

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра інженерії вагонів та якості продукції

Р. І. Візняк, А. О. Ловська, А. В. Рибін

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ
ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ**

Конспект лекцій

Частина 2

Харків 2024

Візняк Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: Конспект лекцій. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Харків: УкрДУЗТ, 2024. – Ч. 2. – 61 с.

У конспекті лекцій наведено короткі відомості з теорії коливань. Розглянуто особливості поперечних коливань балок, стійкість руху та автоколивання механічних систем, зокрема наведено принцип дії віброізоляторів, поглиначів та амортизаторів. Висвітлено особливості застосування енергопоглинального матеріалу в конструкції напіввагона, а також контейнера. Розглянуто перехідні процеси коливань найпростіших механічних систем.

Конспект лекцій призначено для здобувачів вищої освіти спеціальності 273 «Залізничний транспорт» першого (бакалаврського) рівня всіх форм здобуття освіти, а також він може бути корисним для науково-технічних працівників, які пов'язані з проектуванням, ремонтом та експлуатацією рухомого складу.

Іл. 50, табл. 1, бібліогр.: 14 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри інженерії вагонів та якості продукції 12 лютого 2024 р., протокол № 5.

Рецензент

доц. Д. І. Скуріхін

ЗМІСТ

Тематичний план навчальної дисципліни.....	4
Вступ.....	4
1 Поперечні коливання балок.....	5
Питання для самоконтролю до теми 1.....	11
2 Стійкість руху та автоколивання механічних систем.....	12
2.1 Стійкість механічних систем.....	12
2.2 Автоколивання механічних систем.....	17
2.3 Принцип дії віброізоляторів, поглиначів та амортизаторів.....	21
2.4 Особливості використання енергопоглинальних складових у конструкціях транспортних засобів.....	32
2.4.1 Обґрунтування застосування енергопоглинального матеріалу в конструкції напіввагона.....	32
2.4.2 Обґрунтування застосування енергопоглинального матеріалу в конструкції контейнера.....	40
Питання для самоконтролю до теми 2.....	46
3 Перехідні процеси коливань найпростіших механічних систем.....	47
Питання для самоконтролю до теми 3.....	59
Список літератури.....	60

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

- 1 Поперечні коливання балок.
- 2 Стійкість руху та автоколивання механічних систем.
- 3 Перехідні процеси коливань найпростіших механічних систем.

ВСТУП

Конспект лекцій «Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу» є продовженням поглибленого вивчення фундаментальних принципів, що визначають коливання та стійкість транспортних засобів. Рухомий склад, забезпечуючи безперебійну роботу залізничної галузі, долає різні коливальні явища, що виникають внаслідок динамічної взаємодії транспортних засобів із навколишнім середовищем.

Вагони є складними механічними об'єктами, їхньою характерною особливістю є коливання систем балок та коливальних систем з рухомою масою. Для розв'язання складної динаміки цих систем використовуються математичні інструменти, такі як частотні рівняння n -го ступеня, досліджуються фактори, що впливають на стійкість механічних систем, а також основні концепції автоколивань.

Конспект лекцій пояснює принципи роботи віброізоляторів, демпферів та амортизаторів, що використовуються в залізничних вагонах. Баланс між плавним рухом і руйнівною коливальною поведінкою при резонансі аналізується через розгляд стійкості механічних систем, стабільності руху і автоколивань.

Також розглядаються перехідні функції, амплітудно-частотні характеристики, фазо-частотні характеристики та годографи як інструменти для характеристики та розуміння коливальної поведінки механічних систем.

1 ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ БАЛОК

План лекції

Загальні відомості. Коливальні системи з рухомою масою. Частотні рівняння n -го ступеня.

Загальні відомості. Явище коливань часто спостерігається в машинобудуванні, особливо в таких галузях, як автомобілебудування та турбінобудування, де використовуються вали з прямою віссю та кількома дисками (колінчасті вали). Ці вали часто мають значну довжину, що підкреслює необхідність визначення критеріїв, які стосуються швидкості їхнього обертання, що по суті тягне за собою з'ясування їхніх поперечних коливань, які часто характеризуються як крутильні коливання [1 – 3].

Для прикладу розглянемо балку, що підтримується в двох точках і на яку діють зосереджені маси (рисунок 1).

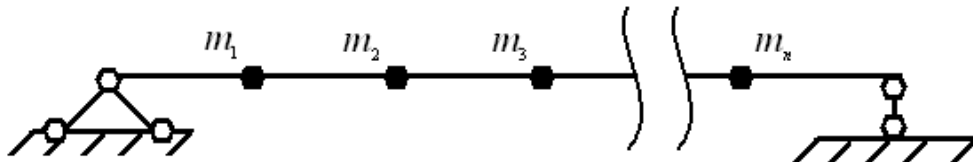


Рисунок 1 – Розрахункова схема балки на двох опорах, до якої прикладені зосереджені (точкові) маси $m_1 - m_n$

Розглянемо інерційні сили та їхні відповідні пружні еквіваленти: $-m_1\ddot{\omega}_1; -m_2\ddot{\omega}_2; \dots; -m_n\ddot{\omega}_n$, де $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ – поперечні переміщення, прогини осі балки в місці прикладення мас m_1, m_2, \dots, m_n , $\ddot{\omega}_1, \ddot{\omega}_2, \dots, \ddot{\omega}_n$ – прискорення мас. Схематично ця схема нагадує умовне зображення, наведене на рисунку 2.

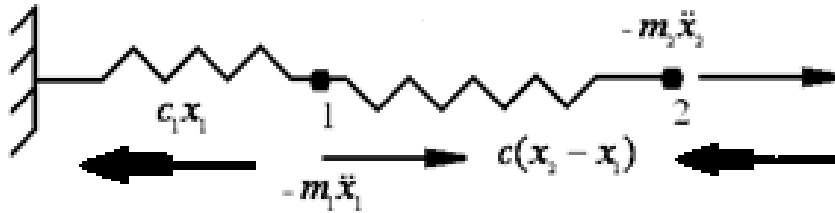


Рисунок 2 – Схема зусиль, що діють на ділянці стрижня від m_1 до m_2

У канонічному вигляді, за принципом Даламбера, маємо:

$$x - m_1 \ddot{x} = 0; \quad (1)$$

$$-c_1 x_1 + c(x_2 - x_1) - m_1 \ddot{x}_1 = 0, \quad (2)$$

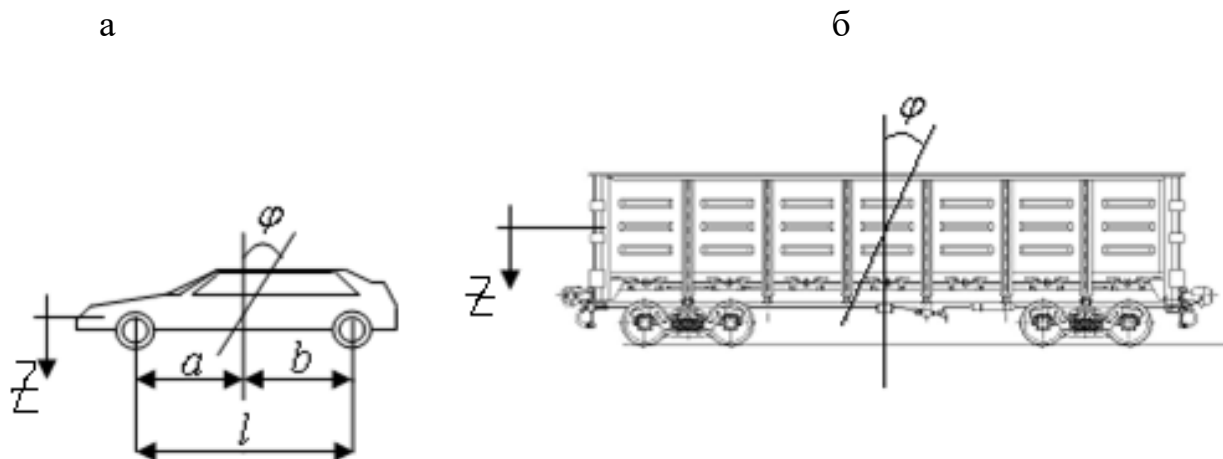
$$\text{тобто, } m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c(x_2 - x_1) = 0. \quad (3)$$

На m_2 діє тільки сила напруження другої пружини:

$$-c_2(x_2 - x_1), \Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0. \quad (4)$$

Включаючи підстановку наступних мас, позначених як i -та маса, сумарне переміщення x можна виразити як функцію переміщення x_{i-1} , x_i та x_{i+1} .

На рисунках 3 та 4 подано приклади коливальних систем, в яких рух мас під час коливань визначається змінами лінійних і кутових переміщень.



а – легковий автомобіль; б – вантажний вагон

Рисунок 3 – Вертикальні та кутові переміщення легкового автомобіля та вантажного вагона

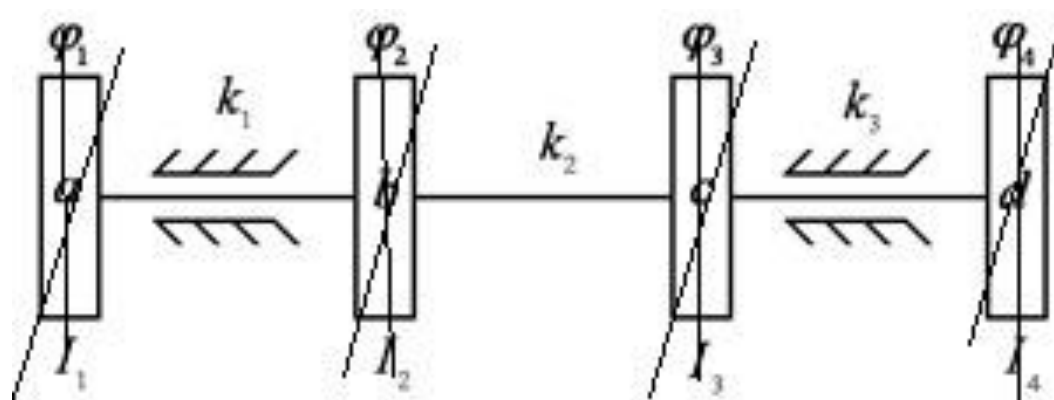


Рисунок 4 – Переміщення системи валів із дисками, закріпленими на підшипниках

Сформулювавши диференціальні рівняння, що описують рух мас у просторовій системі координат, врахуємо зовнішні сили, що діють вздовж осей X, Y та Z та сили інерції: $-m\ddot{x}$, $-m\ddot{y}$, $-m\ddot{z}$. Тоді рівняння руху будуть мати вигляд:

$$X - m\ddot{x} = 0; \quad Y - m\ddot{y} = 0; \quad Z - m\ddot{z} = 0. \quad (5)$$

У канонічному формулюванні ми документуємо дані про переміщення, які часто називають *прогинами*:

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{21} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{in}; \\ \omega_2 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{21} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{22} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{2n}; \\ \omega_n = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{n1} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{n2} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{nn} \end{cases} \quad (6)$$

За формулою Крамера (з використанням матричної алгебри), де δ_{ik} – визначене переміщення у напрямку i , викликане одиничною силою, що діє в напрямку k . За допомогою інтеграла Мора $\delta_{ik} = \sum_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx$ встановлено, що одиничні сили породжують одиничний момент $M_i(k)$:

$$P_i = -m_i \ddot{\omega}_i = 1; P_k = -m_k \ddot{\omega}_k = 1. \quad (7)$$

Крім того, за теоремою Максвелла (яка стверджує взаємність переміщень), $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ – переміщення, спричинені одиничними силами 1 і 2, є еквівалентними, що виражається їхнім рівним співвідношенням.

Для системи з одним ступенем, вочевидь: $\omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11}$, що приблизно пропорційна $m \ddot{\omega} + c_1 \omega = 0$, оскільки $c = \frac{1}{\delta_{11}}$.

Для системи з двома ступенями волі на підставі (6):

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{21} \\ \omega_2 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{21} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{22} \end{cases} \quad (8)$$

Вирішуючи її, отримуємо:

$$\omega_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha). \quad (9)$$

Підставивши це рівняння в (6) або (8), маємо:

$$\begin{cases} \lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 = 0 \\ \lambda_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + \lambda_1 m_1 \delta_{21} \omega^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Визначник $\int \begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 \\ m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$.

Підставляючи $\omega_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha)$ в (6), отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sin(\omega t + \alpha) &= -m_1(\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{11} - \\ &- m_2(\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{12} - \dots - m_n(\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{in}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha) &= -m_1(\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{21} - \\ &- m_2(\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{22} - \dots - m_n(\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{2n}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \lambda_n \sin(\omega t + \alpha) &= -m_1(\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{n1} - \\ &- m_2(\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{n2} - \dots - m_n(\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))^n \delta_{nn}. \end{aligned} \quad (13)$$

На прикладі одного з рівнянь проводимо перетворення:

$$\lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 = 0. \quad (14)$$

У такий же самий спосіб працюємо і з іншими рівняннями:

$$\begin{cases} \lambda_1 m_1 \delta_{21} \omega^2 + \lambda_2 (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) + \dots + \lambda_n m_n \delta_{2n} \omega^2 = 0 \\ \lambda_1 m_1 \delta_{2n} \omega^2 + \lambda_2 m_2 \delta_{n2} \omega^2 + \dots + \lambda_n (m_n \delta_{nn} \omega^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Під час виникнення коливань у системі амплітуда зберігається, а не прямує до нуля, якщо визначник, що складається з коефіцієнтів системи (9), дорівнює нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1 & m_1 \delta_{12} \omega^2 & \dots & m_n \delta_{1n} \omega^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega^2 & m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1 & \dots & m_n \delta_{2n} \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} \omega^2 & m_2 \delta_{n2} \omega^2 & \dots & m_n \delta_{nn} \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Розкладаючи цей визначник і представляючи коефіцієнти при різних степенях ω змінною a_i , ми отримуємо частотне рівняння n -го ступеня для квадрата частоти ω :

$$1 - a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 - a_3 \omega^6 + \dots (-1)^n a_n \omega^{2n} = 0, \quad (17)$$

де $\omega_1 = +\sqrt{\omega_1^2}$; $\omega_2 = +\sqrt{\omega_2^2}$; \dots ; $\omega_n = +\sqrt{\omega_n^2}$.

Наприклад, у системі (8) з двома ступенями волі, розкладаючи визначник другого порядку, отримуємо δ_1 -кватратне частотне рівняння:

$$\omega^4 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1 m_2 - \omega^2 (\delta_{11} \omega_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0. \quad (18)$$

Розв'язавши його, знаходимо частоти:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11} \delta_{12} \delta_{12}^2 m_2)} \cdot \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} + \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1})^2 - 4(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}; \quad (19)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11} \delta_{12} \delta_{12}^2 m_2)} \cdot \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} - \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1})^2 - 4(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}. \quad (20)$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО ТЕМИ 1

- 1 Який вигляд має рівняння згинальних коливань стрижня?
- 2 Яка теорія використовується для отримання уточненого результату досліджень згинальних коливань стрижня?
- 3 За якою формулою можна визначити колову частоту згинальних коливань стрижня?
- 4 Як можна визначити коефіцієнти податливості при згинальних коливаннях стрижня?
- 5 Яка форма згинальних коливань стрижня з двома прикріпленими масами буде відповідати нижчій частоті коливань?
- 6 За якою теоремою визначають переміщення від дії одиничної сили?
- 7 Як можна отримати частотне рівняння для квадрату частоти?

2 СТІЙКІСТЬ РУХУ ТА АВТОКОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

План лекції

Стійкість механічних систем. Автоколивання механічних систем. Принцип дії віброізоляторів, поглиначів та амортизаторів. Особливості використання енергопоглинальних складових у конструкціях транспортних засобів. Обґрунтування застосування енергопоглинального матеріалу в конструкції контейнера.

2.1 Стійкість механічних систем

Стійкість рівноваги означає характеристику механічної системи, на яку діють сили рівноваги, що полягає в тому, що вона прагне повернутися до стану рівноваги після незначного відхилення [4, 5].

І навпаки, *стійкість руху* – це властивість механічної системи в русі, завдяки якій вона майже не піддається впливу незначних стохастичних збурень (наприклад легких поривів вітру). Рух, що не має цієї властивості, вважається *нестійким*.

Критерій стійкості є умовою оцінки стійкості механічної системи в русі. Цей критерій є обов'язковим для всіх рухомих об'єктів, що застосовуються в техніці, включаючи залізничний рухомий склад, автомобілі, літаки, кораблі, снаряди, обладнання, ракети, супутники Землі та інші.

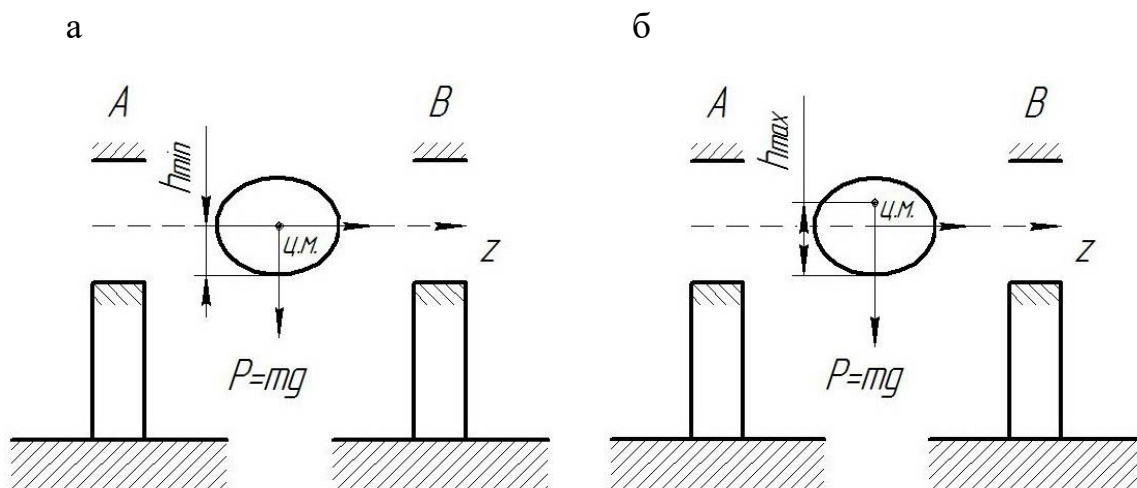
Механічні системи поділяються на такі, що перебувають у *встановленому* та *невстановленому* стані рівноваги. Завдання полягає в дослідженні специфічного руху механічних систем та їх виходу зі стану рівноваги після незначних початкових збурень. Зі збільшенням величини коливань виникає *нестійкий рух*. І навпаки, при гармонійних коливаннях

система ефективно повертається до стану рівноваги через монотонне наближення або затухання коливань, тим самим досягаючи *стабільного руху*.

Вирішення численних важливих технічних проблем вимагає ретельної уваги до перевірки стійкості станів рівноваги і стаціонарних режимів, а також аналізу впливу параметрів механічної системи на стійкість.

Для консервативних механічних систем зі скінченним числом ступенів свободи, які керуються теорією Лагранжа-Діріхле, стійкість забезпечується, якщо потенціальна енергія системи має мінімум у стані рівноваги.

Наприклад, розглянемо тіло, закріплене на горизонтальній осі (рисунок 5). Відповідно до встановленої умови, тіло досягає рівноваги під дією сили тяжіння $P = mg$. Коли $\sum m_z(p) = 0$, центр ваги C тіла займає найнижче або найвище положення.



а – стійка рівновага тіла; б – нестійка рівновага тіла

Рисунок 5 – Розрахункова схема системи

У випадку а) незначне відхилення моменту сили P прагне повернути тіло в положення рівноваги.

І навпаки, у випадку б) будь-яке незначне відхилення посилюється за рахунок моменту сили P .

Якщо центр мас тіла збігається з віссю обертання, то рівновага тіла стає байдужою, або астатичною, що призводить до того, що стабільність може бути порушена в будь-який момент.

Рівновага тіла вважається стійкою, коли його центр мас знаходиться в найнижчому положенні, і нестійкою, коли він знаходиться в найвищому положенні.

Стан рівноваги тіла з фіксованою віссю обертання передбачає, що сума моментів усіх діючих сил відносно цієї осі дорівнює нулю.

$$\sum m_z(F_k) = 0. \quad (21)$$

У випадку консервативних систем з одним ступенем волі ознакою мінімуму потенціальної енергії Π є додатний коефіцієнт жорсткості c . Коли кількість ступенів волі n перевищує одиницю, визначення Π_{min} узгоджується з системою нерівностей, згідно з критерієм Сильвестра.

$$C_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \dots C_{14} \\ C_{21} & C_{22} \dots C_{24} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{41} & C_{42} \dots C_{44} \end{vmatrix} > 0 \quad (22)$$

Аналогічні міркування застосовуються при оцінюванні стійкості колісної пари до сходу з рейок. Під час руху вагона по колії, особливо при проходженні кривих, колісна пара у візку може займати певний кут відносно рейки, відомий як кут набігання.

Така конфігурація породжує поперечну горизонтальну силу між ребордою колеса і головкою рейки $У$ точці контакту колеса з рейкою на колесо діє вертикальне навантаження P_B , горизонтальна сила, еквівалентна боковому тиску колеса на рейку P_b , реакція рейки N і сила тертя між гребенем колеса і рейкою, позначена як μN , де μ – коефіцієнт тертя.

Колесо не може утримувати контакт з рейкою, якщо проєкція сили на площину ковзання перевищує проєкції інших сил на цю площину, тобто:

$$P_B \sin \beta > P_B \cos \beta + \mu N, \quad (23)$$

де β – кут нахилу утворюючої гребеня до горизонталі.

Нормальна реакція рейки:

$$N = P_B \sin \beta + P_B \cos \beta. \quad (24)$$

Унаслідок цього, подібно до клину, гребінь колеса опускається відносно профілю рейки, перешкоджаючи процесу накочування колеса на рейку.

Після нескладних перетворень можна отримати розширений критерій оцінки стійкості колісної пари на рейковій колії:

$$\frac{P_B}{P_B} < \frac{\operatorname{tg} \beta - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \beta}. \quad (25)$$

Отже, коефіцієнт запасу стійкості колеса до сходу з рейок можна визначити так:

$$k_{zc} = \frac{tg\beta - \mu}{1 + \mu tg\beta} \cdot \frac{P_B}{P_B} > 1. \quad (26)$$

Цей критерій залишається застосовним для малих кутів контакту колеса з рейкою. Однак зі збільшенням кута контакту стійкість зменшується. Бокові обертальні та лінійні коливання у вертикальній та горизонтальній площинах відповідно збільшують боковий тиск, погіршують умови стійкості та підвищують ризик сходу з рейок на прямих ділянках колії.

На рисунку 6 показано перекидання універсального напіввагона (а) та пасажирського вагона відкритого типу (б) внаслідок втрати поперечної стійкості. Це відбувається, коли спочатку погіршується горизонтальна стійкість колісної пари ведучого вагона відносно колії, а потім перекидаючий момент перевищує момент, необхідний для повернення вагона, завантаженого вантажем і пасажирями, у початкове робоче положення.



а – перекидання вантажного вагона

б – перекидання пасажирського вагона

Рисунк 6 – Ілюстрація часткової втрати поперечної стійкості вагонів у складі вантажного та пасажирського поїздів

2.2 Автоколивання механічних систем

Автоколивання (від грец. *autos* – сам) – це коливання, які зберігаються без згасання і можуть тривати за відсутності зовнішніх збурень у коливальній системі, на відміну від вимушених коливань. Ці самопідтримувані коливання виникають завдяки активному елементу, що компенсує власні втрати енергії в реальній системі. Вони регулюються внутрішніми властивостями системи і не залежать від початкових умов [4–6].

Ілюстративними прикладами автоколивань є ритмічні коливання маятника годинника та скрипкової струни, коли її приводить у рух смичок.

У багатьох випадках посилення коливань поступово зменшується, приводячи рух до стабільного режиму, що характеризується постійними амплітудами A і періодами T – відомими як стаціонарні (встановлені) режими коливань.

Основна механіка стає очевидною при розгляді коливань фрикційної системи, де тертя характеризується нелінійною функцією швидкості:

$$R = -b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3, \quad (27)$$

де b_1, b_3 – довільні постійні.

Отже, диференціальне рівняння, що включає інерційні сили $a\ddot{q}$ та пружні компоненти cq можна виразити так:

$$a\ddot{q} - b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3 + cq = 0. \quad (28)$$

Лінійні системи зберігають свої визначальні властивості (пружність, масу, коефіцієнт тертя) незалежно від зміни стану системи, завдяки чому коливальні процеси описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Отже, лінійні системи проявляють коливальні явища, що описуються лінійними рівняннями.

Лінійні функції, показані на рисунку 7, є типовими характеристиками лінійних систем. За певних припущень нелінійними членами нехтують під час лінеаризації через нескінченно малі відхилення від рівноваги.

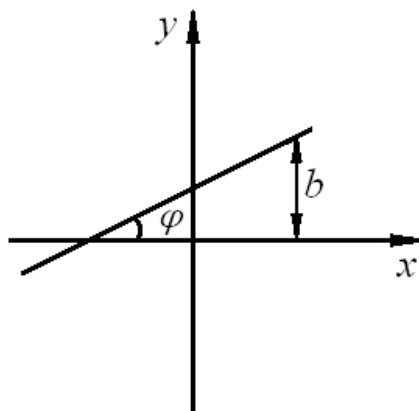
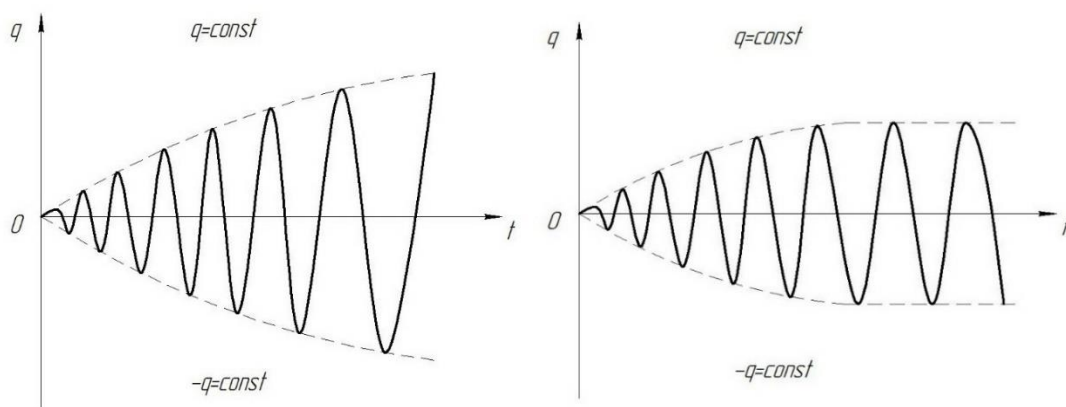


Рисунок 7 – Лінійна функція прямої $y=kx+b$

Наявність тертя, часто антагоністичного (від'ємного), може спричинити нестійкість системи. Демпфірування зменшує вплив нелінійних членів рівняння на зростання коливань, спрямовуючи рух до стаціонарного режиму, що характеризується постійною амплітудою. Рисунок 8 ілюструє приклади дестабілізуючого впливу від'ємного тертя на механічні системи.



а – до введення необхідного
тертя

б – після підвищення
інтенсивності тертя

Рисунок 8 – Ефект від'ємного тертя

Сили тертя не тільки сприяють гасінню коливань, але й можуть викликати їхню дестабілізацію за певних умов.

Розглянемо систему, що складається з двох барабанів (зображених на рисунку 9), кожен з яких обертається з кутовими швидкостями ω , де $\omega_1 = \omega_2$.

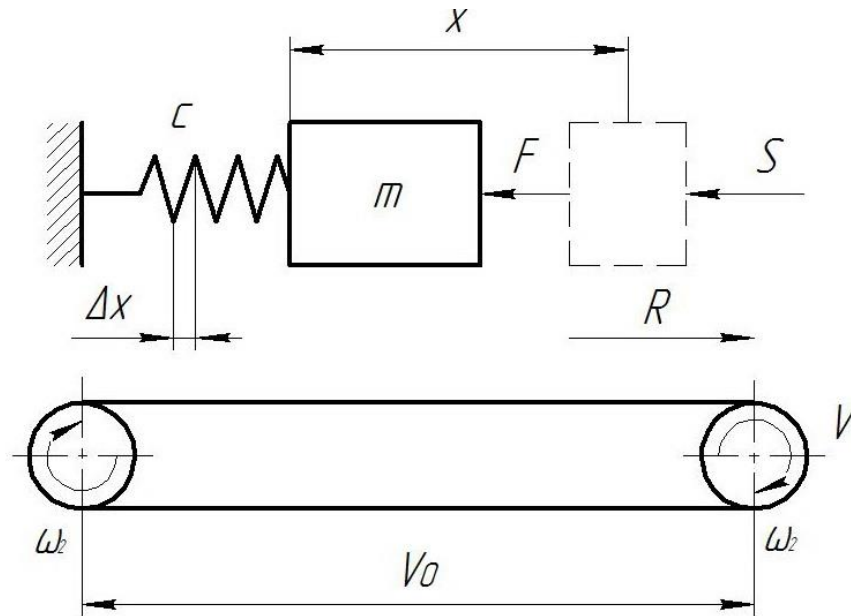


Рисунок 9 – Розрахункова схема системи з двох барабанів

Усередині цієї системи на ремені, що з'єднує два барабани, знаходиться вантаж масою m , рух якого обмежений пружиною з коефіцієнтом жорсткості c . Під дією сили R вантаж зміщується праворуч, що призводить до подовження пружини на величину Δx . Якщо припустити, що рівновага досягається, коли $F_{\text{пруж}} = R_0$, то статичне переміщення вантажу визначається відповідно:

$$x_0 = \frac{R_0}{c} V_0; \quad (29)$$

$$F_{\text{пруж}} = R_0 V_0, \quad (30)$$

де V_0 – відносна швидкість.

Але відомо, що $R_0=f(V_0)$, тоді характеристика тертя може бути зображена так (рисунок 10):

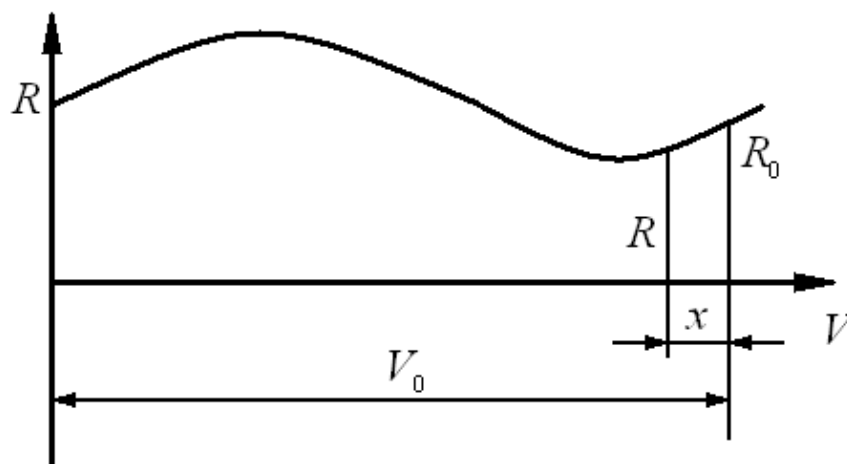


Рисунок 10 – Характеристика тертя

Припустимо, що під дією зовнішнього збурення $P(t)$ вантаж зміщується з положення спокою в момент часу $t_0 = 0$. Також зміниться характеристика самого руху. Нехай у момент часу t , якщо додаткове переміщення вантажу буде $y - x$, абсолютна швидкість V_{abc} дорівнює x' , а швидкість відносно стрічки дорівнюватиме:

$$V_{abc} = V_0 - x'. \quad (31)$$

Під час руху на вантаж діють сили пружності, а також внутрішні та зовнішні опори.

Пружна сила:

$$F_{пруж} = -c(x+x_0). \quad (32)$$

Зовнішній опір:

$$S = -kx'. \quad (33)$$

Внутрішній опір:

$$R_0 = x_0 c. \quad (34)$$

Диференціальні рівняння вантажу мають вигляд:

$$-c(x+x_0) - kx' + R = mx''. \quad (35)$$

Ураховуючи, що $R \neq R_0$, $V_{відн} \neq V_0$ та $R = R_0 - R_0'x$, $R_0 = \text{tg}\varphi$, тоді, проводячи відповідні перетворення, маємо:

$$-c\left(x + \frac{R_0}{c}\right) - kx' + R = mx''; \quad (36)$$

$$mx'' + (R_0 + k)x' + cx = 0; \quad (37)$$

$$-cx - R_0 - kx' + R_0 - R_0'x' = mx''. \quad (38)$$

Остаточне диференціальне рівняння руху системи буде мати вигляд:

$$mx'' + cx + x'(R_0 + k) = 0. \quad (39)$$

2.3 Принцип дії віброізоляторів, поглиначів та амортизаторів

Віброізолятори, поглиначі та демпфери слугують важливими механізмами для зменшення шкідливих динамічних явищ. Їхня робота ґрунтується на таких принципах [5, 6].

1 Вимушені коливання мають малу амплітуду, коли система залишається нижче певного порогу. Тобто якщо (t) системи менше або дорівнює $\omega(t)$.

2 Тертя (F) викликає розсіювання енергії, що призводить до вимушених коливань зі зменшеними амплітудами порівняно з випадками без тертя. Цей ефект особливо виражений в межах резонансних частот.

3 Сили тертя поступово затухають коливання, що особливо помітно під час вільних коливань.

4 Цей принцип лежить в основі віброізоляторів, необхідних для пом'якшення вібрацій, що виникають під час руху транспортних засобів, наприклад, вагонів у складі поїзда, які можуть вплинути на ефективність роботи та цілісність конструкції.

Спеціальні пристрої використовують ці принципи для ізоляції та гасіння вібрацій. Віброізолятори, наприклад, містять пружні елементи, пристосовані для гасіння вібрацій, переважно у високочастотному діапазоні.

Початкова протидія шкідливому впливу на вимірювальні пристрої транспортних засобів передбачає інтеграцію пружних елементів, таких як амортизатори, пружини, гумові та металеві прокладки. Поглиначі, навпаки, використовують фрикційні елементи – рідинні, сухі або гістерезисні – для зменшення вібрацій.

У більш складних системах, що складаються з конструктивних елементів, віброізолятори та поглиначі поєднують у собі принципи, що сприяють швидкому загасанню вільних коливань після ударів і поштовхів.

Розгляд віброізоляторів ілюструє їх повсюдне застосування, особливо в залізничній техніці (транспортних засобах).

Активні віброізолятори розміщуються між джерелами вібрації та основою для протидії вимушеним силам (рисунок 11). *Пасивні віброізолятори*, навпаки, встановлюються для усунення потенційних вібрацій основи (рисунок 12). Ці пристрої допомагають захистити обладнання від небажаних вібрацій, тим самим вони забезпечують експлуатаційну стабільність і довговічність у різних сферах застосування.

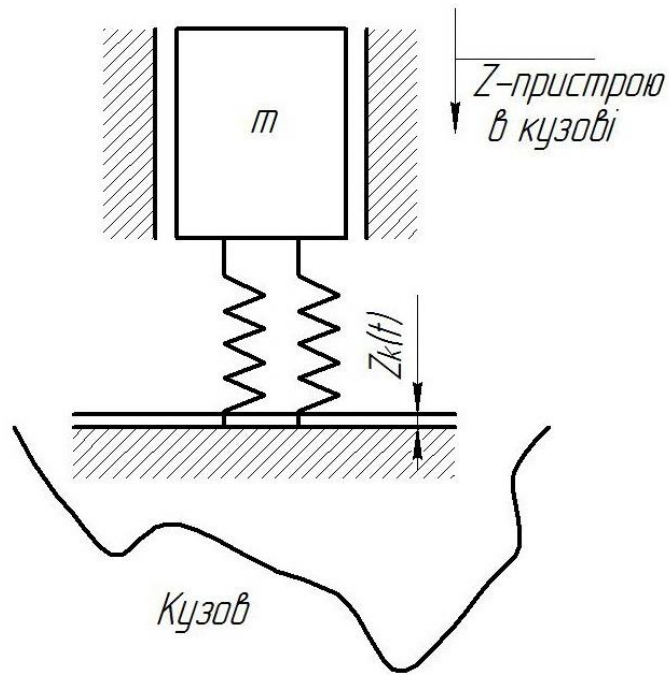


Рисунок 11 – Активні віброізолятори

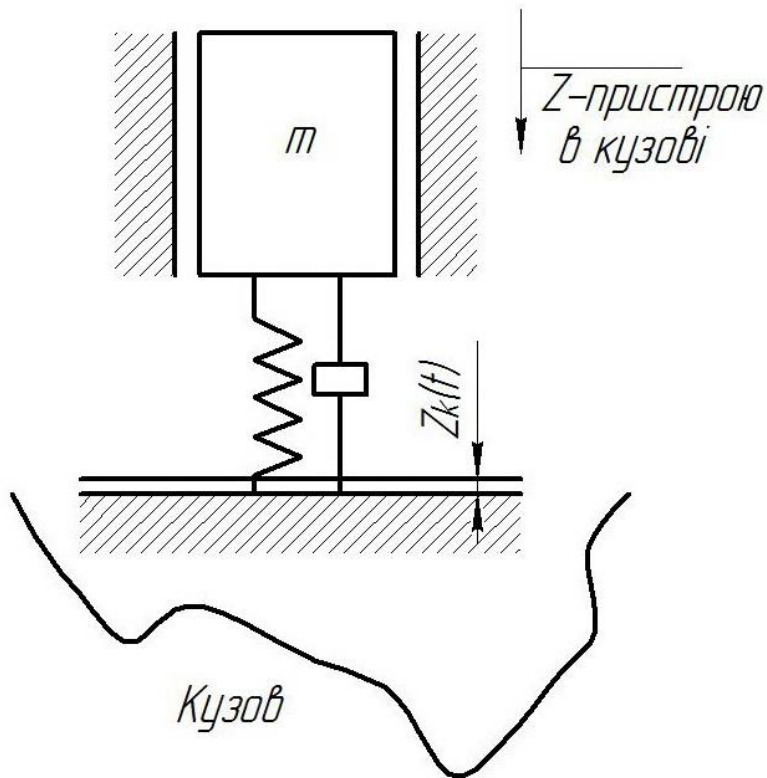


Рисунок 12 – Пасивні віброізолятори

У віброізоляторах, що піддаються кінематичному збудженню (як показано на рисунку 13), частоти збудження не мають суворої організації,

$$mz_1'' \cdot c(z_1 - z_k), \quad (40)$$

де $z_k(t) = a \sin \omega t$ – коливання системи.

$$z_1 = a\chi \sin(\omega t + \theta), \quad (41)$$

де $\chi = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{v^2}} = \frac{1}{1 - n^2}$ – коефіцієнт передавання амплітуд.

Очевидно, що найбільш нестійкий стан виникає, коли відношення кутової частоти ω до лінійної частоти v дорівнює одиниці, тобто $\frac{\omega}{v} = 1$. Отже, необхідно ретельно підходити до узгодження до- і післярезонансних зон $\omega < v$, $\omega > v$.

Допустима величина переміщення об'єкта визначається характеристиками пружного елемента. Так для жорсткого елемента $c \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$, а $n \rightarrow \infty$, отже і значення $\chi \rightarrow \infty$. Коливання як маси, так і демпфованого об'єкта залишаються однаковими.

Позитивний ефект від використання пружної системи підвішування залежить від зменшення жорсткості пружного елемента. Таке регулювання гарантує, що при максимальній робочій швидкості коливальні процеси вирівнюються з резонансною зоною, де частота n зростає, а переміщення x залишається нижче одиниці ($x < 1$).

На швидкостях, нижчих за ті, що відповідають малим коефіцієнтам демпфування c , існує потенційна можливість виникнення резонансних коливань в об'єкті, який амортизує. У таких випадках поряд з пружними елементами в систему підвіски вводять демпфери. Ці демпфери зазвичай складаються з гуми з пружними і в'язкими властивостями, що сприяє непружному опору. Отже, рівняння набуває такого вигляду:

$$mz_1'' \cdot c(z_1 - z_k) + \beta(z_1 - z_k') = 0; \quad (42)$$

$$z_1 = a\chi \sin(\omega t - \theta); \quad (43)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{1+4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\gamma^2}}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{v^2})^2 \cdot 4\gamma^2 (\frac{\omega^2}{\gamma^2})}} = \frac{\sqrt{1+4\gamma^2 v^2}}{\sqrt{(1-v^2)^2 + 4\gamma^2 v^2}}, \quad (44)$$

де $\gamma = \frac{\beta}{\beta_{кр}}$ та $\beta = 2\sqrt{mc}$.

Це означає, що зі збільшенням β , x та z_1 – збільшуються.

Правильне налаштування параметрів демпфуючих елементів у різних пристроях, що використовуються на вагонах, сприяє підвищенню їхньої довговічності та експлуатаційної стабільності.

Зазвичай для різних машин з $n = 500 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$; $\frac{\omega}{v} \geq 4$; $\beta < \frac{1}{15}$.

Якщо $\frac{\omega}{p} \geq 3$, ($\mu < \frac{1}{8}$) – це відповідає тихохідним машинам зі значенням $n \leq 500 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$.

Варіанти пристроїв показані на рисунках 14-16.

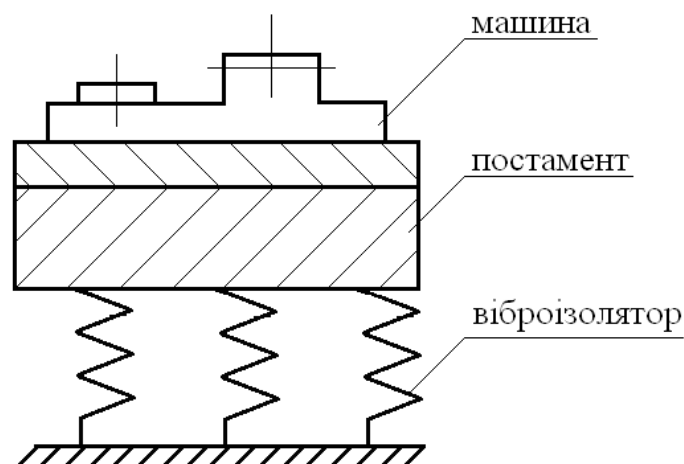


Рисунок 14 – Пристрій з пружними опорами

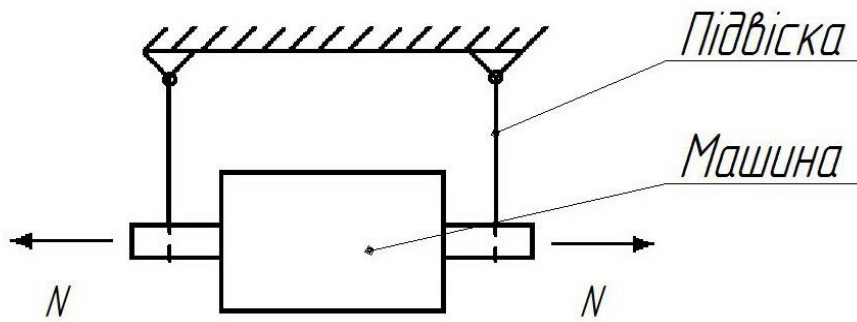
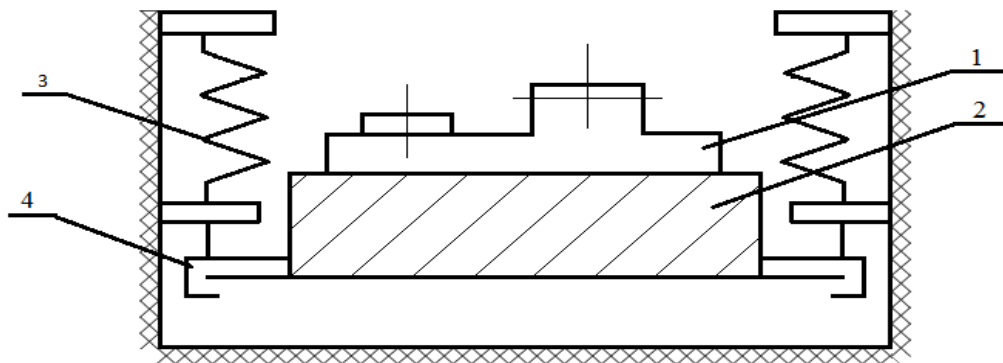


Рисунок 15 – Підвісний пристрій маятникового типу



1 – машина, 2 – постамент, 3 – віброізолятор,
4 – підвісна опора

Рисунок 16 – Підвісний пристрій надпостаментного типу

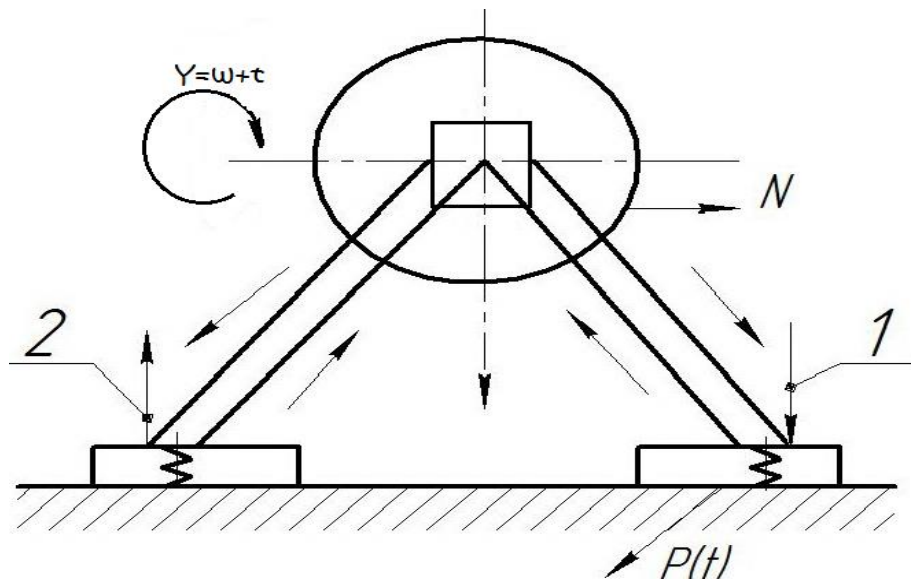
Горизонтальні вимушені сили проявляються переважно в горизонтальній площині, що обґрунтовує раціональне застосування маятникових систем підвіски. Наприклад, у конструкції вагонів це реалізується за допомогою ударно-центруючих механізмів, таких як автозчепи типу СА-3 у поєднанні з ударною розеткою, центруючою балкою та парою маятникових підвісок.

Аналогічно на візках пасажирських вагонів моделей КВЗ-ЦНП (тип I, II застосовуються люлькові підвіски з опорним пристроєм, що складається з люльки для трирядних пружин центрального підвішування і набору з двох підвісок і чотирьох серг.

Чим довша підвіска, тим нижча її власна частота, що підвищує ефективність віброізоляції.

Принцип пом'якшення підвіски полягає в її піддатливості в напрямку прикладання сили або стиснення, тобто в бік дії $p(t)$ або пари $p(t)$.

Однофазний двигун (рисунок 17).



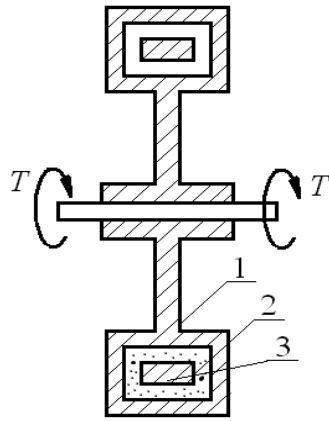
1 – стиснення; 2 – відновлення

Рисунок 17 – Однофазний двигун

Поглиначі (рисунок 18-20).

Існують різні схеми поглинання крутильних коливань:

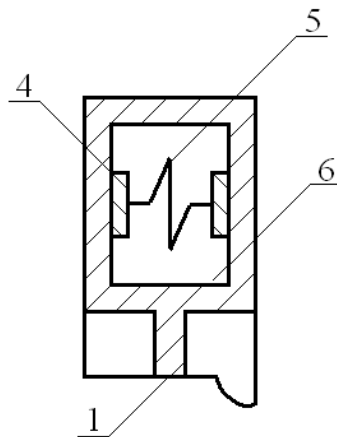
а) рідинне тертя (рисунок 18), де демпфування відбувається за рахунок в'язкості та інерції рідини;



1 – диск; 2 – тороподібна; 3 – масивне кільце

Рисунок 18 – Рідинне тертя

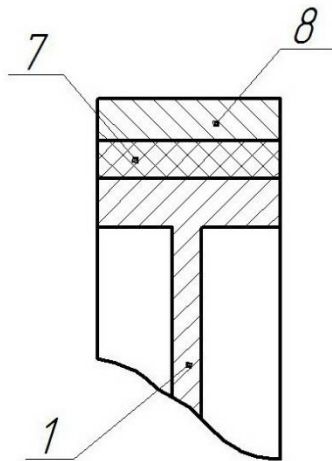
б) сухе тертя (рисунок 19), де демпфування відбувається за рахунок зносу матеріалів, що контактують один з одним;



1 – диск, 4 – опори пружини; 5 – пружина; 6 – порожнини

Рисунок 19 – Сухе тертя

в) гістерезисний тип (рисунок 20), де енергія коливань поглинається за рахунок нелінійної залежності деформації матеріалу від прикладеного навантаження. Цей тип демпфування не пов'язаний з тертям, гасіння відбувається за рахунок інтенсивного розсіювання енергії всередині кільця 7.



7 – демпфіруюче кільце; 8 – бандаж

Рисунок 20 – Поглиначі гістерезисного типу

Існують також поглиначі ударної дії (рисунки 21-23).

а) плаваючі (рисунок 21), що використовуються в штангах управління літаків, вертольотів і верстатів;

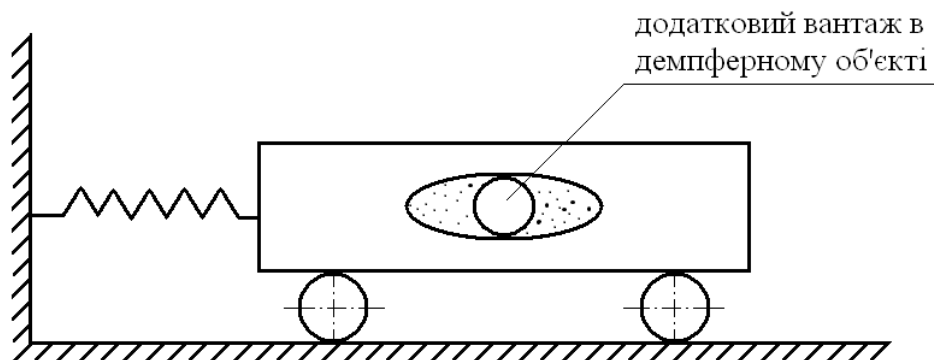


Рисунок 21 – Плаваючі поглиначі

б) маятникові (рисунок 22), застосовуються у висотних будівлях, баштових конструкціях, димоходах і вітряках;

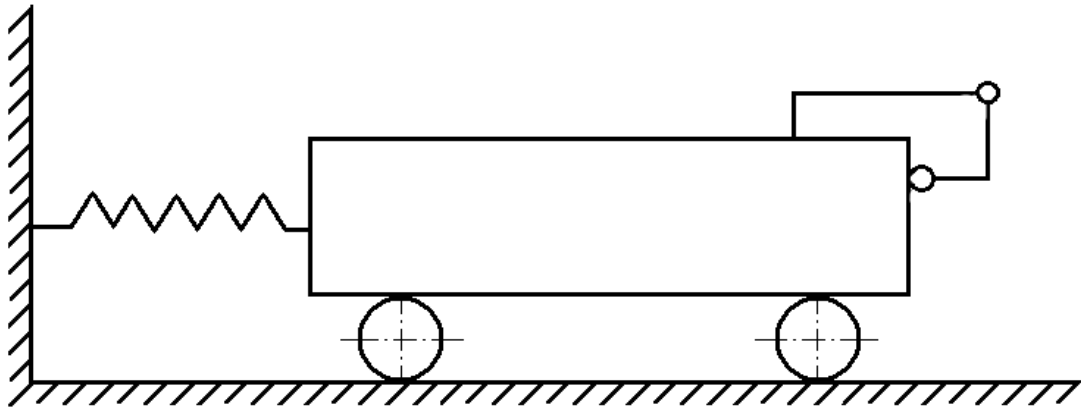


Рисунок 22 – Маятникові поглиначі

в) пружинні (рисунок 23), що використовується у фрезах, розточувальних верстатах, вібраційних машинах, особливо під час резонансу.

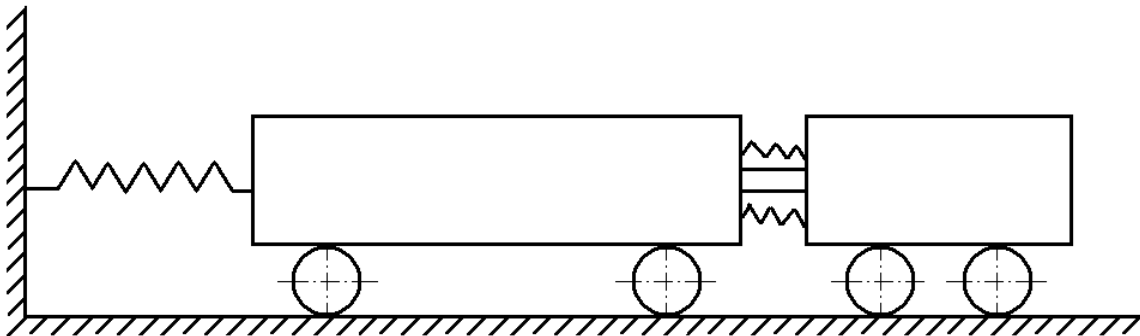
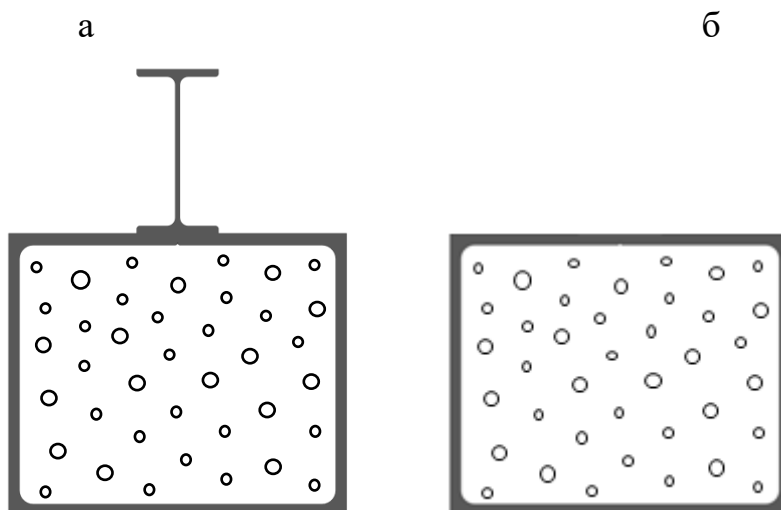


Рисунок 23 – Пружинні поглиначі

2.4 Особливості використання енергопоглинальних складових в конструкціях транспортних засобів

2.4.1 Обґрунтування застосування енергопоглинального матеріалу в конструкції напіввагона

Для зменшення динамічних навантажень на несучі конструкції транспортних засобів ефективним є застосування енергопоглинаючих матеріалів [7 – 10]. Наприклад, посилення хребтової балки рами напіввагона за рахунок використання замкнутого профілю не тільки збільшує її момент опору, але й полегшує інтеграцію в неї енергопоглинаючого наповнювача (рисунок 24). Цей наповнювач, що має пружні, в'язкі або пружно-в'язкі властивості, розміщується по всій довжині хребтової балки між задніми упорами автозчепів[7, 8].



а – напіввагон; б – критий вагон, вагон-платформа, вагон-хопер,
вагон-цистерна

Рисунок 24 – Переріз замкнутої конструкції хребтової балки
вагона

Блокова ієрархічна схема напіввагона з наповнювачем у хребтовій балці показана на рисунку 25.

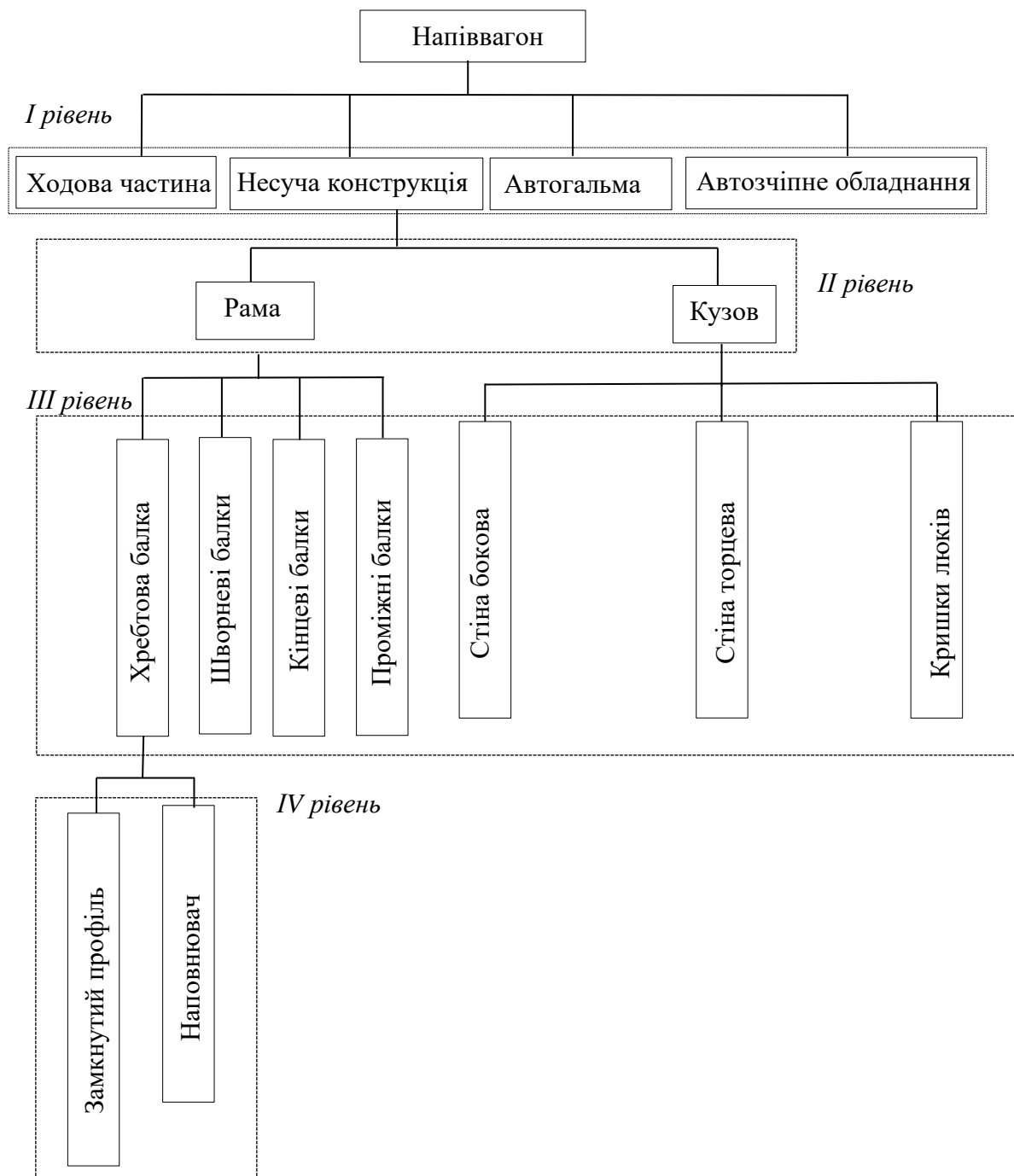


Рисунок 25 – Блокова-ієрархічна схема напіввагона

Оскільки конструкція ходових частин, автогальм та автозчепного обладнання аналогічна конструкції вагона-прототипу, вони не відображені на схемі.

Елементи, що містять ходову частину, несучу конструкцію, гальма та автозчіпні пристрої, відносяться до I ієрархічного рівня формалізованого опису. Елементи несучої конструкції напіввагона, а саме рама і кузов, складають II ієрархічний рівень. III ієрархічний рівень охоплює елементи II рівня, включаючи хребтову балку, шворневі балки, кінцеві балки, проміжні балки, бокові стіни, торцеві стіни і кришки люків. У свою чергу IV рівень складається із замкненого профілю та наповнювача.

Для оцінювання навантаженості несучої конструкції напіввагона з урахуванням впроваджених заходів з підсилення проведено математичне моделювання. Розрахункова схема напіввагона зображена на рисунку 26.

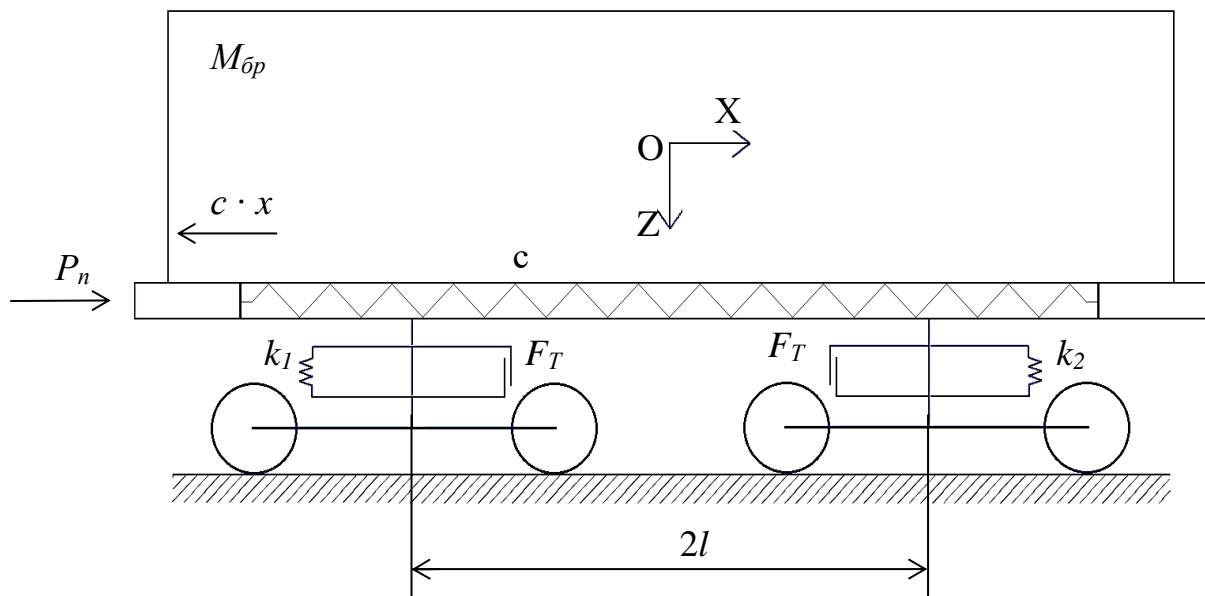


Рисунок 26 – Розрахункова схема напіввагона

Для аналізу динамічного навантаження несучої конструкції напіввагона з наповнювачем у хребтовій балці з урахуванням пружних властивостей була використана математична модель, запропонована професором Богомазом Г. І. Ця модель спочатку була призначена для опису динамічного навантаження несучої конструкції вагона-платформи з

контейнерами-цистернами, а потім була адаптована для врахування переміщень у поздовжній площині несучої конструкції напіввагона [7].

На початковому етапі дослідження було проведено математичне моделювання для оцінювання динамічного навантаження несучої конструкції напіввагона з наповнювачем у хребтовій балці, який має пружні властивості.

$$M_{\phi p} \cdot \ddot{x} + (M_B \cdot h) \cdot \ddot{\phi} = P_n - (2P_{mp} + c \cdot x), \quad (45)$$

$$I_B \cdot \ddot{\phi} + (M_B \cdot h) \cdot \ddot{x} - g \cdot \varphi \cdot (M_B \cdot h) = l \cdot F_{TP} (\text{sign} \dot{\Delta}_1 - \text{sign} \dot{\Delta}_2) + l(k_1 \cdot \Delta_1 - k_2 \cdot \Delta_2), \quad (46)$$

$$M_B \cdot \ddot{z} = k_1 \cdot \Delta_1 + k_2 \cdot \Delta_2 - F_{TP} (\text{sign} \dot{\Delta}_1 - \text{sign} \dot{\Delta}_2), \quad (47)$$

при цьому

$$\Delta_1 = z - l \cdot \varphi; \quad \Delta_2 = z + l \cdot \varphi,$$

де $M_{\phi p}$ – повна маса вагона (маса брутто);

M_B – маса несучої конструкції вагона;

I_B – момент інерції вагона;

P_n – поздовжня сила на задній упор автозчепу;

P_{mp} – сили тертя між п'ятниками рами та підп'ятниками візка;

c – жорсткість матеріалу, що використовується для заповнення елементів несучої конструкції вагона;

l – половина бази вагона;

F_{TP} – абсолютне значення сили сухого тертя в ресорному комплекті;

k_1, k_2 – жорсткість пружин ресорного підвішування візків вагона;

x, φ, z – координати, що відповідають поздовжньому, кутовому (навколо поперечної осі) та вертикальному переміщенню вагона.

Крім того, ця модель доопрацьована для врахування сили тертя, що виникає між п'ятниками та підп'ятниками під дією поздовжньої сили на задній упор автозчепу.

У якості чисельного значення поздовжньої сили на несучу конструкцію піввагона прийнято рівним 3,5 МН [9]. В якості прототипу був обраний напіввагон моделі 12-757 зі стандартними візками типу 18-100.

Диференціальні рівняння (45) – (47), що описують систему, були розв'язані за допомогою методу Рунге-Кутта, реалізованого в програмному пакеті MathCad [10, 11]. Рівняння були сформульовані так:

$$F(t, y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \\ y_6 \\ \frac{P_n - (2P_{mp} + c \cdot y_1) - (M_B \cdot h) \cdot \dot{y}_4}{M_{op}} \\ l \cdot F_{TP} (\text{sign} \dot{\Delta}_1 - \text{sign} \dot{\Delta}_2) + l(k_1 \cdot \Delta_1 - k_2 \cdot \Delta_2) - (M_B \cdot h) \cdot \dot{y}_2 + \\ + g \cdot y_3 \cdot (M_B \cdot h) \\ I_B \\ \frac{k_1 \cdot \Delta_1 + k_2 \cdot \Delta_2 - F_{TP} (\text{sign} \dot{\Delta}_1 - \text{sign} \dot{\Delta}_2)}{M_B} \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$Z = rkfixed(Y0, tn, tk, n, F).$$

При цьому $y_1 = q_1$, $y_3 = q_3$, $y_5 = q_5$, $y_2 = \dot{y}_1$, $y_4 = \dot{y}_3$, $y_6 = \dot{y}_5$.

Початкові умови приймаються рівними нулю. За допомогою розрахунків було визначено, що максимальні прискорення, які діють на несучу конструкцію напіввагона, становлять 37,8 м/с² (рисунок 27). Це значення прискорення на 2,6 % нижче, ніж для несучої конструкції без

наповнювача. Також було встановлено, що жорсткість матеріалу, який використовується для заповнення балки, має становити приблизно 100 кН/м.

Крім того, були проведені розрахунки з урахуванням використання наповнювача, який має в'язкі властивості.

Отримані диференціальні рівняння, що описують рух напіввагона, мають вигляд:

$$M_{\phi p} \cdot \ddot{x} + (M_B \cdot h) \cdot \ddot{\phi} = P_n - 2P_{mp} - \beta \cdot \dot{x}, \quad (49)$$

$$I_B \cdot \ddot{\phi} + (M_B \cdot h) \cdot \ddot{x} - g \cdot \phi \cdot (M_B \cdot h) = l \cdot F_{TP} (\text{sign}\dot{\Delta}_1 - \text{sign}\dot{\Delta}_2) + l(k_1 \cdot \Delta_1 - k_2 \cdot \Delta_2), \quad (50)$$

$$M_B \cdot \ddot{z} = k_1 \cdot \Delta_1 + k_2 \cdot \Delta_2 - F_{TP} (\text{sign}\dot{\Delta}_1 - \text{sign}\dot{\Delta}_2), \quad (51)$$

де β – коефіцієнт в'язкого опору матеріалу, яким заповнена хребтова балка.

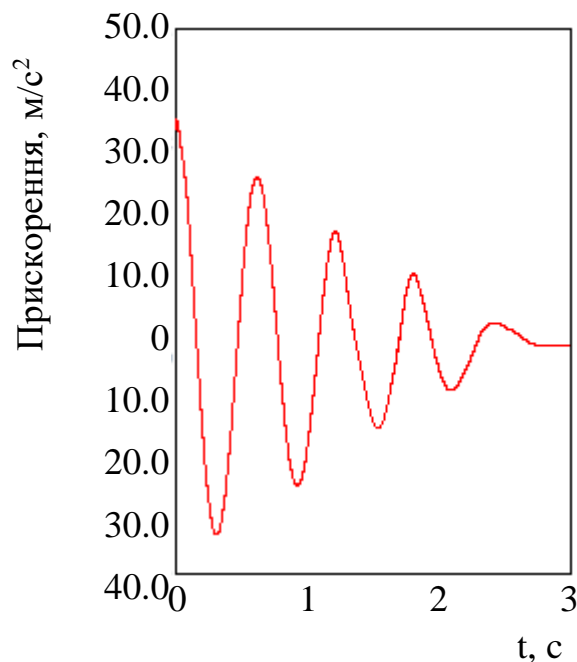


Рисунок 27 – Прискорення несучої конструкції напіввагона з урахуванням використання пружного наповнювача в хребтовій балці

Математична модель (49) – (51) була розв'язана з використанням програмного пакету MathCad:

$$F(t, y) = \left[\begin{array}{c} y_2 \\ y_4 \\ y_6 \\ \frac{P_n - 2P_{mp} - \beta \cdot y_2 - (M_B \cdot h) \cdot \dot{y}_4}{M_{\text{оп}}} \\ l \cdot F_{TP}(\text{sign}\dot{\Delta}_1 - \text{sign}\dot{\Delta}_2) + l(k_1 \cdot \Delta_1 - k_2 \cdot \Delta_2) - (M_B \cdot h) \cdot \dot{y}_2 + \\ + g \cdot y_3 \cdot (M_B \cdot h) \\ \frac{I_B}{M_B} \\ \frac{k_1 \cdot \Delta_1 + k_2 \cdot \Delta_2 - F_{TP}(\text{sign}\dot{\Delta}_1 - \text{sign}\dot{\Delta}_2)}{M_B} \end{array} \right], \quad (52)$$

$$Z = \text{rkfixed}(Y0, tn, tk, n, F).$$

При цьому $y_1 = q_1$, $y_3 = q_3$, $y_5 = q_5$, $y_2 = \dot{y}_1$, $y_4 = \dot{y}_3$, $y_6 = \dot{y}_5$.

Результати показують, що максимальні прискорення, яких зазнає несуча конструкція напіввагона, становлять 36,8 м/с² (рисунок 28).

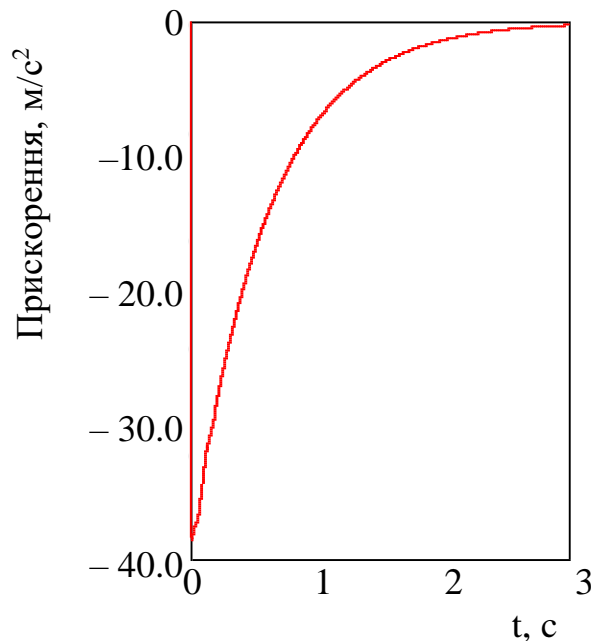


Рисунок 28 – Прискорення несучої конструкції напіввагона з урахуванням використання в'язкого наповнювача в хребтовій балці

Це значення прискорення на 4 % менше порівняно з незаповненою несучою конструкцією. Коефіцієнт в'язкого опору наповнювача при цьому має становити приблизно 118 кН·с/м.

Включення наповнювача з пружно-в'язкими властивостями змінює математичну модель динамічної навантаженості вагона:

$$M_{\text{оп}} \cdot \ddot{x} + (M_B \cdot h) \cdot \ddot{\varphi} = P_n - 2P_{\text{мп}} - \beta \cdot \dot{x} - c \cdot x, \quad (53)$$

$$I_B \cdot \ddot{\varphi} + (M_B \cdot h) \cdot \ddot{x} - g \cdot \varphi \cdot (M_B \cdot h) = l \cdot F_{\text{TP}}(\text{sign}\dot{\Delta}_1 - \text{sign}\dot{\Delta}_2) + \\ + l(k_1 \cdot \Delta_1 - k_2 \cdot \Delta_2), \quad (54)$$

$$M_B \cdot \ddot{z} = k_1 \cdot \Delta_1 + k_2 \cdot \Delta_2 - F_{\text{TP}}(\text{sign}\dot{\Delta}_1 - \text{sign}\dot{\Delta}_2), \quad (55)$$

Розв'язок математичної моделі (53) – (55) в програмному пакеті MathCad виконувався так:

$$F(t, y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \\ y_6 \\ \frac{P_n - 2P_{\text{мп}} - \beta \cdot y_2 - c \cdot y_1 - (M_B \cdot h) \cdot \dot{y}_4}{M_{\text{оп}}} \\ l \cdot F_{\text{TP}}(\text{sign}\dot{\Delta}_1 - \text{sign}\dot{\Delta}_2) + l(k_1 \cdot \Delta_1 - k_2 \cdot \Delta_2) - (M_B \cdot h) \cdot \dot{y}_2 + \\ + g \cdot y_3 \cdot (M_B \cdot h) \\ I_B \\ \frac{k_1 \cdot \Delta_1 + k_2 \cdot \Delta_2 - F_{\text{TP}}(\text{sign}\dot{\Delta}_1 - \text{sign}\dot{\Delta}_2)}{M_B} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$Z = \text{rkfixed}(Y0, tn, tk, n, F).$$

При цьому $y_1 = q_1$, $y_3 = q_3$, $y_5 = q_5$, $y_2 = \dot{y}_1$, $y_4 = \dot{y}_3$, $y_6 = \dot{y}_5$.

Розрахунки показали, що максимальні прискорення, які впливають на несучу конструкцію напіввагона, становлять $36,9 \text{ м/с}^2$ (рисунок 29).

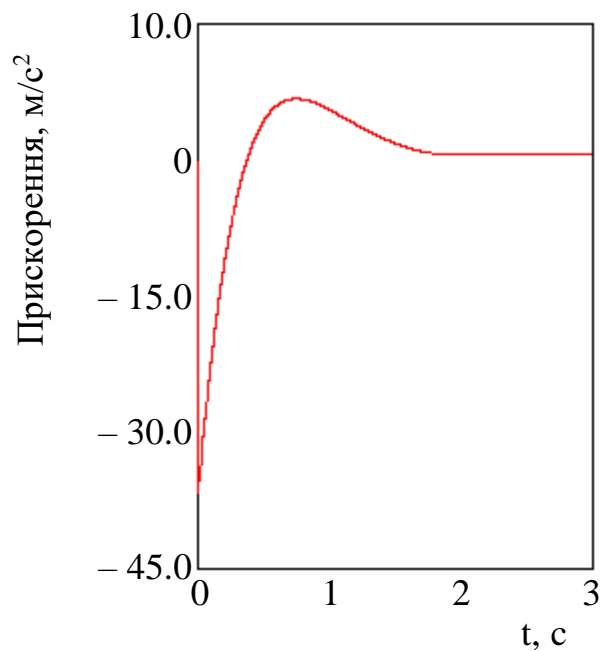


Рисунок 29 – Прискорення несучої конструкції напіввагона з урахуванням використання пружно-в'язкого наповнювача в хребтовій балці

Це значення прискорення на 4 % менше порівняно з незаповненою несучою конструкцією. Крім того, коефіцієнт в'язкого опору наповнювача має становити близько $118 \text{ кН}\cdot\text{с/м}$, з відповідною жорсткістю приблизно 80 кН/м .

2.4.2 Обґрунтування застосування енергопоглинального матеріалу в конструкції контейнера

Для підвищення міцності стінок контейнера в якості складових елементів можна використовувати сендвіч-панелі [12 – 14]. Це передбачає виготовлення сендвіч-панелі, що складається з двох металевих листів, між якими знаходиться матеріал з енергопоглинаючими властивостями

(рисунок 30). Такий підхід підвищує міцність контейнера, одночасно зменшуючи його навантаженість.

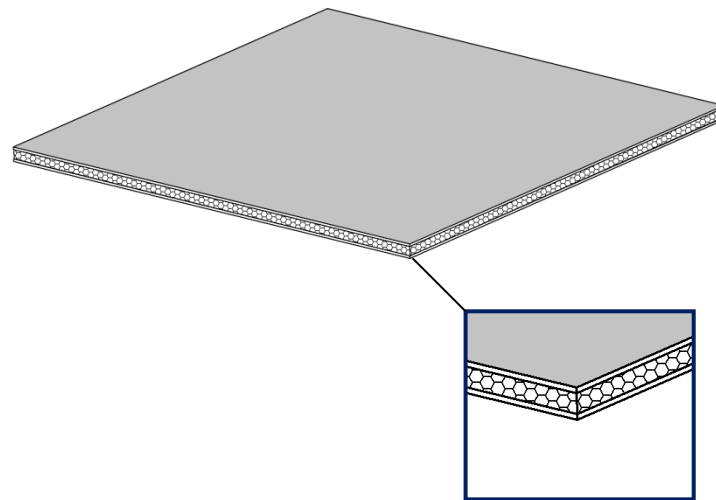


Рисунок 30 – Сендвіч-панель

Для обґрунтування застосування сендвіч-панелей у бокових стінках контейнера проведено математичне моделювання його динамічної навантаженості при розташуванні на вагоні-платформі, що зазнає коливань бокової хитавиці [12, 13]. Розрахункова схема розміщення контейнера на вагоні-платформі зображена на рисунку 31.

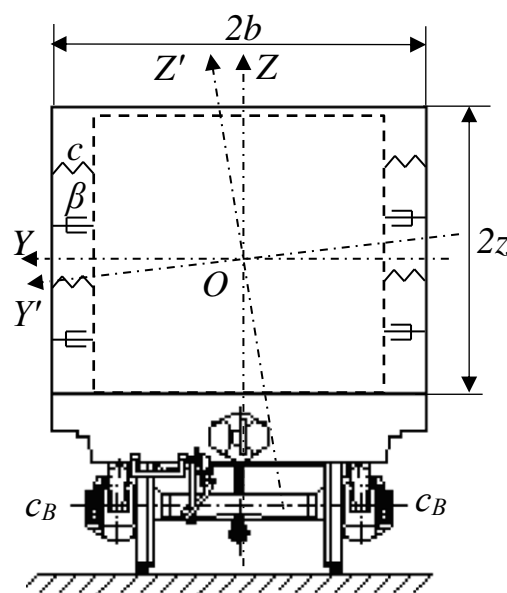


Рисунок 31 – Розрахункова схема контейнера, розміщеного на вагоні-платформі

Для цього була розроблена математична модель (57).

$$\begin{cases} I_{ВПФ} \cdot \ddot{q}_1 + c_B \cdot b \cdot (\text{sign}(b \cdot q_1)) = F_k, \\ I_k \cdot \ddot{q}_2 - g(M_k \cdot z^2) \cdot q_2 = F_{ВПФ} + F_B - c \cdot b^2 \cdot (q_2 - q_3) - \\ - \beta \cdot b^2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{q}_3), \\ I_B \cdot \ddot{q}_3 = F_k - c \cdot b^2 \cdot (q_2 - q_3) - \beta \cdot b^2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{q}_3), \end{cases} \quad (57)$$

де $I_{ВПФ}$ – момент інерції вагона-платформи;

c_B – жорсткість пружин ресорного підвішування візка;

b – напівширина рами вагона-платформи;

F_k – момент сил, що виникає між контейнером та рамою вагона-платформи;

I_k – момент інерції контейнера відносно повздовжньої осі;

M_k – маса контейнера;

z – напіввисота контейнера;

$F_{ВПФ}$ – момент сил, що виникає між вагоном-платформою та контейнером;

F_B – момент сил, що виникає між контейнером та вантажем;

c – жорсткість енергопоглинального матеріалу;

β – коефіцієнт в'язкого опору енергопоглинального матеріалу;

I_B – момент інерції вантажу;

F_k – момент сил, що виникає між вантажем та контейнером.

Математична модель розв'язувалася за допомогою програмного пакету MathCad з початковими умовами, що дорівнювали нулю. Модель була зведена до нормальної форми Коші і в подальшому розв'язана за допомогою методу Рунге-Кутта.

На основі розрахунків було визначено, що максимальні прискорення, які діють на контейнер, становлять $1,7 \text{ м/с}^2$ (рисунк 32).

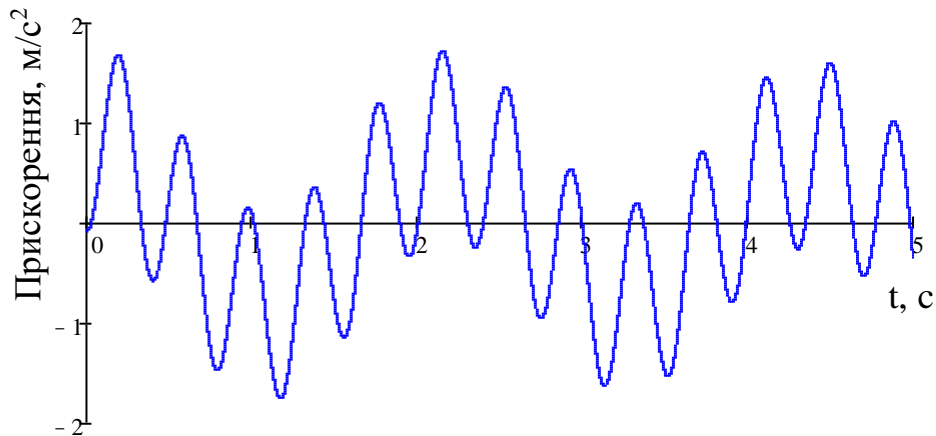


Рисунок 32 – Прискорення, які діють на контейнер

Це значення прискорення майже на 5 % нижче, ніж у контейнера з типовою конструкцією. Розрахунок проводився з коефіцієнтом жорсткості енергопоглинаючого матеріалу 1,5 кН/м і коефіцієнтом в'язкого опору 2,0 кН·с/м. Ці параметри були послідовно підібрані так, щоб прискорення не виходили за допустимі межі.

Для апробації розробленої математичної моделі було проведено комп'ютерне моделювання поперечного навантаження контейнера на вагон-платформу з використанням методу скінченних елементів у програмному пакеті SolidWorks Simulation. У SolidWorks була створена просторова модель контейнера, що враховує елементи конструкції, які жорстко взаємодіють між собою (рисунок 33). В основу розрахунку було покладено IV теорію міцності (енергетичну).

Для врахування пружно-в'язких зв'язків у сендвіч-панелях, що утворюють бічні стінки, за допомогою опцій програмного пакету було створено з'єднання «пружина-демпфер».

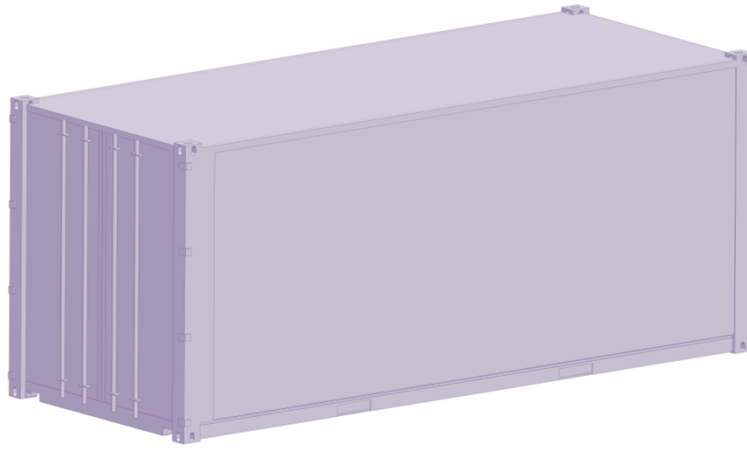


Рисунок 33 – Контейнер типорозміру 1СС з стінами із сендвіч-панелей

Розрахункова схема контейнера враховувала різні навантаження (рисунок 34): вертикальне статичне P_v і поперечне P_n , прикладені до бокової стінки, з урахуванням розривного тиску від вантажу (зерна) і динамічного навантаження від нахилу контейнера.

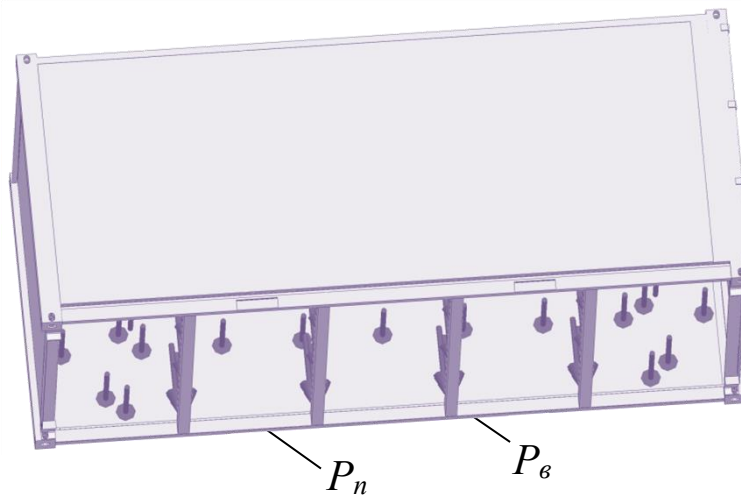


Рисунок 34 – Розрахункова схема контейнера

Скінченно-елементна модель контейнера складалася з 373575 вузлів і 1119509 елементів (ізопараметричних тетраєдрів), закріплених за допомогою фітінгів. Конструкційним матеріалом слугувала сталь 09Г2С. Результати показали, що максимальні прискорення виникають у середній частині бокової стіни, приблизно $1,5 \text{ м/с}^2$ (рисунок 35). Прискорення в торцевих стінках становили від $0,8$ до $0,9 \text{ м/с}^2$. Розбіжність між

результатами математичного та комп'ютерного моделювання становила приблизно 8 %.

Варіаційні розрахунки проводилися на основі математичної моделі (56) та комп'ютерної моделі навантаженості контейнера (рисунок 34). Вага бруто контейнера слугувала параметром варіації, що дало змогу отримати дві вибірки (таблиця 1), які були використані для перевірки моделі за допомогою F-критерію.

Таблиця 1 – Прискорення, які діють на контейнер

Вага контейнера, т	Прискорення, м/с ²	
	Математична модель	Комп'ютерна модель
24	1,7	1,55
22	1,85	1,65
20	1,92	1,79
18	2,08	1,86
16	2,13	1,93
14	2,18	2,05
12	2,25	2,17

Розраховане значення критерію ($F_p = 1,17$) порівняно з табличним ($F_t = 3,97$) не спростовує гіпотезу про адекватність на рівні значущості $P = 0,55$.

Це дослідження значно просуне вперед розроблення оптимальних методологій проектування сучасних контейнерних конструкцій, що сприятиме підвищенню конкурентоспроможності контейнерних перевезень і збільшенню прибутковості транспортного сектора.

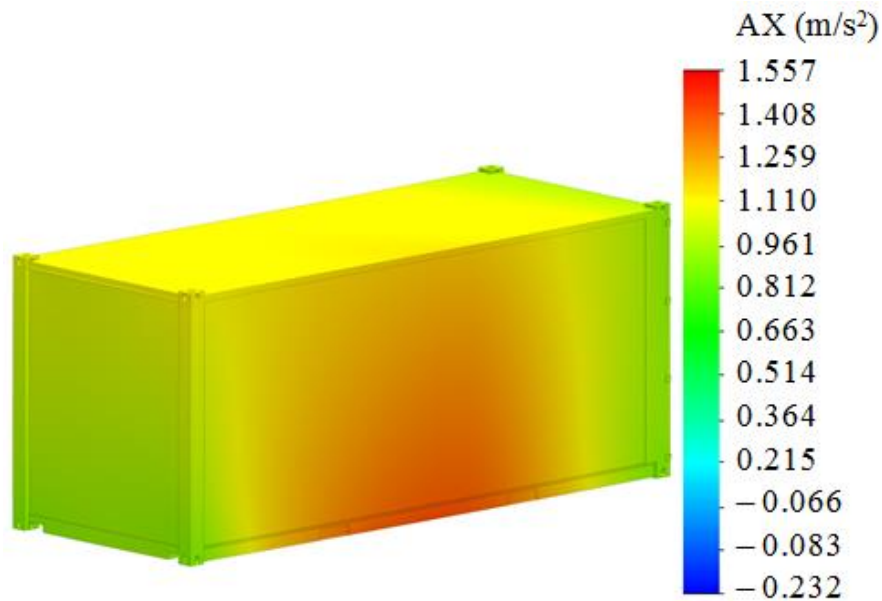


Рисунок 35 – Поля розподілення прискорень, які діють на контейнер

Крім того, ця дослідницька ініціатива надасть цінну інформацію для формулювання рекомендацій щодо проектування сучасних модульних конструкцій транспортних засобів, що сприятиме підвищенню ефективності транспортної галузі.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО ТЕМИ 2

- 1 За якої умови забезпечується стійкість рівноваги системи?
- 2 Що називається граничним циклом при дослідженні стійкості руху колісної пари?
- 3 Що називається критичною швидкістю щодо впливання колісної пари?
- 4 Яка відмінність між резонансною швидкістю руху та критичною?
- 5 У якому діапазоні знаходиться критична швидкість руху напіввагона на візках 18-100?
- 6 Що є головною причиною виникнення автоколивань залізничного рухомого складу?

7 За якої умови рух досліджуваної системи буде стійким асимптотично відповідно до теореми А. М. Ляпунова?

8 Як отримується характеристичне рівняння за методом Гурвиця?

9 Який висновок можна зробити, якщо хоча б один діагональний мінор за методом Гурвиця має від'ємне значення?

10 За якої умови забезпечується стійкість руху системи відповідно до критерію Гурвиця?

3 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ КОЛИВАНЬ НАЙПРОСТІШИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

План лекції

Перехідні функції – форми, характеристики та їхня побудова. Амплітудо-частотні, фазо-частотні характеристики та годограф коливальної системи.

Перехідна функція, частотна характеристика та годограф коливальної системи є важливими для визначення її властивостей, особливо у вільних коливаннях [5].

Зазвичай характеристики такої системи з'ясовують за її реакцією на зовнішнє збурення певного типу, і цю реакцію ретельно вивчають (як показано на рисунку 36).

Нехай X_e позначає вхідну функцію, що представляє збурення, а X_a – реакцію на це зовнішнє збурення (вихідна функція).

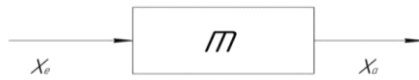


Рисунок 36 – Вхідна та вихідна функції системи

Цей процес можна ефективно окреслити за допомогою блок-схеми (рисунок 37, 38), яка ілюструє взаємозв'язок функцій:

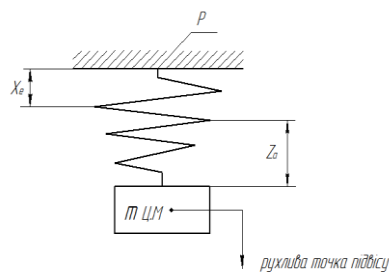


Рисунок 37 – Підвішена маса у вертикальному напрямку

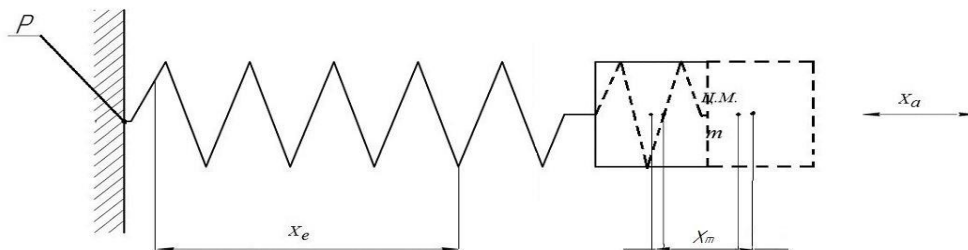


Рисунок 38 – Підвішена маса у горизонтальному напрямку

Розглянемо приклад, коли підвішена маса (рисунок 38) зазнає горизонтального руху, зумовленого неврівноваженим станом, викликаючи тим самим тривалі коливання. Тут переміщення відповідає вхідній функції x_e , подальші коливання маси є реакцією на зовнішнє переміщення, а координата маси слугує вихідною функцією, позначеною x_a .

Різні випробувальні функції, що найбільш прийнятні для пояснення перехідних процесів:

а) одинична ступінчаста функція

$$X_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0 \\ 1 & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (45)$$

Ордината одиничної ступінчастої функції, помножена на відповідне число, дає змогу отримати ступінчасту функцію необхідної висоти ступенів (точок системи) під навантаженням (рисунок 39);

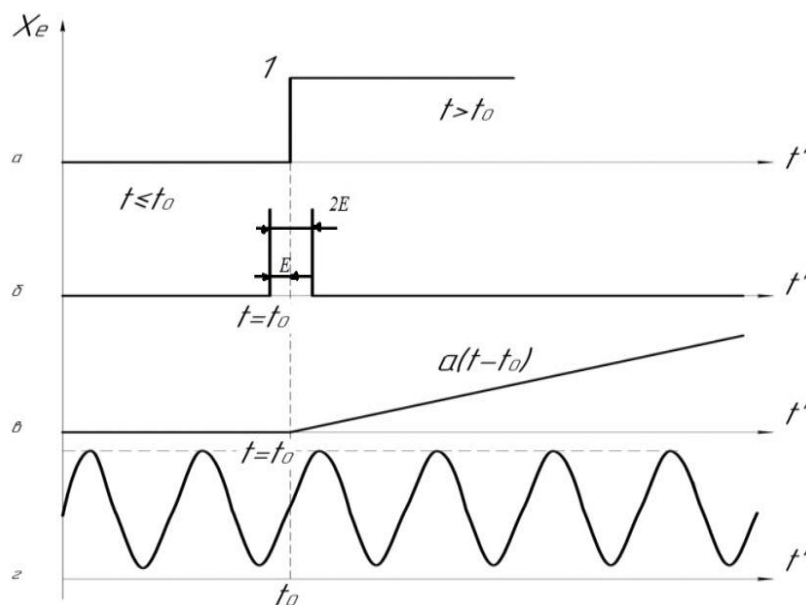


Рисунок 39 – Форми випробувальних (перехідних) функцій для дослідження коливальних систем

б) імпульсна функція (функція Дірака) відмінна від нуля у вузькій області навколо моменту $t = t_0$, з шириною, що прямує до нуля на межі.

У межі ширини цієї області $2 \cdot \varepsilon \rightarrow 0$ при $t < t_0 - \varepsilon$ та $t > t_0 + \varepsilon$;

в) кусково-лінійна функція, що демонструє інкрементне (поступове) зростання:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \chi e dt = 1 \quad (46)$$

$$X_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0, \\ 1 & \text{при } t \geq t_0, \end{cases} \quad (47)$$

г) синусоїдальна випробувальна функція:

$$X_e = A \cdot \sin(\omega t) - \cos(\omega t). \quad (48)$$

Використання комбінацій цих функцій слугує неоціненним помічником у розмежуванні процесів у теорії вібрації. Реакція системи на одноступінчасті переміщення дає перехідну функцію (рисунок 40).

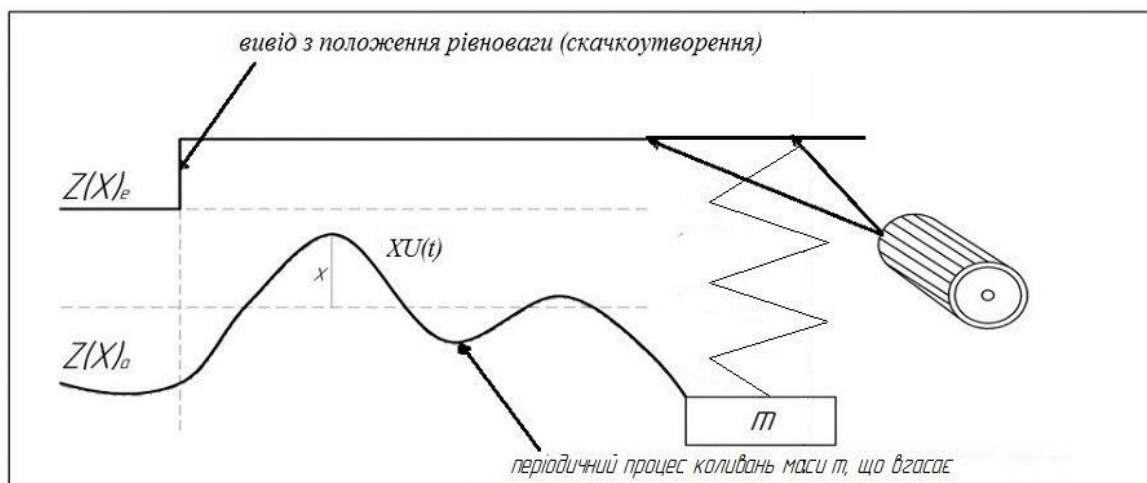


Рисунок 40 – Побудова перехідної функції

Комплексний спосіб:

$$X_e = e^{i \cdot \omega \cdot t} ; X_a = V \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - \psi)} = V \cdot e^{-i \cdot \psi} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}, \quad (49)$$

де V – коефіцієнт підсилення, що є відношенням амплітуди вихідного коливання до амплітуди вхідного коливання, тобто показує, у скільки разів амплітуда вихідних коливань $>$ або $<$ за амплітуду вхідних коливань;

ψ – фазовий зсув, тобто розбіжність між вхідним і вихідним значеннями.

$$F = \frac{X_a}{X_e} = V \cdot e^{-i\psi} . \quad (50)$$

Введемо співвідношення вхідних і вихідних значень, яке становить набір коефіцієнтів підсилення для коливальної системи або передавальну функцію (рисунки 41 – 43).

Нехай A – амплітуда збурення, тоді F , а також V і $\psi = f(A)$ тобто:

$$F = F(A; \omega) ; V = V(A; \omega) ; \psi = \psi(A; \omega) . \quad (51)$$

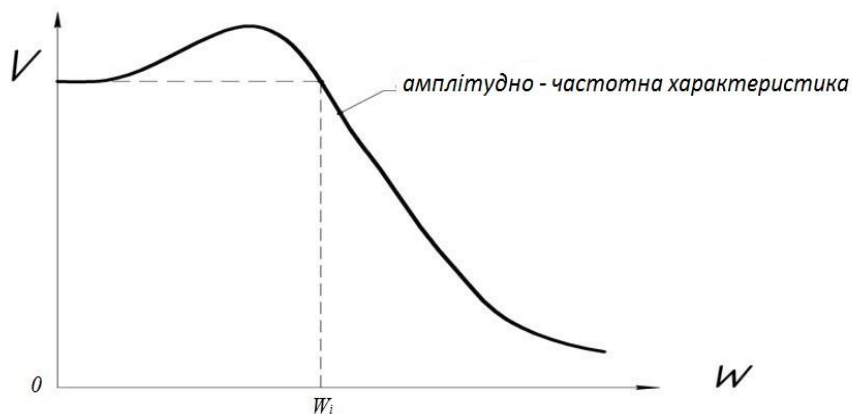


Рисунок 41 – Залежності Амплітудно-частотної характеристики (АЧХ)

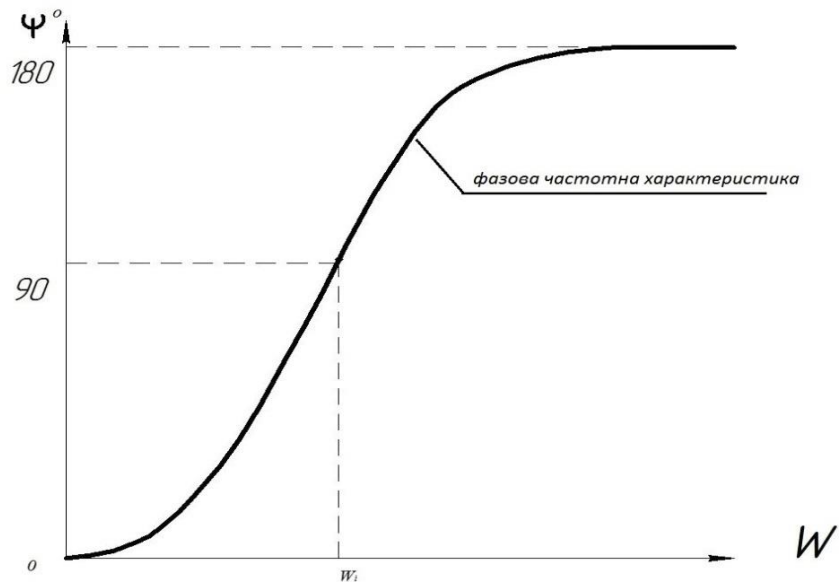


Рисунок 42 – Залежності Фазо-частотної характеристики (ФЧХ)

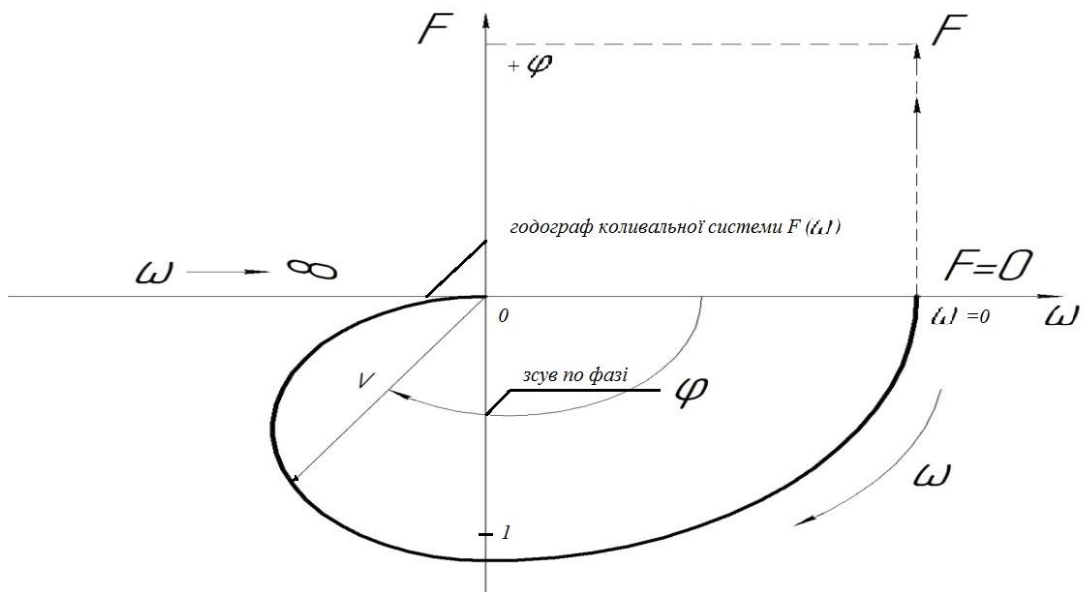


Рисунок 43 – Годограф $F(\omega)$ - амплітудно – фазової (комплексної) характеристики чи годограф коливальної системи

Перехідні процеси відбуваються під час зміни режимів коливань. Наприклад, під час руху транспортних засобів (коли вагон проходить криву або автомобіль їде по нерівностях), вони зазнають поступового згасання і періодичних вимушених коливань, що символізує перехід системи з одного режиму в інший.

Такі переходи відбуваються виключно в початковий момент в'їзду транспортного засобу на ділянку з періодичними нерівностями. Якщо на коливальну систему діє періодичне зовнішнє збурення з частотою ω , то з тією ж частотою відбувається вимушений рух з переміщеннями, які визначаються за формулою:

$$z(x) = x_0(z_0) * V * \cos(\eta * \tau - \psi), \quad (52)$$

де $\eta \sim \omega$, а $\tau \sim t$.

Комплексна функція:

$$e^i * (\varphi * t - \psi) = \cos(\eta * t - \psi) \quad (53)$$

Залежно від частоти збурення, власної частоти та типу початкових умов можуть виникати різні типи коливань, зокрема:

а) суперпозиція (накладення) вільних і вимушених коливань (рисунок 44) коли $\omega \leq 1$. Початкові умови: $t=0$; $z = z' = 0$. Коли V близьке до ω ($V \approx \omega$), виникають коливання, відомі як биття, які характеризуються періодичними коливаннями амплітуди коливань, що виникають внаслідок додавання двох гармонічних коливань з близькими частотами;

б) суперпозиція (накладення) вільних і вимушених коливань (рисунок 45), коли ω буде більшою або рівною одиниці;

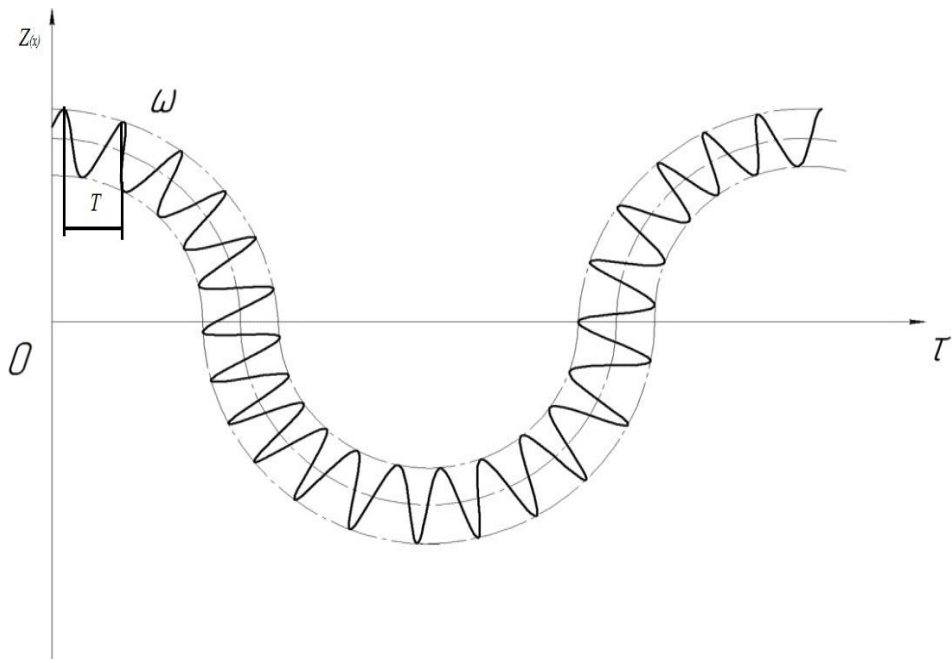


Рисунок 44 – Результуюча функція у разі $\omega \leq 1$

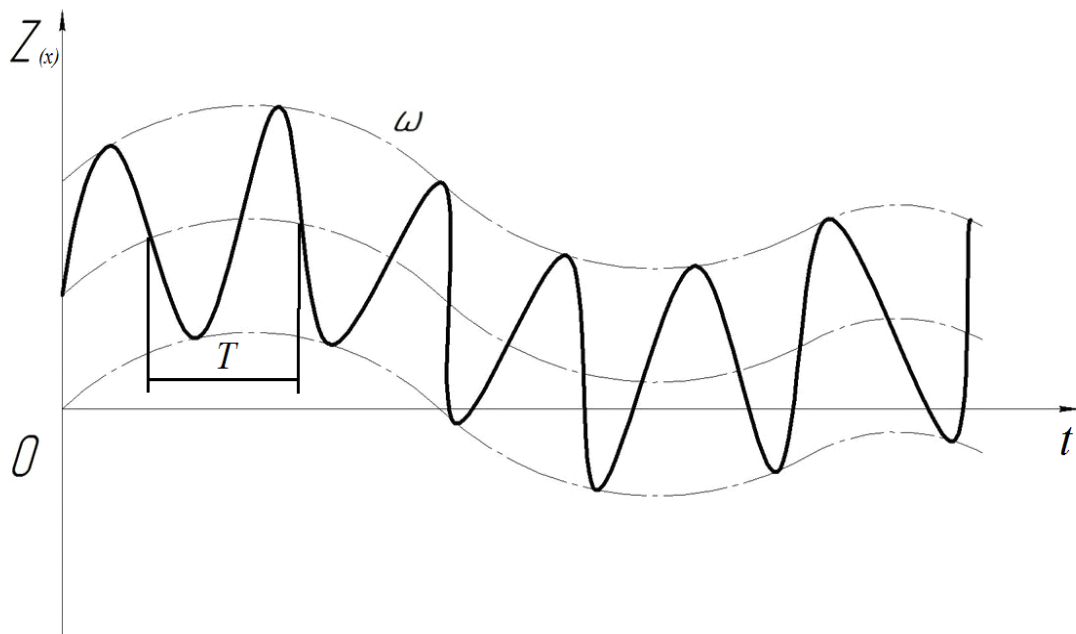


Рисунок 45 – Результуюча функція у разі $\omega \geq 1$

в) суперпозиція (накладення) вільних коливань (рисунок 34) коли V близьке до ω (проявляється у вигляді коливань типу биття)

$$\begin{cases} x_1 = A \cdot \cos(\omega t) \\ x_2 = A \cdot \cos(\omega + \Delta\omega) t \end{cases} \quad (54)$$

при $\Delta\omega \ll \omega$, тобто початкові фази $=0$.

Результуюче переміщення при коливаннях:

$$X = (2A \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cdot \cos (\omega t), \text{ при } \frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega. \quad (55)$$

Амплітуда биття:

$$A_{\delta} = \left| 2A \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t \right|. \quad (56)$$

Період биття:

$$T_{\delta} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}; \int \omega_{\delta} = \omega - \nu. \quad (57)$$

Природа коливань биття пояснюється на рисунку 46;

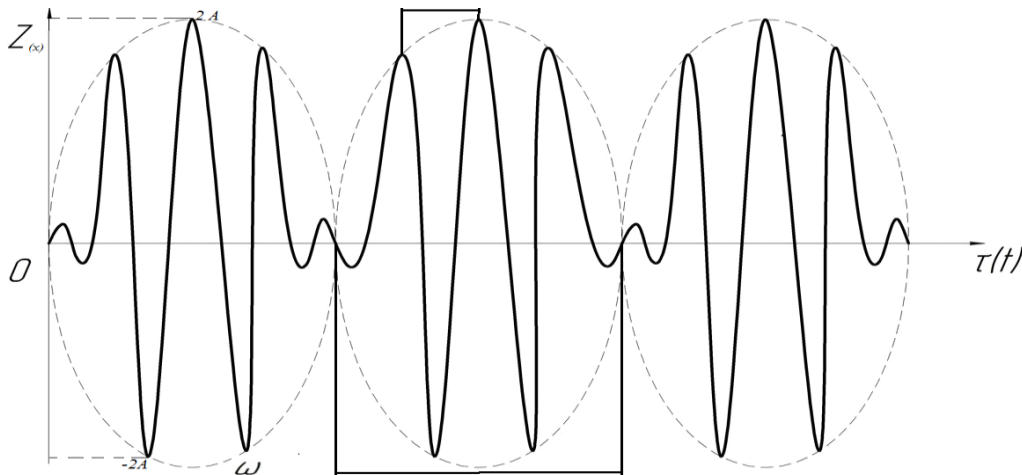


Рисунок 46 – Характер коливань биття

г) особливий випадок виникає під час резонансного переходу (рисунок 47). За умов: $\eta = 1, w = \nu, \tau \rightarrow \infty, \tau = \frac{2\pi}{\omega - \nu}$ переміщення зростають.

Ураховуючи, що $z = \frac{z_0}{2} \tau \cdot \sin t$, тобто $r = \frac{2\pi}{0}$, $\Rightarrow z \rightarrow \infty$, що означає необмежене зростання, система поступово увійде в резонансний режим, що призведе до руйнування конструкції.

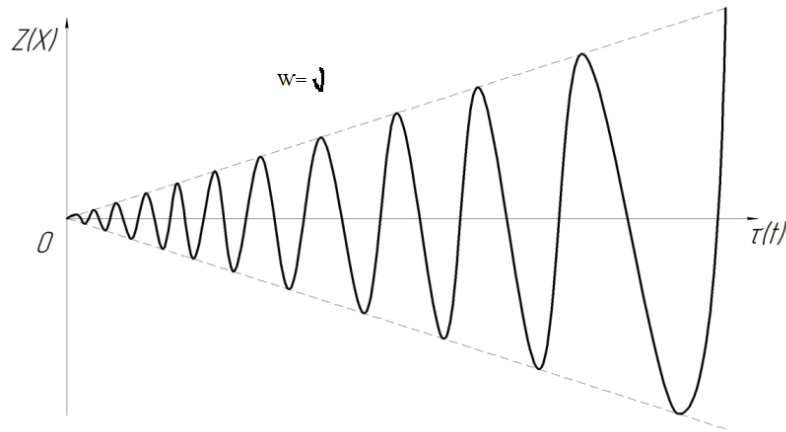


Рисунок 47 – Зростання амплітуди коливань при резонансі

Порівняймо це рівняння з рівнянням $x'' + 2nx' + p^2x = 0$, що описує вільні коливання системи з лінійним опором, $mx'' = -cx - k_1x'$ і припустимо, що $R'_0 + k = k_1x'$ є ефективним коефіцієнтом в'язкого тертя (рисунок 48).

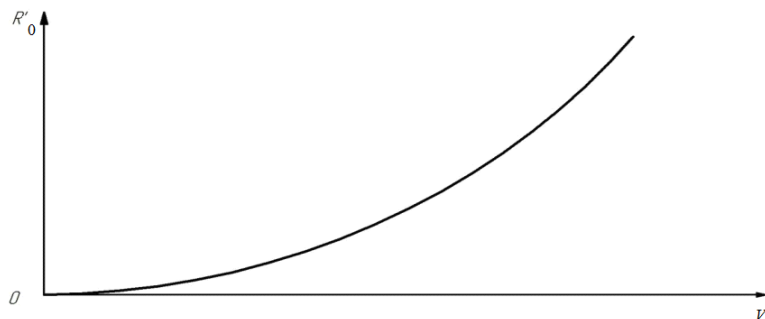


Рисунок 48 – Залежність R'_0 від V

Якщо $R'_0 + k > 0$, то $A \downarrow$ і коливання поступово згасають; якщо $R'_0 + k < 0$, то $A \uparrow$ і коливання будуть посилюватися; якщо $R'_0 + k = 0$, затування зникає, і переміщення перетворюється на гармонійні коливання (рисунок 49).

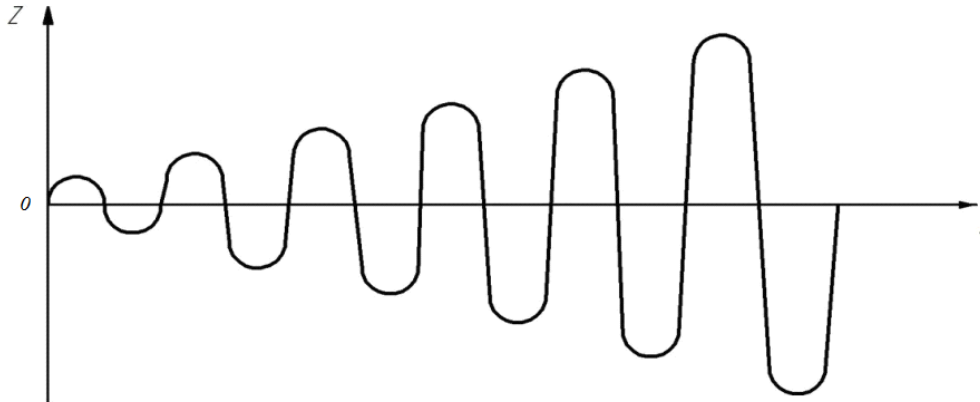


Рисунок 49 – Гармонійні коливання

Поняття від'ємного згасання з від'ємним тертям є відносно простим для розуміння. Коли вантаж рухається вправо, вирівнюючись з напрямком ременя, відносна швидкість $V_{\text{відн}} \downarrow$, $F_{\text{тр}} \uparrow$, а $\Delta F_{\text{тр}}$ також зміщується в тому ж напрямку, посилюючи рух. Аналогічно, під час наступного інтервалу часу t , коли вантаж зміщується вліво через жорсткість пружини c , відносна швидкість залишається спрямованою вліво, ще більше посилюючи рух. Ця циклічна схема посилює амплітуду коливань.

Енергія системи зазнає змін завдяки роботі, яку виконують різні складові сили тертя R . Лінійне тертя виконує позитивну роботу, збільшуючи енергію системи, тоді як нелінійне тертя виконує ідеальну негативну роботу, зменшуючи енергію системи.

Під час стаціонарних автоколивань приплив енергії врівноважує її витрату (в середньому, протягом одного коливального циклу), роблячи систему консервативною (позбавленою розсіювання енергії). На відміну від

амплітуди вільних коливань у консервативній системі, амплітуда коливань при автоколиванні повністю диктується внутрішніми властивостями системи і не залежить від початкових умов.

Виходячи з характеру частот ν , їх можна класифікувати як слабо нелінійні, релаксаційні або розривні. Аналіз кореспонденції нелінійної задачі є необхідним для визначення параметрів частоти та амплітуди стаціонарних автоколивань. Хоча автоколивання виникають лише за наявності зовнішнього збурення $P(t)$, саме джерело збурення вже не має коливальних властивостей. Отже, коливальний характер вилучення енергії з джерела тепер керує рухом системи (рисунок 50).

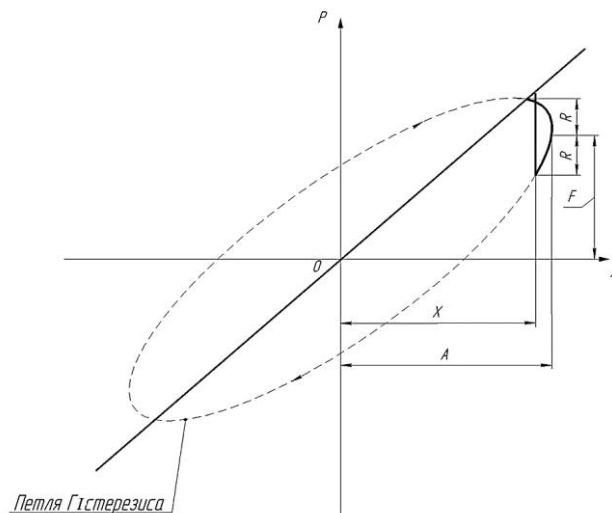


Рисунок 50 – Відображення гістерезисного явища

На рисунку 50 літерою « P » позначено повну силу опору, яка складається з лінійної складової F , що відповідає закону Гука, та непружної складової R , знак якої залежить від напрямку деформації («+» – при навантаженні «-» – при розвантаженні).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО ТЕМИ 3

- 1 Яку назву має явище, коли частота вільних коливань майже дорівнює частоті вимушених?
- 2 Яку назву має явище, коли частота вільних коливань співпадає з частотою вимушених?
- 3 Чому дорівнює частота зміни амплітуди сумарного сигналу при битті?
- 4 Який параметр коливальної системи визначає ширину резонансу?
- 5 Що характеризує добротність?
- 6 За якою формулою визначається добротність коливальної системи?
- 7 Що характеризує добротність?
- 8 Який вигляд має умова відсутності резонансу?
- 9 За якою формулою можна визначити частоту резонансу?
- 10 Визначення періоду биття.
- 11 Які пристрої в ресорному комплекті візка вантажного вагона запобігають виникненню резонансу?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Дьомін Ю. В., Черняк Г. Ю. Основи динаміки вагонів. Київ : КУЕТТ, 2003. 270 с.
- 2 Корнійчук М. П. Липовець Н. В. Шамрай Д. О. Технологія галузі і технічні засоби залізничного транспорту. Київ: Дельта, 2006. Ч. 1. 500 с.
- 3 Корнійчук М. П. Липовець Н. В. Шамрай Д. О. Технологія галузі і технічні засоби залізничного транспорту. Київ: Дельта, 2008. Ч. 2. 423 с.
- 4 Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху: підручник. Київ: Вища школа, 2004. 525 с.
- 5 Устенко О. В., Візньак Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: навч. посіб. Харків: УкрДУЗТ, 2021. 129 с.
- 6 Візньак Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: конспект лекцій. Харків: УкрДУЗТ, 2023. Ч. 1. 77 с.
- 7 Рибін А. В. Удосконалення несучих конструкцій вантажних вагонів шляхом використання наповнювачів в їх складових. дис. ... канд. техн. наук: 05.22.07. Харків, 2021. 197 с.
- 8 Ловська А. О., Фомін О. В., Рибін А. В., Лебідь Г. О. Визначення динамічної навантаженості напіввагона з замкненою хребтовою балкою, заповненою наповнювачем. *Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки*. Т. 32 (71). – № 4, 2021. С. 255-259.
- 9 ДСТУ 7598:2014. Вагони вантажні. Загальні вимоги до розрахунків та проектування нових і модернізованих вагонів колії 1520 мм (несамохідних). Київ, 2015. 250 с.
- 10 Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи: навч. посіб. Харків: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.

11 Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння: навч. посіб. – Івано-Франківськ: Сімик, 2012. 352 с.

12 Ватуля Г. Л., Ловська А. О., Мямлін С. С., Краснокутський Є. С. Обґрунтування конструкційних особливостей сендвіч-панелей для виготовлення стінок контейнера. *Наука та прогрес транспорту*. 2023. № 1 (101). С. 55 – 63. URL: <https://doi.org/10.15802/stp2023/280009>.

13 Ватуля Г. Л., Ловська А. О., Краснокутський Є. С., Дериземля С. В. Моделювання поперечної навантаженості контейнера зі стінами із сендвіч-панелей, розміщеного на вагоні-платформі. *Розвиток транспорту*. 2023. № 3 (18). С. 50 – 58. URL: <https://doi.org/10.33082/td.2023.3-18.04>.

14. G. L. Vatulia, A. O. Lovska, Ye. S. Krasnokutskyi. Research into the transverse loading of the container with sandwich-panel walls when transported by rail. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*. 2023. Vol. 1254. 012140. URL: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/1254/1/012140>.

Р. І. Візняк, А. О. Ловська, А. В. Рибін

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ
ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій

Частина 2

Відповідальний за випуск Рибін А. В.

Підписано до друку 11.06.2024 р.
Умовн. друк. арк. 4,0. Тираж . Замовлення № .
Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного
транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.