої регресії. Отже, будемо виходити з моделі $Y(x_П)=\bar{Y}+\beta_1\cdot(x_П-\bar{x})+E(x_П)$, де незалежна від $\vec{Y}(Y_1;...;Y_n)$ випадкова величина $E(x_П)\sim N(0;\sigma^2)$. Тоді отримуємо

$$DY(x_П)=D\left(\bar{Y}+\beta_1(x_П-\bar{x})\right)+DE(x_П)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2(x_П-\bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}+\sigma^2=\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(x_П-\bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right).$$

Таким чином, довірчий інтервал заданої надійності $1-\varepsilon$ для прогнозу значення залежної змінної Y, яке відповідає заданому значенню незалежної змінної $x=x_П$, буде мати вигляд

$$\beta_0+\beta_1\cdot x_П-t(n-2;\varepsilon)\cdot\sigma\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_П-\bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}<\beta_0+\beta_1\cdot x_П<$$

$$<\beta_0+\beta_1\cdot x_П+t(n-2;\varepsilon)\cdot\sigma\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_П-\bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}.$$

Оскільки випадкова величина $\frac{(n-2)\sigma^2}{\sigma^2}$ розподілена за законом хі-квадрат з $n-2$ степенями вільності, то довірчий інтервал заданої надійності $1-\varepsilon$ для дисперсії похибок вимірювань σ^2 на підставі формули (5.24) має вигляд

$$\frac{(n-2)\cdot\sigma^2}{\chi^2\left(n-2;\frac{\varepsilon}{2}\right)}<\sigma^2<\frac{(n-2)\cdot\sigma^2}{\chi^2\left(n-2;1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Приклад 21. За заданою вибіркою

x	7.9	11.6	12.8	14.9	16.3	18.6	20.3	21.9	23.6
y	13.0	22.8	24.8	28.6	31.6	38.7	40.0	44.9	43.0

знайти: 1) оцінки параметрів лінійної регресії Y на x; 2) оцінку дисперсії похибок спостережень; 3) довірчі інтервали надійності 0.9 для параметрів лінійної регресії і для прямої регресії при $x = x_0$; 4) довірчий інтервал надійності 0.9 для прогнозу $Y\left(x_П = 13\right)$.

Розв'язання: 1) знаходимо суми $\sum_{i=1}^{9} x_i = 147.9$, $\sum_{i=1}^{9} y_i = 287.4$, , $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 2643.13$; $\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 10083.1$; $\sum_{i=1}^{9} x_i \cdot y_i = 5155.77$.

Тоді емпіричні середні дорівнюють $\bar{x} = 16.4333$ і $\bar{y} = 31.9333$.

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{9}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 - 9\cdot\left(\bar{x}\right)^2 = 2643.13 - 9\cdot\left(16.4333\right)^2 = 212.64,$$

$$\sum_{i=1}^{9}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{9} y_i^2 - 9\cdot\left(\bar{y}\right)^2 = 10083.1 - 9\cdot\left(31.9333\right)^2 = 905.46,$$

$$\sum_{i=1}^{9}\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(y_i - \bar{y}\right) = \sum_{i=1}^{9} x_i \cdot y_i - 9\cdot\bar{x}\cdot\bar{y} =$$

$$= 5155.77 - 9\cdot 16.4333\cdot 31.9333 = 432.83,$$

то вибіркові оцінки коефіцієнтів лінійної регресії є такими:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{432.83}{212.64} = 2.036,\ \tilde{\beta}_0 = \frac{287.4}{9} - 2.036\cdot\frac{147.9}{9} = -1.525 \ .$$

Отже, вибіркова лінійна регресія Y на x має вигляд $\tilde{y} = -1.525 + 2.036x$.

Нагадаємо, що вибіркова регресія є оцінкою теоретичної (передбачуваної) лінійної регресії $\beta_0 + \beta_1 \cdot x$;

2) вибіркове значення $\tilde{\sigma}^2$ дисперсії похибок вимірювання дорівнює $\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{9}\left(y_i - \tilde{y}_i\right)^2$, де $\tilde{y}_i = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot x_i$ – розрахункові значення. Останню суму можна обчислити безпосередньо, але набагато простіше знайти її за допомогою тотожності

$$\sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2=\sum\left(\tilde{y}_i-\bar{y}\right)^2+\sum\left(y_i-\tilde{y}_i\right)^2.$$

Оскільки
$\sum_{i=1}^{9}\left(\tilde{y}_i-\bar{y}\right)^2=\tilde{\beta}_1^2\cdot\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\tilde{\beta}_1\cdot\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot\left(y_i-\bar{y}\right)=2.036\cdot 432.83=881.24$, то $\sum_{i=1}^{9}\left(y_i-\tilde{y}_i\right)^2=905.46-881.24=24.22$. Таким чином, вибіркове значення $\tilde{\sigma}^2$ дисперсії похибок вимірювання дорівнює $\tilde{\sigma}^2=\dfrac{24.22}{7}=3.46\Rightarrow\tilde{\sigma}=1.86$;

3) через те що за табл. Д.1.2 $t(7;0.1)=1.895$, межі довірчих інтервалів для β_0 і β_1 будуть відповідно такими:

$$-1.525\pm1.895\cdot1.86\cdot\sqrt{\frac{2643.13}{9\cdot212.64}}=-1.525\pm4.143\;\Rightarrow\;\beta_0\in(-5.67\,;\,2.62);$$

$$2.036\pm1.895\cdot1.86\cdot\sqrt{\frac{1}{212.64}}=2.036\pm0.242\;\Rightarrow\;\beta_1\in\left(1.79\,;\,2.28\right).$$

Межі довірчого інтервалу для середнього значення $M\left(Y/x_0\right)$ залежної змінної Y, яке відповідає заданому значенню незалежної змінної $x=x_0$, дорівнюють (розрахункове значення $\tilde{y}\left(x_0\right)=-1.525+2.036\cdot x_0$)

$$-1.525+2.036\cdot x_0\pm1.895\cdot1.86\cdot\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{\left(x_0-16.433\right)^2}{212.64}}=$$

$$=-1.525+2.036\cdot x_0\pm3.525\cdot\sqrt{0.111+0.0047\cdot\left(x_0-16.433\right)^2};$$

4) знайдемо межі довірчого інтервалу для прогнозного значення $y\left(x_П=13\right)$: $\tilde{y}\left(x_П=13\right)=-1.525+2.036\cdot13=24.943$,

$$t\left(n-2;\varepsilon\right)\cdot\tilde{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_П-\bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}}=1.895\cdot1.86\sqrt{1+0.111+0.0047\cdot\left(13-16.43\right)^2}=$$

$=3.525\cdot1.08=3.807$ і, отже, отримуємо $y\left(x_П=13\right)=24.943\pm3.807$ $\Rightarrow y\left(x_П=13\right)\in\left(21.14\,;\,28.75\right)$.

5.4. Статистична перевірка гіпотез

5.4.1. Основні поняття

Статистичною гіпотезою називається припущення щодо істинного значення невідомого параметра розподілу або відносно функціонального вигляду закону розподілу.

5.4.1.1. Критерій перевірки гіпотез

Нехай деякий параметр закону розподілу випадкової величини X є невідомим. Висунемо відносно невідомого істинного значення цього параметра дві гіпотези: основну H_0, яка перевіряється, і конкуруючу H_1 (зрозуміло, що множини можливих значень параметра, що відповідають гіпотезам H_0 і H_1, не перетинаються). Гіпотеза називається **простою**, якщо вона повністю визначає розподіл випадкової величини, і **складною**, якщо вона не є простою. Наприклад, гіпотеза про те, що випадкова величина має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = \lambda_0$, є простою, а гіпотеза про те, що параметр $\lambda \geq \lambda_0$, є складною.

Потрібно за конкретними результатами $\vec{x}(x_1; x_2; ...; x_n)$ n незалежних випробувань $\vec{X}(X_1; X_2; ...; X_n)$ випадкової величини X встановити, заперечує або ні основна гіпотеза H_0 результатам експерименту. Критерій (правило), відповідно до якого для кожної реалізації $\vec{x}(x_1; x_2; ...; x_n)$ приймається одно з двох рішень, прийняти основну гіпотезу H_0 або відхилити її (тобто прийняти конкуруючу гіпотезу H_1), називається **критерієм перевірки гіпотез**.

Оскільки таке рішення ґрунтується на реалізації $\vec{x}$ випадкового вектора $\vec{X}$, то необхідно знайти відповідну статистику $T(X_1, ..., X_n)$ критерію, розподіл якої за умови правильності гіпотези H_0, є повністю визначеним. За допомогою цієї статистики (ця статистика повинна також бути незсуненою, спроможною і ефективною) описується відхилення результатів експерименту від результату, що припускається, і робиться висновок про справжність або хибність основної гіпотези H_0. А саме вибираємо заздалегідь досить мале число $\varepsilon > 0$, яке називається **рівнем значущості**, і знаходимо таку підмножину $V_{кр}$ значень статистики $T(X_1, ..., X_n)$, що умовна ймовірність

$$\boxed{P\left\{T(X_1,...,X_n)\in V_{кр}/H_0\right\}=\varepsilon.}$$

Подія $\left\{T(X_1,...,X_n)\in V_{кр}/H_0\right\}$ є практично неможливою і тому поява таких значень $\vec{x}(x_1;x_2;...;x_n)$, що $T(x_1,...,x_n)\in V_{кр}$, свідчить про те, що гіпотеза H_0 є хибною при даному рівні значущості, ($\vec{x}(x_1;x_2;...;x_n)$ значуще **відрізняється від результату, який припускається. Отже, гіпотезу *H*₀ слід** відхилити при $T(x_1,...,x_n)\in V_{кр}$. Множину $V_{кр}$ називають **критичною областю.** Якщо ж $T(x_1,...,x_n)\notin V_{кр}$, то результати експерименту не суперечать гіпотезі H_0 ($\vec{x}(x_1;x_2;...;x_n)$, незначно відрізняється від результату, який припускається). Розташування критичної області $V_{кр}$ залежить від формулювання конкуруючої гіпотези H_1.

Критерій перевірки гіпотез, який ґрунтується на рівні значущості ε, називається критерієм **рівня значущості ε.**

5.4.1.2. Визначення критичної області. Помилки першого та другого роду

Нехай закон розподілу містить невідомий параметр θ. Висунемо відносно цього параметра просту гіпотезу $H_0:\theta=\theta_0$, де θ_0 – задане число:

1) якщо конкуруюча гіпотеза є складною $H_1:\theta<\theta_0$, то критична область $V_{кр}$, яка відповідає рівню значущості ε, визначається нерівністю $T(x_1,...,x_n)<t^{л}_{кр}$. Тут **лівостороння критична точка** $t^{л}_{кр}$ знаходиться з рівняння $P\{T(X_1,...,X_n)<t^{л}_{кр}\}=\int\limits_{-\infty}^{t^{л}_{кр}} p_T(t/H_0)dt=\varepsilon$, (рис. 5.10,а).

Таким чином, $t^{л}_{кр}$ дорівнює квантилю рівня ε розподілу статистики $T(X_1,...,X_n)$;

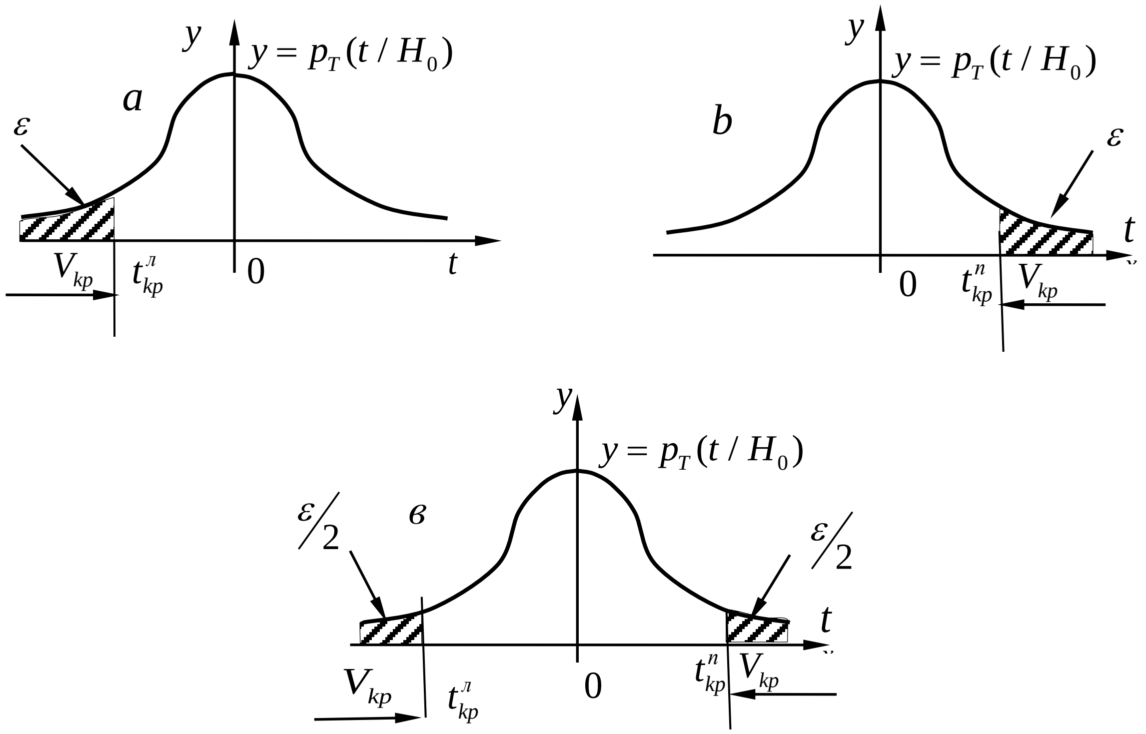


Рис. 5.10

2) у випадку, коли складна конкуруюча гіпотеза є такою: $H_1 : \theta > \theta_0$, критична область $V_{кр}$, яка відповідає значенню ε, визначається нерівністю $T(x_1,...,x_n) > t_{кр}^{п}$, де **правостороння критична точка** $t_{кр}^{п}$ знаходиться з рівняння $P\{T > t_{кр}^{п}\} = \int\limits_{t_{кр}^{п}}^{+\infty} p_T(t / H_0)dt = \varepsilon$ (рис. 5.10, б). Отже, $t_{кр}^{п}$ є квантилем рівня $1-\varepsilon$ розподілу статистики $T(X_1,...,X_n)$;

3) якщо альтернативною є гіпотеза $H_1 : \theta \neq \theta_0$, то критична область $V_{кр}$, яка відповідає значенню ε, визначається нерівностями $T(x_1,...,x_n) < t_{кр}^{л}$, $T(x_1,...,x_n) > t_{кр}^{п}$, де $t_{кр}^{л}$ та $t_{кр}^{п}$ знаходяться з рівнянь

$$P\{T(X_1,...,X_n) < t_{кр}^{л}\} = \int\limits_{-\infty}^{t_{кр}^{л}} p_T(t / H_0)dt = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$P\{T(X_1,...,X_n) > t_{кр}^{п}\} = \int\limits_{t_{кр}^{п}}^{+\infty} p_T(t / H_0)dt = \frac{\varepsilon}{2} \text{ (рис. 5.10, в).}$$

У цьому випадку $t_{кр}^{л}$ та $t_{кр}^{п}$ дорівнюють відповідно квантилям рівня $\varepsilon/2$, $1-\varepsilon/2$ розподілу статистики $T(X_1,...,X_n)$.

Критичні області на рис. 5.10, а, б, в називаються, відповідно, **лівосторонньою, правосторонньою та двосторонньою.**

Розглянемо задачу перевірки простої гіпотези H_0 проти простої конкуруючої гіпотези H_1. Позначимо через $\gamma_i(i=0,1)$ рішення прийняти гіпотезу H_i. При використанні будь-якого правила прийняття рішень можна прийти до правдивого рішення (γ_0/H_0 – правильне прийняття основної гіпотези H_0 і γ_1/H_1 – правильне відхилення основної гіпотези H_0) або зробити два помилкових рішення (γ_1/H_0 – неправильне відхилення основної гіпотези H_0 і γ_0/H_1 – неправильне прийняття основної гіпотези H_0). Рішення γ_1/H_0 називається **помилкою першого роду**, а рішення γ_0/H_1 – **помилкою другого роду**.

Умовні ймовірності

$$\alpha = P(\gamma_1/H_0) = P\{T(X_1,\ldots,X_n) \in V_{kp}/H_0\},$$

$$\beta = P(\gamma_0/H_1) = P\{T(X_1,\ldots,X_n) \notin V_{kp}/H_1\}$$

називаються відповідно **ймовірностями помилок першого і другого роду** (зрозуміло, що ймовірність помилки першого роду дорівнює рівню значущості ε). При цьому умовні ймовірності правильних рішень будуть дорівнювати

$$P(\gamma_0/H_0) = P\{T(X_1,\ldots,X_n) \notin V_{kp}/H_0\} = 1-\alpha,$$

$$P(\gamma_1/H_1) = P\{T(X_1,\ldots,X_n) \in V_{kp}/H_1\} = 1-\beta.$$

Імовірність $1-\beta$ називається **потужністю критерію** прийняття рішень.

Таким чином, потужність критерію прийняття рішень дорівнює ймовірності обґрунтовано відхилити неправильну основну гіпотезу H_0, якщо справедлива конкуруюча гіпотеза H_1.

Наслідки помилок першого і другого роду можуть бути різними. Тому, щоб віддати перевагу одному правилу прийняття рішень перед іншим, потрібно знати ймовірності α і β, з якими правило допускає помилки першого та другого роду. Бажано зробити ймовірності помилок як першого, так і другого роду якомога меншими. Однак при заданій кількості n випробувань одночасна мінімізація ймовірностей помилок α і β виявляється неможливою. Проілюструємо цей факт за допомогою рис. 5.11.

Приклад 22. Нехай розподіл статистики T, яка використовується для перевірки основної гіпотези $H_0: MX = a_0$ проти конкуруючої гіпотези $H_1: MX = a_1 > a_0$, є таким: $p_T\left(t/H_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, $p_T\left(t/H_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$. Показати, що зі зменшенням α збільшується β.

Розв'язання. Критична область $V_{кр}$ правостороння (рис. 5.11). При $T(x_1,...,x_n) < t_{кр}^n$ гіпотеза H_0 приймається.

Площа під кривою $y = p_T\left(t/H_0\right)$ ліворуч від точки $t_{кр}^n$ є ймовірністю правильного прийняття гіпотези H_0, якщо вона є справедливою.

Площа під кривою $y = p_T\left(t/H_0\right)$ праворуч від точки $t_{кр}^n$ дорівнює ймовірності α помилки першого роду:

$$\int_{t_{кр}^n}^{+\infty} p_T(t/H_0)dt = P\{T\left(X_1,...,X_n\right) \in V_{кр} \; /H_0\} = \alpha .$$

Площа під кривою $y = p_T\left(t/H_1\right)$ ліворуч від точки $t_{кр}^n$ дорівнює ймовірності β помилки другого роду:

$$\int_{-\infty}^{t_{кр}^n} p_T(t/H_1)dt = P\{T\left(X_1,...,X_n\right) \notin V_{кр} \; /H_1\} = \beta .$$

Площа під кривою $y = p_T\left(t/H_1\right)$ праворуч від точки $t_{кр}^n$ дорівнює потужності $1-\beta$ критерію прийняття рішень.

З цього рисунка інтуїтивно зрозуміло, що якщо зменшувати значення α, то критична точка $t_{кр}^n$ зміщуватиметься праворуч, що спричиняє збільшення ймовірності β помилки другого роду.

Для багатьох задач перевірки простих гіпотез розумно вважати **оптимальним** такий критерій, для якого при заданій імовірності α помилки першого роду (рівні значущості) імовірність β помилки другого роду є найменшою (тобто потужність $1-\beta$ критерію є найбільшою).

5.4.1.3. Загальний алгоритм перевірки статистичної гіпотези

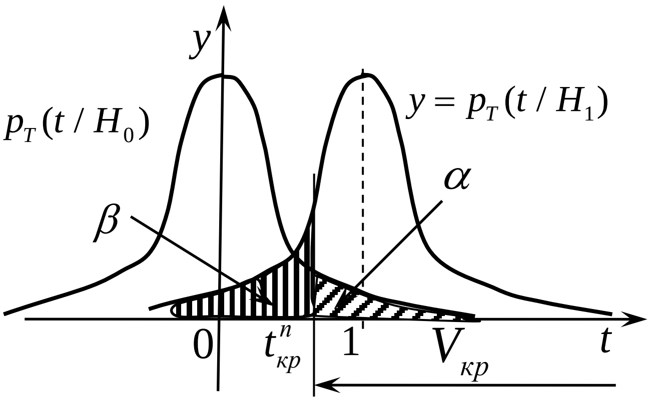


Рис. 5.11

Перевірка статистичних гіпотез за допомогою критерію значущості може бути розбита на такі кроки:

1. Сформулювати основну H_0 та альтернативну H_1 гіпотези та обрати рівень значущості ε.

2. Обрати статистику $T(X_1,...,X_n)$ для перевірки гіпотези H_0.

3. Залежно від формулювання альтернативної гіпотези визначити критичну область V_{kp} однією з нерівностей:

$T(X_1,...,X_n) < t^л_{кр}$ (для лівосторонньої області $t^л_{кр}$ дорівнює квантилю рівня ε розподілу статистики $T(X_1,...,X_n)$);

$T(X_1,...,X_n) > t^n_{кр}$ (для правосторонньої області $t^n_{кр}$ дорівнює квантилю рівня $1-\varepsilon$ розподілу статистики $T(X_1,...,X_n)$),

або об'єднанням нерівностей $T(X_1,...,X_n) < t^л_{кр}$ і $T(X_1,...,X_n) > t^n_{кр}$ (для двосторонньої області $t^л_{кр}$, $t^n_{кр}$ дорівнюють відповідно квантилям рівня $\varepsilon/2$, $1-\varepsilon/2$ розподілу статистики $T(X_1,...,X_n)$).

4. Обчислити $T_{виб} = T(x_1,...,x_n)$.

5. Якщо $T_{виб} \in V_{kp}$, то відхилити гіпотезу H_0 як таку, що не відповідає результатам спостережень, а якщо $T_{виб} \notin V_{kp}$, то прийняти гіпотезу H_0 як таку, що не заперечує результатам спостережень.

Звичайно на кроках 2-5 використовують статистики, квантилі яких є затабульованими (нормальний розподіл $N(0;1)$, розподіл Стьюдента, розподіл χ^2 Пірсона, розподіл F Фішера).

5.4.2. Перевірка гіпотез про параметри нормального закону

Нехай $\vec{X}(X_1;...X_n)$ – теоретична вибірка з закону Гаусса $N(a;\sigma^2)$.

5.4.2.1. Перевірка гіпотез про математичне сподівання a при відомій дисперсії σ^2

Розглянемо три пари гіпотез:

$$H_0 : a = a_0 \ , \ H_1 : a \neq a_0 \ , \tag{5.33}$$

$$H_0 : a = a_0 \ , \ H_1' : a > a_0 \ , \tag{5.34}$$

$$H_0 : a = a_0 \ , \ H_1'' : a < a_0 \ . \tag{5.35}$$

Якщо дисперсія σ^2 є відомою, то за умови справедливості гіпотези H_0 статистика $T(X_1, \dots, X_n) = \frac{(\bar{X} - a_0)\cdot\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0;1)$ (див. п. 5.3.2). Знайдемо критичні області для кожної пари гіпотез за правилом п. 5.4.1.2.

Покажемо, що для першої пари гіпотез критичними точками $t_{кр}^{л}$ та $t_{кр}^{п}$ є відповідно $-u(\varepsilon)$ і $u(\varepsilon)$ (нагадаємо, що $u(\varepsilon)$ є квантилем рівня $1-\varepsilon/2$ розподілу $N(0;1)$ (див. п. 2.2.4.4)), $\Phi\left(u(\varepsilon)\right) = \frac{1-\varepsilon}{2}$). Дійсно,

$$P\{T(X_1,...,X_n) < -u(\varepsilon)\} = \Phi\left(-u(\varepsilon)\right) - \Phi(-\infty) = -\Phi\left(u(\varepsilon)\right) + \frac{1}{2} =$$
$$= -\frac{1-\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$
$$P\{T(X_1,...,X_n) > u(\varepsilon)\} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(u(\varepsilon)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Для другої пари гіпотез критичною точкою $t_{кр}^{п}$ є $u(2\varepsilon)$. Дійсно,

$$P\{T(X_1,...,X_n) > u(2\varepsilon)\} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(u(2\varepsilon)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1-2\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad .$$

Для третьої пари гіпотез критичною точкою $t_{кр}^{л}$ є $-u(2\varepsilon)$. Дійсно,

$$P\{T\left(X_1,...,X_n\right) < -u\left(2\varepsilon\right)\} = \Phi\left(-u\left(2\varepsilon\right)\right) - \Phi\left(-\infty\right) = -\Phi\left(u\left(2\varepsilon\right)\right) + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1-2\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} = \varepsilon .$$

Отже, критичні області V_{kp} мають такий вигляд:

- для гіпотез (5.33) $V_{kp}=\left(-\infty;-u\left(\varepsilon\right)\right)\cup\left(u\left(\varepsilon\right);+\infty\right)$;
- для гіпотез (5.34) $V_{kp}=\left(u\left(2\varepsilon\right);+\infty\right)$;
- для гіпотез (5.35) $V_{kp}= (-\infty;-u(2\varepsilon))$.

Гіпотеза H_0 відхиляється, якщо реалізація статистики $T_{виб} = = T\left(x_1,...,x_n\right) \in$ V_{kp}. У тому випадку, коли $T_{виб} = T\left(x_1,...,x_n\right) \notin$ V_{kp}, підстав для відхилення гіпотези H_0 немає.

Приклад 13. Проведено 100 вимірювань відхилення діаметра цапф від номінального розміру. Вважається, що діаметр цапф розподілений нормально з дисперсією σ^2=30 мкм^2. Перевірити, чи істотно перевищує розраховано за вибіркою значення $\bar{x} = 40.96$ мкм номінальний розмір 40 мкм, якщо рівень значущості ε=0.02.

Розв'язання. Розглянемо пару гіпотез (2): $H_0 : a = 40$ мкм, $H_1' : a > 40$ мкм. $X_i -$можливий результат $i-$го вимірювання. За умови справедливості гіпотези H_0 статистика $T\left(X_1,...,X_{100}\right) = \dfrac{\left(\bar{X} - 40\right)\cdot\sqrt{100}}{\sqrt{30}}$ має розподіл $N\left(0;1\right)$. Критична область правостороння: $V_{kp}=\left(u\left(0.04\right);+\infty\right)$. Оскільки $2\Phi\left(u\left(0.04\right)\right) = 1\text{-}0.04$, то $\Phi\left(u\left(0.04\right)\right) = 0.48$ і за табл. Д.1.1 $u\left(0.04\right)$=2.055.

Реалізація статистики $T\left(x_1,...,x_{100}\right) = \dfrac{\left(40.96 - 40\right)\cdot\sqrt{100}}{\sqrt{30}} = 1.75$ не належить до $V_{kp}=\left(2.055;+\infty\right)$ і тому немає підстав відхиляти гіпотезу H_0 (тобто перевищення $\bar{x}$ номіналу неістотне).

5.4.2.2. Перевірка гіпотез про математичне сподівання a **при невідомій дисперсії** σ^2

У тому разі, коли дисперсія σ^2 невідома, статистика $T(X_1,...,X_n)=\frac{(\bar{X}-a_0)\cdot\sqrt{n}}{S}$ за умови справедливості гіпотези H_0 розподілена за законом Стьюдента з $n-1$ степенями вільності. Критичні області V_{kp} мають такий вигляд:

- для гіпотез (5.33) $V_{kp}=(-\infty;-t(n-1;\varepsilon))\cup(t(n-1;\varepsilon);+\infty)$;
- для гіпотез (5.34) $V_{kp}=(t(n-1;2\varepsilon);+\infty)$;
- для гіпотез (5.35) $V_{kp}=(-\infty;-t(n-1;2\varepsilon))$.

Це доводиться так само, як і у випадку відомої дисперсії σ^2, а замість рівняння $\Phi(u(\varepsilon))=\frac{1-\varepsilon}{2}$ використовується рівняння $\int_0^{t(n;\varepsilon)} p_{\tau(n)}(x)dx=\frac{1-\varepsilon}{2}$, де $p_{\tau(n)}(x)$ – щільність розподілу Стьюдента з n степенями вільності (див. п. 2.2.4.4) (нагадаємо, що $t(n;\varepsilon)$ є квантилем рівня $1-\varepsilon/2$ розподілу Стьюдента з n степенями вільності.

Значення $t(n;\varepsilon)$ наведені в табл. Д.1.2.

Приклад 24. Фірма, яка виготовляє косметику, випустила новий товар, і стверджує, що його куплять 40 % покупців. Впродовж 15-денного рекламного розпродажу в середньому нову продукцію придбали 32.5 % покупців. Вибіркове СКВ складає 18 %. При рівні значущості ε=0.05 оцінити твердження фірми.

Розв'язання. Перевіряємо нульову гіпотезу $H_0: a=40$ % при альтернативі $H_1': a<40$ %, а саме гіпотезу про числове значення математичного сподівання при невідомій дисперсії при рівні значущості ε=0.05.

Критерій має вигляд $T=\frac{(\bar{X}-a_0)\cdot\sqrt{n}}{S}$. Для гіпотез (5.35) критична область лівостороння. Отже,

$V_{kp}=(-\infty;-t(n-1;2\varepsilon))=(-\infty;-t(14;0.1))==(-\infty;-1.761)$.

Реалізація статистики $T(x_1,...,x_{15})=\frac{(32.5-40)\cdot\sqrt{15}}{18}=$-1.614 не належить до $V_{kp}=(-\infty;-1.761)$, тому гіпотеза H_0 приймається. Твердження фірми є статистично правильним.

5.4.2.3. Перевірка гіпотез про дисперсію σ^2 при невідомому математичному сподіванні a

Задамо σ_0^2 і розглянемо три пари гіпотез:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ , \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \ , \tag{5.36}$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ , \ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \ , \tag{5.37}$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ , \ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \ . \tag{5.38}$$

За умови справедливості гіпотези H_0 статистика $T\left(X_1,...,X_n\right) = \dfrac{\left(n-1\right)\cdot S^2}{\sigma_0^2}$ має χ^2- розподіл з $n-1$ степенями вільності. За правилом п. 5.4.1.3 з рівності $P\{T(X_1,\dots,X_n) \in V_{kp} /H_0\}=\varepsilon$ випливає, що критичні області V_{kp} мають такий вигляд:

- для гіпотез (5.36)
  V_{kp}=$\left(0 \ ; \ \chi^2\left(n-1\, ; 1-\varepsilon/2\right)\right) \cup \left(\chi^2\left(n-1\, ; \varepsilon/2\right) \ ; \ +\infty\right)$;
- для гіпотез (5,37) V_{kp}=$\left(\chi^2\left(n-1\, ; \varepsilon\right) \ ; \ +\infty\right)$;
- для гіпотез (5.38) V_{kp}= $\left(0 \ ; \ \chi^2\left(n-1\, ; 1-\varepsilon\right)\right)$.

Нагадаємо, що $\chi^2\left(n\, ; \varepsilon/2\right)$ і $\chi^2\left(n\, ;1-\varepsilon/2\right)$ є відповідно квантилями рівня $1-\varepsilon/2$ і $\varepsilon/2$ розподілу χ^2 з n степенями вільності; вони обчислюються за допомогою табл. Д.1.3.

Приклад 25. Точність верстата-автомата характеризують дисперсією довжини деталей, які він виробляє. Якщо ця дисперсія більше, ніж 225 мкм^2, то верстат зупиняється для налагодження. Із партії деталей зроблено вибірку з 11 деталей, для яких вибіркова дисперсія довжини виявилась рівною $s^2 = 420$ мкм^2. Чи потрібно проводити налагодження верстата, якщо: 1) рівень значущості ε=0.01; 2) рівень значущості ε=0.1?

Розв'язання. Ідеться про перевірку пари гіпотез (5.37): $H_0 : \sigma^2 = 225$, $H_1 : \sigma^2 > 225$.

$$T\left(x_1,...,x_{11}\right) = \frac{10\cdot 420}{225} \approx 18.67 \ .$$

1) V_{kp}=$\left(\chi^2\left(10;0.01\right);+\infty\right)$ $=\left(23.2;+\infty\right)$. Реалізація статистики $T_{виб} = T\left(x_1,...,x_{11}\right) = 18.67$ не належить до V_{kp}=$\left(23.2;+\infty\right)$ і тому не має підстав відхиляти гіпотезу H_0;

2) $V_{kp}=\left(\chi^2(10;0.1);+\infty\right) = (16.0;+\infty)$. Реалізація статистики $T_{виб} = T(x_1,...,x_{11}) = 18.67$ належить до $V_{kp}=(16.0;+\infty)$ і тому гіпотеза H_0 відхиляється (потрібно проводити налагодження верстата).

5.4.2.4. Перевірка гіпотез про дисперсію σ^2 при відомому математичному сподіванні a

За умови справедливості гіпотези H_0 статистика $T(X_1,...,X_n) = \dfrac{n \cdot S_0^2}{\sigma_0^2}$ має χ^2 – розподіл з n степенями вільності. За правилом п. 5.4.1.3 з рівності $P\{T(X_1,\dots,X_n) \in V_{kp} \ /H_0\}=\varepsilon$ випливає, що критичні області V_{kp} мають такий вигляд:

- для гіпотез (5.36)
  $V_{kp}=\left(0 \ ; \ \chi^2(n\,;1-\varepsilon/2)\right) \cup \left(\chi^2(n\,;\varepsilon/2) \ ; \ +\infty\right)$;
- для гіпотез (5.37) $V_{kp}=\left(\chi^2(n\,;\varepsilon) \ ; \ +\infty\right)$;
- для гіпотез (5.38) $V_{kp}=\left(0 \ ; \ \chi^2(n\,;1-\varepsilon)\right)$.

Нагадаємо, що $\chi^2(n\,;\varepsilon/2)$ і $\chi^2(n\,;1-\varepsilon/2)$ є відповідно квантилями рівня $1-\varepsilon/2$ і $\varepsilon/2$ розподілу χ^2 з n степенями вільності; вони обчислюються за допомогою табл. Д.1.3.

5.4.3. Порівняння параметрів двох гауссових розподілів

Важливе значення мають задачі порівняння параметрів двох нормальних законів. Такі задачі виникають при двох способах обробки деталі, при порівнянні відстані до двох цілей і т. п.

5.4.3.1. Порівняння математичних сподівань при відомих дисперсіях

Розглянемо дві незалежні теоретичні вибірки $\vec{X}(X_1;...X_n), \vec{Y}(Y_1;...Y_m)$ із законів Гаусса $N(a_X;\sigma_X^2)$ і $N(a_Y;\sigma_Y^2)$ відповідно. Математичні сподівання a_X і a_Y цих законів є невідомими, а дисперсії σ_X^2 і σ_Y^2 – відомими. Треба перевірити основну гіпотезу H_0: $a_X - a_Y = 0$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $a_X - a_Y \neq 0$.

Розглянемо випадкову величину $\bar{X} - \bar{Y}$, яка розподілена за законом Гаусса. Оскільки

$$M(\overline{X}-\overline{Y})=M\overline{X}-M\overline{Y}=\frac{1}{n}(MX_1+\ldots+MX_n)-\frac{1}{m}(MY_1+\ldots+MY_m)=a_X-a_Y,$$

$$D(\overline{X}-\overline{Y})=D\overline{X}+D\overline{Y}=\frac{n\sigma_X^2}{n^2}+\frac{m\sigma_Y^2}{m^2}=\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m},$$

то за умови справедливості гіпотези H_0 статистика

$$T(X_1,...,X_n;Y_1,...,Y_m)=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

буде розподілена за законом Гаусса $N(0{,}1)$. Виберемо рівень значущості ε. Оскільки конкуруюча гіпотеза сформулюється як $H_1: a_X-a_Y\neq 0$, то, за правилом п. 5.4.1.3 критичну область розташуємо симетрично на “хвостах” розподілу $N(0{,}1)$ (рис. 5.12)

$$V_{кр}=(-\infty;-u(\varepsilon))\cup(u(\varepsilon);+\infty),$$

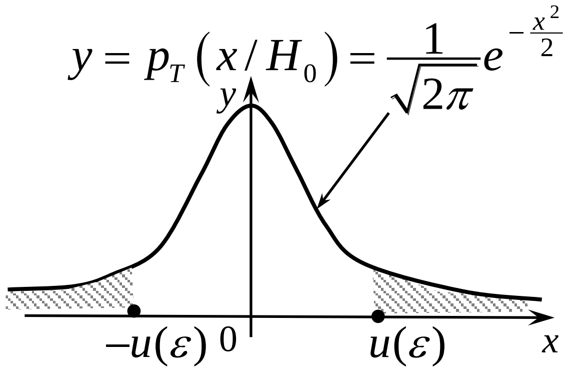


Рис. 5.12

де $u(\varepsilon)$ є квантилем рівня $1-\varepsilon/2$ розподілу $N(0;1)$.

При $|T_{виб}|=|T(x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_m)|\geq u(\varepsilon)$ гіпотеза H_0 відхиляється, при $|T_{виб}|=|T(x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_m)|<u(\varepsilon)$ немає підстав відхилити гіпотезу H_0.

Якщо конкуруюча гіпотеза сформулюється як $H_1: a_X-a_Y>0$, то $V_{кр}=(u(2\varepsilon);+\infty)$. У випадку $H_1: a_X-a_Y<0$ $V_{кр}=(-\infty;-u(2\varepsilon))$.

Перевірку гіпотези $H_0: a_X-a_Y=0$ можна провести також на підставі методу довірчих інтервалів. Гіпотеза H_0 приймається, якщо довірчий інтервал для a_X-a_Y накриває 0, у протилежному випадку вона відхиляється. Довірчий інтервал надійності $1-\varepsilon$ для різниці математичних сподівань a_X та a_Y буде таким:

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-u(\varepsilon)\cdot\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}};\overline{X}-\overline{Y}+u(\varepsilon)\cdot\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}\right),$$

оскільки цей інтервал еквівалентний нерівності

$$\left|T(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_m)\right| < u(\varepsilon).$$

Приклад 26. Із продукції першого верстата відібрано 10 деталей, а з продукції другого – 15 деталей. Емпіричні середні розміру деталей відповідно дорівнюють $\overline{x}$=81 мм, $\overline{y}$=84 мм. Дисперсії розміру деталей відомі та дорівнюють відповідно σ_X^2 =64 мм^2 і σ_Y^2 =81 мм^2. Перевірити на рівні значущості 0.01 гіпотезу про рівність математичних сподівань розміру деталей у продукції кожного з верстатів.

Розв'язання. Введемо гіпотези H_0: $a_X - a_Y = 0$, $H_1 : a_X - a_Y \neq 0$. Виміряне значення статистики $T_{виб} = \dfrac{81-84}{\sqrt{\frac{64}{10} + \frac{81}{15}}} = -0.873$. З рівняння $2\Phi(u(0.01)) = 0.99$ за допомогою табл. Д.1.1 знаходимо $u(0.01) = 2.326$. Оскільки $|-0.873| < 2.326$, то нема підстав відхиляти гіпотезу H_0.

Перевіримо гіпотезу H_0 методом довірчих інтервалів. Оскільки

$$u(0.01)\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} = 2.326\sqrt{\frac{64}{10} + \frac{81}{15}} = 8.849,$$

то інтервал (-3-8.849;-3+8.849)= =(-11.849 ; 5.849) мм накриває значення 0. Це означає, що гіпотезу H_0 слід прийняти.

5.4.3.2. Порівняння математичних сподівань при невідомій дисперсії

Нехай $\vec{X}(X_1;\ldots;X_n)$, $\vec{Y}(Y_1;\ldots;Y_m)$ – дві незалежні теоретичних вибірки з законів Гаусса $N(a_X;\sigma_X^2)$ і $N(a_Y;\sigma_Y^2)$ відповідно. Параметри цих законів a_X, σ_X^2, a_Y, σ_Y^2 невідомі.

Розглянемо більш природний у застосуваннях, ніж у п. 5.4.3.1, випадок, коли дисперсії σ_X^2 і σ_Y^2 є невідомими. Тобто потрібно перевірити основну гіпотезу H_0: $a_X = a_Y \Leftrightarrow H_0 : a_X - a_Y = 0$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $a_X \neq a_Y \Leftrightarrow H_1 : a_X - a_Y \neq 0$.

Припустимо, що $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ (σ^2 є невідомим). Аналогічно тому, як це зроблено у прикладі 22 п. 5.4.1, можна встановити, що $\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sim N(0;1)$.

Оскільки незалежні випадкові величини $(n-1)\frac{S_X^2}{\sigma^2}$ та $(m-1)\frac{S_Y^2}{\sigma^2}$ розподілені за законами χ^2 з n-1 і m-1 степенями вільності відповідно, то випадкова величина $(n-1)\frac{S_X^2}{\sigma^2}+(m-1)\frac{S_Y^2}{\sigma^2}$ розподілена за законом χ^2 з $m+n$-2 степенями вільності. Звідси випливає (див. п. 2.2.4 4), що випадкова величина

$$T(X_1,\ldots,X_n;Y_1,\ldots,Y_n)=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}$$

при справедливості основної гіпотези H_0 не залежить від невідомих параметрів a_X, a_Y, $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$ і розподілена за законом Стьюдента з $n+m$–2 степенями вільності.

Критична область розташована, як і в п. 5.4.2.2, симетрично на "хвостах" розподілу Стьюдента з $n+m$–2 степенями вільності:

$$V_{кр}=\left(-\infty;-t\left(n+m-2;\varepsilon\right)\right)\cup\left(t\left(n+m-2;\varepsilon\right);+\infty\right).$$

Якщо конкуруюча гіпотеза формулюється як $H_1: a_X-a_Y>0$, то $V_{кр}=(t(n+m-2;\,2\varepsilon);+\infty)$. У випадку $H_1: a_X-a_Y<0$ маємо $V_{кр}=(-\infty;-t(n+m-2;\,2\varepsilon))$.

Якщо $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, то подібного варіанта порівняння математичних сподівань не існує.

Перевірку гіпотези H_0: $a_X-a_Y = 0$ можна також провести методом довірчих інтервалів. Довірчий інтервал надійності $1-\varepsilon$ для a_X-a_Y у цьому випадку має вигляд

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t(n+m-2;\varepsilon)\sqrt{\frac{((n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2)(m+n)}{(n+m-2)mn}};\right.$$
$$\left.\overline{X}-\overline{Y}+t(n+m-2;\varepsilon)\sqrt{\frac{((n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2)(m+n)}{(n+m-2)mn}}\right).$$

Якщо цей інтервал накриває 0, то гіпотеза H_0 приймається; у протилежному випадку гіпотезу H_0 треба відхилити.

5.4.3.3. Порівняння дисперсій при невідомих математичних сподіваннях

Ця задача важлива і сама по собі, а також для порівняння математичних сподівань (п. 5.4.3.2), оскільки там припускається рівність дисперсій.

Задамо рівень значущості ε і перевіримо основну гіпотезу H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \Leftrightarrow H_0 : \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \Leftrightarrow H_1 : \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1.$

Припустимо, що $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ (σ^2 є невідомим). Оскільки незалежні випадкові величини $(n-1)\dfrac{S_X^2}{\sigma^2}$ і $(m-1)\dfrac{S_Y^2}{\sigma^2}$ розподілені за законами χ^2 з n–1 і m –1 степенями вільності відповідно, то випадкова величина

$$T\left(\vec{X};\vec{Y}\right) = \frac{\frac{1}{n-1}((n-1)\frac{S_X^2}{\sigma^2})}{\frac{1}{m-1}((m-1)\frac{S_Y^2}{\sigma^2})} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

при справедливості основної гіпотези H_0 не залежить від невідомих параметрів $a_X, a_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$ і має розподіл Фішера $F(n-1, m-1)$ з n–1 і m–1 степенями вільності.

За п. 5.4.1.2 критична область правостороння:

$$V_{кр} = (F^{(\varepsilon)}(n-1, m-1); +\infty),$$

де $F^{(\varepsilon)}(n-1, m-1)$ – квантиль рівня $1-\varepsilon$ розподілу Фішера з n–1 та m–1 степенями вільності (n–1 відповідає більшій емпіричній дисперсії) знаходимо за табл. Д.1.6. Цей квантиль задовольняє рівняння

$$P\left\{T \in V_{кр} / H_0\right\} = \int\limits_{F^{(\varepsilon)}(n-1,m-1)}^{+\infty} p_{F(n-1,m-1)}\left(x\right) dx = \varepsilon,$$

де $p_{F(n-1,m-1)}(x)$ – щільність імовірності розподілу Фішера з n–1 та m–1 степенями вільності (див. п. 2.2.4 4)).

Обчислюємо відношення більшої емпіричної дисперсії до меншої $T_{виб} = s_X^2 / s_Y^2$ (у чисельнику дробу завжди більше зі значень емпіричних дисперсій).

Якщо $T_{виб} \in V_{кр}$, то гіпотеза H_0 відхиляється (подія $\{ S_X^2 / S_Y^2 \ge F^{(\varepsilon)}(n-1, m-1) \}$ малоймовірна за умови справедливості гіпотези H_0); якщо $T_{виб} \notin V_{кр}$, то гіпотеза H_0 приймається.

Зазначимо, що для пари гіпотез H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, H_1: $\sigma_X^2 \ne \sigma_Y^2$ слід користуватися сформульованим вище правилом із заміною квантиля $F^{(\varepsilon)}(n-1, m-1)$ на $F^{(\varepsilon/2)}(n-1, m-1)$.

Приклад 27. Із продукції першого верстата відібрано 11 деталей, а з продукції другого – 9 деталей. Емпіричні виправлені дисперсії розміру деталей відповідно дорівнюють 23.3 мкм^2, 5.9 мкм^2. Перевірити при рівні значущості 0.05 гіпотезу про рівність дисперсій розміру деталей для кожного з верстатів, якщо конкуруюча гіпотеза стверджує, що дисперсія для першого верстата більша, ніж для другого.

Розв'язання. Вводимо гіпотези H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Обчислюємо величину $s_1^2 / s_2^2 = 23.3 / 5.9 = 3.95$. За табл. Д.1.6 знаходимо $\Lambda = F^{(0.05)}(10,8) = 3.34$. Оскільки $3.95 > 3.34$, то гіпотеза про рівність дисперсій відхиляється.

Приклад 28. Із продукції першого верстата відібрано 25 деталей, а з продукції другого – 16 деталей. Емпіричні середні і дисперсії розміру деталей відповідно дорівнюють: $\bar{x} = 36.8$ мм, $s_1^2 = 1.44$ мм^2 і $\bar{y} = 37.5$ мм, $s_2^2 = 1.21$ мм^2. Перевірити на рівні значущості 0.05 гіпотезу про рівність математичних сподівань розміру деталей у продукції кожного з верстатів.

Розв'язання. Вводимо гіпотези H_0: $a_1 - a_2 = 0$, H_1: $a_1 - a_2 \ne 0$.

Оскільки емпіричні виправлені дисперсії відмінні одна від одної, то спочатку перевіримо гіпотезу про рівність дисперсій H_0': $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, H_1': $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$: $s_1^2 / s_2^2 = 1.44 / 1.21 = 1.19$, $\Lambda = F^{(0.025)}(24,15) = 2.70$. Оскільки $1.19 < 2.70$, то гіпотеза про рівність дисперсій приймається.

Тепер перейдемо до порівняння математичних сподівань (п. 5.4.3.2).

$$T_{виб} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)\,s_X^2 + (m-1)\,s_Y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}\,\frac{36.8-37.5}{\sqrt{24\cdot 1.44 + 15\cdot 1.21}}\sqrt{\frac{25\cdot 16\cdot 39}{41}} = -1.87.$$

Оскільки $|-1.87| < 2.02$, то немає підстав відхиляти гіпотезу H_0 на рівні значущості 0.05 і вона приймається.

Перевіримо гіпотезу H_0: $a_1 - a_2 = 0$ методом довірчих інтервалів. Оскільки

$$t(39;0.05)\cdot\sqrt{\frac{((n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2)(m+n)}{(m+n-2)}} = 2.02\sqrt{\frac{(24\cdot 1.44 + 15\cdot 1.21)\cdot 41}{39\cdot 25\cdot 16}} = 0.75\,,$$

то інтервал $(-0.7-0.75;-0.7+0.75)=(-1.45;0.05)$ мм накриває 0. Отже, немає підстав відхиляти гіпотезу H_0, але запас для цього є дуже малим.

Розв'яжемо задачу при рівні значущості $\varepsilon = 0.1$. $\Lambda = F^{(0.05)}(24{,}15) = 2.29$, тому гіпотеза H_0' приймається; $t(39;0.1) = 1.6849$. Оскільки $|-1.87| > 1.6849$, то гіпотеза H_0 про рівність математичних сподівань відхиляється на рівні значущості 0.1.

5.4.3.4. Порівняння дисперсій при відомих математичних сподіваннях

Отже, математичні сподівання a_X, a_Y є відомими. Припустимо, що $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ (σ^2 є невідомим). Оскільки незалежні випадкові величини $n\dfrac{S_{0X}^2}{\sigma^2}$ і $m\dfrac{S_{0Y}^2}{\sigma^2}$ розподілені за законами χ^2 з n і m степенями вільності відповідно, то випадкова величина

$$T\left(\vec{X};\vec{Y}\right)=\frac{\frac{1}{n}(n\frac{S_{0X}^2}{\sigma^2})}{\frac{1}{m}(m\frac{S_{0Y}^2}{\sigma^2})}=\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}$$

при справедливості основної гіпотези H_0:$\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\sigma^2$ не залежить від невідомих параметрів σ_X^2, σ_Y^2 і має розподіл Фішера $F(n,m)$ з n і m степенями вільності.

Якщо $H_1:\sigma_X^2>\sigma_Y^2$, то $V_{кр}=(F^{(\varepsilon)}(n,m);+\infty)$; якщо ж $H_1:\sigma_X^2\neq\sigma_Y^2$, то $V_{кр}=(F^{(\varepsilon/2)}(n,m);+\infty)$.

Якщо $T_{виб}=\frac{s_{0X}^2}{s_{0Y}^2}=\left(\frac{1}{n}\sum_1^n\left(x_i-a_X\right)^2\right):\left(\frac{1}{m}\sum_1^m\left(y_j-a_Y\right)^2\right)\in V_{кр}$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

5.4.4. Критерій відношення правдоподібності

Нехай випадкова величина X – можливий результат вимірювання – має щільність розподілу $p_X(x,\theta)$, де параметр θ є невідомим. Відносно можливих значень цього параметра висунемо пару простих гіпотез

$$H_0: \theta=\theta_0,\ H_1: \theta=\theta_1.$$

Щоб з'ясувати питання про те, яка з гіпотез є справедливою, проводиться серія з n незалежних випробувань, якій відповідає випадковий вектор $\vec{X}(X_1;X_2;...;X_n)$, кожна з координат X_i якого розподілена за законом $p_X(x,\theta)$. Рішення приймається на підставі реалізації $\vec{x}(x_1;x_2;...;x_n)$ вектора $\vec{X}$. Оскільки випадкові величини $X_1,\ldots, X_n$ є взаємно незалежними, то $p_{\vec{X}}(x_1,\ldots, x_n,\theta)=$
$=p_X(x_1,\theta)\cdot p_X(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot p_X(x_n,\theta)$.

Цілком природно віддати перевагу гіпотезі H_1 перед гіпотезою H_0, якщо ймовірність потрапляння випадкового вектора $\vec{X}(X_1;X_2;...;X_n)$ в окіл точки $\vec{x}(x_1;x_2;...;x_n)$ при справедливості гіпотези H_1 набагато більша, ніж при справедливості гіпотези $H_0 : p_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n / H_1) >> p_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n / H_0)$. Отже, приходимо до нерівності

$$p_X(x_1 / H_1) \cdot p_X(x_2 / H_1) \cdot \ldots \cdot p_X(x_n / H_1) >> p_X(x_1 / H_0) \cdot p_X(x_2 / H_0) \cdot \ldots \cdot p_X(x_n / H_0),$$

з якої випливає таке правило прийняття рішень: якщо відношення правдоподібності

$$l(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{p_X(x_1 / H_1) \cdot p_X(x_2 / H_1) \cdot \ldots \cdot p_X(x_n / H_1)}{p_X(x_1 / H_0) \cdot p_X(x_2 / H_0) \cdot \ldots \cdot p_X(x_n / H_0)}$$

є досить великим, то гіпотеза H_0 відхиляється.

При цьому критична область задається нерівністю

$$V_{кр} = \left\{ l(x_1, x_2, ..., x_n) \geq c \right\},$$

де поріг c визначається за умови

$$P\left\{ \vec{X} \in V_{кр} / H_0 \right\} = \varepsilon. \qquad (5.39)$$

Сформульоване вище правило прийняття рішень – **критерій відношення правдоподібності** – є оптимальним при довільному рівні значущості ε.

Приклад 29. Для з'ясування питання про наявність чи відсутність цілі в зоні дії ППО посилають радіоімпульс. Якщо ціль є, то імпульс відбивається від неї і приймальний пристрій, за умови відсутності перешкод, реєструє напругу υ мкВ. Якщо цілі немає, то за умови відсутності перешкод напруга на виході приймального пристрою дорівнюватиме нулю. Напруга Y, що виникає через перешкоди, є випадковою величиною, розподіленою за законом N(0 мкВ; 1 мкВ^2). Потрібно за результатом x_1 одного вимірювання вирішити питання про наявність або відсутність цілі.

Розв'язання. Напруга X на виході приймача подається у вигляді $X = Y$ (цілі немає), або у вигляді $X = \upsilon + Y$ (ціль є). Щільність розподілу напруги в обох випадках можна записати у вигляді

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} \frac{1}{мкВ},$$

де $a = 0$ (цілі немає) або $a = \upsilon$ (ціль є) (рис. 5.13).

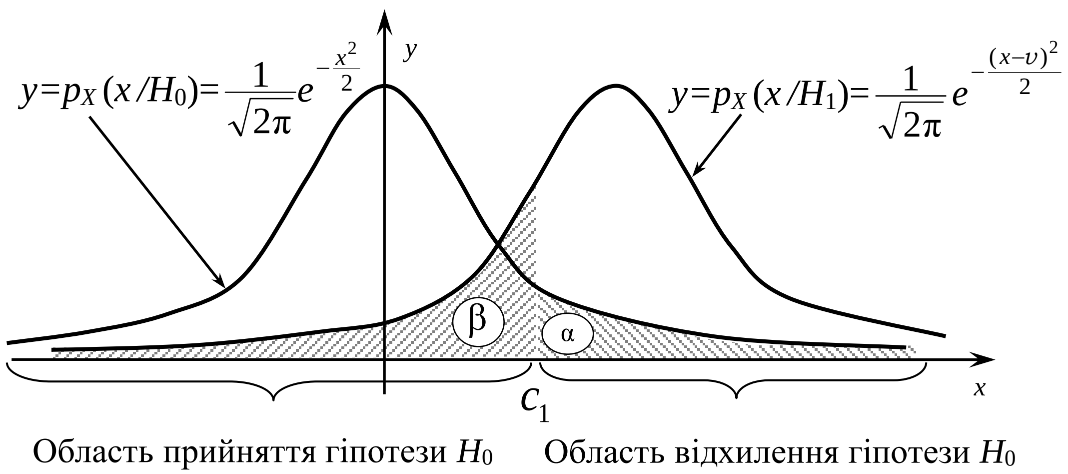


Рис.5.13

Приймемо по відношенню до математичного сподівання a нормального розподілу дві гіпотези: $H_0 : a=0$ (цілі немає) і $H_1 : a=\upsilon$ (ціль є).

Відношення правдоподібності в нашому випадку має вигляд

$$l(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-v)^2/2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}}=e^{xv-v^2/2}$$

і тому гіпотеза H_0 буде відхиляться, якщо $e^{x_1v-v^2/2}\geq c$.

З останньої нерівності випливає, що $x_1\geq\frac{\ln c}{v}+\frac{v}{2}\equiv c_1$.

Значення c_1 визначається з умови, що ймовірність α помилки першого роду (імовірність “хибної тревоги”) дорівнює ε:

$$\alpha=\int_{c_1}^{+\infty}p_X(x/H_0)dx=\varepsilon.$$

Отже, $\frac{1}{2}-\Phi(c_1)=\varepsilon$ і за таблицею функції Лапласа знаходимо поріг c_1. При цьому ймовірність β помилки другого роду (імовірність “пропускання цілі”) визначається інтегралом

$$\beta=\int_{-\infty}^{c_1}p_X(x/H_1)dx=\frac{1}{2}+\Phi(c_1-v).$$

Нехай, наприклад, ε=0.1, v=1 мкВ, x_1=0.7 мкВ, тоді:

1) $\Phi(c_1) = 0.4 \Rightarrow c_1 = 1.28$;

2) оскільки x_1=0.7 мкВ < 1.28 мкВ, то приймається гіпотеза про відсутність цілі;

3) імовірність пропускання цілі і правильного виявлення цілі дорівнюють відповідно

$$\frac{1}{2} + \Phi(0.28) = 0.61 \quad \text{і} \quad \frac{1}{2} - \Phi(0.28) = 0.39.$$

Цей метод застосовується в радіолокації для виявлення сигналу на фоні перешкод. Він приводить до максимуму ймовірності правильного виявлення сигналу при заданій імовірності "хибної тривоги".

Знайдемо тепер оптимальне правило прийняття рішень рівня значущості ε, якщо зроблено n вимірювань $\vec{x}\,(x_1;x_2;...;x_n)$. На підставі прикладу 1 п. 5.1.1 відношення правдоподібності має вигляд

$$l(x_1, x_2, \ldots x_n) = e^{-[\,(x_1-v)^2+(x_2-v)^2+...+(x_n-v)^2-x_1^2-x_2^2-...-x_n^2\,]/2} = e^{n(\bar{x}\cdot v-\frac{v^2}{2})},$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ – середнє вибірки $\vec{x}(x_1;x_2;...;x_n)$. Тоді гіпотеза H_0 буде відхилятися при $e^{n(\bar{x}v-\frac{v^2}{2})} \ge c \Rightarrow \bar{x} \ge \frac{\ln c}{nv} + \frac{v}{2} \equiv c_1$.

Отже, критерій у цьому випадку базується на статистиці $\bar{X}$, а не на векторі $\vec{X}(X_1;X_2;...;X_n)$, що дозволяє замінити n-вимірний інтеграл в умові (5.39) одновимірним. Оскільки $\bar{X} \sim N(a\,;\,\frac{1}{n})$, то з умови (5.39)

$$P\{\,\vec{X}(X_1;X_2;...;X_n) \in V_{кр}\,/H_0\,\} = P\{\,\bar{x} \ge c_1\,/\,H_0\!: a = 0\,\} = \frac{1}{2} - \Phi(c_1\sqrt{n}) = \varepsilon$$

випливає, що $\Phi(c_1\sqrt{n}) = \frac{1}{2} - \varepsilon$. Звідси при заданих ε та n знаходимо поріг c_1.

Знайдемо ймовірність помилки другого роду (імовірність "пропускання цілі"):

$$\beta = P\{\,\vec{X}(X_1;X_2;...;X_n) \notin V_{kp}/H_1\} = P\{\,\bar{x} < c_1/H_1 : a = v\} = \Phi(\sqrt{n}(c_1 - v)) + \frac{1}{2}.$$

Таким чином, імовірність правильного виявлення цілі (потужність критерію прийняття рішень) дорівнює $P\{\vec{X}(X_1;X_2;...;X_n)\in V_{kp}/H_1\}=\frac{1}{2}-\Phi((c_1-v)\sqrt{n})$. Між іншим, тепер можна знайти кількість вимірювань, щоб при заданому рівні α ймовірності помилки першого роду ймовірність помилки другого роду не перевищувала заданий поріг β_0: $\Phi((c_1-v)\sqrt{n})+\frac{1}{2}\le\beta_0$.

Зауваження. Нехай випадкова величина X – можливий результат вимірювання – має щільність розподілу $p_X(x,\theta)$, де параметр $\theta\in\Omega$ є невідомим. Відносно можливих значень цього параметра висунемо пару складних гіпотез H_0: $\theta=\Omega_0$, H_1: $\theta=\Omega_1$, де підмножини Ω_0 і Ω_1 множини Ω не перетинаються.

Щоб з'ясувати питання про те, яка з гіпотез є справедливою, проводиться серія з n незалежних випробувань, якій відповідає випадковий вектор $\vec{X}(X_1;X_2;...;X_n)$, кожна з координат X_i якого розподілена за законом $p_X(x,\theta)$. Рішення приймається на підставі реалізації $\vec{x}(x_1;x_2;...;x_n)$ вектора $\vec{X}$.

Для кожного $\theta\in\Omega_0$ позначимо через $\alpha(\theta)$ імовірність помилки першого роду (помилкове відхилення гіпотези H_0) і для кожного $\theta\in\Omega_1$ позначимо через $\beta(\theta)$ імовірність помилки другого роду (помилкове прийняття гіпотези H_0).

Якщо для деякого критерію для кожного $\theta\in\Omega_0$ $\alpha(\theta)\le\alpha$, то про цей критерій говорять, що він має рівень значущості α.

Критерій рівня значущості α називається **оптимальним**, якщо серед **всіх критеріїв** рівня значущості α він забезпечує мінімум імовірності помилки другого роду $\beta(\theta)$ (максимум потужності $1-\beta(\theta)$) при кожному $\theta\in\Omega_1$.

За допомогою відношення правдоподібності можна довести, що всі наведені в п. 5.4.2 і 5.4.3 критерії є оптимальними.

Можна довести, наприклад, що існують оптимальні критерії в задачі перевірки однобічних гіпотез про параметри a,σ^2 нормального закону $N(a;\sigma^2)$, де обидва параметра a,σ^2 невідомі:

$$H_0: a\le a_0\ ,\quad H_1: a>a_0\ ;\qquad H_0: a\ge a_0\ ,\quad H_1: a<a_0\ ;$$

$$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2\ ,\ H_1:\sigma^2>\sigma_0^2\ ;\quad H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2\ ,\ H_1:\sigma^2<\sigma_0^2\ .$$

5.4.5. Перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції

Нехай випадковий вектор $(X;Y)$ має розподіл Гаусса (формула (2.33)) і $\tilde{r}_{X,Y}$ – вибірковий коефіцієнт кореляції, вирахуваний за вибіркою об’єму n. Виникає важливе питання про те, чи можна за величиною цього коефіцієнта робити висновок про кореляційний зв’язок між величинами X і Y (значущість величини вибіркового коефіцієнта кореляції $\tilde{r}_{X,Y}$).

Проведемо перевірку простої гіпотези H_0:$r=0$ проти складної конкуруючої гіпотези H_1: $r\neq0$ при рівні значущості ε.

Побудова правила прийняття рішення ґрунтується на тому, що випадкова величина

$$T((X_1;Y_1);\ldots;(X_n;Y_n)) = \hat{R}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{R}^2}}$$

(статистика $\hat{R}$ задається формулою (5.16) при справедливості основної гіпотези H_0 має розподіл Стьюдента з n–2 степенями вільності.

Критична область за правилом п. 5.4.1.3 розташована симетрично на “хвостах” розподілу Стьюдента з n–2 степенями вільності:

$$V_{кр}=\left(-\infty;-t\left(n-2;\varepsilon\right)\right)\cup\left(t\left(n-2;\varepsilon\right);+\infty\right).$$

Нагадаємо, що $t\left(n;\varepsilon\right)$ є квантилем рівня $1-\varepsilon/2$ розподілу Стьюдента з n степенями вільності. Значення квантилей $t\left(n;\varepsilon\right)$ наведено в табл. Д.1.2.

Якщо $T_{виб}=T((x_1;y_1);\ldots;(x_n;y_n))=\tilde{r}_{X,Y}\sqrt{\dfrac{n-2}{1-(\tilde{r}_{X,Y})^2}}\in V_{кр}$, то гіпотезу H_0 про відсутність кореляційного зв’язку між величинами X і Y слід відхилити (X і Y слід вважати залежними випадковими величинами); якщо ж $T_{виб}\notin V_{кр}$, то нема підстав відхиляти гіпотезу H_0 (випадкові величини X і Y слід вважати некорельованими).

Приклад 30. Випадковий вектор $(X;Y)$ розподілений за законом Гаусса.

Вибірковий коефіцієнт кореляції $\tilde{r}_{X,Y}$, обчислений за виборкою об'єму $n=32$, дорівнює 0.51. Перевірити при рівні значущості $\varepsilon=0.05$ гіпотезу H_0: $r=0$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $r\neq0$.

Розв'язання. Знайдемо вибіркове значення статистики $T_{виб}=\tilde{r}_{X,Y}\sqrt{\frac{n-2}{1-(\tilde{r}_{X,Y})^2}}=0.51\sqrt{\frac{30}{1-(0.51)^2}}=3.25$. За табл. Д.1.2 знаходимо $t\,(30;\,0.05)=2.04$. Оскільки $3.25>2.04$, то гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0.05 і, таким чином, вибірковий коефіцієнт кореляції суттєво відрізняється від нуля.

5.4.6. Критерій згоди χ2 (хи-квадрат)

У задачах, які розглядалися вище, припускалось, що функціональний вигляд закону розподілу є відомим і перевірялись гіпотези щодо його параметрів. Інколи є невідомим сам закон розподілу і перевіряється погодженість результатів експерименту з гіпотезою про те, що закон розподілу співпадає з деяким передбачуваним законом.

Критерії згоди відповідають на питання про те, чи можна розходження між експериментальним і теоретичним розподілами пояснити лише впливом випадковості.

Розглянемо ВВ X, функція розподілу якої $F_X(x)$ невідома. Висунемо гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що $F_X(x)=F_0(x)$, де $F_0(x)$ – деяка функція розподілу. Конкуруюча гіпотеза H_1 полягає в тому, що не виконується основна. Проведемо n незалежних вимірювань ВВ X. Їх результатом буде конкретний вектор $(x_1;x_2;...;x_n)$. Тепер виникає питання, наскільки добре узгоджуються дані вимірювань з гіпотезою H_0. Відповідь на це питання одержимо за допомогою критерію згоди χ^2.

Розіб'ємо область можливих значень ВВ X на r проміжків, які не перетинаються:

$$(-\infty=a_0;\,a_1),\,[a_1;\,a_2),\,[a_2;\,a_3),\ldots,\,[a_{r-1};\,a_r=+\infty).$$

Нехай p_i $(i=1,\ldots,r)$ – теоретична (передбачена) імовірність потрапляння ВВ X у i-й проміжок, якщо справедлива гіпотеза H_0:

$$p_i = P\left\{X \in \left[a_{i-1};a_i\right)/H_0\right\} = F_0\left(a_i\right) - F_0\left(a_{i-1}\right).$$

Позначимо через n_i кількість елементів вибірки, що потрапили у i-й проміжок (n_i – випадкова величина, яка змінюється від вибірки до вибірки). Близькість частоти n_i/n до теоретичної ймовірності p_i, передбаченої гіпотезою H_0, свідчить на користь узгодження гіпотези H_0 з результатом експерименту. За міру відхилення передбаченого закону розподілу $F_0(x)$ від істинного приймається випадкова величина

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}.$$

Якщо n досить велике ($n \geq 50$) і для всіх проміжків, крім крайніх, виконана умова $np_i \geq 5$, а для крайніх $np_i \geq 1$, то за умови справедливості гіпотези H_0 випадкова величина χ_n^2 має розподіл, близький до χ^2 – розподілу з r–1 степенями вільності.

Задамо рівень значущості ε. Тоді $V_{кр} = \left(\chi^2\left(r-1\,;\varepsilon\right)\,;\,+\infty\right)$, де $\chi^2\left(k\,;\varepsilon\right)$ є квантилем рівня $1-\varepsilon$ розподілу χ^2 з k степенями вільності, який обчислюються за допомогою табл. Д.1.3.

Позначимо як $\chi^2_{виб}$ обчислене за конкретною вибіркою ($x_1; x_2;...; x_n$) значення випадкової величини χ_n^2. Якщо $\chi^2_{виб} \geq \chi^2(r-1;\varepsilon)$, то гіпотеза H_0 відхиляється (спостерігається відхилення від гіпотези H_0 на рівні значущості ε; подія $\{\chi^2 \geq \chi^2(r-1;\varepsilon)\}$ є практично неможливою в даній серії вимірювань, якщо гіпотеза H_0 насправді правильна). Якщо ж $\chi^2_{виб} < \chi^2(r-1;\varepsilon)$, то гіпотеза H_0 не відхиляється (відхилення від гіпотези H_0 на рівні значущості ε не спостерігається; гіпотеза H_0 не суперечить результатам експерименту).

У випадку, коли за вибіркою знаходяться s параметрів розподілу $F_0(x)$, поріг $\chi^2(r-1;\varepsilon)$ потрібно замінити на $\chi^2(r-s-1;\varepsilon)$.

Зауваження. Якщо для деяких інтервалів умова $np_i \geq 5$ не виконується, то їх слід об'єднати з сусідніми.

Приклад 31. 100 вимірювань напруги призвели до результатів, що наведені у табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Проміжок випробу-вання	$(-\infty;0.9)$	$[0.9;2)$	$[2;2.55)$	$[2.55;3.65)$	$[3.65;4.2)$	$[4.2;5.3)$	$[5.3;+\infty)$
Кількість результа-тів вимірю-вань	13	12	12	19	10	16	18

Перевірити на рівні $\varepsilon = 0.1$ значущості припущення H_0 про те, що напруга розподілена за законом $N(3.1\,\text{В}; 4.84\,\text{В}^2)$.

Розв'язання. Передбачені ймовірності: p_i потрапляння випадкової напруги у проміжок $[a_{i-1};a_i)$ знайдемо за формулою (2.14)

$$p_i = \Phi\left(\frac{a_i - 3.1}{2.2}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - 3.1}{2.2}\right).$$ А саме

$$p_1 = \Phi\left(\frac{0.9-3.1}{2.2}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{-2.2}{2.2}\right) + \Phi(\infty) = -\Phi(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 0.3413 = 0.1587;$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{2-3.1}{2.2}\right) - \Phi\left(\frac{0.9-3.1}{2.2}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.3413 - 0.1915 = 0.1498;$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{2.55-3.1}{2.2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3.1}{2.2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) = 0.0928;$$

$$p_4 = \Phi\left(\frac{3.65-3.1}{2.2}\right) - \Phi\left(\frac{2.55-3.1}{2.2}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{4}\right) = 2\cdot 0.0987 = 0.1974;$$

$$p_5 = \Phi\left(\frac{4.2-3.1}{2.2}\right) - \Phi\left(\frac{3.65-3.1}{2.2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) = 0.0928;$$

$$p_6 = \Phi\left(\frac{5.3-3.1}{2.2}\right) - \Phi\left(\frac{4.2-3.1}{2.2}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.1498;$$

$$p_6 = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{5.3-3.1}{2.2}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(1) = 0.1587;$$

Обчислення оформимо у вигляді табл. 5.4.

Таблиця 5.4

I	n_i	p_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	13	0.1587	15.87	0.5190
2	12	0.1498	14.98	0.5928
3	12	0.0928	9.28	0.7972
4	19	0.1974	19.74	0.0277
5	10	0.0928	9.28	0.0559
6	16	0.1498	14.98	0.0695
7	18	0.1587	15.87	0.2859
Сума	100	1.0	100	$\chi^2_{виб}$=2.348

За табл. Д.1.3 знаходимо $\chi^2(6;0.1)=10.645$. Відхилити гіпотезу H_0 немає підстав. Більш того, оскільки 2.348 набагато менше, ніж 10.645, правильним є припущення про справедливість гіпотези H_0.

Якби гіпотеза H_0 полягала в тому, що напруга розподілена за законом $N(\bar{x}; s^2)$, де $\bar{x}$ і s^2 – вибіркове середнє та вибіркова дисперсія, то порогом було б число $\chi^2(7\text{-}2\text{-}1=4;\ 0.1) = 7.779$.

Приклад 32. В умовах прикладу 3 п. 5.1.2 перевірити при рівні значущості $\varepsilon = 0.1$ гіпотезу H_0 про те, що ВВ X розподілена за законом $N(42.225; 8.303)$.

$[x_{i-1}; x_i)$	[33;35)	[35;37)	[37;39)	[39;41)	[41;43)	[43;45)	[45;47)	[47;49)
n_i	1	2	8	13	25	16	18	2

Розв'язання. Обчислюємо передбачені ймовірності p_i:

$$p_1 = \Phi\left(\frac{35-42.225}{2.881}\right) - \Phi(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi(2.508) \approx 0.0060;\ p_2 = \Phi\left(\frac{37-42.225}{2.881}\right) +$$

$$+\Phi(2.508) = \Phi(2.508) - \Phi(1.814) = 0.494 - 0.4652 = 0.0288;$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{39-42.225}{2.881}\right) + \Phi(1.814) = \Phi(1.814) - \Phi(1.119) =$$

$$= 0.4652 – 0.3684 = 0.0968;$$

$$p_4 = \Phi\left(\frac{41-42.225}{2.881}\right) + \Phi(1.119) = \Phi(1.119) - \Phi(0.425) =$$

$$= 0.3684 – 0.1646 = 0.2038;$$

$p_5 = \Phi\left(\frac{43-42.225}{2.881}\right) + \Phi(0.425) = \Phi(0.269) + \Phi(0.425)$ =0.1060+0.1646=
= 0.2706;

$p_6 = \Phi\left(\frac{45-42.225}{2.881}\right) - \Phi(0.269) = \Phi(0.963) - \Phi(0.269)$ = 0.3322–0.1060 =
= 0.2262;

$p_7 = \Phi\left(\frac{47-42.225}{2.881}\right) - \Phi(0.963) = \Phi(1.657) - \Phi(0.963)$=0.4512–0.3322 =
= 0.1190;

$p_8 = \Phi(\infty) - \Phi(1.657)$= 0.5–0.4512 = 0.0488.

Для зручності подальших обчислень складаємо табл. 5.5.

Об’єднуємо перші три інтервали та два останніх. Одержимо табл. 5.6. Оскільки параметри $\bar{x}$ і s^2 обчислені за вибіркою, то поріг дорівнює χ^2(5-2-1=2;0.1)=4.61 (табл. Д.1.3). 1.638<4.61. Відхилити гіпотезу H_0 немає підстав.

Таблиця 5.5

i	n_i	p_i	np_i
1	1	0.0060	0.48
2	2	0.0288	2.304
3	8	0.0968	7.744
4	13	0.2038	16.304
5	25	0.2706	21.648
6	16	0.2262	18.096
7	13	0.1190	9.52
8	2	0.0488	3.904
Сума	80	1.0	80

Таблиця 5.6

i	n_i	p_i	np_i	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
1	11	0.1316	10.528	0.021
2	13	0.2038	16.304	0.670
3	25	0.2706	21.648	0.519
4	16	0.2262	18.096	0.243
5	15	0.1678	13.424	0.185
Сума	80	1.0	80	1.638

5.4.7. Поняття про послідовний аналіз

Послідовний аналіз – це метод розв’язання задач статистичної перевірки гіпотез, при якому кількість спостережень наперед не фіксується, оскільки вона залежить від наслідку випробування.

Відносно закону розподілу випадкової величини висуваються дві прості гіпотези H_0 і H_1, яким відповідають щільності ймовірності $p_X(x/H_0)$ і $p_X(x/H_1)$.

За заданими рівнями α і β ймовірності помилок першого та другого роду знаходимо числа $\Lambda_1 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ та $\Lambda_2 = \frac{1-\beta}{\alpha}$ (при такому підході числа α та β можна одночасно вибирати як завгодно малими).

Нехай x_1 – результат першого спостереження. Знайдемо значення відношення правдоподібності

$$\lambda(x_1) = \frac{p_{X_1}(x_1/H_1)}{p_{X_1}(x_1/H_0)}.$$

Якщо $\lambda(x_1) < \Lambda_1$, то приймається гіпотеза H_0. Якщо $\lambda(x_1) > \Lambda_2$, то гіпотеза відхиляється і приймається гіпотеза H_1. У тому випадку, коли $\Lambda_1 \le \lambda(x_1) \le \Lambda_2$, проводиться друге спостереження.

Нехай x_2 – результат другого спостереження. Знайдемо за вибіркою $(x_1; x_2)$ значення відношення правдоподібності

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{p_{X_1}(x_1/H_1) \cdot p_{X_2}(x_2/H_1)}{p_{X_1}(x_1/H_0) \cdot p_{X_2}(x_2/H_0)}.$$

Якщо $\lambda(x_1, x_2) < \Lambda_1$, то приймається гіпотеза H_0. Якщо $\lambda(x_1, x_2) > \Lambda_2$, то гіпотеза відхиляється і приймається гіпотеза H_1. У тому випадку, коли $\Lambda_1 \le \lambda(x_1, x_2) \le \Lambda_2$, проводиться третє спостереження.

Правило прийняття рішення:

1) $\lambda(x_1, ,\ldots, x_n) < \Lambda_1 \Rightarrow$ приймається гіпотеза H_0;

2) $\lambda(x_1, \ldots, x_n) > \Lambda_2 \Rightarrow$ відхиляється гіпотеза H_0;

3) $\Lambda_1 \le \lambda(x_1, \ldots, x_n) \le \Lambda_2 \Rightarrow$ випробування продовжуються і процедура прийняття рішення повторюється.

Кількість випробувань для прийняття рішення методом послідовного аналізу виявляється в середньому набагато меншою, ніж при вибірці фіксованого розміру при тих самих імовірностях помилки першого і другого роду.

5.5. Елементи дисперсійного аналізу

5.5.1. Початкові поняття

Дисперсійний аналіз – це статистичний метод обробки результатів вимірювань, які залежать від різних діючих одночасно якісних змінних, які називають факторами. Цей метод застосовують для з'ясування питання про суттєвість впливу того чи іншого фактора на вимірювану величину. Залежно від кількості факторів, що вивчаються, розрізняють **однофакторний**, **двофакторний** і **багатофакторний дисперсійний аналіз**.

Методи однофакторного дисперсійного аналізу можна, наприклад, застосувати для перевірки впливу на продуктивність праці такого фактора, як організація виробництва на кількох однотипних підприємствах. Кількість рівнів цього фактора дорівнює кількості підприємств (кількість способів організації виробництва).

Методи двофакторного дисперсійного аналізу застосовуються для виявлення ступеня впливу на врожайність деякої сільськогосподарської культури таких факторів, як сорт культури і варіант (спосіб) удобрення. Кількість рівнів першого і другого факторів дорівнює відповідно кількості засіяних сортів культури і кількості можливих варіантів удобрення.

5.5.2. Однофакторний аналіз

Нехай одна і та саме величина вимірюється n разів l різними приладами, які мають однакову точність. Припустимо, що n_1 вимірювань проводиться при першому рівні фактора (першим приладом), n_2 – при другому (другим приладом) і, нарешті, n_l – на l-му рівні фактора (l-м приладом): $n_1+n_2+\ldots+n_l=n$. Тоді можливі результати вимірювань можна розбити на l груп – теоретичних (випадкових) вибірок:

$$(X_{11}; X_{21};\ldots; X_{n_1 1}),$$

$$(X_{12}; X_{22};\ldots; X_{n_2 2}),$$

$$\ldots$$

$$(X_{1l}; X_{2l};\ldots; X_{n_l l}),$$

де випадкова величина X_{ik} означає *i*-й можливий результат у *k*-й групі ($i=1,\dots,n_i$; $k=1,\dots,l$). Відносно незалежних у сукупності нормально розподілених випадкових величин X_{ik} припустимо, що вони мають рівні, але невідомі дисперсії σ^2 і, взагалі кажучи, різні математичні сподівання a_k ($k=1,\dots,l$) при *k*-му рівні фактора.

Модель однофакторного аналізу подається у вигляді

$$X_{ik}=a+\alpha_k+\varepsilon_{ik}.$$

Тут: 1) a – загальне середнє арифметичне математичних сподівань MX_{ik} (загальний середній рівень); 2) $a+\alpha_k=a_k$ – середнє арифметичне математичних сподівань випадкових величин, що відповідають *k*-му рівню фактора (середній рівень у *k*-й групі); 3) ε_{ik} – незалежні в сукупності випадкові величини (похибки спостерігання), обумовлені впливом усіх інших факторів і розподілені за законом $N(0;\sigma^2)$. Зазначимо, що величини $a+\alpha_k$ та ε_{ik} не спостерігаються, а спостерігаються лише величини X_{ik}.

Перевіряється гіпотеза H_0: $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_l=0$ (або H_0: $a_1=a_2=\ldots=a_l=a$), зміст якої полягає в тому, що фактор не впливає на розподіл випадкових величин X_{ik}, тобто неоднаковості між групами відсутні (математичні сподівання $a_k=a+\alpha_k$ співпадають). При $l=2$ ця задача була розглянута в п. 5.4.2.1.

Позначимо через $\bar{X}_k$ і $\bar{X}$ відповідно середнє арифметичне *k*-ї групи, загальне середнє арифметичне:

$$\bar{X}_k=\frac{1}{n_k}\left(X_{1k}+X_{2k}+\ldots+X_{n_k k}\right) \quad (k=1,2,\ldots,l),$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\left(n_1\bar{X}_1+n_2\bar{X}_2+\ldots+n_l\bar{X}_l\right).$$

Введемо до розгляду статистики

$$S^2_{заг}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{l}\left[(X_{1k}-\bar{X})^2+(X_{2k}-\bar{X})^2+\ldots+(X_{n_k k}-\bar{X})^2\right],$$

$$S^2_k=\frac{1}{n_k-1}\left[(X_{1k}-\bar{X}_k)^2+(X_{2k}-\bar{X}_k)^2+\ldots+(X_{n_k k}-\bar{X}_k)^2\right] \quad (k=1,2,\ldots,l).$$

Статистика S_k^2 характеризує розкид значень відносно вибіркового середнього k-ї групи (мінливість у k-й групі), а статистика $S_{заг}^2$ характеризує загальний розкид значень відносно загального вибіркового середнього (загальну мінливість).

Основна тотожність однофакторного дисперсійного аналізу має вигляд

$$S_{заг}^2 = \frac{1}{n-1}\left[(n-l)S_0^2 + (l-1)S_A^2\right],$$

де статистика

$$S_0^2 = \frac{1}{n-l}\left[(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + \ldots + (n_l-1)S_l^2\right]$$

характеризує розкид (мінливість) **всередині** груп і обумовлюється випадковими відхиленнями від групових середніх, а статистика

$$S_A^2 = \frac{1}{l-1}\left[n_1(\bar{X}_1-\bar{X})^2 + n_2(\bar{X}_2-\bar{X})^2 + \ldots + n_l(\bar{X}_l-\bar{X})^2\right]$$

характеризує розкид вибіркових середніх відносно загального вибіркового середнього, тобто розкид **між групами,** і обумовлена впливом фактора.

З теореми Фішера (п. 5.3.3) випливає, що статистика $\frac{n_k-1}{\sigma^2}S_k^2$ має розподіл χ^2 з n_k-1 степенями вільності і, отже, статистика $(n–l)\frac{S_0^2}{\sigma^2}$ розподілена за законом χ^2 з $n–l$ степенями вільності.

Якщо гіпотеза H_0 є справедливою (вплив фактора є відсутнім), то статистики $(l–1)\frac{S_A^2}{\sigma^2}$ та $(n–l)\frac{S_0^2}{\sigma^2}$ є незалежними і статистика $(l–1)\frac{S_A^2}{\sigma^2}$ розподілена за законом χ^2 з $l–1$ степенями вільності. Тоді статистика

$$T = \frac{S_A^2}{S_0^2}$$

не залежить від невідомих параметрів і має розподіл Фішера $F(l-1, n-l)$ з l–1 та n–l степенями вільності. У цьому разі: 1) статистики $\bar{X}_k$ і $\bar{X}$ є незсуненими і спроможними оцінками невідомого математичного сподівання a (отже, значення статистики S_A^2 є малими); 2) статистики S_0^2 і S_A^2 є спроможними незсуненими оцінками невідомої дисперсії σ^2 (відношення їх значень s_A^2 / s_0^2 близьке до одиниці).

Якщо ж гіпотеза H_0 неправильна (значний вплив фактора), то значення статистики S_A^2 значуще більше, ніж значення статистики S_0^2 (відношення їх значень s_A^2 / s_0^2 суттєво більше одиниці).

Оптимальне правило прийняття рішення є таким:

1. Задамо рівень значущості ε. Тоді $V_{кр} = (F^{(\varepsilon)}(l-1, n-l); +\infty)$, де $F^{(\varepsilon)}(l-1, n-l)$ є квантилем рівня $1-\varepsilon$ розподілу Фішера з $l-1$ та $n-l$ степенями вільності (l–1 відповідає більшій емпіричній дисперсії), який обчислюються за допомогою табл. Д.1.6. Обчислюємо відношення більшої емпіричної дисперсії до меншої $T_{виб} = s_A^2 / s_0^2$ (у чисельнику завжди більше зі значень емпіричних дисперсій).

2. Якщо $T_{виб} \in V_{кр}$, то гіпотеза H_0 відхиляється (подія $\{ s_A^2 / s_0^2 \geq F^{(\varepsilon)}(l-1, n-l) \}$ малоймовірна за умови справедливості гіпотези H_0). У цьому випадку серед математичних сподівань $a_1, \ldots, a_l$ є хоча б два не рівних одне одному і, таким чином, підтверджується вплив фактора.

3. Якщо $T_{виб} \notin V_{кр}$, то гіпотеза H_0 про відсутність впливу фактора не відхиляється на рівні значущості ε (гіпотеза H_0 приймається). У цьому випадку $\bar{x}$ і s_0^2 є незсуненими оцінками параметрів a і σ^2.

У подальшому потрібно виявити той рівень фактора, який найбільше впливає на результат (тобто виявити групу найбільш неоднорідну порівняно з іншими групами).

Результати спостережень доцільно подати у вигляді табл. 5.7.

Таблиця 5.7

Номер вибірки (рівень фактора)	Спостереження	Об’єм вибірки	Сума	Групова середня
1	$x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n_1 1}$	n_1	$T_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}$	$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \cdot T_1$
2	$x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n_2 2}$	n_2	$T_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}$	$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \cdot T_2$
…	…	…	…	…
K	$x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{n_k k}$	n_k	$T_k = \sum_{i=1}^{n_1} x_{ik}$	$\bar{x}_k = \frac{1}{n_k} \cdot T_k$
…	…	…	…	…
L	$x_{1l}, x_{2l}, \ldots, x_{n_l l}$	n_l	$T_l = \sum_{i=1}^{n_l} x_{il}$	$\bar{x}_l = \frac{1}{n_l} \cdot T_l$
Всього		$n = \sum_{k=1}^{l} n_k$	$G = \sum_{k=1}^{l} T_k$	$\bar{x} = \frac{G}{n}$

Обчислення зважених сум квадратів, що входять до $s^2_{заг}$, s^2_0, s^2_A, зручно проводити за формулами

$$(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + \ldots + (n_l - 1)s_l^2 = C_1 - C_2,$$

$$n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_l(\bar{x}_l - \bar{x})^2 = C_2 - C_3,$$

$$(n - l)s_0^2 + (l - 1)s_A^2 = C_1 - C_3,$$

де $C_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}^2 + \sum_{i=2}^{n_2} x_{i2}^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n_l} x_{il}^2$, $\quad C_2 = \sum_{k=1}^{l} \frac{T_k^2}{n_k}$, $\quad C_3 = \frac{G^2}{n}$.

Розрахунок оцінок дисперсій зручно оформити у вигляді табл. 5.8, що називається таблицею дисперсійного аналізу.

Таблиця 5.8

Складові дисперсії	Зважена сума квадратів	Кількість степеней вільності	Оцінка дисперсії
Міжгрупова (факторна)	C_2–C_3	l–1	s_A^2
Внутрішньогрупова (залишкова)	C_1–C_2	n–l	s_0^2
Повна (загальна)	C_1–C_3	n–1	$s_{заг}^2$

Приклад 33. Проведено 16 випробувань, із них 4 на першому рівні фактора, 6 – на другому, 4 – на третьому і 2 – на четвертому. Результати випробувань наведені в табл. 5.6. Перевірити на рівні значущості 0.05 гіпотезу про рівність групових середніх (про відсутність впливу фактора).

Розв'язання. Заповнимо табл. 5.9.

Таблиця 5.9

Рівень фактора	Спостереження	Об'єм вибірки	Сума	Групова середня
1	8, 11, 8, 9	4	T_1=36	$\bar{x}_1=9$
2	9, 10,7, 11, 8, 10	6	T_2=55	$\bar{x}_2=9\frac{1}{6}$
3	16, 9, 12, 14	4	T_3=51	$\bar{x}_3=12\frac{3}{4}$
4	9, 8	2	T_4=17	$\bar{x}_4=8\frac{1}{2}$
Всього		n=16	G=159	$\bar{x}=9\frac{15}{16}$

Обчислимо суми квадратів спостережень:

1) $C_1=(8^2+11^2+8^2+9^2)+(9^2+10^2+7^2+11^2+8^2+10^2)+$

$+(16^2+9^2+12^2+14^2)+(9^2+8^2)=1667;$

2) $C_2=\frac{36^2}{4}+\frac{55^2}{6}+\frac{51^2}{4}+\frac{17^2}{2}=1622.92;$

3) $C_3=\frac{159^2}{16}=1580.06.$

Тоді C_1–C_2=44.08, C_2–C_3=42.86, C_1–C_3=86.94.

Заповнимо тепер табл. 5.10 дисперсійного аналізу.

Таблиця 5.10

Складові дисперсії	Зважена сума квадратів	Кількість степеней вільності свободи	Оцінка дисперсії
Міжгрупова	42.86	3	14.29
Внутрішньогрупова	44.08	12	3.67
Повна	86.94	15	5.80

Обчислимо значення $T_{виб}=\frac{s_A^2}{s_0^2}=\frac{14.29}{3.67}=3.89$. При рівні значущості ε=0.05 знайдемо за таблицею 5 додатку квантиль $F^{(0.05)}(3{,}12)\ =3.49$. Оскільки $T_{виб}=3.89>F^{(0.05)}(3{,}12)\ =3.49$, то гіпотеза про відсутність впливу фактора відхиляється.

Зауважимо, що при рівні значущості ε=0.025 квантиль $F^{(0.025)}(3{,}12)=4.47$

Оскільки $T_{виб}=3.89<F^{(0.025)}(3{,}12)=4.47$, то немає підстав для відхилення гіпотези про відсутність впливу фактора при рівні значущості 0.025. У цьому випадку $\bar{x}=9\frac{5}{16}$ і $s_0^2=3.67$ є незсуненими оцінками параметрів a і σ^2.

5.5.3. Двофакторний аналіз

При урахуванні двох факторів і їх взаємодії приймається модель

$$X_{ijk}=a+\alpha_j+\beta_k+\gamma_{jk}+\varepsilon_{ijk}\,.$$

Тут випадкова величина X_{ijk} – можливий результат i-го спостереження при j-му рівні першого фактора і k-му рівні другого фактора; a – загальне середнє арифметичне математичних сподівань MX_{ijk}; α_j – ефект, обумовлений впливом j-го рівня першого фактора; β_k – ефект, обумовлений впливом k-го рівня другого фактора; γ_{jk} – ефект взаємодії двох факторів; ε_{ijk} – випадкова величина, спричинена впливом усіх інших факторів і розподілена за законом $N(0;\sigma^2)$.

Коротко розглянемо задачу оцінки впливу двох факторів A і B та їх взаємодії AB на досліджувану величину. Припустимо, що фактор A має l рівнів, а фактор B – q рівнів. Для спрощення викладок будемо вважати, що проводиться однакова кількість спостережень υ при кожному поєднанні рівнів першого і другого факторів:

$$X_{1jk}, X_{2jk},\ldots, X_{\upsilon jk} \quad (j=1, 2,\ldots, l;\ k=1, 2,\ldots,q).$$

Відносно нормально розподілених незалежних у сукупності випадкових величин X_{ijk} припустимо, що мають однакові, але невідомі дисперсії σ^2.

Звичайно перевіряють такі гіпотези:

H_A : $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_l=0$ (ефект фактора A відсутній);
H_B : $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_q=0$ (ефект фактора B відсутній);
H_{AB}: $\gamma_{jk}=0$ ($j=1, 2,\ldots, l;\ k=1, 2,\ldots,q$) (ефект взаємодії факторів відсутній).

Розглянемо такі статистики (див. табл. 5.11):

$\overline{X}=\frac{1}{lq\upsilon}\left(X_{111}+X_{112}+\ldots+X_{\upsilon lq}\right)$ (загальне середнє арифметичне);

$\overline{X}_{\bullet jk}=\frac{1}{\upsilon}\left(X_{1jk}+X_{2jk}+\ldots+X_{\upsilon jk}\right)$ (середнє арифметичне для кожної можливої комбінації першого та другого факторів);

$\overline{X}_{\bullet j\bullet}=\frac{1}{q\upsilon}\left(X_{1j1}+X_{2j1}+\ldots+X_{\upsilon jq}\right)$ (середнє арифметичне по рядках);

$\overline{X}_{\bullet\bullet k}=\frac{1}{l\upsilon}\left(X_{11k}+X_{21k}+\ldots+X_{\upsilon lk}\right)$ (середнє арифметичне по стовпчиках).

Введемо до розгляду такі статистики:

1) статистика

$$S_A^2=\frac{\upsilon q}{l-1}\sum_{j=1}^{l}(\overline{X}_{\bullet j\bullet}-\overline{X})^2$$

характеризує розкид по рядках (по фактору A);

2) статистика

$$S_B^2=\frac{\upsilon l}{q-1}\sum_{k=1}^{q}(\overline{X}_{\bullet\bullet k}-\overline{X})^2$$

характеризує розкид по стовпчиках (по фактору B);

3) статистика

$$S_{AB}^2 = \frac{\upsilon}{(l-1)(q-1)} \sum_{(j,k)} (\overline{X}_{\bullet jk} - \overline{X}_{\bullet\bullet k} - \overline{X}_{\bullet j \bullet} + \overline{X})^2$$

характеризує розкид всередині рядків і стовпчиків (взаємодія факторів);

4) статистика

$$S_0^2 = \frac{1}{lq(\upsilon-1)} \sum_{(i,j,k)} (X_{ijk} - \overline{X}_{\bullet jk})^2$$

характеризує вплив усіх інших факторів;

5) статистика

$$S_{заг}^2 = \frac{1}{lqv-1} \sum_{(i,j,k)} \left(X_{ijk} - \overline{X} \right)^2$$

характеризує загальний розкид.

Таблиця 5.11

Рівень фактора A	Рівень фактора B						Середнє по рядках
	B_1	B_2	…	B_k	…	B_q	
A_1	X_{111}, X_{211}, …, $X_{\upsilon 11}$	X_{112}, X_{212}, …, $X_{\upsilon 12}$	…	X_{11k}, X_{21k}, …, $X_{\upsilon 1k}$	…	X_{11q}, X_{21q}, …, $X_{\upsilon 1q}$	$\overline{X}_{\bullet 1 \bullet}$
A_2	X_{121}, X_{221}, …, $X_{\upsilon 21}$	X_{122}, X_{222}, …, $X_{\upsilon 22}$	…	X_{12k}, X_{22k}, …, $X_{\upsilon 2k}$	…	X_{12q}, X_{22q}, …, $X_{\upsilon 2q}$	$\overline{X}_{\bullet 2 \bullet}$
…	…	…	…	…	…	…	…
A_j	X_{1j1}, X_{2j1}, …, $X_{\upsilon j1}$	X_{1j2}, X_{2j2}, …, $X_{\upsilon j2}$	…	X_{1jk}, X_{2jk}, …, $X_{\upsilon jk}$	…	X_{1jq}, X_{2jq}, …, $X_{\upsilon jq}$	$\overline{X}_{\bullet j \bullet}$
…	…	…	…	…	…	…	…
A_l	X_{1l1}, X_{2l1}, …, $X_{\upsilon l1}$	X_{1l2}, X_{2l2}, …, $X_{\upsilon l2}$	…	X_{1lk}, X_{2lk}, …, $X_{\upsilon lk}$	…	X_{1lq}, X_{2lq}, …, $X_{\upsilon lq}$	$\overline{X}_{\bullet l \bullet}$
Середнє по стовпчиках	$\overline{X}_{\bullet\bullet 1}$	$\overline{X}_{\bullet\bullet 2}$		$\overline{X}_{\bullet\bullet k}$		$\overline{X}_{\bullet\bullet q}$	$\overline{X}$

Основна тотожність двофакторного дисперсійного аналізу має вигляд

$$S_{заг}^2 = \frac{1}{lq\upsilon-1}\left[(l-1)S_A^2 + (q-1)S_B^2 + (l-1)(q-1)S_{AB}^2 + lq(\upsilon-1)S_0^2\right].$$

Для того щоб з'ясувати значущість впливу факторів A і B та їх взаємодії AB, величини відхилень, породжених цими факторами, порівнюють з величиною відхилень, породженої всіма іншими факторами.

При справедливості гіпотези H_A статистики $(l-1)\dfrac{S_A^2}{\sigma^2}$ та $lq(\nu-1)\dfrac{S_0^2}{\sigma^2}$ незалежні і розподілені за законом χ^2 відповідно з $l-1$ і $lq(\nu-1)$ степенями вільності і, таким чином, статистика

$$T=\frac{S_A^2}{S_0^2}$$

має розподіл Фішера $F(l-1, lq(\nu-1))$ з $l-1$ та $lq(\nu-1)$ степенями вільності. Гіпотеза H_A відхиляється на рівні значущості ε, якщо обчислене за вибірковими даними значення $T_{виб}$ статистики T не менше знайденого за табл. Д.1.5 квантиля рівня $F^{(\varepsilon)}(l-1, lq(\nu-1))$:

$$T_{виб} \geq F^{(\varepsilon)}(l-1, lq(\nu-1)).$$

У цьому випадку підтверджується вплив фактора A.

При справедливості гіпотези H_B статистики $(q-1)\dfrac{S_B^2}{\sigma^2}$ та $lq(\nu-1)\dfrac{S_0^2}{\sigma^2}$ незалежні і розподілені за законом χ^2 відповідно з $q-1$ і $lq(\nu-1)$ степенями вільності, а статистика

$$T=\frac{S_B^2}{S_0^2}$$

має розподіл Фішера $F(q-1, lq(\nu-1))$ з $q-1$ та $lq(\nu-1)$ степенями вільності. Гіпотеза H_B відхиляється на рівні значущості ε, якщо

$$T_{виб} \geq F^{(\varepsilon)}(q-1, lq(\nu-1)).$$

У цьому випадку підтверджується вплив фактора B.

При справедливості гіпотези H_{AB} статистики $(l-1)(q-1)\dfrac{S_{AB}^2}{\sigma^2}$ та $lq(\upsilon\text{-}1)\dfrac{S_0^2}{\sigma^2}$ незалежні і розподілені за законом χ^2 відповідно з $(l-1)(q-1)$ та $lq(\upsilon-1)$ степенями свободи. Тоді статистика

$$T = \frac{S_{AB}^2}{S_0^2}$$

розподілена за законом Фішера $F((l-1)(q-1), lq(v-1))$ з $(l-1)(q-1)$ та $lq(\upsilon-1)$ степенями вільності. Гіпотеза H_{AB} про відсутність взаємодії факторів A і B відхиляється на рівні значущості ε, якщо

$$T_{виб} \geq F^{(\varepsilon)}((l-1)(q-1), lq(v-1)).$$

5.5.4. Поняття про метод статистичних випробувань

5.5.4.1. Моделювання випадкових величин

Значення y ВВ Y, функція розподілу якої задана, можна отримати перетворенням значень x ВВ X, яка рівномірно розподілена на проміжку [0;1]. Нехай $y = F_{зад}(x)$ – задана неперервна строго зростаюча функція розподілу, а $x = G(y)$ – обернена до неї функція.

Доведемо, що функція розподілу ВВ $Y = G(X)$ дорівнює $F_{зад}(y)$. Дійсно,

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{G(X) < y\} = P\{F_{зад}(G(X)) < F_{зад}(y)\} = P\{X < F_{зад}(y)\} =$$
$$= P\{0 < X < F_{зад}(y)\} = F_{зад}(y).$$

Отже, значення ВВ Y з заданою функцією розподілу $F_{зад}(y)$ можна знаходити за значеннями рівномірно розподіленої на відрізку [0;1] ВВ X за формулою

$$Y = G(X),$$

де G є оберненою функцією до $F_{зад}$. Оскільки ВВ $1\text{-}X$ так само, як і X рівномірно розподілена на відрізку [0;1], то можна використовувати також формулу $Y = G(1-X)$.

Якщо ВВ Y є дискретною, то у звичайному розумінні не існує оберненої по відношенню до $F_{зад}(y)$ функції. У цьому випадку обернену функцію $G(x)$ природно визначити таким чином: при $0<x<p_1$ $G(x)=y_1$, при $p_1+p_2+...+p_{k-1}<x<p_1+p_2+...+p_k$ $G(x)=y_k$ $(k=2,3,...,n)$.

Приклад 34. Найти значення випадкової величини Y, яка розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda=3$.

Розв'язання. У нашому випадку $x=F_{зад}(y)=1-e^{-\lambda y}$. Отже, $y=G(x)==-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$. Оскільки $x_k\in(0;1)$, то $1-x_k\in(0;1)$ і для знаходження можливих значень y_k можна використовувати формулу $y_k=-\frac{1}{\lambda}\ln x_k$. Наприклад, коли за x_k обрати шість пар випадкових цифр 09, 54, 42, 01, 80, 95 з другого стовпця табл. Д.1.7, які помножено на 0.01, то при $\lambda=3$ отримаємо $y_1=0.8026$, $y_2=0.2054, y_3=0.2892, y_4=1.5351, y_5=0.0744, y_6=0.0171$.

Приклад 35. Розіграно 8 значень ВВ Y, закон розподілу якої задано таблицею

Y	1	4	6
P	0.25	0.5	0.25

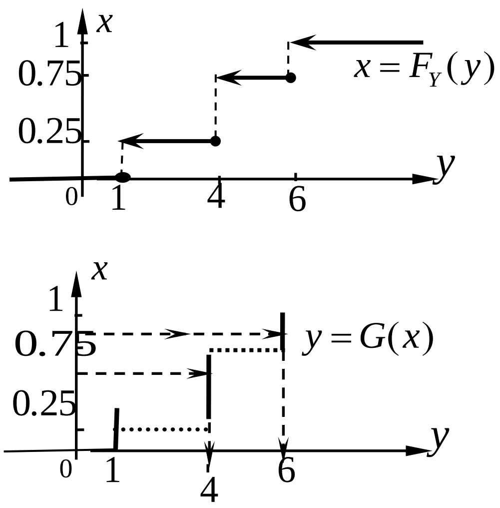


Рис. 5.14

Розв'язання. Оберемо вісім пар випадкових цифр 37, 54, 20, 48, 05, 64, 89, 47 з другого рядка табл. Д.1.7. Тоді отримуємо такі значення: 4, 4, 1, 4, 1, 4, 6, 4 (рис. 5.14).

5.5.4.2. Метод Монте-Карло (метод статистичних випробувань) – це чисельний метод розв'язання математичних задач, які виникають при дослідженні різноманітних складних систем (наприклад, біологічних, масового обслуговування, економічних, автоматичного управління та т. ін.). Цей метод засновано на моделюванні випадкових величин і побудові статистичних оцінок для шуканих величин.

Ідею методу статистичних випробувань буде проілюстровано на прикладі наближеного обчислення визначеного інтегралу

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Оскільки $I = \int_a^b (b-a) f(x) \cdot \frac{1}{b-a} dx$, то значення інтеграла можна розглядати як математичне сподівання ВВ $Y = (b-a) f(X)$, де ВВ X рівномірно розподілена зі щільністю $p_X(x) = 1/(b-a)$ на проміжку $(a;b)$.

Нехай ВВ X_k є незалежними і розподілені рівномірно на проміжку $(a;b)$, $Y_k = f(X_k)$ $(k = 1,...,n)$.

Розглянемо ВВ $I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$, $W_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - I_n)^2$.

Маємо:

1) $MI_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MY_k = \frac{1}{n} \cdot nMY = MY = I$;

2) $DI_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} DY_k\right) = \frac{1}{n^2} \cdot nDY = \frac{1}{n} DY$,

де $DY = \sigma_Y^2 = \int_a^b (b-a)^2 f^2(x) \frac{1}{b-a} dx - I^2 = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx - I^2$;

3) $M\,W_n = \sigma_Y^2$ (приклад 26 п. 3.2.2).

На підставі теореми Чебишева і ЦГТ (п. 3.2.4) можна вивести, що:

1) великі відхилення I_n від I малоймовірні;

2) великі відхилення W_n від σ_Y^2 малоймовірні;

3) випадкові величини $T_n = \frac{I_n - I}{\sqrt{DI_n}} = \frac{I_n - I}{\sigma_Y}\sqrt{n}$ і $U_n = \frac{I_n - I}{\sqrt{W_n}}\sqrt{n}$ розподілені асимптотично нормально за законом $N(0;1)$, що дозволяє наближено побудувати довірчий інтервал для I у випадку відомої і невідомої дисперсії відповідно.

Підрахунок інтеграла розпадається на дві частини: розіграш значення ВВ X і наступне обчислення функції $f(x)$. Тоді наближене значення шуканого інтеграла має вигляд

$$I \approx I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(b-a)\,f\left(x_k\right),$$

де x_k – можливі значення ВВ X, які розігрують за формулою $x_k = a+(b-a)r_k$, а r_k – рівномірно розподілені випадкові числа на відрізку $[0;1]$.

Приклад 36. За 10 реалізаціями ВВ, яка рівномірно розподілена на відрізку $\left[0\,;\frac{1}{2}\pi\right]$, обчислити методом Монте-Карло інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{cosx}dx$.

Розв'язання. За допомогою третього рядка табл. Д.1.7 моделюємо реалізації ВВ за формулою

$x_k = \frac{\pi}{2}r_k : x_1 = \frac{\pi}{2}\cdot 0.08 = 0.126, x_2 = \frac{\pi}{2}\cdot 0.42 = 0.660, x_3 = \frac{\pi}{2}\cdot 0.26 = 0.408, x_4 = \frac{\pi}{2}\cdot 0.89 = 1.398,$
$x_5 = 0.832, x_6 = 0.298, x_7 = 1.005,\ x_8 = 0.785, x_9 = 1.461,\ x_{10} = 0.047$.

Знайдемо значення $f\left(x_k\right)$, де $f\left(x\right) = \sqrt{\cos x}$:

0.996, 0.889, 0.958, 0.415, 0.821, 0.978, 0.732, 0.841, 0.331, 0.999.

Тоді $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{cosx}dx \approx \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\frac{\pi}{2}f\left(x_k\right) = \frac{\pi}{20}\cdot 7.96 \approx 1.250.$

Отриманий результат добре погоджується з значенням 1.198 цього інтеграла, яке знаходиться за таблицями спеціальних функцій.

Приклад 37. Обчислення інтеграла $I = \int\limits_0^1 x^2 dx$ здійснюється за методом Монте-Карло на підставі 10^4 незалежних випробувань. Знайти ймовірність того, що відносна похибка обчислення не перевищує 1 %.

Розв'язання. $I_{10000} = \frac{1}{10000}\sum_{k=1}^{10000} X_k^2$. Нехай $\delta = \left|\frac{I_{10000} - I}{I}\right| \le 0.01$ – відносна похибка обчислення інтеграла I. Тоді

$$P\left\{\left|\frac{I_{10000} - I}{I}\right| \le 0.01\right\} = P\left\{\left|I_{10000} - I\right| \le |I| \cdot 0.01\right\} =$$

$$= P\left\{T = \frac{\left|I_{10000} - I\right|}{\sigma_Y}\sqrt{10000} \le 0.01\frac{|I|}{\sigma_Y}\cdot\sqrt{10000}\right\} = 2\Phi\left(0.01\frac{|I|}{\sigma_Y}\cdot\sqrt{10000}\right).$$

У нашому прикладі $I = \frac{1}{3}$, $\sigma_Y = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx - I^2} = \frac{2}{3\sqrt{5}}$ і, таким чином,

$$P\left\{\left|\frac{I_{10000} - I}{I}\right| \le 0.01\right\} = 2\Phi\left(0.01\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot 100\right) \approx 2\Phi(1.12) \approx 0.7372.$$

Задачі до розділу 5. Математична статистика

5.1. Побудувати гістограму і графік емпіричної функції розподілу для згрупованої вибірки, яка задана таблицею:

а)

$[x_j; x_{j+1})$	n_j
5-15	2
15-25	3
25-35	8
35-45	19
45-55	13
55-65	9
65-75	3

б)

$[x_j; x_{j+1})$	n_j
10-12	2
12-14	4
14-16	8
16-18	12
18-20	16
20-22	10
22-24	3

5.2. Вирахувати середнє та дисперсію вибірок: а) 4,8,8,1,3,2, 3,4,6,5; б) 8,5,7,8,3,7,5,3,2,6.

5.3. Вирахувати середнє та дисперсію згрупованих вибірок на підставі даних задачі 5.1.

5.4. Визначити коефіцієнт кореляції та побудувати емпіричні прямі регресії *Y* на *X* та *X* на *Y* за даними вибірок:

а)

x	9	11	6	9	10
y	2	4	2	3	4

; б)

x	8	9	11	4
y	5	6	3	2

в)

x	70	57	75	67	42	25	61	44	49	37
y	29	20	28	24	21	16	25	21	22	18

5.5. Проведено 25 вимірів випадкового радіосигналу, який розподілено за нормальним законом з невідомим м.с. *a* та дисперсією $\sigma^2 = 1.5\text{ В}^2$. Знайти довірчий інтервал для м.с., що відповідає надійності: а) 0.9; б) 0.95; в) 0.99.

5.6. Скільки вимірювань випадкового радіосигналу, який розподілено за нормальним законом з невідомим м.с. a та дисперсією $\sigma^2 = 2\text{ В}^2$, треба провести, щоб похибка вимірювання м.с., що відповідає надійності 0.9, дорівнювала 0.6 В? Розв'язати цю задачу для надійності 0.95 та 0.99.

5.7. Проведено 50 вимірів напруги випадкового радіосигналу, який розподілено за нормальним законом з невідомим м.с. a та дисперсією $\sigma^2 = 2.5\text{В}^2$. Знайти величину довірчої ймовірності для м.с., вважаючи граничну похибку вимірювання м.с. рівною: а) 0.3 В; б) 0.2 В; в) 0.4 В.

5.8. Час безвідмовної роботи електронної лампи розподілено за нормальним законом з невідомим м.с. a та дисперсією $\sigma^2 = 256\text{ год}^2$. Знайти довірчий інтервал надійності $1-\varepsilon$ для м.с., якщо: а) n=64; $\bar{x}$=400 год, ε=0.1; б) n=121; $\bar{x}$=500 год., ε=0.05; в) n=100; $\bar{x}$=500 год., ε=0.01.

5.9. Час безвідмовної роботи електронної лампи розподілено за нормальним законом з невідомим м.с. a та дисперсією $\sigma^2 = 100\text{ год}^2$. Скільки електронних ламп треба перевірити, щоб гранична похибка вимірювання м.с., що відповідає надійності 0.9, дорівнювала 5 год? Розв'язати цю задачу для надійності 0.95 та 0.99.

5.10. Розв'язати задачу 5.5, вважаючи дисперсію σ^2 невідомою, а дисперсію вибірки s^2 рівною 2 В^2.

5.11. Зроблено 16 вимірів напруги випадкового радіосигналу, який розподілено за нормальним законом з невідомими параметрами. Дисперсія вибірки s^2 дорівнює 2 В^2. Знайти граничну похибку вимірювання м.с. a для надійності: а) 0.9; б) 0.95; в) 0.99.

5.12. Розв'язати задачу 5.6, вважаючи дисперсію σ^2 невідомою, а дисперсію вибірки s^2 рівною 1.5 В^2.

5.13. Зроблено 14 незалежних вимірів напруги, що розподілена за нормальним законом, параметри якого невідомі; при цьому отримані такі значення: 0.53; 1.56; 1.46; 1.25; –0.62; –0.41; –0.94; 0.19; 1.15; 1.04; -1.37; 1.50; -1.25; 0.13 В. Знайти довірчі інтервали для м.с. a та середнього квадратичного відхилення σ при надійності $1-\varepsilon$=0.9; 0.95; 0.99.

5.14. Розв’язати задачу 5.13 для таких даних: 1.13; 2.16; 2.06; –1.86; 0.26; 3.18; 0.10; 0.79; 1.75; 0.87; 0.38; 0.18; 0.20; 2.01.

5.15. Радіодалековимірювачем виконано 9 вимірів відстані до нерухомої цілі. Одержано такі результати: 6800; 6732; 6834; 6800; 6868; 6766; 6834; 6766; 6800 м. Знайти довірчі інтервали для м.с. a та середнього квадратичного відхилення σ при надійності $1-\varepsilon_1$=0.99; $1-\varepsilon_2$=0.95; $1-\varepsilon_3$=0.9.

5.16. Вимірювання ємності (мкф) партії з 20 конденсаторів привели до таких результатів: 5.52; 5.43; 5.52; 5.52; 5.77; 5.68; 5.83; 5.66; 5.48; 5.68; 5.43; 5.54; 5.72; 5.47; 5.62; 5.52; 5.55; 5.60; 5.54; 5.57. Вважаючи результати вимірювань розподіленими за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для м.с. та дисперсії σ^2 при надійності $1-\varepsilon_1$=0.99; $1-\varepsilon_2$=0.95; $1-\varepsilon_3$=0.9.

5.17. Використовуючи критерій χ^2, перевірити гіпотезу H_0 про рівномірний розподіл ВВ *X*, результати 200 вимірювань якої наведені у таблиці

$[a_{j-1};a_j)$	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
n_j	40	60	60	40

Рівень значущості ε взяти рівним: а) $\varepsilon=0.01$; б) $\varepsilon=0.05$.

5.18. Було зроблено виміри чутливості (мкВ) другого каналу в 40 телевізорів. Результати вимірів наведено в таблиці

$[a_{j-1};a_j)$	[125; 225)	[225; 275)	[275; 325)	[325; 375)	[375; 425)	[425; 525)
n_j	6	9	6	8	6	5

За допомогою критерію χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про те, що величина, яка підлягає вимірюванню, розподілена за нормальним законом з параметрами $\bar{x}, s^2$. Рівень значущості $\varepsilon=0.05$.

5.19. Використовуючи критерій χ^2, перевірити гіпотезу H_0 про показниковий розподіл ВВ *X*, результати 300 вимірювань якої наведено в таблиці

$[a_{j-1};a_j)$	[0;0.5)	[0.5;1.0)	[1.0;1.5)	[1.5;2.0)	[2.0;2.5)	[2.5;3.0)
n_j	110	80	50	30	20	10

5.20. Під час другої світової війни на Лондон впало 537 літаків-снарядів. Уся територія Лондона була поділена на 576 ділянок площиною по 0.25 км^2. Нижче наведено кількість ділянок n_j, на які впало j снарядів.

j	0	1	2	3	4	5
n_j	229	211	93	35	7	1

5.21. ВВ X розподілена на відрізку [0;1]. Відносно закону її розподілу висунуто дві гіпотези:

$H_0 : p_X\left(x\right) = 3x^2$, $H_1 : p_X\left(x\right) = 2x$.

Зроблено одне вимірювання, у якому $x = 0.4$. Якій гіпотезі треба віддати перевагу, якщо: 1) $\varepsilon = 0.05$; 2) $\varepsilon = 0.1$.

5.22. ВВ X розподілена за показниковим законом або з параметром 3 (гіпотеза H_0), або з параметром 4 (гіпотеза H_1).

Знайти оптимальне вирішальне правило для одного виміру так, щоб $\varepsilon = 0.1$.

5.23. ВВ X розподілена за законом Гаусса, причому $\sigma^2 = 1$, а параметр a=1 (гіпотеза H_0) або a=–1 (гіпотеза H_1). Відома умовна ймовірність похибки першого роду $\varepsilon = 0.3$. Яка з гіпотез повинна бути відхилена за результатами трьох вимірів $x_1 = -0.5$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 0.8$?

5.24. ВВ X розподілена за законом Гаусса, причому параметр a=0, а параметр $\sigma^2 = 1$ (гіпотеза H_0) або $\sigma^2 = 3$ (гіпотеза H_1). Знайти оптимальне вирішальне правило для одного виміру так, щоб $\varepsilon = 0.3$.

5.25. Із партії резисторів одного типу і номіналу зроблена вибірка з 25 резисторів. Середнє і дисперсія вибірки відповідно дорівнюють 8.9 кОм і 5.76 кОм^2. При рівні значущості $\varepsilon = 0.05$ перевірити пару гіпотез:

1) $H_0 : a = 10$ кОм, $H_1 : a \neq 10$ кОм;

2) $H_0 : a = 10$ кОм, $H_1 : a < 10$ кОм.

5.26. Перевірити гіпотезу про середній розмір деталі $H_0 : a = 3.58$ мм відносно альтернативи $H_1 : a \neq 3.58$ мм для вибірки з 15 деталей. Середнє і дисперсія вибірки відповідно дорівнюють 3.48 мм і 0.16 мм^2. Рівень значущості $\varepsilon = 0.05$.

5.27. Для перевірки нової технології виробництва деталей обираються дві групи працівників. У першій, яка працює за новою технологією, 10 працівників, середня продуктивність праці 72 деталі при середньому квадратичному відхиленні 9.1 деталі. У другій, яка працює за старою технологією, 12 працівників, середня продуктивність праці 64 деталі при середньому квадратичному відхиленні 10.2 деталі. Визначити з рівнем значущості $\varepsilon = 0.05$, чи впливає нова технологія на середню продуктивність праці.

5.28. а) виготівник двигунів стверджує, що середній термін їх служби дорівнює 900 год. Було перевірено 10 двигунів і виявилось, що емпіричне середнє і виправлена емпірична дисперсія терміну служби двигунів відповідно дорівнюють 945 год і 3600 год^2. Перевірити справедливість твердження виготовлювача при рівні значущості: 1) 5%; 2) 1%;

б) як зміниться відповідь, коли дисперсія терміну служби двигунів дорівнює 3200 год^2 ?

5.29. Вибірковий коефіцієнт кореляції, обчислений за вибіркою об'єму 24, дорівнює 0.36. Перевірити гіпотезу $H_0 : r = 0$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : r \neq 0$, якщо рівень значущості: 1) $\varepsilon = 0.01$; 2) $\varepsilon = 0.1$.

5.30. Із кожної з двох, розподілених за законом Гаусса, сукупностей зроблено відповідно по вибірці: $n_1 = 9, s_1^2 = 11, n_2 = 11, s_2^2 = 29$. Перевірити гіпотезу про однаковість дисперсій у сукупностях, якщо рівень значущості: 1) $\varepsilon = 0.05$; 2) $\varepsilon = 0.1$.

5.31. Проведено 12 випробувань, із них 5 на першому рівні фактора, 4 – на другому, 3 – на третьому. Результати випробувань є такими: 6, 5, 12, 9, 10 на першому рівні фактора; 14 ,11, 5, 6 – на другому; 12, 4, 7 – на третьому. Перевірити на рівні значущості $\varepsilon = 0.05$ гіпотезу H_0 про рівність групових середніх. Якщо гіпотеза приймається, то знайти незсунені оцінки середнього і дисперсії.

5.32. Проведено 11 випробувань, із них 3 на першому рівні фактора, 3 – на другому, 3 – на третьому і 2 – на четвертому. Результати випробувань є такими: 8, 11, 8 на першому рівні фактора; 9, 10, 7 – на другому; 16, 9, 12 – на третьому; 9, 8 – на четвертому. Перевірити на рівні значущості $\varepsilon = 0.05$ гіпотезу H_0

про рівність групових середніх. Якщо гіпотеза приймається, то знайти незсунені оцінки середнього і дисперсії.

5.33. За заданими вибірками

а)

x_i	-2.5	-2.4	-1.8	-2.0	-1.9	-1.4	-1.1	-1.3	-0.9	-0.5	-0.8	-0.1
y_i	-2.6	-1.9	-1.2	0.2	0.3	1.2	1.3	1.5	1.9	2.2	2.4	2.9

б)

x_i	-2.7	-2.2	-2.8	-2.6	-2.4	-2.3	-1.8	-1.3	-1.6	-1.7	-1.5	-1.1
y_i	0.2	0.5	1.0	1.1	1.2	1.5	1.7	2.6	1.9	2.5	3.2	3.3

в)

x_i	2.7	4.6	6.3	7.8	9.2	10.6	12.0	13.4	14.7
y_i	17.0	16.2	13.3	13.0	9.7	9.9	6.2	5.8	5.7

знайти: 1) оцінки параметрів лінійної регресії Y на x; 2) оцінку дисперсії похибок спостережень; 3) довірчі інтервали надійності 0.95 для параметрів лінійної регресії і для середнього значення Y_0, яке відповідає заданому значенню $x = x_0$; 4) довірчий інтервал надійності 0.9 для прогнозу $y(x_П)$(для а), б) і в) $x_П$ дорівнює відповідно -1.7, -2.5, 10).

5.34. Розіграти, використовуючи перший стовпець табл. Д.1.7, значення дискретної ВВ *Y*, закон розподілу якої задано таблицею:

Y	-1	0	2
P	0.12	0.46	0.42

5.35. Розіграти, використовуючи другий рядок табл. Д.1.7 6 можливих значень ВВ *Y*, що рівномірно розподілена на відрізку [2;5].

5.36. Розіграти, використовуючи третій рядок табл. Д.1.6 3 можливих значення ВВ Y , яка розподілена за показниковим законом з параметром λ=2.

5.37. Розіграти, використовуючи третій стовпець табл. Д.1.6 5 можливих значень ВВ, щільність розподілу якої: 1) $p_Y(y) = 2y$, $y \in [0;1]$; 2) $p_Y(y) = 1 - \frac{1}{2}y$, $y \in [0;2]$; 3) $p_Y(y) = y \cdot e^{-y^2/2}$, $y \in [0;+\infty)$.

5.38. Обчислення інтеграла $I = \int_0^1 x^2 dx$ здійснюється за методом Монте–Карло на підставі 10^3 незалежних випробувань.

Знайти ймовірність того, що: 1) абсолютна похибка обчислення не перевищує 0.01; 2) відносна похибка обчислення не перевищує 1 %.

5.39. Обчислення інтеграла $I=\int_0^1 e^x dx$ здійснюється за методом Монте-Карло на підставі 10^2 незалежних випробувань. Яку мінімальну абсолютну похибку обчислення можна гарантувати з ймовірністю: 1) 0.95; 2) 0.99?

5.40. Який об'єм n вибірки треба взяти в методі Монте-Карло, щоб при обчисленні інтеграла $I=\int_0^{\pi/2} cosxdx$ з імовірністю не менше 0.9722 відносна похибка обчислення була менше 1 %.

Відповіді

5.2. а) $\bar{x}=4.4$, $s^2=5.6$; б) $\bar{x}=5.4$, $s^2=4.711$. **5.3**. а) $\bar{x}$=43.51, s^2=191.04; б) $\bar{x}$=17.84, s^2=8.57. **5.4.** а) 0.802, y=0.43x–0.86 (Y на X), x=1.5y+4.5 (X на Y); б) 0.434, y=0.27x+1.85 (Y на X), x=0.7y+5.2 (X на Y); в) 0.919, y=0.24x+9.87 (Y на X), x=3.55y–26.83 (X на Y). **5.5.** а) ($\bar{x}$–0.40; $\bar{x}$+0.40); б) ($\bar{x}$–0.48; $\bar{x}$+0.48); в) ($\bar{x}$–0.63; $\bar{x}$+0.63). **5.6.** 22; 31; 54. **5.7.** а) 0.8204; б) 0.6286; в) 0.9264. **5.8.** а) (396.7; 403.3); б) (496.1; 503.9); в) (494.8;505.2). **5.9.** 11; 16; 27. **5.10.** а) ($\bar{x}$–0.484; $\bar{x}$+0.484); б) ($\bar{x}$–0.584; $\bar{x}$+0.584); в) ($\bar{x}$–0.791; $\bar{x}$+0.791). **5.11.** а) 0.620; б) 0.753; в) 1.042. **5.12.** 14; 19; 32. **5.13.** $\bar{x}$=0.301, s^2=1.132, s=1.06, ε=0.1: (–0.203;0.805), (0.818;1.55); ε=0.05: (–0.313;0.915), (0.779;1.68); ε=0.001: (–0.556; 1.158), (0.712; 1.97). **5.14.** $\bar{x}$=0.994, s^2=1.544, s=1.242, ε=0.1: (0.356; 1.532), (0.954; 1.81); ε=0.05: (0.227; 1.661), (0.908; 1.96); ε=0.01: (–0.056; 1.944), (0.830; 2.29). **5.15.** $\bar{x}$=6800, s^2=1735, s=41.6, ε=0.1: (6774; 6826), (29.9; 71.3); ε=0.05: (6768; 6832), (28.1; 79.8); ε=0.01: (6753; 6847), (25.1; 101.6). **5.16.** $\bar{x}$=5.58, s^2=0.0122, s=0.111, ε=0.1: (5.54; 5.62), (0.088; 0.152); ε=0.05: (5.53; 5.63), (0.084; 0.162); $\varepsilon=0.01$: (5.51; 5.65), (0.078; 0.185). **5.17.** а) підстав відхиляти гіпотезу H_0 нема; б) гіпотеза H_0 повинна бути відхилена. **5.18.** Підстав відхилити гіпотезу H_0 нема. **5.19.** Підстав відхилити гіпотезу H_0 нема.

5.20. $\bar{x}=0.93,\ p_j=\dfrac{0.93^j}{j!}e^{-0.93},\chi^2_{експ}=1.05$; гіпотеза H_0 приймається (нема підстав її відхилити)**. 5.21.** 1) підстав відхилити гіпотезу H_0 нема $\left(0.4>\sqrt[3]{0.05}\right)$; 2) гіпотеза H_0 відхиляється $\left(0.4<\sqrt[3]{0.1}\right)$. **5.22.** При $x_1\le -ln0.9\approx 0.035$ гіпотеза H_0 відхиляється, а при $x_1>0.035$ підстав відхилити гіпотезу H_0 нема. **5.23.** Гіпотеза H_0 відхиляється. **5.24.** При $|x|\ge 1.04$ гіпотеза H_0 відхиляється, при $|x|<1.04$ підстав відхилити гіпотезу H_0 нема. **5.25.** 1) гіпотеза H_0 відхиляється; 2) підстав відхилити гіпотезу H_0 нема. **5.26**. Підстав відхилити гіпотезу H_0 нема. **5.27**. Не впливає. **5.28**. а) 1) гіпотеза H_0 відхиляється; 2) підстав відхилити гіпотезу H_0 не має; б) в обох випадках гіпотеза H_0 відхиляється. **5.29**. 1) підстав відхилити гіпотезу H_0 нема; 2) гіпотеза H_0 відхиляється. **5.30.** 1) гіпотеза про рівність дисперсій приймається; 2) гіпотеза про рівність дисперсій відхиляється. **5.31**. Гіпотеза приймається. $\bar{x}=8.42,s^2=13.32.$ **5.32**. Гіпотеза приймається. $\bar{x}=9.73,s^2=6.26.$

5.33. а) 1) $\tilde{\beta}_0\approx 3.74,\tilde{\beta}_1\approx 2.19\Rightarrow \tilde{y}=3.74+ +2.19\cdot x$; 2) $\tilde{\sigma}\approx 0.67$;

3) $\beta_0\in(2.79\,;4.68),\beta_1\in(1.59\,;2.80)$, $\tilde{y}(x_0)\pm 1.5\cdot\sqrt{0.08+0.16(x_0+1.39)^2}$;

4) $\tilde{y}(-1.7)\pm 1.22\cdot\sqrt{1.08+0.16(-1.7+1.39)^2}\approx 0.7\cdot 10^{-2}\pm 1.28$;

б) 1) $\tilde{\beta}_0\approx 4.82,\tilde{\beta}_1\approx 1.55\Rightarrow \tilde{y}=4.82+1.55\cdot x$**;** 2)$\tilde{\sigma}\approx 0.49$;

3) $\beta_0\in(3.62\,;6.02),\beta_1\in(0.97\,;2.13)$, $\tilde{y}(x_0)\pm 1.1\cdot\sqrt{0.08+0.28(x_0+2)^2}$;

4) $\tilde{y}(-2.5)\pm 0.89\cdot\sqrt{1.08+0.28(-2.5+2)^2}\ \approx 0.95\pm 0.96$;

в) 1) $\tilde{\beta}_0\approx 20.30,\tilde{\beta}_1\approx -1.06\Rightarrow \tilde{y}=20.30-1.06\cdot x$**;** 2)$\tilde{\sigma}\approx 0.94$;

3) $\beta_0\in(18.39\,;22.21),\beta_1\in(-1.25\,;-0.86)$,

$\tilde{y}(x_0)\pm 2.23\cdot\sqrt{0.11+0.76\cdot 10^{-2}(x_0+9.03)^2}$;

4) $\tilde{y}(10)\pm 1.79\cdot\sqrt{1.11+0.76\cdot 10^{-2}(10+9.03)^2}\ \approx 9.73\pm 1.89.$

5.34. –1, 0, –1, 2, –1. **5.35.** 3.11, 3.62, 2.60, 3.44, 2.10, 3.92. **5.36.** 0.04, 0.27, 0.15. **5.37.** 1) 0.85, 0.45, 0.51, 0.95, 0.89; 2) 0.30, 1.10, 0.98, 0.10, 0.22; 3) 0.7934, 1.7941, 1.6414, 0.4591, 0.6866. **5.38.** 1) 0.7108; 2) 0.2736. **5.39.** 1) 0.0964; 2) 0.1267. **5.40.** >11310.

Додаток 1

Таблиця Д.1.1

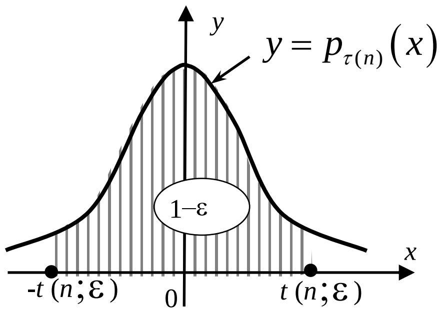
Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.00000				
0.05	0.01994	1.05	0.35314	2.05	0.47982
0.10	0.03983	1.10	0.36433	2.10	0.48214
0.15	0.05962	1.15	0.37493	2.15	0.48422
0.20	0.07926	1.20	0.38493	2.20	0.48610
0.25	0.09871	1.25	0.39435	2.25	0.48778
0.30	0.11791	1.30	0.40320	2.30	0.48928
0.35	0.13683	1.35	0.41149	2.35	0.49061
0.40	0.15542	1.40	0.41924	2.40	0.49180
0.45	0.17364	1.45	0.42647	2.45	0.49286
0.50	0.19146	1.50	0.43319	2.50	0.49379
0.55	0.20884	1.55	0.43943	2.55	0.49461
0.60	0.22575	1.60	0.44520	2.60	0.49534
0.65	0.24215	1.65	0.45053	2.65	0.49598
0.70	0.25804	1.70	0.45543	2.70	0.49653
0.75	0.27337	1.75	0.45994	2.75	0.49702
0.80	0.28814	1.80	0.46407	2.80	0.49744
0.85	0.30234	1.85	0.46784	2.85	0.49781
0.90	0.31594	1.90	0.47128	2.90	0.49813
0.95	0.32894	1.95	0.47441	2.95	0.49841
1.00	0.34134	2.00	0.47725	3.00	0.49865
3.1	0.49903	3.2	0.49931	3.3	0.49952
3.4	0.49966	3.5	0.49977	3.6	0.49984
3.7	0.49989	3.8	0.49993	3.9	0.49995
4.0	.499968	4.5	.499997	5.0	.49999997

Значення функції $u(\varepsilon)$, яка задовольняє умову $\Phi(u(\varepsilon)) = \frac{1-\varepsilon}{2}$: $u(0.01)=2.5758$, $u(0.03)=2.1701$, $u(0.05)=1.9600$, $u(0.07)=1.8119$, $u(0.1)= 1.6449$.

Таблиця Д.1.2

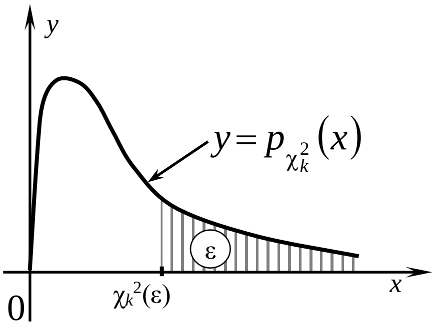
Значення $t\ (n;\varepsilon)$, які задовольняють рівняння $\int_0^{t(n;\varepsilon)} p_{\tau(n)}(x)dx = \frac{1-\varepsilon}{2}$, де $p_{\tau(n)}(x)$ – щільність розподілу Стьюдента з n степенями вільності



n	$t(n;0.1)$	$t(n;0.05)$	$t(n;0.01)$	n	$t(n;0.1)$	$t(n;0.05)$	$t(n;0.01)$
1	6.3138	12.7062	63.6567	19	1.7291	2.0930	2.8609
2	2.9200	4.3027	9.9248	20	1.7247	2.0860	2.8453
3	2.3534	3.1824	5.8409	21	1.7207	2.0796	2.8314
4	2.1318	2.7764	4.6041	22	1.7171	2.0739	2.8188
5	2.0105	2.5706	4.0321	23	1.7139	2.0687	2.8073
6	1.9432	2.4469	3.7074	24	1.7109	2.0639	2.7969
7	1.8946	2.3646	3.4995	25	1.7081	2.0595	2.7874
8	1.8595	2.3060	3.3554	26	1.7056	2.0555	2.7787
9	1.8331	2.2622	3.2498	27	1.7033	2.0518	2.7707
10	1.8125	2.2281	3.1693	28	1.7011	2.0484	2.7633
11	1.7959	2.2010	3.1058	29	1.6991	2.0452	2.7564
12	1.7823	2.1788	3.0545	30	1.6974	2.042	2.750
13	1.7709	2.1604	3.0123	35	1.6896	2.0301	2.7240
14	1.7613	2.1448	2.9768	40	1.6839	2.0211	2.7045
15	1.7530	2.1314	2.9467	60	1.671	2.000	2.660
16	1.7459	2.1199	2.9208	120	1.658	1.980	2.617
17	1.7396	2.1098	2.8982	$+\infty$	1.6449	1.9600	2.5758
18	1.7341	2.1009	2.8784				

Граничні значення $t_\varepsilon(n;\ \varepsilon)$ при $n\to+\infty$: $t(+\infty;0.1)=1.6449$, $t(+\infty;0.05)=1.9600$, $t(+\infty;0.01)=2.5758$ є коренями рівняння $2\Phi(u_\varepsilon)=1-\varepsilon$ при $\varepsilon=0.1,\ 0.05,\ 0.01$.

Таблиця Д.1.3



Значення функції $\chi^2(k;\varepsilon)$, які задовольняють рівняння $\int\limits_{\chi^2(k;\varepsilon)}^{+\infty} p_{\chi^2(k)}(x)\,dx=\varepsilon$, де $p_{\chi^2(k)}(x)$ – щільність розподілу χ^2 з k степенями вільності

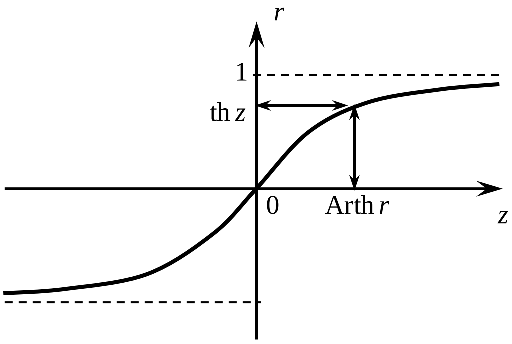
k	$\chi^2(k;0.1)$	$\chi^2(k;0.05)$	$\chi^2(k;0.01)$
1	2.71	3.84	6.63
2	4.61	5.99	9.21
3	6.25	7.81	11.3
4	7.78	9.49	13.3
5	9.24	11.1	15.1
6	10.6	12.6	16.8
7	12.0	14.1	18.5
8	13.4	15.5	20.1
9	14.7	16.9	21.7
10	16.0	18.3	23.2
11	17.3	19.7	24.7
12	18.5	21.0	26.2
13	19.8	22.4	27.7
14	21.1	23.7	29.1
15	22.3	25.0	30.6
16	23.5	26.3	32.0
17	24.8	27.6	33.4
18	26.0	28.9	34.8
19	27.2	30.1	36.2
20	28.4	31.4	37.6
21	29.6	32.7	38.9
22	30.8	33.9	40.3
23	32.0	35.2	41.6
24	33.2	36.4	43.0
25	34.4	37.7	44.3
30	40.3	43.8	50.9
35	46.1	49.8	57.3
40	51.8	55.8	63.7

Таблиця Д.1.4

Коефіцієнти довірчого інтервалу для дисперсії

n	$\varepsilon=0.1$		$\varepsilon=0.05$		$\varepsilon=0.01$	
	$z^{(1)}(n;0.1)$	$z^{(2)}(n;0.1)$	$z^{(1)}(n;0.05)$	$z^{(2)}(n;0.05)$	$z^{(1)}(n;0.01)$	$z^{(2)}(n;0.01)$
2	0.260	254	0.199	1018	0.127	25400
3	0.334	19.4	0.271	39.5	0.189	200
4	0.384	8.52	0.321	13.89	0.234	41.8
5	0.421	5.63	0.360	8.26	0.268	19.3
6	0.450	4.35	0.391	6.02	0.299	12.1
7	0.476	3.66	0.417	4.84	0.324	8.88
8	0.496	3.23	0.438	4.14	0.345	7.08
9	0.516	2.93	0.457	3.67	0.364	5.97
10	0.533	2.70	0.474	3.33	0.381	5.20
11	0.546	2.54	0.488	3.08	0.397	4.63
12	0.558	2.41	0.502	2.88	0.410	4.23
13	0.571	2.29	0.515	2.73	0.424	3.91
14	0.580	2.21	0.526	2.59	0.436	3.64
15	0.591	2.13	0.536	2.49	0.447	3.44
16	0.600	2.07	0.545	2.40	0.457	3.26
17	0.608	2.01	0.556	2.32	0.466	3.11
18	0.616	1.96	0.563	2.25	0.476	2.98
19	0.623	1.92	0.571	2.19	0.484	2.88
20	0.631	1.88	0.578	2.13	0.492	2.78
21	0.637	1.83	0.585	2.09	0.500	2.69
22	0.642	1.81	0.592	2.04	0.507	2.62
23	0.649	1.79	0.598	2.00	0.514	2.55
24	0.653	1.76	0.604	1.97	0.520	2.48
25	0.659	1.74	0.609	1.94	0.526	2.43
30	0.681	1.64	0.634	1.80	0.554	2.22

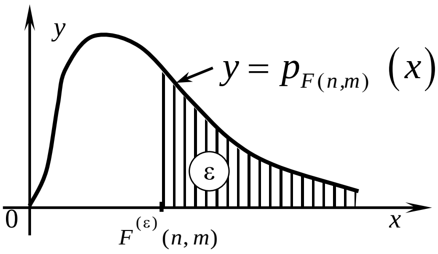
Таблиця Д.1.5



Значення функції $r = \text{th}\, z$

z	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
0,0	0,000	0,020	0,040	0,060	0,080
0,1	0,100	0,119	0,139	0,159	0,178
0,2	0,197	0,217	0,235	0,254	0,273
0,3	0,291	0,310	0,327	0,345	0,363
0,4	0,380	0,397	0,414	0,430	0,446
0,5	0,462	0,478	0,493	0,508	0,523
0,6	0,537	0,551	0,565	0,578	0,592
0,7	0,604	0,617	0,629	0,641	0,653
0,8	0,664	0,675	0,686	0,696	0,706
0,9	0,716	0,726	0,735	0,744	0,753
1,0	0,762	0,770	0,778	0,786	0,793
1,1	0,800	0,808	0,814	0,821	0,827
1,2	0,834	0,840	0,845	0,851	0,856
1,3	0,862	0,867	0,872	0,876	0,881
1,4	0,885	0,890	0,894	0,898	0,901
1,5	0,905	0,909	0,912	0,915	0,919
1,6	0,922	0,925	0,927	0,930	0,933
1,7	0,935	0,938	0,940	0,943	0,945
1,8	0,947	0,949	0,951	0,953	0,954
1,9	0,956	0,958	0,960	0,961	0,963
2,0	0,964				

Таблиця Д.1.6



Значення $F^{(\varepsilon)}(n,m)$, які задовольняють

рівняння $\int\limits_{F^{(\varepsilon)}(n,m)}^{+\infty} p_{F(n,m)}(x)dx = \varepsilon$,

де $p_{F(n,m)}(x)$ – щільність імовірності розподілу Фішера з n і m степенями вільності (n – кількість степеней вільності для більшої дисперсії)

$\varepsilon = 0.05$

m \ n	**2**	**3**	**6**	**10**	**15**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
2	19,00	19,16	19,33	19,40	19,43	19,45	19,46	19,47	19.48	19.49	19.50
3	9,55	9,28	8,94	8,79	8,70	8,64	8,62	8,59	8.57	8.55	8.53
4	6,94	6,59	6,16	5,96	5,86	5,77	5,75	5,72	5.69	5.66	5.63
5	5,79	5,41	4,95	4,74	4,62	4,53	4,50	4,46	4.43	4.40	4.36
6	5,14	4,76	4,28	4,06	3,94	3,84	3,81	3,77	3.74	3.70	3.67
7	4,74	4,35	3,87	3,64	3,51	3,41	3,38	3,34	3.30	3.27	3.23
8	4,46	4,07	3,58	3,35	3,22	3,12	3,08	3,04	3.01	2.97	2.93
9	4,26	3,86	3,37	3,14	3,01	2,90	2,86	2,83	2.78	2.75	2.71
10	4,10	3,71	3,22	2,98	2,85	2,74	2,70	2,66	2.62	2.58	2.54
11	3,98	3,59	3,09	2,85	2,72	2,61	2,57	2,53	2.49	2.45	2.40
12	3,89	3,49	3,00	2,75	2,62	2,51	2,47	2,43	2.38	2.34	2.30
13	3,81	3,41	2,92	2,67	2,53	2,42	2,38	2,34	2.30	2.25	2.21
14	3,74	3,34	2,85	2,60	2,46	2,35	2,31	2,27	2.22	2.18	2.13
15	3,68	3,29	2,79	2,54	2,40	2,29	2,25	2,20	2.16	2.11	2.07
16	3,63	3,24	2,74	2,49	2,35	2,24	2,19	2,15	2.11	2.06	2.01
17	3,59	3,20	2,70	2,45	2,31	2,19	2,15	2,10	2.06	2.01	1.96
18	3,55	3,16	2,66	2,41	2,27	2,15	2,11	2,06	2.02	1.97	1.92
19	3,52	3,13	2,63	2,38	2,23	2,11	2,07	2,03	1.98	1.93	1.88
20	3,49	3,10	2,60	2,35	2,20	2,08	2,04	1,99	1.95	1.90	1.84
25	3,39	2,99	2,49	2,24	2,09	1,96	1,92	1,87	1.82	1.77	1.71
30	3,32	2,92	2,42	2,16	2,01	1,89	1,84	1,79	1.74	1.68	1.62
60	3.15	2.76	2.25	1.99	1.84	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.07	2.68	2.17	1.81	1.75	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.00	2.60	2.10	1.83	1.67	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Продовження табл. Д.1.6

$\varepsilon = 0.025$

n / m	2	3	6	10	15	24	30	40	60	120	∞
2	39,00	39,17	39,33	39,40	39,43	39,46	39,46	39,47	39.48	39.49	39.50
3	16,04	15,44	14,73	14,42	14,25	14,12	14,08	14,04	13.99	13.95	13.90
4	10,65	9,98	9,20	8,84	8,66	8,51	8,46	8,41	8.36	8.31	8.26
5	8,43	7,76	6,98	6,62	6,43	6,28	6,23	6,18	6.12	6.07	6.02
6	7,26	6,60	5,82	5,46	5,27	5,12	5,07	5,01	4.96	4.90	4.85
7	6,54	5,89	5,12	4,76	4,57	4,41	4,36	4,31	4.25	4.20	4.14
8	6,06	5,42	4,65	4,30	4,10	3,95	3,89	3,84	3.78	3.73	3.67
9	5,71	5,08	4,32	3,96	3,77	3,61	3,56	3,51	3.45	3.39	3.33
10	5,46	4,83	4,07	3,72	3,52	3,37	3,31	3,26	3.20	3.14	3.08
11	5,26	4,63	3,88	3,53	3,33	3,17	3,12	3,06	3.00	2.94	2.88
12	5,10	4,47	3,73	3,37	3,18	3,02	2,96	2,91	2.85	2.79	2.72
13	4,97	4,35	3,60	3,25	3,05	2,89	2,84	2,78	2.72	2.66	2.60
14	4,86	4,24	3,50	3,15	2,95	2,79	2,73	2,67	2.61	2.55	2.49
15	4,77	4,15	3,41	3,06	2,86	2,70	2,64	2,59	2.52	2.46	2.40
16	4,69	4,08	3,34	2,99	2,79	2,63	2,57	2,51	2.45	2.38	2.32
17	4,62	4,01	3,28	2,92	2,72	2,56	2,50	2,44	2.38	2.32	2.25
18	4,56	3,95	3,22	2,87	2,67	2,50	2,44	2,38	2.32	2.26	2.19
19	4,51	3,90	3,17	2,82	2,62	2,45	2,39	2,33	2.27	2.20	2.13
20	4,46	3,86	3,13	2,77	2,57	2,41	2,35	2,29	2.22	2.16	2.09
25	4,29	3,69	2,97	2,61	2,41	2,24	2,18	2,12	2.05	1.98	2.00
30	4,18	3,59	2,87	2,51	2,31	2,14	2,07	2,01	1.94	1.87	1.79
60	3.93	3.54	2.63	2.27	2.06	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	3.80	3.23	2.52	2.16	1.94	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	3.69	3.12	2.41	2.05	1.83	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Таблиця Д.1.7

Значення випадкових чисел, що рівномірно розподілені на інтервалі (0;1), які збільшено в 100 разів

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53
80	95	90	91	17	39	29	27	49	45	66	06	57	47	17
20	63	61	04	02	00	82	29	16	65	31	06	01	08	05
15	95	33	47	64	35	08	03	36	06	85	26	97	76	02
88	67	67	43	97	04	43	62	76	59	63	57	33	21	35
98	95	11	68	77	12	17	17	68	33	73	79	64	57	53
11	19	92	91	70	98	52	01	77	67	14	90	56	86	07
23	40	30	97	32	11	80	50	54	31	39	80	82	77	32
18	62	38	85	79	83	45	29	96	34	06	28	89	80	83
83	49	12	56	24	88	68	54	02	00	86	50	75	84	01
35	27	38	84	35	99	59	46	73	48	87	51	76	49	69

Бібліографічний список

1. Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: навч. посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К.: ЦУЛ, 2010. – 424 с.

2. Бабак, В.П. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика [Текст] / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.

3. Бобик, О.І. Теорія ймовірностей і математична статистика [Текст]: підручник / О.І. Бобик, Г.І. Берегова, Б.І. Копитко. – К.: ВД "Професіонал", 2007. – 560 с.

4. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин, В.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др. – М.: Дрофа, 2005. – 315 с.

5. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1964. – 576 с.

6. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 366 с.

7. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и её инженерные приложения [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 400 с.

8. Гихман, И.И. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.Н. Ядренко. – К.: Вища шк., 1979. – 408 с.

9. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В.Е. Гмурман. − М.: Высшее образование, 2009. − 479 с.

10. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В.Е. Гмурман. − М.: Высш. шк., 2006. − 405 с.

11. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б.В. Гнеденко. – М.: Наука,1975. – 400 с.

12. Жлуктечко, В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика [Текст]: навч.-метод. посібник: у 2 ч. / В.І. Жлуктечко, С.І. Наконечний. – К: КНЕУ, 2000. – Ч. 1-2.

13. Иванова, В.М., Математическая статистика [Текст] / В.Н. Калинина. – М.: Высш. шк., 1981. – 371 с.

14. Калинина, В.Н. Математическая статистика [Текст] / В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин. – М.: Дрофа, 2002. – 336 с.

15. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2009. – 551 с.

16. Могульський, Є.З. Теорія ймовірностей та елементи математичної статистики [Текст]: конспект лекцій / Є.З. Могульський, Н.Ю. Іохвидович, С.В. Поклонський. – Харків: ХДТУБА, 1999. – 167 с.

17. Могульський, Є.З. Збірник задач з теорії ймовірностей [Текст]: навч. посібник / Є.З. Могульський, О.Р. Пашковська. – Харків: ХІ ВПС, 2003. – 119 с.

18. Пугачев, В.С. Введение в теорию вероятностей [Текст] / В.С. Пугачев. – М.: Наука, 1968. – 368 с.

19. Сборник задач по математике для втузов. Спец. курсы [Текст] / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1984. – 610 с.

20. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций [Текст] / под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 656 с.

21. Севастьянов, Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики [Текст] / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

22. Севастьянов, Б.А. Сборник задач по теории вероятностей [Текст] / Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков, А.М. Зубков. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

23. Чистяков, В.П. Курс теории вероятностей [Текст]: учебник / В.П. Чистяков. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

Предметний покажчик