



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Харків – 2024

УДК 681.513.5.(076.5)

Т 33

*Рекомендовано вченою радою Українського державного університету
залізничного транспорту як лабораторний практикум
(витяг з протоколу № 6 від 28 червня 2024 р.)*

Рецензенти:

професори Є. Є. Александров (ХНАДУ),
О. В. Коломійцев (НТУ «ХП»)

Авторський колектив:

В. Ш. Хісматулін, О. В. Лазарєв, О. О. Сосунов, В. О. Сотник

Т 33

Теорія оптимальних систем автоматичного керування:
Лабораторний практикум / В. Ш. Хісматулін, О. В. Лазарєв,
О. О. Сосунов та ін. – Харків: УкрДУЗТ, 2024. – 186 с., рис. 40,
табл. 15.

ISBN

Матеріал практикуму забезпечує весь цикл лабораторних робіт із дисципліни «Теорія оптимальних систем автоматичного керування» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня всіх форм навчання за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» освітньої програми «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка». Може бути рекомендований для підготовки магістрів і аспірантів інших напрямів підготовки.

До кожної з робіт додано короткі відомості з теорії. Допоміжний, але необхідний, матеріал викладено в додатках 1-7. Виконання всіх робіт здійснюється на ПК за допомогою пакетів Control System і Simulink програмної оболонки Matlab.

УДК 681.513.5.(076.5)

ISBN

© Український державний університет
залізничного транспорту, 2024.

ЗМІСТ

1. Дослідження стійкості та якості функціонування САК у перехідному режимі.....	4
2. Дослідження впливу структури та параметрів САК на точність керування.....	21
3. Дослідження пропорційно-диференціальної корекції САК.....	34
4. Дослідження пропорційно-інтегральної корекції САК.....	47
5. Оптимізація параметрів САК методом інтегральних оцінок.....	60
6. Дослідження оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.....	76
7. Дослідження оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.....	98
8. Дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.....	119
9. Дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.....	137
Бібліографічний список	155
Додаток 1. Характеристики елементарних ланок.....	157
Додаток 2. Деякі функції пакета Control Toolbox програмної оболонки Matlab.....	159
Додаток 3. Основні властивості перетворення Лапласа.....	164
Додаток 4. Форми функціонала якості та квадратичний показник якості керування.....	165
Додаток 5. Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна.....	172
Додаток 6. Застосування принципу максимуму для задач із квадратичним показником якості керування.....	178
Додаток 7. Керованість об'єкта і критерії керованості.....	184

1. Дослідження стійкості та якості функціонування САК у перехідному режимі

1.1. Мета роботи

1. Засвоїти методи аналізу стійкості САК.
2. Засвоїти методи аналізу якості функціонування САК у перехідному режимі.
3. Дослідити вплив параметрів САК на її стійкість і показники якості її функціонування в перехідному режимі.

1.2. Програма роботи

1. Аналітичне дослідження впливу коефіцієнта підсилення розімкненої системи на стійкість і показники якості САК у перехідному режимі.
2. Експериментальне дослідження впливу коефіцієнта підсилення розімкненої системи на стійкість і показники якості САК у перехідному режимі.

1.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [1-5] і конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
 - мету, програму і вказівки до виконання роботи;
 - теоретичні положення за темою роботи: поняття і умови стійкості лінійних стаціонарних неперервних САК; частотний критерій стійкості Найквіста; запаси стійкості, поняття перехідного та усталеного режимів функціонування САК; показники якості функціонування САК у перехідному режимі та методи їх визначення; зв'язок між перехідною та частотними характеристиками; вимоги до логарифмічних частотних

характеристик, що гарантують задовільну якість функціонування САК в перехідному режимі.

2. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
3. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

1.4. Короткі відомості з теорії

У загальному випадку закон зміни керованої величини системи визначено вхідними діями і початковим станом системи, тобто сукупністю її внутрішніх змінних у момент часу t_0 , коли починається робота системи.

Початковий стан системи залежить від передісторії її функціонування, тому внаслідок інерційності процесів у реальних блоках системи необхідний певний час після подання зовнішніх дій для її переходу з початкового стану в новий кінцевий стан, обумовлений вхідними діями.

Виходячи з призначення системи, її реакція на обмежені за величиною вхідні дії має також бути обмеженою за величиною і часом протікання. Вказану властивість називають *стійкістю* [1-5], а САК, які мають таку властивість, називають *стійкими*. За відсутності стійкості невеликі збурення зовнішніх дій або початкового стану можуть викликати значні зміни руху системи. Тому стійкість є необхідною властивістю будь-якої системи автоматичного керування – лише стійкі САК здатні ефективно функціонувати в реальних умовах.

У лінійних САК внаслідок справедливості принципу суперпозиції зі стійкості хоча б одного руху впливає стійкість системи в цілому, тобто стійкість лінійних САК є властивістю, яка залежить тільки від їхньої структури та параметрів і не залежить від зовнішніх дій і початкового стану. Вказана властивість дає змогу обмежитися тільки аналізом стійкості вільного руху лінійних САК – руху, обумовленого довільним початковим станом за відсутності зовнішніх дій (*стійкості, за Ляпуновим*).

Відомо, що *лінійна САК є стійкою, якщо її вільний рух задовольняє умову* [1-5]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (1.1)$$

Оскільки процеси, що протікають у системі неперервної дії, описані диференціальними рівняннями, то аналіз умов стійкості САК необхідно проводити на основі вивчення властивостей їхніх розв'язків.

Диференціальне рівняння вільного руху є рівнянням «вхід-вихід» замкненої САК за відсутності вхідних дій, тобто лінійним однорідним диференціальним рівнянням. У загальному випадку воно має такий вигляд:

$$C(D) \cdot y(t) = 0, \quad (1.2)$$

де

$$C(D) = c_0 + c_1 D + c_2 D^2 + \dots + c_k D^k \quad (1.3)$$

– характеристичний оператор замкненої САК.

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (1.2) з постійними коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$y(t) = \sum_{i=1}^k \gamma_i e^{p_i t}, \quad (1.4)$$

де p_i – корені *характеристичного рівняння замкненої системи*

$$C(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_k p^k = 0; \quad (1.5)$$

γ_i – константи або функції-поліноми, визначені початковими умовами (початковим станом) і кратністю коренів.

Корені можуть бути дійсними та комплексно-спряженими, а деякі з них можуть бути однаковими (кратними). Однак, як випливає з виразу (1.4), незалежно від їхнього характеру вільна складова буде задовольняти умову стійкості (1.1) тоді і тільки тоді [1-5], коли **всі корені характеристичного рівняння замкненої САК від'ємні або мають від'ємні дійсні частини**

$$\operatorname{Re}[p_i] < 0, i \in [1, k]. \quad (1.6)$$

Якщо порядок характеристичного рівняння дорівнює або більше 3, розв'язання задачі пошуку коренів без ПЕОМ неможливе. Для усунення цієї незручності застосовують критерії стійкості – сукупність умов, виконання яких гарантує стійкість САК без відшукування коренів. Найбільше застосування знайшли алгебраїчний критерій А. Гурвіца і частотний критерій Г. Найквіста.

За використанні частотного критерію Найквіста судження про стійкість замкненої САК створено на підставі аналізу частотних характеристик розімкненої САК. Внаслідок простоти побудови і отримання результатів найзручніше для цього користуватися логарифмічними частотними характеристиками розімкненої САК.

Далі буде наведено логарифмічний частотний критерій стійкості [1-5] для випадку, коли характеристичне рівняння розімкненої системи $A(p) = 0$ не має коренів у правій півплощині, але може мати нульові корені та корені на уявній осі.

Теорема. *Для стійкості замкненої системи необхідно і достатньо, щоб в усіх областях частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною, кількість переходів ЛФЧХ розімкненої системи через рівень -180° була парною.*

Приклад. ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої системи наведені на рис. 1.1. Визначити, чи стійка система за критерієм Найквіста.

Розв'язання. Перевіримо, чи виконано вимоги теореми Найквіста. Як бачимо з рис. 1.1, ЛАЧХ розімкненої системи (**Magnitude**) є додатною на частотах від нуля до **частоти зрізу** ω_{3R} – частоти, на якій ЛАЧХ дорівнює нулю. На зазначеному інтервалі ЛФЧХ (**Phase**) має один від'ємний (на частоті $\omega_{\pi 1}$) та один додатний (на частоті $\omega_{\pi 2}$) переходи через рівень -180° . Ще один перехід має місце на частоті $\omega_{\pi 3}$. Однак частота $\omega_{\pi 3}$ знаходиться поза межами області частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною, і тому цей перехід не враховується.

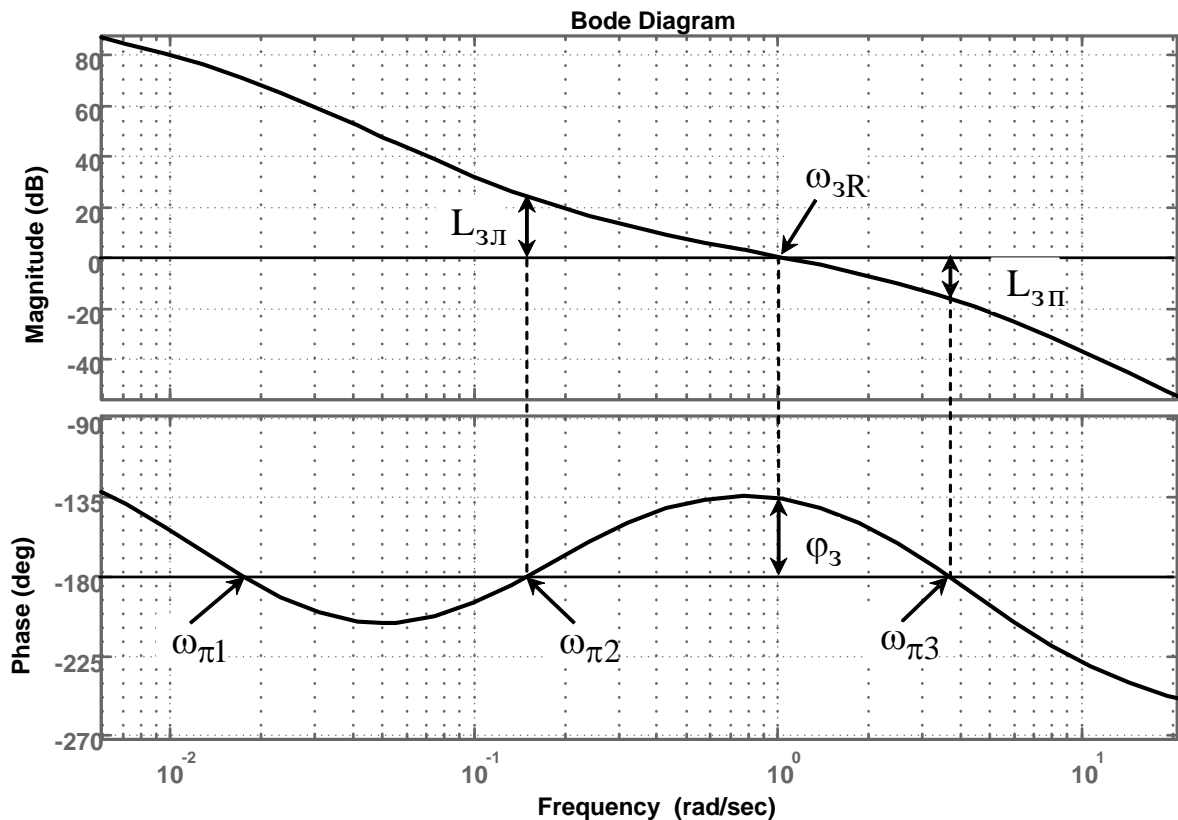


Рис. 1.1

Отже, за критерієм Найквіста, замкнена система є стійкою.

Якщо розімкнена система має кратні нульові корені (має декілька інтегруючих ланок (дод. 1), слід урахувувати так звані фіктивні переходи ЛФЧХ через рівні $\pm 180^\circ (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Їх отримують, спрямовуючи

ЛФЧХ до нульового рівня за $\omega \rightarrow 0$. Так, ЛФЧХ САК з передаточною функцією розімкненої системи

$$R(p) = \frac{K_a}{p^2(Tp + 1)}$$

має один фіктивний від'ємний перехід (точка 1 на рис. 1.2).

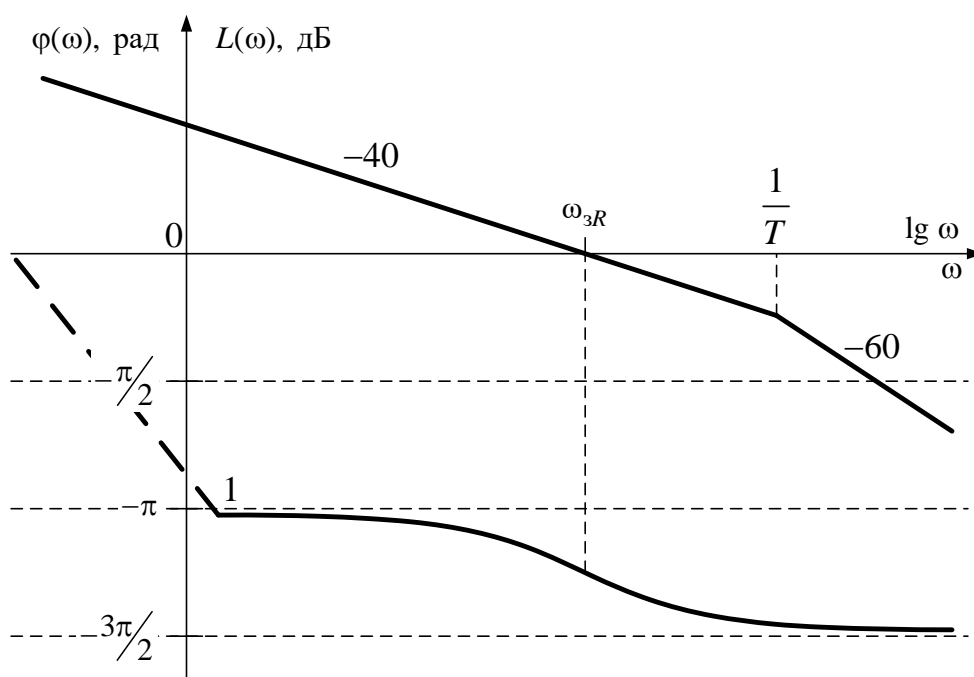


Рис. 1.2

Характеристичний многочлен цієї розімкненої системи

$$A(p) = p^2(Tp + 1)$$

не має правих коренів. Оскільки ЛФЧХ системи в області частот, де ЛАЧХ більше нуля ($\omega < \omega_{zR}$), має лише один від'ємний перехід, то система є нестійкою.

Для того щоб забезпечити високу якість функціонування САК, необхідно не тільки забезпечити її стійкість, а й вибрати параметри системи достатньо далеко від меж області стійкості. Для кількісної

характеристики ступеня віддалення системи від меж області стійкості застосовують запаси стійкості.

Запасом стійкості за фазою [1-5] називають різницю між значенням ЛФЧХ на частоті зрізу розімкненої системи ω_{zR} і рівнем -180°

$$\varphi_3 = 180^\circ - |\varphi(\omega_{zR})|. \quad (1.7)$$

Якщо система є стійкою, її запас стійкості за фазою є додатним (рис. 1.2). У нестійкій системі він буде від'ємним.

Запасом стійкості за підсиленням (амплітудою) називають співвідношення дійсного і граничного значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи. Під граничним $K_{гр}$ мають на увазі таке значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи, за якого система опиняється на межі області стійкості (частота зрізу ω_{zR} співпадає з однією з частот переходів ЛФЧХ через рівні $\pm 180^\circ (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$).

За логарифмічними частотними характеристиками, запаси стійкості за підсиленням (у децибелах) дорівнюють відстані від ЛАЧХ розімкненої системи до осі абсцис у точках переходів ЛФЧХ через рівні $\pm 180^\circ (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, сусідніх до частоти зрізу ω_{zR} . Якщо система є стійкою, її запас стійкості за підсиленням (у децибелах) є додатним ($L_{зл}$ та $L_{зп}$ на рис. 1.1).

Перехідним називається режим [1-5], що виникає в стійкій САК безпосередньо після прикладення до неї вхідної дії. Для аналізу якості функціонування САК у перехідному режимі застосовують перехідну характеристику $h(t)$, яка є реакцією системи на вхідну дію у вигляді одиничної функції за нульових початкових умов. У стійких САК перехідна характеристика з часом прагне до постійного усталеного значення $h_{уст}$.

Типовий графік перехідної характеристики САК наведено на рис. 1.3.

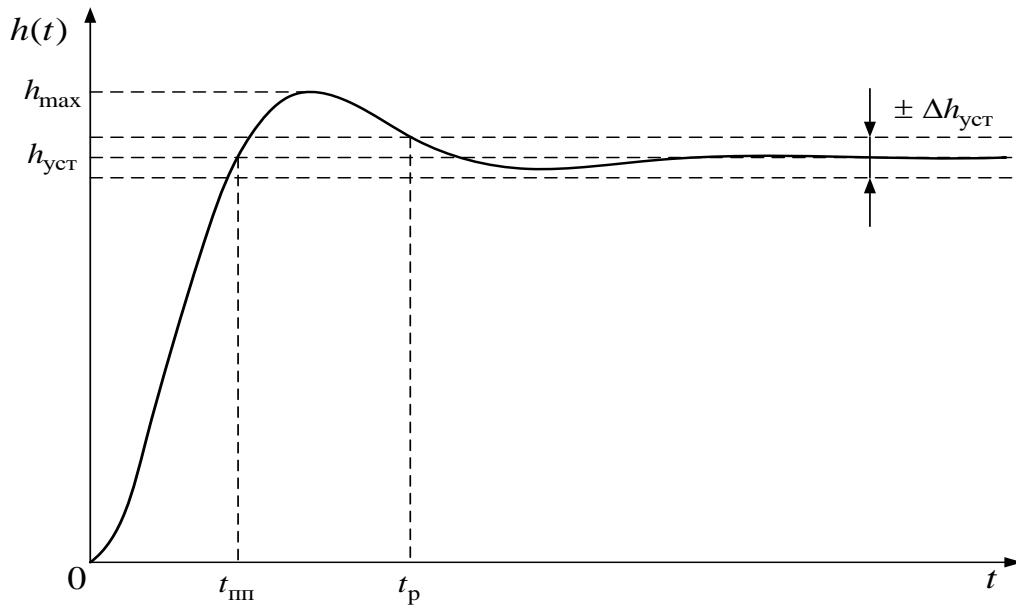


Рис. 1.3

Основним показником якості функціонування САК у перехідному режимі є час його існування, який називається **часом регулювання** t_p . Він дорівнює інтервалу часу, після закінчення якого вихідна величина залишається близькою до усталеного значення з заданою точністю, тобто для всіх $t \geq t_p$ виконується умова

$$\left| \frac{h(t)}{h_{уст}} - 1 \right| \leq \Delta, \quad (1.8)$$

де Δ – достатньо мала величина. За практичних розрахунків значення Δ приймають у межах 0,01–0,1 (зазвичай $\Delta = 0,05$).

Якщо перехідна характеристика має коливання відносно усталеного значення, якість функціонування САК, крім часу регулювання, прийнято оцінювати за такими показниками (рис. 1.3) [1-5]:

1) величина **перерегулювання** σ – максимальне відхилення перехідної характеристики від усталеного значення $h_{уст}$, %,

$$\sigma[\%] = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\%; \quad (1.9)$$

2) *час першого погодження* $t_{\text{шт}}$ – інтервал часу від моменту прикладання на вхід системи східчастої дії до моменту, коли перехідна характеристика вперше досягне свого усталеного значення;

3) *кількість коливань* N_p – кількість максимумів перехідної характеристики на інтервалі часу регулювання t_p .

Найбільш важливими з усіх показників якості САК у перехідному режимі є час регулювання t_p і перерегулювання σ . Перша величина характеризує швидкодію системи, а друга – ступінь її коливальності.

Перехідна характеристика може бути отримана розрахунковими методами, шляхом моделювання та експериментально.

Методи, за використання яких для відшукування показників якості функціонування САК у перехідному режимі використовують графік перехідної характеристики, називають прямими методами. Дослідження прямими методами суттєво полегшується при застосуванні для розрахунків пакетів прикладних програм (ППП), призначених для розв'язання диференціальних рівнянь або математичного моделювання динамічних систем. Серед них слід відзначити систему Matlab, до складу якої входять пакети структурного моделювання динамічних систем Simulink, пакети аналізу і синтезу систем керування Control System Toolbox тощо.

Наприклад, для розрахунку перехідної характеристики в пакеті Matlab використовують таку процедуру (дод. 2) [6-9]:

1) задають передаточні функції **K1**, **K2**, ... окремих блоків розімкненої системи (оператор **tf(*)** з формули (Д.2.2));

2) розраховують передаточну функцію розімкненої системи **R** з урахуванням з'єднань блоків (формули (Д.2.3)-(Д.2.5));

3) розраховують передаточну функцію замкненої системи (оператор $\mathbf{W}=\text{feedback}(\mathbf{R},1)$, формула (Д.2.6));

4) розраховують перехідну характеристику замкненої системи (оператор $\text{step}(\mathbf{W})$, формула (Д.2.7)).

Разом із прямими застосовують і непрямі методи, які дають змогу судити про якість функціонування САК у перехідному режимі без відшукування графіка її перехідної характеристики.

Серед непрямих методів виділимо частотні методи, базовані на застосуванні взаємно однозначного зв'язку між перехідною характеристикою та частотними характеристиками системи [1-5]. З аналізу особливостей цього зв'язку випливає, що властивості САК у перехідному режимі визначені областю середніх частот (ОСЧ) – областю $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$, де ЛАЧХ $L_R(\omega)$ розімкненої системи знаходиться в межах ± 20 дБ (рис. 1.4).

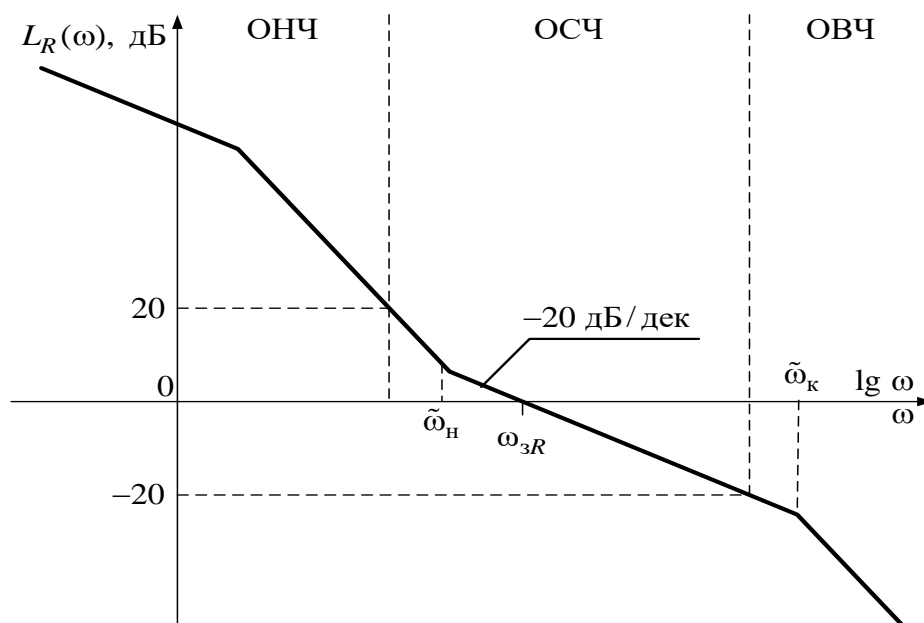


Рис. 1.4

Проведені дослідження показали, що САК буде мати прийнятні показники якості функціонування в перехідному режимі, якщо її логарифмічні частотні характеристики задовольняють такі вимоги:

1) на частоті зрізу розімкненої системи ω_{3R} і в області частот, що примикають до неї, ЛАЧХ проходить з нахилом мінус 20 дБ/дек, причому загальна довжина по частоті відрізка ЛАЧХ з таким нахилом не менша за одну декаду: $\omega_k / \omega_H \geq 10$;

2) значення запасів стійкості за амплітудою і за фазою задовольняють умови:

$$L_3 \geq 10 \text{ дБ}, \quad 45^\circ \leq \varphi_3 \leq 75^\circ.$$

Ці вимоги тісно пов'язані з вимогами щодо величин запасів стійкості за амплітудою і фазою, за яких корені характеристичного рівняння замкненої системи знаходяться достатньо далеко від уявної осі, і тому рух системи не має значних коливань.

На практиці найчастіше застосовують мінімально-фазові САК, у яких ЛАЧХ розімкненої системи однократно перетинає вісь частот із нахилом – 20 дБ/дек. Такі ЛАЧХ називаються *типовими*. З досвіду аналізу і синтезу САК встановлено, що при виконанні вказаних вимог показники якості функціонування САК із типовою ЛАЧХ у перехідному режимі можуть бути з достатньою для інженерної практики точністю розраховані за такими евристичними формулами [1-5]:

$$t_p = \frac{5 \dots 9}{\omega_{3R}}; \quad \sigma = \begin{cases} (73 - \varphi_3^\circ) \%, & \text{якщо } \varphi_3 < 73^\circ; \\ 0, & \text{якщо } \varphi_3 \geq 73^\circ. \end{cases} \quad (1.10)$$

Розраховуючи час регулювання, менші значення коефіцієнта чисельника треба брати для більших значень запасу за фазою φ_3 . З урахуванням вказаного зв'язку можна також скористатися такою орієнтовною формулою:

$$t_p \approx \frac{385}{\omega_{3R} \cdot \varphi_3^\circ}. \quad (1.10a)$$

Як впливає з формул (1.10), час регулювання t_p обернено пропорційний частоті зрізу розімкненої системи ω_{3R} , а величина перерегулювання σ зростає при зменшенні запасу за фазою φ_3 .

1.5. Вказівки щодо виконання роботи

1.5.1. Аналітичне дослідження впливу коефіцієнта підсилення розімкненої системи на стійкість і показники якості САК у перехідному режимі

1. На рис. 1.5 наведена схема математичної моделі САК. Вона має оператори передавання

$$K_1(D) = K; \quad K_2(D) = \frac{T_2 \cdot D + 1}{D(T_1 \cdot D + 1)}; \quad K_3(D) = \frac{1}{(T_3 \cdot D + 1)^2}, \quad (1.11)$$

де $T_1 = 10$ с, $T_2 = 1$ с, $T_3 = 0,05$ с – постійні часу ланок.

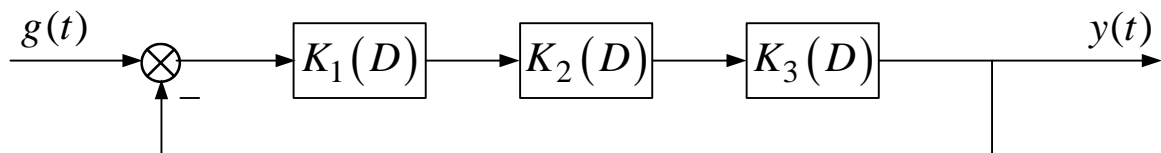


Рис. 1.5

Записати передаточні функції розімкненої $R(p)$ і замкненої систем $W(p)$.

2. За допомогою пакета Control System побудувати сімейство ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої САК, заданої в п. 1, для значень $K = 2, 10, 20, 50, 100, 200$ та 400 с^{-1} .

Для цього запустити програмну оболонку Matlab, після чого в командному вікні (**Command Window**) відповідно до виразу (1.11) і виразу для передаточної функції розімкненої системи набрати (дод. 2) [6-9]

$$\mathbf{K1} = K; \mathbf{K2} = \text{tf}([1 \ 1], [10 \ 1 \ 0]); \mathbf{K3} = \text{tf}([1], [0.05 \ 1]);$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{K1} * \mathbf{K2} * \mathbf{K3} * \mathbf{K3}; \text{margin}(\mathbf{R}); \text{grid}$$

(тут $K = 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200$ або 400) і натиснути **Enter**.

Після натискання **Enter** у командному вікні з'являються графіки логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи зі значеннями запасів за підсиленням (амплітудою) L_3 і фазою φ_3 (у Matlab вони позначені G_m та P_m відповідно). Занести отримані значення запасів і частоти зрізу розімкненої системи ω_{3R} до табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Залежність показників якості перехідного режиму від коефіцієнта підсилення розімкненої системи K

$K, \text{с}^{-1}$	2	5	10	20	50	100	200	400
$L_3 (G_m), \text{дБ}$								
$\varphi_3 (P_m), \text{град}$								
$\omega_{3R}, \text{с}^{-1}$								
$t_p^{(\text{розр})}, \text{с}$								
$\sigma^{(\text{розр})}, \%$								
$t_p^{(\text{експ})}, \text{с}$								
$\sigma^{(\text{експ})}, \%$								

3. Побудувати залежності запасів стійкості L_3 , φ_3 і частоти зрізу розімкненої системи ω_{3R} від коефіцієнта підсилення розімкненої системи

$$L_3 = f_1(K); \varphi_3 = f_2(K); \omega_{3R} = f_3(K).$$

4. Проаналізувати вплив коефіцієнта підсилення розімкненої системи K на виконання вимог до ходу ЛАЧХ розімкненої системи в області середніх частот, що гарантують прийнятну якість функціонування САК у перехідному режимі.

Визначити область значень (K_{\min}, K_{\max}) коефіцієнта підсилення розімкненої системи K , де вимоги виконуються.

Для визначеної області (K_{\min}, K_{\max}) розрахувати за евристичними формулами (1.10), (1.10а) і занести до табл. 1.1 орієнтовні значення $t_p^{(\text{розр})}$ і $\sigma^{(\text{розр})}$ показників якості САК у перехідному режимі.

Побудувати залежності розрахункових значень показників якості перехідного режиму від коефіцієнта підсилення розімкненої системи

$$t_p^{(\text{розр})} = f_1(K), \quad \sigma^{(\text{розр})} = f_2(K).$$

5. Зробити висновки про вплив коефіцієнта підсилення розімкненої системи K на запаси стійкості, частоту зрізу і розрахункові значення показників якості в перехідному режимі.

1.5.2. Експериментальне дослідження впливу коефіцієнта підсилення розімкненої системи на стійкість і показники якості САК у перехідному режимі

1. За допомогою пакета Control System побудувати сімейство перехідних характеристик замкненої САК, заданої в п. 1.5.1 завдання на аналітичне дослідження, для значень $K = 2, 10, 20, 50, 100, 200$ та 400 с^{-1} .

Запустити програмну оболонку Matlab, після чого в командному вікні (**Command Window**) відповідно до виразу (1.11) і виразів для передаточних функцій розімкненої $R(p)$ і замкненої систем $W(p)$ набрати

$$\mathbf{K1} = K; \mathbf{K2} = \text{tf}([1 \ 1], [10 \ 1 \ 0]); \mathbf{K3} = \text{tf}([1], [0.05 \ 1]);$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{K1} * \mathbf{K2} * \mathbf{K3} * \mathbf{K3}; \mathbf{W} = \text{feedback}(\mathbf{R}, 1); \text{step}(\mathbf{W}); \text{grid}$$

(тут $K = 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200$ або 400) і натиснути **Enter**.

Після натискання **Enter** у командному вікні з'являється графік **Figure 1** перехідної характеристики замкненої системи для заданого значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи K .

На кожному з графіків перехідної характеристики визначити і занести до табл. 1.1 значення часу регулювання $t_p^{(\text{експ})}$ і величини перерегулювання $\sigma^{(\text{експ})}$. Для визначення значення часу регулювання у вікні **Figure 1** необхідно натиснути на ліву кнопку миші і, не відпускаючи її, перемістити покажчик миші в точку, де значення перехідної характеристики остаточно ввійшло в межі від $0,95$ до $1,05$ (рис. 1.3 і вираз (1.8)). Для визначення величини перерегулювання натиснути на ліву кнопку миші і, не відпускаючи її, перемістити покажчик миші в точку максимального значення h_{\max} перехідної характеристики (рис. 1.3). Далі за формулою (1.9) розрахувати величину перерегулювання з урахуванням того, що $h_{\text{уст}} = 1$.

2. За результатами досліджень побудувати графіки залежностей $t_p^{(\text{експ})}(K)$, $\sigma^{(\text{експ})}(K)$ разом із аналітичними результатами $t_p^{(\text{розрах})}(K)$, $\sigma^{(\text{розрах})}(K)$. Порівняти отримані залежності й зробити висновки про можливість застосування евристичних формул (1.10), (1.10а) і точність результатів, отримані за ними.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Схема математичної моделі досліджуваної системи (рис. 1.5 з операторами згідно з виразом (1.11)).

3. Хід і результати аналітичного дослідження, область значень (K_{\min}, K_{\max}) коефіцієнта підсилення розімкненої системи K , де виконуються вимоги щодо ходу ЛАЧХ розімкненої системи в області середніх частот, що гарантують прийнятну якість функціонування САК у перехідному режимі.

4. Заповнена табл. 1.1 і графіки залежностей:

а) $L_3 = f_1(K)$; $\varphi_3 = f_2(K)$; $\omega_{3R} = f_3(K)$;

б) $t_p^{(\text{розр})} = f_1(K)$, $\sigma^{(\text{розр})} = f_2(K)$;

в) $t_p^{(\text{експ})}(K)$, $\sigma^{(\text{експ})}(K)$.

5. Висновки з роботи.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняття стійкості, за Ляпуновим.
2. Яку умову має задовольняти вільна складова руху стійкої лінійної стаціонарної системи?
3. Викладіть і поясніть необхідні та достатні умови стійкості лінійної стаціонарної САК неперервної дії.
4. Сформулюйте критерій стійкості Найквіста.
5. Дайте визначення поняття запасу стійкості САК за фазою. Що він характеризує?
6. Як знайти запас стійкості САК за фазою за логарифмічними частотними характеристиками розімкненої системи?
7. Дайте визначення поняття запасу стійкості САК за підсиленням (амплітудою). Що він характеризує?
8. Як знайти запас стійкості САК за підсиленням за логарифмічними частотними характеристиками розімкненої системи?
9. Дайте визначення перехідного режиму САК.

10. Якими показниками визначена якість функціонування САК у перехідному режимі? Вкажіть їх на графіку перехідної характеристики.

11. Якою областю частот визначають властивості САК у перехідному режимі? Виділіть вказану область на ЛАЧХ розімкненої САК.

12. Які вимоги мають задовольняти ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої САК для того, щоб замкнена система мала прийнятні показники якості функціонування в перехідному режимі?

13. Використовуючи наведені на рис. 1.6 асимптотичну ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої САК:

1) проаналізуйте, чи відповідають частотні характеристики вимогам, що гарантують задовільну якість функціонування САК у перехідному режимі;

2) розрахуйте за евристичними формулами показники якості функціонування САК у перехідному режимі.

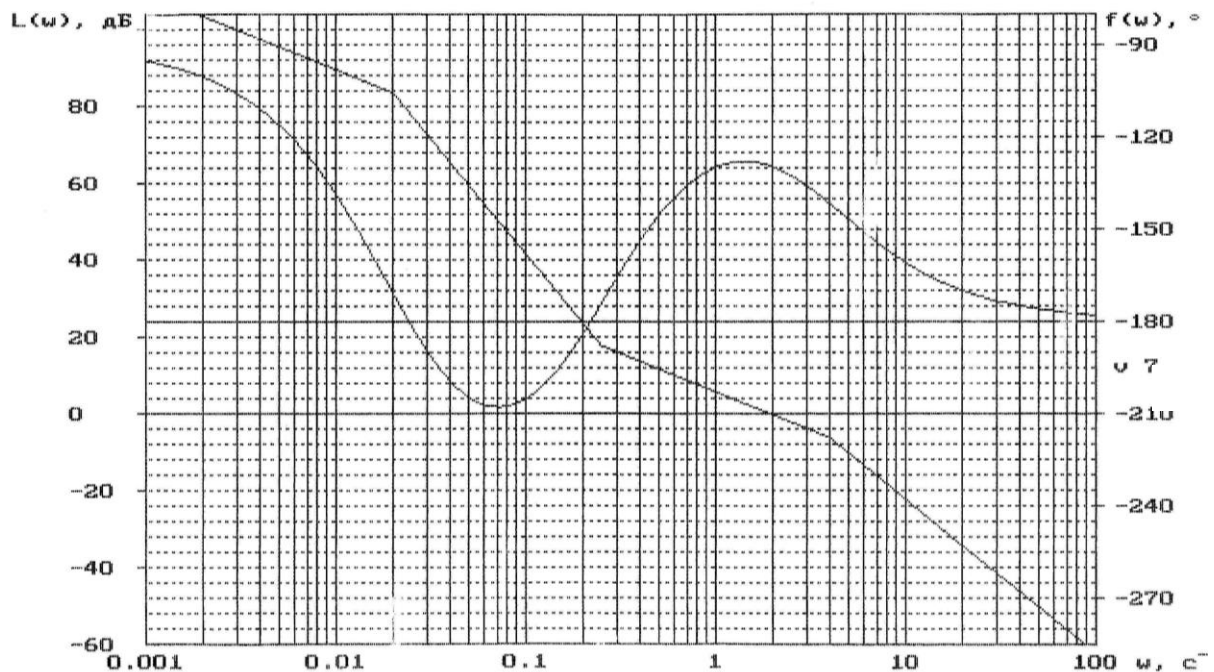


Рис. 1.6

2. Дослідження впливу структури та параметрів САК на точність керування

2.1. Мета роботи

1. Засвоїти методи аналізу точності САК.
2. Розрахунковим і експериментальним шляхом встановити вплив параметрів і структури САК на точність її функціонування.

2.2. Програма виконання роботи

1. Аналітичне дослідження точності САК.
2. Експериментальне дослідження точності статичної САК.
3. Експериментальне дослідження точності САК з астатизмом першого порядку.
4. Експериментальне дослідження точності САК з астатизмом другого порядку.

2.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [1-5] і конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
 - мету, програму і вказівки до виконання роботи;
 - теоретичні положення за темою роботи: поняття усталеної помилки САК і методи її визначення; поняття статизму і астатизму САК; ознаки порядку астатизму; вплив порядку астатизму на величину усталеної помилки за типових вхідних дій.
2. Виконати аналітичне дослідження точності САК (п. 2.5.1).
3. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
4. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

2.4. Короткі відомості з теорії

Точність функціонування САК характеризується величиною усталеної помилки $\varepsilon_{уст}(t)$, яка дорівнює різниці між значеннями задавальної дії $g(t)$ і усталеного значення вихідної величини $y_{уст}(t)$

$$\varepsilon_{уст}(t) = g(t) - y_{уст}(t). \quad (2.1)$$

Надалі з метою спрощення позначень опустимо підрядковий індекс у позначеннях усталеної помилки.

У загальному випадку усталена помилка має дві складові:

$$\varepsilon = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_f(t),$$

де $\varepsilon_g(t)$ – динамічна помилка, викликана неточністю відпрацьовування задавальної дії $g(t)$;

$\varepsilon_f(t)$ – помилка, обумовлена заважальною дією $f(t)$.

Надалі обмежимося аналізом динамічної помилки, тобто будемо вважати, що заважальна дія $f(t)$ відсутня.

Для відшукування усталених динамічних помилок скористаємося виразом [1, 2]

$$\varepsilon_g = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v+1}}{p^v + K} L\{g(t)\}, \quad (2.2)$$

де v – кількість інтегруючих ланок у передаточній функції розімкненої системи;

K – коефіцієнт підсилення розімкненої системи;

$L\{g(t)\}$ – перетворення Лапласа задавальної дії.

Отже, *точність функціонування САК в усталеному режимі залежить від кількості інтегруючих ланок і величини коефіцієнта підсилення розімкненої системи.*

Як відомо [1-5], значення коефіцієнта підсилення K розімкненої системи та кількість ν інтегруючих ланок визначають хід частотних характеристик системи в області низьких частот (ОНЧ) (рис. 1.4). Тому можна стверджувати, що точність системи в усталеному режимі взаємно однозначно пов'язана з ходом її частотних характеристик в області низьких частот.

Для проведення інженерного аналізу точності застосовують так звані *типові режими* – режими, що виникають під впливом дій, описаних степеневими функціями часу. Види дій, назви відповідних їм типових режимів роботи САК і усталених помилок наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Характеристика типових режимів роботи САК

Вид дії	Типовий режим роботи САК	Назва усталеної помилки
Постійна $g(t) = A$	Статичний	Статична
Лінійна $g(t) = V \cdot t$	Кінетичний	Кінетична
Квадратична $g(t) = W \cdot t^2 / 2$	Рівноприскорений	Інерційна

Усі САК залежно від наявності чи відсутності статичної помилки, тобто усталеної помилки за постійної вхідної дії (у статичному режимі), поділяються на статичні або астатичні.

Статичною називають САК [1-5], у якій існує статична помилка ($\varepsilon_{ст} \neq 0$). В *астатичній* САК статична помилка відсутня ($\varepsilon_{ст} = 0$), тобто постійна вхідна дія відпрацьовується без помилки.

Визначимо ознаки статизму і астатизму САК відносно задавальної дії.

За постійної задавальної дії $g(t) = A$ маємо $L\{g(t)\} = A/p$ (дод. 3), тому статична помилка системи дорівнює

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{ст} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v+1}}{p^v + K} \cdot \frac{A}{p} = \begin{cases} A/(1+K), & \text{якщо } v = 0; \\ 0, & \text{якщо } v > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Отже, *система є статичною, якщо в ній відсутні інтегруючі ланки ($v=0$), і навпаки, система є астатичною, якщо в ній є хоча б одна інтегруюча ланка.*

Астатичні САК у свою чергу поділяють на системи з астатизмом першого, другого й т. д. порядків. *Ознакою порядку астатизму САК є кількість v інтегруючих ланок у передаточній функції розімкненої системи.*

Встановимо вплив порядку астатизму на точність САК у типових режимах роботи. Користуючись дод. 3, запишемо типові вхідні дії, за Лапласом:

- постійної дії $L\{A \cdot 1(t)\} = \frac{A}{p}$;
- лінійної дії $L\{V \cdot t\} = \frac{V}{p^2}$;
- квадратичної дії $L\{W \cdot t^2 / 2\} = \frac{W}{p^3}$.

Результати розрахунків за формулою (2.2) усталених помилок, що виникають у статичній системі і астатичних системах першого та другого порядків у типових режимах роботи, зведені до табл. 2.2.

З аналізу отриманих результатів можна зробити такі висновки:

- 1) статичні САК можуть задовільно функціонувати лише за вхідних дій, які є постійними або змінюються повільно і в малих межах;
- 2) системи з астатизмом першого порядку здатні відпрацьовувати довільні постійні дії, а також дії, що змінюються з постійною швидкістю;
- 3) системи з астатизмом другого порядку можуть працювати навіть в умовах, коли існують прискорення вхідних дій;

4) у будь-яких САК для зменшення величини динамічної помилки необхідно збільшувати коефіцієнт підсилення розімкненої системи.

Таблиця 2.2

Вплив порядку астатизму на точність САК у типових режимах роботи

Тип САК	Усталена помилка		
	Статична $\varepsilon_{ст}$	Кінетична $\varepsilon_{к}$	Інерційна $\varepsilon_{ін}$
Статична ($\nu = 0$)	$\frac{A}{1+K}$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
Астатична першого порядку ($\nu = 1$)	0	$\frac{V}{K}$	$\rightarrow \infty$
Астатична другого порядку ($\nu = 2$)	0	0	$\frac{W}{K}$

2.5. Вказівки до виконання роботи

2.5.1. Аналітичне дослідження точності САК

1. Дослідження статичної системи.

Для системи, схема математичної моделі якої подана на рис. 2.1, записати вирази для усталених помилок у типових режимах роботи. Зробити висновок про порядок астатизму системи.

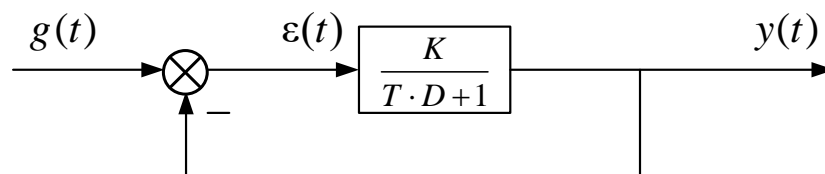


Рис. 2.1. Схема математичної моделі статичної САК

Розрахувати і побудувати графік залежності статичної помилки $\varepsilon_{\text{ст}}^{(\text{розр})}$ від величини коефіцієнта підсилення розімкненої САК K , припускаючи, що задавальна дія дорівнює

$$g(t) = A \cdot 1(t) \text{ при } A=1.$$

Результати розрахунку занести до табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Вплив коефіцієнта підсилення розімкненої статичної САК на величину статичної помилки

K	1	2	5
$\varepsilon_{\text{ст}}^{(\text{розр})}$			
$\varepsilon_{\text{ст}}^{(\text{експ})}$			

2. Дослідження системи з астатизмом першого порядку.

Для системи, схема математичної моделі якої наведена на рис. 2.2, записати вирази для усталених помилок у типових режимах роботи. Зробити висновок про порядок астатизму системи.

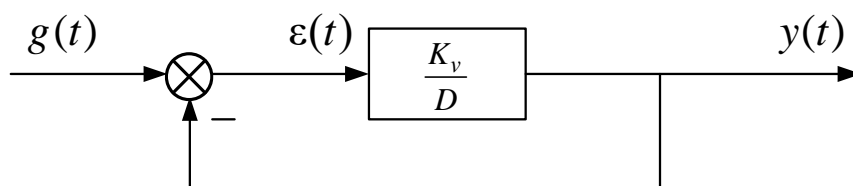


Рис. 2.2. Схема математичної моделі САК з астатизмом першого порядку

Розрахувати і побудувати графік залежності кінетичної помилки $\varepsilon_{\text{к}}^{(\text{розр})}$ від величини коефіцієнта підсилення розімкненої САК K , припускаючи, що задавальна дія в кінетичному режимі дорівнює

$$g(t) = V \cdot t \text{ при } V = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Результати розрахунку занести до табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Вплив коефіцієнта підсилення розімкненої САК з астатизмом першого порядку на величину кінетичної помилки

K_v, c^{-1}	1	2	5
$\varepsilon_k^{(розр)}$			
$\varepsilon_k^{(експ)}$			

3. Дослідження системи з астатизмом другого порядку.

Для системи, схема математичної моделі якої наведена на рис. 2.3, записати вирази для усталених помилок у типових режимах роботи. Зробити висновок про порядок астатизму системи.

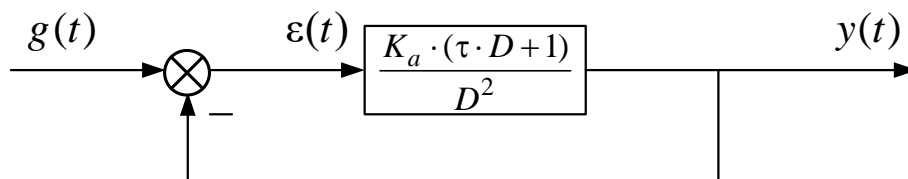


Рис. 2.3. Схема математичної моделі САК з астатизмом другого порядку

Розрахувати і побудувати графік залежності інерційної помилки $\varepsilon_{ін}^{(розр)}$ від величини коефіцієнта підсилення розімкненої САК K , припускаючи, що задавальна дія в рівноприскореному режимі дорівнює

$$g(t) = W \cdot t^2 / 2 \text{ при } W = 1 c^{-2}.$$

Результати розрахунку занести до табл. 2.5.

Вплив коефіцієнта підсилення розімкненої САК з астатизмом другого порядку на величину інерційної помилки

K_a, c^{-2}	1	2	5
$\varepsilon_{ін}^{(розр)}$			
$\varepsilon_{ін}^{(експ)}$			

2.5.2. Експериментальне дослідження динамічних помилок САК

1. Схема та методика дослідження.

Дослідження проводять за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає в подаванні на вхід досліджуваної САК типової вхідної дії і реєстрації за допомогою віртуального осцилографа (**Scope**) процесу його відпрацювання та помилки для декількох значень коефіцієнта підсилення розімкненої САК.

Відкрити файл **Tochnist**. Схема проведення експерименту в пакеті Simulink зображено на рис. 2.4. Вона складається з датчика вхідних дій, набору моделей досліджуваних систем і віртуального осцилографа.

Дослідження точності кожної з трьох систем здійснюється в статичному, кінетичному і рівноприскореному режимах. Тому датчик вхідних дій складається з генератора одиничної функції (**Step**), генератора лінійної функції (**Ramp**), генератора квадратичної функції (**Ramp** та **Integrator**), а також керованого перемикача (**Switch g**) і блока керування (**Key g**). Підключення необхідного генератора здійснюється так: двократно натиснути лівою кнопкою мишки елемент **Key g**, після чого у вікні **Constant value** ввести значення константи **1**, **2** або **3**, що дорівнює номеру входу, до якого підключений обраний генератор.

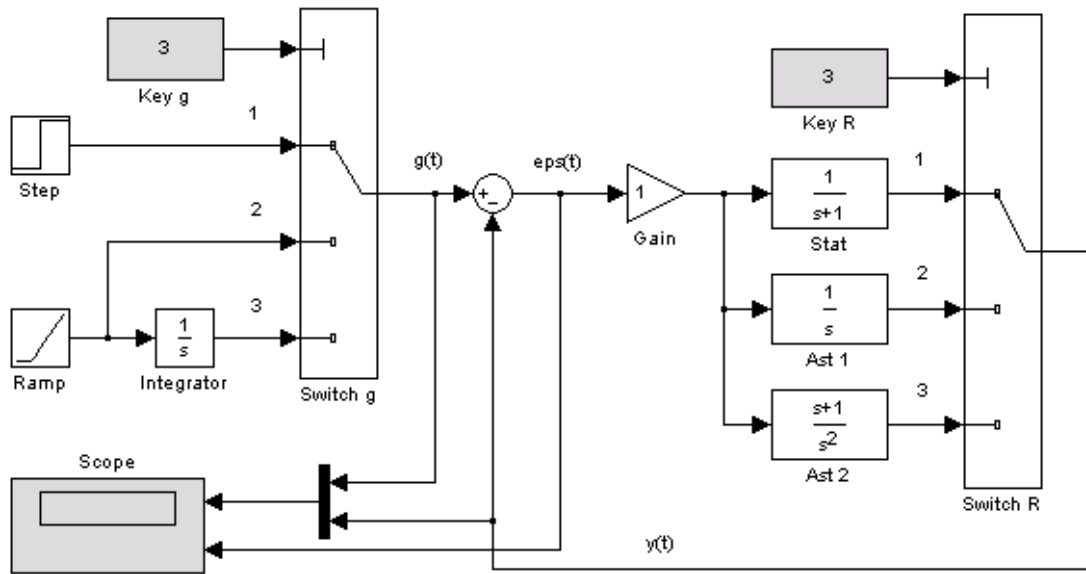


Рис. 2.4. Схема проведення експерименту

Набір моделей досліджуваних систем складається з загальних блоків віднімання та підсилення (**Gain**) і додаткових моделей статичної системи (блок **Stat**), системами з астатизмом першого (блок **Ast 1**) і другого порядків (блок **Ast 2**). Їх підключають для проведення досліджень за допомогою керованого перемикача (**Switch R**) і блока керування (**Key R**).

Спостереження процесів у системі відбувається за допомогою двоканального віртуального осцилографа (**Scope**). На верхньому екрані спостерігають вхідну $g(t)$ (оранжевий колір) у вихідну величини $y(t)$ (малиновий колір). На нижньому екрані спостерігають помилку системи $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$.

2. Дослідження статичної системи.

Для створення статичної системи двічі натиснути лівою кнопкою миші на блок **Key R**, після чого у вікні **Constant value** ввести значення константи **1** і натиснути **Ok**.

Провести дослідження системи в статичному режимі. Підключити до входу системи генератор одиничної функції (**Step**).

Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи $K=1$. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою миші на блок **Gain**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення **1** і натиснути **Ok**.

Запустити імітацію процесу функціонування системи натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів.

Відкрити вікно **Scope**. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою миші на блок **Scope**. У випадку, якщо графіки погано видно на екрані віртуального осцилографа, натиснути кнопку «**Бінокль**» на панелі інструментів. Проаналізувати хід відпрацювання системою ступеневої вхідної дії та графік помилки. Одержати й занести до табл. 2.3 експериментальні дані для усталеного значення статичної помилки $\varepsilon_{ст}^{(експ)}$.

Повторити дослідження для коефіцієнта підсилення розімкненої системи $K=2$ та 5 . Порівняти результати розрахунку з даними експерименту.

Якісно дослідити точність статичної САК у кінетичному та рівноприскореному режимах. Для цього почергово у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **2** та **3**, запустити імітацію процесу функціонування натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів, після чого у вікні **Scope** спостерігати хід відпрацювання системою відповідної вхідної дії та графіки помилок. Зробити висновок про спроможність статичної системи до роботи в кінетичному та рівноприскореному режимах.

3. Дослідження системи з астатизмом першого порядку.

Для створення системи з астатизмом першого порядку двічі натиснути лівою кнопкою миші на блок **Key R**, після чого у вікні **Constant value** ввести значення константи **2** і натиснути **Ok**.

Провести дослідження системи в статичному режимі, для чого у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **1**. Підключити до входу системи генератор одиничної функції (**Step**).

Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи $K_v = 1$. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою миші на блок **Gain**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення **1** і натиснути **Ok**.

Запустити імітацію процесу функціонування системи натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів.

Відкрити вікно **Scope**. Проаналізувати хід відпрацювання системою ступеневої вхідної дії та графік помилки. Зробити висновок про величину усталеної статичної помилки.

Дослідити систему в кінетичному режимі, для чого у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **2**. Запустити імітацію процесу функціонування та переключитися у вікно **Scope**. Одержати й занести до табл. 2.4 експериментальне значення усталеної кінетичної помилки $\varepsilon_k^{(\text{експ})}$.

Повторити дослідження для коефіцієнта підсилення розімкненої системи $K_v = 2$ та 5 c^{-1} . Порівняти результати розрахунку з даними експерименту.

Якісно дослідити точність САК у рівноприскореному режимі. Для цього у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **3**. Запустити імітацію процесу функціонування натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів, після чого у вікні **Scope** спостерігати хід відпрацювання системою вхідної дії та графік помилки. Зробити висновок про спроможність астатичної системи першого порядку до роботи в рівноприскореному режимі.

4. Дослідження системи з астатизмом другого порядку.

Для створення системи з астатизмом другого порядку двічі натиснути лівою кнопкою миші на блок **Key R**, після чого у вікні **Constant value** ввести значення константи **3** і натиснути **Ok**.

Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи $K_a = 1$.

Провести дослідження системи в статичному та кінетичному режимах. Проаналізувати хід відпрацювання системою відповідних вхідних дій і графіки помилок. Зробити висновок.

Дослідити систему в рівноприскореному режимі, для чого у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **3**. Запустити імітацію процесу функціонування та переключитися у вікно **Scope**. Одержати і занести до табл. 2.5 експериментальне значення усталеної інерційної помилки $\varepsilon_{\text{ін}}^{(\text{експ})}$.

Повторити дослідження для коефіцієнта підсилення розімкненої системи $K_a = 2$ та 5 c^{-2} . Порівняти результати розрахунку з даними експерименту.

Після закінчення досліджень закрити вікно керування програмної оболонки Matlab, на запитання про збереження змін у файлі **Tochnist** відповісти **No**.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Схеми математичних моделей і результати виконання аналітичного дослідження динамічних помилок САК.
3. Заповнити табл. 2.3-2.5 результатами аналітичних та експериментальних досліджень.
4. Накреслити графіки аналітичних та експериментальних залежностей усталених помилок від коефіцієнтів підсилення розімкненої САК, побудовані в одних координатних осях.
5. Висновки про вплив порядку астатизму, коефіцієнта підсилення та характеру задавальної дії на динамічну помилку системи.

Контрольні запитання

1. Поясніть поняття статичної, кінетичної та інерційної помилок САК.
2. Наведіть ознаку порядку астатизму САК за задавальною дією.
3. Якою буде статична помилка в системі з астатизмом першого порядку:
а) 0; б) постійна; в) ∞ ?
4. Якою буде кінетична помилка в статичній системі:
а) 0; б) постійна; в) ∞ ?
5. Якою буде кінетична помилка в системі з астатизмом другого порядку:
а) 0; б) постійна; в) ∞ ?
6. Якою буде інерційна помилка в системі з астатизмом першого порядку:
а) 0; б) постійна; в) ∞ ?
7. Якою буде кінетична помилка в системі з астатизмом першого порядку:
а) 0; б) постійна; в) ∞ ?
8. Схема математичної моделі САК наведена на рис. 2.5.

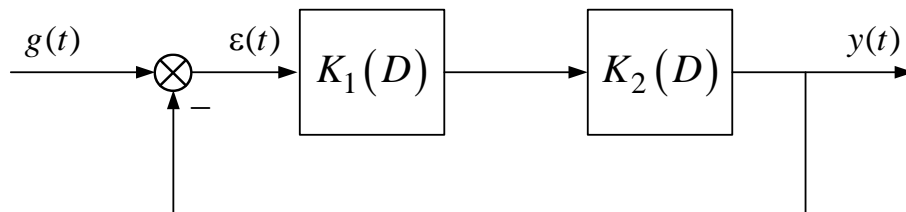


Рис. 2.5

Її оператори передавання

$$K_1(D) = \frac{M_1}{D}, \quad K_2(D) = \frac{M_2(T_1D + 1)}{D(T_2D + 1)}.$$

Розрахуйте усталену динамічну помилку, якщо задавальна дія $g(t)$ змінюється за законом

$$g(t) = 0,5 \cdot W \cdot t^2.$$

3. Дослідження пропорційно-диференціальної корекції САК

3.1. Мета роботи

1. З'ясувати сутність і методи корекції САК.
2. Дослідити вплив структури та параметрів пропорційно-диференціальних корегувальних пристроїв на показники якості функціонування САК.

3.2. Програма роботи

1. Дослідження впливу ПД корекції на якість функціонування САК у перехідному режимі.
2. Аналіз сутності ПД корекції в частотній області.
3. Дослідження впливу параметрів ПД корегувального пристрою на запаси стійкості та якість у перехідному режимі.

3.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [1-5] і конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
 - мету, програму і вказівки до виконання роботи;
 - теоретичні положення за темою роботи: поняття корекції САК і види корегувальних пристроїв; методи корекції та їхній вплив на показники якості функціонування САК.
2. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
3. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

3.4. Короткі відомості з теорії

Системи автоматичного керування, що містять тільки функціонально необхідні елементи, зазвичай не мають потрібної якості функціонування. Так, динамічна помилка системи тим менша, чим більший коефіцієнт підсилення має розімкнена система. Однак зі збільшенням коефіцієнта підсилення зменшуються запаси стійкості, перехідний процес стає більш коливальним, а при коефіцієнті підсилення вище граничного система взагалі стає нестійкою і, отже, непрацездатною.

Зміна структури та параметрів системи з метою усунення протиріч між показниками якості та надання системі бажаних динамічних властивостей (стійкість, точність, якість перехідного процесу) здійснюється введенням до її складу спеціальних пристроїв, що отримали назву *корегувальних* [1-5].

Схема математичної моделі системи автоматичного керування з послідовним корегувальним пристроєм зображена на рис. 3.1. На цьому рисунку позначено: $R_H(p)$ – передаточна функція розімкненої некорегованої системи – системи, яка складається лише з функціонально необхідних блоків; $K_{кп}(p)$ – передаточна функція послідовного корегувального пристрою; $G(p)$ – зображення, за Лапласом, задавальної дії; $Y(p)$ – зображення, за Лапласом, вихідної величини.

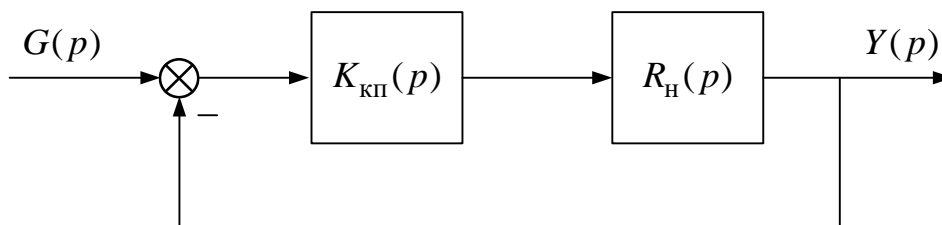


Рис. 3.1. Схема математичної моделі САК з послідовним корегувальним пристроєм

Оскільки структура і параметри функціонально необхідних блоків задані, то передаточна функція $R_H(p)$ є також заданою. Тому отримати бажані властивості САК можна лише шляхом вибору структури і параметрів передаточної функції $K_{кп}(p)$ корегувального пристрою.

Звичайно аналіз і синтез систем керування з корегувальними пристроями здійснюється за допомогою частотних методів [1-5], зокрема логарифмічних частотних характеристик. При послідовній корекції, показаній на рис. 3.1, передаточна функція розімкненої корегованої системи дорівнює

$$R_K(p) = K_{кп}(p) \cdot R_H(p). \quad (3.1)$$

Тому логарифмічні частотні характеристики розімкненої корегованої системи

$$\begin{aligned} L_K(\omega) &= L_H(\omega) + L_{кп}(\omega), \\ \varphi_K(\omega) &= \varphi_H(\omega) + \varphi_{кп}(\omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

З виразу (3.2) випливає, що бажаний вигляд $L_K(\omega)$, $\varphi_K(\omega)$ частотних характеристик корегованої системи створюється шляхом додавання до частотних характеристик некорегованої системи $L_H(\omega)$, $\varphi_H(\omega)$ необхідних змін за допомогою частотних характеристик послідовного корегувального пристрою.

Отже, вплив тих чи інших послідовних корегувальних пристроїв на якість функціонування САК залежить від того, на яку область частот розімкненої некорегованої системи і як саме вони впливають. З цієї точки зору, послідовні корегувальні пристрої поділяють на пропорційно-диференціальні (ПД), пропорційно-інтегральні (ПІ) та пропорційно-інтегрально-диференціальні (ПІД) [1-5].

Пропорційно-диференціальні корегувальні пристрої призначені для забезпечення стійкості та покращення показників якості функціонування САК в перехідному режимі.

Як відомо, стійкість системи та показники якості функціонування САК в перехідному режимі – час регулювання t_p та величина перегулювання σ пов'язані з особливостями ходу її частотних характеристик в області середніх частот, значенням частоти зрізу ω_{zR} розімкненої системи та величинами запасів стійкості (вирази (1.10), (1.10a)). Тому ПД корекцію застосовують у тих випадках, коли з метою забезпечення стійкості та зменшення часу регулювання та перегулювання необхідно збільшити частоту зрізу ω_{zR} і привести запаси стійкості до норми. Такого результату можна досягнути за допомогою корегувальних пристроїв, ЛАЧХ і ФЧХ яких дорівнює нулю в області низьких частот, а в області середніх частот є додатними [1-5].

Наведемо приклади типових передаточних функцій пропорційно-диференціальних корегувальних пристроїв

$$K_{\text{ПД1}}(p) = \tau \cdot p + 1; \quad (3.3)$$

$$K_{\text{ПД2}}(p) = \frac{\tau \cdot p + 1}{T \cdot p + 1}, \quad \tau > T. \quad (3.4)$$

Перша з них є передаточною функцією форсуючої ланки (дод. 1). Як відомо, її асимптотична ЛАЧХ, починаючи з частоти спряження $\omega_c = 1/\tau$, має нахил + 20 дБ/дек, а ФЧХ змінюється за законом $\arctg(\omega \cdot \tau)$ (рис. 3.2).

Для досягнення найкращих результатів корекції необхідно обирати частоту спряження ланки лівіше або поблизу частоти зрізу розімкненої системи ω_{zR} .

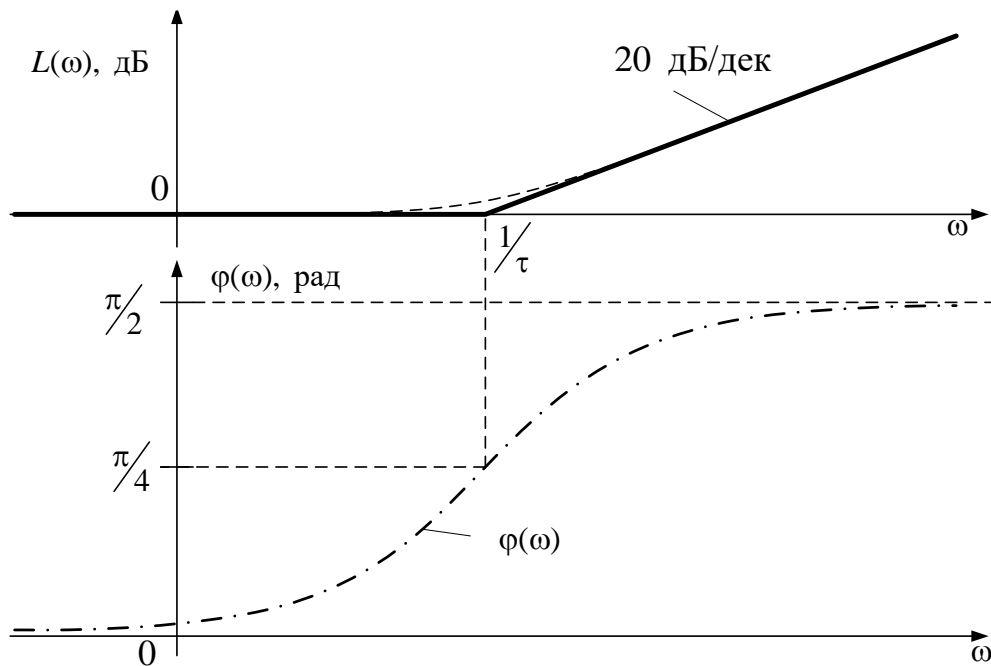


Рис. 3.2. Частотні характеристики форсуючої ланки

Нескладно встановити, що при застосуванні такого пристрою сигнал помилки $\varepsilon(t)$, який подають на його вхід, перетворюється на сигнал

$$\varepsilon_{\text{ПД}}(t) = (\tau D + 1)\varepsilon(t) = \tau \cdot \varepsilon'(t) + \varepsilon(t),$$

пропорційний зваженій сумі сигналу помилки та його першої похідної. Саме тому такий вид корегувальних пристроїв і отримав назву пропорційно-диференціальних.

Зазначимо, що форсуюча ланка не може бути точно реалізована, тому що її вихідна величина залежить від похідної від вхідної величини. На відміну від неї другий варіант ПД корегувального пристрою є фізично реалізованим.

Логарифмічні частотні характеристики другого варіанта ПД корегувального пристрою наведені на рис. 3.3. Тут асимптотична ЛАЧХ має нахил $+20$ дБ/дек на ділянці $(1/\tau, 1/T)$, а ФЧХ є додатною з максимумом на частоті $\omega_m = 1/\sqrt{\tau \cdot T}$. Тому для досягнення найкращих

результатів корекції необхідно обирати параметри τ, T так, щоб вони задовольняли умову

$$\omega_{3R} \cong \omega_m = 1/\sqrt{\tau \cdot T}, \quad (3.5)$$

де ω_{3R} – частота зрізу розімкненої корегованої системи.

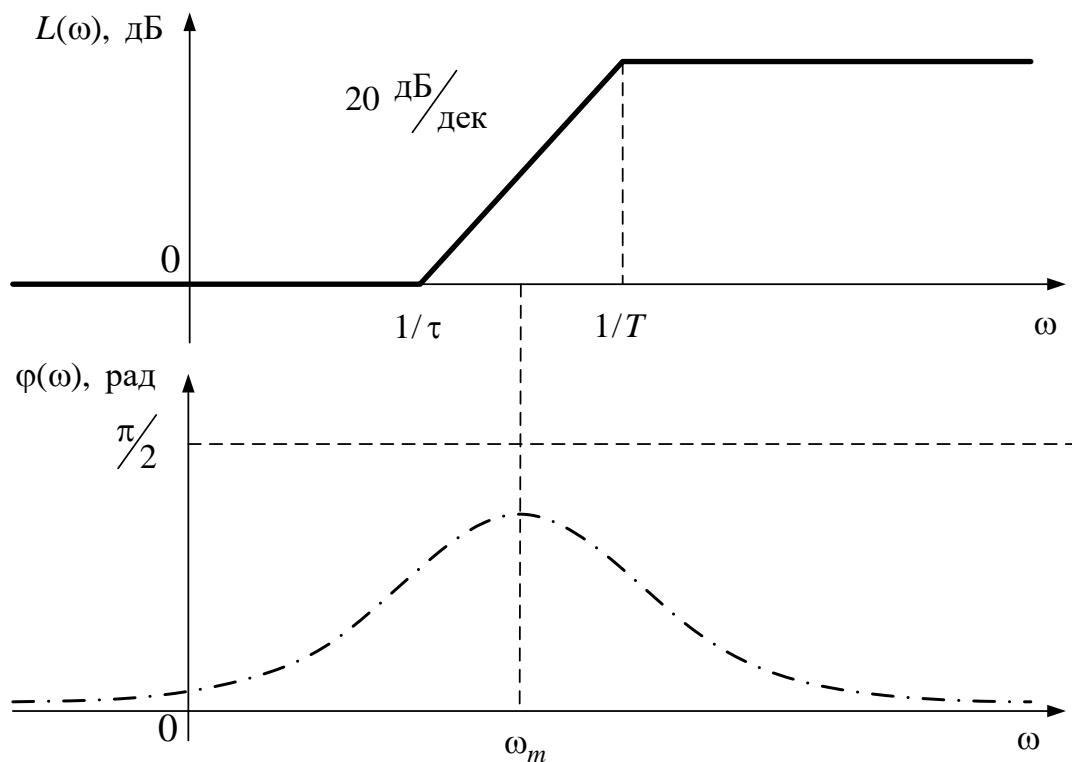


Рис. 3.3. Частотні характеристики ПД корегувального пристрою (3.4)

3.5. Вказівки до виконання роботи

3.5.1. Дослідження впливу ПД корекції на якість функціонування САК у перехідному режимі

1. Характеристика умов задачі.

Некорегована система, схема математичної моделі якої наведена на рис. 3.4, має такі передаточні функції:

$$K_1(p) = \frac{K}{p(T_1p + 1)}; \quad K_2(p) = \frac{1}{(T_2p + 1)^2}, \quad (3.6)$$

де $K = 10 \text{ с}^{-1}$ – коефіцієнт підсилення розімкненої системи;

$T_1 = 1 \text{ с}, T_2 = 0,025 \text{ с}$ – постійні часу інерційних ланок.

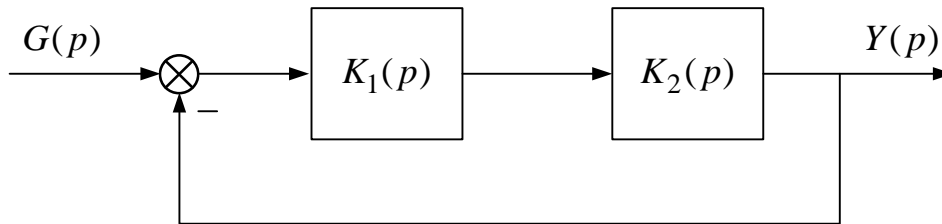


Рис. 3.4

До складу системи додано послідовний ПД корегувальний пристрій двох видів:

- 1) форсуюча ланка (3.3) із постійною часу $\tau = 0,5 \text{ с}$;
- 2) ланка (3.4) з параметрами $\tau = 0,5 \text{ с}, T = 0,1 \cdot \tau = 0,05 \text{ с}$.

Зіставити показники якості роботи в перехідному режимі системи без корекції та з ПД корекцією.

2. Методика розв'язання задачі.

Розрахунок і аналіз перехідних характеристик - за допомогою пакета Matlab.

Для розрахунку необхідно в командному вікні (**Command Window**) виконати такі операції (дод. 2) [6-9]:

а) ввести передаточні функції всіх блоків з параметрами, вказаними в умовах задачі (оператори **K1, K2, Kk1, Kk2** вигляду **K=tf(*)**) (формула (Д.2.2));

б) розрахувати передаточні функції розімкненої некорегованої та двох корегованих розімкнених систем (оператори **Rn, Rk1, Rk2** через оператори послідовних з'єднань (рис. 3.1, 3.4) і формула (Д.2.3));

в) розрахувати передаточні функції відповідних замкнених систем (оператори W_n , W_{k1} , W_{k2} через оператори одиничного зворотного зв'язку $\text{feedback}(R^*,1)$ (формула (Д.2.6));

г) розрахувати сімейство графіків перехідних характеристик досліджуваних систем (оператор $\text{step}(W_n, W_{k1}, W_{k2})$).

Отримані графіки зберегти для подальшого аналізу.

3. Аналіз результатів.

Користуючись графіками перехідних характеристик, виміряти основні показники якості функціонування некорегованої та корегованих САК у перехідному режимі (рис. 1.3 і вирази (1.8), (1.9)). Результати занести до табл. 3.1.

Зробити висновки про якість роботи в перехідному режимі некорегованої САК і САК з ПД корекцією двох видів.

Таблиця 3.1

Вплив ПД корегувальних пристроїв на показники якості перехідного режиму

Показник якості	Некорегована САК	Корегована САК (КП (3.3))	Корегована САК (КП (3.4))
Час регулювання t_p , с			
Перерегулювання σ , %			

3.5.2. Аналіз сутності ПД корекції в частотній області

1. Побудувати частотні характеристики для ПД корекції.

У командному вікні (**Command Window**) виконати операції за п. 2, п. а, б попереднього завдання, після чого розрахувати та зберегти для подальшого аналізу:

а) сімейство графіків частотних характеристик досліджуваних систем для ПД корекції (3.3) (оператор **bode(Rn,Kk1,Rk1)**);

б) сімейство графіків частотних характеристик досліджуваних систем для ПД корекції (3.4) (оператор **bode(Rn,Kk2,Rk2)**).

Графіки частотних характеристик мають колір:

- розімкненої некорегованої системи – синій;
- корегувального пристрою – зелений;
- розімкненої корегованої системи – червоний.

2. Провести аналіз частотних характеристик.

При проведення аналізу звернути увагу:

а) на справедливість формули зв'язку (3.2) між логарифмічними частотними характеристиками розімкненої некорегованої системи, корегувального пристрою та розімкненої корегованої системи;

б) що ЛАЧХ ПД корегувального пристрою має підйом, а ФЧХ є додатною в області середніх частот, завдяки чому ПД корегувальний пристрій збільшує частоту зрізу розімкненої системи та запаси стійкості САК;

в) ЛАЧХ та ФЧХ ПД корегувального пристрою дорівнюють нулю в області низьких частот, внаслідок чого ПД корегувальний пристрій не впливає на коефіцієнт підсилення та порядок астатизму САК;

г) корегувальні пристрої як із передаточною функцією (3.3), так і передаточною функцією (3.4) забезпечують виконання вимог до ходу ЛАЧХ і ФЧХ розімкненої корегованої системи в області середніх частот, що гарантують прийнятну якість функціонування САК у перехідному режимі.

Зробити відповідні висновки за результатами проведеного аналізу.

3.5.3. Дослідження впливу параметрів ПД корегувального пристрою на запаси стійкості та якість у перехідному режимі

1. Аналіз за частотними характеристиками.

Розрахувати ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої некорегованої САК:

K1 = tf([10],[1 1 0]);K2 = tf([1],[0.025 1]);Rn = K1 * K2 ^ 2;margin(Rn);grid .

Після натискання **Enter** у командному вікні з'являються графіки логарифмічних частотних характеристик розімкненої некорегованої системи зі значеннями запасів за підсиленням (амплітудою) L_3 і фазою φ_3 (у Matlab вони позначені G_m та P_m відповідно). Занести отримані значення запасів і частоти зрізу розімкненої системи ω_{zR} до табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Вплив параметрів ПД корегувального пристрою на запаси стійкості та показники якості перехідного режиму

Параметр	Некорегована САК	Корегована САК		
		$\tau = 1$ с	$\tau = 0,5$ с	$\tau = 0,2$ с
Частота зрізу ω_{zR} , с^{-1}				
Частота максимуму $\omega_m = 1/\sqrt{\tau \cdot T}$, с^{-1}	—			
Запас стійкості за амплітудою L_3 , дБ				
Запас стійкості за фазою φ_3 , град				
Час регулювання t_p , с				
Величина σ , %				

Розрахувати ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої корегованої САК (аналіз проводиться для корегувального пристрою (3.4), у якому постійна часу τ форсуючої ланки встановлена почергово згідно з табл. 3.2, а відношення $\tau/T = 10$). Для розрахунку набирати

tk = tau;Kk2 = tf([tk 1],[0.1 * tk 1]);Rk2 = Kk2 * Rn;margin(Rk2);grid ,

де τ – постійна часу τ форсуючої ланки, почергово встановлена згідно з табл. 3.2 рівною 1, 0,5 та 0,2 с.

Занести отримані значення запасів стійкості та частоти зрізу розімкненої корегованої системи ω_{zR} до табл. 3.2.

Проаналізувати закономірність залежності зміни запасів стійкості та частоти зрізу від постійної часу τ форсуючої ланки.

Розрахувати значення частоти $\omega_m = 1/\sqrt{\tau \cdot T}$, на якій ФЧХ КП має максимальне значення, і занести до табл. 3.2

Перевірити виконання умови (3.5) для різних значень постійної часу τ форсуючої ланки. Вказати параметри КП, за яких запаси стійкості максимальні. Зробити висновки.

2. Аналіз за перехідними характеристиками.

Для наочності порівняння доцільно побудувати сімейство перехідних характеристик некорегованої та корегованої систем з трьома варіантами постійної часу τ форсуючої ланки.

Для розрахунку необхідно в командному вікні (**Command Window**) виконати такі операції:

а) ввести передаточні функції всіх блоків із параметрами, вказаними в умовах задачі (оператори **K1, K2, Kk21** для $\tau = 1$ с, **Kk22** для $\tau = 0,5$ с, **Kk23** для $\tau = 0,2$ с);

б) розрахувати передаточні функції розімкненої некорегованої та трьох корегованих розімкнених систем (оператори **Rn, Rk21, Rk22, Rk23**);

в) розрахувати передаточні функції відповідних замкнених систем (оператори **Wn, Wk21, Wk22, Wk23**);

г) розрахувати сімейство графіків перехідних характеристик досліджуваних систем (оператор **step(Wn, Wk21, Wk22, Wk23)**).

Отримані графіки зберегти для подальшого аналізу.

На графіках перехідних характеристик некорегованої (синій) та корегованої систем (зелений для $\tau = 1$ с, червоний для $\tau = 0,5$ с, світло-зелений для $\tau = 0,2$ с) визначити і занести до табл. 3.2 значення часу регулювання t_p та величини перерегулювання σ (рис. 1.3 і коментар до нього).

Зіставити отримані результати між собою, обрати найкращий варіант вибору постійної часу τ форсуючої ланки. Порівняти результати з тими, що отримані у п.1. Зробити висновки.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Схеми математичних моделей некорегованої системи та системи з послідовною корекцією (рис. 3.1, 3.4).
3. Графіки перехідних характеристик і табл. 3.1 (п. 3.5.1).
4. Графіки частотних характеристик корегувальних пристроїв і корегованих систем із ПД корекцією (за п. 3.5.2) і результати їх аналізу.
5. Графіки перехідних і частотних характеристик некорегованої та корегованої систем і табл. 3.2 (п. 3.5.3).
6. Висновки за результатами досліджень.

Контрольні запитання

1. Вкажіть призначення корегувальних пристроїв.
2. Наведіть схему математичної моделі САК з послідовним корегувальним пристроєм.
3. Як пов'язані між собою частотні характеристики некорегованої та корегованої систем за послідовної корекції?

4. Вкажіть призначення пропорційно-диференціальної корекції та особливості частотних характеристик пропорційно-диференціальних корегувальних пристроїв.

5. Наведіть приклади передаточних функцій пропорційно-диференціальних корегувальних пристроїв.

6. Наведіть логарифмічні частотні характеристики форсуючої ланки.

7. Наведіть логарифмічні частотні характеристики фізично реалізованого пропорційно-диференціального корегувального пристрою.

8. За яких умов необхідно обирати параметри пропорційно-диференціального корегувального пристрою?

4. Дослідження пропорційно-інтегральної корекції САК

4.1. Мета роботи

1. З'ясувати сутність і методи корекції САК.
2. Дослідити вплив структури та параметрів пропорційно-інтегральних корегувальних пристроїв на показники якості функціонування САК.

4.2. Програма роботи

Дослідження впливу пропорційно-інтегральної корекції на показники якості функціонування САК.

4.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [1-5] і конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
 - мету, програму і вказівки до виконання роботи;
 - теоретичні положення за темою роботи: поняття корекції САК та види корегувальних пристроїв; методи корекції та їхній вплив на показники якості функціонування САК.
2. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
3. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

4.4. Короткі відомості з теорії

Пропорційно-інтегральні корегувальні пристрої призначені для підвищення точності функціонування САК в усталеному режимі.

Як відомо [1-5], точність функціонування САК в усталеному режимі визначається коефіцієнтом підсилення розімкненої системи та порядком її

астатизму. Внаслідок того, що вказані параметри визначають хід частотних характеристик в області низьких частот, необхідного результату можна досягнути за допомогою корегувальних пристроїв, ЛАЧХ яких є додатною в області низьких частот і дорівнює нулю в областях середніх і високих частот. Тому пропорційно-інтегральну (ПІ) корекцію можна застосовувати до систем, які є стійкими та мають задовільну якість функціонування в перехідному режимі.

Наведемо приклади типових передаточних функцій пропорційно-інтегральних корегувальних пристроїв:

$$K_{\text{пi1}}(p) = k_{\text{кп1}} \frac{\tau \cdot p + 1}{p}, \quad k_{\text{кп1}} = 1/\tau; \quad (4.1)$$

$$K_{\text{пi2}}(p) = k_{\text{кп2}} \frac{\tau \cdot p + 1}{T \cdot p + 1}, \quad k_{\text{кп2}} = T/\tau, \quad T > \tau. \quad (4.2)$$

Корегувальний пристрій із передаточною функцією (4.1) називають *ізодромним регулятором* [1-5]. Він являє собою послідовне з'єднання інтегруючої та форсууючої ланок (дод. 1). Його асимптотична ЛАЧХ до частоти спряження $\omega_c = 1/\tau$ має нахил -20 дБ/дек, а після частоти спряження має нульовий нахил (рис. 4.1, суцільна лінія). ФЧХ змінюється за законом $-\frac{\pi}{2} + \arctg(\omega \cdot \tau)$ (рис. 4.1, штрихпунктир).

Нескладно встановити, що при застосуванні ізодромного регулятора сигнал помилки $\varepsilon(t)$, що подається на його вхід, перетворюється на сигнал

$$\varepsilon_{\text{пi}}(t) = \varepsilon(t) + \frac{1}{\tau \cdot D} \cdot \varepsilon(t),$$

пропорційний зваженій сумі сигналу помилки та інтегралу від нього. Саме тому такий вид корегувальних пристроїв і отримав назву пропорційно-інтегральних. Внаслідок введення до складу розімкненої системи

інтегруючої ланки порядок астатизму системи за задавальною дією підвищується на одиницю, що й призводить до покращення точності її функціонування.

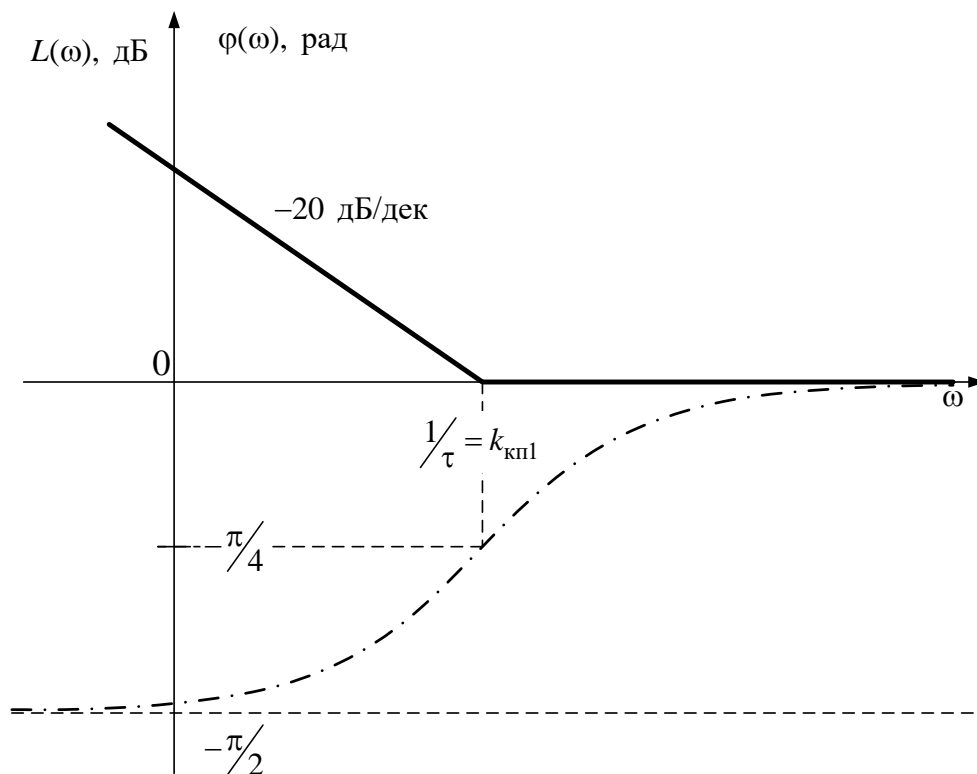


Рис. 4.1. Частотні характеристики ізодромного регулятора

Для того щоб при застосуванні ізодромного регулятора частотні характеристики розімкненої системи залишилися незмінними в області середніх і високих частот, необхідно обирати коефіцієнт підсилення $k_{\text{кпп}} = 1/\tau$, а частоту спряження лівіше не менш ніж на дві октави від частоти зрізу розімкненої системи ω_{3R} [1-5]:

$$\omega_c = 1/\tau < \omega_{3R}/4. \quad (4.3)$$

Логарифмічні частотні характеристики другого варіанта ПІ корегувального пристрою наведені на рис. 4.2. Його асимптотична ЛАЧХ

до першої частоти спряження $\omega_1 = 1/T$ дорівнює $20 \cdot \lg k_{\text{кп2}} = 20 \cdot \lg(T/\tau)$ дБ, має нахил -20 дБ/дек на ділянці $(1/T, 1/\tau)$ і дорівнює нулю правіше другої частоти спряження $\omega_2 = 1/\tau$, а ФЧХ є від'ємною з мінімумом на частоті $\omega_m = 1/\sqrt{T \cdot \tau}$.

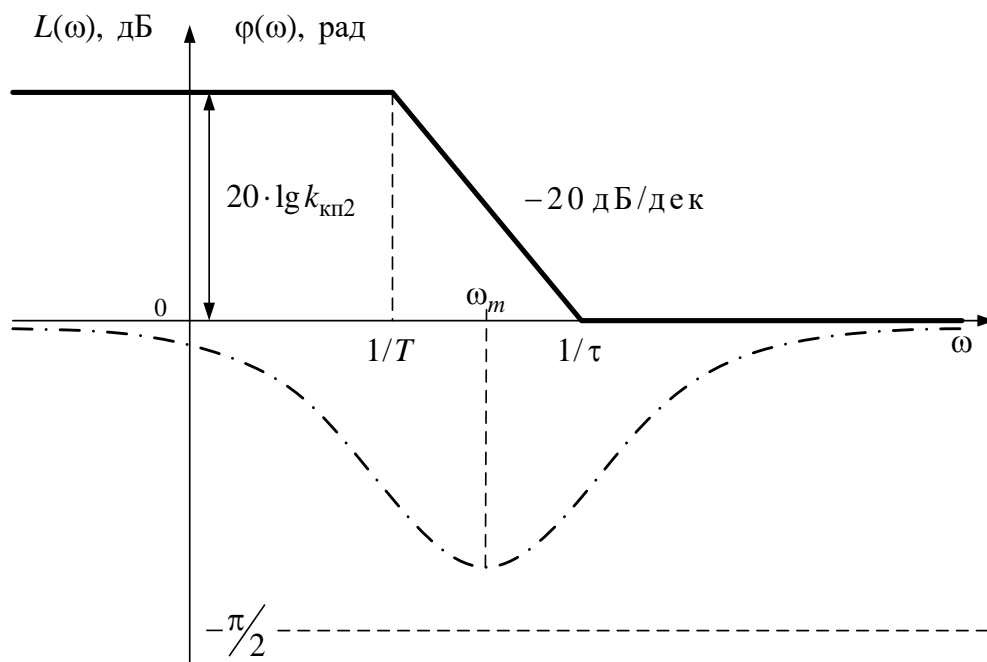


Рис. 4.2. Частотні характеристики ПІ корегувального пристрою (4.2)

Отже, такий корегувальний пристрій не змінює порядок астатизму системи, а лише підвищує коефіцієнт підсилення розімкненої системи у $k_{\text{кп2}} = T/\tau$ разів.

Для того щоб частотні характеристики розімкненої системи в областях середніх і високих частот залишилися незмінними, необхідно обирати частоту спряження $\omega_2 = 1/\tau$ лівіше на одну-дві октави від частоти зрізу розімкненої системи ω_{3R} .

4.5. Вказівки до виконання роботи

4.5.1. Дослідження впливу пропорційно-інтегральної корекції на точність функціонування САК

1. Характеристика умов задачі та методики досліджень.

Схема математичної моделі досліджуваної системи наведена на рис. 4.3.

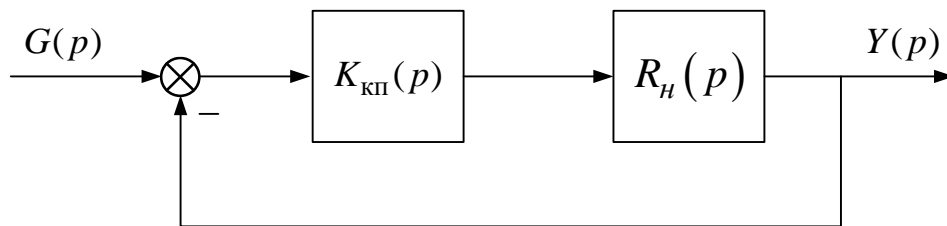


Рис. 4.3

Передаточна функція розімкненої некорегованої системи

$$R_n(p) = \frac{K}{(T_1 \cdot p + 1)(T_2 \cdot p + 1)}, \quad (4.4)$$

де $K = 10$ – коефіцієнт підсилення розімкненої системи;

$T_1 = 1$ с, $T_2 = 0,1$ с – постійні часу інерційних ланок.

До складу системи додається послідовний ПІ корегувальний пристрій двох видів згідно з виразами (4.1), (4.2).

Дослідження проводять за допомогою пакета Simulink.

Відкрити файл **PI_Corr12**. Схема проведення експерименту в пакеті Simulink зображена на рис. 4.4. Вона складається:

1) з керованого задавального блока – блока керування (**Key g**), генератора одиничної функції (**Step**) і лінійної функції (**Ramp**);

2) моделі некорегованої системи (**No correct**) із передаточною функцією (4.4);

3) моделі системи з корегувальним пристроєм (4.1), де $\tau = 1$ с (**Correct 1**);

4) моделі системи з корегувальним пристроєм (4.2), де $T = 10$ с, $\tau = 1$ с (**Correct 2**);

5) двох мультиплексорів 4/1 і двоканального віртуального осцилографа (**Scope**).

Моделі систем оформлені у вигляді субблоків.

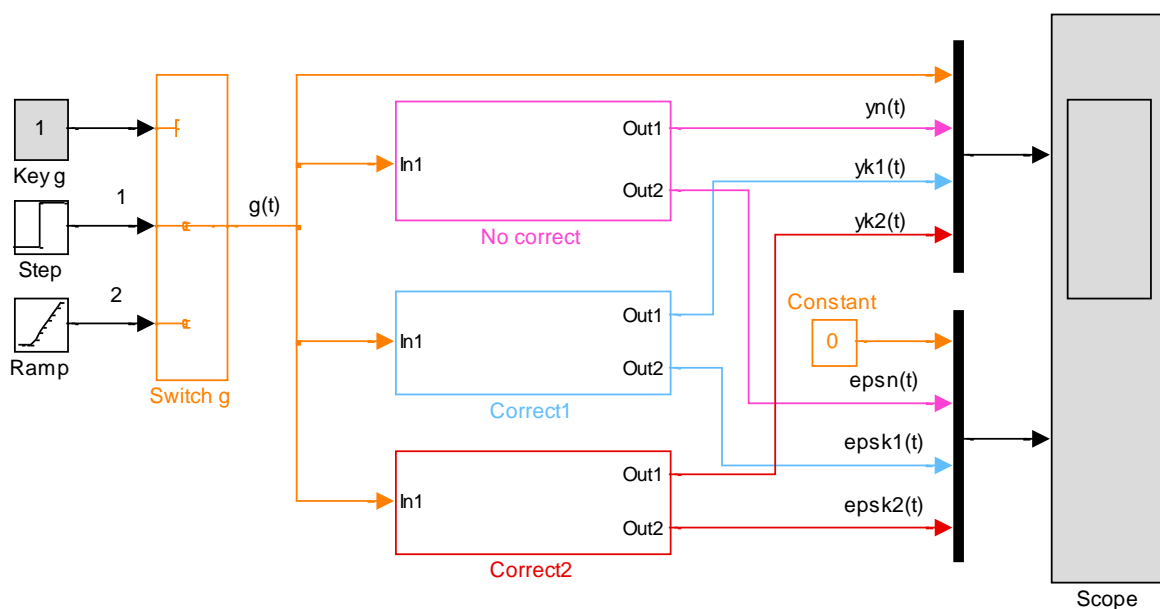


Рис. 4.4. Схема проведення експерименту

На верхньому екрані віртуального осцилографа (**Scope**) одночасно спостерігають:

- задавальну величину $g(t)$ (оранжевий колір);
- вихідну величину $y_n(t)$ некорегованої системи (малиновий колір);
- вихідну величину $y_{k1}(t)$ системи з корегувальним пристроєм (4.1) (синій колір);

– вихідну величину $uk_2(t)$ системи з корегувальним пристроєм (4.2) (червоний колір).

На нижньому екрані одночасно спостерігають помилки відповідних некорегованої та корегованих систем.


2. Дослідження перехідних характеристик систем.

Підключити до входу систем генератор одиничної функції (**Step**). Для цього у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **1**. Запустити імітацію процесу функціонування систем натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів.

Відкрити вікно **Scope**. У випадку, якщо графіки погано видно на екрані віртуального осцилографа, натиснути кнопку «**Бінокль**» на панелі інструментів.

Проаналізувати хід відпрацювання некорегованою та корегованими системами ступеневої вхідної дії та графіки помилок. Занести отримані графіки до звіту.

Зіставити процеси в системах у перехідному режимі. Якісно порівняти між собою характер перехідного процесу, час регулювання та величину перерегулювання.

Одержати і занести до табл. 4.1 експериментальні дані для усталених значень статичної помилки $\varepsilon_{ст}^{(некор)}$, $\varepsilon_{ст}^{(кор1)}$, $\varepsilon_{ст}^{(кор2)}$. Для підвищення точності вимірювань скористатись опцією **Zoom**  у командному рядку віртуального осцилографа, виділивши кінцеву ділянку графіків помилок.

За результатами експериментів дати розгорнуту характеристику впливу ПІ корегувальних пристроїв (4.1), (4.2) на точність роботи системи в статичному режимі.

3. Дослідження систем у кінетичному режимі.

Для цього у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **2**, запустити імітацію процесу функціонування натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів, після чого у вікні **Scope** спостерігати хід

відпрацювання некорегованою та корегованими системами лінійної вхідної дії та графіки помилок.

Одержати і занести до табл. 4.1 експериментальні дані для усталених значень кінетичної помилки $\varepsilon_K^{(\text{некор})}$, $\varepsilon_K^{(\text{кор1})}$, $\varepsilon_K^{(\text{кор2})}$.

За результатами експериментів дати розгорнуту характеристику впливу ПІ корегувальних пристроїв (4.1), (4.2) на точність роботи системи в кінетичному режимі. Вказати порядок астатизму системи до корекції та при застосуванні ПІ корегувальних пристроїв згідно з виразами (4.1), (4.2).

Таблиця 4.1

Вплив ПІ корегувальних пристроїв на точність САК

Параметр	Некорегована САК	Корегована САК1 (КП (4.1))	Корегована САК2 (КП (4.2))
Статична помилка $\varepsilon_{\text{ст}}$			
Кінетична помилка ε_K			

4.5.2. Аналіз сутності пропорційно-інтегральної корекції в частотній області

1. Побудувати частотні характеристики для ПІ корекції (формула (4.1)).

У командному вікні (**Command Window**) набрати:

tk = 1; Kk = tf([tk 1],[tk 0]);

K1 = tf([10],[1 1]); K2 = tf([1],[0.1 1]); Rn = K1 * K2;

Rk = Kk * Rn; bode(Rn, Kk, Rk); grid ,

де t_k – постійна часу $\tau = 1$ с форсуючої ланки корегувального пристрою (4.1).

Після запуску програми у вікні **Figure 1** спостерігати графіки частотних характеристик розімкненої некорегованої системи (сині лінії), корегувального пристрою (4.1) (зелені лінії) і розімкненої корегованої системи (червоні лінії). Занести отримані графіки до звіту.

2. Побудувати частотні характеристики для ПІ корекції (формула (4.2)).

У командному вікні (**Command Window**) замість першого рядка попереднього розрахунку набрати:

```
tk = 1;Tk = 10;Kk = tf([Tk/tk Tk/tk],[Tk 1]);  
K1 = tf([10],[1 1]);K2 = tf([1],[0.1 1]);Rn = K1 * K2;  
Rk = Kk * Rn;bode(Rn,Kk,Rk);grid ,
```

де T_k – постійна часу $T = 10$ с інерційної ланки корегувального пристрою (4.2).

Після запуску програми у вікні **Figure 1** спостерігати графіки частотних характеристик розімкненої некорегованої системи (сині лінії), корегувального пристрою (4.2) (зелені лінії) і розімкненої корегованої системи (червоні лінії). Занести отримані графіки до звіту.

3. Провести аналіз отриманих графіків. Звернути увагу:

– що в області низьких частот ЛАЧХ ПІ корегувального пристрою (4.1) має нахил -20 дБ/дек, завдяки чому ЛАЧХ корегованої системи також матиме нахил -20 дБ/дек, що свідчить про наявність астатизму першого порядку;

– в області низьких частот ЛАЧХ ПІ корегувального пристрою (4.2) має нульовий нахил і проходить на рівні 20 дБ; тому корегована система залишається статичною, однак її коефіцієнт підсилення збільшується на 20 дБ, що веде до зменшення помилки в 10 разів;

– в області високих частот ЛАЧХ і ФЧХ ІІІ корегувальних пристроїв обох видів прагнуть нулю, внаслідок чого ІІІ корегувальний пристрій слабо впливає на запаси стійкості та якість САК у перехідному режимі.

Зробити відповідні висновки за результатами проведеного аналізу.

4.5.3. Аналіз впливу параметрів ІІІ корегувального пристрою на роботу системи

1. Аналіз за частотними характеристиками.

Побудувати частотні характеристики некорегованої системи за допомогою оператора **margin(*)** (дод. 2). У командному вікні (**Command Window**) набрати:

```
K1 = tf([10],[1 1]);K2 = tf([1],[0.1 1]);Rn = K1 * K2;  
margin(Rn);grid .
```

Виміряти і занести до табл. 4.2 частоту зрізу ω_{3R} , запаси стійкості за амплітудою L_3 і фазою φ_3 некорегованої системи.

Провести аналогічні вимірювання для системи з ІІІ корекцією (4.1) для постійної часу $\tau = 1$ с форсуючої ланки корегувального пристрою (4.1).

Відповідна програма:

```
tk = 1;Kk = tf([tk 1],[tk 0]);  
K1 = tf([10],[1 1]);K2 = tf([1],[0.1 1]);Rn = K1 * K2;  
Rk = Kk * Rn;margin(Rk);grid .
```

Після проведення необхідних вимірювань повторити розрахунки для $\tau = 0,5$ с і $0,2$ с.

Розрахувати частоти спряження $\omega_c = 1/\tau$ форсуючої ланки корегувального пристрою (4.1) Перевірити виконання умови (4.3) для вказаних значень постійної часу.

Таблиця 4.2

Вплив постійної часу τ ПІ корегувального пристрою на роботу системи

Параметр	Некорегована САК	Корегована САК		
		$\tau = 1$ с	$\tau = 0,5$ с	$\tau = 0,2$ с
Частота зрізу ω_{zR} , c^{-1}		–	–	–
Частота спряження ω_c , c^{-1}	–			
Запас стійкості за амплітудою L_3 , дБ				
Запас стійкості за фазою φ_3 , град				
Час регулювання t_p , с				
Величина перерегулювання σ , %				

2. Аналіз за нормованими перехідними характеристиками.

Дослідження проводять для ПІ корегувального пристрою (4.1) для постійних часу τ , рівних 1, 0,5, 0,2 с. У командному вікні (**Command Window**) набрати:

$$K1 = tf([10],[1 \ 1]); K2 = tf([1],[0.1 \ 1]); Rn = K1 * K2;$$

$$tk1 = 1; Kk1 = tf([tk1 \ 1],[tk1 \ 0]); Rk1 = Kk1 * Rn;$$

$$tk2 = 0.5; Kk2 = tf([tk2 \ 1],[tk2 \ 0]); Rk2 = Kk2 * Rn;$$

$$tk3 = 0.2; Kk3 = tf([tk3 \ 1],[tk3 \ 0]); Rk3 = Kk3 * Rn;$$

$$Wn = feedback(Rn,1); Wk1 = feedback(Rk1,1);$$

Wk2 = feedback(Rk2,1); Wk3 = feedback(Rk3,1);
step(1.1 * Wn, Wk1, Wk2, Wk3); grid .

Після запуску програми у вікні **Figure 1** спостерігати графіки нормованих $h(t)/h(\infty)$ перехідних характеристик розімкненої некорегованої системи (сині лінії) і корегованих систем з $\tau = 1$ с (зелені лінії), $\tau = 0,5$ с (червоні лінії) і $\tau = 0,2$ с (світло-зелені лінії). Занести отримані графіки до звіту.

Провести аналіз отриманих графіків. Виміряти і занести до табл. 4.2 значення часу регулювання t_p і величини перерегулювання σ (рис. 1.3 і вирази (1.8), (1.9)). Зіставити результати. Вказати доцільну область значень постійної часу τ форсууючої ланки, де вплив на роботу систему в перехідному режимі практично відсутній. Зіставити з попереднім дослідженням у частотній області.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Схема математичної моделі корегованої системи (рис. 4.3) із наведеними значеннями параметрів K, T_1, T_2 .
3. Результати експериментальних досліджень (табл. 4.1, 4.2).
4. Графіки частотних характеристик некорегованої системи, корегувальних пристроїв (4.1), (4.2) і корегованої системи з ПІ корекцією (п. 4.5.2).
5. Графіки перехідних характеристик некорегованої та корегованої систем з ПІ корекцією (4.1) (п. 4.5.3).
6. Висновки за результатами досліджень.

Контрольні запитання

1. Вкажіть призначення корегувальних пристроїв.
2. Наведіть схему математичної моделі САК з послідовним корегувальним пристроєм.
3. Як пов'язані між собою частотні характеристики некорегованої та корегованої систем за послідовної корекції?
4. Вкажіть призначення ПІ корекції та особливості частотних характеристик ПІ корегувальних пристроїв.
5. Наведіть приклади передаточних функцій ПІ корегувальних пристроїв.
6. Наведіть логарифмічні частотні характеристики ізодромного регулятора.
7. За яких умов необхідно обирати параметри ПІ корегувального пристрою?
8. Як впливають ПІ корегувальні пристрої на стійкість САК?
9. Як впливають ПІ корегувальні пристрої на показники якості САК у перехідному режимі?

5. Оптимізація параметрів САК методом інтегральних оцінок

5.1. Мета роботи

1. З'ясувати сутність задачі оптимізації параметрів САК із фіксованою структурою.
2. Дослідити залежність інтегральних оцінок якості САК від коефіцієнта підсилення розімкненої системи та обрати оптимальне значення коефіцієнта підсилення за критерієм мінімуму інтегральних оцінок.

5.2. Програма роботи

1. Аналітичний розрахунок інтегральних оцінок якості САК у перехідному режимі.
2. Експериментальні дослідження залежності інтегральних оцінок якості САК від коефіцієнта підсилення розімкненої системи та вибір оптимального значення коефіцієнта підсилення.

5.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [1-5] і конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
 - мету, програму і вказівки до виконання роботи;
 - теоретичні положення за темою роботи: поняття функціонала якості САК, постановку задачі оптимізації параметрів САК з фіксованою структурою, види інтегральних оцінок і методи їхнього розрахунку.
2. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
3. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

5.4. Короткі відомості з теорії

Задача оптимізації параметрів САК належить до групи задач теорії оптимального керування. При формулюванні задачі оптимізації структура системи вважається повністю відомою. Розв'язання задачі оптимізації зводиться до вибору параметрів САК, за яких вибраний показник якості функціонування системи досягає екстремального значення.

Правило, за допомогою якого вибирають екстремальне значення показника якості функціонування, називається *критерієм оптимальності* системи.

Одним із ефективних методів оптимізації параметрів САК у перехідному режимі є метод інтегральних оцінок [1-5].

Визначальна особливість інтегральних оцінок полягає в тому, що вони дають узагальнений показник характеру перехідного процесу у вигляді одного числа, а не той чи інший локальний показник якості, як, наприклад, час регулювання, перерегулювання та ін. У зв'язку з цим інтегральні оцінки називають *глобальними* показниками якості, на відміну від *локальних*, якими оперують за інших методів.

На рис. 5.1 наведена схема математичної моделі САК, яка умовно доповнена порівнювальним пристроєм, що дає змогу виділити різницю (відхилення) між вимушеною складовою $y_B(t)$ (бажаною або еталонною складовою), зумовленою дією вхідного сигналу $g(t)$, і дійсним значенням вихідного сигналу $y(t)$, тобто

$$z(t) = y_B(t) - y(t). \quad (5.1)$$

Отже, функція $z(t)$ збігається за абсолютним значенням з вільною складовою перехідного процесу або, в остаточному підсумку, вільною складовою сигналу непогодження $\varepsilon_c(t)$.

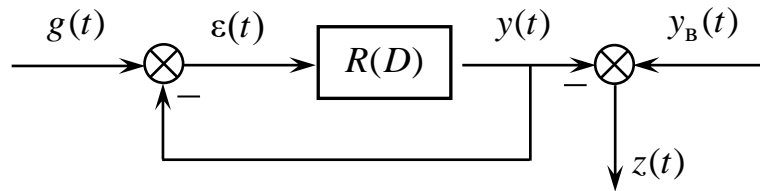


Рис. 5.1

Інтегральними оцінками (показниками якості) є деякі **функціонали**. Їх можна розглядати як функціональні вирази, у яких незалежними змінними є функція $z(t)$ і її похідна $z'(t)$.

Найбільш широке застосування отримали такі інтегральні оцінки: лінійна, квадратична і поліпшена квадратична [2]. Ці оцінки визначаються певними інтегралами вигляду

$$I_1 = \int_0^{\infty} z(t) dt ; \quad (5.2)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} z^2(t) dt ; \quad (5.3)$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left[z^2(t) + \left(\tau \frac{dz(t)}{dt} \right)^2 \right] dt . \quad (5.4)$$

Для обчислення інтегральних оцінок мають бути задані математичні моделі системи та вхідних дій і початкові умови.

Очевидно, що інтегральні оцінки мають сенс тільки в тому випадку, коли функція $z(t)$ є абсолютно інтегрованою, що має місце тільки у випадку стійких систем керування.

Лінійна інтегральна оцінка є найпростішою з інтегральних оцінок якості, що визначається інтегралом вигляду виразу (5.2), у якому замість $z(t)$ можна записати сигнал непогодження

$$\varepsilon_c(t) = y_B(t) - y(t). \quad (5.5)$$

Якщо досліджувана система стійка, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_c(t) = 0$, і, отже, інтеграл I_1 прагне до кінцевого значення, що дорівнює заштрихованій площі, показаній на рис. 5.2.

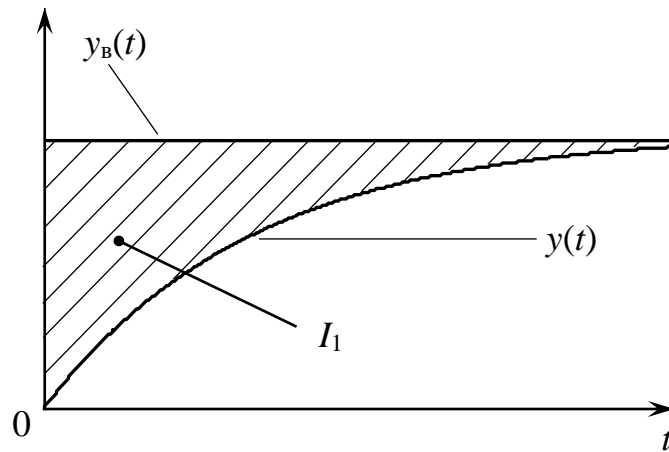


Рис. 5.2. Графічна інтерпретація лінійної інтегральної оцінки для монотонного перехідного процесу

Інтеграл (5.2) легко обчислюється. Справді, зображення функції $z(t)$, за Лапласом, буде

$$Z(p) = \int_0^{\infty} z(t)e^{-pt} dt. \quad (5.6)$$

Підставивши у вираз (5.6) $p = 0$, отримаємо

$$I_1 = Z(p)|_{p=0}. \quad (5.7)$$

Інтегральну оцінку I_1 можна застосовувати тільки до систем, про які заздалегідь відомо, що в них перехідний процес монотонний, тобто $z(t)$ не змінює знак.

Якщо перехідний процес має коливальний характер (рис. 5.3), то значення I_1 не може служити мірою його якості, оскільки площі різного знака віднімають одну від одної. Сказане істотно обмежує застосування лінійної інтегральної оцінки якості.

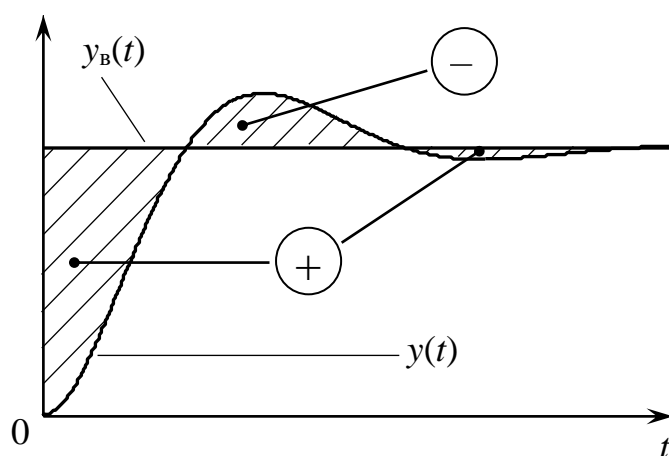


Рис. 5.3. Графічна інтерпретація лінійної інтегральної оцінки для коливального перехідного процесу

Квадратична інтегральна оцінка (5.3) (рис. 5.4) вільна від недоліків оцінки I_1 та має широке застосування завдяки тому, що значення інтеграла I_2 виражається через параметри передаточної функції досліджуваної системи керування. Розглянемо це питання більш докладно.

Для стійкої системи $z(t)$ є абсолютно інтегрованою функцією. На підставі теореми Парсеваля [2] інтеграл (5.3) можна переписати як

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z(p)Z(-p)dp. \quad (5.8)$$

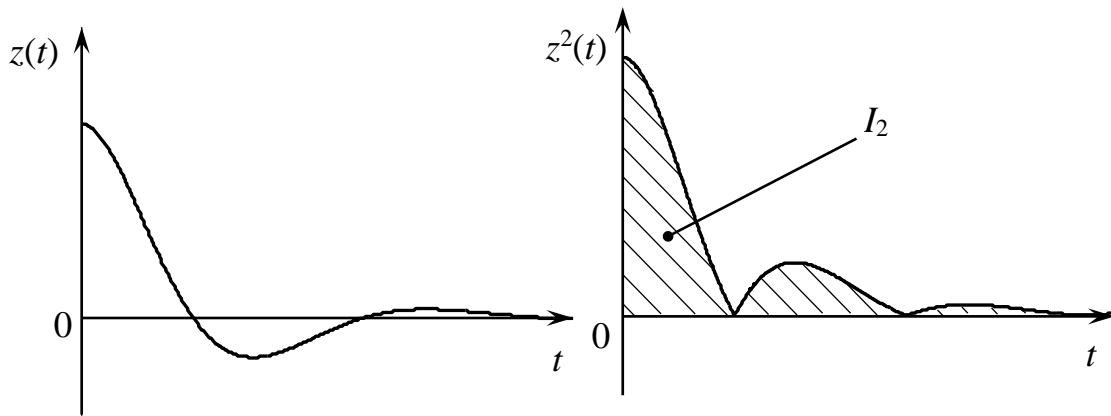


Рис. 5.4. Графічна інтерпретація квадратичної інтегральної оцінки I_2 для коливального перехідного процесу

У типових випадках $Z(p)$ є дробово-раціональною функцією комплексної змінної p вигляду

$$Z(p) = \frac{C(p)}{D(p)} = \frac{c_0 + c_1 p + \dots + c_{n-1} p^{n-1}}{d_0 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (5.9)$$

Тоді

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C(p)C(-p)}{D(p)D(-p)} dp. \quad (5.10)$$

Інтеграли (5.10) табульовані у вигляді явних функцій від коефіцієнтів c і d . Для $n = 1, 2$ і 3 значення інтеграла I_2 розраховують за формулами [2]

$$\begin{aligned} n=1: \quad I_2 &= \frac{c_0^2}{2d_0d_1}; \\ n=2: \quad I_2 &= \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0d_1d_2}; \\ n=3: \quad I_2 &= \frac{c_2^2 d_0 d_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (d_1 d_2 - d_0 d_3)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Для розрахунку квадратичної інтегральної оцінки в пакеті Matlab застосовують функцію розрахунку норми [6-9]

$$\text{norm}(\text{sys},2,\text{tol}),$$

де sys – ім'я передаточної функції;

2 – ідентифікатор норми;

tol – відносна точність обчислень.

Квадратична інтегральна оцінка I_2 має істотний недолік: знаючи значення I_2 , у загальному випадку не можна зробити точних висновків про характер перехідного процесу. Наприклад, оцінка I_2 не враховує обмеження на швидкість зміни $z(t)$, тобто на $z'(t)$. Наведені міркування зумовили появу поліпшеної інтегральної оцінки I_3 (5.4), що дає змогу отримати швидко загасальний і достатньо плавний, без великих значень похідних, перехідний процес.

Обчислюють поліпшену інтегральну оцінку I_3 за формулою, отриманою, якщо до рівняння (5.4) застосувати теорему Парсеваля,

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z(p)Z(-p) + \frac{\tau^2}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z_1(p)Z_1(-p)dp, \quad (5.12)$$

де

$$Z_1(p) = pZ(p) - z(0). \quad (5.13)$$

Величину τ у виразі (5.12) вибирають відповідно до обмежень на $z'(t)$.

У загальному випадку *задача оптимізації параметрів САК із фіксованою структурою за критерієм мінімуму показника якості I* формулюється так.

Дано:

- 1) схему математичної моделі САК;
- 2) варійовані параметри САК $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$;
- 3) математичні моделі задавальної та заважальної дії.

Визначити: оптимальні значення варійованих параметрів САК за критерієм мінімуму показника якості I .

Ця задача належить до відомих задач вищої математики – задач відшукування екстремуму функції багатьох змінних [2]. Тому, виходячи з методики її розв’язання, для знаходження оптимальних значень варійованих параметрів необхідно:

1) знайти залежності показника якості системи від варійованих параметрів $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$;

2) записати систему з k рівнянь, утворених із часткових похідних функції $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ за варійованими параметрами, прирівняними до нуля,

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial \alpha_1} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha_2} = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha_k} = 0; \end{cases} \quad (5.14)$$

3) розв’язати систему рівнянь (5.14) відносно шуканих параметрів;

4) серед знайдених рішень визначити ті, що відповідають умовам стійкості та забезпечують глобальний мінімум показника якості системи.

У реальних системах більшість параметрів визначають із технічних та інших умов, тому оптимізація виконується не більш ніж для двох-трьох параметрів (коефіцієнт підсилення розімкненої системи, коефіцієнт підсилення та постійні часу корегувального пристрою). У складних випадках, наприклад коли система рівнянь (5.14) не може бути розв'язана аналітично, використовують чисельні методи оптимізації з застосуванням пакетів прикладних програм.

5.5. Вказівки до виконання роботи

5.5.1. Аналітичні розрахунки інтегральних оцінок САК I_2 , I_3 за допомогою пакета Matlab

Система, схема математичної моделі якої наведена на рис. 5.5 і для якої оптимізується величина коефіцієнта підсилення розімкненої системи K , має таку передаточну функцію в розімкненому стані $R(p)$:

$$R(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)} = \frac{K}{p(0,5p + 1)}. \quad (5.15)$$

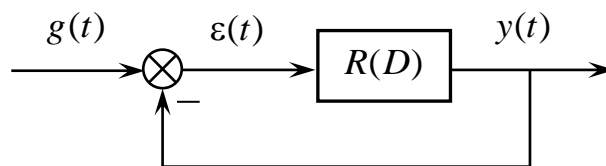


Рис. 5.5

Еталонна перехідна характеристика $h_e(t)$, із якою порівнюють фактичну перехідну характеристику системи $h(t)$, визначена рівнянням

$$h_e(t) = (1 - e^{-4t}) \cdot 1(t). \quad (5.16)$$

Вона є перехідною характеристикою системи з передаточною функцією $W_e(p)$ першого порядку

$$W_e(p) = \frac{1}{0,25p + 1}. \quad (5.17)$$

Передаточна функція САК, що оптимізується, має другий порядок, тому фактична перехідна характеристика $h(t)$ залежно від величини коефіцієнта підсилення K може мати коливальний характер, на відміну від еталонної, що є монотонною функцією. Тому інтегральна оцінка I_1 не може бути застосована для розв'язання задачі оптимізації.

Внаслідок цього для оптимізації вибору величини K будуть використані інтегральні оцінки I_2 та I_3 . При обчисленні I_3 оберемо $\tau = 0,5$ с.

Для розрахунку обраних оцінок спочатку необхідно визначити перетворення Лапласа $Z(p)$ функції $z(t) = h_e(t) - h(t)$:

$$\begin{aligned} Z(p) &= H_e(p) - H(p) = \frac{1}{p} [W_e(p) - W(p)] = \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{0,25p + 1} - \frac{1}{(0,5/K)p^2 + (1/K)p + 1} \right) = \\ &= \frac{(0,5/K)p + (1/K) - 0,25}{(0,125/K)p^3 + (0,75/K)p^2 + (0,25 + 1/K)p + 1}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

де $W(p) = \frac{R(p)}{1 + R(p)}$ – передаточна функція замкненої системи.

Для розрахування оцінки I_3 відповідно до виразу (5.12) необхідно знайти перетворення Лапласа функції $z'(t)$. Для цього використовують співвідношення (5.13) з урахуванням того, що $z(0) = 0$:

$$Z_1(p) = \frac{(0,5/K)p^2 + (1/K - 0,25)p}{(0,125/K)p^3 + (0,75/K)p^2 + (0,25 + 1/K)p + 1}. \quad (5.19)$$

Отже, підготовча частина для розрахування інтегральних оцінок I_2 , I_3 за допомогою Matlab виконана.

Після цього запусити програмну оболонку Matlab, потім у командному вікні (**Command Window**) відповідно до виразів (5.12), (5.18), (5.19) набрати

```
K = k;
Z = tf([0.5/K ,1/K - 0.25],[0.125/K,0.75/K,0.25 + 1/K,1]);
Z1 = tf([1,0],[1]);Z1 = Z1 * Z;
I2 = norm(Z) ^ 2
I3 = I2 + 0.5 ^ 2 * norm(Z1) ^ 2
```

де k – значення, що обирають за верхнім рядком табл. 5.1, і натиснути **Enter**.

Результати розрахунку інтегральних оцінок I_2 , I_3 занести до відповідних граф табл. 5.1.

Побудувати графіки залежностей розрахованих інтегральних оцінок I_2 , I_3 від коефіцієнта підсилення розімкненої системи K . Визначити оптимальні значення $K_{\text{опт.}I_2}^{\text{розр}}$ та $K_{\text{опт.}I_3}^{\text{розр}}$, що забезпечують мінімум оцінок I_2 , I_3 , і занести їх до табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Результати аналітичних розрахунків та експериментальних досліджень
інтегральних оцінок I_2, I_3

K, c^{-1}	1	2	3	4	5	6	7	8
$I_2^{\text{розр}}$								
$I_2^{\text{експ}}$								
$I_3^{\text{розр}}$								
$I_3^{\text{експ}}$								
$K_{\text{опт. } I_2}^{\text{розр}} =$								
$K_{\text{опт. } I_2}^{\text{експ}} =$								
$K_{\text{опт. } I_3}^{\text{розр}} =$								
$K_{\text{опт. } I_3}^{\text{експ}} =$								

5.5.2. Експериментальні дослідження інтегральних оцінок САК і визначення оптимальних значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи

Дослідження проводять за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає в отриманні перехідної характеристики САК, порівнянні її з еталонною перехідною характеристикою для отримання функцій $z(t)$ і $z'(t)$, безпосередньому інтегруванні за виразами (5.3), (5.4) і реєстрації інтегральних оцінок I_2, I_3 за допомогою осцилографа для декількох значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи K .

Відкрити файл **I_O_opt**. Схему проведення експерименту в пакеті Simulink зображено на рис. 5.6. Вона складається з датчика входних дій –

одиночної функції (**Step**), моделі САК (**Transfer Fcn**), моделі для отримання еталонної перехідної характеристики (**Transfer Fcn1**), блоків для розрахунку інтегральних оцінок I_2 , I_3 та віртуального двоканального осцилографа (**Scope**).

На верхньому екрані осцилографа спостерігають оцінки I_2 , I_3 (I_3 більша за величиною, ніж I_2). На нижньому екрані спостерігають еталонну перехідну характеристику $h_e(t)$ (монотонна функція, бузковий колір), фактичну перехідну характеристику $h(t)$ (блакитний колір) і їхню різницю $z(t)$ (жовтий колір).

Для підвищення точності моделювання в командному рядку натиснути кнопку **Simulation**, відкрити вікно **Configuration Parameters** і встановити відносну точність **Relative Tolerance** рівною $1e^{-6}$.

Провести дослідження інтегральних оцінок для значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи K з табл. 5.1. Для цього у вікні блока **Gain** спочатку встановити значення підсилення рівним **1**, запустити імітацію процесу функціонування натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів, після чого у верхньому вікні **Scope** спостерігати оцінки I_2 , I_3 , а у нижньому – функції $h_e(t)$, $h(t)$ та $z(t)$. Значення оцінок, що відповідають кінцевому часу моделювання, занести до табл. 5.1.

Побудувати графіки експериментальних залежностей оцінок I_2 та I_3 від величини коефіцієнта підсилення розімкненої системи K в одних координатних осях із графіками відповідних оцінок, що отримані за результатами аналітичних розрахунків.

За результатами експериментальних досліджень визначити оптимальні значення $K_{\text{опт. } I_2}^{\text{експ}}$ і $K_{\text{опт. } I_3}^{\text{експ}}$ коефіцієнта підсилення розімкненої системи, що мінімізують показники якості I_2 , I_3 , і занести їх до табл. 5.1.

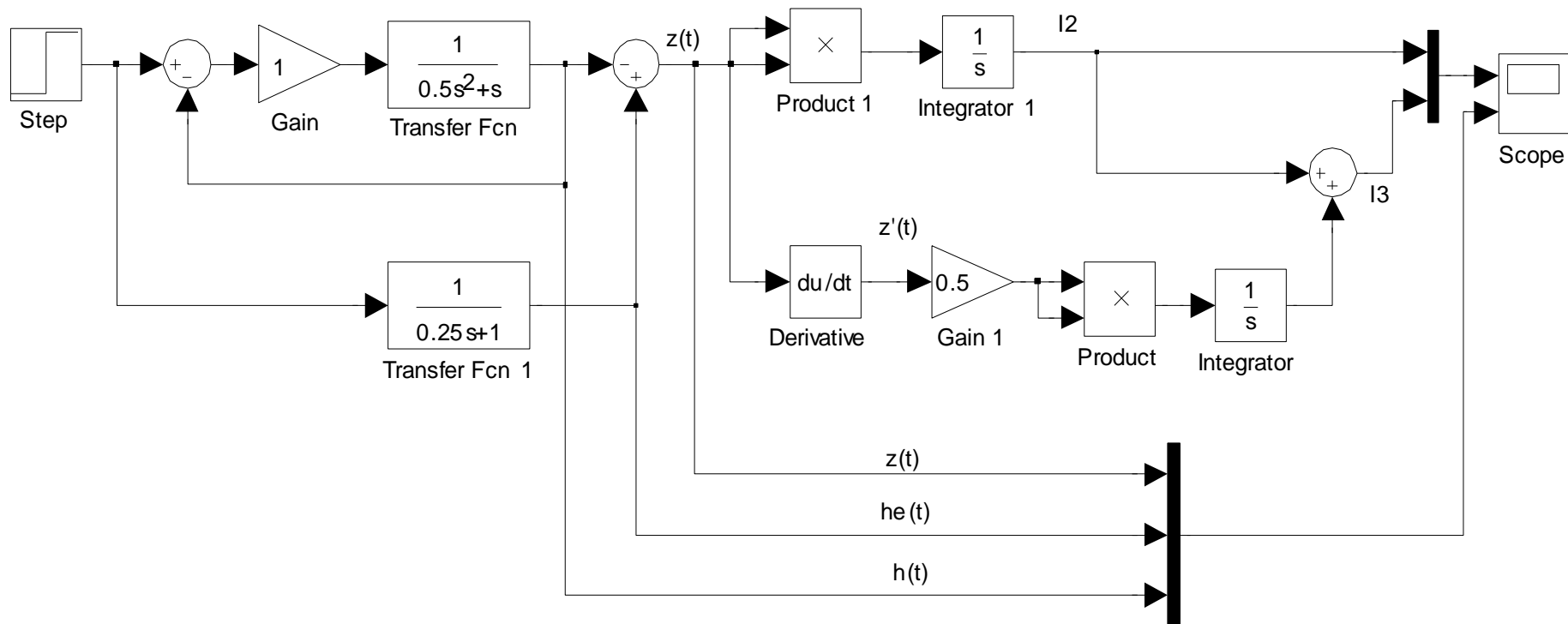


Рис. 5.6. Схема проведения эксперименту

Зіставити результати аналітичних розрахунків $K_{\text{опт. } I_2}^{\text{розр}}$, $K_{\text{опт. } I_3}^{\text{розр}}$ і результати $K_{\text{опт. } I_2}^{\text{експ}}$, $K_{\text{опт. } I_3}^{\text{експ}}$ експериментальних досліджень.

Зробити висновок про співвідношення оптимальних значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи для обох оцінок I_2 , I_3 та обґрунтувати цю розбіжність.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Схема математичної моделі системи (рис. 5.5) із виразом (5.15) передаточної функції розімкненої системи $R(p)$.
3. Схема проведення експерименту (рис. 5.6).
4. Графік еталонної перехідної характеристики $h_e(t)$.
5. Таблиця (табл. 5.1) із результатами аналітичних і експериментальних досліджень інтегральних оцінок I_2 та I_3 .
6. Графіки аналітичних і експериментальних залежностей інтегральних оцінок I_2 , I_3 від величини коефіцієнта підсилення розімкненої системи K , що побудовані в одних координатних осях.
7. Висновки за результатами досліджень.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі оптимізації САК з фіксованою структурою.
2. Як знаходять екстремум функції одного змінного?
3. Які необхідні і достатні умови екстремуму функції багатьох змінних?

4. Які існують методи оцінювання якості САК у перехідному режимі?

5. У чому полягає різниця між інтегральними методами оцінювання якості САК у перехідному режимі та прямим методом і непрямим частотним методом?

6. Які існують основні види інтегральних оцінок?

7. У чому полягає основна перевага лінійної інтегральної оцінки?

8. Який основний недолік лінійної інтегральної оцінки?

9. У чому полягає основна перевага квадратичної інтегральної оцінки?

10. Який основний недолік квадратичної інтегральної оцінки?

11. У чому полягає основна перевага поліпшеної квадратичної інтегральної оцінки?

12. Які існують методи розрахунку основних видів інтегральних оцінок?

6. Дослідження оптимального за швидкістю керування лінійним стаціонарним об'єктом 1

6.1. Мета роботи

1. Засвоїти постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування об'єктом.

2. Ознайомитися з методикою синтезу керування об'єктом, оптимального за швидкістю, на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

3. Дослідити процеси в системі при керуванні, оптимальним за швидкістю, і зробити рекомендації для практичного застосування.

6.2. Програма роботи

1. Синтез та аналітичне дослідження оптимального за швидкістю керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.

2. Експериментальне дослідження фазових траєкторій лінійного стаціонарного об'єкта 1 при керуванні, що є оптимальним за швидкістю.

6.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [2, 10-16] і конспектом лекцій у позааудиторний час ознайомитися з метою та вивчити:

– програму і вказівки до виконання роботи;

– теоретичні положення за темою роботи: постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування; формулювання принципу максимуму Л. С. Понтрягіна; умови, достатні для існування оптимального керування; постановку та розв'язання задачі синтезу

оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

2. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
3. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

6.4. Короткі відомості з теорії

6.4.1. Коротка характеристика задачі оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих задач, при розв'язанні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань потребують мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають на меті досягнення найбільшої точності відтворення задавальної дії. Також ставлять завдання мінімальних витрат енергії для досягнення поставленої мети. Багато випадків, коли необхідно задовольнити низку суперечливих вимог. Усі такі завдання належать до класу задач оптимального керування.

Загальною для таких систем є вимога створення такої сукупності керуючих дій, за яких досягнене екстремальне значення деякого показника якості. ***САК, що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називається оптимальною в тому самому сенсі*** (наприклад за швидкодією, квадратичним показником якості та ін.).

Правило, за допомогою якого вибирають екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається критерієм оптимальності цієї системи [2, 10-16].

До змісту ***задачі синтезу оптимального керування входять*** такі вихідні дані [2, 10-13]:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) зовнішні дії;

- 3) мету керування;
- 4) показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) обмеження, накладені на величини дій і об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування за накладених обмежень і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Завдання такого класу належать до варіаційних задач оптимального керування. Застосування методів теорії варіаційного числення потребує цілком певної математичної формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

6.4.2. Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом

Математичну модель об'єкта керування задають за допомогою системи диференціальних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним і стаціонарним, систему диференціальних рівнянь стану записують у такій векторно-матричній формі [2, 10-16]:

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (6.1)$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$ – n -мірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ – k -мірний вектор керування;

\mathbf{A} – $n \times n$ постійна матриця стану;

\mathbf{B} – $n \times k$ постійна матриця керування.

Мету керування формулюють як переведення об'єкта з деякого початкового стану $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ у кінцевий стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$. Початковий і кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача з закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями).

Моменти початку та закінчення керування також можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування) [2, 14-16].

Показник якості керування J подано як функціонал – величина, чисельне значення якої залежить від вибору вектора керування $\mathbf{u}(t)$, вектора стану $\mathbf{z}(t)$ і часу керування (дод. 4),

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (6.2)$$

де $\Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k]$ – показник якості наприкінці керування;

$L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа, або лагранжіан).

Критерій оптимальності керування полягає в досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)}. \quad (6.3)$$

Обмеження накладають у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об'єкта. Їх задають у вигляді умов належності векторів $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ до деяких множин

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t. \quad (6.4)$$

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовують методи теорії варіаційного числення. Один із методів заснований на принципі максимуму Л. С. Понтрягіна [2, 10-16]. Він дає умови, накладені на оптимальне керування (дод. 5). Ці умови необхідні, але в загальному випадку не є достатніми.

Квадратичний показник якості керування є окремим випадком функціонала якості (6.2), детально розглянутий у дод. 4.

Специфіка застосування принципу максимуму для задач із квадратичним показником якості наведена в дод. 6.

6.5. Вказівки до виконання роботи

6.5.1. Синтез і аналітичне дослідження оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом 1

Постановка задачі

Динаміка об'єкта керування описана диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (рис. 6.1)

$$y''(t) = K_a u(t), \quad (6.5)$$

де $y(t)$ – вихідна величина;

$u(t)$ – керуюча дія;

K_a – коефіцієнт підсилення.

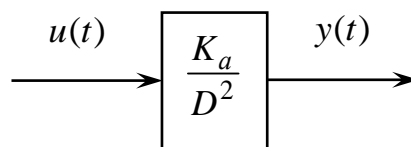


Рис. 6.1. Схема математичної моделі об'єкта керування

Максимальна величина керуючої дії $u(t)$ обмежена значенням u_{\max}

$$|u(t)| \leq u_{\max}. \quad (6.6)$$

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ в кінцевий стан $y(t_k) = 0$, $y'(t_k) = 0$, де $t_0 = 0$ – фіксований момент початку, t_k – нефіксований момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімальний час керування $T = t_k - t_0$:

$$J = t_k - t_0 = T \rightarrow \min, \quad (6.7)$$

$$u \in u_t$$

де u_t – множина припустимих керувань.

Знайти і проаналізувати закон оптимального керування.

Математична формалізація задачі

Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t). \quad (6.8)$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$, $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k) = 0$, $z_2(t_k) = 0$.

Система диференціальних рівнянь стану має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= K_a u(t). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Звідси нескладно встановити, що матриці стану \mathbf{A} і керування \mathbf{B} матричного рівняння стану (6.1) дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ K_a \end{vmatrix}.$$

Показник якості керування (6.2) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$J = \int_{t_0}^{t_K} L[\mathbf{z}(t), u(t), t] dt = \int_{t_0}^{t_K} 1 \cdot dt = t_K - t_0, \quad (6.10)$$

де $L[\mathbf{z}(t), u(t), t] = 1$ – функція Лагранжа задачі.

Критерій оптимальності керування полягає в досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J = t_K - t_0 \rightarrow \min_{u \in U_t} \quad (6.11)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями за нефіксованого часу закінчення керування (дод. 5).

Перевірка керованості об'єкта та вибір методу розв'язання

З метою аналізу керованості об'єкта (дод. 7) розглянемо матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ і $\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{vmatrix}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ K_a \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ K_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_a \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & K_a \\ K_a & 0 \end{vmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -K_a^2 \neq 0. \quad (6.12)$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта. Отже, для заданого об'єкта принцип максимуму дає необхідні і достатні умови оптимальності.

Синтез закону оптимального керування

Щоб скористатися принципом максимуму, запишемо гамільтоніан і канонічну систему диференціальних рівнянь задачі.

Гамільтоніан варіаційної задачі (дод. 5)

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)] = -1 + \psi_1(t) \cdot z_2(t) + \psi_2(t) \cdot K_a \cdot u(t), \quad (6.13)$$

де $\boldsymbol{\psi}(t) = |\psi_1(t), \psi_2(t)|^T$ – вектор спряжених змінних.

Канонічна система диференціальних рівнянь (дод. 5)

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= K_a u(t); \\ \psi_1'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)]}{\partial z_1} = 0; \\ \psi_2'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)]}{\partial z_2} = -\psi_1(t). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Позначимо $z_1^*(t)$, $z_2^*(t)$, $\psi_1^*(t)$ і $\psi_2^*(t)$ функції, що відповідають канонічній системі рівнянь при $u(t) = u^*(t)$, а також початковим і граничним умовам. Тоді

$$H[\mathbf{z}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), u(t)] = -1 + \psi_1^*(t) z_2^*(t) + K_a \psi_2^*(t) u(t). \quad (6.15)$$

Звідси випливає, що максимальне значення гамільтоніана досягнений лише в тому випадку, коли керування обирають як

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) > 0; \\ -u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) < 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Якщо скористатися функцією перемикання sgn

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (6.17)$$

знайдений закон оптимального керування можна записати як

$$u^*(t) = u_{\max} \text{sgn}(\psi_2^*(t)). \quad (6.18)$$

Аналіз закону керування, оптимального за швидкістю

Для проведення аналізу знайдемо розв'язок канонічної системи (6.14) для спряжених змінних:

$$\begin{aligned} \psi_1^*(t) &= C_1; \\ \psi_2^*(t) &= -C_1 t + C_2, \end{aligned} \quad (6.19)$$

де C_1 і C_2 – деякі константи.

Константи C_1 і C_2 не можуть одночасно дорівнювати нулю. За третьою умовою принципу максимуму для задачі з закріпленими кінцями при нефіксованому часі закінчення керування (дод. 5, табл. Д.5.1),

$$H^*(t_k) = 0. \quad (6.20)$$

Отже, при $t = t_k$ з урахуванням виразів (6.15), (6.19), (6.20) має бути виконано співвідношення

$$-1 + K_a(C_2 - C_1 t_k) u^*(t_k) = 0.$$

Це співвідношення не задовольняється при $C_1 = C_2 = 0$.

Якщо константи C_1 і C_2 одночасно не дорівнюють нулю, тоді лінійна функція

$$\psi_2^*(t) = C_2 - C_1 t$$

може дорівнювати нулю не більше одного моменту часу на інтервалі часу керування.

На рис. 6.2 наведено чотири можливих види графіків функції ψ_2^* і графіки відповідних їм програм оптимального керування $u^*(t)$. З графіків можна зробити висновок, що *оптимальним є кусково-постійне керування, що набуває значення $+u_{\max}$ або $-u_{\max}$ і змінює знак не більше одного разу на всьому інтервалі керування від t_0 до t_k .*

Синтез оптимальної системи керування

Щоб за відомою програмою оптимального керування (6.16) синтезувати оптимальну систему керування, скористаємося диференціальними рівняннями стану об'єкта (6.9), для координат якого відомі початкові і граничні умови.

Визначимо характер руху об'єкта на інтервалі часу, коли $u(t) = u_{\max}$. На цьому інтервалі рух об'єкта описаний системою рівнянь

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= K_a u_{\max}. \end{aligned}$$

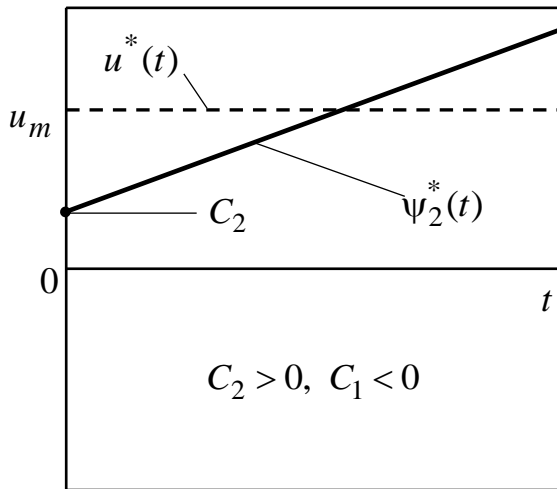
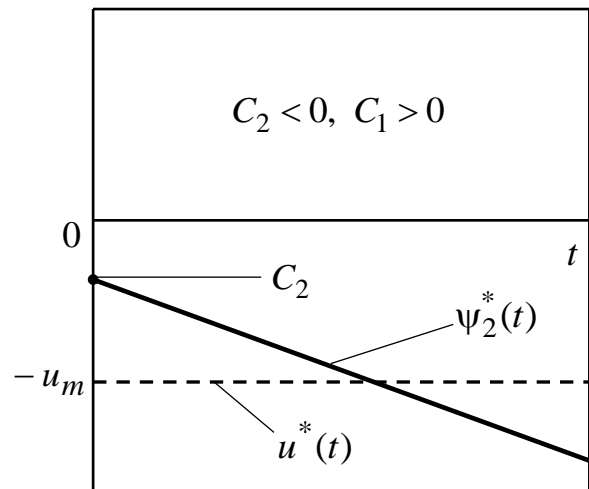
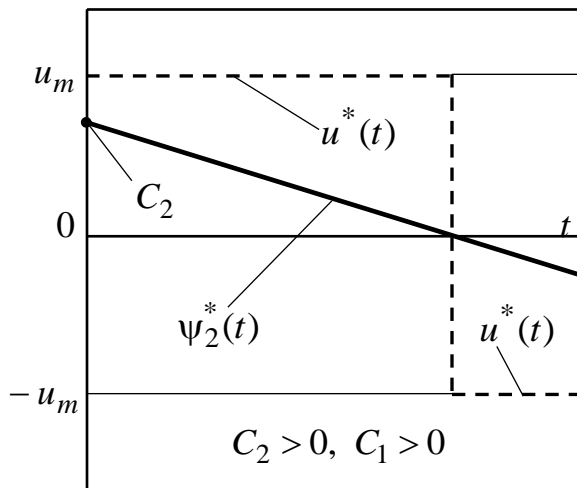
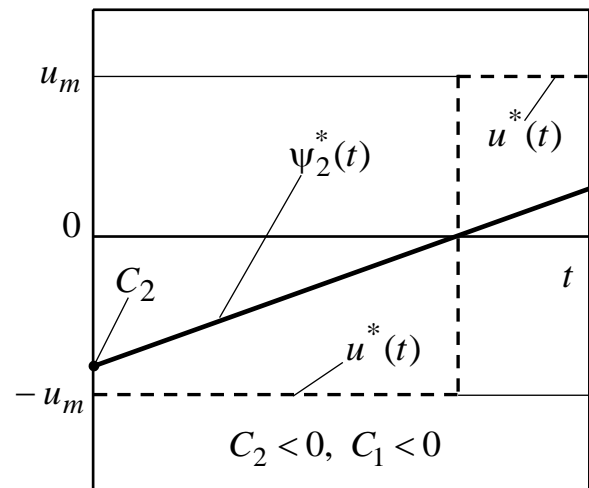
$\Psi_2^*(t), u^*(t)$  $\Psi_2^*(t), u^*(t)$  $\Psi_2^*(t), u^*(t)$  $\Psi_2^*(t), u^*(t)$ 

Рис. 6.2. Чотири можливих види графіків функцій $\Psi_2^*(t)$ і відповідних їм програм оптимального керування $u^*(t)$

Розв'язок цієї системи має такий вигляд:

$$z_2^2 = 2K_a u_{\max} z_1 + (\xi_2^2 - 2K_a u_{\max} \xi_1), \quad (6.21)$$

де ξ_1, ξ_2 – координати стану об’єкта в момент початку руху об’єкта при $u(t) = u_{\max}$.

Аналогічно розраховують фазові траєкторії об’єкта за керування $u(t) = -u_{\max}$:

$$z_2^2 = -2K_a u_{\max} z_1 + \left(\zeta_2^2 + 2K_a u_{\max} \zeta_1 \right), \quad (6.22)$$

де ζ_1, ζ_2 – координати стану об’єкта в момент початку руху об’єкта при $u(t) = -u_{\max}$.

Рівняння (6.21) і (6.22) визначають на фазовій площині два сімейства парабол (рис. 6.3). Параболи першого сімейства зображені суцільними лініями, а параболи другого сімейства – пунктирними лініями. Параболи, що належать одному сімейству, розрізняються значеннями початкових координат стану ξ_1, ξ_2 та ζ_1, ζ_2 відповідно.

На фазових траєкторіях стрілками вказані напрямки руху точки: при $z_2 = y' > 0$ точка рухається по траєкторії так, що величина $z_1 = y$ збільшується; навпаки, якщо $z_2 = y' < 0$, тоді рух точки здійснюється в бік зменшення значень $z_1 = y$.

Розгляд фазового портрета руху об’єкта керування дає змогу зробити висновки:

1. Кожне сімейство парабол містить тільки одну гілку фазової траєкторії, рухаючись вздовж якої, точка може прийти до початку координат ($z_1 = z_2 = 0$), що відповідає меті керування: при $u(t) = -u_{\max}$ до реалізації мети керування призводить рух вздовж дуги $A0$ параболи $A0A'$ сімейства (6.22); при $u(t) = u_{\max}$ – рух вздовж дуги $B0$ параболи $B0B'$ сімейства (6.21).

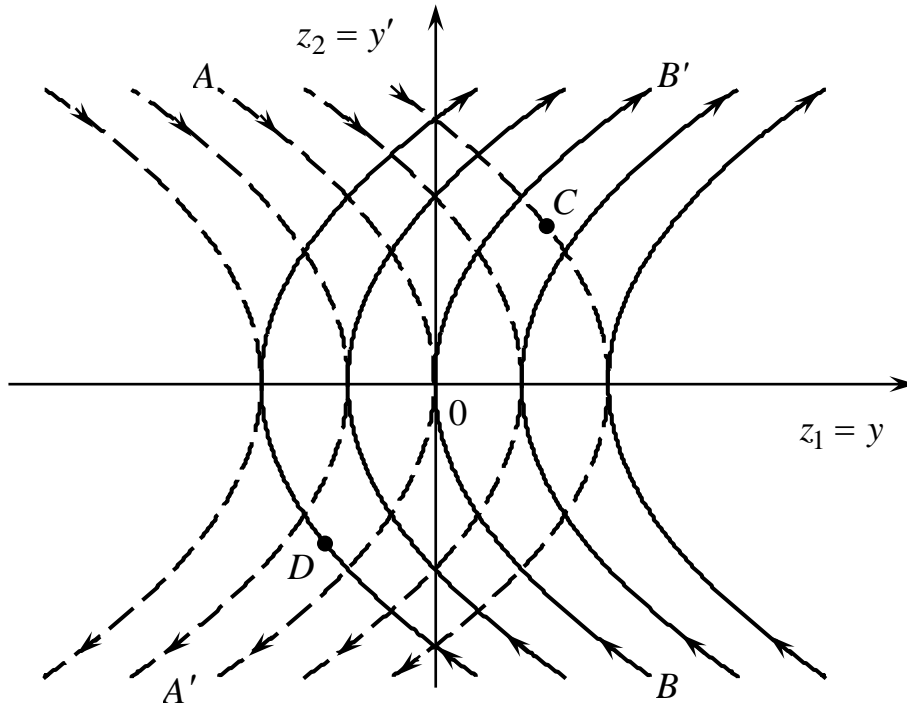


Рис. 6.3. Два сімейства фазових траєкторій об'єкта, що відповідають керуванню $u(t) = +u_{\max}$ (суцільна лінія) і керуванню $u(t) = -u_{\max}$ (пунктирна лінія)

2. Якщо початковий стан об'єкта керування такий, що точка не лежить на лінії $A0B$ (точка C або D на рис. 6.3), тоді для реалізації руху об'єкта до початку координат за мінімальний час необхідно так обрати знак керуючої дії, щоб із вихідного положення $z_1(t_0) = z_{10}$, $z_2(t_0) = z_{20}$ точка рухалася до лінії $A0B$:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху лежить нижче лінії } A0B; \\ -u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху лежить вище лінії } A0B. \end{cases} \quad (6.23)$$

3. Коли внаслідок прикладення керуючої дії об'єкт перейде до такого стану, що точка буде на лінії $A0B$, необхідно змінити знак керуючої дії на

протилежний, щоб подальший рух точки здійснювався вздовж відповідної гілки лінії $A0B$ до початку координат (мети керування).

Отже, лінія $A0B$ – це *лінія перемикання знака керуючої дії*. За допомогою цієї лінії всю фазову площину можна поділити на дві множини точок, кожній із яких відповідає певний знак керуючої дії.

Розрахуємо рівняння лінії $A0B$. З рівнянь (6.21) і (6.22) отримуємо, що рівняння парабол $B0B'$ і $A0A'$ відповідно мають вигляд

$$z_2^2 = 2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \geq 0; \quad z_2^2 = -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \leq 0.$$

Отже, точки дуги $0B$ задовольняють рівняння

$$z_2 = -\sqrt{2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \geq 0,$$

а точки дуги $A0$ – рівняння

$$z_2 = \sqrt{-2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \leq 0.$$

Можна отримати і єдине рівняння для всієї лінії перемикання $A0B$. Для цього зазначимо, що для точок дуги $0B$

$$|z_2| = \sqrt{2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \geq 0,$$

і внаслідок цього

$$z_2 |z_2| = -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \geq 0. \quad (6.24)$$

Аналогічно для точок дуги $A0$ також справедливо

$$|z_2| = \sqrt{-2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \leq 0,$$

і внаслідок цього

$$z_2 |z_2| = -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \leq 0. \quad (6.25)$$

З урахуванням виразів (6.24) і (6.25) отримуємо загальне рівняння для всіх точок лінії перемикавання $A0B$

$$z_2 |z_2| = -2K_a u_{\max} z_1, \quad -\infty < z_1 < \infty. \quad (6.26)$$

Введемо позначення

$$\sigma(z_1, z_2) = z_2 |z_2| + 2K_a u_{\max} z_1. \quad (6.27)$$

Звідси рівняння лінії перемикавання

$$\sigma(z_1, z_2) = 0. \quad (6.28)$$

З рівнянь (6.27), (6.28) випливає, що $\sigma(z_1, z_2) > 0$ для всіх точок фазової площини, що знаходяться вище лінії перемикавання, $\sigma(z_1, z_2) < 0$ для всіх точок фазової площини, що знаходяться нижче лінії перемикавання. Використовуючи вказану властивість функції $\sigma(z_1, z_2)$, яку можна назвати вирішальною, отриманий закон оптимального керування (6.23) можна представити в такому вигляді:

$$u^*(z_1, z_2) = -u_{\max} \operatorname{sgn}(\sigma(z_1, z_2)). \quad (6.29)$$

Функція $\operatorname{sgn}(\sigma)$ не визначена при $\sigma=0$, тому рівняння (6.29) визначає керуючу дію тільки для станів, яким відповідають точки фазової площини, що не належать лінії перемикавання.

З точки зору технічної реалізації вказане зауваження несуттєво – усі реальні перемикачі мають, хоч і малі, але кінцеві, зони нечутливості.

Структура оптимальної за швидкодією системи керування наведена на рис. 6.4.

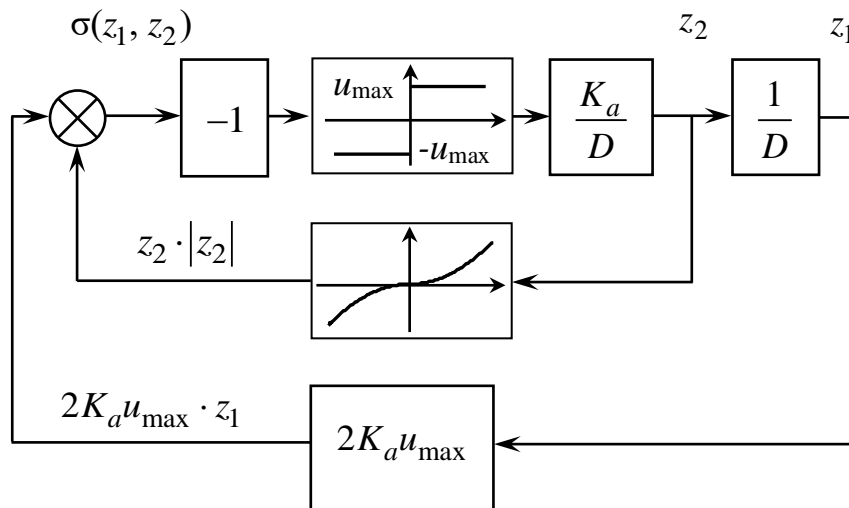


Рис. 6.4. Алгоритмічна структура оптимальної за швидкодією системи керування

Отже, за практичної реалізації оптимальної за швидкодією системи керування об'єктом 1 будуть потрібні два нелінійних блоки: один буде реалізовувати функцію $z_2 |z_2|$, а другий – функцію ідеального реле.

Побудова та аналіз фазових траєкторій

Вважаючи $K_d u_{\max} = 1$, побудувати за допомогою пакета Matlab два сімейства фазових траєкторій, що відповідають керуванню $u(t) = u_{\max}$ і $u(t) = -u_{\max}$ (рис. 6.3). Для цього набрати в командному рядку такі команди:

```
z2 = -5:0.01:5;
```

```
d = 10;
```

```
z1_1 = z2.^2 - 20;
```

```
z1_2 = z1_1 + d;
```

```
z1_3 = z1_2 + d;
```

```
z1_4 = z1_3 + d;
```

```
z1_5 = z1_4 + d;
```

```
z1_1_ = -z2.^2 - 20;
```

```
z1_2_ = z1_1_ + d;
```

```
z1_3_ = z1_2_ + d;
```

```
z1_4_ = z1_3_ + d;
```

```
z1_5_ = z1_4_ + d;
```

```
plot(z1_1, z2, z1_2, z2, z1_3, z2, z1_4, z2, z1_5, z2,  
z1_1_, z2, z1_2_, z2, z1_3_, z2, z1_4_, z2, z1_5_, z2);grid.
```

Занести графіки цих сімейств до звіту, вказати напрямки руху точок вздовж фазових траєкторій і окремо позначити лінію перемикання керування.

6.5.2. Експериментальне дослідження фазових траєкторій лінійного стаціонарного об'єкта 1 при керуванні, що є оптимальним за швидкістю

Дослідження відбувається за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає в реєстрації фазової траєкторії оптимального керування; координат стану та їхніх похідних $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t)$, $z_2'(t) = y''(t)$; оптимального керування $u(t)$, вирішальної функції $\sigma(z_1, z_2)$ і фіксації моменту часу завершення керування (досягнення мети керування).

Відкрити файл **Sv_opt_ker_2_int**. Схему проведення експерименту в пакеті Simulink зображено на рис. 6.5.

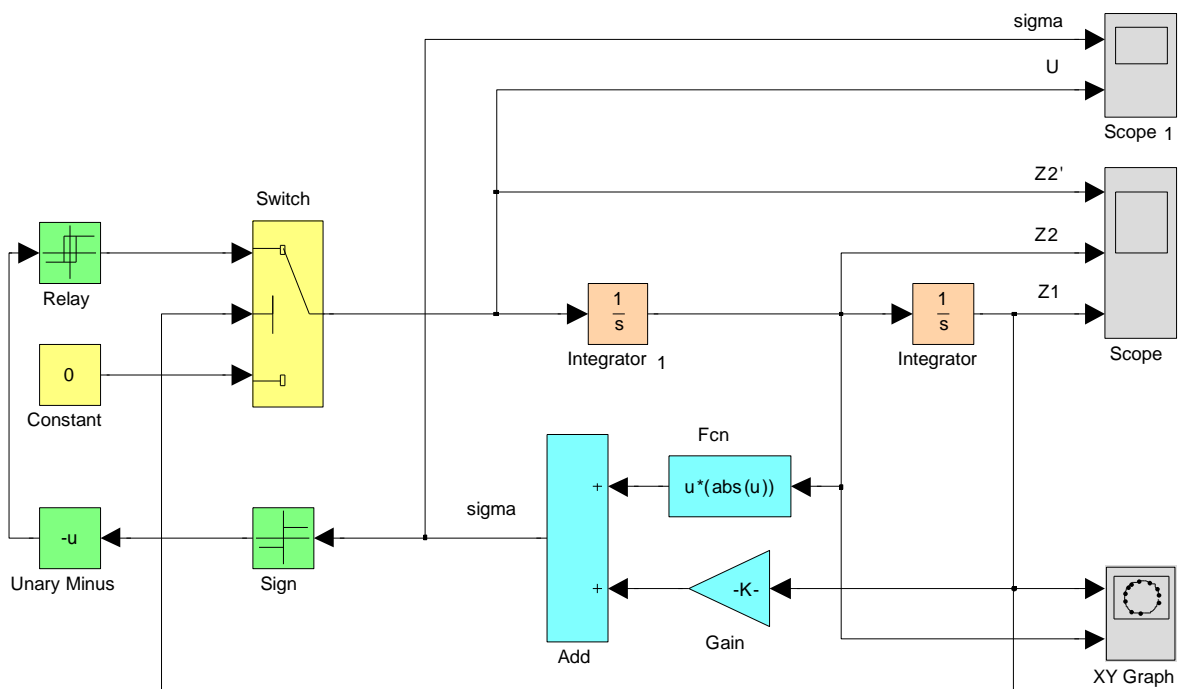


Рис. 6.5. Схема проведення експерименту

Вона складається з моделі САК (**Integrator**, **Integrator1**), блоків розрахунку вирішальної функції $\sigma(z_1, z_2)$ (**Fcn**, **Gain**, **Add**), блоків

формування оптимального керування (**Sign, Unary Minus, Relay**), блоків завершення керування після досягнення мети керування (**Switch, Constant**), графопобудовника (**XY Graph**) і двох віртуальних осцилографів – двоканального і триканального (**Scope1, Scope**).

На верхньому екрані двоканального осцилографа спостерігають вирішальну функцію $\sigma(z_1, z_2)$, на нижньому – оптимальне керування $u(t)$.

На верхньому екрані триканального осцилографа спостерігають похідну координату стану $z_2'(t) = y''(t)$ (прискорення об'єкта), на середньому – координату стану $z_2(t) = y'(t)$ (швидкість об'єкта), нижньому – координату стану $z_1(t) = y(t)$ (координата об'єкта).

Для спостереження фазової траєкторії оптимального керування використовують графопобудовник **XY Graph**.

Для підвищення точності моделювання у вікні Simulink натиснути кнопку **Simulation**, відкрити вікно **Configuration Parameters** і встановити відносну точність **Relative Tolerance** рівною $1e^{-6}$.

У командному рядку Matlab ввести команду

umax = 1.

Встановити початкові умови z_{20} , z_{10} для інтеграторів **Integrator1, Integrator** рівними 0 та 6 відповідно. Ці блоки відкривають двійним натисканням лівою кнопкою миші на відповідному інтеграторі. Початкові умови встановлюють у рядку **Initial Condition**.

Дослідити оптимальне за швидкодією керування заданим об'єктом натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів. За необхідності для зручності спостереження величин на екранах осцилографів натиснути кнопку «**Бінокль**» (**Autoscale**).

Спостерегти фазову траєкторію оптимального керування. Зіставити момент часу зміни знака керуючої дії $u(t)$ у відповідному вікні

осцилографу з виходом фазової траєкторії на лінію перемикачів знака керування $\sigma(z_1, z_2) = 0$ у вікні графопобудовника.

Зіставити кількість змін знака керуючої дії $u(t)$ із порядком заданого об'єкта.

Момент завершення керування фіксують, коли керування $u(t)$ (завдяки перемикачу **Switch**) буде дорівнювати нулю. Занести тривалість інтервалу часу керування T у другий рядок табл. 6.1.

Провести аналогічні дослідження для максимальної величини керуючої дії $u_{\max} = 2, 3, 4, 5$, задаючи її величину в командному рядку Matlab. У кожному дослідженні величину інтервалу часу керування T занести у другий рядок табл. 6.1.

Таблиця 6.1

u_{\max}	1	2	3	4	5
Час керування T, c					

Побудувати графік $T = T(u_{\max})$ експериментальної залежності величини інтервалу часу керування T від максимальної величини керуючої дії u_{\max} , занести його до звіту, зробити висновок.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Рівняння «вхід-вихід» і схема математичної моделі досліджуваного об'єкта керування.

3. Хід і результати аналітичного дослідження: рівняння і графіки двох сімейств фазових траєкторій, що відповідають керуванню $u(t) = u_{\max}$ і $u(t) = -u_{\max}$, з напрямком руху точок вздовж траєкторій; рівняння та графік лінії перемикання знака керування.

4. Схема проведення експерименту.

5. Таблиця і графіки експериментальних залежностей.

6. Висновки з роботи.

Контрольні запитання

1. Поясніть поняття «оптимальне керування».

2. Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?

3. Поясніть поняття «показник якості».

4. Поясніть поняття «функціонал якості».

5. Які форми функціоналів якості застосовують у загальній теорії оптимального керування?

6. Поясніть поняття «критерій оптимальності».

7. Які вихідні дані входять до змісту задачі синтезу оптимального керування?

8. Поясніть поняття «вектор стану».

9. Що зв'язує між собою рівняння стану?

10. Який об'єкт називається керованим?

11. Поясніть поняття «критерій керованості».

12. Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?

13. Як пов'язані поняття стійкості об'єкта і керованості об'єкта?

14. Поясніть поняття «лагранжіан».

15. Поясніть поняття «гамільтоніан».

16. Поясніть поняття «канонічна система рівнянь».
17. Як пов'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?
18. Як пов'язані канонічна система рівнянь і лагранжіан?
19. Як знаходять максимум функції за її аналітичним виразом?
20. Сформулюйте принцип максимуму.
21. У чому полягає специфіка оптимального за швидкістю керування лінійним стаціонарним об'єктом?
22. У якому випадку принцип максимуму дає не тільки необхідні, але і достатні умови існування оптимального керування об'єктом?
23. Чому дорівнює кількість перемикачів керуючої дії при оптимальному за швидкістю керуванні лінійним стаціонарним об'єктом другого порядку?
24. Кривими якого класу є частини фазових траєкторій об'єкта, що складається з двох інтеграторів, при оптимальному за швидкістю керуванні?
25. Як за відомими фазовими траєкторіями об'єкта другого порядку, що відповідають керуванню u_{\max} та $-u_{\max}$, знаходять лінію перемикачів керуючої дії?
26. У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

7. Дослідження оптимального за швидкістю керування лінійним стаціонарним об'єктом 2

7.1. Мета роботи

1. Засвоїти постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування об'єктом.

2. Ознайомитися з методикою синтезу керування об'єктом, оптимального за швидкістю, за принципом максимуму Л. С. Понтрягіна.

3. Дослідити процеси в системі за керування, оптимального за швидкістю, і зробити рекомендації для практичного застосування.

7.2. Програма роботи

1. Синтез та аналітичне дослідження оптимального за швидкістю керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.

2. Експериментальне дослідження фазових траєкторій лінійного стаціонарного об'єкта 2 за керування, оптимального за швидкістю.

7.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [2, 10-16] і конспектом лекцій у позааудиторний час ознайомитися з метою та вивчити:

– програму і вказівки до виконання роботи;

– теоретичні положення за темою роботи: постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування; формулювання принципу максимуму Л. С. Понтрягіна; умови, достатні для існування оптимального керування; постановку та розв'язання задачі синтезу

оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом, за принципом максимуму Л. С. Понтрягіна.

2. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
3. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

7.4. Короткі відомості з теорії

7.4.1. Коротка характеристика задачі оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих задач, при розв'язанні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань потребують мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають на меті досягнення найбільшої точності відтворення задавальної дії. Також ставлять завдання мінімальних витрат енергії для досягнення поставленої мети. Багато випадків, коли необхідно задовольнити низку суперечливих вимог. Усі такі завдання належать до класу задач оптимального керування.

Загальною для таких систем є вимога зі створення такої сукупності керуючих дій, за яких можна досягти екстремального значення деякого показника якості. ***САК, що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називається оптимальною в тому самому сенсі*** (наприклад за швидкодією, квадратичним показником якості та ін.).

Правило, за допомогою якого обирають екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається критерієм оптимальності цієї системи [2, 10-16].

До змісту ***задачі синтезу оптимального керування входять*** такі вихідні дані [2, 10-13]:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) зовнішні діяння;

- 3) мету керування;
- 4) показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) обмеження, накладені на величини дій і об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування за накладених обмежень і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Завдання такого класу належать до варіаційних задач оптимального керування. Застосування методів теорії варіаційного числення потребує цілком певної математичної формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

7.4.2. Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом

Математичну модель об'єкта керування задають системою диференціальних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним і стаціонарним, систему диференціальних рівнянь стану записують у такій векторно-матричній формі [2, 10-16]:

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (7.1)$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$ – n -мірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ – k -мірний вектор керування;

\mathbf{A} – $n \times n$ постійна матриця стану;

\mathbf{B} – $n \times k$ постійна матриця керування.

Мету керування формулюють як переведення об'єкта з деякого початкового стану $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ у кінцевий стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$. Початковий і кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача з закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями).

Моменти початку та закінчення керування також можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування) [2, 10-16].

Показник якості керування J подають як функціонал – величину, чисельне значення якої залежить від вибору вектора керування $\mathbf{u}(t)$, вектора стану $\mathbf{z}(t)$ і часу керування (дод. 4):

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (7.2)$$

де $\Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k]$ – показник якості наприкінці керування;

$L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа, або лагранжіан).

Критерій оптимальності керування полягає в досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)}. \quad (7.3)$$

Обмеження накладають у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об'єкта. Їх задають у вигляді умов належності векторів $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ до деяких множин

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t. \quad (7.4)$$

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовують методи теорії варіаційного числення. Один із методів заснований на принципі максимуму Л. С. Понтрягіна [2, 10-16]. Він дає умови, що накладають на оптимальне керування (дод. 5). Ці умови є необхідними, але загалом недостатніми.

Квадратичний показник якості керування є окремим випадком функціонала якості (7.2), детально розглянутий у дод. 4.

Специфіка застосування принципу максимуму для задач з квадратичним показником якості наведена в дод. 6.

7.5. Вказівки до виконання роботи

7.5.1. Синтез і аналітичне дослідження оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом 2

Постановка задачі

Рух досліджуваного об'єкта керування описаний рівнянням «вхід-вихід» (рис. 7.1)

$$T_M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = K_v u(t), \quad (7.5)$$

де K_v – коефіцієнт підсилення, 1/с;

T_M – постійна часу, с.

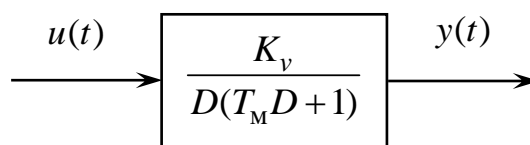


Рис. 7.1. Схема математичної моделі об'єкта керування

Максимальна величина керуючої дії $u(t)$ обмежена значенням u_{\max}

$$|u(t)| \leq u_{\max}. \quad (7.6)$$

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану $y(t_0) = y_0$ $y'(t_0) = y'_0$ в кінцевий стан $y(t_k) = 0$, $y'(t_k) = 0$, де $t_0 = 0$ – фіксований момент початку, а t_k – нефіксований момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімальний час керування $T = t_k - t_0$:

$$J = t_k - t_0 = T \rightarrow \min, \quad (7.7)$$

$$u \in u_t$$

де u_t – множина припустимих керувань.

Знайти і проаналізувати закон оптимального керування.

Математична формалізація задачі

Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$\begin{aligned} z_1(t) &= y(t); \\ z_2(t) &= y'(t). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$, $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k) = 0$, $z_2(t_k) = 0$.

Система диференціальних рівнянь стану має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= -\frac{1}{T_M} z_2 + \frac{1}{T_M} K_V u(t). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Звідси нескладно встановити, що матриці стану \mathbf{A} і керування \mathbf{B} матричного рівняння стану (7.1) дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{T_M} \end{vmatrix}.$$

Показник якості керування (7.2) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), u(t), t] dt = \int_{t_0}^{t_k} 1 \cdot dt = t_k - t_0, \quad (7.10)$$

де $L[\mathbf{z}(t), u(t), t] = 1$ – функція Лагранжа задачі.

Критерій оптимальності керування полягає в досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J = t_k - t_0 \rightarrow \min_{u \in U_t}. \quad (7.11)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями за нефіксованого часу закінчення керування (дод. 5).

Перевірка керованості об'єкта та вибір методу розв'язання

З метою аналізу керованості об'єкта (дод. 7) розглянемо матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ і $\mathbf{M} = |\mathbf{B} \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|$:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{T_M} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{T_M} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{K_v}{T_M} \\ -\frac{K_v}{T_M^2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{K_v}{T_M} \\ \frac{K_v}{T_M} & -\frac{K_v}{T_M^2} \end{vmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -\frac{K_v^2}{T_M^2} \neq 0. \quad (7.12)$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта. Отже, для заданого об'єкта принцип максимуму дає необхідні і достатні умови оптимальності [2, 12-14].

Синтез закону оптимального керування

Щоб скористатися принципом максимуму, запишемо гамільтоніан і канонічну систему диференціальних рівнянь задачі.

Гамільтоніан варіаційної задачі (дод. 5)

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)] = -1 + \psi_1(t)z_2(t) + \psi_2(t) \cdot \left(-\frac{1}{T_M} z_2(t) + \frac{K_v}{T_M} u(t) \right), \quad (7.13)$$

де $\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t)]^T$ – вектор спряжених змінних.

Канонічна система диференціальних рівнянь (дод. 5)

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= F_1[\mathbf{z}(t), u(t)] = z_2(t); \\ z_2'(t) &= F_2[\mathbf{z}(t), u(t)] = -\frac{1}{T_M} z_2(t) + \frac{K_v}{T_M} u(t); \\ \psi_1'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)]}{\partial z_1} = 0; \\ \psi_2'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)]}{\partial z_2} = -\psi_1(t) + \frac{1}{T_M} \psi_2(t). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Позначимо $z_1^*(t)$, $z_2^*(t)$, $\psi_1^*(t)$ і $\psi_2^*(t)$ функції, що задовольняють канонічну систему рівнянь при $u(t) = u^*(t)$, а також початкові і граничні умови. Тоді

$$H\left[\mathbf{z}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), u(t)\right] = -1 + \psi_1^*(t)z_2^*(t) + \psi_2^*(t) \cdot \left(-\frac{1}{T_M} z_2^*(t) + \frac{K_v}{T_M} u(t)\right). \quad (7.15)$$

Звідси випливає, що максимального значення гамільтоніана можна досягти лише в тому випадку, коли керування обирають

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) > 0; \\ -u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) < 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Якщо скористатися функцією перемикання sgn

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (7.17)$$

знайдений закон оптимального керування можна записати так:

$$u^*(t) = u_{\max} \text{sgn}\left(\psi_2^*(t)\right). \quad (7.18)$$

Аналіз закону керування, оптимального за швидкістю

Для проведення аналізу знайдемо розв'язок канонічної системи (7.14) для спряжених змінних:

$$\begin{aligned}\psi_1^*(t) &= C_1; \\ \psi_2^*(t) &= -C_1 t + C_2 \exp\left(\frac{t}{T_M}\right),\end{aligned}\tag{7.19}$$

де C_1 і C_2 – деякі константи.

Константи C_1 і C_2 не можуть одночасно дорівнювати нулю. За третьою умовою принципу максимуму для задачі з закріпленими кінцями, за нефіксованого часу закінчення керування (дод. 5, табл. Д.5.1)

$$H^*(t_k) = 0.\tag{7.20}$$

Отже, при $t = t_k$ з урахуванням виразів (7.15), (7.19), (7.20) має бути виконано співвідношення

$$-1 + \frac{K_v}{T_M} \left(-C_1 t + C_2 \exp\left(\frac{t}{T_M}\right) \right) u^*(t_k) = 0.$$

Це співвідношення не задовольняється при $C_1 = C_2 = 0$.

Якщо константи C_1 і C_2 одночасно не дорівнюють нулю, тоді монотонна функція

$$\psi_2^*(t) = -C_1 t + C_2 \exp\left(\frac{t}{T_M}\right)$$

може дорівнювати нулю не більш одного моменту часу на інтервалі часу керування, що ще раз свідчить про нормальність задачі оптимального керування заданим об'єктом.

На рис. 7.2 наведені чотири можливі види графіків функції ψ_2^* і графіки відповідних їм програм оптимального керування $u^*(t)$. З графіків

ВИПЛИВАЄ, ЩО *оптимальним є кусково-постійне керування, що набуває значення $+u_{\max}$ або $-u_{\max}$ і змінює знак не більше одного разу на всьому інтервалі керування від t_0 до t_K .*

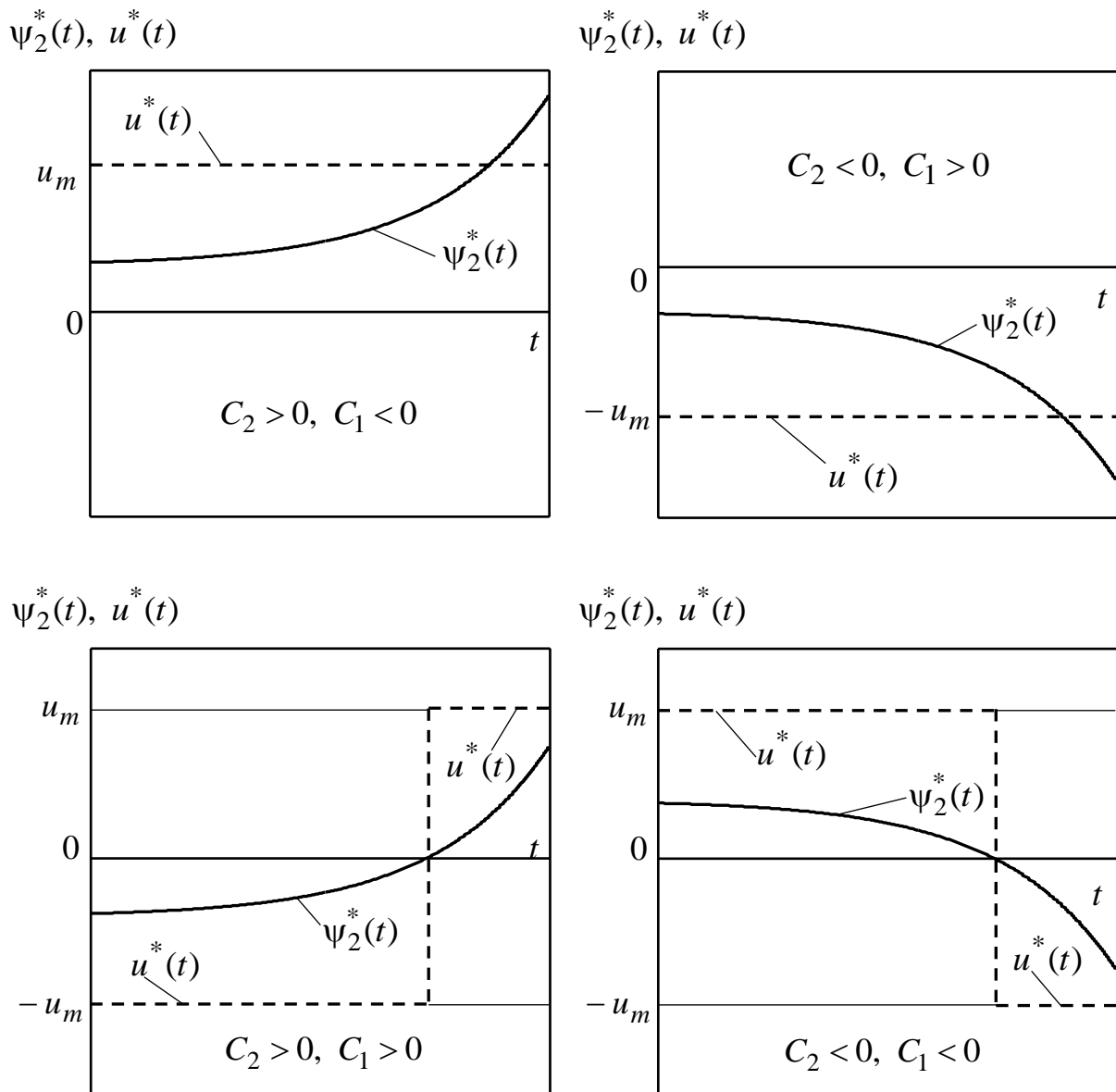


Рис. 7.2. Чотири можливі види графіків функцій $\psi_2^*(t)$ і відповідних їм програм оптимального керування $u^*(t)$

Синтез оптимальної системи керування

Щоб за відомою програмою оптимального керування (7.18) здійснити синтез оптимальної системи керування, скористаємося диференціальними рівняннями стану об'єкта (7.9), для координат якого відомі початкові і граничні умови.

Визначимо характер руху об'єкта на інтервалі часу, коли $u(t) = u_{\max}$. На цьому інтервалі рух об'єкта описаний системою рівнянь

$$\begin{aligned}z_1'(t) &= z_2(t); \\z_2'(t) &= -\frac{1}{T_M} z_2(t) + \frac{K_v}{T_M} u(t).\end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи має такий вигляд:

$$\begin{aligned}z_1 &= -TK_v u_{\max} \left(\ln |z_2 - K_v u_{\max}| - \ln |\xi_2 - K_v u_{\max}| \right) - \\ &\quad -Tz_2 + T\xi_2 + \xi_1,\end{aligned}\tag{7.21}$$

де ξ_1, ξ_2 – координати стану об'єкта в момент початку руху об'єкта при $u(t) = u_{\max}$.

Аналогічно знаходять фазові траєкторії об'єкта при керуванні $u(t) = -u_{\max}$:

$$\begin{aligned}z_1 &= TK_v u_{\max} \left(\ln |z_2 + K_v u_{\max}| - \ln |\zeta_2 + K_v u_{\max}| \right) - \\ &\quad -Tz_2 + T\zeta_2 + \zeta_1,\end{aligned}\tag{7.22}$$

де ζ_1, ζ_2 – координати стану об'єкта в момент початку руху об'єкта при $u(t) = -u_{\max}$.

Рівняння (7.21) і (7.22) визначають на фазовій площині два сімейства кривих (рис. 7.3).

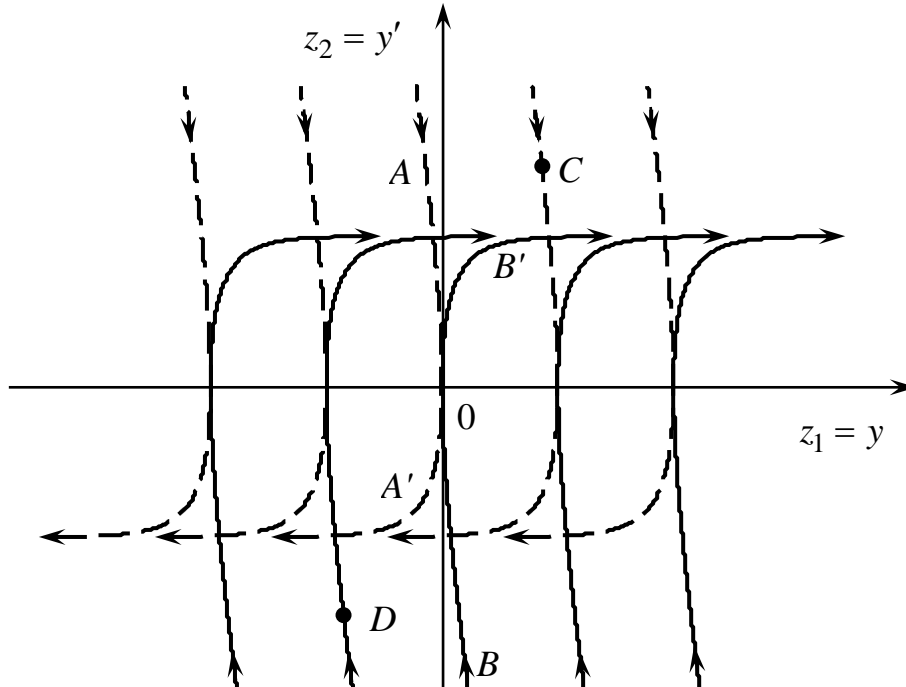


Рис. 7.3. Два сімейства фазових траєкторій об'єкта, що відповідають керуванню $u(t) = +u_{\max}$ (суцільна лінія) і керуванню $u(t) = -u_{\max}$ (пунктирна лінія)

Криві першого сімейства зображені суцільними лініями, а криві другого сімейства – пунктирними лініями. Криві, що належать одному сімейству, розрізняються значеннями початкових координат стану ξ_1 , ξ_2 та ζ_1 , ζ_2 відповідно.

На фазових траєкторіях стрілками вказані напрямки руху точки: при $z_2 = y' > 0$ точка рухається по траєкторії так, що величина $z_1 = y$ збільшується; і навпаки, якщо $z_2 = y' < 0$, тоді рух точки здійснюється в бік зменшення значень $z_1 = y$.

Розгляд фазового портрета руху об'єкта керування дозволяє зробити висновки:

1. Кожне сімейство кривих містить тільки одну гілку фазової траєкторії, рухаючись вздовж якої точка може прийти до початку координат ($z_1 = z_2 = 0$), що відповідає меті керування: при $u(t) = -u_{\max}$ до реалізації мети керування призводить рух вздовж дуги $A0$ кривій $A0A'$ сімейства (7.22); при $u(t) = u_{\max}$ – рух вздовж дуги $B0$ кривій $B0B'$ сімейства (7.21).

2. Якщо початковий стан об'єкта керування такий, що точка не лежить на лінії $A0B$ (точка C або D на рис. 7.3), тоді для реалізації руху об'єкта до мети керування (початку координат) за мінімальний час необхідно так обрати знак керуючої дії, щоб із вихідного положення $z_1(t_0) = z_{10}$, $z_2(t_0) = z_{20}$ точка рухалася до лінії $A0B$:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху лежить нижче лінії } A0B, \\ -u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху лежить вище лінії } A0B. \end{cases} \quad (7.23)$$

3. Коли внаслідок прикладення керуючої дії об'єкт перейде до такого стану, що точка буде на лінії $A0B$, необхідно змінити знак керуючої дії на протилежний для того, щоб подальший рух точки здійснювався вздовж відповідної гілки лінії $A0B$ до початку координат (мети керування).

Отже, лінія $A0B$ – це *лінія перемикання знака керуючої дії*. За допомогою цієї лінії всю фазову площину можна поділити на дві множини точок, кожній із якої відповідає певний знак керуючої дії.

Знайдемо рівняння лінії перемикання $A0B$. З рівнянь (7.21) і (7.22) отримуємо, що рівняння кривих $B0B'$ і $A0A'$ відповідно мають вигляд

$$\begin{aligned} z_1 &= -Tz_2 - TK_v u_{\max} \ln|z_2 - K_v u_{\max}| + TK_v u_{\max} \ln|K_v u_{\max}|, & z_2 \leq 0; \\ z_1 &= -Tz_2 + TK_v u_{\max} \ln|z_2 + K_v u_{\max}| - TK_v u_{\max} \ln|K_v u_{\max}|, & z_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Отримуємо також і загальне рівняння для всіх точок лінії перемикавання $A0B$

$$z_1 = -Tz_2 + TK_v u_{\max} \operatorname{sgn}(z_2) \ln \left(1 + \frac{|z_2|}{K_v u_{\max}} \right). \quad (7.24)$$

Після цього легко отримуємо рівняння $\sigma(z_1, z_2) = 0$ для лінії перемикавання

$$\sigma(z_1, z_2) = z_1 + Tz_2 - TK_v u_{\max} \operatorname{sgn}(z_2) \ln \left(1 + \frac{|z_2|}{K_v u_{\max}} \right) = 0. \quad (7.25)$$

З рівнянь (7.21), (7.22) випливає, що $\sigma(z_1, z_2) > 0$ для всіх точок фазової площини, які знаходяться вище лінії перемикавання, і $\sigma(z_1, z_2) < 0$ для всіх точок фазової площини, що знаходяться нижче лінії перемикавання. Використовуючи вказану властивість функції $\sigma(z_1, z_2)$, яку можна назвати вирішальною, знайдений закон оптимального керування (7.18) можна подати в такому вигляді:

$$u^*(z_1, z_2) = -u_{\max} \operatorname{sgn}(\sigma(z_1, z_2)). \quad (7.26)$$

Функція $\operatorname{sgn}(\sigma)$ не визначена при $\sigma = 0$, тому рівняння (7.26) визначає керуючу дію тільки для станів, яким відповідають точки фазової площини, що не належать лінії перемикавання.

З точки зору технічної реалізації вказане зауваження несуттєво – усі реальні перемикачі мають хоч і малі, але кінцеві зони нечутливості.

Структура оптимальної за швидкодією системи керування наведена на рис. 7.4.

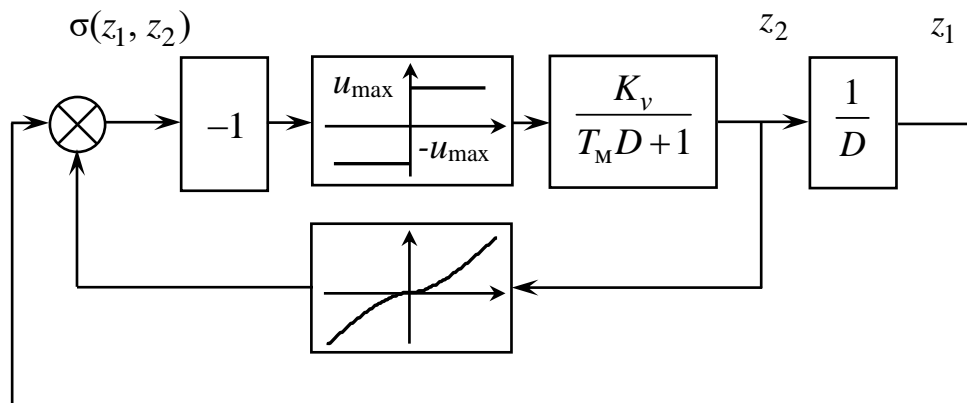


Рис. 7.4. Алгоритмічна структура оптимальної за швидкістю системи керування

Побудова та аналіз фазових траєкторій

Вважаючи $T_M = K_v u_{\max} = 1$ с, побудувати за допомогою пакета Matlab два сімейства фазових траєкторій, що відповідають керуванню $u(t) = u_{\max}$ і $u(t) = -u_{\max}$ (рис. 7.3). Для цього набрати в командному рядку такі команди:

```

z2 = -2:0.001:0.999;
d = 4;
z1_1 = -z2 - log(abs(z2 - 1)) - 8;
z1_2 = z1_1 + d;
z1_3 = z1_2 + d;
z1_4 = z1_3 + d;
z1_5 = z1_4 + d;
z2_1 = -0.999:0.001:2;
z1_1_ = -z2_1 + log(abs(z2_1 + 1)) - 8;
z1_2_ = z1_1_ + d;
z1_3_ = z1_2_ + d;
z1_4_ = z1_3_ + d;

```

```

z1_5_ = z1_4_ + d;
plot(z1_1, z2, z1_2, z2, z1_3, z2, z1_4, z2, z1_5, z2,
z1_1_, z2_1, z1_2_, z2_1, z1_3_, z2_1, z1_4_, z2_1,
z1_5_, z2_1);grid.

```

Занести графіки цих сімейств до звіту, вказати напрямок руху точок вздовж фазових траєкторій і окремо позначити лінію перемикання керування.

7.5.2. Експериментальне дослідження фазових траєкторій лінійного стаціонарного об'єкта 2 при керуванні, що є оптимальним за швидкодією

Дослідження проводять за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає в реєстрації фазової траєкторії оптимального керування; координат стану та їхніх похідних $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t)$, $z_2'(t) = y''(t)$; оптимального керування $u(t)$, вирішальної функції $\sigma(z_1, z_2)$ і фіксації моменту часу завершення керування (досягнення мети керування).

Відкрити файл **Sv_opt_ker_1_int_1_inerc**. Схему проведення експерименту в пакеті Simulink зображено на рис. 7.5. Вона складається з моделі САК (**Transfer Fcn, Integrator**), блоків розрахунку вирішальної функції $\sigma(z_1, z_2)$ (**Fcn, Gain, Gain1, Gain2, Abs, Sign, Product, Subtract**), блоків формування оптимального керування (**Sign, Unary Minus, Relay**), блоків завершення керування після досягнення мети керування (**Switch, Constant**), графопобудовника (**XY Graph**) і двох віртуальних двоканальних осцилографів (**Scope1, Scope**).

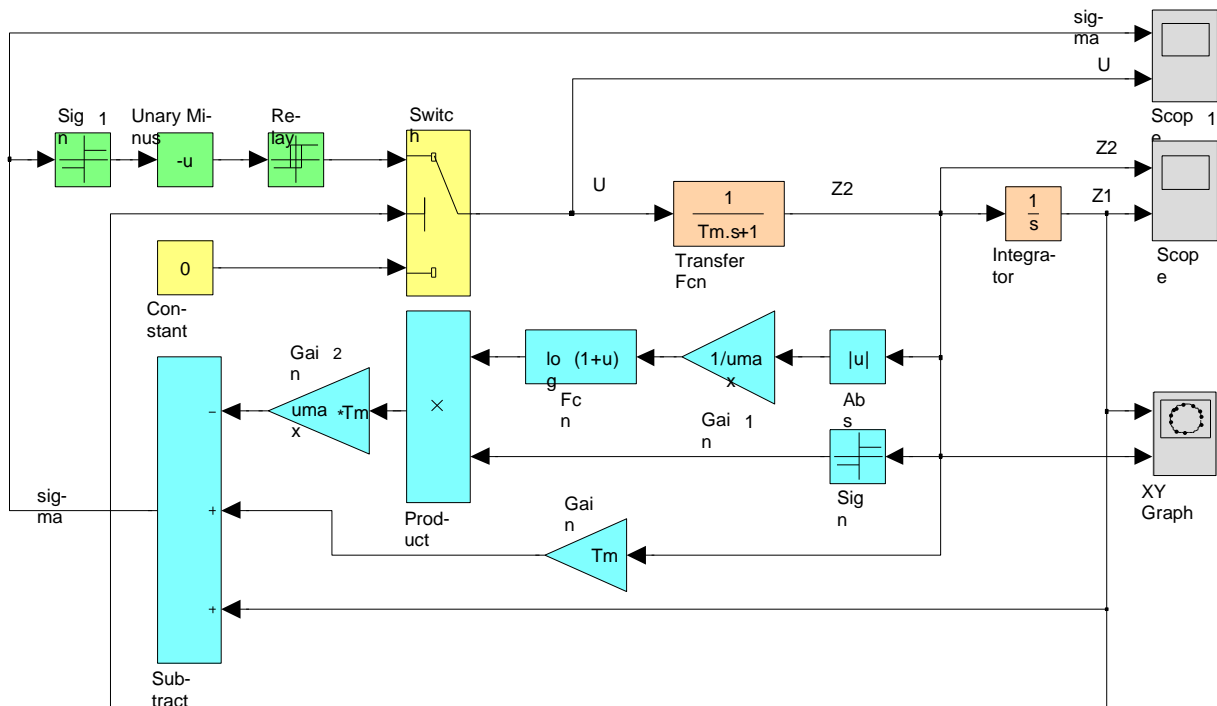


Рис. 7.5. Схема проведення експерименту

На верхньому екрані двоканального осцилографа **Scope1** спостерігаємо вирішальну функцію $\sigma(z_1, z_2)$, на нижньому – оптимальне керування $u(t)$. На верхньому екрані двоканального осцилографа **Scope** спостерігаємо координата стану $z_2(t) = y'(t)$ (швидкість об'єкта), на нижньому – координату стану $z_1(t) = y(t)$ (координата об'єкта).

Для спостереження фазової траєкторії оптимального керування використовують графопобудовник **XY Graph**.

У командному рядку Matlab ввести команду

$$Tm = 0.5; \text{umax} = 1.$$

Встановити початкову умову z_{10} для інтегратора **Integrator** рівною 6. Блок відкривають подвійним натисканням лівою кнопкою миші на ньому. Початкову умову встановлюють у рядку **Initial Condition**.

Провести дослідження оптимального за швидкістю керування заданим об'єктом натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів. У разі необхідності для зручності спостереженні величин на екранах осцилографів натиснути кнопку «**Бінокль**» (**Autoscale**).

Спостерегти фазову траєкторію оптимального керування. Зіставити момент часу зміни знака керуючої дії $u(t)$ у відповідному вікні осцилографа з виходом фазової траєкторії на лінію перемикачів знака керування $\sigma(z_1, z_2) = 0$ у вікні графопобудовника.

Зіставити кількість змін знака керуючої дії $u(t)$ з порядком заданого об'єкта.

Момент завершення керування фіксують, коли керування $u(t)$ (завдяки перемикачу **Switch**) буде дорівнювати нулю. Занести тривалість інтервалу часу керування T у другий рядок табл. 7.1.

Провести аналогічні дослідження для постійної часу $T_M = 0,75, 1, 1,25, 1,5$ с, задаючи її величину в командному рядку Matlab. У кожному дослідженні величину інтервалу часу керування T занести у другий рядок табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Постійна часу T_M , с	0,5	0,75	1	1,25	1,5
Час керування T , с					

Побудувати графік $T = T(T_M)$ експериментальної залежності величини інтервалу часу керування T від величини постійної часу T_M , занести його до звіту, зробити висновок.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Рівняння «вхід-вихід» і схема математичної моделі досліджуваного об'єкта керування.
3. Хід і результати аналітичного дослідження: рівняння і графіки двох сімейств фазових траєкторій, що відповідають керуванню $u(t) = u_{\max}$ і $u(t) = -u_{\max}$, з напрямком руху точок вздовж траєкторій; рівняння та графік лінії перемикання знака керування.
4. Схема проведення експерименту.
5. Таблиця і графіки експериментальних залежностей.
6. Висновки за роботою.

Контрольні запитання

1. Поясніть поняття «оптимальне керування».
2. Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?
3. Поясніть поняття «показник якості».
4. Поясніть поняття «функціонал якості».
5. Поясніть поняття «критерій оптимальності».
6. Які вихідні дані входять до змісту задачі синтезу оптимального керування?
7. Поясніть поняття «вектор стану».
8. Що зв'язує між собою рівняння стану?
9. Який об'єкт називається керованим?
10. Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?
11. Поясніть поняття «лагранжіан».

12. Поясніть поняття «гамільтоніан».
13. Поясніть поняття «канонічна система рівнянь».
14. Як пов'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?
15. Надайте формулювання принципу максимуму.
16. У чому полягає специфіка оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом?
17. У якому випадку принцип максимуму дає не тільки необхідні, але і достатні умови існування оптимального керування?
18. Чому дорівнює кількість перемикань керуючої дії при оптимальному за швидкодією керуванні лінійним стаціонарним об'єктом другого порядку?
19. Як за відомими фазовими траєкторіями об'єкта другого порядку, що відповідають керуванню u_{\max} та $-u_{\max}$, знаходять лінію перемикання знака керуючої дії?
20. У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

8. Дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 1

8.1. Мета роботи

1. Засвоїти постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування об'єктом.

2. Ознайомитися з методикою синтезу керування об'єктом, оптимального за квадратичним показником якості, на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

3. Дослідити процеси в системі при керуванні, оптимальним за квадратичним показником якості, і зробити рекомендації для практичного застосування.

8.2. Програма роботи

1. Синтез і аналітичне дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.

2. Експериментальне дослідження оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.

8.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [2, 10-16] і конспектом лекцій у позааудиторний час ознайомитися з метою та вивчити:

- програму і вказівки до виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування; формулювання принципу

максимуму Л. С. Понтрягіна; умови, достатні для існування оптимального керування; постановку та розв'язання задачі синтезу оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

2. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
3. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

8.4. Короткі відомості з теорії

8.4.1. Коротка характеристика задачі оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих завдань, при вирішенні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань вимагають мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають на меті досягнення найбільшої точності відтворення задавальної дії. Потім ставлять завдання мінімальних витрат енергії для досягнення поставленої мети. Часто трапляються випадки, коли необхідно задовольнити низку суперечливих вимог. Усі такі завдання належать до класу задач оптимального керування.

Загальною для цих систем є вимога створення такої сукупності керуючих дій, за яких можна досягти екстремального значення деякого показника якості. ***САК, що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називають оптимальною в тому самому сенсі*** (наприклад за швидкодією, квадратичним показником якості та ін.).

Правило, за допомогою якого вибирають екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається критерієм оптимальності цієї системи [2, 10-16].

До змісту ***задачі синтезу оптимального керування входять*** такі вихідні дані [2, 10-12]:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) зовнішні дії;
- 3) мету керування;
- 4) показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) обмеження, накладені на величини дій і об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування за накладених обмежень і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Завдання такого класу належать до варіаційних задач оптимального керування. Застосування методів теорії варіаційного числення потребує цілком певної математичної формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

8.4.2. Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом

Математичну модель об'єкта керування задають за допомогою системи диференціальних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним і стаціонарним, систему диференціальних рівнянь стану записують у такій векторно-матричній формі [2, 10-16]:

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (8.1)$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$ – n -мірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ – k -мірний вектор керування;

\mathbf{A} – $n \times n$ постійна матриця стану;

\mathbf{B} – $n \times k$ постійна матриця керування.

Мету керування формулюють як переведення об'єкта з деякого початкового стану $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ у кінцевий стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$. Початковий і

кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача з закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями). Моменти початку та закінчення керування також можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування).

Показник якості керування J подають як функціонал – величину, чисельне значення якої залежить від вибору векторів керування $\mathbf{u}(t)$ і стану $\mathbf{z}(t)$ і часу керування (дод. 4)

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (8.2)$$

де $\Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k]$ – показник якості наприкінці керування;

$L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа, або лагранжіан).

Критерій оптимальності керування полягає в досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)}. \quad (8.3)$$

Обмеження накладають у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об'єкта. Їх задають у вигляді умов належності векторів $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ до деяких множин

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t. \quad (8.4)$$

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовують методи теорії варіаційного числення. Один із методів заснований на принципі максимуму Л. С. Понтрягіна [2, 10-16]. Він дає

умови, накладені на оптимальне керування (дод. 5). Ці умови необхідні, але загалом не є достатніми.

Квадратичний показник якості керування є окремим випадком функціонала якості (8.2) і детально розглянутий у дод. 4.

Специфіка застосування принципу максимуму для задач із квадратичним показником якості наведена в дод. 6.

8.5. Вказівки до виконання роботи

8.5.1. Синтез і аналітичне дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 1

Постановка задачі

Динаміку об'єкта керування описують диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (рис. 8.1)

$$y''(t) = u(t), \quad (8.5)$$

де $y(t)$ – вихідна величина;

$u(t)$ – керуюча дія.

Максимальна величина u_{\max} керуючої дії $u(t)$ необмежена:

$$|u(t)| < u_{\max} = \infty. \quad (8.6)$$

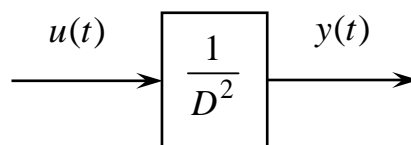


Рис. 8.1. Схема математичної моделі об'єкта керування

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ у кінцевий стан $y(t_k = \infty) = 0$, $y'(t_k = \infty) = 0$, де $t_0 = 0$ – фіксований момент початку, а $t_k = \infty$ – фіксований, але нескінчений момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімум квадратичного показника якості керування

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{y^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{y'^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (8.7)$$

де $\frac{1}{y_m^2}$ – ваговий коефіцієнт першого доданка;

$\frac{\tau^2}{y_m^2}$ – ваговий коефіцієнт другого доданка;

τ – деяка константа, що має розмірність часу, величина якої впливає на показники якості перехідного процесу – час регулювання та перерегулювання;

$\frac{1}{u_m^2}$ – ваговий коефіцієнт третього доданка.

Знайти і проаналізувати закон оптимального керування.

Математична формалізація задачі

Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну:

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t). \quad (8.8)$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$, $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k = \infty) = 0$, $z_2(t_k = \infty) = 0$.

Система диференціальних рівнянь стану має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= u(t). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Звідси нескладно встановити, що матриці стану \mathbf{A} і керування \mathbf{B} матричного рівняння стану (8.1) дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Показник якості керування (8.2) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), u(t), t] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (8.10)$$

де $L[\mathbf{z}(t), u(t), t] = \frac{1}{2} \left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right)$ – функція Лагранжа.

Критерій оптимальності керування полягає в досягненні мінімуму заданого показника якості:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt \rightarrow \min_{u \in U_t} \quad (8.11)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями при фіксованому, але нескінченному часі закінчення керування (дод. 5).

Для квадратичного показника якості, на відміну від задач на максимальну швидкодію, керованість об'єкта (дод. 7) *не є необхідною умовою (!)* існування оптимального керування [2, 10-16]. Проте керованість об'єкта є достатньою умовою існування єдиного оптимального керування.

З метою аналізу керованості об'єкта розглянемо матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ і $\mathbf{M} = |\mathbf{B} \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|$:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -1 \neq 0. \quad (8.12)$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта. Отже, для заданого об'єкта принцип максимуму дає необхідні і достатні умови оптимальності.

Синтез закону оптимального керування

Використовуючи форму функціонала якості (8.10), визначимо матриці \mathbf{Q} та \mathbf{R} :

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{u_m^2}. \quad (8.13)$$

Використовуючи матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} та \mathbf{R} , складемо матричне алгебраїчне рівняння Ріккати (дод. 6) для визначення симетричної матриці

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}:$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} - \\
& -u_m^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Звідси отримуємо систему скалярних рівнянь

$$\begin{cases} u_m^2 \cdot \gamma_{12}^2 - y_m^{-2} = 0; \\ 2\gamma_{12} - u_m^2 \cdot \gamma_{22} + \tau^2 \cdot y_m^{-2} = 0; \\ \gamma_{11} - u_m^2 \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{22} = 0. \end{cases} \tag{8.15}$$

Послідовно розглядаючи отримані рівняння, знайдемо всі розв'язки цієї системи. Проаналізуємо ці розв'язки.

Перший розв'язок

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\
\gamma_{22} &= u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\
\gamma_{11} &= u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Другий розв'язок

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= -y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\
\gamma_{22} &= -u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\
\gamma_{11} &= u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Третій розв'язок

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\
\gamma_{22} &= -u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\
\gamma_{11} &= -u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Четвертий розв'язок

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= -y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\
\gamma_{22} &= u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}; \\
\gamma_{11} &= -u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} - 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}}.
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Матриця Γ має бути, по-перше, додатно визначеною; по-друге, дійсною.

Умови додатної визначеності

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &> 0; \\
\gamma_{11} \cdot \gamma_{22} - \gamma_{12}^2 &> 0.
\end{aligned} \tag{8.20}$$

Умови (8.20) не задовольняють третій і четвертий розв'язки, тому що $\gamma_{11}^{(3,4)} < 0$.

Другий розв'язок не задовольняє одночасно умови додатної визначеності та дійсності матриці Γ .

Тільки перший розв'язок не суперечить усім вимогам, накладеним на матрицю Γ . Отже, матриця Γ має вигляд

$$\Gamma = \begin{vmatrix} u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} & y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \\ y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix}. \tag{8.21}$$

За допомогою виразу (8.21) отримуємо матрицю коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} оптимального регулятора

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{\Gamma} = u_m^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} & y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \\ y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix} = \quad (8.22)$$

$$= u_m^2 \begin{vmatrix} y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix}.$$

Отже, оптимальне за мінімумом квадратичного показника якості керування має вигляд

$$u^*(t) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{z}^*(t) = -\frac{u_m}{y_m} z_1^*(t) + u_m \sqrt{\tau^2 y_m^{-2} + 2y_m^{-1} u_m^{-1}} \cdot z_2^*(t) =$$

$$= -\frac{u_m}{y_m} \left(z_1^*(t) + \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot z_2^*(t) \right). \quad (8.23)$$

Структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування наведена на рис. 8.2.

Аналіз процесів в оптимальній системі керування

Проаналізуємо процеси в оптимальній системі керування і встановимо зв'язок між показниками якості в перехідному режимі цієї системи та параметрами функціонала якості (8.7).

Для цього складемо матрицю стану оптимальної системи та диференціальне рівняння стану:

$$\mathbf{z}'^*(t) = \mathbf{A} \mathbf{c} \cdot \mathbf{z}^*(t), \quad (8.24)$$

де

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u_m}{y_m} & -\frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \end{vmatrix}. \quad (8.25)$$

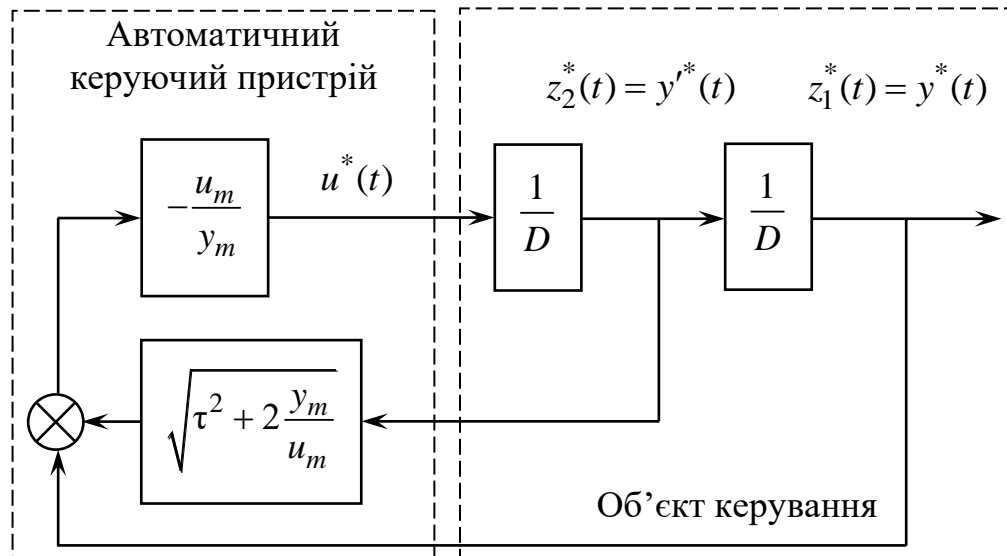


Рис. 8.2. Алгоритмічна структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування заданим об'єктом

Отримуємо

$$\begin{aligned} z_1'^*(t) &= z_2^*(t); \\ z_2'^*(t) &= -\frac{u_m}{y_m} z_1^*(t) - \frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot z_2^*(t). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Якщо врахувати, що $z_1^*(t) = y^*(t)$, $z_2^*(t) = y'^*(t)$, тоді друге рівняння системи (8.26) набуде вигляду

$$y''^*(t) + \frac{u_m}{y_m} \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{y_m}{u_m}} \cdot y'^*(t) + \frac{u_m}{y_m} y^*(t) = 0. \quad (8.27)$$

Отже, оптимальна система керування для заданого об'єкта (8.5) є ланкою другого порядку (лінійною САК!), і для її аналізу доступні всі загальновідомі методи аналізу лінійних САК.

Частота ω_0 власних незагасальних коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{u_m}{y_m}}, \quad (8.28)$$

а відносний коефіцієнт загасання ξ коливань

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_0^2 \cdot \tau^2 + 2}. \quad (8.29)$$

Якщо обрати $\tau = 0$, тоді $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0,7$, що відповідає мінімальній тривалості перехідного процесу за фіксованої величини частоти ω_0 власних незагасальних коливань. При цьому величина перерегулювання σ не перевищує 4 %. Якщо перерегулювання є небажаним, обравши τ так, щоб

$$\omega_0^2 \cdot \tau^2 \geq 2, \quad (8.30)$$

отримуємо $\xi \geq 1$, внаслідок чого перехідний процес буде аперіодичним (монотонним).

Отже, вибором параметрів y_m , τ , u_m функціонала якості (8.7) можна, залишившись у рамках оптимальної структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей.

8.5.2. Експериментальне дослідження оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування лінійним стаціонарним об'єктом 1

Дослідження проводять за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає в реєстрації оптимального керування $u^*(t)$, оцінюванні величини квадратичного показника якості керування J , керованої величини $y^*(t) = z_1^*(t)$ і показників якості перехідного режиму – часу регулювання t_p і перерегулювання σ залежно від величини параметра функціонала якості (8.7) – τ .

Відкрити файл **Quadr_2_int**. Схему проведення експерименту в пакеті Simulink зображено на рис. 8.3. Вона складається з моделі САК (**Integrator1, Integrator2**), блоків формування оптимального керування (**Gain, Gain1**), блоків формування оцінювання квадратичного показника якості (**Gain2, Gain3, Gain4, Gain5, Product, Product1, Product2, Integrator**), блока формування перехідної характеристики для оцінювання показників якості перехідного режиму – часу регулювання t_p і перерегулювання σ (**Constant**) і двох віртуальних осцилографів – триканального і одноканального (**Scope, Scope1**).

На верхньому екрані триканального осцилографа спостерігають оптимальне керування $u^*(t)$, на середньому – оцінку величини квадратичного показника якості керування J , на нижньому – керовану величину $y^*(t) = z_1^*(t)$.

На екрані одноканального осцилографа спостерігають перехідну характеристику для оцінювання часу регулювання t_p і перерегулювання σ .

Для підвищення точності моделювання у вікні Simulink натиснути кнопку **Simulation**, відкрити вікно **Configuration Parameters** і встановити відносну точність **Relative Tolerance** рівною $1e^{-6}$.

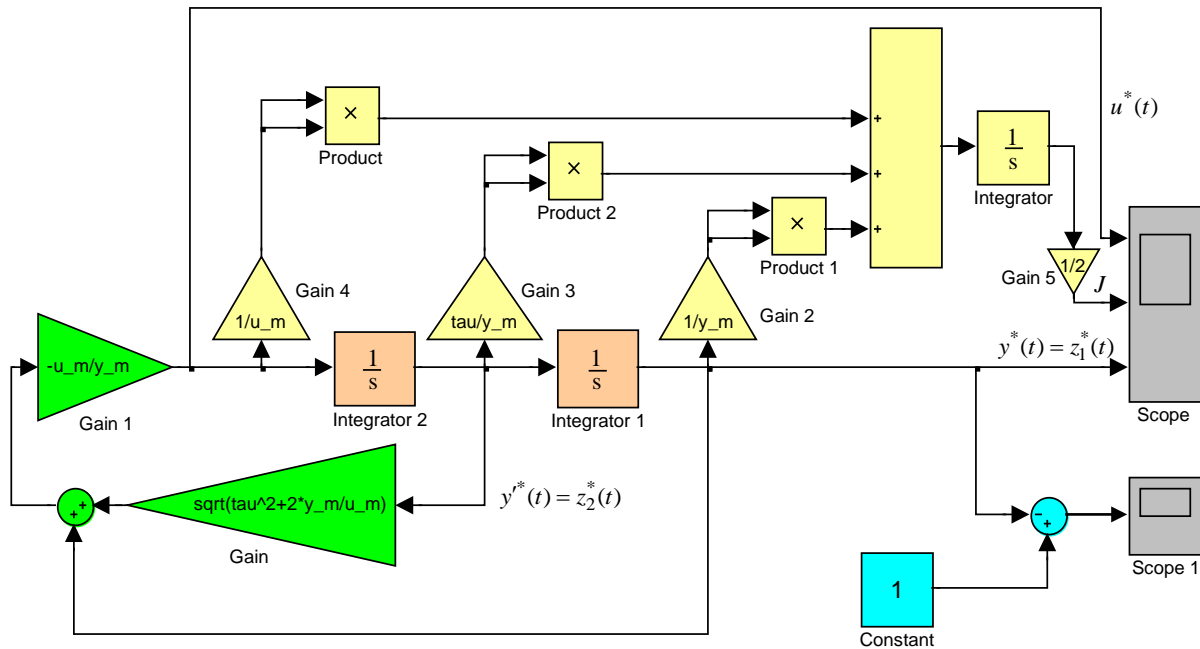


Рис. 8.3. Схема проведення експерименту

У командному рядку Matlab ввести команду

$$u_m = 1; y_m = 1; tau = 0.$$

Встановити початкові умови z_0 , z_{10} , z_{20} для інтеграторів **Integrator**, **Integrator1**, **Integrator2** рівними 0, 1 та 0 відповідно. Ці блоки відкривають подвійним натисканням лівою кнопкою миші на відповідний інтегратор. Початкові умови встановлюють у рядку **Initial Condition**.

Провести дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування заданим об'єктом натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів. У разі необхідності для зручності спостереженні величин на екранах осцилографів натиснути кнопку «Бінокль» (**Autoscale**).

Занести оптимальне значення квадратичного показника якості керування $J_{\text{опт}}$, час регулювання t_p і перерегулювання σ у відповідні рядки табл. 8.1.

Таблиця 8.1

$u_m = 1$	$\tau, \text{с}$	0	0.5	1	$\sqrt{2}$	2
	$J_{\text{опт}}, \text{с}$					
	час регулювання $t_p, \text{с}$					
	перерегулювання $\sigma, \%$					
$u_m = 5$	$\tau, \text{с}$	0	0.5	1	$\sqrt{2}$	2
	$J_{\text{опт}}, \text{с}$					
	час регулювання $t_p, \text{с}$					
	перерегулювання $\sigma, \%$					

Провести аналогічні дослідження для величин параметра $\tau = 0.5, 1, \sqrt{2}, 2$ с, задаючи їх у командному рядку Matlab.

Зменшити «вартість» енергії керування. Для цього в командному рядку Matlab ввести команду

$$u_m = 5.$$

Провести дослідження для величин параметра $\tau = 0, 0.5, 1, \sqrt{2}, 2$ с, задаючи їх у командному рядку Matlab.

Побудувати графіки експериментальних залежностей $J_{\text{опт}} = J_{\text{опт}}(\tau)$, $t_p = t_p(\tau)$, $\sigma = \sigma(\tau)$ від величини параметра τ для двох значень u_m (1 і 5), занести їх до звіту, зробити висновки.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Рівняння «вхід-вихід», схема математичної моделі досліджуваного об'єкта керування, функціонал якості керування та критерій оптимальності.

3. Хід і результати аналітичного дослідження: розрахунок матриці коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} , оптимального керування $u^*(t)$ (рівняння (8.21) – (8.23)); рівняння «вхід-вихід» оптимальної системи керування та параметри отриманої коливальної ланки (рівняння (8.26) – (8.30)).

4. Схема проведення експерименту.

5. Таблиця і графіки експериментальних залежностей.

6. Висновки за роботою.

Контрольні запитання

1. Поясніть поняття «оптимальне керування».

2. Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?

3. Поясніть поняття «показник якості».

4. Поясніть поняття «функціонал якості».

5. Які форми функціоналів якості застосовують у загальній теорії оптимального керування?

6. Поясніть поняття «критерій оптимальності».

7. Які вихідні дані входять до змісту задачі синтезу оптимального керування?

8. Поясніть поняття «вектор стану».

9. Що пов'язує між собою рівняння стану?

10. Який об'єкт називається керованим?

11. Поясніть поняття «критерій керованості».

12. Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?

13. Як пов'язані стійкість об'єкта і керованість об'єкта?

14. Поясніть поняття «лагранжіан».

15. Поясніть поняття «гамільтоніан».

16. Поясніть поняття «канонічна система рівнянь».

17. Як пов'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?

18. Як пов'язані канонічна система рівнянь і лагранжіан?
19. Як знаходять максимум функції за її аналітичним виразом?
20. Дайте формулювання принципу максимуму.
21. У якому випадку принцип максимуму дає не тільки необхідні, але і достатні умови існування оптимального керування об'єктом?
22. У чому полягає специфіка оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?
23. Надайте необхідні та достатні умови додатної визначеності квадратичної форми.
24. Як за відомими матрицями \mathbf{R} , \mathbf{B} , \mathbf{G} розрахувати матрицю коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} ?
25. Яке рівняння задовольняє матриця \mathbf{G} ?
26. Які умови накладають на матрицю \mathbf{G} ?
27. Чому керованість об'єкта не є необхідною умовою існування єдиного оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?
28. Як пов'язані квадратичний показник якості і поліпшена інтегральна оцінка?
29. Як можна, залишившись у рамках оптимальної за квадратичним показником якості структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей?
30. Запропонуйте можливий варіант реалізації системи керування, наближеної до оптимальної, якщо фактична величина керуючої дії, оптимальної за квадратичним показником якості, буде перевищувати реальні можливості керуючого пристрою (наприклад за обмеження $|u(t)| \leq U_{\max}$).
31. У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

9. Дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 2

9.1. Мета роботи

1. Засвоїти постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування об'єктом.

2. Ознайомитися з методикою синтезу керування об'єктом, оптимального за квадратичним показником якості, на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

3. Дослідити процеси в системі при керуванні, оптимальному за квадратичним показником якості, і зробити рекомендації для практичного застосування.

9.2. Програма роботи

1. Синтез і аналітичне дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.

2. Експериментальне дослідження оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.

9.3. Підготовка до роботи

1. За рекомендованою літературою [2, 10-16] і конспектом лекцій у позааудиторний час ознайомитися з метою та вивчити:

- програму і вказівки до виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування; формулювання

принципу максимуму Л. С. Понтрягіна; умови, достатні для існування оптимального керування; постановку та розв'язання задачі синтезу оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

2. Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
3. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

9.4. Короткі відомості з теорії

9.4.1. Коротка характеристика задачі оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих завдань, при вирішенні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань потребують мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають на меті досягнення найбільшої точності відтворення задавальної дії. Потім ставлять завдання мінімальних витрат енергії для досягнення поставленої мети. Часто трапляються випадки, коли необхідно задовольнити низку суперечливих вимог. Усі такі завдання належать до класу задач оптимального керування.

Загальною для цих систем є вимога створення такої сукупності керуючих дій, за яких можна досягти екстремального значення деякого показника якості. ***САК, що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називають оптимальною в тому самому сенсі*** (наприклад за швидкодією, квадратичним показником якості та ін.).

Правило, за допомогою якого обирають екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається критерієм оптимальності цієї системи [2, 10-16].

До змісту ***задачі синтезу оптимального керування входять*** такі вихідні дані [2, 10-12]:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) зовнішні дії;
- 3) мету керування;
- 4) показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) обмеження, накладені на величини дій і об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування за накладених обмежень і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Завдання такого класу належать до варіаційних задач оптимального керування. Застосування методів теорії варіаційного числення потребує цілком певної математичної формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

9.4.2. Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом

Математичну модель об'єкта керування задають за допомогою системи диференціальних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним і стаціонарним, систему диференціальних рівнянь стану записують у такій векторно-матричній формі [2, 10-16]:

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (9.1)$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$ – n -мірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ – k -мірний вектор керування;

\mathbf{A} – $n \times n$ постійна матриця стану;

\mathbf{B} – $n \times k$ постійна матриця керування.

Мету керування формулюють як переведення об'єкта з деякого початкового стану $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ у кінцевий стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$. Початковий і

кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача з закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями). Моменти початку та закінчення керування також можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування) [2, 10-16].

Показник якості керування J подають як функціонал – величину, чисельне значення якої залежить від вибору векторів керування $\mathbf{u}(t)$ і стану $\mathbf{z}(t)$ і часу керування (дод. 4):

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (9.2)$$

де $\Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k]$ – показник якості наприкінці керування;

$L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа, або лагранжіан).

Критерій оптимальності керування полягає в досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)}. \quad (9.3)$$

Обмеження накладають у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об'єкта. Їх задають у вигляді умов належності векторів $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ до деяких множин

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t. \quad (9.4)$$

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовують методи теорії варіаційного числення. Один із методів заснований на принципі максимуму Л. С. Понтрягіна [2, 10-16]. Він дає

умови, накладені на оптимальне керування (дод. 5). Ці умови необхідні, але загалом не є достатніми.

Квадратичний показник якості керування є окремим випадком функціонала якості (9.2) і детально розглянутий у дод. 4.

Специфіка застосування принципу максимуму для задач з квадратичним показником якості наведена в дод. 6.

9.5. Вказівки до виконання роботи

9.5.1. Синтез і аналітичне дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування лінійним стаціонарним об'єктом 2

Постановка задачі

Динаміку об'єкта керування описують лінійним диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (рис. 9.1)

$$T_M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = u(t), \quad (9.5)$$

де $y(t)$ – вихідна величина;

T_M – постійна часу, с;

$u(t)$ – керуюча дія.

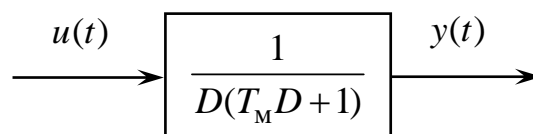


Рис. 9.1. Схема математичної моделі об'єкта керування

Максимальна величина u_{\max} керуючої дії $u(t)$ необмежена:

$$|u(t)| < u_{\max} = \infty. \quad (9.6)$$

Метою керування є переведення об'єкта з заданого початкового стану $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ в кінцевий стан $y(t_k = \infty) = 0$, $y'(t_k = \infty) = 0$, де $t_0 = 0$ – фіксований момент початку, а $t_k = \infty$ – фіксований, але нескінчений момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімум квадратичного показника якості керування:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{y^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{y'^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (9.7)$$

де $\frac{1}{y_m^2}$ – ваговий коефіцієнт першого доданка;

$\frac{\tau^2}{y_m^2}$ – ваговий коефіцієнт другого доданка;

τ – деяка константа, що має розмірність часу, величина якої впливає на показники якості перехідного процесу – час регулювання та перерегулювання;

$\frac{1}{u_m^2}$ – ваговий коефіцієнт третього доданка.

Знайти і проаналізувати закон оптимального керування.

Математична формалізація задачі

Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t). \quad (9.8)$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$, $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k = \infty) = 0$, $z_2(t_k = \infty) = 0$.

Система диференціальних рівнянь стану має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= -\frac{1}{T_M} z_2 + \frac{1}{T_M} u(t). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Звідси нескладно встановити, що матриці стану \mathbf{A} і керування \mathbf{B} матричного рівняння стану (9.1) дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_M} \end{vmatrix}.$$

Показник якості керування (9.2) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), u(t), t] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt, \quad (9.10)$$

де $L[\mathbf{z}(t), u(t), t] = \frac{1}{2} \left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right)$ – функція Лагранжа.

Критерій оптимальності керування полягає в досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2 \frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2} \right) dt \rightarrow \min_{u \in U_t} \quad (9.11)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями при фіксованому, але нескінченному часі закінчення керування (дод. 5).

Для квадратичного показника якості, на відміну від задач на максимальну швидкодію, керованість об'єкта (дод. 7) *не є необхідною умовою (!)* існування оптимального керування [2, 10-16]. Проте керованість об'єкта є достатньою умовою існування єдиного оптимального керування.

З метою аналізу керованості об'єкта розглянемо матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ і $\mathbf{M} = |\mathbf{B} \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|$:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_M} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_M} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{T_M} \\ -\frac{1}{T_M^2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{T_M} \\ \frac{1}{T_M} & -\frac{1}{T_M^2} \end{vmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -\frac{1}{T_M^2} \neq 0. \quad (9.12)$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта. Отже, для заданого об'єкта принцип максимуму дає необхідні і достатні умови оптимальності.

Синтез закону оптимального керування

Використовуючи форму функціонала якості (9.10), визначимо матриці \mathbf{Q} та \mathbf{R} :

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{u_m^2}. \quad (9.13)$$

Використовуючи матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} та \mathbf{R} , складемо матричне алгебраїчне рівняння Ріккати (дод. б) для визначення симетричної матриці

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}:$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} - \\ & -u_m^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ T_M \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ T_M \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Звідси отримуємо систему скалярних рівнянь

$$\begin{cases} u_m^2 \frac{\gamma_{12}^2}{T_M^2} - y_m^{-2} = 0; \\ 2 \left(\gamma_{12} - \frac{\gamma_{22}}{T_M} \right) - u_m^2 \frac{\gamma_{22}^2}{T_M^2} + \tau^2 \cdot y_m^{-2} = 0; \\ \gamma_{11} - \frac{\gamma_{12}}{T_M} - u_m^2 \frac{\gamma_{12} \cdot \gamma_{22}}{T_M^2} = 0. \end{cases} \quad (9.15)$$

Послідовно розглядаючи отримані рівняння, можна знайти всі розв'язки цієї системи (читачеві рекомендуємо зробити це самостійно). Однак третє рівняння системи (9.15) і умови дійсності та додатної визначеності матриці $\mathbf{\Gamma}$ призводять до вимоги

$$\gamma_{11} > 0, \quad \gamma_{12} > 0, \quad \gamma_{22} > 0. \quad (9.16)$$

Це дає змогу вибрати єдиний розв'язок системи (9.15), отже елементи матриці Γ такі:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= u_m^{-1} \cdot y_m^{-1} \sqrt{1 + u_m^2 (\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1})}; \\ \gamma_{12} &= T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}; \\ \gamma_{22} &= T_M \cdot u_m^{-2} \left(\sqrt{1 + u_m^2 (\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1})} - 1 \right). \end{aligned} \quad (9.17)$$

За допомогою рівнянь (9.17) отримуємо матрицю коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} оптимального регулятора

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Gamma = u_m^2 \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} = \frac{u_m^2}{T_M} \begin{vmatrix} \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_m^{-1} \cdot u_m & \left(\sqrt{1 + u_m^2 (\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1})} - 1 \right) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Отже, оптимальне за мінімумом квадратичного показника якості керування має вигляд

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\mathbf{Kz}^*(t) = \\ &= -\frac{u_m}{y_m} \cdot z_1^*(t) - \left(\sqrt{1 + u_m^2 (\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2T_M \cdot y_m^{-1} \cdot u_m^{-1})} - 1 \right) \cdot z_2^*(t). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування наведена на рис. 9.2.

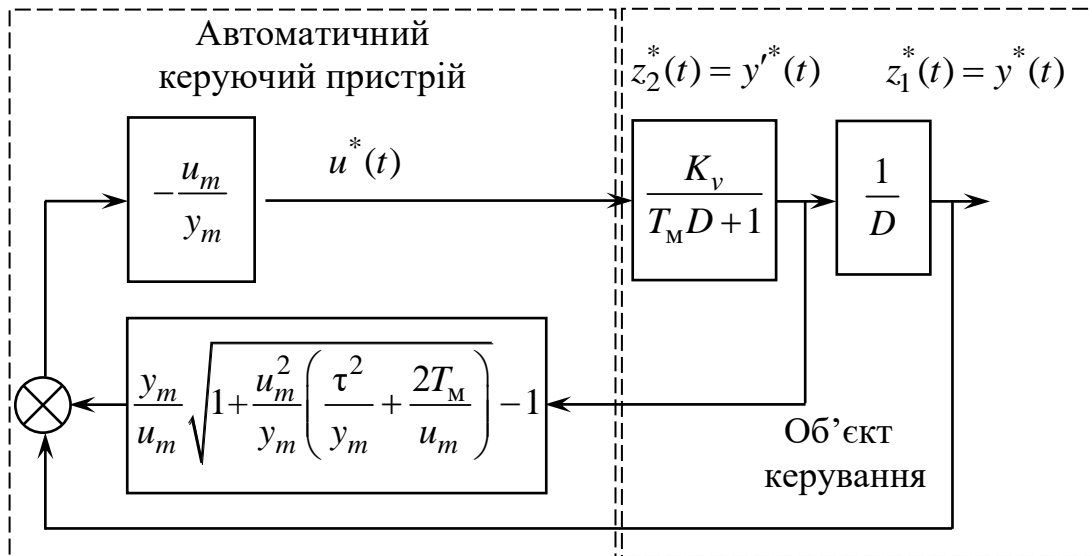


Рис. 9.2. Алгоритмічна структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування заданим об'єктом

Аналіз процесів в оптимальній системі керування

Проаналізуємо процеси в оптимальній системі керування та встановимо зв'язок між показниками якості в перехідному режимі цієї системи та параметрами функціонала якості (9.7).

Для цього складемо матрицю стану оптимальної системи та диференціальні рівняння стану:

$$\mathbf{z}'^*(t) = \mathbf{A}\mathbf{c} \cdot \mathbf{z}^*(t), \quad (9.20)$$

де
$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u_m}{T_M \cdot y_m} & -\frac{1}{T_M} \sqrt{1 + \frac{u_m^2}{y_m} \left(\frac{\tau^2}{y_m} + \frac{2T_M}{u_m} \right)} \end{vmatrix}. \quad (9.21)$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} z_1^*(t) &= z_2^*(t); \\ z_2^*(t) &= -\frac{u_m}{T_M \cdot y_m} z_1^*(t) - \frac{1}{T_M} \sqrt{1 + \frac{u_m^2}{y_m} \left(\frac{\tau^2}{y_m} + \frac{2T_M}{u_m} \right)} \cdot z_2^*(t). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Якщо врахувати, що $z_1^*(t) = y^*(t)$, $z_2^*(t) = y'^*(t)$, то друге рівняння системи (9.22) набуде вигляду

$$y''^*(t) + \frac{1}{T_M} \sqrt{1 + \frac{u_m^2}{y_m} \left(\frac{\tau^2}{y_m} + \frac{2T_M}{u_m} \right)} \cdot y'^*(t) + \frac{u_m}{T_M \cdot y_m} y^*(t) = 0. \quad (9.23)$$

Отже, оптимальна система керування для заданого об'єкта (9.5) є ланкою другого порядку (лінійною САК!), і для її аналізу доступні всі загальновідомі методи аналізу лінійних САК.

Частота ω_0 власних незагасальних коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{u_m}{T_M \cdot y_m}}, \quad (9.24)$$

а відносний коефіцієнт загасання ξ коливань

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y_m}{T_M \cdot u_m} + \omega_0^2 \cdot \tau^2 + 2}. \quad (9.25)$$

Якщо параметри y_m, u_m, T_M, τ такі, що $\xi < 1$, тоді рівняння (9.23) відповідає коливальній ланки. При цьому перехідний процес має

коливальний характер, і перерегулювання σ завжди не перевищує 4 %. Якщо перерегулювання є небажаним, обравши такі параметри y_m, u_m, τ , щоб

$$\frac{y_m}{T_M \cdot u_m} + \omega_0^2 \cdot \tau^2 \geq 2, \quad (9.26)$$

отримуємо $\xi \geq 1$, внаслідок чого перехідний процес буде аперіодичним (монотонним).

Отже, вибором параметрів y_m, τ, u_m функціонала якості (9.7) можна, залишившись у рамках оптимальної структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей.

9.5.2. Експериментальне дослідження оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування лінійним стаціонарним об'єктом 2

Дослідження проводять за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає в реєстрації оптимального керування $u^*(t)$, оцінювання величини квадратичного показника якості керування J , керованої величини $y^*(t) = z_1^*(t)$ і показників якості перехідного режиму – часу регулювання t_p і перерегулювання σ залежно від величини параметра функціонала якості (9.7) – τ .

Відкрити файл **Quadr_1_int_1_inerc**. Схему проведення експерименту в пакеті Simulink зображено на рис. 9.3.

Вона складається з моделі САК (**Integrator1, Transfer Fcn**), блоків формування оптимального керування (**Gain, Gain1**), формування оцінки квадратичного показника якості (**Gain2, Gain3, Gain4, Gain5, Product, Product1, Product2, Integrator2**), формування перехідної характеристики

для оцінювання показників якості перехідного режиму – часу регулювання t_p і перерегулювання σ (**Constant**), двох віртуальних осцилографів – триканального і одноканального (**Scope**, **Scope1**).

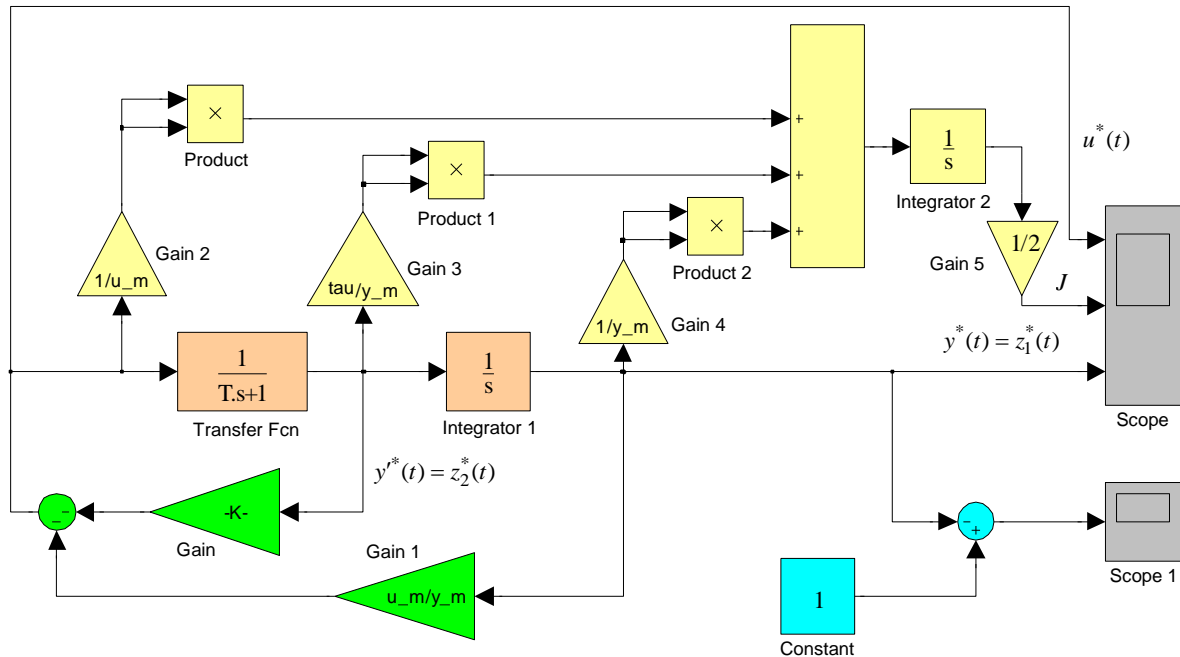


Рис. 9.3. Схема проведення експерименту

На верхньому екрані триканального осцилографа спостерігають оптимальне керування $u^*(t)$, на середньому – оцінку величини квадратичного показника якості керування J , нижньому – керовану величину $y^*(t) = z_1^*(t)$.

На екрані одноканального осцилографа спостерігають перехідну характеристику для оцінювання часу регулювання t_p і перерегулювання σ .

Для підвищення точності моделювання у вікні Simulink натиснути кнопку **Simulation**, відкрити вікно **Configuration Parameters** і встановити відносну точність **Relative Tolerance** рівною $1e^{-6}$.

У командному рядку Matlab ввести команду

$$T=1; u_m = 1; y_m = 1; \tau = 0.$$

Встановити початкові умови z_{20} , z_{10} для інтеграторів **Integrator2**, **Integrator1** рівними 0 та 1 відповідно. Ці блоки відкривають подвійним натисканням лівою кнопкою миші на відповідний інтегратор. Початкові умови встановлюють у рядку **Initial Condition**.

Провести дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування заданим об'єктом натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів. У разі необхідності для зручності спостереження величин на екранах осцилографів натиснути кнопку «**Бінокль**» (**Autoscale**).

Занести оптимальне значення квадратичного показника якості керування J_{opt} , час регулювання t_p і перерегулювання σ у відповідні рядки табл. 9.1.

Таблиця 9.1

$u_m = 1$	τ, c	0	0.5	1	1.5	2
	J_{opt}, c					
	час регулювання t_p, c					
	перерегулювання $\sigma, \%$					
$u_m = 5$	τ, c	0	0.5	1	1.5	2
	J_{opt}, c					
	час регулювання t_p, c					
	перерегулювання $\sigma, \%$					

Провести аналогічні дослідження для величин параметра $\tau = 0.5, 1, 1.5, 2$ с, задаючи їх у командному рядку Matlab.

Зменшити «вартість» енергії керування. Для цього в командному рядку Matlab ввести команду

$$u_m = 5.$$

Провести дослідження для величин параметра $\tau = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ с, задаючи їх у командному рядку Matlab.

Побудувати графіки експериментальних залежностей $J_{\text{опт}} = J_{\text{опт}}(\tau)$, $t_p = t_p(\tau)$, $\sigma = \sigma(\tau)$ від величини параметра τ для двох значень u_m (1 і 5), занести їх до звіту, зробити висновки.

Зміст звіту

1. Назва і мета роботи.
2. Рівняння «вхід-вихід», схема математичної моделі досліджуваного об'єкта керування, функціонал якості керування та критерій оптимальності.
3. Хід і результати аналітичного дослідження: розрахунок матриці коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} , оптимального керування $u^*(t)$ (рівняння (9.17) – (9.19)); рівняння «вхід-вихід» оптимальної системи керування та параметри отриманої коливальної ланки (рівняння (9.22) – (9.26)).
4. Схема проведення експерименту.
5. Таблиця і графіки експериментальних залежностей.
6. Висновки за роботою.

Контрольні запитання

1. Поясніть поняття «оптимальне керування».
2. Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?

3. Поясніть поняття «показник якості».
4. Поясніть поняття «функціонал якості».
5. Які форми функціоналів якості застосовують у загальній теорії оптимального керування?
6. Поясніть поняття «критерій оптимальності».
7. Які вихідні дані входять до змісту задачі синтезу оптимального керування?
8. Поясніть поняття «вектор стану».
9. Що пов'язує між собою рівняння стану?
10. Який об'єкт називається керованим?
11. Поясніть поняття «критерій керованості».
12. Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?
13. Як пов'язані поняття стійкості об'єкта і керованості об'єкта?
14. Поясніть поняття «лагранжіан».
15. Поясніть поняття «гамільтоніан».
16. Поясніть поняття «канонічна система рівнянь».
17. Як пов'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?
18. Як пов'язані канонічна система рівнянь і лагранжіан?
19. Як знаходять максимум функції за її аналітичним виразом?
20. Дайте формулювання принципу максимуму.
21. У якому випадку принцип максимуму дає не тільки необхідні, але і достатні умови існування оптимального керування об'єктом?
22. У чому полягає специфіка оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?
23. Надайте необхідні та достатні умови додатної визначеності квадратичної форми.
24. Як за відомими матрицями \mathbf{R} , \mathbf{B} , \mathbf{G} розрахувати матрицю коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} ?

25. Яке рівняння задовольняє матриця Γ ?
26. Які умови накладають на матрицю Γ ?
27. Чому керованість об'єкта не є необхідною умовою існування єдиного оптимального за мінімумом квадратичного показника якості керування лінійним стаціонарним об'єктом?
28. Як пов'язані квадратичний показник якості і поліпшена інтегральна оцінка?
29. Як можна, залишившись у рамках оптимальної за квадратичним показником якості структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей?
30. Запропонуйте можливий варіант реалізації системи керування, наближеної до оптимальної, якщо фактична величина керуючої дії, оптимальної за квадратичним показником якості, буде перевищувати реальні можливості керуючого пристрою (наприклад при обмеженні $|u(t)| \leq U_{\max}$).
31. У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Хісматулін В. Ш., Панченко С. В. Теорія автоматичного керування. Ч. I. Теорія лінійних неперервних систем автоматичного керування: підруч. для вузів. Харків: УкрДАЗТ, 2008. 239 с.
2. Александров Є. Є., Козлов Є. П., Кузнецов Б. І. Теорія автоматичного керування. Т. 1. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Харків: НТУ «ХПІ», 2002. 490 с.
3. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ: Либідь, 2007. 656 с.
4. Ладанюк А. П., Архангельська К. С., Власенко Л. О. Теорія автоматичного керування технологічними об'єктами: навч. посіб. Київ: НУХТ, 2014. 274 с.
5. Теорія систем керування: підручник / В. І. Корнієнко, О. Ю. Гусев, О. В. Герасіна, В. П. Щокін. Дніпро: НГУ, 2017. 497 с.
6. Paluszek M. Practical MATLAB. Deep learning. S. Thomas. Apress, 2020. 252 p.
7. Моделювання систем у середовищі MATLAB / С. С. Забара, О. О. Гагарін, І. М. Кузьменко, Ю. Д. Щербашин. Київ, 2011. 137 с.
8. Гурко О. Г., Єрмоменко І. Ф. Аналіз і синтез систем автоматичного керування в MATLAB: навч. посіб. Харків: ХНАДУ, 2011. 286 с.
9. Гоблик Н. М., Гоблик В. В. MATLAB в інженерних розрахунках. Комп'ютерний практикум. Львів: Львівська політехніка, 2020. 192 с.
10. Boscain U., Piccoli B. Optimal synthesis for control systems on 2-D manifolds. Springer-Verlag, 2004. 262 p.
11. Hull D. Optimal control theory for Applications. Springer-Verlag, 2003. 384 p.
12. Теорія оптимальних систем автоматичного керування. Лабораторний практикум. Ч. 2. Дослідження оптимальних за швидкодією

систем автоматичного керування / В. Ш. Хісматулін, О. В. Нейчев, О. М. Прогонний, О. О. Сосунов. Харків: УкрДУЗТ, 2018. 52 с.

13. Методи сучасної теорії управління: підручник / А. П. Ладанюк, Н. М. Луцька, В. Д. Кишенько, Л. О. Власенко. Київ: Вид-во Ліра-К, 2018. 368 с.

14. Хісматулін В. Ш., Сосунов О. О., Сотник В. О. Теорія оптимальних систем автоматичного керування: навч. посіб. Харків: УкрДУЗТ, 2022. 229 с.

15. Оптимальні системи управління: навч. посіб. / О. А. Стенін, В. П. Пасько, А. Д. Лемешко, О. М. Польшакова. Київ: КПІ, Політехніка, 2017. 172 с.

16. Ладієва Л. Р. Оптимальне керування системами: навч. посіб. Київ: НМЦ ВО, 2000. 187 с.

Характеристики елементарних ланок

Елементарна ланка		
Підсилювальна	Інтегруюча	Диференціююча
Передаточна функція		
$K(p) = K$	$K(p) = \frac{K}{p}$	$K(p) = Kp$
Фазочастотна характеристика		
$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & K \geq 0, \\ -\pi, & K < 0 \end{cases}$	$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика		
$L(\omega) = 20 \lg K $ 	$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$ 	$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \omega$
Елементарна ланка		
Інерційна (аперіодична)	Форсууюча	
Передаточна функція		
$K(p) = \frac{K}{Tp + 1}$	$K(p) = K(\tau p + 1)$	
Фазочастотна характеристика		
$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$	$\varphi(\omega) = \arctg \omega \tau$	
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика		
$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2}$ 	$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega \tau)^2}$ 	

Елементарна ланка	
Коливальна	Форсуюча другого порядку
Передаточна функція	
$K(p) = \frac{K}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}$	$K(p) = K(\tau_0^2 p^2 + 2\eta\tau_0 p + 1)$
Фазочастотна характеристика	
$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T_0 \omega}{1 - (\omega T_0)^2}, & \omega < \frac{1}{T_0}; \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T_0}; \\ -\pi - \arctg \frac{2\xi T_0 \omega}{1 - (\omega T_0)^2}, & \omega > \frac{1}{T_0}. \end{cases}$	$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\eta\tau_0 \omega}{1 - (\omega\tau_0)^2}, & \omega < \frac{1}{\tau_0}, \\ \frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{\tau_0}, \\ \pi + \arctg \frac{2\eta\tau_0 \omega}{1 - (\omega\tau_0)^2}, & \omega > \frac{1}{\tau_0}. \end{cases}$
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика	

**Деякі функції пакета Control Toolbox
програмної оболонки MATLAB**

1. Задавання передаточної функції динамічної ланки

Для задавання передаточної функції

$$K(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k}, \quad k \geq m \quad (\text{Д.2.1})$$

у командному вікні (Command Window) набирають

$$\mathbf{K} = \mathbf{tf}([\mathbf{b}_m \ \mathbf{b}_{m-1} \ \dots \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_0], [\mathbf{a}_k \ \mathbf{a}_{k-1} \ \dots \ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_0]), \quad (\text{Д.2.2})$$

де \mathbf{b}_i та \mathbf{a}_r – коефіцієнти многочленів, що стоять у чисельнику та знаменнику передаточної функції $K(p)$, які набирають через пробіл (або кому), починаючи з більших номерів.

Після введення функції $\mathbf{tf}(\cdot)$ у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті Matlab змінна Лапласа p відображується літерою s).

2. Завдання передаточної функції з'єднань динамічних ланок

Для задавання передаточної функції з'єднань ланок необхідно спочатку задати передаточні функції окремих ланок, після чого записати вираз для з'єднань відповідно до звичайних правил:

– послідовне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1} * \mathbf{K2}; \quad (\text{Д.2.3})$$

– паралельне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1} \pm \mathbf{K2}; \quad (\text{Д.2.4})$$

– зустрічно паралельне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1}/(1 \pm \mathbf{K1} * \mathbf{K2}), \quad (\text{Д.2.5})$$

де знак « \rightarrow » записують за позитивного, а « $+$ » - негативного зворотного зв'язку.

Крім того, за негативного зворотного зв'язку є спеціальна функція

$$\mathbf{K} = \text{feedback}(\mathbf{K1}, \mathbf{K2}). \quad (\text{Д.2.6})$$

При складній схемі можна записувати або спочатку частковий перетворення, або одразу повне з урахуванням часткових правил заміни.

3. Побудова перехідної характеристики динамічної системи

Для побудови перехідної характеристики в командному вікні набирають

$$\text{step}(\mathbf{K}), \quad (\text{Д.2.7})$$

де \mathbf{K} – передаточна функція, яка задається за допомогою функції $\text{tf}(\cdot)$.

Після введення функції **step** з'являється вікно **Figure № 1**, у якому побудована перехідна характеристика досліджуваної системи.

Для нанесення масштабної сітки необхідно натиснути праву кнопку «миші», після чого активізувати лівою кнопкою функцію **grid** або додати в командний рядок запис **grid** після запису відповідної функції (наприклад **step(K);grid**).

Для визначення параметрів характеристики необхідно підвести курсор до необхідної точки на графіку, натиснути ліву кнопку «миші» та утримати її більше 1 с. Крім того, після натискання правої кнопки на графіку з'являється вікно, у якому можна задати виведення на графік характеристик та їхніх чисельних значень:

Peak Response – максимум перехідної характеристики **Peak Amplitude** та величина перерегулювання **Overshoot %**;

Setting Time – час регулювання; за умовчанням він вимірюваний у межах 2 %; для встановлення меж 5 % необхідно додатково натиснути **Propeties – Options**, після чого задати межі **Show setting time within 5 %**, а для часу першого погодження **Rise time – Show rise time from 0 to 100 %**;

Steady State – усталене значення $h_{уст}$.

Для більш детального розгляду фрагмента необхідно активізувати команду \oplus (**Zoom In**), після чого, натиснувши ліву кнопку «миші», виділити прямокутником досліджуваний фрагмент (**Увага!** Для визначення параметрів характеристики необхідно спочатку скасувати команду \oplus).

Для розгляду характеристики протягом іншого часу, ніж той, що наведений у вікні **Figure № 1**, у командному вікні набирають

$$\text{step}(K, T). \quad (\text{Д.2.8})$$

де **T** – бажана тривалість характеристики, с.

Для спостереження одночасно характеристик декількох систем їх записують через кому у відповідній функції.

4. Побудова логарифмічних частотних характеристик

Для побудови логарифмічних частотних характеристик системи в командному вікні набирають

$$\mathbf{bode}(\mathbf{K}), \quad (\text{Д.2.9})$$

де \mathbf{K} – передаточна функція досліджуваної системи, заданої за допомогою функції $\mathbf{tf}(\cdot)$.

Після введення функції \mathbf{bode} з'являється вікно Figure № 1, у якому побудовані ЛАЧХ і ЛФЧХ системи. На графіках можна наносити масштабну сітку, виділяти фрагмент і здійснювати вимірювання за розглянутими раніше правилами.

Якщо необхідно спостерігати логарифмічні частотні характеристики в певному діапазоні частот, то набирають команду

$$\mathbf{bode}(\mathbf{K}, \{\omega_{\text{п}}, \omega_{\text{к}}\}), \quad (\text{Д.2.10})$$

де $\omega_{\text{п}}, \omega_{\text{к}}$ – бажані частоти початку та кінця діапазону частот, рад/с.

Для побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи з метою вимірювання запасів стійкості можна скористатися спеціальною функцією

$$\mathbf{margin}(\mathbf{K}), \quad (\text{Д.2.11})$$

де \mathbf{K} – передаточна функція розімкненої системи, заданої за допомогою функції $\mathbf{tf}(\cdot)$. У цьому випадку на графіках автоматично відзначають і у верхньому рядку записують значення запасу стійкості за підсиленням L_3 , дБ, і фазою φ_3 , град (у Matlab вони позначені відповідно G_m та P_m), а також значення частот, на яких вони виміряні.

Основні властивості перетворення Лапласа

Назва	Оригінал	Зображення
Лінійність	$c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$	$c_1X_1(p) + c_2X_2(p)$
Диференціювання оригіналу	$x'(t)$	$pX(p) - x(0)$
Інтегрування оригіналу	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} X(p)$
Запізнювання оригіналу	$x(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-\tau p} X(p)$
Згортка оригіналів	$\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau$	$X_1(p)X_2(p)$
Кінцеве значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$
Початкове значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$

Таблиця перетворень Лапласа

$x(t)$	$X(p)$	$x(t)$	$X(p)$
$\delta(t)$	1	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{p}$	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
t^2	$\frac{1}{p^3}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

**Форми функціонала якості та
квадратичний показник якості керування**

У варіаційних задачах оптимального керування вимога щодо якості керування математично виражена забезпеченням екстремуму деякого показника якості J , який є змінною величиною (функціоналом якості), числове значення якого залежить від вибору вектора керуючих дій $\mathbf{u}(t)$. Функціонал якості може бути простим функціоналом вектора керуючих дій

$$J = J[\mathbf{u}(t)],$$

але частіше він має складнішу залежність від вектора керуючих дій через усі змінні характеристики керованого процесу, які у свою чергу також залежать від вектора керуючих дій

$$J = J[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t_k), t_k].$$

Залежність функціонала якості від $\mathbf{z}(t_k)$ має місце тільки в задачах з незакріпленим правим кінцем, а залежність від t_k – за нефіксованого моменту завершення керування, тому що тільки в цих випадках величини $\mathbf{z}(t_k)$ і t_k є змінними, значення яких залежать від вектора керуючих дій.

У різних задачах залежно від їхнього конкретного смислу функціонал якості обирають по-різному. У загальній теорії оптимального керування все різноманіття функціоналів якості, що зустрічаються в конкретних задачах, зводиться до трьох типів.

Функціонали першого типу, які мають назву *функціоналів Лагранжа*, дають інтегральну характеристику якості перехідного процесу і витрат на керування за переведення об'єкта керування з початкового стану до кінцевого стану. Такий функціонал має вигляд

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (\text{Д.4.1})$$

де підінтегральну функцію L , що має назву функція Лагранжа, або лагранжіан, у кожній конкретній задачі вибирають залежно від фізичного смислу задачі і вимог, накладених на якість керування.

Функціонали другого типу, які мають назву *функціоналів Майєра*, у задачах із незакріпленим правим кінцем характеризують якість результату керування

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k], \quad (\text{Д.4.2})$$

причому безпосередня залежність від t_k має місце тільки за нефіксованого моменту завершення керування. Функціонали цього типу також часто зустрічаються в багатьох задачах, що мають велике практичне значення.

У задачах із незакріпленим правим кінцем якість керування також можна оцінювати не тільки якістю досягнутого результату, але і якістю керування на всьому інтервалі керування від t_0 до t_k . У таких задачах якість керування виражена функціоналами третього типу, що мають назву *функціоналів Больца*

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \quad (\text{Д.4.3})$$

Функціонали третього типу є сумою функціоналів першого і другого типів.

У математичному відношенні функціонали всіх трьох типів (Д.4.1) – (Д.4.3) еквівалентні, бо вони можуть бути перетворені один в один заміною змінних. Однак для зручності розв'язування конкретних задач їх доцільно розглядати незалежно.

Припустимо, що рух об'єкта керування необхідно стабілізувати так, щоб до моменту закінчення керування вектор вихідних величин $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ перейшов у нульовий стан: $\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{0}$ (якщо $\mathbf{y}(t_k) \neq \mathbf{0}$, задачу можна звести до задачі з нульовим кінцевим станом заміною змінних $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_k)$).

Визначимо вектор помилки керування $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{0} - \mathbf{y}(t) = -\mathbf{y}(t).$$

У багатьох прикладних задачах якість досягнутого результату керування можна охарактеризувати величиною суми зважених квадратів компонентів вектора помилки в момент закінчення керування

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k), \quad (\text{Д.4.4})$$

де \tilde{p}_i – невід'ємні числа, $\tilde{p}_i \geq 0$.

Вимога $\tilde{p}_i \geq 0$ виключає можливість взаємної компенсації одних компонентів помилки іншими.

Якщо важливою є якість перехідного процесу за всіма керованими величинами, то показником якості може служити величина

$$J_2 = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \cdot I_{2i}, \quad (\text{Д.4.5})$$

де $I_{2i} = \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt$ – квадратична інтегральна оцінка якості перехідного процесу за i -м виходом, величина якої, як відомо, досить об'єктивно характеризує перехідний процес.

Отже, величина J_2 являє собою зважену суму квадратичних інтегральних оцінок якості керування за всіма наявними виходами. Щоб при зважуванні не відбувалося взаємної компенсації одних квадратичних інтегральних оцінок іншими, необхідно величинам \tilde{q}_i надавати тільки невід'ємних значень: $\tilde{q}_i \geq 0$.

Вимоги щодо точності керування і якості перехідного процесу, як правило, слід поєднувати з вимогами до величини керуючих дій, причому не завжди ці вимоги вичерпуються накладенням обмежень на їхні граничні значення, як, наприклад, у задачі про керування, оптимальне за швидкодією. У багатьох практично важливих задачах мають місце ще й інтегральні вимоги до керуючих дій, що обмежують, наприклад, витрати енергії на керування. Ці вимоги можна охарактеризувати величиною

$$J_3 = \sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt, \quad (\text{Д.4.6})$$

де r_i – вагові коефіцієнти, що набувають тільки додатних значень: $r_i > 0$.

Вимога суворої додатності всіх коефіцієнтів r_i пояснюється тим, що тут неприпустимі не тільки взаємна компенсація одних витрат на керування іншими (випадок, коли деякі з $r_i < 0$), але навіть і неврахування

деяких із цих витрат, що було б можливим, якби частина компонентів дорівнювала нулю.

Після всього викладеного неважко зрозуміти сенс показника якості вигляду

$$\begin{aligned}
 J &= J_1 + J_2 + J_3 = \\
 &= \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k) + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt + \sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt.
 \end{aligned} \tag{Д.4.7}$$

Показники якості J_1, J_2, J_3 (Д.4.4) – (Д.4.6) і більш загальний показник якості J (Д.4.7) є варіантами **квадратичних показників якості** керування.

Подано квадратичний показник якості керування у векторно-матричній формі. Для цього введемо в розгляд діагональні матриці:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{P}} &= \text{diag}[\tilde{p}_i], \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
 \tilde{\mathbf{Q}} &= \text{diag}[\tilde{q}_i], \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
 \tilde{\mathbf{R}} &= \text{diag}[r_i], \quad i = 1, 2, \dots, r.
 \end{aligned} \tag{Д.4.8}$$

Безпосередніми обчисленнями неважко переконатися в тому, що

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \cdot e_i^2(t_k) &= \mathbf{e}^T(t_k) \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}(t_k); \\
 \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \int_{t_0}^{t_k} e_i^2(t) dt &= \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{e}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{e}(t) dt; \\
 \sum_{i=1}^r r_i \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(t) dt &= \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{u}^T(t) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}(t) dt.
 \end{aligned} \tag{Д.4.9}$$

Використовуючи наведені співвідношення (Д.4.8) – (Д.4.9), можна загальний показник якості J (Д.4.7) подати як

$$J = \mathbf{e}^T(t_k) \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left[\mathbf{e}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}(t) \right] dt. \quad (\text{Д.4.10})$$

За математичної формалізації варіаційних задач опис усіх внутрішніх змінних задачі відбувається за допомогою координат стану. Тому необхідно квадратичний показник якості навести в такому вигляді, щоб до нього увійшли координати стану керованого об'єкта.

Якщо об'єкт лінійний, то вектор вихідних величин пов'язаний із вектором стану рівнянням

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{z}(t),$$

де \mathbf{C} – матриця виходу розміром $k \times n$.

Для такого об'єкта вектор помилки за нульового кінцевого стану дорівнює

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{0} - \mathbf{y}(t) = -\mathbf{C} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{e}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t) \mathbf{C}^T. \quad (\text{Д.4.11})$$

Підставимо вираз (Д.4.11) до виразу (Д.4.10). У результаті отримаємо

$$J = \mathbf{z}^T(t_k) \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{C} \mathbf{z}(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left[\mathbf{z}^T(t) \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}(t) \right] dt. \quad (\text{Д.4.12})$$

Позначимо

$$\frac{1}{2}\mathbf{P} = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{C}, \quad \frac{1}{2}\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C}, \quad \frac{1}{2}\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}. \quad (\text{Д.4.13})$$

Матриці \mathbf{P} і \mathbf{Q} – це симетричні матриці ($p_{ij} = p_{ji}$, $q_{ij} = q_{ji}$) розмірності $k \times k$, але в загальному випадку недиагональні, на відміну від матриць $\tilde{\mathbf{P}}$ і $\tilde{\mathbf{Q}}$.

Використовуючи введені матриці \mathbf{P} і \mathbf{Q} (Д.4.13), квадратичний показник якості (Д.4.12) можна записати в більш компактній формі

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{z}(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \left[\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] dt, \quad (\text{Д.4.14})$$

де $\frac{1}{2} \left[\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] = L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – лагранжیان (функція Лагранжа) функціонала (Д.4.14).

Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна

Формулюючи принцип максимуму, користуються спеціальними методами математичного опису об'єкта керування, системою допоміжних змінних (спряжених змінних) до вектора стану об'єкта і спеціальним видом функціонала якості – функцією Гамільтона (гамільтоніан).

Рух лінійного об'єкта керування описано *системою лінійних диференціальних рівнянь стану*

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{Д.5.1})$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$ – n -мірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ – k -мірний вектор керування.

За системою (Д.5.1) складається *гамільтоніан* H

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t] = -L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] + \sum_{j=1}^n \psi_j(t) \cdot F_j[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (\text{Д.5.2})$$

де $L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – підінтегральна функція (лагранжіан) функціоналів якості (Д.4.1), (Д.4.3);

$\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)]^T$ – вектор *спряжених змінних*, що задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\psi'_i(t) = -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{Д.5.3})$$

Системи рівнянь (Д.5.1) і (Д.5.3) створюють так звану *канонічну систему рівнянь* варіаційної задачі

$$\begin{aligned} z'_i(t) &= F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] = \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \psi_i}; \\ \psi'_i(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial z_i}; \\ & i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{Д.5.4})$$

Разом зі скалярними формами запису гамільтоніана (Д.5.2) і канонічної системи (Д.5.4) застосовують і векторно-матричні форми запису

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t] = -L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\psi}^T(t) \cdot \mathbf{F}[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]; \quad (\text{Д.5.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \boldsymbol{\psi}}; \\ \boldsymbol{\psi}'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (\text{Д.5.6})$$

де $\mathbf{F}[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] = [F_1[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \dots, F_n[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]]^T$ – вектор правих частин диференціальних рівнянь стану (Д.5.1);

$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}}$ – матриці-стовбці, що складені з часткових похідних

гамільтоніана за координатами стану та спряженими змінними

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \left[\frac{\partial H}{\partial z_1}, \frac{\partial H}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial z_n} \right]^T, \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}} = \left[\frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \frac{\partial H}{\partial \psi_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \psi_n} \right]^T. \quad (\text{Д.5.7})$$

Принцип максимуму. Для того щоб керування $\mathbf{u}^*(t)$ було оптимальним, *необхідно*:

1) щоб існували ненульовий вектор допоміжних змінних $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ (вектор спряжених змінних) і траєкторія стану $\mathbf{z}^*(t)$, що задовольняють канонічну систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t]}{\partial \boldsymbol{\psi}}, \\ \psi'_i(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t]}{\partial z_i}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{Д.5.8})$$

за $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^*(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}^*(t)$ і граничних умов, наведених у табл. Д.5.1;

2) щоб у будь-який момент часу на інтервалі керування гамільтоніан $H[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t]$, який розглянуто як функцію незалежної змінної \mathbf{u} , досягав за $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ свого максимального значення

$$H^*[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t] = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{u}_t} H[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t]; \quad (\text{Д.5.9})$$

3) щоб у кінцевий момент часу $t = t_K$ для гамільтоніана $H^*(t_K)$ було справедливо співвідношення (умова трансверсальності), що наведено в табл. Д.5.1.

Таблиця Д.5.1

Умови трансверсальності для гамільтоніана $H^*(t_k) = H^*[\mathbf{z}^*(t_k), \mathbf{u}^*(t_k), \boldsymbol{\psi}^*(t_k), t_k]$

Номер з/п	Тип задачі	Множина цілей керування	Вигляд функціонала якості	Граничні умови для канонічної системи рівнянь на лівому кінці	Граничні умови для канонічної системи рівнянь на правому кінці	Умови для H^* при $t = t_k$
1	2	3	4	5	6	7
1	Задача з закріпленими кінцями за фіксованого часу керування	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$, $t_0, t_k, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_k$ – фіксовані величини	$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\boldsymbol{\psi}^*(t_0)$ умов нема	$\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$, для $\boldsymbol{\psi}^*(t_k)$ умов нема	умов нема
2	Задача з закріпленими кінцями за нефіксованого часу керування	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$, $t_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_k$ – фіксовані величини, t_k – варійована величина	$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\boldsymbol{\psi}^*(t_0)$ умов нема	$\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$, для $\boldsymbol{\psi}^*(t_k)$ умов нема	$H^*(t_k) = 0$

1	2	3	4	5	6	7
3	<p>Задача з незакріпленим (напіввільним) правим кінцем за фіксованого часу керування</p>	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0,$ $\mathbf{z}(t_k) \in S_k:$ $\eta_i[\mathbf{z}(t_k)] = 0,$ $i = 1, 2, \dots, q < n,$ \mathbf{z}_0, t_0, t_k – фіксовані величини	$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0,$ для $\Psi^*(t_0)$ умов нема	$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k)]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)} + \boldsymbol{\alpha}^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k)]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)},$ $\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ – довільний вектор, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ умов нема	умов нема
4	<p>Задача з незакріпленим (вільним) правим кінцем за фіксованого часу керування</p>	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0,$ \mathbf{z}_0, t_0, t_k – фіксовані величини, $\mathbf{z}(t_k)$ – довільний вектор	$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0,$ для $\Psi^*(t_0)$ умов нема	$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)},$ для $\mathbf{z}^*(t_k)$ умов нема	умов нема

Продовження табл. Д.5.1

1	2	3	4	5	6	7
5	Задача з незакріпленим (напіввільним) правим кінцем за нефіксованого часу керування	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0,$ $\mathbf{z}(t_k) \in S_k:$ $\eta_i[\mathbf{z}(t_k), t_k] = 0,$ $i = 1, \dots, q < n + 1,$ \mathbf{z}_0, t_0 – фіксовані величини, t_k – варійована величина	$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] +$ $+\int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0,$ для $\Psi^*(t_0)$ умов нема	$\Psi^*(t_k) = -$ $-\frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)} +$ $+\alpha^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)},$ $\alpha^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ – довільний вектор, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ умов нема	$H^*(t_k) =$ $= \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k} -$ $-\alpha^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k}$
6	Задача з незакріпленим (вільним) правим кінцем за нефіксованого часу керування	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0,$ \mathbf{z}_0, t_0 – фіксовані величини, $\mathbf{z}(t_k)$ – довільний вектор, t_k – варійована величина	$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] +$ $+\int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0,$ для $\Psi^*(t_0)$ умов нема	$\Psi^*(t_k) = -$ $-\frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)},$ для $\mathbf{z}^*(t_k)$ умов нема	$H^*(t_k) =$ $= \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k}$

**Застосування принципу максимуму для задач із
квадратичним показником якості керування**

Розглянемо специфіку застосування принципу максимуму Л. С. Понтрягіна для знаходження оптимального керування в задачах з квадратичним показником якості (Д.4.14), коли момент завершення керування є нескінченим ($t_k = \infty$), хоч і фіксованим.

Така постановка характерна для важливих практичних задач, коли необхідно не тільки перевести об'єкт із деякого початкового стану в нульовий стан, але й утримувати об'єкт у такому стані необмежено довго.

У цьому випадку перший доданок функціонала якості (Д.4.14) дорівнює нулю, і квадратичний показник якості можна записати у формі Лагранжа (Д.4.1)

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt. \quad (\text{Д.6.1})$$

Складемо гамільтоніан і канонічну систему рівнянь цієї задачі:

$$\begin{aligned} H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t)] &= -L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)] + \boldsymbol{\psi}^T(t) \mathbf{z}'(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{y}(t) + \boldsymbol{\psi}^T(t) (\mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)), \end{aligned} \quad (\text{Д.6.2})$$

де вектор спряжених змінних $\boldsymbol{\psi}(t)$ має задовольняти векторне рівняння (Д.5.3).

Диференціюючи H за \mathbf{z} , отримуємо

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{z}(t).$$

Отже, канонічна система рівнянь цієї задачі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \\ \boldsymbol{\psi}'(t) &= -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{z}(t). \end{aligned} \tag{Д.6.3}$$

Припустимо, що існує оптимальне керування $\mathbf{u}^*(t)$ і відповідні вектори $\mathbf{z}^*(t)$ та $\boldsymbol{\psi}^*(t)$, що задовольняють канонічну систему (Д.6.3) і граничні умови

$$\mathbf{z}^*(0) = \mathbf{z}_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}.$$

Для пошуку оптимального керування $\mathbf{u}^*(t)$ дослідимо гамільтоніан (Д.6.2) на екстремум.

За оптимального керування має бути виконана умова досягнення екстремуму H за \mathbf{u}

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*(t)} = 0.$$

Обчислюючи вектор часткових похідних H за \mathbf{u} , отримуємо необхідну умову мінімуму

$$-\mathbf{R}\mathbf{u}^*(t) + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi}^*(t) = 0.$$

Звідси, якщо оптимальне керування існує, воно повинно мати такий вигляд:

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi}(t), \quad (\text{Д.6.4})$$

причому матриця \mathbf{R}^{-1} існує, тому що матриця \mathbf{R} додатно визначена. Через таку саму властивість матриці \mathbf{R} екстремум, що доставляє гамільтоніану керування $\mathbf{u}^*(t)$, є максимумом, а $\mathbf{u}^*(t)$ - оптимальним керуванням.

Щоб завершити розв'язання задачі, необхідно з виразу (Д.6.4) виключити вектор спряжених змінних $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ і виразити оптимальне керування $\mathbf{u}^*(t)$ через стан керованого об'єкта. Для цього покажемо, що за $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ розв'язки $\mathbf{z}^*(t)$ та $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ канонічної системи (Д.6.3) пов'язані співвідношенням

$$\boldsymbol{\psi}^*(t) = -\mathbf{\Gamma} \mathbf{z}^*(t), \quad (\text{Д.6.5})$$

де $\mathbf{\Gamma}$ – постійна симетрична матриця.

За підстановки в канонічну систему (Д.6.3) рівнянь (Д.6.4) і (Д.6.5) отримуємо два тотожності

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'^*(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma}) \mathbf{z}^*(t); \\ -\mathbf{\Gamma} \mathbf{z}'^*(t) &= (\mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q}) \mathbf{z}^*(t). \end{aligned}$$

Помноживши обидві частини першої тотожності зліва на $\mathbf{\Gamma}$ та складаючи результат перемноження з другою тотожністю, отримуємо

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma}) \mathbf{z}^*(t).$$

Щоб це співвідношення було тотожністю, необхідно, щоб вираз у дужках дорівнював нулю.

Отже, матриця $\mathbf{\Gamma}$ має задовольняти матричне алгебраїчне рівняння

$$\mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (\text{Д.6.6})$$

Це рівняння називають алгебраїчним рівнянням Рікатті. Матриця $\mathbf{\Gamma}$ є симетричною матрицею, що можна довести шляхом транспонування рівняння (Д.6.6).

Матричне алгебраїчне рівняння Рікатті є нелінійним рівнянням і тому може мати більше одного розв'язку. Виникає проблема вибору з множини розв'язків цього рівняння такого розв'язку, який би відповідав умовам задачі. Знайдемо додаткові умови, накладені на матрицю $\mathbf{\Gamma}$, що дають єдиний вибір цієї матриці з множини всіх розв'язків матричного алгебраїчного рівняння (Д.6.6).

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ – розв'язок рівняння (Д.6.6). Скористаємося співвідношенням (Д.6.5) і виразимо вектор оптимального керування $\mathbf{u}^*(t)$ через вектор стану $\mathbf{z}^*(t)$:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K} \mathbf{z}^*(t), \quad (\text{Д.6.7})$$

де $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma}$ – (Д.6.8)

матриця постійних коефіцієнтів підсилення оптимального регулятора (автоматичного керуючого пристрою).

Визначимо, як буде змінюватися стан керованого об'єкта за керування вигляду виразу (Д.6.7). Для цього співвідношення (Д.6.7) і (Д.6.8) підставимо в рівняння стану об'єкта (Д.6.3):

$$\mathbf{z}'^*(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{\Gamma}\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}\mathbf{z}^*(t), \quad (\text{Д.6.9})$$

де $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} \quad - \quad (\text{Д.6.10})$

матриця стану оптимальної системи керування, що складається з об'єкта керування та автоматичного керуючого пристрою (регулятора), що здійснює керування відповідно до виразу (Д.6.7).

На керований рух об'єкта цієї задачі покладена умова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}.$$

Тому рух, що відповідає рівнянню (Д.6.9), має бути асимптотично стійким, що накладає відомі обмеження на матрицю $\mathbf{A}\mathbf{c}$ і, отже, матрицю $\mathbf{\Gamma}$, від якої залежить матриця $\mathbf{A}\mathbf{c}$.

Доведено¹, що керованість об'єкта є достатньою умовою існування єдиної додатно визначеної симетричної матриці $\mathbf{\Gamma}$, що задовольняє алгебраїчне рівняння Рікатті (Д.6.6), вимоги асимптотичної стійкості оптимальної системи та має дійсні елементи.

¹ Керованість об'єкта не є необхідною умовою існування єдиного розв'язку задачі! Доведено, якщо об'єкт не є цілком керованим, але власний рух його некерованих координат асимптотично загасає, тоді існує єдина додатно визначена симетрична матриця $\mathbf{\Gamma}$, така, що керування (Д.6.7) є оптимальним.

Відмітимо, що, за виразами (Д.6.6) і (Д.6.8), матриця коефіцієнтів підсилення \mathbf{K} не залежить від стану і повністю визначена задаванням матриць $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$. Тому матрицю \mathbf{K} можна розрахувати до початку роботи системи керування, але для цього попередньо слід розрахувати матрицю $\mathbf{\Gamma}$.

Для об'єктів високого порядку при розрахунку матриці $\mathbf{\Gamma}$ необхідно використовувати чисельні методи, але для об'єктів не вище другого порядку матриця $\mathbf{\Gamma}$ може бути знайдена і без використання обчислювальних засобів.

Слід також додати, що оптимальне керування $\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{Kz}^*(t)$, може бути реалізовано за допомогою безінерційного лінійного стаціонарного регулятора і, отже, оптимальна система керування буде лінійною (!) САК.

Керованість об'єкта і критерії керованості

Перед розв'язуванням варіаційних задач оптимального керування необхідно з'ясувати питання про принципову можливість реалізувати мету керування шляхом прикладення до об'єкта припустимих керуючих дій. Відповідь на це питання дає поняття *керованості об'єкта*.

Стан об'єкта керування \mathbf{z}_0 , що описано системою диференціальних рівнянь

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad i = 1, \dots, n,$$

називається керованим відносно стану \mathbf{z}_k , якщо існує вектор припустимих керувань $\mathbf{u}(t)$, що переводить за конечний інтервал часу $t_k - t_0$ цей об'єкт із стану \mathbf{z}_0 до стану \mathbf{z}_k .

Об'єкт називається *керованим*, якщо будь-який його початковий стан \mathbf{z}_0 керований відносно будь-якого кінцевого стану \mathbf{z}_k .

Вектор керуючих дій $\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), \dots, u_k(t)\}$ належить до класу припустимих, якщо всі функції $u_1(t), \dots, u_k(t)$ є кусково-неперервними на всьому інтервалі $t_0 < t < t_k$.

Зрозуміло, що розв'язок варіаційної задачі оптимального керування існує тільки в тому випадку, коли принаймні заданий початковий стан об'єкта керований відносно всіх кінцевих станів, що належать заданій множині мети керування. Тому необхідно мати критерій керованості, що дасть змогу відповісти на принципову можливість реалізувати мету керування.

Проблема керованості найбільш повно вирішена для лінійних стаціонарних об'єктів, стан яких визначає векторно-матричне рівняння

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (\text{Д.7.1})$$

Нижчі без доведення наведено критерії керованості таких об'єктів.

Розглянемо матрицю керованості \mathbf{M} , що будується з матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} рівняння стану (Д.7.1):

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B} \right].$$

Матриця \mathbf{M} отримана внаслідок розширення рядків матриці \mathbf{B} шляхом послідовного дописування елементів відповідних рядків добутків матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B}$. Тому матриця \mathbf{M} має n рядків і $n \times k$ стовпців.

Критерій керованості. Лінійний стаціонарний об'єкт n -го порядку, описаний рівнянням стану

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

керований тоді і тільки тоді, коли матриця \mathbf{M} має ранг n .

Якщо рівняння стану (Д.7.1) задане в канонічній формі (Д.7.2) (або наведене до канонічній форми шляхом лінійного перетворення), у якій матриця стану \mathbf{A} діагональна

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{Д.7.2})$$

то найдоцільніше використовувати критерій Гільберта.

Критерій керованості Гільберта. Лінійний стаціонарний об'єкт n – го порядку, описаний рівнянням стану (Д.7.2), керований тоді і тільки тоді, коли жодний рядок матриці \mathbf{B} не є нульовим (тобто в кожному рядку матриці \mathbf{B} є хоч один ненульовий елемент).

Зазначимо, що критерій керованості не залежить від стійкості об'єкта. Тому об'єкт може бути керованим, навіть якщо він нестійкий за відсутності керування, оскільки керованість об'єкта пов'язана з потенційними можливостями керування.

Лабораторний практикум

Хісматулін Володимир Шайдуллович,

Лазарєв Олексій Владленович,

Сосунов Олександр Олексійович

та ін.

ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Відповідальний за випуск Сосунов О. О.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 12.04.2024 р.

Умовн. друк. арк. 11,5. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейербаха,7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.