МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

В. І. Храбустовський, О. А. Осмаєв, О. В. Рибачук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Частина 1

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ

Харків 2024

УДК 517.91(075)

Х-88

Рекомендовано вченою радою Українського державного університету залізничного транспорту як навчальний посібник (витяг з протоколу № 6 від 28 червня 2024 р.)

Рецензенти:

професор Л. В. Фардигола (математичне відділення ФТІНТ НАН України ім. Б. І. Вєркіна),

доцент А. Г. Гах (ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

Х 88 Храбустовський В. І., Осмаєв О. А., Рибачук О. В. Диференціальні рівняння: Навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2024. – Ч. 1. – 193 с., рис. 12.

ISBN

Навчальний посібник присвячено одному з центральних розділів дисципліни «Вища математика» – розділу «Диференціальні рівняння». У посібнику подано основні поняття, теореми та методи інтегрування диференціальних рівнянь і систем. Усі теореми та методи проілюстровано багатьма прикладами, у тому числі прикладного характеру. Посібник призначено для здобувачів вищої освіти, насамперед факультету інформаційно-керуючих систем та технологій, а також механіко-енергетичного і будівельного факультетів. Фрагменти посібника можуть бути також використані здобувачами вищої освіти на факультетах управління процесами перевезень і економічному.

УДК 517.91(075)

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія диференціальних рівнянь (ДР) є могутнім інструментом для дослідження реальних явищ і процесів. Це можна пояснити так. Нехай функція $y(x)$ характеризує явище або процес . Користуючись законами природи, фізики, техніки, біології тощо, які керують цим явищем або процесом, виводять диференціальне рівняння для функції $y(x)$, яке є математичною моделлю цього явища або процесу. Ряд прикладів таких моделей наведено в першому розділі посібника.

Вважають [8], що Ньютон першим усвідомив значення диференціальних рівнянь для опису законів природи, насамперед руху механічних систем. Зауважимо, що в роботі [8] можна знайти відомості про інших математиків, які заснували та розвивали теорію диференціальних рівнянь.

Отже, розділ «Диференціальні рівняння» є, імовірно, найважливішим розділом дисципліни «Вища математика», перш за все для математичного моделювання.

Посібник містить базові факти з теорії диференціальних рівнянь і найважливіші методи інтегрувань цих рівнянь. Матеріалу посібника цілком достатньо для подальшого застосування апарату теорії диференціальних рівнянь у різних дисциплінах. Також цей матеріал є основою для вивчення окремої дисципліни «Диференціальні рівняння», у якій розглядають спеціальні питання з теорії диференціальних рівнянь.

У посібнику головну увагу приділено методам розв’язання диференціальних рівнянь і систем та ілюструванню цих методів багатьма прикладами. Факти і методи лінійної теорії наведено з обґрунтуванням. Для кращого оволодіння здобувачами більш складними поняттями та методами автори обмежуються найпростішими ситуаціями, у яких ці поняття і методи можна застосовувати. Наприклад, матричний метод розв'язання лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (разом із випадком, коли матриця системи не діагоналізується) розглянуто лише для систем двох рівнянь.

Наприкінці кожного розділу наведено контрольні запитання та завдання з відповідями. Цей матеріал викладачі можуть використовувати на практичних заняттях, а здобувачі – для самостійної роботи.

Джерела з бібліографічного списку призначені для глибшого вивчення матеріалу. При написані посібника були використані джерела [7, 8, 10, 12], а також відомі підручники А. Д. Мишкіса, М. В. Федорюка і задачник О. Ф. Філіппова.

У другій частині посібника будуть розглянуті такі спеціальні питання теорії диференціальних рівнянь, як теорія стійкості, операційне числення, крайові задачі, варіаційне числення, різницеві рівняння, z-перетворення.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння вигляду

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Тобто звичайне диференціальне рівняння пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію y та її похідні.

Слово «звичайний» у назві пов'язано з тим, що в математиці розглядають також диференціальні рівняння для функції кількох змінних, які називають диференціальними рівняннями з частинними похідними. У посібнику такі диференціальні рівняння не розглядають. Тому далі рівняння (1.1) будемо просто називати **диференціальним рівнянням** і для цієї назви вживати скорочення **ДР**.

Функцію $y = y(x)$ називають **частинним розв'язком** або просто **розв'язком** ДР (1.1), якщо при підстановці в ДР (1.1) воно перетворюється в тотожність.

Неявне рівняння $\Phi(x, y) = 0$ розв'язку ДР називають **частинним інтегралом** або просто **інтегралом** цього ДР.

Графік розв'язку ДР - **інтегральна крива** цього ДР.

Порядком ДР називають найвищий порядок похідної невідомої функції $y = y(x)$, яка входить до ДР.

Приклад 1.1. В інтегральному численні для знаходження невідомої функції $y(x)$, коли відома її похідна $y'(x) = f(x)$, потрібно знайти розв'язки найпростішого ДР першого порядку

$$y' = f(x). \tag{1.2}$$

Рівняння (1.2) має **нескінченно багато розв'язків**, а саме

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C.$$

Це твердження справедливо для всіх ДР.

Приклад 1.2. Перевірити, шо функція

$$y = e^{-3x} \cdot \cos 2x$$

є розв'язком ДР другого порядку

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Маємо

$$y' = -3\ e^{-3x} \cdot \cos 2x - 2e^{-3x} \cdot \sin 2x =$$

$$= -e^{-3x}(3\ \cos 2x + 2\sin 2x),$$

$$y'' = 3e^{-3x}(3\ \cos 2x + 2\sin 2x) - e^{-3x}(-6\ \sin 2x + 4\cos 2x) =$$

$$= e^{-3x}(5\ \cos 2x + 12\sin 2x).$$

Підставимо y , y' , y'' в ДР і одержимо тотожність

$$e^{-3x}[(5\cos 2x + 12\sin 2x) -$$

$$-6(3\cos 2x + 2\sin 2x) + 13\cos 2x] = 0.$$

Приклад 1.3. Перевірити, що рівняння

$$y - arctg(x + y) + C = 0 \tag{1.3}$$

є інтегралом ДР $(x + y)^2 y' = 1$ першого порядку за будь-якої константи C.

Продиференціюємо рівняння (1.3) за x, вважаючи, що $y = y(x)$, і одержимо

$$y' - \frac{1}{1 + (x + y)^2}(1 + y') = 0,$$

звідки

$$\left(1 - \frac{1}{1 + (x + y)^2}\right) y' = \frac{1}{1 + (x + y)^2}.$$

Тому

$$y' = \frac{1}{(x + y)^2}.$$

Підставимо y' в ДР та одержимо тотожність

$$(x + y)^2 \cdot \frac{1}{(x + y)^2} = 1.$$

Далі наведемо кілька прикладів ДР (і систем ДР), які є математичними моделями реальних явищ і процесів.

Приклад 1.4. ДР Ньютона. Якщо точка з масою m рухається вздовж прямої (рис. 1.1) під дією сили F, яка залежить від часу, місцезнаходження точки та її швидкості, то, за другим законом Ньютона, її координата $x = x(t)$ задовольняє ДР другого порядку

$$m \ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \tag{1.4}$$

(зауважимо, що Ньютон позначав похідні точками).

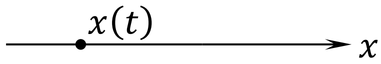

Рис. 1.1. Рух точки вздовж прямої

Приклад 1.5. Для знаходження струму $I = \dot{q}$, де $q = q(t)$ заряд, у коливальному контурі (рис. 1.2) потрібно знайти певний розв'язок ДР другого порядку

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E} ,$$

яке можна вивести з правил Кірхгофа.

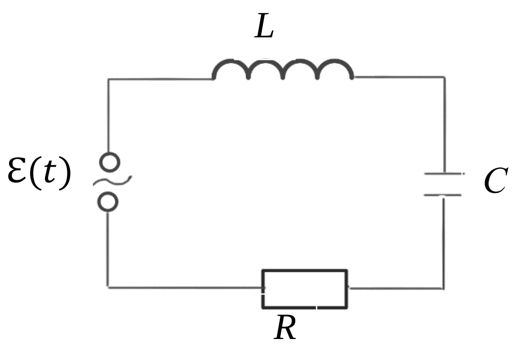

Рис. 1.2. Коливальний контур з прикладу 1.5

Приклад 1.6. Щоб знайти струми $I_1 = \dot{q}_1, I_2 = \dot{q}_2$ у більш складному електричному колі (рис. 1.3), потрібно знайти певний розв'язок системи ДР другого порядку

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + \dfrac{1}{C_1}(q_1 - q_2) = \varepsilon(t), \\ L_2\ddot{q}_2 + \dfrac{1}{C_2}(q_2 - q_1) + \dfrac{1}{C_2}q_2 = 0, \end{cases}$$

яку можна вивести з правил Кірхгофа.

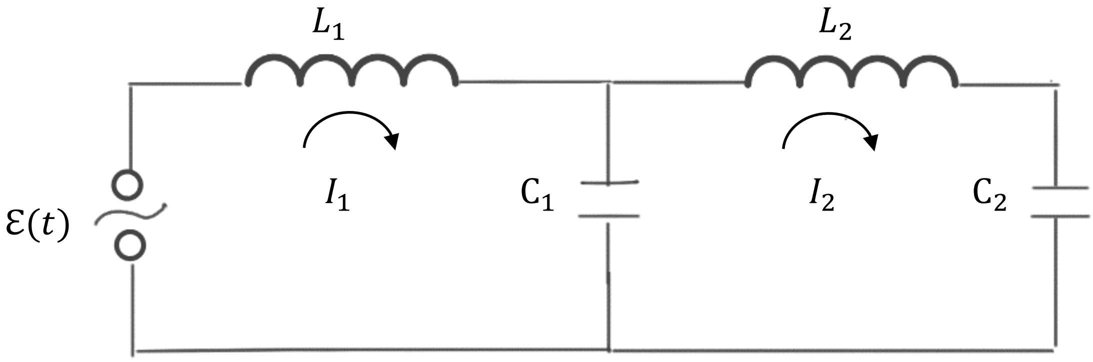

Рис. 1.3. Електричне коло з прикладу 1.6

Приклад 1.7. Щоб знайти форму, якої набуває ланцюг (відповідну криву називають ланцюговою лінією), закріплений за кінці, потрібно знайти [10, п. 139] певний розв'язок ДР другого порядку вигляду

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2}\,, \tag{1.5}$$

де константа $a > 0$. (Розв'язання ДР (1.5) наведено в прикладі 3.2.)

Приклад 1.8. За теорією пружності, для знаходження форми, якої набуває стрижень під дією певних поздовжніх або (та) поперечних сил, потрібно [12, § 20] шукати частинні розв'язки диференціальних рівнянь четвертого порядку. Деякі з цих ДР мають вигляд

$$y^{(IV)} = a, \quad y^{(IV)} + by' = c, \quad y^{(IV)} + dy = 0.$$

Тут a, b, c, d — константи, які залежать від характеристик стрижня та сил, які на нього діють.

Приклад 1.9. Модель «хижак-жертва». Розглядають модель двовидової популяції, яка складається з «хижаків» і «жертв». «Жертви» харчуються рослинною їжею, яка є в необмеженій кількості, а «хижаки» харчуються, поїдаючи «жертв».

Нехай $x(t)$ і $y(t)$ є величинами популяцій «жертв» і «хижаків» відповідно.

Будемо вважати, що: 1) швидкість зростання кількості «жертв» збільшується пропорційно їхній кількості, але зменшується пропорційно кількості можливих зустрічей «жертв» із «хижаками»; 2) швидкість зростання кількості «хижаків» зменшується пропорційно їхній кількості, але збільшується пропорційно кількості можливих зустрічей «хижаків» із «жертвами».

Отже, щоб з'ясувати, як змінюється з часом величини популяцій «жертв» і «хижаків», потрібно розв'язати систему диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} \ = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases}$$

Цю найпростішу модель системи «хижак» - «жертва» називають **системою Лотки — Вольтерри**.

Багато інших прикладів ДР, які виникають у фізиці, техніці, економіці, біології тощо, можна знайти в роботах [5-8].

Розв'язати ДР («**проінтегрувати** ДР») означає знайти всі його розв'язки або інтеграли.

ДР **інтегрована у квадратурах**, якщо задача знаходження всіх його розв'язків або інтегралів зведена до скінченної кількості диференціювань, інтегрувань і алгебраїчних операцій.

Як правило, ДР не інтегрують у квадратурах. Наприклад, ДР Ньютона (1.4) інтегровано лише тоді, коли його права частина — сила $F = F(t)$ або $F = F(x)$, або $F = F(\dot{x})$.

Запитання до розділу 1

1. Яке рівняння називають звичайним диференціальним рівнянням?
2. Що називають частинним розв'язком або просто розв'язком диференціального рівняння?
3. Що називають частинним інтегралом або просто інтегралом диференціального рівняння?
4. Що називають порядком диференціального рівняння?
5. Що називають інтегральною кривою диференціального рівняння?
6. Що означає «проінтегрувати диференціальне рівняння»?
7. Що означає диференціальне рівняння, інтегроване у квадратурах?

Завдання до розділу 1

Завдання 1. З'ясувати, чи є задані функції розв'язками відповідних диференціальних рівнянь:

1) $y = -\frac{x^3}{2}, xy' = 3y$;

2) $y = \frac{2x}{x+1},\ 3xy' = \frac{y^2}{x}$;

3) $y = \frac{2}{2x+1},\ 2(x^2y' + 1) = -xy' + y$.

Завдання 2. Показати, що задані рівняння є інтегралами відповідних диференціальних рівнянь:

1) $y^2 = 2arctg\, e^x + C,\ \ (1 + e^{2x})yy' = e^x;$

2) $y^2 = Cx^2 + 1, xy' - y + \frac{1}{y} = 0;$

3) $y - 3(Ce^{4x} + e^x)^{-1} = 0,\ \ y' - e^x y^2 - 4y = 0.$

Відповіді до завдань розділу 1

Завдання 1:

1) так; **2)** так; **3)** ні.

РОЗДІЛ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

2.1. Загальні поняття. Задача Коші

У загальному випадку ДР першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.1}$$

Загальним розв'язком ДР (2.1) є функція $y(x, C)$, яка залежить від довільної константи C і за будь-яких можливих значень C є розв'язком рівняння (2.1); будь-який розв'язок рівняння (2.1) можна одержати з $y(x, C)$ при конкретному виборі константи C.

Загальним інтегралом ДР (2.1) називають рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, яке залежить від довільної константи C і за будь-яких можливих значень C є інтегралом рівняння (2.1); будь-який інтеграл рівняння (2.1) можна одержати з $\Phi(x, y, C) = 0$ при конкретному виборі константи C.

Далі ми будемо розглядати ДР першого порядку, які мають **нормальну форму**

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

тобто такі, які розв'язані відносно похідної.

Геометрично ДР (2.2) можна трактувати так. Якщо його інтегральна крива проходить через точку (x_0, y_0), то кутовий коефіцієнт її дотичної в цій точці дорівнює $k = f(x_0, y_0)$ (рис. 2.1).

Проведемо через кожну точку (x, y) пряму з кутовим коефіцієнтом $k = f(x, y)$ і одержимо **поле напрямків**. Будь-яка інтегральна крива ДР (2.2) у кожній точці дотикається до поля напрямків. Справедливе і зворотне твердження.

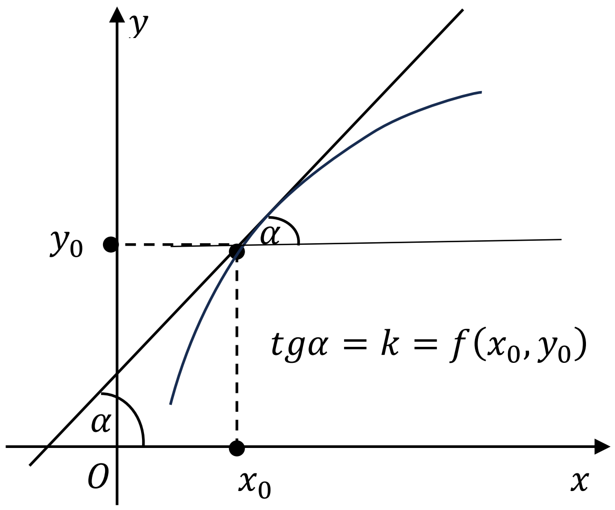

Рис. 2.1. Геометричний зміст ДР (2.2)

Геометричне місце точок, у яких дотичні до інтегральних кривих ДР (2.2) мають один і той самий кутовий коефіцієнт, називають **ізокліною**.

Отже, рівняння ізокліни ДР (2.2) має вигляд $f(x, y) = k$. Щоб наближено побудувати інтегральну криву, потрібно побудувати достатню кількість ізоклін: $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2$, $f(x, y) = k_3$, …, а потім провести криву, яка в точках перетину з ізоклінами буде мати кутові коефіцієнти k_1, k_2, k_3, …, .

Приклад 2.1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральну криву ДР $y' = x^2 + y^2$, яка проходить через початок координат.

Сім'я ізоклін визначена рівнянням

$$x^2 + y^2 = k.$$

Тобто множина ізоклін становить собою концентричні кола з центром у нулі і радіусом $\sqrt{k} \geq 0$ (рис. 2.2).

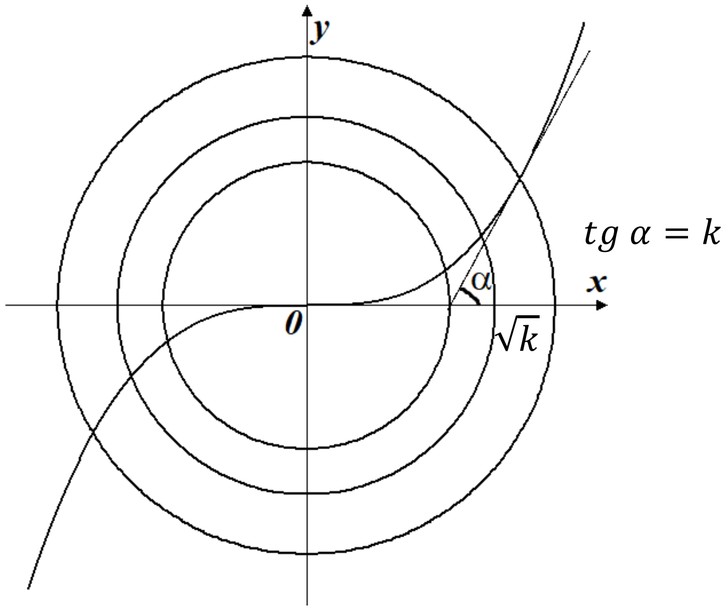

Рис. 2.2. Ізокліни з прикладу 2.1

Побудувавши кілька ізоклін і поле напрямків, наближено зображуємо інтегральну криву (рис. 2.3).

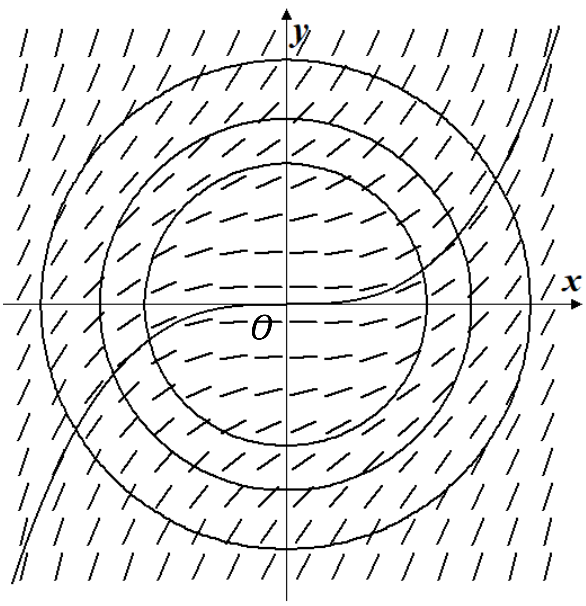

Рис. 2.3. Поле напрямків та інтегральна крива з прикладу 2.1

Задача Коші для ДР (2.2) полягає в знаходженні його розв’язку $y(x)$, який задовольняє задану **початкову умову** $y(x_0) = y_0$:

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{2.3}$$

Геометрично задачу Коші (2.3) можна трактувати так. Відшукують інтегральну криву ДР (2.2), яка проходить через задану точку $P_0(x_0, y_0)$ (рис. 2.4).

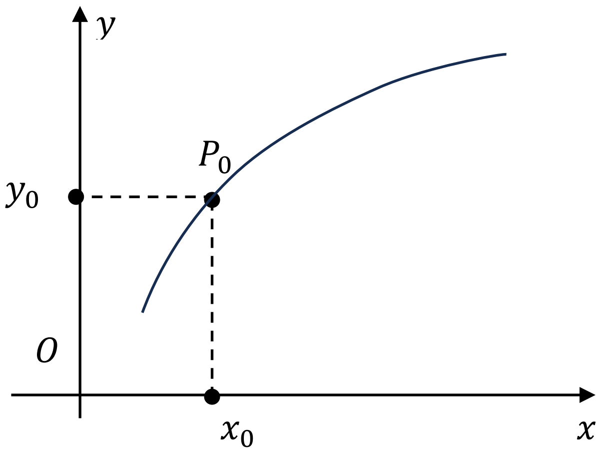

Рис. 2.4. Геометричний зміст задачі Коші (2.3)

Теорема Пікара про існування та єдиність розв’язку задачі Коші (2.3). Нехай у ДР (2.2) функції $f(x, y)$ і $f'_y(x, y)$[1] є неперервними у прямокутнику П: $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $|y - y_0| \leq b$ (рис. 2.5).

---

[1] Умову неперервності частинної похідної $f'_y(x, y)$ можна замінити умовою Ліпшиця: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$, де константа K не залежить від x .

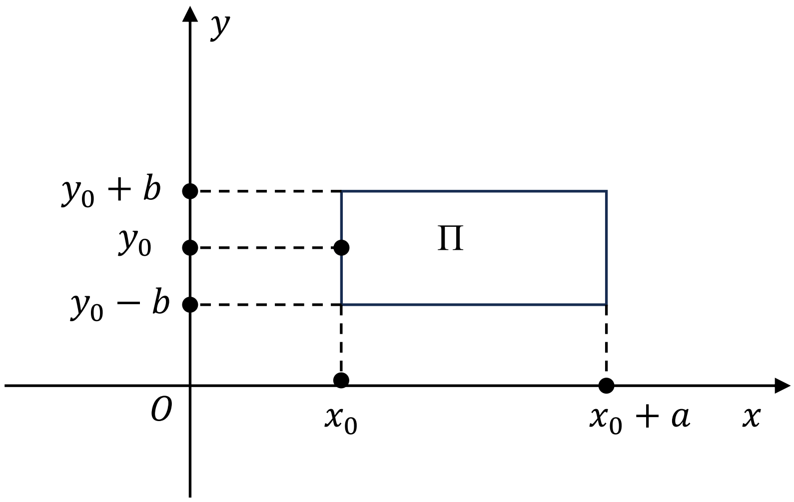

Рис. 2.5. Прямокутник із теореми Пікара

Тоді задача Коші (2.3) має єдиний розв'язок за $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$, де $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{\Pi}|f(x,y)|$.

Геометрично теорема Пікара означає, що за виконання її умов на відрізку $[x_0, x_0 + \alpha]$ існує, і лише одна, така інтегральна крива, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Теорема існування Пеано. Нехай у ДР (2.2) функція $f(x,y)$ неперервна в прямокутнику Π з теореми Пікара. Тоді задача Коші (2.3) має принаймні один розв'язок за $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$.

Зазначимо, що в теоремах Пікара та Пеано прямокутник Π можна замінити прямокутником $x_0 - a \leq x \leq x_0$, $|y - y_0| \leq b$ або прямокутником $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$.

Також зауважимо, що якщо умова теореми існування Пеано виконана, а умова неперервності $f_y'(x,y)$ у теоремі Пікара не виконана, то задача Коші (2.3) може мати кілька (навіть нескінченно багато) розв'язків, як це показує наступний приклад.

Приклад 2.2. Задача Коші

$$y' = \sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0 \tag{2.4}$$

має нескінченно багато розв'язків

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{4}, & x \geq a, \end{cases}$$

де $a \geq 0$ будь-яке число (рис. 2.6).

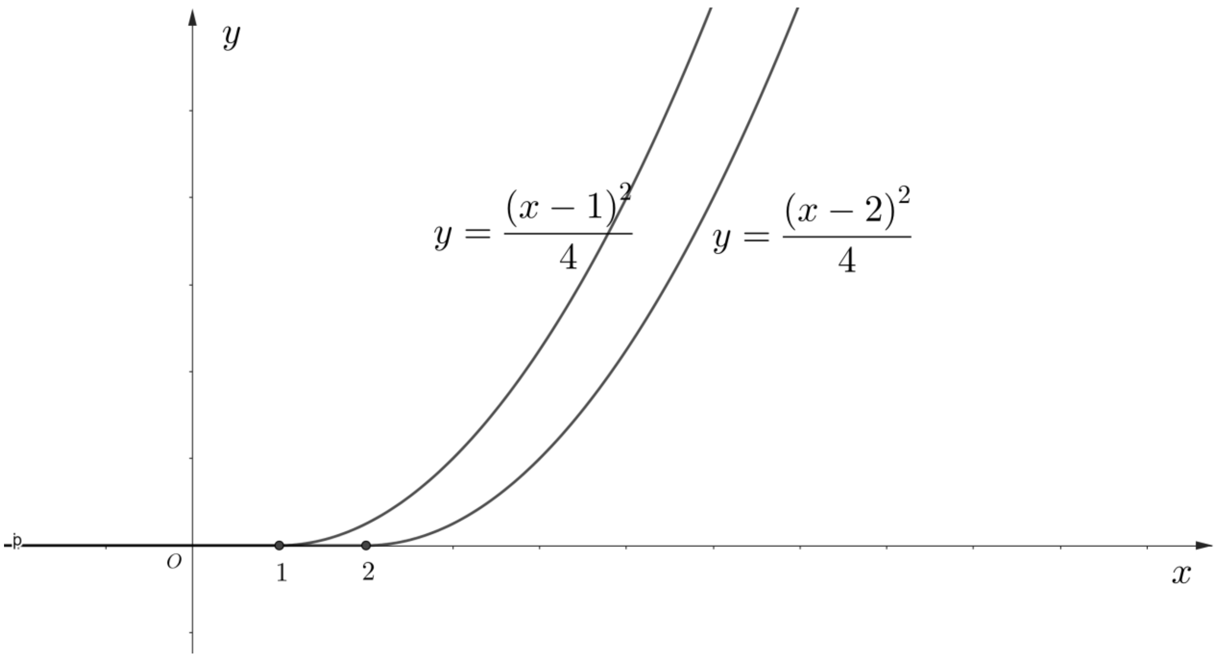

Рис. 2.6. Ілюстрація неєдиності розв'язку задачі Коші (2.4)

Це пов'язано з тим, що для правої частини $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ ДР (2.4) умова теореми Пеано виконана, а умова неперервності $f_y'(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{|y|}} \cdot \frac{|y|}{y}$ з теореми Пікара не виконана за $y = 0$.

Ще зазначимо, що теореми Пікара та Пеано мають **локальний характер**, тобто вони гарантують існування розв'язку задачі лише в малому околі точки x_0.

У загальному випадку розв'язок задачі Коші може за скінченний час x «піти на нескінченність».

Приклад 2.3. Для ДР $y'=1+y^2$ права частина $f(x,y) = 1 + y^2$, тому стала M із теореми Пікара дорівнює $\max\limits_{\Pi}|f(x,y)| = \max\limits_{-b\le y\le b}\{1+y^2\} = = 1+b^2$, звідки $\frac{b}{M} = \frac{b}{1+b^2} \quad \Rightarrow \quad \max\frac{b}{M} = \frac{1}{2}$.

У нашому випадку максимальне значення величини α в теоремі Пікара дорівнює $\frac{1}{2}$, отже, ця теорема гарантує існування розв'язку задачі Коші

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0 \tag{2.5}$$

лише на проміжку $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$. З іншого боку, розв'язок задачі Коші (2.5) (як показано нижче в прикладі 2.9) дорівнює $y = tgx$. Цей розв'язок існує лише на проміжку $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ і «за скінченний час $x = \frac{\pi}{2}$ йде на нескінченність».

Задачу Коші, як правило, розв'язують так: спочатку знаходять загальний розв'язок ДР $y(x,C)$ (або загальний інтеграл $F(x,y,C) = 0$), а потім, використовуючи початкову умову, - значення константи C.

Приклад 2.4. Розв'язати задачу Коші

$$y' = x^3, \qquad y(2) = -3.$$

Загальний розв'язок дорівнює

$$y(x,C) = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C. \tag{2.6}$$

За виразом (2.6) і початковою умовою, маємо

$$\frac{2^4}{4} + C = y(2) = -3,$$

звідки $C = -3 - 4 = -7$.

Відповідь: $y(x) = \frac{x^4}{4} - 7$.

У ДР (2.2) змінні x та y нерівноправні, а саме y є функцією x. Щоб цю нерівноправність усунути, запишемо похідну $y'(x)$ у вигляді дробу $\frac{dy}{dx}$ і перепишемо рівняння (2.2) у більш симетричній формі

$$dy = f(x, y)\, dx. \tag{2.7}$$

Будемо тепер називати функцію $\boldsymbol{x = x(y)}$ **розв'язком** ДР (2.2), а її графік – **інтегральною кривою** ДР (2.2), якщо виконується рівняння

$$dy = f(x(y), y) \cdot x'(y) dy. \tag{2.8}$$

Вертикальна пряма $x = C$ може бути інтегральною кривою.

У **загальному випадку інтегральною кривою** ДР (2.2) називають криву, яка задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$ і для якої виконується рівняння

$$y'(t) = f\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t). \tag{2.9}$$

Приклад 2.5. Перевірити, що декартів лист, який параметрично заданий як

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1}, \quad a \neq 0, \quad t \neq -1,$$

є інтегральною кривою ДР

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^4 - 2\frac{y}{x}}{2\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 1}. \tag{2.10}$$

Маємо

$$\dot{y} = a\frac{6t(t^3 + 1) - 3t^2 \cdot 3t^2}{(t^3 + 1)^2} = a\frac{6t - 3t^4}{(t^3 + 1)^2},$$

$$\dot{x} = a\frac{3(t^3 + 1) - 3t \cdot 3t^2}{(t^3 + 1)^2} = a\frac{3 - 6t^3}{(t^3 + 1)^2}.$$

Тому $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{6t-3t^4}{3 - 6t^3} = \frac{t^4-2t}{2t^3-1} =$ права частина ДР (2.10), оскільки $\frac{y}{x} = t$.

Декартів лист разом зі своєю асимптотою $y = -x - a$ зображено на рис. 2.7 (за $a > 0$).

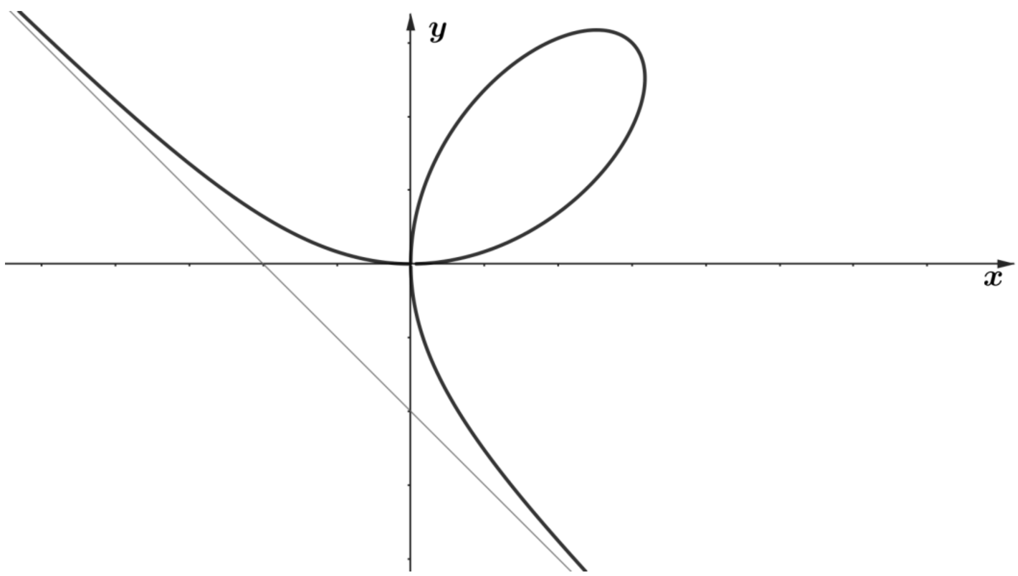

Рис. 2.7. Декартів лист

Далі використовуємо обидві формі запису (2.2), (2.7), а також будемо розглядати ДР першого порядку в **максимально симетричній формі**

$$P(x,y)dx \; + \; Q(x,y)dy = \; 0. \tag{2.11}$$

2.2. Диференціальні рівняння першого порядку, інтегровані у квадратурах

2.2.1. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

ДР вигляду

$$y' = \; f(x)g(y) \tag{2.12}$$

або

$$M(x)N(y)dx \; = \; P(x)Q(y)dy \tag{2.13}$$

називають ДР **з відокремлюваними змінними**.

Для розв’язання такого рівняння потрібно обидві його частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину рівняння входив лише x, а в іншу – тільки y і потім проінтегрувати обидві частини.

При діленні обох частин ДР на вираз, який містить невідомі x та y, можуть бути загублені розв’язки.

Приклад 2.6. Розв’язати рівняння

$$y' = \; 10^{x+y}. \tag{2.14}$$

Рівняння (2.14) можна записати у вигляді ДР (2.12):

$$y' = 10^x \cdot 10^y.$$

Отже, рівняння (2.14) є ДР з відокремленими змінними.

Далі похідну y' запишимо у вигляді дробу $y' = \frac{dy}{dx}$. Тоді ДР (2.14) набуде вигляду

$$\frac{dy}{dx} = 10^x \cdot 10^y.$$

Звідси

$$dy = 10^x \cdot 10^y \cdot dx.$$

Ділимо обидві частини рівняння на 10^y:

$$10^{-y} \cdot dy = 10^x \cdot dx.$$

Змінні відокремлені. Інтегруємо обидві частини:

$$\int 10^{-y} \cdot dy = \int 10^x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C \quad \Rightarrow$$

$$10^{-y} = -10^x + C \quad \Rightarrow \quad y = -\lg(C - 10^x).$$

Відповідь: $y = -\lg(C - 10^x)$.

Приклад 2.7. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + y).$$

Рівняння має вигляд ДР (2.12), тобто є ДР з відокремленими змінними. Маємо

$$dy = x(y^2 + y)dx.$$

Ділимо обидві частини на $y^2 + y$:

$$\frac{dy}{y^2 + y} = xdx.$$

Змінні відокремлені. Інтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int xdx.$$

Ураховуючи, що $\frac{1}{y^2 + y} = \frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)$ і записуючи для зручності довільну константу у вигляді $\ln C$, де $C > 0$, маємо

$$\frac{1}{2}(\ln|y| - \ln|y + 2|) = \frac{x^2}{2} + \ln C,$$

$$\left|\frac{y}{y + 2}\right| = Ce^{x^2}$$

(тут C^2 позначили знову як C),

$$\frac{y}{y + 2} = Ce^{x^2}$$

(тут $\pm C$ позначили знову як C).

Звідки, враховуючи, що

$$y = Ce^{x^2}(y+2) \quad \Rightarrow \quad y\left(1 - Ce^{x^2}\right) = 2Ce^{x^2},$$

одержуємо загальний розв'язок

$$y = \frac{2Ce^{x^2}}{1 - Ce^{x^2}}, \quad C \neq 0. \qquad (2.15)$$

При діленні на $y^2 + y$ були загублені розв'язки $y = 0$, $y = -1$.

Розв'язок $y = 0$ буде охоплений формулою (2.15), якщо в ній дозволити, щоб $C = 0$.

Відповідь: $y = \frac{2Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}}$ (C – довільна константа), $y = -1$.

Приклад 2.8. Розв'язати рівняння

$$x^2y^2y' + 1 = y.$$

Запишемо рівняння у формі ДР (2.13):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1 \Rightarrow x^2y^2dy = (y - 1)dx.$$

Ділимо обидві частини на $x^2(y - 1)$:

$$\frac{y^2}{y - 1}dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Змінні відокремлені. Інтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{y^2}{y-1} dy = \int \frac{dx}{x^2}.$$

Ураховуючи, що $\frac{y^2}{y-1} = \frac{(y^2-1)+1}{y-1} = y+1 + \frac{1}{y-1}$, одержимо загальний інтеграл

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При діленні на $x^2(y-1)$ могли загубити можливі розв'язки $x = 0$ і $y = 1$. Перевірка показує, що $x = 0$ не є розв'язком, а $y = 1$ є розв'язком.

Відповідь: $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C, y = 1.$

Приклад 2.9. Розв'язати задачу Коші

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 1.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок ДР.

Для цього запишемо рівняння у формі ДР (2.13):

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Rightarrow dy = (1 + y^2)dx.$$

Ділимо обидві частини на $1 + y^2$:

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx.$$

Змінні відокремлені. Інтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx.$$

Одержимо загальний інтеграл

$$arctg\ y = x + C.$$

Звідки одержуємо загальний розв'язок

$$y = tg(x + C). \tag{2.16}$$

Тепер розв'яжемо задачу Коші. За виразом (2.16) і початковою умовою, має виконуватися

$$tg(0 + C) = y(0) = 1.$$

Тобто $tg\ C = 1$, $C = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ураховуючи періодичність тангенса, можна взяти $C = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $y = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Зауважимо, що розв'язок задачі Коші існує лише на проміжку $-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ і за скінченний час «йде на нескінченність».

2.2.2. Однорідні диференціальні рівняння. Рівняння, зведені до однорідних диференціальних рівнянь

Щоб дати визначення однорідного ДР, потрібно поняття однорідної функції.

Функція $f(x,y)$ є **однорідною степеня** α, якщо для всіх $t > 0$ виконується рівність $f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)$.

Наприклад, функції

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}, \qquad \sqrt[3]{x^2 + y^2}, \qquad \frac{(x^3 + xy^2)}{x - y}$$

є однорідними ступеня $0, \frac{2}{3}, \ 2$ відповідно.

Зазначимо, що однорідна функція $f(x, y)$ степеня 0 може бути записана у формі $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Дійсно,

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{x}\right)^0 f(x, y) = \left| \begin{matrix} при \ x > 0 \\ t = \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

(за $x < 0, \ t = -\frac{1}{x}$).

ДР називають **однорідним**, якщо воно має таку форму:

$$P(x, y)dx = Q(x, y)dy, \tag{2.17}$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ є **однорідними функціями одного степеня**,
або таку форму:

$$y' = f(x, y), \tag{2.18}$$

де $f(x, y)$ – **однорідна функція нульового степеня** і, отже, дорівнює $g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Тобто однорідні ДР можуть також мати ще і таку форму:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.19}$$

Оскільки однорідні ДР не змінюються за одночасної заміни x на kx і y на ky ($0 \neq k$ – стала), то, якщо $y = y(x)$ є його розв'язком, $y = \frac{y(tx)}{t}$ також є розв'язком. Тому інтегральні криві утворюють множину подібних із центром подібності в початку координат.

Щоб проінтегрувати однорідні ДР (2.17)-(2.19), потрібно в них зробити **заміну**

$$y = t \cdot x, \qquad y' = t' \cdot x + t, \tag{2.20}$$

яка зведе його до ДР з відокремленими змінними.

Приклад 2.10. Розв'язати рівняння

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx \;\; + x\cos\frac{y}{x}dy \;\; = 0.$$

Перепишемо рівняння у формі ДР (2.17):

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx \quad = -x\cos\frac{y}{x}dy.$$

Це однорідне рівняння, оскільки $P(x,y) = x - y\cos\frac{y}{x}$ і $Q(x,y) = -x\cos\frac{y}{x}$ є однорідними функціями одного (а саме першого) степеня.

Робимо заміну (2.20):

$$(x - xt\cos t)dx = -x\cos t\,(xdt \; + \; tdx),$$

$$xdx \quad = -x^2\cos t\,dt \;\Rightarrow\; dx \quad = -x\cos t\,dt.$$

Одержали ДР з відокремленими змінними

$$\frac{dx}{x} = -\cos t\, dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \cos t\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x| = -\sin t + C.$$

Одержуємо загальний інтеграл

$$\ln|x| + \sin t + C = 0 \Rightarrow \quad \ln|x| + \sin\frac{y}{x} + C = 0.$$

Відповідь: $\ln|x| + \sin\frac{y}{x} + C = 0.$

Приклад 2.11. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}.$$

Це однорідне ДР, оскільки після ділення в правій частині на x^2, воно набуває форми ДР (2.19)

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{-\frac{x}{y}}.$$

Робимо заміну (2.20) і одержуємо

$$t' \cdot x + t = t + t^2 e^{-\frac{1}{t}}.$$

Маємо ДР з відокремленими змінними.

$$x\frac{dt}{dx} = t^2 e^{-\frac{1}{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{\frac{1}{t}}dt}{t^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{t}}dt}{t^2} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -e^{\frac{1}{t}} = \ln|x| + C.$$

Одержуємо загальний інтеграл

$$e^{-\frac{x}{y}} + \ln|x| + C = 0.$$

Відповідь: $e^{-\frac{x}{y}} + \ln|x| + C = 0.$

Приклад 2.12. Розв'язати рівняння

$$(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0. \qquad (2.21)$$

Перепишемо рівняння у формі ДР (2.17):

$$(y^4 - 2x^3y)dx = -(x^4 - 2xy^3)dy.$$

Це однорідне рівняння, оскільки $P(x,y) = (y^4 - 2x^3y)dx$ і $Q(x,y) = -(x^4 - 2xy^3)dy$ є однорідними функціями одного (а саме четвертого) степеня.

Перепишемо рівняння у вигляді ДР (2.19):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^4 - 2x^3y}{2xy^3 - x^4} = \left| \begin{array}{c} \textit{ділимо чисельник} \\ \textit{і знаменник} \\ \textit{на } x^4 \end{array} \right| = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^4 - 2\frac{y}{x}}{2\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 1}.$$

Робимо заміну (2.20) і одержуємо

$$t' \cdot x + t = \frac{t^4 - 2t}{2t^3 - 1} \quad \Rightarrow \quad t' \cdot x = \frac{t^4 - 2t}{2t^3 - 1} - t = -\frac{t^4 + t}{2t^3 - 1}.$$

Маємо ДР з відокремленими змінними

$$x\frac{dt}{dx} = -\frac{t^4 + t}{2t^3 - 1} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2t^3 - 1}{t^4 + t}\,dt = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{3t^2}{1 + t^3}\right)dt = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int\left(\frac{1}{t} - \frac{3t^2}{1 + t^3}\right)dt = \int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x| + \ln|1 + t^3| - \ln|t| = \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{x(1 + t^3)}{t}\right| = \ln C \quad \Rightarrow$$

$$x(1 + t^3) = Ct, \qquad (2.22)$$

де C – довільна константа, оскільки $t = -1$ (а отже, $y = -x$) є розв'язком, який загубили при відокремленні змінних. Також загубили розв'язок $t = 0$ (а отже, $y = 0$).

Підставимо $t = \frac{y}{x}$ у загальний інтеграл (2.22) і одержимо всі розв'язки ДР (2.21):

$$x^3 + y^3 = Cxy, \qquad y = 0.$$

Зазначимо, що криву, задану неявно рівнянням $x^3 + y^3 = 3axy$, $a \neq 0$, називають **декартовим листом**. Її параметричне рівняння (як інтегральної кривої ДР (2.10)) наведено в прикладі 2.5, а її зображення за $a > 0$ — на рис. 2.7.

Розглянемо деякі ДР, **зведені до однорідних** ДР.

Рівняння вигляду

$$\boldsymbol{y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right)} \tag{2.23}$$

зведено до однорідного шляхом **заміни** $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, де (x_0, y_0) - точка перетину прямих $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $ax + by + c = 0$.

Якщо прямі не перетинаються, то $a_1 x + b_1 y = k(ax + by)$, тому ДР (2.23) має вигляд

$$y' = F(ax + by),$$

і, отже, зводиться до ДР з відокремленими змінними заміною $z = ax + by$.

Приклад 2.13. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{x + y - 3}{4y - 2x}\,. \tag{2.24}$$

Точку (x_0, y_0) перетину прямих $x + y - 3 = 0$, $4y - 2x = 0$ знайдемо, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x - 4y = 0. \end{cases}$$

Маємо $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Робимо в ДР (2.24) заміну

$$x = u + x_0 = u + 2, \qquad y = v + y_0 = v + 1$$

та одержуємо однорідне ДР

$$v' = \frac{u+2+v+1-3}{4(v-1)-2(u+2)} = \frac{u+v}{4v-2u} = \frac{1+\frac{v}{u}}{4\frac{v}{u}-2}.$$

Заміна $v = t \cdot u,\ v' = t' \cdot u + t$ дає

$$t' \cdot u + t = \frac{1+t}{4t-2} \quad \Rightarrow u\frac{dt}{du} = \frac{1+t}{4t-2} - t = \frac{-4t^2 + 3t+1}{4t-2} \Rightarrow$$

$$\frac{2-4t}{4t^2 - 3t-1}dt = \frac{du}{u} \quad \Rightarrow \int \frac{2-4t}{4t^2 - 3t-1}dt = \int \frac{du}{u}.$$

Оскільки

$$\frac{2-4t}{4t^2 - 3t-1} = \frac{1-2t}{2(t-1)\left(t+\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{2}{5}}{t-1} + \frac{-\frac{3}{5}}{t+\frac{1}{4}},$$

То, інтегруючи, одержимо

$$\frac{2}{5}\ln|t-1| + \frac{3}{5}\ln\left|t+\frac{1}{4}\right| + \ln|u| = \ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$u(t-1)^{\frac{2}{5}}\left(t+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{5}} = C.$$

Оскільки $u = x-2, \quad t = \frac{v}{u} = \frac{y-1}{x-2}$, то загальний інтеграл ДР (2.24) дорівнює

$$(x-2)\left(\frac{y-1}{x-2}-1\right)^{\frac{2}{5}}\left(\frac{y-1}{x-2}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{5}} = C$$

або

$$(y-x+1)^2(4y+x-6)^3 \ = \ C.$$

При відокремленні змінних загубили розв’язок $t=1$, а отже, $y=x-1$, і розв’язок $t=-\frac{1}{4}$, а отже, $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$, які містять загальний інтеграл за $C=0$.

Відповідь: $(y-x+1)^2(4y+x-6)^3 \ = \ C$.

У деяких випадках **заміна** $y=z^{\alpha}$ зводить ДР до однорідного.

Приклад 2.14. Розв’язати рівняння

$$2x^2y' = \ y^3 \ + xy.$$

Зробимо в ДР заміну $y=z^{\alpha}$:

$$2x^2\alpha z^{\alpha-1}z' = \ z^{3\alpha} \ + xz^{\alpha}.$$

Одержане рівняння буде однорідним, якщо степені всіх одночленів від змінних x та z дорівнюватимуть

$$2+\alpha-1=3\alpha=1 \ + \ \alpha.$$

Ці рівності виконуються за $\alpha=\frac{1}{2}$. Тому заміна $y=\sqrt{z}$ призводить ДР до однорідного.

$$x^2z^{-\frac{1}{2}}z' = \ z^{\frac{3}{2}} \ + xz^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{z^{\frac{3}{2}}+xz^{\frac{1}{2}}}{x^2z^{-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{z}{x}\right)^2+\frac{z}{x}.$$

$$z = tx, \quad z' = t' \cdot x + t \quad \Rightarrow$$

$$t' \cdot x + t = t^2 + t \quad \Rightarrow \quad x\frac{dt}{dx} = t^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{t} = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y^2} = -\ln C|x| \quad \Rightarrow$$

$$x = -y^2 \ln C|x|.$$

При відокремленні змінних загубили розв'язок $t = 0$, а отже, $y = 0$.

Відповідь: $x = -y^2 \ln C|x|$, $y = 0$.

2.2.3. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння, зведені до лінійних диференціальних рівнянь

ДР вигляду

$$y' + q(x)y = f(x) \tag{2.25}$$

називають **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.**

Якщо його права частина $f(x) = 0$, воно **лінійне однорідне** ДР. Якщо його права частина $f(x) \neq 0$, то воно **лінійне неоднорідне** ДР.

Є два методи його розв'язання: основний - **метод варіації довільної сталої Лагранжа** і **метод Бернуллі**.

Щоб знайти **методом варіації довільної сталої** загальний розв'язок неоднорідного ДР (2.25), спочатку знаходять загальний розв'язок відповідного однорідного ДР, яке є ДР з відокремленими змінними. Потім у цьому розв'язку довільну константу C замінюють на невідому функцію $C(x)$. Далі одержаний вираз підставляють у неоднорідне ДР (2.25) і знаходять функцію $C(x)$.

Приклад 2.15. Розв'язати рівняння методом варіації довільної сталої

$$y' + \ tgx \cdot y \ = \ \frac{1}{\cos x}. \tag{2.26}$$

Спочатку розв'язуємо відповідне однорідне ДР

$$y' \ + \ tgx \cdot y \ = \ 0,$$

яке є ДР з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{dx} \ = \ -tgx \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} \ = \ -tgx \ dx \ \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} \ = \ -\int tgx \ dx \ \Rightarrow$$

$$\ln|y| \ = \ln|\cos x| \ + \ln C \ = \ln C|\cos x|.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного ДР дорівнює

$$y = C \cos x \ . \tag{2.27}$$

Шукаємо загальний розв'язок неоднорідного ДР у такому самому вигляді (2.26), але з заміною сталої C на невідому функцію $C(x)$:

$$y = C(x)\cos x. \tag{2.28}$$

Для знаходження $C(x)$ підставляємо вираз (2.28) у ДР (2.26):

$$C'(x)\cos x \ - C(x)\sin x \ + \ tgx \ C(x)\cos x \ = \frac{1}{\cos x}.$$

Оскільки $tgx \ C(x)\cos x \ = \ C(x)\sin x$, то

$$C'(x)\cos x \ = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) \ = \frac{1}{\cos^2 \ x} \ (x) \quad \Rightarrow$$

$$C(x) \ = \int \frac{dx}{cos^2 x} \ = \ tgx \ + \ C.$$

Підставивши $C(x)$ у ДР (2.28), одержимо загальний розв'язок

$$y = C(x)\cos x \ = \ (tgx \ + C)\cos x \ = \sin x \ + C \cdot \cos x.$$

Відповідь: $y = C \cdot \cos x \ + \sin x$.

Виявилося, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР дорівнює сумі загального розв'язку $C \cdot \cos x$ відповідного однорідного ДР і частинного розв'язку $\sin x$ неоднорідного ДР.

Далі ми побачимо, що це твердження є справедливим для лінійних ДР довільного порядку.

Методом Бернуллі загальний розв'язок неоднорідного ДР (2.25) шукаємо у вигляді добутку $y = u(x)\ v(x)$ двох функцій, де $u(x)$ є розв'язком відповідного однорідного ДР, а друга функція $v(x) = \int \frac{f(x)}{u(x)} dx$, де $f(x)$ дорівнює правий частині неоднорідного ДР (2.25).

Приклад 2.16. Розв'язати рівняння методом Бернуллі

$$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$$

Запишемо ДР у вигляді (2.25):

$$y' + \left(1+\tfrac{1}{x}\right)y = 3xe^{-x}.$$

Шукаємо розв'язок $u(x)$ відповідного однорідного ДР:

$$u' + \left(1+\frac{1}{x}\right)u = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = -\left(1+\frac{1}{x}\right)u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{u} = -\int\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln u = -(x+\ln x) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Знаходимо $v(x)$:

$$v(x) = \int\frac{f(x)}{u(x)}dx = \int\frac{3xe^{-x}}{\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)}dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Загальний розв'язок дорівнює

$$y = u(x)v(x) = \frac{e^{-x}}{x}(x^3 + C) = C\frac{e^{-x}}{x} + x^2e^{-x}.$$

Відповідь: $y = C\frac{e^{-x}}{x} + x^2e^{-x}$.

Розглянемо деякі ДР, **зведені до лінійних** ДР.

Іноді ДР перетворюється в лінійне, якщо в ньому **вважати невідомою не функцію $\boldsymbol{y = y(x)}$, а обернену функцію $\boldsymbol{x = x(y)}$**.

Приклад 2.17. Розв'язати рівняння

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

Маємо

$$(2e^y - x)\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow 2e^y - x = \frac{dx}{dy}.$$

Вважаючи $x = x(y)$, одержуємо для x лінійне неоднорідне ДР

$$x' + x = 2e^y. \tag{2.29}$$

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР:

$$x' + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} + x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = -dy \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int dy \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x| = -y + \ln C \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{-y}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді

$$x = C(y)e^{-y}. \tag{2.30}$$

Підставляємо цей вираз у ДР (2.29):

$$C'(y)e^{-y} - C(y)e^{-y} + C(y)e^{-y} = 2e^{y} \Rightarrow$$

$$C'(y)e^{-y} = 2e^{y} \Rightarrow C'(y) = 2e^{2y} \Rightarrow$$

$$C(y) = \int 2e^{2y}\,dy = e^{2y} + C.$$

Підставивши $C(y)$ у ДР (2.30), одержимо загальний розв'язок

$$x = C(y)e^{-y} = (e^{2y} + C)e^{-y} = Ce^{-y} + e^{y}.$$

Відповідь: $x = Ce^{-y} + e^{y}$.

Рівняння вигляду

$$y' + q(x)y = f(x)y^{\alpha} \tag{2.31}$$

називають (за $\alpha \neq 1$) **диференціальним рівнянням Бернуллі.**

Щоб його розв'язати, потрібно його поділити на y^{α} і звести до лінійного **заміною** $z = y^{1-\alpha}$.

Але ДР Бернуллі можна безпосередньо (оминаючи цю заміну) проінтегрувати **методом варіації довільної сталої**.

Приклад 2.18. Розв'язати рівняння

$$xy^2y' = x^2 + y^3.$$

Поділивши ДР на xy^2, одержимо ДР Бернуллі з $\alpha = -2$:

$$y' - \frac{1}{x}y = x\frac{1}{y^2}. \qquad (2.32)$$

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow y = C\cdot x.$$

Загальний розв'язок ДР Бернуллі шукаємо у вигляді

$$y = C(x)\cdot x.$$

Підставляємо цей вираз у ДР (2.32):

$$C'(x)\cdot x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)\cdot x = x\frac{1}{(C(x)\cdot x)^2} \Rightarrow$$

$$C'(x) = \frac{1}{C^2(x)\,x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{C^2(x)\,x^2} \Rightarrow C^2(x)dC(x) = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow$$

$$\int C^2(x)dC(x) = \int\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{C^3(x)}{3} = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow$$

$$C(x) = \sqrt[3]{-\frac{3}{x} + C} \Rightarrow$$

$$y = C(x) \cdot x = \sqrt[3]{-\frac{3}{x} + C} \cdot x \Rightarrow$$

$$y^3 = C \cdot x^3 - 3x^2.$$

Відповідь: $y^3 = C \cdot x^3 - 3x^2$.

Рівняння вигляду

$$y' + y^2 = q(x) \tag{2.33}$$

називають **диференціальним рівнянням Ріккаті (у канонічній формі)**.

ДР Рікатті в загальному випадку не інтегрується у квадратурах. Наприклад, якщо x^{α}, то, як довів Ліувілль, воно інтегрується лише тоді, коли $\alpha = -\frac{4n}{2n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$ або $\alpha = -2$.

Але якщо відомий частинний розв'язок y_1 ДР Ріккаті, то воно інтегрується у квадратурах, оскільки заміна $y = y_1 + z$ зводить його до ДР Бернуллі.

Якщо відомо три частинних розв'язки y_1, y_2, y_3 ДР Ріккаті, то будь-який його розв'язок y знаходять без квадратур із співвідношення

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \equiv Const.$$

Приклад 2.19. Розв'язати рівняння

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}, \tag{2.34}$$

яке має інтегруватись у квадратурах, як зазначено вище. Спробуємо знайти його частинний розв’язок у вигляді $y = \frac{C}{x}$. Підставимо його в ДР (2.34) і одержимо

$$-\frac{C}{x^2} + \frac{C^2}{x^2} = \frac{2}{x^2}.$$

Звідки $C^2 - C - 2 = 0$. Використаємо, наприклад, корінь $C = 2$, тобто розв’язок $y_1 = \frac{2}{x}$ ДР (2.34).

Зробимо в ДР (2.34) заміну $y = y_1 + z = \frac{2}{x} + z$:

$$-\frac{2}{x^2} + z' + \left(\frac{2}{x} + z\right)^2 = \frac{2}{x^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{x^2} + z' + \frac{4}{x^2} + \frac{4z}{x} + z^2 = \frac{2}{x^2}.$$

Одержимо ДР Бернуллі

$$z' + \frac{4}{x} z = -z^2.$$

Шукаємо загальний розв’язок відповідного однорідного ДР:

$$z' + \frac{4}{x} z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{4z}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z} = -4\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -4\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|z| = \ln\frac{1}{x^4} + \ln C \Rightarrow \ln|z| = \ln\frac{C}{x^4} \Rightarrow z = \frac{C}{x^4}.$$

Загальний розв'язок ДР Бернуллі шукаємо у вигляді $z = \frac{C(x)}{x^4}$:

$$\frac{C'(x)x^4 - 4C(x)x^3}{x^8} + \frac{4}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^4} = -\left(\frac{C(x)}{x^4}\right)^2,$$

$$C'^{(x)} = -C^2(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = -C^2(x) \Rightarrow -\frac{dC(x)}{C^2(x)} = dx.$$

$$-\int \frac{dC(x)}{C^2(x)} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{C(x)} = x + C \Rightarrow C(x) = \frac{1}{x + C}.$$

Загальний розв'язок ДР Бернуллі

$$z = \frac{C(x)}{x^4} = \frac{1}{x^5 + C\cdot x^4}.$$

Загальний розв'язок ДР Ріккаті

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^5 + C\cdot x^4}.$$

Відповідь: $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^5+C\cdot x^4}$.

Важливість ДР Ріккаті обумовлена, зокрема, його зв`язком з **одновимірним диференціальним рівнянням Шредінгера**

$$-y'' + q(x)y = 0,$$

яке відіграє дуже важливу роль у математичній фізиці.

А саме логарифмічна похідна $z = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$ розв'язку ДР Шредінгера задовольняє ДР Ріккаті.

Дійсно,

$$z' + z^2 = \frac{y'' \cdot y - (y')^2}{y^2} + \frac{(y')^2}{y^2} = \frac{y''}{y} = q(x).$$

Рівняння вигляду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (2.35)$$

називають **диференціальним рівнянням у повних диференціалах,** якщо його ліва частина дорівнює повному диференціалу $dF(x,y) = F'_x(x,y)dx + F'_y(x,y)dy$ деякої функції $F(x,y)$.

Аби це виконувалося, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Якщо функція $F(x,y)$ знайдена, то загальний інтеграл ДР (2.35) має вигляд

$$F(x,y) = C.$$

Приклад 2.20. Розв'язати рівняння

$$\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0. \qquad (2.36)$$

Оскільки

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(y^3 + \ln x)}{\partial x} = \frac{1}{x},$$

то рівняння (2.36) є ДР в повних диференціалах. Знайдемо функцію $F(x,y)$, повний диференціал якої дорівнює лівій частині рівняння (2.36), тобто функцію $F(x,y)$ таку, що

$$F'_x(x,y) = \frac{y}{x}, \quad F'_y(x,y) = y^3 + \ln x\,. \qquad (2.37)$$

Інтегруємо першу рівність за x, вважаючи що y є сталою:

$$F(x,y) = \int \frac{y}{x}\,dx = y\ln x + C(y).$$

Щоб знайти $C(y)$, підставляємо знайдений вираз у другу рівність (2.37):

$$\left(y\ln x + C(y)\right)'_y = y^3 + \ln x.$$

Звідси

$$C'(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad C(y) = \int y^3\,dy = \frac{y^4}{4} + Const.$$

Отже,

$$F(x,y) = y \ln x + C(y) = y \ln x + \frac{y^4}{4}.$$

Загальний інтеграл ДР (2.35) дорівнює

$$4y \ln x + y^4 = C.$$

Відповідь: $4y \ln x + y^4 = C$.

Запитання до розділу 2

1. Що називають загальним розв’язком диференціального рівняння першого порядку?
2. Що називають загальним інтегралом диференціального рівняння першого порядку?
3. Який геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку?
4. Що називають полем напрямків?
5. Що називають ізокліною?
6. Що називають початковою умовою для диференціального рівняння першого порядку?
7. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.
8. Який геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку?
9. Сформулювати теорему Пікара існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.

10. Сформулювати теорему Пеано існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.

11. Що означає, що теореми Пікара та Пеано мають локальний характер?

12. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням із відокремленими змінними? Як його розв’язати?

13. Яку функцію називають однорідною?

14. Які рівняння називають однорідними диференціальними рівняннями? Як їх розв’язати?

15. Навести приклади диференціальних рівнянь, зведених до однорідних.

16. Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням першого порядку?

17. Яке рівняння називають лінійним однорідним (неоднорідним) диференціальним рівнянням першого порядку?

18. У чому полягає метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) розв’язання лінійних диференціальним рівнянням першого порядку?

19. У чому полягає метод Бернуллі розв’язання лінійних диференціальним рівнянням першого порядку?

20. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням Бернуллі? Як його можна розв’язати?

21. Яке рівняння називають рівнянням Ріккаті. Навести випадки його розв’язання?

22. Який зв’язок існує між диференціальними рівняннями Ріккаті та Шредінгера?

23. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням у повних диференціалах? Як його розв’язати?

Завдання до розділу 2

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки або загальні інтеграли диференціальних рівнянь:

1) $(y^2-4y)dx-\frac{2}{x}dy=0$;

2) $xyy'-3=y^2$;

3) $(x^2+1)dy+2xydx=0$;

4) $\sin x\,dy-(y+2)\cos x\,dx=0$;

5) $2x(y^2-4)dx-(x+2)ydy=0$;

6) $x^2y'=y^2+xy$;

7) $y^2+2x^2y'=xyy'$;

8) $(y+x)y'-y=0$;

9) $y'=\frac{y^2-xy-3x^2}{x^2}$;

10) $(x+4y)y'=2x+3y+5$;

11) $y'=\frac{3x+y-6}{2x+2y-8}$;

12) $y'=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$;

13) $x-y-1+(y-x+2)y'=0$;

14) $y'=\frac{x-2y+1}{-2x+4y+2}$;

15) $x^3(y'-x)=y^2$;

16) $xy'=y-\frac{y^2}{x^2}$;

17) $xy'+(x+2)y=2x^2e^{-x}$;

18) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{3}{x^3+1}$;

19) $(2x+1)y'=2x+4y$;

20) $y'-\frac{y}{x\ln x}=2x\ln x$;

21) $(2xy+1)dy-y^2dx=0$;

22) $xy'+y=y^2\ln x$;

23) $3y^2y'-2y^3=x+1$;

24) $y'+y^2=x^{-4}$;

25) $\frac{2xy}{x^4+y^2}dx-\frac{x^2}{x^4+y^2}dy=0$.

Завдання 2. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $y'=e^{x-y}, y(0)=2$;

2) $xy'+y=y^2,\ y(1)=\frac{1}{4}$;

3) $(x^2+1)y'+2xy^2=0,\ \ y(0)=1$;

4) $y'=\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2,\ \ y(1)=1$;

5) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y,\quad y(1)=0$;

6) $(y^2+2xy)dx-x^2dy=0,\quad y(1)=2$;

7) $xy'-2y=2x^4,\quad y(1)=4$;

8) $y'\cos x+y\sin x=1,\quad y(0)=2$;

9) $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x,\ \ y(e)=0$.

Завдання 3*. Довести, що задача Коші

$$y' = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}, \quad y(0) = 3$$

має єдиний розв'язок на всій осі.

Відповіді до завдань розділу 2

Завдання 1:

1) $y = -\frac{4}{Ce^{x^2}-1}, y = 0$; **2)** $y^2 + 3 = Cx^2$; **3)** $y = \frac{C}{x^2+1}$; **4)** $y = C\sin x - 2$;

5) $y^2 = \frac{Ce^{4x}}{(x+2)^2} + 4, x = -2$; **6)** $y = -\frac{x}{C+\ln x}$; **7)** $2\ln y = C + \frac{y}{x}, y = 0$;

8) $\ln y = C + \frac{x}{y}, y = 0$; **9)** $y = \frac{Cx^5+3x}{1-Cx^4}, y = -x$;

10) $(x-y+5)^5(2y-x-6) = C$; **11)** $(2y+3x-9)(x-y+2)^4 = C$;

12) $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$; **13)** $(y-x+2)^2 = -2x + C$;

14) $\ln|-2x+4y| = -x - 2y + C, x = 2y$; **15)** $\ln|x| + \frac{x^2}{y-x^2} = C$;

16) $y = \frac{x^2}{Cx-1}$; **17)** $y = e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{C}{x^2}\right)$; **18)** $y = \frac{\ln|x^3+1|+C}{x^2}$;

19) $y = C(2x+1)^2 - x - \frac{1}{4}$; **20)** $y = x^2\ln x + C\ln x$; **21)** $\frac{y^3}{3xy+1} = C$;

22) $(1 + Cx + \ln x)y = 1$; **23)** $4y^3 = Ce^{2x} - (2x+3)$;

24) $y = \frac{e^{\frac{2}{x}}(x-1)+C(x+1)}{x^2\left(e^{\frac{2}{x}}+C\right)}$; **25)** $arctg\,\frac{x^2}{y} = C$.

Завдання 2:

1) $y = \ln(e^x + e^2 - 1)$; **2)** $y = \frac{1}{3x+1}$; **3)** $y = \frac{1}{\ln(x^2+1)+1}$; **4)** $y = \frac{x}{2\ln|x|+1}$;

5) $y = -x\ln|1 - \ln|x||$; **6)** $y = -\frac{2x^2}{2x-3}$; **7)** $y = x^4 + 3x^2$;

8) $y = \sin x + 2\cos x$; **9**) $y = \frac{(x^2-e^2)\ln x}{2}$.

РОЗДІЛ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. Загальні поняття. Задача Коші

У загальному випадку ДР **n-го порядку** має вигляд

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{3.1}$$

Найпростіше ДР n-го порядку має вигляд

$$y^{(n)} = f(x).$$

Його розв'язують шляхом **n-кратного інтегрування правої частини**.

Приклад 3.1. Розв'язати ДР

$$y''' = x^5.$$

Послідовно інтегруємо:

$$y'' = \int y''' dx = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C_1 ,$$

$$y' = \int y'' dx = \int \left(\frac{x^6}{6} + C_1\right) dx = \frac{x^7}{42} + C_1 x + C_2 ,$$

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{x^7}{42} + C_1 x + C_2\right) dx =$$

$$= \frac{x^8}{336} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Одержали загальний розв'язок, який містить **три** довільних константи.

Відповідь: $y = \frac{x^8}{336} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

Цей приклад демонструє те, що **загальний розв'язок** ДР n-го порядку містить n **довільних констант**.

Зазначимо, що визначення **загального розв'язку** $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ і **загального інтегралу** $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ ДР (3.1) n-го порядку є аналогічними визначенню для ДР першого порядку.

ДР n-го порядку (як і ДР першого порядку) легше досліджувати, коли воно має **нормальну форму**, тобто розв'язано відносно старшої похідної і, отже, має вигляд

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right). \quad (3.2)$$

Задача Коші для ДР n-го порядку (3.2) полягає в знаходженні його розв'язку $y(x)$, який задовольняє **n-початковим умовам**

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \quad (3.3)$$

У випадку ДР другого порядку задача Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \; y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \quad (3.4)$$

має простий **геометричний зміст**. А саме шукають інтегральну криву, яка проходить через задану точку $P_0(x_0, y_0)$ і дотична до якої в цій точці має заданий кутовий коефіцієнт y_1 (рис. 3.1).

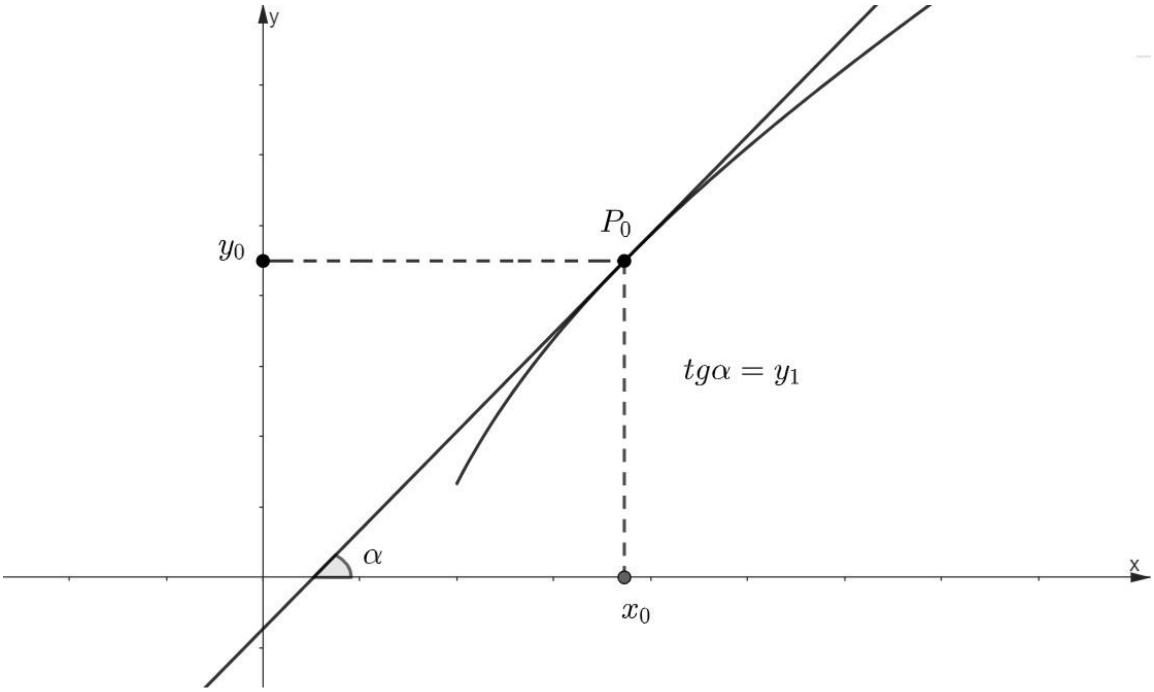

Рис. 3.1. Геометричний зміст задачі Коші для ДР другого порядку

Для ДР Ньютона (приклад 1.4) задача Коші

$$m\ \ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t) = x_1$$

полягає в знаходженні положення $x(t)$ у момент часу t матеріальної точки маси m, яка рухається під дією сили F, якщо відомі її початкове положення $x(t_0) = x_0$ і початкова швидкість $\dot{x}(t_0) = x_1$ в початковий момент часу t_0.

Теорема Пікара про існування та єдиність розв'язку задачі Коші (3.2), (3.3) **для ДР** $\boldsymbol{n}$**-го порядку** (спрощений варіант)

Нехай функція $f(x, u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_{n-1})$ з правої частини ДР (3.2) разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ є неперервними в області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ і нехай точка $(x_0,\ y_0,\ \cdots,\ y_{n-1}) \in D$. Тоді задачі Коші (3.2), (3.3) мають єдиний розв'язок у деякому інтервалі $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

3.2. Метод зниження порядку

Основним методом інтегрування ДР вищих порядків (за винятком загальних лінійних ДР, які розглянемо в наступному розділі) є **метод зниження порядку**, тобто перехід до ДР меншого порядку.

Основні методи зниження порядку розглядаємо для простоти на прикладі загального ДР другого порядку

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') \ = \ 0 \tag{3.5}$$

(для ДР n-го порядку – робота [8]).

Диференціальні рівняння, які не містять невідому функцію $y(x)$

Такі ДР мають вигляд

$$F(x,\ y',\ y'') \ = \ 0. \tag{3.6}$$

Заміна $y' \ = \ p(x),\ y'' \ = \ p'(x)$ зводить ДР (3.6) другого порядку до ДР першого порядку

$$F(x,\ p,\ p') \ = \ 0. \tag{3.7}$$

Диференціальні рівняння, які не містять незалежну змінну x

Такі ДР мають вигляд

$$F(y,\ y',\ y'') \ = \ 0. \tag{3.8}$$

У цьому випадку **за незалежну змінну** беруть y, а за **невідому функцію** - $y' \ = \ p(y)$. За такої заміни

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p.$$

Отже, **заміна**

$$y' = p(y), \qquad y'' = p'p$$

зводить ДР (3.8) другого порядку до ДР першого порядку

$$F(y,\ p,\ p') = 0.$$

Диференціальні рівняння, які є однорідними відносно $y,\ y',\ y''$

Це означає, що ліва частина ДР (3.5) задовольняє умову

$$F(x,\ ty,\ ty',\ ty'') = t^{\alpha} F(x,\ y,\ y',\ y''). \qquad (3.9)$$

У цьому випадку **заміна**

$$y' = ty \quad \Rightarrow \quad y'' = t' \cdot y + t \cdot y' = y(t' + t^2)$$

зводить ДР (3.5), (3.9) другого порядку до ДР першого порядку

$$F(x,\ 1,\ t,\ t' + t^2) = 0$$

(*поясніть, чому саме до такого ДР*).

Диференціальні рівняння, у яких ліві частини $F(x,\ y,\ y',\ y'')$ **є похідними від деяких функцій** $\Phi(x,\ y,\ y')$

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = \big(\Phi(x,\ y,\ y')\big)', \qquad (3.10)$$

звідки одержуємо **проміжний інтеграл** ДР (3.5), (3.10)

$$\Phi(x,\ y,\ y') \ =\ C_1,$$

який є ДР першого порядку, що містить довільну сталу C_1.

Приклад 3.2. Розв’язати ДР для ланцюгової лінії з прикладу 1.5.

Потрібно проінтегрувати ДР

$$y'' \ =\ \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}. \tag{3.11}$$

ДР не містить y. Тому заміна $y' = p(x),\ y'' = p'(x)$ зводить його до ДР першого порядку з відокремленими змінними

$$p' \ =\ \frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}.$$

Маємо

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}\int dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right| = \frac{1}{a}(x+C_1).$$

Звідси

$$y' + \sqrt{1+(y')^2} = e^{\frac{x+C_1}{a}}. \tag{3.12}$$

Але

$$y' - \sqrt{1+(y')^2} = \frac{-1}{y' + \sqrt{1+(y')^2}} = -e^{-\frac{x+C_1}{a}}. \qquad (3.13)$$

Додавши вирази (3.12) і (3.13), одержимо

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{x+C_1}{a}} - e^{-\frac{x+C_1}{a}}\right). \qquad (3.14)$$

Інтегруючи вираз (3.14), маємо загальний розв'язок ДР (3.11)

$$y = \frac{1}{2a}\left(e^{-\frac{x+C_1}{a}} + e^{-\frac{x+C_1}{a}}\right) + C_2 = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\left(\frac{x+C_1}{a}\right) + C_2.$$

Константи C_1, C_2, a знаходять [10, п. 140] виходячи з координат точок, у яких закріплені кінці ланцюга і з того, що довжина ланцюга відома.

Приклад 3.3. Розв'язати ДР

$$(1-x^2)y'' + xy' = 2. \qquad (3.15)$$

ДР не містить y. Тому заміна $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ зводить його до ДР першого порядку

$$(1-x^2)p' + xp = 2,$$

яке після ділення на $1-x^2$ перетворюється в лінійне ДР типу (2.25)

$$p' + \frac{x}{1-x^2}p = \frac{2}{1-x^2}. \qquad (3.16)$$

Розв'язуємо ДР (3.16) методом варіації довільної сталої.

Шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР:

$$p' + \frac{x}{1-x^2}p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{x}{x^2-1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{x}{x^2-1}dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{p} = \int\frac{x}{x^2-1}dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|p| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln C_1\sqrt{|x^2-1|} \quad \Rightarrow$$

$$p = C_1\sqrt{|x^2-1|}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного ДР (3.16) шукаємо у вигляді

$$p = C_1(x)\sqrt{|x^2-1|}\ .$$

Підставляємо цей вираз у ДР (3.16)

Нехай $x^2-1>0$. Тоді $\sqrt{|x^2-1|} = \sqrt{x^2-1}$. Маємо

$$C_1{}'(x)\sqrt{x^2-1} + C_1(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x}{1-x^2}C_1(x)\sqrt{x^2-1} = \frac{2}{1-x^2},$$

$$C_1'(x)\sqrt{x^2-1} = \frac{2}{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = -2(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$C_1(x) = -2\int(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y' = p = C_1(x)\sqrt{x^2-1} = 2x + C_1\sqrt{x^2-1} \Rightarrow$$

$$y = \int y' dx = \int \left(2x + C_1\sqrt{x^2 - 1}\right) dx =$$

$$= x^2 + C_1\left(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right) + C_2.$$

Нехай $x^2 - 1 < 0$. Тоді $\sqrt{|x^2 - 1|} = \sqrt{1 - x^2}$.

Аналогічно одержимо

$$y = \int \left(2x + C_1\sqrt{1 - x^2}\right) dx =$$

$$= x^2 + C_1\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right) + C_2.$$

Відповідь:

$y = x^2 + C_1\left(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right) + C_2,$

$y = x^2 + C_1\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right) + C_2.$

Приклад 3.4. Розв'язати ДР

$$y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3.$$

ДР не містить x. Тому заміна $y' = p(y)$, $y'' = p'p$ зводить його до ДР першого порядку

$$yp'p = p^2 - p^3,$$

у якого, вочевидь, є розв'язок $p = 0$, тобто $y' = 0$, отже, $y = C$.

Скоротивши на p, одержимо ДР

$$y\frac{dp}{dy} = p - p^2$$

з відокремленими змінними. Маємо

$$\frac{dp}{p - p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dp}{p - p^2} = \int \frac{dy}{y}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{p - p^2} = \frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p},$$

маємо

$$\ln|p| - \ln|1-p| = \ln|y| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{p}{1-p} = C_1 y \Rightarrow p(1 + C_1 y) = C_1 y \Rightarrow$$

$$y' = p = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y}.$$

Одержали знову ДР з відокремленими змінними. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} \Rightarrow \frac{C_1 y + 1}{C_1 y} dy = dx \Rightarrow$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{C_1 y}\right) dy = \int dx \Rightarrow$$

$$y + \frac{1}{C_1}\ln|y| = x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y + C_1\ln|y| = x + C_2.$$

Відповідь: $y + C_1 \ln|y| = x + C_2, y = C$.

Приклад 3.5. Розв'язати ДР

$$x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 = y \cdot y'.$$

ДР є однорідним відносно y, y', y''. Тому заміна $y' = ty$, $y'' = y(t' + t^2)$ зводить його до рівняння

$$xy\big(y(t' + t^2)\big) - x(ty)^2 = yty,$$

у якого, вочевидь, є розв'язок $y = 0$.

Скорочуючи на y^2, одержимо ДР першого порядку

$$x(t' + t^2) - xt^2 = t \quad \Rightarrow xt' = t$$

з відокремленими змінними. Маємо

$$x\frac{dt}{dx} = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|t| = \ln|x| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad t = C_1 \cdot x.$$

Тому

$$\frac{y'}{y} = t = C_1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 yx.$$

Одержали знову ДР з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{dx} = C_1 yx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = C_1 x dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int C_1 x dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|y| = C_1 x^2 + \ln C_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^{C_1 \cdot x^2}.$$

Відповідь: $y = C_2 e^{C_1 \cdot x^2}$.

Приклад 3.6. Розв'язати ДР

$$y'' = x \cdot y' + y + 1.$$

Обидві частини ДР є похідними

$$(y')' = (xy + x)'.$$

Тому одержуємо проміжний інтеграл

$$y' = xy + x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' - xy = x + C_1, \tag{3.17}$$

який є лінійним ДР першого порядку, що залежить від довільної сталої C_1.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y' - xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = xy \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln C_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C_2(x) e^{\frac{x^2}{2}}. \tag{3.18}$$

Підставляємо цей вираз у ДР (3.17):

$$C_2{}'(x) e^{\frac{x^2}{2}} + C_2(x) \cdot x e^{\frac{x^2}{2}} - x \cdot C_2(x) e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 + x \quad \Rightarrow$$

$$C_2{}'(x) e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 + x \quad \Rightarrow \quad C_2{}'(x) = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$C_2(x) = \int C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= C_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - e^{-\frac{x^2}{2}} + C_2.$$

Підставляємо $C_2(x)$ у вираз (3.18):

$$y = C_2(x) e^{\frac{x^2}{2}} = \left(C_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - e^{-\frac{x^2}{2}} + C_2 \right) e^{\frac{x^2}{2}} =$$

$$= C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C_2 e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C_2 e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$

Запитання до розділу 3

1. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням n-го порядку?

2. Який вигляд має найпростіше диференціальне рівняння n-го порядку?

3. Скільки довільних сталих містять загальний розв'язок і загальний інтеграл диференціального рівняння n-го порядку?

4. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння n-го порядку.

5. У чому полягає геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку?

6. У чому полягає задачі Коші для диференціального рівняння Ньютона?

7. Сформулювати теорему Пікара існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння n-го порядку.

8. Який метод є основним методом інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків?

9. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовують заміну $y' = p(x)$?

10. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовують заміну $y' = p(y)$?

11. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовують заміну $y' = ty$?

12. Які диференціальні рівняння зводяться до проміжного інтегралу?

Завдання до розділу 3

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки або загальні інтеграли диференціальних рівнянь:

1) $y'' = \sin 2x + x$;
2) $y'' = e^{2x} + x^2$;
3) $y''' = x\cos x$;
4) $xy'' = y' \cdot \ln\frac{y'}{x}$;
5) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$;
6) $y''(e^x + 2\,) - 2y' = 0$;
7) $xy'' - y' = x^2e^{2x}$;
8) $(y+3)y'' - (y')^2 = 0$;
9) $2(y')^2 = (y-1)y''$;
10) $2y(y')^3 - y'' = 0$;
11) $y''(1+y) = (y')^2 + y'$.

Завдання 2. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $y''(x^2+1) - 2xy' = 0,\quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 3$;
2) $y'' - ctg\,x\,y' = \sin x\,,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;
3) $yy'' - (y')^2 = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$;
4. $2(y')^2 = (y-1)y'',\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$.

Відповіді до завдань розділу

Завдання 1:

1) $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$; **2)** $y = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2$;
3) $y = -x\sin x - 3\cos x + C_1x^2 + C_2x + C_3$; **4)** $y = \frac{x}{C_1}e^{C_1x+1} - \frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1} + C_2$; **5)** $y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{C_1x^2}{2} - C_1x + C_2$; **6)** $y = C_1\ln(2+e^x) + C_2$;
7) $y = \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2$; **8)** $y = C_2e^{C_1x} - 3$; **9)** $y = 1 - \frac{1}{C_1x+C_2}$;
10) $\frac{y^3}{3} + C_1y = C_2 - x$; 1.11. $y = C_2e^{C_1x} + \frac{1}{C_1} - 1$.

Завдання 2:

1) $y = x^3 + 3x + 1$; **2)** $y = \sin x - x\cos x - 1$; **3)** $y = e^{2x}$;
4) $y = 1 - \frac{1}{x+1}$.

РОЗДІЛ 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ $\boldsymbol{n}$-го ПОРЯДКУ

4.1. Загальні поняття і факти. Задача Коші

Лінійне диференціальне рівняння (ЛДР) $\boldsymbol{n}$-го порядку має вигляд

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x). \qquad (4.1)$$

Якщо позначити

$$l[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y, \qquad (4.2)$$

то ЛДР набуде вигляду

$$l[y] = f(x). \qquad (4.3)$$

Вираз $l[y]$ є **лінійним диференціальним виразом (ЛДР)**.

Ця назва обумовлена тим, що якщо α_1, α_2 - сталі, то

$$l[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 l[y_1] + \alpha_2 l[y_2]. \qquad (4.4)$$

Якщо в ЛДР (4.3) права частина $f(x) = 0$, то ЛДР (4.3) називають **лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР**). Якщо права частина $f(x) \neq 0$, то ЛДР (4.3) називають **лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР**).

Далі сформулюємо **найпростіші властивості ЛДР**.

1. ЛОДР $l[y] = 0$ завжди має нульовий розв'язок $y(x) = 0$.

2. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$ є розв'язком ЛОДР $l[y] = 0$ (тобто $l[y_1] = 0$, $l[y_2] = 0$).

Тоді їхня довільна лінійна комбінація $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ також є його розв'язком.

Дійсно, ураховуючи вираз (4.4), маємо

$$l[y] = l[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 l[y_1] + \alpha_2 l[y_2] = 0.$$

3. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$ є розв'язком ЛНДР $l[y] = f(x)$ (тобто $l[y_1] = f(x)$, $l[y_2] = f(x)$).

Тоді їхня різниця $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ є розв'язком відповідного однорідного ЛДР.

Дійсно, ураховуючи вираз (4.4), маємо

$$l[y] = l[y_1 - y_2] = l[y_1] - l[y_2] = f(x) - f(x) = 0.$$

Наслідок 4.1. Будь-який розв'язок ЛНДР (4.1), (4.3) дорівнює сумі фіксованого розв'язку цього ЛНДР і якогось розв'язку відповідного ЛОДР.

Дійсно, нехай $y(x)$ – довільний розв'язок ЛНДР (4.3), $y_1(x)$ – фіксований розв'язок ЛНДР (4.3). Тоді

$$y(x) = y_1(x) + \big(y(x) - y_1(x)\big) = y_1(x) + y_0(x),$$

де $y_0(x) = y(x) - y_1(x)$ – розв'язок відповідного ЛОДР, за властивістю 3.

4. **Принцип суперпозиції**. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$ є розв'язками неоднорідних ЛДР (4.3) з правими частинами $f_1(x)$, $f_2(x)$ відповідно (тобто $l[y_1] = f_1(x)$, $l[y_2] = f_2(x)$). Тоді їхня довільна лінійна комбінація $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ є розв'язком ЛНДР (4.3) з правою частиною

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$$

Дійсно, ураховуючи вираз (4.4), маємо

$$l[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 l[y_1] + \alpha_2 l[y_2] = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$$

5. Нехай відомий ненульовий розв'язок $y_0(x)$ ЛОДР $l[y] = 0$. Тоді **заміна** $y = y_0 \cdot z$ зводить це ДР до ЛОДР на одиницю меншого порядку.

Доведемо цей факт, наприклад, для ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.5}$$

Нехай $y_0(x)$ – ненульовий розв'язок ЛОДР (4.5). Зробимо в ЛОДР (4.5) заміну $y = y_0 \cdot z$. Маємо

$$(y_0''z + 2y_0'z' + y_0 z'') + p(y_0'z + y_0 z') + qy_0 z = 0.$$

Отже,

$$y_0 z'' + (2y_0' + py_0)z' + (y_0'' + py_0' + qy_0)z = 0,$$

де останній доданок дорівнює $l[y_0]\ z = 0$.

У ДР, що залишається після відпадіння останнього доданка, зробимо заміну $z' = u,\quad z'' = u'$ і одержимо ЛОДР першого порядку

$$y_0 u' + (2y_0' + py_0)u = 0. \tag{4.6}$$

Проведемо остаточне інтегрування:

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_0' + py_0}{y_0}dx \Rightarrow$$

$$\ln|u| = -2\ln|y_0| - \int p(x)\,dx + \ln C_2 \Rightarrow$$

$$u = \frac{C_2}{{y_0}^2} e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow z = C_2\int \frac{1}{{y_0}^2}\left(e^{-\int p(x)dx}\right)dx + C_1.$$

Тому загальний розв'язок ДР (4.5) дорівнює

$$y = y_0 z = C_1 y_0 + C_2 y_0 \int \frac{1}{{y_0}^2}\,(e^{-\int p(x)dx})\,dx. \qquad (4.7)$$

Формулу (4.7), яка дає змогу знайти загальний розв'язок ДР (4.5), якщо відомий один із його розв'язків, називають формулою **Абеля**.

Функція біля C_2 у виразі (4.7) є частинним розв'язком ДР (4.5) (поясніть чому). Тому загальний розв'язок ЛОДР (4.5) дорівнює лінійній комбінації з довільними сталими двох частинних розв'язків ЛОДР (4.5) другого порядку. Як ми побачимо нижче, аналогічний факт має місце і для ЛОДР n-го порядку.

6. Нехай ЛОДР із дійсними коефіцієнтами має комплексний розв'язок $y(x) = u(x) + i\,v(x)$. Тоді його дійсна частина $u(x) = Re\,y(x)$ та уявна частина $v(x) = \mathrm{Im}\,y(x)$ також є розв'язками цього рівняння.

Дійсно, ураховуючи вираз (4.4), маємо

$$0 = l[y(x)] = l[u(x) + i\ v(x)] = l[u(x)] + i\ l[v(x)] \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} l[u(x)] = 0, \\ l[v(x)] = 0. \end{cases}$$

7. Нехай ЛОДР із дійсними коефіцієнтами має комплексний розв'язок $y(x)$. Тоді це рівняння має комплексно спряжений розв'язок $\overline{y}(x)$.

Дійсно,

$$l[y(x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \overline{l[y(x)]} = l[\bar{y}(x)].$$

Теорема 4.1 про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для ЛДР *n*-го порядку. Нехай коефіцієнти $p_{n-1}(x),\ \ldots\ ,\ p_0(x)$ і права частина $f(x)$ ЛДР n-го порядку (4.1) є неперервними на відрізку $[a,\ b]$ і точка $x_0 \in [a,\ b]$.

Тоді задача Коші

$$l[y] = f(x), y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (4.8)$$

має єдиний розв'язок на всьому відрізку $[a,\ b]$.

Зазначимо, що (на відміну від теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші для нелінійних ДР (розд. 2, 3)) теорема 4.1 має **глобальний** характер (розв'язок існує на **всьому** відрізку $[a,\ b]$, а не лише в деякому околі точки x_0).

4.2. Лінійна залежність і незалежність функцій. Визначник Вронського

Щоб мати в подальшому можливість описати структуру загального розв'язку ЛДР, потрібно ввести поняття лінійної залежності і незалежності функцій, аналогічні відповідним поняттям для векторів.

Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ є **лінійно залежними** на інтервалі I, якщо існує набір сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, що не дорівнюють нулю одночасно, і

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0, x \in I. \quad (4.9)$$

В іншому випадку функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ є **лінійно незалежними** на інтервалі I.

Приклад 4.1. Функції $y_1(x) = \sin^2 x$, $y_2(x) = \cos^2 x$, $y_3(x) = \cos 2x$ є лінійно залежними на довільному інтервалі.

Дійсно,

$$1 \cdot y_1(x) + (-1) \cdot y_2(x) + 1 \cdot y_3(x) = 0.$$

Приклад 4.2. Функції $1, x, x^2, \ldots, x^k$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі I.

Дійсно, припустимо, що ці функції є лінійно залежними на інтервалі I. Отже, існують сталі $C_0, C_1, \ldots, C_k$, які одночасно не дорівнюють нулю, і

$$C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \ldots + C_k \cdot x^k = 0, \ x \in I. \quad (4.10)$$

Ліворуч у формулі (4.10) стоїть ненульовий многочлен, степінь якого менший або дорівнює k і, отже, він має не більш ніж k коренів. З іншого боку, формула (4.10) показує, що всі точки інтервалу I (яких нескінченно багато) є його коренями. Одержане протиріччя показує, що функції $1, x, x^2, \ldots, x^k$ є лінійно незалежними.

Далі наведено системи лінійно незалежних функцій, за допомогою яких конструюють загальні розв'язки ЛОДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами та ДР Ейлера.

Приклад 4.3. Нехай дійсні або комплексні числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_k$ є попарно відмінними. Тоді функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},\ \dots,\ e^{\lambda_k x}$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі.

Доведемо це, наприклад, для випадку, коли $k = 3$. Припустимо, що функції $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ e^{\lambda_3 x}$ є лінійно залежними і, отже, існують три сталі $C_1,\ C_2,\ C_3,$ що не дорівнюють нулю одночасно, і

$$C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + C_3 \cdot e^{\lambda_3 x} = 0. \tag{4.11}$$

Припустимо для визначеності, що $C_3 \neq 0$ і, поділивши рівність (4.11) на $e^{\lambda_3 x}$, одержимо

$$C_1 \cdot e^{\mu_1 x} + C_2 \cdot e^{\mu_2 x} + C_3 = 0, \tag{4.12}$$

де $\mu_1 = \lambda_1 - \lambda_3 \neq 0,\ \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \neq 0.$ Продиференціюємо рівність (4.12) і одержимо

$$C_1\mu_1 \cdot e^{\mu_1 x} + C_2\mu_2 \cdot e^{\mu_2 x} = 0. \tag{4.13}$$

Якби $C_1 = C_2 = 0$, тоді б і $C_3 = 0$. Тому $C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0.$

Отже, з виразу (4.13) випливає, що функція

$$e^{(\mu_1 - \mu_2) x} = -\frac{C_2\mu_2}{C_1\mu_1}$$

є сталою. Одержане протиріччя показує, що функції $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ e^{\lambda_3 x}$ є лінійно незалежними.

Приклад 4.4. Нехай дійсні або комплексні числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\ \lambda_k$ є попарно відмінними. Тоді функції $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2},\ \dots\ ,\ x^{\lambda_k}$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі $I \subset\ (0,\ +\infty)$.

Це твердження випливає з попереднього прикладу, оскільки

$$x^{\lambda_j} = e^{\ln x^{\lambda_j}} = e^{\lambda_j \ln x} = |\ln x = t| = e^{\lambda_j t}.$$

Твердження 4.1. Нехай функції $w_j = u_j + iv_j$, $\overline{w}_j = u_j - iv_j$ $(j = 1,2, \dots , k)$ є лінійно незалежними, де $u_j = u_j(x)$, $v_j = v_j(x)$ є дійсними функціями. Тоді функції u_j, v_j є лінійно незалежними.

Довести твердження 4.1 самостійно.

З цього твердження і прикладів 4.3, 4.4 випливають інше твердження.

Твердження 4.2. Нехай комплексні числа $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ $(j = 1,2, \dots , k)$ є попарно відмінними, де α_j, β_j – дійсні числа. Тоді

1) функції $e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x$, $e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі;

2) функції $x^{\alpha_j} \cos \ln x^{\beta_j}$, $x^{\alpha_j} \sin \ln x^{\beta_j}$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі $I \subset\ (0,\ +\infty)$.

Нарешті можна довести, що справедливе загальне твердження.

Твердження 4.3. Нехай виконані умови попереднього твердження. Тоді

1) функції $e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x \cdot P_j(x)$, $e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x \cdot Q_j(x)$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі, де $P_j(x)$, $Q_j(x)$ – довільні ненульові многочлени;

2) функції $x^{\alpha_j} \cos \ln x^{\beta_j} \cdot P_j(\ln x)$, $x^{\alpha_j} \sin \ln x^{\beta_j} \cdot Q_j(\ln x)$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі $I \subset\ (0,\ +\infty)$.

Важливим інструментом для перевірки лінійної незалежності функцій є визначник Вронського.

Визначником Вронського (або **вронскіаном**) функцій $y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$, які неперервні разом зі своїми похідними до $(n-1)$-го порядку включно, є визначник

$$W[y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)]\ =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1{}^{(n-1)}(x) & y_2{}^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n{}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (4.14)$$

Теорема 4.2. Аби функції $y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ були лінійно незалежними на інтервалі I, достатньо, щоб їхній вронскіан $W[y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)]$ був відмінний від нуля хоча б в одній точці цього інтервалу.

Доведення. Нехай

$$W[y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)]\ \neq\ 0, \text{ за } x\ =\ x_0\ \in I,$$

однак функції $y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ є лінійно залежними на інтервалі I, і, отже, існують сталі $C_1,\ C_2,\ \dots\ ,\ C_n$ не рівні нулю одночасно, і

$$C_1 y_1(x)\ + C_2 y_2(x) +\ \dots\ + C_n y_n(x)\ =\ 0,\ x \in I. \qquad (4.15)$$

Продиференціюємо $n-1$ разів рівність (4.15) та одержімо однорідну лінійну систему з n рівнянь

$$\begin{cases} C_1y_1(x) \ + \ C_2y_2(x) \ + \ \dots \ + \ C_ny_n(x) \ = \ 0, \\ C_1y_1'(x) \ + \ C_2y_2'(x) \ + \ \dots \ + \ C_ny_n'(x) \ = \ 0, \\ \dots \\ C_1{y_1}^{(n-1)}(x) + C_2{y_2}^{(n-1)}(x) + \ \dots \ + C_n{y_n}^{(n-1)}(x) = \ 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

яку задовольняють сталі $C_1, C_2, \ \dots \ , \ C_n$ за будь-якого $x \in I$.

Оскільки сталі не дорівнюють нулю одночасно, то система має ненульовий розв'язок за будь-якого $x \in I$, і тому її визначник

$$W[y_1(x) \ , y_2(x), \ \dots \ , \ y_n(x)] \ = \ 0$$

за будь-якого $x \in I$, зокрема за $x = \ x_0$, що протирічить припущенню. Теорема доведена.

Теорема 4.3. Якщо функції $y_1(x) \ , y_2(x), \ \dots \ , \ y_n(x)$ є лінійно залежними на інтервале I, то їхній вронскіан

$$W[y_1(x) \ , y_2(x), \ \dots \ , \ y_n(x)] \ = \ 0, \ \ x \in I.$$

Довести самостійно.

Зворотне твердження в загальному випадку неправильне. А саме з того, що вронскіан

$$W[y_1(x) \ , y_2(x), \ \dots \ , \ y_n(x)] \ = \ 0, \qquad x \in I,$$

не випливає, що функції $y_1(x) \ , y_2(x), \ \dots \ , \ y_n(x)$ є лінійно залежними на інтервалі I.

Приклад 4.5. Функції

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x \le 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}, \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0\,, & -1 < x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

є лінійно незалежними на інтервалі $I = (-1,\ 1)$ (*поясніть чому*), але їхній вронскіан $W[y_1(x)\ , y_2(x)] = 0, x \in I$.

Однак у випадку, коли $y_1(x), y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ не є довільними функціями, а є розв'язками ЛОДР n-го порядку, твердження, зворотне твердженню теореми 4.3, має місце.

Теорема 4.4. Нехай функції $y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ є розв'язками ЛОДР n-го порядку і нехай їхній вронскіан $W[y_1(x), y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)] = 0$ у якійсь точці x_0 на інтервалі I. Тоді вони є лінійно залежними на цьому інтервалі.

Доведення. Нехай $W[y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)] = 0$ за $x = x_0$. Розглянемо однорідну систему n лінійних рівнянь відносно невідомих $C_1, C_2,\ \dots\ ,\ C_n$:

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 + \dots + y_n(x_0)C_n = 0, \\ y_1'(x_0)C_1 + y_2'(x_0)C_2 + \dots + y_n'(x_0)C_n = 0, \\ \dots \\ {y_1}^{(n-1)}(x_0)C_1 + {y_2}^{(n-1)}(x_0)C_2 + \cdots + {y_n}^{(n-1)}(x_0)C_n = 0. \end{cases} \qquad (4.17)$$

Оскільки визначник системи дорівнює $W[y_1(x_0)\ , y_2(x_0),\ \dots\ ,\ y_n(x_0)] = 0$, то система має ненульовий розв'язок $C_1, C_2,\ \dots\ ,\ C_n$.

Завдяки виразу (4.4) функція

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \qquad (4.18)$$

є розв'язком ЛОДР $l[y] = 0$, який через вираз (4.17) задовольняє нульові початкові умови в точці x_0

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Але ті самі початкові умови задовольняє нульовий розв'язок. Тому через теорему 4.1 розв'язок $y(x)$ (4.18) є нульовим $y(x) = 0$, $x \in I$, і, отже, функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ є лінійно залежними на інтервалі I. Теорема доведена.

Теореми 4.2 — 4.4 показують, що якщо вронскіан $W[y_1(x) , y_2(x), \dots , y_n(x)]$ n розв'язків ЛОДР n-го порядку дорівнює (не дорівнює) нулю в одній точці інтервалу I, то він дорівнює (не дорівнює) нулю на всьому інтервалі I. Це також випливає з наступної важливої теореми, яка показує, як еволюціонує вронскіан розв'язків ЛОДР зі зміною незалежної змінної x.

Теорема 4.5. Формула Ліувілля – Остроградського.

Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ є розв'язками лінійного однорідного ДР n-го порядку

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

на інтервалі I.

Тоді їхній вронскіан дорівнює

$$W[y_1(x) , y_2(x), \dots , y_n(x)] =$$

$$= W[y_1(x_0), y_2(x_0), \dots , y_n(x_0)] \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt}, \quad x_0, x \in I. \qquad (4.19)$$

Приклад 4.6. Обчислити вронскіан розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ одновимірного ДР Шредінгера

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{4.20}$$

які задовольняють початкові умови

$$y_1(0) = 2, \qquad y_2(0) = -1,$$
$$y_1{}'(0) = -3, \qquad y_2{}'(0) = 5.$$

Оскільки в ДР (4.20) коефіцієнт за y' дорівнює нулю, то, за формулою Ліувіля – Остроградського,

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W[y_1(0), y_2(0)] \cdot e^0 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Зазначимо, що при цьому самі розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ знайти в загальному випадку неможливо.

Доведемо формулу (4.19). Для простоти доведемо її для ЛОДР (4.5) другого порядку. Позначимо $W[y_1(x), y_2(x)] = W(x)$.

Коли $W(x) = 0$, то формула правильна. Нехай $W(x) \neq 0$.

Обчислимо $W^{'(x)}$, ураховуючи, що, за виразом (4.6),

$$y_j{}'' = -p_1(x)y_j{}' - p_0(x)y_j, \qquad j = 1, 2,$$

тому

$$W'(x) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\right)' = \left((y_1 y_2' - y_2 y_1')\right)' =$$

$$= y_1' y_2{}' + y_1 y_2{}'' - y_2{}' y_1' - y_2 y_1{}'' =$$

$$= y_1(-p_1 y_2{}' - p_0 y_2) - y_2(-p_1 y_1' - p_0 y_1) =$$

$$= -p_1(y_1 y_2{}' - y_2 y_1') = -p_1(x)W(x).$$

Одержали ДР з відокремленими змінними

$$W'(x) = -p_1(x)W(x) \Rightarrow \frac{dW(x)}{W(x)} = -p_1(x) \quad \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dW(x)}{W(x)} = -\int_{x_0}^{x} p_1(t)\ dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln|W(x)| \ - \ln|W(x_0)| = -\int_{x_0}^{x} p_1\,(t)\ dt \Rightarrow$$

$$\frac{W(x)}{W(x_0)} = e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\ dt} \quad \Rightarrow \quad W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\ dt}.$$

Формула доведена.

4.3. Структура загального розв’язку лінійного диференціального рівняння

Щоб описати структуру загального розв’язку ЛДР, потрібне поняття фундаментальної системи розв’язків ЛОДР.

Фундаментальною системою розв’язків ЛОДР n-го порядку є будь-який набір з n його лінійно незалежних розв’язків.

Твердження 4.4. Фундаментальна система розв’язків існує.

Покажемо це, наприклад, для ЛОДР другого порядку. Розглянемо два розв’язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ цього рівняння, які задовольняють такі початкові умови:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, \qquad y_2(x_0) = 0, \\ y_1'(x_0) &= 0, \qquad y_2'(x_0) = 1. \end{aligned}$$

Розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, оскільки їхній вронскіан за $x = x_0$ дорівнює

$$W[y_1(x_0)\,, y_2(x_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

тому розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ є лінійно незалежними, за теоремою 4.2.

Теорема 4.6 про структуру загального розв'язку ЛОДР.

Загальний розв'язок $y_{зо}(x)$ ЛОДР n-го порядку дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (4.21)$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ є довільною фундаментальною системою розв'язків цього рівняння, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - довільними сталими.

Доведення для простоти проведемо для ЛОДР другого порядку. Нехай $y_1(x)$ $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Тоді їхня лінійна комбінація

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (4.22)$$

є розв'язком ЛОДР, за властивістю 2.

Щоб довести, що $y(x)$ (4.22) є загальним розв'язком, потрібно довести, що будь-який частинний розв'язок $y_{чо}(x)$, який задовольняє початкові умови $y_{чо}(x_0) = y_0, y_{чо}'(x_0) = y_1$, можна одержати з $y(x)$ (4.22) за конкретного вибору сталих C_1, C_2. Щоб це відбулося, потрібно, за теоремою 4.1, щоб у точці x_0 співпадали початкові умови для розв'язків $y(x)$ та $y_{чо}(x)$. Тобто

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 = y_{чо}(x_0),$$

$$y'(x_0) = C_1 y_1{}'(x_0) + C_2 y_2{}'(x_0) = y_1 = y_{чо}{}'(x_0).$$

Отже, сталі C_1, C_2 мають задовольняти лінійну систему

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 = y_0, \\ y_1{}'(x_0)C_1 + y_2{}'(x_0)C_2 = y_1, \end{cases}$$

визначник якої дорівнює $W[y_1(x_0), y_2(x_0)] \neq 0$, оскільки $y_1(x)$, $y_2(x)$ лінійно незалежні. Тобто потрібні сталі C_1, C_2 існують. Теорема доведена.

Теорема показує, що **можна знайти будь-який розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{n}$-го порядку, якщо відомі $\boldsymbol{n}$ його лінійно незалежних розв'язків**. Для нелінійних ДР, на відміну від лінійних, це не так.

Наприклад у загальному випадку, якщо відомі, наприклад, 100 частинних розв'язків нелінійного ДР першого порядку, неможливо знайти його 101-й розв'язок.

Теорема 4.7 про структуру загального розв'язку ЛНДР.

Загальний розв'язок $y_{зн}(x)$ ЛНДР дорівнює сумі загального розв'язку $y_{зо}(x)$ відповідного ЛОДР і частинного розв'язку $y_{чн}(x)$ цього ЛНДР

$$y_{зн}(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x). \tag{4.23}$$

Доведення. Функція

$$y(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x) \tag{4.24}$$

є розв'язком ЛНДР. Дійсно, ураховуючи вираз (4.4), маємо

$$l[y(x)] = l[y_{зо}(x)] + l[y_{чн}(x)] = 0 + f(x) = \ f(x).$$

З іншого боку, за наслідком 4.1, будь-який розв'язок ЛНДР дорівнює сумі фіксованого розв'язку $y_{чн}(x)$ ЛНДР і якогось розв'язку відповідного ЛОДР. Але будь-який розв'язок ЛОДР одержують із загального розв'язку $y_{зо}(x)$ (4.21) за конкретного вибору сталих $C_1,\ C_2,\ \dots\ ,\ C_n$.

Тому сума (4.23) є загальним розв'язком ЛНДР. Теорема доведена.

Якщо відома фундаментальна система розв'язків $y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ ЛОДР $l[y(x)]\ =\ 0$, то загальний розв'язок $y_{зн}(x)$ ЛНДР $l[y(x)]\ =\ f(x)$ можна також знайти **методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)**, оминаючи формулу (4.23). Цей метод полягає в тому, що $y_{зн}(x)$ шукаємо в такому самому вигляді, як вираз (4.21), з заміною сталих C_j на функції $C_j(x)$:

$$y_{зн}(x)\ = C_1(x)y_1(x)\ +\ C_2(x)y_2(x)\ +\ \dots\ +\ C_n(x)y_n(x). \tag{4.25}$$

Тут функції $C_j(x)$ знаходять із лінійної системи

$$\begin{cases} C_1'\ (x)y_1(x) +\ C_2'(x)y_2(x)\ +\ \dots\ +\ C_n'(x)y_n(x)\ =\ 0, \\ C_1'(x)y_1'(x)\ +\ C_2'y_2'(x)\ +\ \dots\ +\ C_n'(x)y_n'(x)\ =\ 0, \\ \cdots, \\ C_1'(x){y_1}^{(n-1)}(x) + C_2'(x){y_2}^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'\ (x){y_n}^{(n-1)}(x) = f(x), \end{cases} \tag{4.26}$$

визначник якої дорівнює вронскіану $W[y_1(x)\ , y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)]\ \neq\ 0$, і тому вона має єдиний розв'язок.

Обґрунтуємо метод варіації довільної сталої, наприклад, для ЛНДР другого порядку. Перевіримо, що функція

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{4.27}$$

є розв’язком ЛНДР (4.3) за $n = 2$.

Диференціюємо вираз (4.27) і одержуємо

$$y'(x) = \left(C_1(x){y_1}'(x) + C_2(x){y_2}'(x)\right) + \left({C_1}'(x)y_1(x) + {C_2}'(x)y_2(x)\right) =$$

$$= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x), \tag{4.28}$$

унаслідок першого рівняння системи (4.26) за $n = 2$.

Диференціюємо (4.28) і одержуємо

$$y''(x) = \left(C_1(x){y_1}''(x) + C_2(x){y_2}''(x)\right) + \left({C_1}'(x){y_1}'(x) + {C_2}'(x){y_2}'(x)\right) =$$

$$= C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + f(x) \tag{4.29}$$

унаслідок останнього рівняння системи (4.26) за $n = 2$.

Підставимо вирази (4.28), (4.29) в ЛНДР (4.3) за $n = 2$:

$$l[y(x)] = \left(C_1(x){y_1}''(x) + C_2(x){y_2}''(x)\right) + f(x) +$$

$$+ p_1\left(C_1(x){y_1}'(x) + C_2(x){y_2}'(x)\right) + p_0\left(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\right) =$$

$$= C_1(x)l[y_1(x)] + C_2(x)l[y_2(x)] + f(x) = f(x). \tag{4.30}$$

Тобто $y(x)$ (4.27) дійсно є розв’язком ЛНДР (4.3) за $n = 2$.

З іншого боку,

$$C_j(x) = \int_{x_0}^{x} C_j'(t)\,dt + C_j.$$

Тому

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) =$$

$$= C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_1(x)\int_{x_0}^{x} C_1'(x)\,dx + y_2(x)\int_{x_0}^{x} C_2'(x)\,dx =$$

$$= y_{зо}(x) + \text{доданок}.$$

Але доданок є частинним розв'язком ЛНДР (*поясніть чому*), тому $y(x) = y_{зн}(x)$, за теоремою 4.7. Теорема доведена.

4.4. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

4.4.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння. Метод Ейлера і його узагальнення

Спочатку розглянемо ЛОДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1y' + p_0y = 0, \qquad (4.31)$$

де $p_{n-1}, \ldots, p_0$ - сталі.

Будемо шукати розв'язки ЛОДР (4.31) у вигляді $y(x) = e^{\lambda x}$. Такий метод знаходження розв'язків ЛОДР (4.31) називають **методом Ейлера.**

Підставимо $y(x) = e^{\lambda x}$ у вираз (4.31) і з урахуванням того, що $\left(e^{\lambda x}\right)^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, одержимо

$$\lambda^n e^{\lambda x} + p_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + p_1\lambda e^{\lambda x} + p_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Скорочуючи на $e^{\lambda x}$, бачимо, що $y(x) = e^{\lambda x}$ є розв'язком ЛОДР (4.31), якщо λ є коренем рівняння

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0 = 0, \qquad (4.32)$$

яке називають **характеристичним рівнянням**.

Можливі такі випадки.

1. Нехай усі корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристичного рівняння є простими, тобто попарно відмінними. Тоді ЛОДР (4.31) має n розв'язків $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, які є лінійно незалежними (приклад 4.3). Тому, за теоремою 4.6, в цьому випадку загальний розв'язок дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}. \qquad (4.33)$$

Якщо корені характеристичного рівняння є простими, але серед них є комплексні, формула (4.33) зберігається (з комплексними сталими). Однак у багатьох випадках бажано мати відповідь у дійсній формі. Тому якщо розв'язок $e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ відповідає комплексному кореню $\lambda = \alpha + i\beta$, то, за властивістю 6, його дійсна $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і уявна частини $e^{\alpha x}\sin\beta x$ також є розв'язками. Тому у фундаментальній системі розв'язків пару комплексних розв'язків $e^{\lambda x}$, $e^{\bar{\lambda} x}$ можна, за першим пунктом твердження 4.2, замінити парою дійсних розв'язків $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($e^{\bar{\lambda} x}$ є розв'язком, за властивістю 7).

2. Нехай серед коренів характеристичного рівняння є корінь λ кратності k. Тоді цьому кореню відповідає група розв'язків

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \dots\ ,\ x^{k-1}e^{\lambda x}, \tag{4.34}$$

яка разом з іншими експонентами і аналогічними групами утворює фундаментальну систему розв'язків, за п. 1 твердження 4.3.

Пояснимо, наприклад, за $k = 2$ механізм появи степеневої функції у фундаментальній системі розв'язків. Нехай спочатку є два близьких корені λ_1 та $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$. Тоді ДР разом із розв'язками $e^{\lambda_1 x}$ та $e^{\lambda_2 x}$ є розв'язок

$$\frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{e^{(\lambda_1 + \Delta\lambda)x} - e^{\lambda_1 x}}{\Delta\lambda} = \frac{e^{(\Delta\lambda)x} - 1}{\Delta\lambda}e^{\lambda_1 x},$$

який прямує до $xe^{\lambda_1 x}$, коли $\Delta\lambda \to 0$ за $\lambda_2 \to \lambda_1$.

Приклад 4.7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

має два відмінні дійсні корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$.

Тому загальний розв'язок дорівнює

$$y_{зо} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Приклад 4.8. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

має пару комплексно спряжених коренів $\alpha \pm i\beta = 3 \pm 2i$.

Тому загальний розв'язок у дійсній формі дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta\, x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta\, x =$$

$$= C_1 e^{3x} \cos 2\, x + C_2 e^{3x} \sin 2\, x.$$

Приклад 4.9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 10y' + 25y = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = (\lambda + 5)^2 = 0$$

має корінь $\lambda = -5$ кратності 2.

Тому загальний розв'язок дорівнює

$$y_{зо} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} =$$

$$= (C_1 + C_2 x) e^{-5x}.$$

Приклад 4.10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(V)} + 3y^{(IV)} + 7y''' + 13y'' + 12y' + 4y = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 7\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4 =$$

$$= (\lambda + 1)^3(\lambda^2 + 4) = 0$$

має корінь $\lambda = -1$ кратності 3 і пару комплексно спряжених коренів $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 2i = \pm 2i.$

Тому загальний розв'язок у дійсний формі дорівнює

$$y_{зо} = \left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + C_3 x^2 e^{\lambda x}\right) +$$

$$+ (C_4 e^{\alpha x} \cos\beta\, x + C_5 e^{\alpha x} \cos\beta\, x) =$$

$$= (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x} + C_4 \cos 2\,x + C_5 \cos 2\,x.$$

Приклад 4.11. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + y = \frac{1}{1 - \cos x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \qquad (4.35)$$

Рівняння (4.35) є ЛНДР. Його загальний розв'язок знайдемо методом варіації довільної сталої. Спочатку знайдемо загальний розв'язок $y_{зо}(x)$ відповідного ЛОДР.

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ має два комплексно спряжених корені $\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm i\beta = 0 \pm i = \pm i$.

Тому загальний розв'язок

$$y_{зо}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Загальний розв'язок ЛНДР шукаємо в такому самому вигляді з заміною сталих C_1, C_2 на функції $C_1(x)$, $C_2(x)$. Ці функції знаходимо з системи

$$\begin{cases} C_1{}'(x) y_1(x) + C_2{}'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1{}'(x) + C_2'(x) y_2{}'(x) = f(x), \end{cases}$$

де $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$, $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$, тобто з системи

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{1 - \cos x}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює $W[\cos x, \sin x] = 1$.

За формулами Крамера,

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{1-\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -\frac{\sin x}{1 - \cos x},$$

$$C_2{}'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{1-\cos x} \end{vmatrix}}{1} = \frac{\cos x}{1 - \cos x}.$$

Тому

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x \ \ dx}{1-\cos x} = -\int \frac{d(1-\cos x)}{1-\cos x} = -\ \ln(1-\cos x) + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos x \ \ dx}{1-\cos x} = \int \frac{(\cos x - 1) + 1}{1-\cos x} dx =$$

$$= \int \left(-1 + \frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \right) dx = -x - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C_2.$$

Отже, загальний розв’язок ЛНДР (4.35)

$$y_{\text{зн}}(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) =$$

$$= (-\ln(1 - \cos x) + C_1)\cos x +$$

$$+ \left(\left(-x - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \right) + C_2 \right) \sin x =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln(1-\cos x) -$$

$$- \left(x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \right) \sin x\,. \tag{4.36}$$

Шукаємо розв’язок задачі Коші. Для цього знаходимо

$$y'_{\text{зн}}(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x \ln(1-\cos x) -$$

$$- \cos x \frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\cos x}{1-\cos x}\sin x - \left(x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \right)\cos x\,. \tag{4.37}$$

За формулами (4.36), (4.37) і початковими умовами,

$$C_1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + C_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) -$$

$$-\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{2} = y_{зн}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

$$-C_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + C_2 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{2} = y'_{зн}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Звідки $C_2 = \frac{\pi}{2}, \quad C_1 = -2.$

Підставляємо C_1, C_2 у вираз (3.36).

Відповідь:

$y(x) = -2\cos x + \frac{\pi}{2} \sin x - \cos x \ln(1 - \cos x) - \left(x + +\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)\sin x.$

4.4.2. Диференціальне рівняння Ейлера

З ЛОДР зі сталими коефіцієнтами пов’язане **диференціальне рівняння Ейлера**

$$x^n y^{(n)}(x) + p_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1 x y' + p_0 y = 0, \qquad (4.38)$$

де $p_{n-1}, \ldots, p_0$ – сталі.

Це одне з небагатьох ЛОДР зі змінними коефіцієнтами, яке можна розв'язати. Заміна

$$|x| = e^t, \quad t = \ln|x| \tag{4.39}$$

перетворює ЛОДР Ейлера на ЛОДР зі сталими коефіцієнтами.

Перевіримо це для ДР другого порядку

$$x^2y'' + p_1xy' + p_0y = 0. \tag{4.40}$$

Для простоти вважаємо, що $x > 0$. Тоді $x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x$,

$$y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\, e^{-t}, \tag{4.41}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}\right) e^{-t}. \tag{4.42}$$

Підставляємо y' (4.41), y'' (4.42) у ДР (4.40) і одержуємо ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + p_1\frac{dy}{dt} + p_0y = 0.$$

Можна не перетворювати ЛОДР Ейлера на ЛОДР зі сталими коефіцієнтами, а безпосередньо шукати його розв'язки за $x > 0$ у вигляді $y(x) = x^\lambda$.

Підставимо $y(x) = x^\lambda$ у ДР Ейлера (4.38) і з урахуванням того, що

$$\left(x^{\lambda}\right)^{(k)} = \lambda(\lambda-1) \ldots (\lambda-k+1)x^{\lambda-k},$$

одержимо

$$x^n\lambda(\lambda-1) \ldots (\lambda-n+1)x^{\lambda-n} +$$

$$+ p_{n-1}x^{n-1}\lambda(\lambda-1) \ldots (\lambda-n+2)x^{\lambda-n+1} + \ldots + p_0x^{\lambda} = 0.$$

Скорочуючи на x^{λ}, бачимо, що $y(x) = x^{\lambda}$ є розв'язком ЛОДР Ейлера за $x > 0$, якщо λ є коренем рівняння

$$\lambda(\lambda-1) \ldots (\lambda-n+1) + p_{n-1}\lambda(\lambda-1) \ldots (\lambda-n+2) + \cdots + p_0 = 0, \quad (4.43)$$

яке називають **визначальним**.

Зауважимо, що визначальне рівняння співпадає з характеристичним рівнянням ЛОДР, на яке перетворюють ДР Ейлера заміною (4.39).

Аналогічно ЛОДР зі сталими коефіцієнтами для ДР Ейлера можливі такі випадки.

1. Нехай усі корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (дійсні або комплексні) визначального рівняння є простими, тобто попарно відмінними. Тоді ДР Ейлера (4.35) має n розв'язків $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots, x^{\lambda_n}$, які є лінійно незалежними, за прикладом 4.4. Тому, за теоремою 4.6, у цьому випадку загальний розв'язок ДР Ейлера (4.38) дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} + \ldots + C_nx^{\lambda_n}. \quad (4.44)$$

Якщо всі корені визначального рівняння є простими, але серед них є комплексні, то формула (4.44) зберігається (з комплексними сталими). Однак у багатьох випадках відповідь потрібно мати в дійсній формі. Тому

якщо розв'язок x^{λ} відповідає комплексному кореню $\lambda = \alpha + i\beta$, то $x^{\lambda} = e^{\ln x^{\lambda}} = e^{\lambda \ln x} = e^{(\alpha + i\beta)\ln x} = e^{\alpha \ln x} e^{i\beta \ln x} = e^{\ln x^{\alpha}} e^{i \ln x^{\beta}} =$
$= x^{\alpha}\left(\cos \ln x^{\beta} + i \sin \ln x^{\beta}\right)$, і, за властивістю 6, його дійсна $x^{\alpha} \cos \ln x^{\beta}$ і уявна частини $x^{\alpha} \sin \ln x^{\beta}$ також є розв'язками. Тому у фундаментальній системі розв'язків пару комплексних розв'язків x^{λ}, $x^{\overline{\lambda}}$ можна, за другим пунктом твердження 4.2, замінити парою дійсних розв'язків $x^{\alpha} \cos \ln x^{\beta}$, $x^{\alpha} \sin \ln x^{\beta}$.

2. Нехай серед коренів визначального рівняння є корінь λ кратності k. Тоді цьому кореню відповідає група розв'язків

$$x^{\lambda},\ (\ln x)x^{\lambda},\ (\ln x)^2 x^{\lambda},\ \ldots\ ,\ (\ln x)^{k-1} x^{\lambda}, \tag{4.45}$$

яка разом з іншими степенями та аналогічними групами утворює фундаментальну систему розв'язків, за другим пунктом твердження 4.3.

Зазначимо, що оскільки $t^l e^{\lambda t} = \ln^l |x| \cdot |x|^{\lambda}$, а t та x пов'язані виразом (4.39), то для того, щоб знайти загальний розв'язок ДР Ейлера за $x < 0$, потрібно в його загальному розв'язку за $x > 0$ замінити x на $|x|$.

Приклад 4.12. Розв'язати задачу Коші

$$x^2 y'' - 5xy' + 5y = 0, \qquad y(1) = 3,\ y'(1) = -2.$$

Шукаємо загальний розв'язок ДР, яке є рівнянням Ейлера.

Визначальне рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) - 5\lambda + 5 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Тому загальний розв'язок

$$y_{зо}(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} = C_1 x + C_2 x^5. \tag{4.46}$$

Шукаємо розв'язок задачі Коші. Для цього знаходимо

$$y'_{зо}(x) = C_1 + 5C_2 x^4. \tag{4.47}$$

За виразами (4.46), (4.47) і початковими умовами,

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1^5 = y_{зо}(1) = 3,$$

$$C_1 + 5C_2 \cdot 1^4 = y'_{зо}(1) = -2.$$

Для знаходження сталих C_1, C_2 одержали систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + 5C_2 = -2. \end{cases}$$

Віднімаємо з другого рівняння перше і маємо

$$4C_2 = -5 \Rightarrow C_2 = -\frac{5}{4} \Rightarrow C_1 = 3 - C_2 = 3 + \frac{5}{4} = \frac{17}{4}.$$

Підставляємо C_1, C_2 у вираз (4.46) і одержуємо

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^5 = \frac{17}{4}x - \frac{5}{4}x^5.$$

Відповідь: $y(x) = \frac{17}{4}x - \frac{5}{4}x^5$.

Приклад 4.13. Розв'язати задачу Коші

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = -4, \quad y'(1) = 5.$$

Шукаємо загальний розв'язок ДР, яке є рівнянням Ейлера.

Визначальне рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 4 = 0, \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

має двократний корінь $\lambda = 2$. Тому загальний розв'язок за $x > 0$ дорівнює

$$y_{зо}(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^{\lambda} = (C_1 + C_2 \ln x)x^2. \qquad (4.48)$$

Шукаємо розв'язок задачі Коші. Для цього знаходимо

$$y'_{зо}(x) = \left(C_2 \cdot \frac{1}{x}\right)x^2 + (C_1 + C_2 \ln x)2x =$$

$$= 2C_1x + C_2x(1 + 2\ln x). \qquad (4.49)$$

За виразами (4.48), (4.49) і початковими умовами,

$$(C_1 + C_2 \ln 1)1^2 = y_{зо}(1) = -4,$$

$$2C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1(1 + 2\ln 1) = y'_{зо}(1) = 5.$$

Для знаходження сталих C_1, C_2 одержали систему

$$\begin{cases} C_1 = -4, \\ 2C_1 + C_2 = 5. \end{cases}$$

Звідси маємо

$$C_1 = -4 \Rightarrow C_2 = 5 - 2C_1 = 13.$$

Підставляємо C_1, C_2 у вираз (4.48).

Відповідь: $y(x) = (-4 + 13\ln x)x^2$.

Приклад 4.14. Розв’язати задачу Коші

$$x^2y'' + 7xy' + 25y = 0, \quad y(1) = -6, \quad y'(1) = 2.$$

Шукаємо загальний розв’язок ДР, яке є ДР Ейлера.

Визначальне рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) + 7\lambda + 25 = 0, \qquad \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$$

має пару комплексно спряжених коренів $\lambda = -3 + 4i$, $\bar{\lambda} = -3 - 4i$.

Шукаємо загальний розв’язок у дійсній формі. Оскільки

$$x^{\lambda} = x^{-3+4i} = x^{-3}\,x^{4i} = \left| x^{4i} = e^{\ln x^{4i}} = e^{i\ln x^4} \right| =$$

$$= x^{-3}\,e^{i\ln x^4} = x^{-3}\,(\cos\ln x^4 + i\sin\ln x^4)$$

є розв’язком, то його дійсна $x^{-3}\cos\ln x^4$ та його уявна частини $x^{-3}\sin\ln x^4$ також є розв’язками.

Тому загальний розв’язок у дійсній формі дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1x^{-3}\cos\ln x^4 + C_2x^{-3}\sin\ln x^4\,. \qquad (4.50)$$

Шукаємо розв’язок задачі Коші. Для цього знаходимо

$$y'_{зо}(x) = -3C_1x^{-4}\cos\ln x^4 - C_1x^{-3}\sin\ln x^4\,\frac{4}{x} -$$

$$- \, 3C_2 x^{-\,4} \sin \ln x^4 + \; C_2 x^{-\,3} \cos \ln x^4 \frac{4}{x} \; =$$

$$= x^{-\,4}[(-3C_1 + C_2) \cos \ln x^4 - (C_1 + 3C_2) \sin \ln x^4]. \qquad (4.51)$$

За виразами (4.50), (4.51) і початковими умовами,

$$C_1 \cdot 1^{-3} \cos\,(\ln 1^4) \; + C_2 \cdot 1^{-3} \sin\,(\ln 1^4) \; = y_{зо}\,(1) = -6,$$

$$1^{-\,4}\big((-3C_1 + C_2)\cos(\ln 1^4) - (C_1 + 3C_2)\sin(\ln 1^4)\big) = y_{зо}'(1) = 2.$$

Для знаходження сталих C_1, C_2 одержали систему

$$\begin{cases} \quad C_1 \; = \; -6, \\ -3C_1 \; + \; C_2 \; = \; 2. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1 = -6 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2 + 3C_1 = -16.$$

Підставляємо C_1, C_2 у вираз (4.50).

Відповідь: $y(x) \;\; = \;\; -6\frac{\cos \ln x^4}{x^{\,3}} \; - \; 16\frac{\sin \ln x^4}{x^{\,3}}$.

Приклад 4.15. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x^3 y''' + xy' - y = \; 0.$$

ДР є рівнянням Ейлера. Визначальне рівняння

$$\lambda(\lambda \; - \; 1)(\lambda \; - \; 2) \; + \; \lambda \; - \; 1 = \; 0,$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

має трикратний корінь $\lambda = 1$. Тому загальний розв'язок

$$y_{зо}(x) = (C_1 + C_2 \ln x + C_3 \ln^2 x)x^{\lambda} = (C_1 + C_2 \ln x + C_3 \ln^2 x)x.$$

Відповідь: $y_{зо}(x) = (C_1 + C_2 \ln x + C_3 \ln^2 x)x$.

Приклад 4.16. Розв'язати задачу Коші

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = \ln x,$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = -1.$$

Рівняння є неоднорідним ДР Ейлера. Його загальний розв'язок знайдемо методом варіації довільної сталої. Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР Ейлера.

Визначальне рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 3 = 0, \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

має корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Тому загальний розв'язок

$$y_{зо}(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} = C_1 x + C_2 x^3.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо в такому самому вигляді з заміною сталих C_1, C_2 на функції $C_1(x)$, $C_2(x)$. Ці функції знаходимо з системи

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1{}'(x) + C_2'(x)y_2{}'(x) = f(x), \end{cases}$$

де $y_1(x) = x, y_2(x) = x^3, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, тобто з системи

$$\begin{cases} C_1{}'(x)x + C_2{}'(x)x^3 = 0, \\ C_1{}'(x) \cdot 1 + C_2{}'(x)3x^2 = \frac{\ln x}{x^2}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює $W[x,\ x^3] = 2x^3$.

За формулами Крамера,

$$C_1{}'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ \frac{\ln x}{x^2} & 3x^2 \end{vmatrix}}{2x^3} = \frac{-x\ln x}{2x^3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln x}{x^2},$$

$$C_2{}'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{\ln x}{x^2} \end{vmatrix}}{2x^3} = \frac{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{2x^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln x}{x^4}.$$

Тому

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int\frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int \ln x\, d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x} - \int\frac{1}{x}d\ln x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) + C_1 =$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int\frac{\ln x}{x^4}dx = -\frac{1}{6}\int \ln x\, d\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x^3} - \int\frac{1}{x^3}d\ln x\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) + C_2.$$

Отже, загальний розв’язок неоднорідного ДР Ейлера

$$y_{зн}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) + C_1\right)x + \left(-\frac{1}{6}\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) + C_2\right)x^3 =$$

$$= C_1 x + C_2 x^3 + \frac{\ln x}{3} + \frac{4}{9} . \qquad (4.52)$$

Шукаємо розв’язок задачі Коші. Для цього знаходимо

$$y'_{зн}(x) = C_1 + 3C_2 x^2 + \frac{1}{3x}. \qquad (4.53)$$

За виразами (4.52), (4.53) і початковими умовами,

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1^3 + \frac{\ln 1}{3} + \frac{4}{9} = y_{зн}(1) = 0,$$

$$C_1 + 3C_2 \cdot 1^2 + \frac{1}{3 \cdot 1} = y'_{зн}(1) = -1.$$

Для знаходження сталих C_1, C_2 одержали систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{4}{9}, \\ C_1 + 3C_2 = -\frac{4}{3}, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{4}{9}$. Підставляємо у вираз (4.52).

Відповідь: $y = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{\ln x}{3} + \frac{4}{9}$.

4.4.3. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною

Розглянемо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = f(x) \qquad (4.54)$$

і правою частиною

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x), \qquad (4.55)$$

де $P_k(x)$, $Q_l(x)$ – многочлени степенів k і l відповідно.

Праву частину $f(x)$ (4.55) будемо називати **спеціальною**.

Як показано в п. 4.4.1, ЛОДР зі сталими коефіцієнтами завжди можна розв'язати, тож за теоремою 4.7 залишається знайти лише якийсь частинний розв'язок неоднорідного ДР (4.54). Для правої частини $f(x)$ загального вигляду це можна зробити методом варіації довільної сталої (приклад 4.4). Однак, якщо права частина $f(x)$ є спеціальною, частинний розв'язок можна знайти простіше - **методом невизначених коефіцієнтів.**

Цей метод розглянемо на прикладі ДР другого порядку

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (4.56)$$

Нехай спочатку права частина ЛНДР (4.56) дорівнює

$$f(x) = Ke^{\alpha x}, \quad K = const, \qquad (4.57)$$

де α **не є коренем** характеристичного рівняння

$$D(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

У цьому випадку шукаємо частинний розв'язок ДР (4.56) у вигляді

$$y_{\text{чн}}(x) = Ae^{\alpha x}. \tag{4.58}$$

Для знаходження сталої A підставляємо $y_{\text{чн}}(x)$ (4.58) у ДР (4.56). Маємо

$$A\alpha^2 e^{\alpha x} + Ap\alpha e^{\alpha x} + Aqe^{\alpha x} = Ke^{\alpha x}.$$

Після скорочення на $e^{\alpha x}$ одержимо

$$A(\alpha^2 + p\alpha + q) = K,$$

де $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, оскільки α не є коренем характеристичного рівняння. Отже,

$$A = \frac{K}{\alpha^2 + p\alpha + q} = \frac{K}{D(\alpha)}, \tag{4.59}$$

і частинний розв'язок ДР (4.56) знайдено.

Якщо α в правій частині виразу (4.57) ДР (4.56) **є коренем** характеристичного рівняння, то частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$y_{\text{чн}}(x) = Ax^r e^{\alpha x}, \tag{4.60}$$

де r дорівнює кількості коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α.

Механізм появи степеневої функції в частинному розв'язку (4.60) у разі співпадіння α з коренем характеристичного рівняння є аналогічним механізму появи степеневої функції у фундаментальній системі розв'язків ЛОДР зі сталими коефіцієнтами в разі, коли у характеристичного рівняння є кратний корінь.

Дійсно, нехай показник α у правій частині виразу (4.57) є простим коренем характеристичного рівняння, тобто $D(\alpha) = 0$, $D'(\alpha) \neq 0$. Замінимо в правій частині (4.57) показник α на близький показник $\alpha + \Delta$. Оскільки $\alpha + \Delta$ вже не є коренем характеристичного рівняння, то ДР (4.56) із правою частиною $f(x) = Ae^{(\alpha + \Delta)x}$ має, за формулою (4.59), частинний розв'язок

$$y_{\text{чн}}(x) = \frac{K}{D(\alpha + \Delta)} e^{(\alpha + \Delta)x} = \frac{K}{D(\alpha + \Delta)} e^{\alpha x} e^{\Delta x} =$$

$$= \frac{K}{D(\alpha + \Delta)} e^{\alpha x} \left(1 + \Delta x + \frac{\Delta^2 x^2}{2!} + \dots\right) =$$

$$= \frac{K}{D(\alpha + \Delta)} e^{\alpha x} + \frac{K\Delta}{D(\alpha + \Delta)} e^{\alpha x} \left(x + \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots\right). \qquad (4.61)$$

Перший доданок у виразі (4.61) є розв'язком відповідного однорідного рівняння, тому другий доданок є частинним розв'язком ДР (4.56) із правою частиною $f(x) = Ke^{(\alpha + \Delta)x}$.

Перейдемо в цьому доданку до границі, коли $\alpha \to 0$. Оскільки, за правилом Лопіталя,

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta}{D(\alpha + \Delta)} = \frac{1}{D'(\alpha)},$$

то після граничного переходу одержимо частинний розв'язок

$$y_{\text{чн}}(x) = \frac{K\ x\ e^{\alpha x}}{D'(\alpha)} \tag{4.62}$$

рівняння (4.56), (4.57), у якому α є простим коренем характеристичного рівняння.

Аналогічно, якщо α **є двократним коренем** характеристичного рівняння, то частинний розв'язок рівнянь (4.56), (4.57) дорівнює

$$y_{\text{чн}}(x) = \frac{K\ x^2\ e^{\alpha x}}{D''(\alpha)}. \tag{4.63}$$

Приклад 4.17. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 6y' + 8y = 3e^{5x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{4.64}$$

Рівняння (4.64) є ЛНДР зі сталими коефіцієнтами. Його права частина є спеціальною типу (4.57). Загальний розв'язок шукаємо за формулою

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок $y_{\text{зо}}(x)$ відповідного однорідного ДР. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

має два відмінні дійсні корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$.

Тому загальний розв'язок однорідного ДР дорівнює

$$y_{\text{зо}}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x}. \tag{4.65}$$

Далі шукаємо частинний розв’язок $y_{чн}(x)$ неоднорідного ДР.

Його права частина

$$3e^{5x} = Ke^{\alpha x},$$

де $\alpha = 5$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $y_{чн}(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн}(x) = Ae^{\alpha x} = Ae^{5x}. \tag{4.66}$$

Для знаходження сталої A підставляємо $y_{чн}(x)$ виразу (4.66) у ДР (4.64). Маємо

$$25Ae^{5x} + 30Ae^{5x} + 8Ae^{5x} = 3e^{5x}.$$

Після скорочення на e^{5x} одержимо

$$63A = 3, \quad A = \frac{1}{21}.$$

Отже,

$$y_{чн}(x) = \frac{1}{21}e^{5x},$$

тому

$$y_{зн}(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{21}e^{5x}. \tag{4.67}$$

Для порівняння об’єму обчислень знайдемо $y_{зн}(x)$ методом варіації довільної сталої.

Шукаємо $y_{\text{зн}}(x)$ у вигляді виразу (4.65) із заміною сталих C_1, C_2 на функції $C_1(x)$, $C_2(x)$.

$$y_{\text{зн}}(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-4x}.$$

Ці функції знаходимо з системи

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1{}'(x) + C_2'(x)y_2{}'(x) = f(x), \end{cases}$$

де $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = e^{-4x}$, $f(x) = 3e^{5x}$, тобто з системи

$$\begin{cases} C_1{}'(x)e^{-2x} + C_2{}'(x)e^{-4x} = 0, \\ -2C_1{}'(x)e^{-2x} - 4C_2{}'(x)e^{-4x} = 3e^{5x}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює $W[e^{-2x},\ e^{-4x}] = -2e^{-6x}$.

Тоді, за формулами Крамера,

$$C_1{}'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-4x} \\ 3e^{5x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix}}{-2e^{-6x}} = \frac{-3e^{x}}{-2e^{-6x}} = \frac{3}{2}e^{7x},$$

$$C_2{}'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 3e^{5x} \end{vmatrix}}{-2e^{-6x}} = \frac{3e^{3x}}{-2e^{-6x}} = -\frac{3}{2}e^{9x}.$$

Тому

$$C_1(x) = \frac{3}{2}\int e^{7x}\,dx = \frac{3}{14}e^{7x} + C_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{3}{2}\int e^{9x}\,dx = -\frac{1}{6}e^{9x} + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок

$$y_{\text{зн}}(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-4x} =$$

$$= \left(\frac{3}{14}e^{7x} + C_1\right)e^{-2x} + \left(-\frac{1}{6}e^{9x} + C_2\right)e^{-4x} =$$

$$= C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} + \left(\frac{3}{14} - \frac{1}{6}\right)e^{5x} =$$

$$= C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{21}\,e^{5x},$$

що співпадає з виразом (4.67), який був знайдений значно простішим способом.

Далі шукаємо розв'язок задачі Коші. Для цього знаходимо

$$y'_{\text{зн}}(x) = -2C_1e^{-2x} - 4C_2e^{-4x} + \frac{5}{21}e^{5x}\,. \tag{4.68}$$

За виразами (4.67), (4.68) і початковими умовами,

$$C_1e^0 + C_2e^0 + \frac{1}{21}e^0 = y_{\text{зн}}\,(0) = 1,$$

$$-2C_1e^0 - 4C_2e^0 + \frac{5}{21}e^0 = y'_{\text{зн}}\,(0) = 0.$$

Для знаходження сталих C_1, C_2 одержали систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{20}{21}, \\ -2C_1 - 4C_2 = -\dfrac{5}{21}. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 2 і додамо до другого. Одержуємо

$$-2C_2 = \frac{35}{21} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{35}{42} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{20}{21} - C_2 = \frac{75}{42}.$$

Відповідь: $y = \frac{75}{42}e^{-2x} - \frac{35}{42}e^{-4x} + \frac{1}{21}e^{5x}$.

Приклад 4.18. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}. \tag{4.69}$$

Рівняння є ЛНДР зі сталими коефіцієнтами. Його права частина є спеціальною типу (4.57). Загальний розв'язок шукаємо за формулою

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок $y_{\text{зо}}(x)$ відповідного однорідного ДР. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

має корінь $\lambda = 3$ кратності 2.

Тому загальний розв'язок однорідного ДР дорівнює

$$y_{\text{зо}} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

Далі шукаємо частинний розв'язок $y_{чн}(x)$ неоднорідного ДР. Його права частина дорівнює

$$4e^{3x} = Ke^{\alpha x},$$

де $\alpha = 3$ співпадає з обома коренями характеристичного рівняння.

Тому за формулою (4.60) $y_{чн}(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн}(x) = Ax^r e^{\alpha x} = Ax^2 e^{3x}. \tag{4.70}$$

Для знаходження сталої A підставляємо $y_{чн}(x)$ виразу (4.70) у ДР (4.69).

Враховуючи, що

$$y_{чн}{}'(x) = 2Axe^{3x} + 3Ax^2 e^{3x} = A(2x + 3x^2)e^{3x},$$

$$y_{чн}{}''(x) = A[(2 + 6x)e^{3x} + 3(2x + 3x^2)e^{3x}] =$$

$$= A(2 + 12x + 9x^2)e^{3x},$$

маємо

$$A(2 + 12x + 9x^2)e^{3x} - 6A(2x + 3x^2)e^{3x} + 9Ax^2 e^{3x} = 4e^{3x}.$$

Після скорочення на e^{3x} одержимо $2A = 4 \Rightarrow A = 2$.

Отже,

$$y_{чн}(x) = 2x^2 e^{3x}. \tag{4.71}$$

Перевіримо знайдений вираз за формулою (4.63).

Оскільки $D''(\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 9)'' = 2$, то, за виразом (4.63),

$$y_{\text{чн}}(x) = \frac{K\ x^2\ e^{\alpha x}}{D''(\alpha)} = \frac{4x^2 e^{3x}}{2} = 2x^2 e^{3x},$$

що співпадає з виразом (4.71).

Відповідь: $y_{\text{зн}} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + 2x^2 e^{3x} = (C_1 + C_2 x + 2x^2) e^{3x}$.

Розглянемо тепер ДР (4.56) з правими частинами вигляду

$$f(x) = K e^{\alpha x} \cos \beta x\ , \quad f(x) = K e^{\alpha x} \sin \beta x\ ,$$
$$f(x) = K_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + K_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \tag{4.72}$$

В усіх цих випадках шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{\text{чн}}(x) = x^r e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x), \tag{4.73}$$

де r дорівнює кількості коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + i\beta$[2].

Доведемо, це, наприклад, для $f(x) = K e^{\alpha x} \cos \beta x$ за $r = 1$.

Запишемо $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = K e^{\alpha x} \cos \beta x = K e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} =$$

$$= \frac{K}{2} \left(e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x} \right).$$

---

[2] За $\beta \neq 0$ таким коренем може виявитися лише один.

Тому, за принципом суперпозиції та формулами (4.58), (4.59),

$$y_{\text{чн}}(x) = \frac{K}{2}\left(\frac{e^{(\alpha + i\beta)x}}{D(\alpha + i\beta)} + \frac{e^{(\alpha - i\beta)x}}{D(\alpha - i\beta)}\right) =$$

$$= K \cdot Re\frac{e^{(\alpha + i\beta)x}}{D(\alpha + i\beta)} = Ke^{\alpha x}Re\frac{e^{i\beta x}D(\alpha - i\beta)}{|D(\alpha + i\beta)|^2} =$$

$$= \frac{Ke^{\alpha x}}{|D(\alpha + i\beta)|^2}Re(\cos\beta x + i\sin\beta x)\left((\alpha - i\beta)^2 + p(\alpha - i\beta) + q\right) =$$

$$= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

де

$$A = K\frac{\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q}{|D(\alpha + i\beta)|^2}, \qquad B = K\frac{2\alpha\beta + p\beta}{|D(\alpha + i\beta)|^2}. \qquad (4.74)$$

Самостійно знайти А та B у випадку $f(x) = Ke^{\alpha x}\sin\beta x$.

Приклад 4.19. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = 7e^{3x}\cos 4x. \qquad (4.75)$$

Рівняння є ЛНДР зі сталими коефіцієнтами. Його права частина є спеціальною типу (4.72). Загальний розв'язок шукаємо за формулою

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок $y_{зо}(x)$ відповідного однорідного ДР.

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

має два комплексно спряжених корені $2 \pm i$.

Тому загальний розв'язок однорідного ДР у дійсній формі дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x =$$

$$= C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x.$$

Далі шукаємо частинний розв'язок $y_{чн}(x)$ неоднорідного ДР. Його права частина

$$7e^{\alpha x} \sin \beta x = Ke^{3x} \cos 4x,$$

де $\alpha + i\beta = 3 + 4i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому, за формулою (4.73), $y_{чн}(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн}(x) = x^r e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x) = e^{3x}(A \cos 4x + B \sin 4x).$$

Для знаходження сталих A, B підставляємо $y_{чн}(x)$ у ДР (4.75).

Ураховуючи, що

$$y_{чн}'(x) = 3e^{3x}(A \cos 4x + B \sin 4x) + e^{3x}(-4A \sin 4x + 4B \cos 4x) =$$

$$= e^{3x}\big((3A + 4B) \cos 4x + (3B - 4A) \sin 4x\big),$$

$$y_{\text{чн}}''(x) = 3e^{3x}\big((3A + 4B)\cos 4x + (3B - 4A)\sin 4x\big) +$$

$$+ e^{3x}(-4(3A + 4B)\sin 4x + 4(3B - 4A)\cos 4x) =$$

$$= e^{3x}\big((24B - 7A)\cos 4x - (24A + 7B)\sin 4x\big),$$

маємо

$$e^{3x}\big((24B - 7A)\cos 4x - (24A + 7B)\sin 4x\big) -$$

$$- 4e^{3x}\big((3A + 4B)\cos 4x + (3B - 4A)\sin 4x\big) +$$

$$+ 5e^{3x}(A\cos 4x + B\sin 4x) = 7e^{3x}\cos 4x.$$

Після скорочення на e^{3x} одержимо

$$(8B - 14A)\cos 4x - (8A + 14B)\sin 4x = 7\cos 4x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за $\cos 4x$ та $\sin 4x$ у правий і лівій частинах рівності, одержимо систему для знаходження сталих A та B

$$\begin{cases} -14A + 8B = 7, \\ 8A + 14B = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -2A + \frac{8}{7}B = 1, \\ 4A + 7B = 0. \end{cases}$$

Помножимо першу рівність на 2 та додамо до другої. Одержимо

$$\frac{65}{7}B = 2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{14}{65} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{7}{4}B = -\frac{49}{130}.$$

Перевіримо знайдені значення A, B за формулами (4.74). Для цього обчислимо

$$|D(\alpha \ + \ i\beta)|^2 = |(3+4i)^2 - 4(3+4i) \ + \ 5|^2 =$$

$$= |9 - 16 + 24i - 12 - 16i + 5|^2 = |-14 \ + \ 8i|^2 = 260.$$

За формулами (4.74) одержимо значення

$$A \ = 7 \ \frac{3^2 \ - \ 4^2 \ - \ 4 \cdot 3 \ + \ 5}{260} \ = -\frac{98}{260} \ = -\frac{49}{130},$$

$$B \ = \ 7 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \ - \ 4 \cdot 4}{260} = \ \frac{56}{260} \ = \frac{14}{65},$$

які співпадають зі знайденими раніше.

Відповідь: $y_{\text{зн}}(x) \ = \ C_1 e^{3x} \cos 4x \ + C_2 e^{3x} \sin 4x \ -$
$- \ \frac{49}{130} e^{3x} \cos 4x \ + \ \frac{14}{65} e^{3x} \sin 4x.$

Приклад 4.20. Резонанс за вимушених коливань. Розглянемо диференціальне рівняння вимушених коливань за синусоїдального зовнішнього впливу з частотою ω_1

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega_1 x. \qquad (4.76)$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

має два комплексно спряжених корені $\lambda = \pm\ \omega_0 i$. Тому загальний розв'язок однорідного ДР, яке описує **вільні коливання**, дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1 \cos \omega_0 x + C_2 \sin \omega_0 x = A_0 \cos(\omega_0 x + \varphi_0),$$

де $A_0 = \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2}, tg\varphi = -\frac{C_2}{C_1}$.

Права частина ДР (4.76) дорівнює

$$f(x) = K \sin \omega_1 x = Ke^{\alpha x} \sin \beta x,$$

де $\alpha + i\beta = 0 + i\omega_1 = i\omega_1$ не є коренем характеристичного рівняння, коли частота зовнішнього збудження $\omega_1 \neq \omega_0$ власній частоті коливань. Тому частинний розв'язок ДР (4.76) за $\omega_1 \neq \omega_0$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн}(x) = A \cos \omega_1 x + B \sin \omega_1 x. \tag{4.77}$$

Підставимо вираз (4.77) у ДР (4.76) і одержимо

$$-A\omega_1^2 \cos \omega_1 x - B\omega_1^2 \sin \omega_1 x +$$

$$+ A\omega_0^2 \cos \omega_1 x + B\omega_0^2 \sin \omega_1 x = K \sin \omega_1 x,$$

звідки

$$-A\omega_1^2 + A\omega_0^2 = 0, \qquad - B\omega_1^2 + B\omega_0^2 = K.$$

Отже,

$$A = 0, \quad B = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \quad \Rightarrow \quad y_{чн}(x) = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 x \Rightarrow \tag{4.78}$$

$$y_{зн}(x) = A_0 \cos(\omega_0 x + \varphi_0) + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 x. \qquad (4.79)$$

Отже, якщо частота ω_1 зовнішнього впливу не дорівнює власній частоті коливань ω_0, то маємо суму (4.79) двох гармонічних коливань.

Перше з них (яке називають вільним) здійснюється з власною частотою ω_0 та амплітудою A_0 і початковою фазою φ_0, які залежать від початкових умов. Друге (яке називають **вимушеним**) відбувається з частотою ω_1 зовнішнього впливу і має цілком визначену амплітуду і початкову фазу.

Зауваження. Функція $y_{зн}(x)$ (4.79) є **періодичною**, коли частоти ω_0 і ω_1 **спільномірними**, тобто їхнє відношення є раціональним числом $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{p}{q}$, де $p, q \in \mathbb{Z}$. Тоді період $y_{зн}(x)$ дорівнює $T = \frac{2\pi p}{\omega_0} = \frac{2\pi q}{\omega_1}$. Якщо ж ω_0 і ω_1 не є спільномірними, тобто їхнє відношення є ірраціональним числом (наприклад $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{2}$), то функція $y_{зн}(x)$ не є періодичною функцією, а є так званою **майже періодичною** функцією.

З формули (4.79) випливає, що амплітуда вимушеного коливання стає дуже великою, коли ω_1 мало відрізняється від ω_0.

Якщо ж $\omega_1 = \omega_0$, то доданок, який відповідає вимушеному коливанню, слід, за виразом (4.73), шукати у вигляді

$$y_{чн}(x) = x\ (A \cos \omega_0 x + B \sin \omega_0 x). \qquad (4.80)$$

Для знаходження сталих A, B підставляємо $y_{чн}(x)$ виразу (4.80) у ДР (4.76).

Ураховуючи, що

$$y_{чн}'(x) = A \cos \omega_0 x + B \sin \omega_0 x + x(-A\omega_0 \sin \omega_0 x + B\omega_0 \cos \omega_0 x),$$

$$y_{\text{чн}}''(x) = -A\omega_0 \sin\omega_0 x \ + \ B\omega_0 \cos\omega_0 x - \ A\omega_0 \sin\omega_0 x \ +$$

$$+ \ B\omega_0 \cos\omega_0 x \ + \ x \ (-A\omega_0^2 \cos\omega_0 x \ - \ B\omega_0^2 \sin\omega_0 x),$$

маємо

$$-2A\omega_0 \sin\omega_0 x + 2B\omega_0 \cos\omega_0 x + x(-A\omega_0^2 \cos\omega_0 x - B\omega_0^2 \sin\omega_0 x) \ +$$

$$+ \ \omega_0^2 x(A\cos\omega_0 x \ + B\sin\omega_0 x) \ = \ K\sin\omega_0 x.$$

Звідси

$$-2A\omega_0 \sin\omega_0 x + 2B\omega_0 \cos\omega_0 x = K\sin\omega_0 x \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{K}{2\omega_0}, \ \ B = 0.$$

Отже,

$$y_{\text{чн}}(x) \ = \ -\frac{K}{2\omega_0} x\cos\omega_0 x. \tag{4.81}$$

Ми бачимо, що якщо частота зовнішнього впливу співпадає з власною частотою коливань, то амплітуда вимушеного коливання лінійно зростає. Це явище називають **резонансом**.

Завершуючи приклад, покажемо, як частинні розв’язки (4.78), (4.81) можна знайти за допомогою формул (4.58), (4.59).

Для ДР (4.76) за $\omega_1 \neq \omega_0$ частинний розв’язок дорівнює

$$y_{\text{чн}}(x) = \operatorname{Im} z_{\text{чн}}(x),$$

де $z_{\text{чн}}(x)$ є частинним розв’язком рівняння

$$z'' + \omega_0^2 z = Ke^{i\omega_1 x}.$$

Оскільки $\omega_1 \neq \omega_0$, то, за формулами (4.58), (4.59),

$$z_{\text{чн}}(x) = \frac{K}{D(i\omega_1)} e^{i\omega_1 x} = \frac{K}{-\omega_1^2 + \omega_0^2} e^{i\omega_1 x} \Rightarrow$$

$$y_{\text{чн}}(x) = \operatorname{Im} \frac{K}{-\omega_1^2 + \omega_0^2} e^{i\omega_1 x} = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 x,$$

що співпадає з виразом (4.78).

Нехай $\omega_1 = \omega_0$. Тоді, за формулами (4.60), (4.62),

$$z_{\text{чн}}(x) = \frac{K\ x}{D'(i\omega_0)} e^{i\omega_0 x} = \frac{K\ x}{2i\omega_0} e^{i\omega_0 x} \Rightarrow$$

$$y_{\text{чн}}(x) = \operatorname{Im} z_{\text{чн}}(x) = \operatorname{Im} \frac{Kx(\cos \omega_0 x + i \sin \omega_0 x)}{2i\omega_0} =$$

$$= -\frac{K}{2\omega_0} x \cos \omega_0 x,$$

що співпадає з виразом (4.81).

Приклад 4.21. Аналіз розв’язків ДР, яке описує вимушені коливання в ситуації, близькій до резонансу. Нехай зовнішній вплив має (на відміну від впливу у виразі (4.76)) вигляд загальної простої гармоніки

$$K_1 \cos \omega_1 x + K_2 \sin \omega_2 x = K \cos(\omega_1 x + \varphi_1),$$

де

$$K = \sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}, \qquad tg\varphi_1 = -\frac{K_2}{K_1}.$$

Проаналізуємо загальний розв'язок ЛНДР

$$y'' + \omega_0^2 y = K\cos(\omega_1 x + \varphi_1), \tag{4.82}$$

коли частоти ω_0 і ω_1 близькі, але $\omega_0 \neq \omega_1$.

Аналогічно ДР (4.76) для ДР (4.82) одержимо

$$y_{\text{зн}}(x) = A_0\cos(\omega_0 x + \varphi_0) + A_1\cos(\omega_1 x + \varphi_1), \tag{4.83}$$

де $A_1 = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$.

Нехай (для визначеності) $\omega_1 > \omega_0 > 0$ і частоти ω_0 та ω_1 близькі, при цьому $\frac{\Delta}{\omega_0} \ll 1$, де $\Delta = \omega_1 - \omega_0$.

Оскільки перший і другий доданки у виразі (4.83) дорівнюють відповідно

$$A_0\cos(\omega_0 x + \varphi_0) = A_0\cos\omega_0 x\cos\varphi_0 - A_0\sin\omega_0 x\sin\varphi_0,$$

$$A_1\cos(\omega_1 x + \varphi_1) = A_1\cos(\omega_0 x + \Delta x + \varphi_1) =$$

$$= A_1\cos\omega_0 x\cos(\Delta x + \varphi_1) - A_1\sin\omega_0 x\sin(\Delta x + \varphi_1),$$

то

$$y_{\text{зн}}(x) = [A_0\cos\varphi_0 + A_1\cos(\Delta x + \varphi_1)]\cos\omega_0 x -$$

$$-[A_0\sin\varphi_0 + A_1\sin(\Delta x + \varphi_1)]\sin\omega_0 x =$$

$$= A(x)\cos\big(\omega_0 x + \varphi(x)\big), \tag{4.84}$$

де

$$A(x) = \sqrt{A_0^2 \ + \ A_1^2 + \ 2A_0A_1\cos(\Delta x + \varphi_1 - \varphi_0)}\ , \qquad (4.85)$$

$$tg\varphi(x) = \ \frac{A_0 \sin\varphi_0 \ + \ A_1 \sin(\Delta x \ + \ \varphi_1)}{A_0 \cos\varphi_0 \ + \ A_1 \cos(\Delta x \ + \ \varphi_1)}\ . \qquad (4.86)$$

Ми бачимо, що «амплітуда» $A(x)$ (4.85) є періодичною функцією з великим періодом $T = \frac{2\pi}{\Delta}$, тому вона змінюється повільно. «Гармоніка» $\cos(\omega_0 x + \varphi(x))$, навпаки, змінюється порівняно з $A(x)$ швидко, оскільки $\frac{\Delta}{\omega_0} \ll 1$.

Зазначимо, що формули (4.85), (4.86) значно спрощуються, коли $|A_0| = |A_1|$. Наприклад, за $A_0 = A_1 = A$

$$A(x) = \sqrt{2A^2(1 + \cos(\Delta x + \varphi_1 \ - \ \varphi_0))} \ =$$

$$= \ \sqrt{4A^2 \cos^2\frac{\Delta x + \varphi_1 \ - \ \varphi_0}{2}} \ = \ 2\left|A\cos\frac{\Delta x + \varphi_1 \ - \ \varphi_0}{2}\right|.$$

Вигляд графіка функції (4.84) за $A_0 = A_1$ наведено на рис. 4.1.

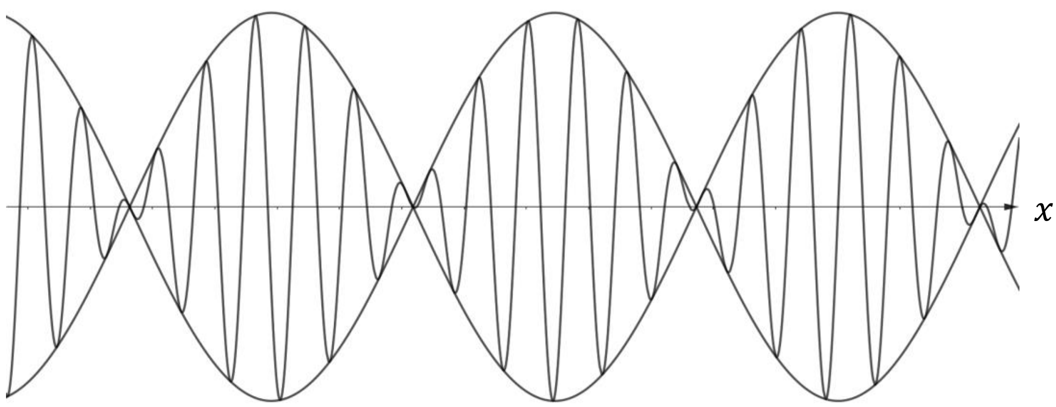

Рис. 4.1. Биття

У теорії коливань явище на рис. 4.1 називають **биттям**.

Нарешті розглянемо випадок, коли спеціальна права частина має загальний вигляд виразу (4.55). У цьому випадку частинний розв’язок ДР (4.76) потрібно шукати у вигляді

$$y_{\text{чн}}(x) \;=\; x^r\, e^{\alpha x}\big(\hat{P}_m(x)\cos\beta\, x \;+\; \hat{Q}_m(x)\sin\beta\, x\big), \tag{4.87}$$

де r дорівнює кількості коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + i\beta$; $\hat{P}_m(x)$, $\hat{Q}_m(x)$ є многочленами степеня $m = \max\{k, l\}$ з невизначеними коефіцієнтами. Для їх знаходження потрібно, як у вже розглянутих окремих випадках, підставити $y_{\text{чн}}(x)$ виразу (4.87) у ДР (4.56) і прирівняти коефіцієнти за відповідних функцій у правій і лівій частинах одержаної рівності.

Приклад 4.22. Вказати вигляд частинного розв’язку рівняння

$$y'' + 7y' + 12y \;=\; e^{-4x}\big((5x+1)\cos 8\,x + 7\sin 8\,x\big).$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$$

має корені $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$; $\alpha + i\beta = -4 + 8i$ не є коренем характеристичного рівняння $\Rightarrow$ $r = 0$;

$$m = \max\{k, l\} = \max\{1, 0\} = 1\,.$$

Тому $y_{\text{чн}}(x)$ має вигляд

$$y_{\text{чн}}(x) \;=\; e^{-4x}\big((Ax+B)\cos 8\,x + (Cx+D)\sin 8\,x\big).$$

Приклад 4.23. Вказати вигляд частинного розв'язку рівняння

$$y'' + 5y' = 3x^2 + 1.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

має корені $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$. Права частина ДР дорівнює

$$3x^2 + 1 = e^{0x}\big((3x^2 + 1)\cos 0\,x + 0\cdot\sin 0\,x\big).$$

Тут $\alpha + i\beta = 0 + i\cdot 0$ співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння $\Rightarrow \quad r = 1;$

$$m = \max\{k, l\} = \max\{2, 0\} = 2\ .$$

Тому $y_{\text{чн}}(x)$ має вигляд

$$y_{\text{чн}}(x) = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Приклад 4.24. Вказати вигляд частинного розв'язку рівняння

$$y'' + 10y' + 26y = e^{-5x}(x^3 + 2)\sin x.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 10\lambda + 26 = 0$$

має два комплексно спряжених корені $-5 \pm i$. Права частина ДР дорівнює

$$e^{-5x}(x^2 + 2)\sin x = e^{-5x}(0 \cdot \cos x + (x^2 + 2)\sin x).$$

Тут $\alpha + i\beta = -5 + i$ співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння $\Rightarrow$ $r = 1$.

$$m = \max\{k, l\} = \max\{0, 3\} = 3 .$$

Тому $y_{\text{чн}}(x)$ має вигляд

$$y_{\text{чн}}(x) = xe^{-5x}\big((Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x +$$

$$+(Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)\sin x\big).$$

Зауважимо, що правило (4.87) справедливо для ЛДР довільного порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною виразу (4.55). Проілюструємо його ще на прикладах ЛДР першого порядку.

Приклад 4.25. Розв'язати задачу Коші

$$y' - 5y = 7e^{-2x}, \ y(0) = 4. \tag{4.88}$$

Рівняння (4.88) є ЛНДР. Тому його загальний розв'язок шукаємо за формулою

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок $y_{\text{зо}}(x)$ відповідного однорідного ДР. Характеристичне рівняння

$$\lambda - 5 = 0$$

має корінь $\lambda = 5$.

Тому загальний розв'язок відповідного однорідного ДР дорівнює

$$y_{зо}(x) = Ce^{\lambda x} = Ce^{5x}. \tag{4.89}$$

Далі шукаємо частинний розв'язок $y_{чн}(x)$ неоднорідного ДР.

Його права частина є спеціальною типу (4.57)

$$7e^{-2x} = Ke^{\alpha x},$$

де $\alpha = -2$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $y_{чн}(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн}(x) = Ae^{\alpha x} = Ae^{-2x}. \tag{4.90}$$

Для знаходження сталої A підставляємо $y_{чн}(x)$ виразу (4.90) у ДР (4.88). Маємо

$$-2Ae^{-2x} - 5Ae^{-2x} = 7e^{-2x}.$$

Після скорочення на e^{-2x} одержимо

$$-7A = 7, \quad A = -1.$$

Отже,

$$y_{чн}(x) = -e^{-2x},$$

тому

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) = Ce^{5x} - e^{-2x}. \qquad (4.91)$$

Для порівняння об'єму обчислень знайдемо $y_{\text{зн}}(x)$ методом варіації довільної сталої.

Шукаємо $y_{\text{зн}}(x)$ у вигляді виразу (4.89) із заміною сталої C на функцію $C(x)$.

$$y_{\text{зн}}(x) = C(x)e^{5x}.$$

Цю функцію знаходимо з рівняння

$$C'(x)y(x) = f(x),$$

на яке перетворюється система (4.26) за $n = 1$ (розд. 2).

У нашому випадку $y = e^{5x}$, $f(x) = 7e^{-2x}$. Тобто $C(x)$ знаходимо з рівняння

$$C'(x)e^{5x} = 7e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 7e^{-7x}.$$

Маємо

$$C(x) = 7\int e^{-7x}\,dx = -e^{7x} + C.$$

Отже, загальний розв'язок

$$y_{\text{зн}}(x) = C(x)e^{5x} = (-\, e^{-7x} + C)e^{5x} = Ce^{5x} - e^{-2x},$$

що співпадає з виразом (4.91), який був знайдений раніше більш просто.

Далі шукаємо розв'язок задачі Коші. За виразом (4.91) і початковою умовою,

$$Ce^0 - e^0 = y_{\text{зн}}\ (0) = 4.$$

Звідси $C = 5$.

Відповідь: $y(x) = 5e^{5x} - e^{-7x}$.

Приклад 4.26. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + 3y = -4e^{-3x}. \quad (4.92)$$

Рівняння (4.92) є ЛНДР. Тому його загальний розв'язок шукаємо за формулою

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок $y_{\text{зо}}(x)$ відповідного однорідного ДР. Характеристичне рівняння

$$\lambda + 3 = 0$$

має корінь $\lambda = -3$.

Тому загальний розв'язок відповідного однорідного ДР дорівнює

$$y_{зо}(x) = Ce^{\lambda x} = Ce^{-3x}. \quad (4.93)$$

Далі шукаємо частинний розв'язок $y_{\text{чн}}(x)$ неоднорідного ДР.

Його права частина є спеціальною типу виразу (4.57).

$$-4e^{-3x} = Ke^{\alpha x},$$

де $\alpha = -3$ є коренем характеристичного рівняння. Тому $y_{\text{чн}}(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}}(x) = x^r Ae^{\alpha x} = xAe^{-3x}. \quad (4.94)$$

Для знаходження сталої A підставляємо $y_{\text{чн}}(x)$ виразу (4.94) у ДР (4.92). Маємо

$$Ae^{-3x} - 3xAe^{-3x} + 3xAe^{-5x} = -4e^{-3x}.$$

Після скорочення на e^{-3x} одержимо $A = -4$.

Отже

$$y_{\text{чн}}(x) = 4xe^{-3x},$$

тому

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) = Ce^{-3x} - 4xe^{-3x} = (C + 4x)e^{-3x}.$$

Відповідь: $y_{\text{зн}}(x) = (C + 4x)e^{-3x}$.

Приклад 4.27. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + y = 3e^{2x}cos3x. \quad (4.95)$$

Рівняння (4.95) є ЛНДР. Тому його загальний розв'язок шукаємо за формулою

$$y_{зн}(x) = y_{зо}(x) \ + \ y_{чн}(x).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок $y_{зо}(x)$ відповідного однорідного ДР. Характеристичне рівняння

$$\lambda \ + \ 1 \ = \ 0$$

має корінь $\lambda \ = -1$.

Тому загальний розв'язок відповідного однорідного ДР дорівнює

$$y_{зо}(x) \ = Ce^{\lambda x} = Ce^{-x}. \qquad (4.96)$$

Далі шукаємо частинний розв'язок $y_{чн}(x)$ неоднорідного ДР.

Його права частина є спеціальною типу виразу (4.72).

$$3e^{2x}cos3x \ = Ke^{\alpha x}\cos\beta x,$$

де $\alpha + i\beta \ = \ 2 + 3i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $y_{чн}(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн}(x) = x^r e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x). \qquad (4.97)$$

Для знаходження сталих A, B підставляємо $y_{чн}(x)$ виразу (4.97) у ДР (4.95). Маємо

$$2e^{2x}(A\cos 3\,x \ + \ B\sin 3\,x) + e^{2x}(-3A\sin 3\,x \ + 3B\cos 3\,x) +$$

$$+\,e^{2x}(A\cos 3\,x \ + \ B\sin 3\,x) = 3\,e^{2x}\cos 3x.$$

Після скорочення на e^{2x} одержимо

$$(3A+3B)\cos 3x + (-3A+3B)\sin 3x = 3\cos 3x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за $\cos 3x$ і $\sin 3x$ у лівій і правій частинах рівності, одержимо систему для знаходження сталих A та B.

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ -A + B = 0, \end{cases}$$

звідки $A = B = \frac{1}{2}$. Тому

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x).$$

Відповідь: $y_{\text{зн}}(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)$.

Запитання до розділу 4

1. Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку?
2. Що називають лінійним диференціальним виразом?
3. Яке рівняння називають лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку?
4. Яке рівняння називають лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку?
5. Сформулювати теорему існування і єдиності розв’язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння n-го порядку. Що означає, що вона має глобальний характер?
6. Сформулювати сім найпростіших властивостей лінійних диференціальних рівнянь. Навести формулу Абеля.

7. Які функції називають лінійно залежними?

8. Які функції називають лінійно незалежними?

9. Навести приклади систем лінійно незалежних функцій, за допомогою яких конструюють загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами та диференціального рівняння Ейлера.

10. Який визначник називають визначником Вронського (вронскіаном)?

11. Як за допомогою визначника Вронського перевіряють лінійну незалежність системи функцій?

12. Коли з того, що визначник Вронського системи функцій дорівнює нулю в деякий точці, випливає, що ці функції є лінійно залежні?

13. Навести формулу Ліувілля-Остроградського.

14. Що називають фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку?

15. Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку?

16. Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку?

17. У чому полягає метод варіації довільної сталої розв'язання лінійного диференціального рівняння n-го порядку?

18. У чому полягає метод Ейлера знаходження розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?

19. Яке рівняння називають характеристичним?

20. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

21. Яке рівняння називають визначальним?

22. Який вигляд має загальний розв'язок диференціального рівняння Ейлера?

23. Який вигляд має спеціальна права частина лінійного неоднорідного диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами?

24. У якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = Ke^{\alpha x}$?

25. У якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і правими частинами $f(x) = Ke^{\alpha x}\cos\beta x$, $f(x) = Ke^{\alpha x}\sin\beta x$, $f(x) = K_1e^{\alpha x}\cos\beta x + K_2e^{\alpha x}\sin\beta x$?

26. Коли загальний розв'язок диференціального рівняння, яке описує вимушені коливання, є періодичною функцією?

27. Яке явище називають резонансом?

28. За яких умов виникає биття?

Завдання до розділу 4

Завдання 1. Встановити, чи є лінійно незалежними функції:

1) $3x + 5, 2x - 1, x + 3$;

2) $2x^2 + 8, x^2 - 4, x + 6$;

3) $e^x,\ e^{-x}, \mathrm{sh}x$.

Завдання 2. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1) $y'' + 6y = 0$;

2) $y'' + 4y = 0$;

3) $2y'' - 5y' + 2y = 0$;

4) $2y'' - 7y' - 15y = 0$;

5) $y'' + 10y' + 29y = 0$;

6) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

7) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

8) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$;

9) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$;

10) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$;

11) $x^2y'' - xy' + 9y = 0$;

12) $x^2y''' - 2y' = 0$;

13) $y'' - 7y' = 5e^{2x}$;

14) $y'' - 6y' + 8y = 4x^2 - 6x$;

15) $y'' - 4y' + 20y = (5x + 4)e^{4x}$;

16) $y'' + y = 8\sin 3x$;

17) $y'' - 44y = (2x - 6)e^{2x}$;

18) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{3x}\cos 2x$;

19) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$;

20) $y'' + 9y = 12\sin 3x$;

21) $y'' + 4y = ctg\ 2x$;

22) $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$.

Завдання 3. Вказати вигляд частинного розв'язку:

1) $3y'' - 2y' - y = e^{-2x}(\cos 4x + \sin 4x)$;

2) $y'' + 2y' = x^3 + x$;

3) $y'' + 16y = x\sin 4x$;

4) $y'' + 6y' - 7y = 7e^{2x}$;

5) $y'' - 8y' + 16y = (2x^2 + 1)e^{4x}$;

6)$y'' + 7y' + 10y = 3xe^{-2x}\sin 5x$;

7) $y'' + 6y' + 10y = (x^2 + 5)e^{-3x}\cos x$;

8) $y'' + 10y' + 26y = (2x^2 + 6x + 3)\sin x$;

9) $y'' + y' - 2y = x\sin 3x + 2e^x$;

10) $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 1 + e^x\cos 2x$;

11) $y' + 4y = 9e^{3x}$;

12) $y' - 7y = 5e^{7x}$;

13) $y' + 2y = 4e^{-3x}\sin 5x$;

14) $y' - 6y = 8x\sin 2x$;

15) $y' - 3y = e^{3x}(x + 1)$.

Завдання 4. Знайти розв’язок задачі Коші:

1) $y'' + 5y' - 24y = 0,\ y(0) = -2, y'(0) = 0;$

2) $y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4, y'(0) = -3;$

3) $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

Завдання 5*.

1. Чи може лінійне однорідне рівняння другого порядку з неперервними коефіцієнтами мати розв’язок $y = \sin^2 x$?

2. Чи може лінійне однорідне рівняння другого порядку з неперервними коефіцієнтами мати фундаментальну систему розв’язків $y_1 = 2x - 1, y_2 = 4x - x^2 - 2$?

Відповіді до завдань розділу 4

Завдання 1:

1) ні; **2)** так; **3)** ні.

Завдання 2:

1) $y = C_1 + C_2e^{-6x}$; **2)** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$; **3)** $y = C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{2x}$;

4) $y = C_1e^{-\frac{3}{2}x} + C_2e^{5x}$; **5)** $y = e^{-5x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; **6)** $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$; **7)** $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; **8)** $y = C_1x^{-1} + C_2x^3$;
9) $y = x(C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x|)$; **10)** $y = C_1x^2 + C_2x^3$; **11)** $y = (C_1 + C_2\ln|x|)x^3$; **12)** $y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3x^3$; **13)** $y = C_1 + C_2e^{7x} - \frac{1}{2}e^{2x}$;

14) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}$; **15)** $y = e^{2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + \frac{e^{4x}}{20}(5x + 3)$; **16)** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \sin 3x$; **17)** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{e^{2x}}{8}(2x^2 - 13x)$; **18)** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{e^{3x}}{2}(3\sin 2x - \cos 2x)$;

19) $y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{6}x^3\right)$; **20)** $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - 2x\cos 3x$;

21) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\ln tg\ 2x$; **22)** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1 + e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x}\mathrm{arctg}\, e^x$.

Завдання 3:

1) $y_{\text{чн}} = e^{-2x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$; **2)** $y_{\text{чн}} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$; **3)** $y_{\text{чн}} = x\big((Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x\big)$; **4)** $y_{\text{чн}} = Ae^{2x}$; **5)** $y_{\text{чн}} = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{4x}$; **6)** $y_{\text{чн}} = e^{-2x}\big((Ax+B)\cos 5x + (Cx + D)\sin 5x\big)$; **7)** $y_{\text{чн}} = xe^{-3x}\big((A_1x^2 + B_1x + C_1)\cos x + (A_2x^2 + B_2x + C_2)\sin x\big)$; **8)** $y_{\text{чн}} = (A_1x^2 + B_1x + C_1)\cos x + (A_2x^2 + B_2x + C_2)\sin x$; **9)** $y_{\text{чн}} = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x + Mxe^x$; **10)** $y_{\text{чн}} = Ax^2 + Bx + C + e^x(M\cos 2x + N\sin 2x)$; **11)** $y_{\text{чн}} = Ae^{3x}$; **12)** $y_{\text{чн}} = Axe^{7x}$; **13)** $y_{\text{чн}} = e^{-3x}(A\cos 5x + B\sin 5x)$; **14)** $y_{\text{чн}} = (Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x$; **15)** $y_{\text{чн}} = x(Ax+B)e^{3x}$.

Завдання 4:

1) $y = -\frac{16}{11}e^{3x} - \frac{6}{11}e^{-8x}$; **2)** $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$; **3)** $y = \frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{2x}$.

Завдання 5:

1) ні; **2)** ні.

РОЗДІЛ 5. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ. ЗАДАЧА КОШІ

Будемо розглядати **системи ДР першого порядку**, які мають такий вигляд:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ \dots \ , y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ \dots \ , y_n), \\ \qquad \cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ \dots \ , y_n). \end{cases} \tag{5.1}$$

Уведемо **векторні позначення**

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Тоді систему (5.1) запишемо у **векторній формі**

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, y). \tag{5.3}$$

Таку форму запису називають **нормальною формою** системи ДР першого порядку (тобто формою, у якій система розв'язана відносно $\vec{y}'(x)$).

Зазначимо, що визначення **розв'язку**

$$\vec{y}(x) = \big(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\big)^T$$

і **загального розв'язку**

$$\vec{y}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) =$$

$$= \big(y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), y_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, y_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)\big)^T$$

системи (5.1)-(5.3) аналогічні цим визначенням для ДР (2.1) першого порядку.

Також зазначимо, що більшість систем (зокрема рівнянь) ДР вищих порядків, які використовують у фізиці та техніці, зведені до систем типу (5.1)-(5.3).

Приклад 5.1. Система ДР Ньютона. Якщо матеріальна точка з масою m рухається у просторі під дією сили $\vec{F}$, яка залежить від часу t, місцезнаходження (радіус-вектора $\vec{r}(t)$) точки та її швидкості $\dot{\vec{r}}(t)$, то, за другим законом Ньютона, її радіус-вектор задовольняє векторне ДР

$$m\,\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(t, r, \dot{r}). \tag{5.4}$$

Оскільки $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, де $x(t), y(t), z(t)$ — координати матеріальної точки, то ДР (5.4) зведено до системи трьох ДР другого порядку

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\,\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\,\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases} \tag{5.5}$$

де F_x, F_y, F_z — координати вектора-сили $\vec{F}$.

Якщо позначити

$$\dot{x} = u, \qquad \dot{y} = v, \qquad \dot{z} = w,$$

то система (5.5) буде зведена до системи вигляду (5.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{z} = w, \\ \dot{u} = \dfrac{1}{m} F_x(t, x, y, z, u, v, w), \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m} F_y(t, x, y, z, u, v, w), \\ \dot{w} = \dfrac{1}{m} F_z(t, x, y, z, u, v, w). \end{cases}$$

Приклад 5.2. ДР n-го порядку

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}\right) \tag{5.6}$$

зведено до систем типу (5.1)-(5.3).

Дійсно, якщо позначити

$$y = u_1, \ y' = u_2, \ \ \dots \ , y^{(n-1)} = u_n, \tag{5.7}$$

то ДР (5.6) зведено до системи вигляду (5.1)

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_3, \\ \quad \cdots \\ u_{n-1}' = u_n, \\ u_n' = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n), \end{cases} \tag{5.8}$$

яка після введення векторних позначень типу (5.2) буде зведена до системи типу (5.3).

Задача Коші для систем (5.1)-(5.3) полягає в знаходженні її розв'язку $\vec{y}(x)$, який задовольняє початкову умову $\vec{y}(x_0) \ = \ \vec{y}_0$, де x_0 – задана точка, $\vec{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, \ \dots \ , \ y_n^0)^T$- заданий вектор:

$$\vec{y}'(x) \ = \ \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) \ = \ \vec{y}_0. \tag{5.9}$$

Теорема Пікара існування і єдиністі розв’язку задачі Коші (5.9) **для системи ДР першого порядку** (спрощений варіант). Нехай вектор-функція $\vec{f}(x,\vec{y}) = \vec{f}(x,y,y_1, \ \dots \ ,y_n)$ і частинні похідні $\frac{\partial f_j(x,y,y_1, \ \dots \ ,y_n)}{\partial y_k}$ її координат є неперервними в паралелепіпеді $\Pi : x_0 \le x \le x_0 + a,$ $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| \le b$, де $\| \ \bullet \ \|$ – евклідова норма.

Тоді задача Коші (5.9) має єдиний розв’язок за $x_0 \le x \le x_0 + \alpha$, де $\alpha = \min\left\{a, \ \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{\Pi}\|\vec{f}(x,\vec{y})\|$.

Зазначимо, що для систем (5.1)-(5.3) має місце аналог теореми існування Пеано для ДР першого порядку в розд. 2.

Також для систем (5.1)-(5.3) справедливі зауваження, аналогічні зауваженням, наведеним після теорем Пікара та Пеано для ДР першого порядку в розд. 2.

Запитання до розділу 5

1. Який вигляд має система диференціальних рівнянь першого порядку? Як записати її у векторній формі?
2. Як звести систему диференціальних рівнянь Ньютона до системи диференціальних рівнянь першого порядку?
3. Як звести диференціальне рівняння n-го порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку?
4. Сформулювати теорему Пікара існування та єдиності розв'язку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку?

Завдання до розділу 5

Завдання 1*. Довести, що задача Коші

$$\begin{cases} y_1' = \sin(x+y), \\ y_2' = arctg\, x^2 y, \end{cases}$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = -1$$

має єдиний розв’язок на всій осі.

РОЗДІЛ 6. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

6.1. Загальні поняття. Задача Коші

Будемо розглядати **лінійну систему** ДР (**ЛСДР**)

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{6.1}$$

Уведемо векторні та матричні позначення

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Тоді систему запишемо у **векторній формі**

$$\vec{y}'(x) = A(x)\,\vec{y}(x) + \vec{f}(x). \tag{6.3}$$

Якщо в ЛСДР (6.3) права частина $\vec{f}(x) = 0$, то ЛСДР (6.3) називають **лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь** (**ЛОСДР**).

Якщо в ЛСДР (6.3) права частина $\vec{f}(x) \neq 0$, то ЛСДР (6.3) називають **лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь** (**ЛНСДР**).

Зауваження 6.1. ЛНДР n-го порядку

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ \dots \ + p_1(x)y' \ + p_0(x)y = f(x) \qquad (6.4)$$

зводять до ЛСДР типу (6.3).

Дійсно, якщо y є розв’язком ЛНДР (6.4), то, позначивши

$$\vec{y} \ = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) \ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix},$$

$$A(x) \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0(x) & -p_1(x) & \cdots & -p_n(x) \end{pmatrix}, \qquad (6.5)$$

одержимо ЛНСДР вигляду (6.3).

Теорема 6.1 про існування і єдиність розв’язку задачі Коші для ЛНСДР. Нехай компоненти $f_1(x),\ f_2(x),\ \dots, f_n(x)$, вектор-функції $\vec{f}(x)$ та елементи матриці $A(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і точка $x_0 \in [a,b]$. Тоді задача Коші

$$\vec{y}'(x) = A(x)\,\vec{y}(x) + \vec{f}(x),\ \ \vec{y}(x_0) \ = \ \vec{y}_0 \qquad (6.6)$$

має єдиний розв’язок на всьому відрізку $[a,b]$.

Зазначимо, що (на відміну від теореми існування і єдиності розв’язку задачі Коші для нелінійної системи ДР (5.3)) теорема (6.1) має **глобальний** характер (розв’язок існує на **всьому** відрізку $[a,\ b]$, а не лише в деякому околі точки x_0).

Із зауваження 6.1 випливає, що теорема 4.1 про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для ЛНДР є наслідком теореми 6.1.

Оскільки теорія лінійних систем ДР аналогічна теорії лінійних ДР, то ряд тверджень цієї теорії будемо викладати стисло і без доведення.

6.2. Структура загального розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь

Щоб описати цю структуру, потрібно ввести поняття лінійної залежності і незалежності вектор-функції.

Вектор-функції $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots,\vec{y}^n(x)$ називають **лінійно залежними** на інтервалі I, якщо існує набір сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, не рівних нулю одночасно, і

$$C_1\vec{y}^1(x) + C_2\vec{y}^2(x) + \cdots + C_n\vec{y}^n(x) = 0, \quad x \in I.$$

В іншому випадку вектор-функції $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots,\vec{y}^n(x)$ називають **лінійно незалежними** на інтервалі I.

Нехай $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots,\vec{y}^n(x)$ є n −компонентними вектор-функціями.

Визначник

$$W[\vec{y}^1,\ \vec{y}^2,\ \dots,\vec{y}^n] = \det\big(\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots,\vec{y}^n(x)\big)$$

називають **визначником Вронського** (або **вронскіаном**) **вектор-функцій** $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots,\vec{y}^n(x)$.

Теорема 6.2. Аби вектор-функції $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots,\vec{y}^n(x)$ були лінійно незалежними на інтервалі I, достатньо, щоб їхній вронскіан $W[\vec{y}^1,\ \vec{y}^2,\ \dots,\vec{y}^n]$ був відмінним від нуля хоча б в одній точці інтервалу I.

Приклад 6.1. Нехай n-компонентні вектори $\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \dots,\vec{y}_n$ є лінійно незалежними, а $\lambda_1, \lambda_2,\ \dots,\lambda_n$ є довільними комплексними числами (не обов'язково попарно відмінними). Тоді вектор-функції

$$\vec{y}^1(x) = e^{\lambda_1 x}\vec{y}_1,\ \ \vec{y}^2(x) = e^{\lambda_2 x}\vec{y}_2\ ,\ \dots\ ,\ \ \vec{y}^n(x) = e^{\lambda_n x}\vec{y}_n$$

є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі.

Дійсно,

$$W[\vec{y}^1,\ \vec{y}^2,\ \dots,\vec{y}^n] = \det\left(e^{\lambda_1 x}\vec{y}_1,\ e^{\lambda_2 x}\vec{y}_2\ ,\ \dots\ ,\ e^{\lambda_n x}\vec{y}_n\right) =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\lambda_n)x}\, det(\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \dots,\vec{y}_n) \neq 0,$$

оскільки вектори $\vec{e}_j$ є лінійно незалежними.

Теорема 6.3. Якщо вектор-функції $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots,\vec{y}^n(x)$ є лінійно залежними на інтервалі, то їхній вронскіан $W[\vec{y}^1,\ \vec{y}^2,\ \dots,\vec{y}^n] = 0$ на цьому інтервалі.

Зворотне твердження в загальному випадку неправильне. А саме з того, що вронскіан $W[\vec{y}^1,\ \vec{y}^2,\ \dots,\vec{y}^n] = 0$, не випливає, що вектор-функції $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots,\vec{y}^n(x)$ є лінійно залежними.

Приклад 6.2. Вектор-функції

$$\vec{y}^1(x) = \binom{1}{x}, \qquad \vec{y}^2(x) = \binom{x^2}{x^3}$$

є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі, оскільки функції $1,\ x,\ x^2, x^3$ є лінійно незалежними (приклад 4.2), але їхній вронскіан $W[\vec{y}^1,\ \vec{y}^2]$ тотожно дорівнює нулю.

Однак у випадку, коли $\vec{y}^1(x)$, $\vec{y}^2(x)$, $\dots, \vec{y}^n(x)$ не є довільними вектор-функціями, а є розв’язками ЛОСДР, твердження, зворотне твердженню теореми 6.3, має місце.

Теорема 6.4. Нехай вектор-функції $\vec{y}^1(x)$, $\vec{y}^2(x)$, $\dots, \vec{y}^n(x)$ є розв’язками ЛОСДР і їхній вронскіан $W[\vec{y}^1,\ \vec{y}^2,\ \dots, \vec{y}^n] = 0$ у якійсь точці x_0 на інтервалі. Тоді вони є лінійно залежними на цьому інтервалі.

Теорема 6.5. Формула Ліувілля.

Нехай $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots, \vec{y}^n(x)$ є розв’язками ЛОСДР

$$\vec{y}'(x) = A(x)\,\vec{y}(x) \tag{6.7}$$

на інтервалі I. Тоді їхній вронскіан

$$W[\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots, \vec{y}^n(x)] = \\ = W[\vec{y}^1(x_0),\ \vec{y}^2(x_0),\ \dots, \vec{y}^n(x_0)]e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{Sp}A(t)dt},\ \ x_0, x \in I. \tag{6.8}$$

*Тут і далі Sp A— **слід матриці** A, який дорівнює сумі діагональних елементів.*

Доведення формул (6.7), (6.8). Для простоти доведемо її за $n = 2$. Позначимо $W[\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x)] = W(x)$.

Якщо $W(x) = 0$, то формула правильна. Нехай $W(x) \neq 0$.

Далі нам знадобиться одне твердження.

Твердження 6.1. Нехай елементи матриці $U(x)$ є диференційованими, а матриця $U(x)$ невиродженою. Тоді

$$\frac{[det\,U\,(x)]'}{det\,U\,(x)} = \mathrm{Sp}\big(U'(x)U^{-1}(x)\big). \tag{6.9}$$

Дійсно, нехай $U(x) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Тоді

$$\mathrm{Sp}(U'U^{-1}) = \mathrm{Sp}\left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \frac{1}{det\, U} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \tag{6.10}$$

$$= \frac{1}{det\, U}\,[a'd - b'c - c'b + d'a].$$

З іншого боку,

$$(\det U(x))' = (ad - cb)' = a'd + ad' - c'b - cb'. \tag{6.11}$$

Порівнюючи вирази (6.10) та (6.11), одержуємо вираз (6.9).

Формула Ліувілля (6.8) є наслідком виразу (6.9). Дійсно,

$$Y'(x) \;=\; A(x)Y(x), \tag{6.12}$$

де матриця

$$Y(x) = \left(\vec{y}^1(x)\ \vec{y}^2(x)\right), \qquad \det Y(x) = W(x).$$

Тому, за виразами (6.9), (6.12),

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = \mathrm{Sp}\left(Y'(x)Y^{-1}(x)\right) =$$

$$= \mathrm{Sp}\left(A(x)Y(x)Y^{-1}(x)\right) = \mathrm{Sp}A(x).$$

Зауваження 6.2. Вронскіан $W[y_1,\ y_2,\ \dots, y_n]$ розв'язків $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots, y_n(x)$ ЛОДР (6.4), $(f(x) = 0)$ дорівнює вронскіану $W[\vec{y}^1,\ \vec{y}^2,\ \dots, \vec{y}^n]$ відповідних розв'язків $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots, \vec{y}^n(x)$ ЛОСДР (6.8) із матрицею $A(x)$ (6.5).

Із зауваження 6.2 випливає, що формула Ліувілля-Остроградського (4.19) для вронскіана $W[y_1,\ y_2,\ \dots, y_n]$ розв'язків $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots, y_n(x)$ ЛОДР (6.4), $(f(x) = 0)$ є наслідком формули Ліувілля (6.8), оскільки $\mathrm{Sp}A(x) = -p_{n-1}(x)$ для матриці $A(x)$ (6.5).

Щоб описати структуру загального розв'язку ЛСДР, потрібне поняття фундаментальної системи розв'язків ЛОСДР.

Фундаментальною системою розв'язків ЛОСДР (6.7) називають будь-який набір із n лінійно незалежних розв'язків цієї системи.

Твердження 6.2. Фундаментальна система розв'язків існує.

Теорема 6.6. Про структуру загального розв'язку ЛОСДР.

Загальний розв'язок $\vec{y}_{зо}(x)$ ЛОСДР (6.7) дорівнює

$$\vec{y}_{зо}(x) = C_1\vec{y}^1(x) + C_2\vec{y}^2(x) + \dots + C_n\vec{y}^n(x), \tag{6.13}$$

де $\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots, \vec{y}^n(x)$ - довільна фундаментальна система розв'язків цієї системи;

$C_1, C_2, \dots, C_n$ - довільні сталі.

Теорема 6.7. Про структуру загального розв'язку ЛНСДР.

Загальний розв'язок $\vec{y}_{зн}(x)$ ЛНСДР (6.3) дорівнює сумі загального розв'язку $\vec{y}_{зо}(x)$ (6.7) відповідної ЛОСДР і частинного розв'язку $\vec{y}_{чн}(x)$ ЛНСДР (6.3)

$$\vec{y}_{зн}(x) = \vec{y}_{зо}(x)\ +\ \vec{y}_{чн}(x). \tag{6.14}$$

Щоб сформулювати для лінійних систем ДР метод варіації довільної сталої, потрібно ввести поняття фундаментальної матриці.

Фундаментальною матрицею ЛОСДР (6.7) називають матрицю $Y(x) = \left(\vec{y}^1(x),\ \vec{y}^2(x),\ \dots, \vec{y}^n(x)\right)$, стовпці якої утворюють фундаментальну систему розв'язків цієї ЛОСДР.

Теорема 6.8. Про властивості фундаментальної матриці. Нехай $Y(x)$ є фундаментальною матрицею ЛОСДР (6.7). Тоді:

1) матриця $Y(x)$ є невиродженою і задовольняє матричне рівняння

$$Y'(x) = A(x)Y(x); \tag{6.15}$$

2) будь-яка фундаментальна матриця ЛОСДР (6.7) дорівнює $Y(x)C$, де C – довільна стала невиродженої $n \times n$ – матриці;

3) загальний розв'язок ЛОСДР (6.7) дорівнює

$$\vec{y}_{\text{зо}}(x) = Y(x)\ \vec{c}, \tag{6.16}$$

де $\vec{c}$ – вектор-стовпчик із довільними сталими компонентами.

Будемо шукати загальний розв'язок $\vec{y}_{\text{зн}}(x)$ ЛНСДР (6.3) **методом варіації довільної сталої**, тобто у вигляді виразу (6.16) із заміною сталого вектора $\vec{c}$ на вектор-функцію $\vec{c}(x)$.

$$\vec{y}_{\text{зн}}(x) = Y(x)\vec{c}(x). \tag{6.17}$$

Для знаходження $\vec{c}(x)$ підставимо $\vec{y}_{\text{зн}}(x)$ виразу (6.17) у систему (6.7):

$$Y'^{(x)\vec{c}(x)} + Y(x)\vec{c}\,'(x) = A(x)Y(x)\vec{c}(x) + \vec{f}(x).$$

Ураховуючи, що $A(x)Y(x) = Y'(x)$, одержуємо

$$Y(x)\vec{c}\,'(x) = \vec{f}(x) \quad \Rightarrow \quad \vec{c}\,'(x) = Y^{-1}(x)\vec{f}(x),$$

звідки $\vec{c}(x) = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)\, dt + \vec{c}$. Отже,

$$\vec{y}_{\text{зн}}(x) = Y(x)\ \vec{c}(x) = Y(x)\ \vec{c} + Y(x) \int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)\, dt. \qquad (6.18)$$

Тому розв'язок задачі Коші (6.6) дорівнює

$$y(x) = Y(x)\ Y^{-1}(x_0)\vec{y}_0 + Y(x) \int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)\, dt. \qquad (6.19)$$

6.3. Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

6.3.1. Метод Ейлера і його узагальнення

Спочатку розглянемо ЛСОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\vec{y}'(x) = A\,\vec{y}(x), \qquad (6.20)$$

де A - стала $n \times n$ – матриці.

Аналогічно до ЛОДР зі сталими коефіцієнтами будемо шукати частинні розв'язки ЛОСДР (6.20) у вигляді

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\vec{y}. \qquad (6.21)$$

Такий метод знаходження розв'язків ЛОСДР (6.20) називають **методом Ейлера.**

Підставимо $\vec{y}(x)$ виразу (6.21) у систему (6.20) і одержимо

$$\lambda\, e^{\lambda x}\vec{y} \;=\; e^{\lambda x}A\vec{y}.$$

Скорочуючи на $e^{\lambda x}$, маємо

$$(A-\lambda\mathbb{I})\vec{y}=0. \tag{6.22}$$

Тут і далі $\mathbb{I}$ – одинична матриця.

Тобто $\vec{y}(x)=e^{\lambda x}\vec{y}$ є розв'язком ЛОСДР (6.20), якщо показник λ і вектор $\vec{y}$ задовольняють співвідношення (6.22).

Нагадаємо, що якщо має місце співвідношення (6.22), то вектор $\vec{y}$ є **власним вектором** матриці A, який відповідає **власному значенню** λ цієї матриці.

Співвідношення (6.22) становить собою лінійну однорідну алгебраїчну систему відносно компонент $y_1,\; y_2,\; \dots, y_n$ власного вектора $\vec{y}$. Але однорідна система має ненульовий розв'язок лише тоді, коли її визначник дорівнює нулю. Тому власні значення мають бути коренями рівняння

$$\det(A-\lambda\mathbb{I})=0, \tag{6.23}$$

яке називають **характеристичним**.

Наприклад, для $2\times 2-$ матриці

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

система (6.22) має вигляд

$$\begin{cases} (a-\lambda)y_1 \;+\; by_2 \;=\; 0, \\ cy_1+\;(d-\lambda)y_2=0, \end{cases} \tag{6.25}$$

а характеристичне рівняння є таким:

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Тому для ЛОСДР (6.20) із двох рівнянь характеристичне рівняння має вигляд (*поясніть чому*)

$$\lambda^2 - (\mathrm{Sp}A)\lambda + \det A = 0. \quad (6.26)$$

Отже, якщо матриця A має n лінійно незалежних $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ векторів, які відповідають власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (які не є обов'язково попарно відмінними) то ЛОСДР (6.20) має n лінійно незалежних розв'язків (приклад 6.1)

$$e^{\lambda_1 x}\vec{y}_1,\ e^{\lambda_2 x}\vec{y}_2,\ \dots, e^{\lambda_n x}\vec{y}_n,$$

тому, за теоремою 6.6 про структуру загального розв'язку ЛОСДР, загальний розв'язок ЛОСДР (6.20) дорівнює

$$\vec{y}_{\text{зо}}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}\vec{y}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\vec{y}_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n x}\vec{y}_n. \quad (6.27)$$

Зазначимо, що якщо власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матриці A є попарно відмінними, то відповідні власні вектори є лінійно незалежними (*поясніть чому*).

Приклад 6.3. Розв'язати задачу Коші

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}(x), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

Спочатку знаходимо загальний розв'язок системи. Характеристичне рівняння (формула (6.26))

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}A)\lambda + \det A = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

має нерівні корені $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$. Знайдемо відповідні власні вектори $\vec{y}_1, \quad \vec{y}_2$. Шукаємо $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$A\ \vec{y}_1 = \lambda_1\ \vec{y}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Маємо однорідну систему

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = -3x_1, \\ -3x_1 + 3x_2 = -3x_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 = 0, \end{cases}$$

у якій рівняння є пропорційними. Тому система зводиться до одного з рівнянь: $x_1 = 2x_2$.

Нехай $x_2 = 1$, тоді $x_1 = 2$, тобто $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Шукаємо $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$A\ \vec{y}_2 = \lambda_2 \vec{y}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Маємо однорідну систему

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 2x_1, \\ -3x_1 + 3x_2 = 2x_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x_1 + 2x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

маємо $x_2 = 3x_1$. Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = 3$, тобто $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тому загальний розв'язок системи (6.28) дорівнює

$$\vec{y}_{зо}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}\vec{y}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\vec{y}_2 = C_1 e^{-3x}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}. \qquad (6.29)$$

Далі шукаємо розв'язок задачі Коші. За виразом (6.29) і початковою умовою,

$$C_1 e^0 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + C_2 e^0 \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \vec{y}(0) = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}.$$

Одержуємо систему

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 = 5, \\ C_1 + 3C_2 = -1. \end{cases}$$

До першого рівняння додаємо друге, помножене на $-\ 2$, і одержимо

$$-5C_2 = 7 \quad \Rightarrow \; C_2 = -\frac{7}{5} \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = -1 - 3C_2 = -1 + \frac{21}{5} = \frac{16}{5}.$$

Відповідь: $\vec{y}(x) = \frac{16}{5} e^{-3x}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{7}{5} e^{2x}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Зауваження 6.3. Якщо частинний розв'язок $\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\vec{y}$ ЛОСДР (6.20) відповідає комплексному власному значенню λ матриці A, то дійсна і уявна частини цього розв'яку є лінійно незалежними розв'язками ЛОСДР (6.20). (Це твердження є аналогічним відповідним твердженням для ЛОДР (розд. 4).)

Приклад 6.4. Знайти загальний розв'язок у дійсній формі системи

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

має два комплексних корені $1 \pm 2i$.

Знайдемо власний вектор $\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1 + 2i$:

$$A\ \vec{y} = \lambda\ \vec{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (1 + 2i) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

Маємо однорідну систему

$$\begin{cases} 3x_1 \ + \ 2x_2 \ = \ (1 + 2i)x_1, \\ -4x_1 - \ x_2 = (1 + 2i)x_2, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} (2 - 2i)x_1 \ + \ 2x_2 \ = \ 0, \\ -4x_1 - \ (2 + 2i)x_2 = 0. \end{cases}$$

Аналогічно попередньому прикладу знаходимо $x_1 = 1$, $x_2 = -1 + i$. Тому комплексному власному значенню $\lambda = 1 + 2i$ відповідає комплексний частинний розв'язок

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\vec{y} = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i \end{pmatrix} = e^x(\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i \end{pmatrix}.$$

Його реальна

$$\vec{y}_1(x) = \operatorname{Re}\vec{y}(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\cos 2x - \sin 2x \end{pmatrix}$$

і уявна частини

$$\vec{y}_2(x) = \operatorname{Im}\vec{y}(x) = e^x \begin{pmatrix} \sin 2\,x \\ \cos 2\,x - \sin 2\,x \end{pmatrix}$$

є лінійно незалежними розв'язками. Тому загальний розв'язок дорівнює

$$\vec{y}_{зо}(x) = C_1\vec{y}_1(x) + C_2\vec{y}_2(x).$$

Відповідь:

$$\vec{y}_{зо}(x) = e^x \begin{pmatrix} C_1 \cos 2\,x + C_2 \sin 2\,x \\ -C_1(\cos 2\,x + \sin 2\,x) + C_2(\cos 2\,x - \sin 2\,x) \end{pmatrix}.$$

Випадок, коли в ЛОСДР (6.7) $n \times n$ – матриця A має менш ніж n лінійно незалежних власних векторів, розглянемо спочатку для $n = 2$.

Отже, нехай ЛОСДР (6.7) складається з двох рівнянь, тобто A є 2×2-матрицею. У цьому випадку характеристичне рівняння є квадратним. Нехай його корені співпадають і дорівнюють λ (якщо вони відмінні, то A має два лінійно незалежні вектори), A має лише один власний вектор $\vec{e}_1$, який відповідає власному значенню λ, тобто

$$A\,\vec{e}_1 = \lambda\,\vec{e}_1.$$

Тоді існує такий вектор $\vec{e}_2$, що

$$A\vec{e}_2 = \lambda\vec{e}_2 + \vec{e}_1.$$

Цей вектор $\vec{e}_2$ називають **приєднаним вектором**.

Векторам $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ відповідає пара лінійно незалежних розв’язків системи (6.7)

$$\vec{y}_1(x) = e^{\lambda x}\vec{e}_1, \qquad \vec{y}_2(x) = e^{\lambda x}(\vec{e}_2 + x\vec{e}_1),$$

тому загальний розв’язок системи дорівнює

$$\vec{y}_{зо}(x) = C_1\vec{y}_1(x) + C_2\vec{y}_2(x) = e^{\lambda x}\big(C_1\vec{e}_1 + C_2(\vec{e}_2 + x\vec{e}_1)\big). \quad (6.30)$$

Приклад 6.5. Знайти загальний розв’язок системи

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}A)\lambda + \det A =$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2 = 0$$

співпадають і дорівнюють $\lambda = 5$.

Знайдемо власний вектор $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, який відповідає власному значенню $\lambda = 5$:

$$A\,\vec{e}_1 = \lambda\,\vec{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Маємо однорідну систему

$$\begin{cases} 8x_1 \ - \ 3x_2 \ = \ 5x_1, \\ 3x_1 + \ 2x_2 = 5x_2, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 - \ 3x_2 \ = \ 0, \\ 3x_1 - \ 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідки можна взяти $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо приєднаний вектор $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$A\ \vec{e}_2 = \lambda\ \vec{e}_2 + \ \vec{e}_1 \quad \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Маємо систему

$$\begin{cases} 3x_1 - \ 3x_2 \ = \ 1, \\ 3x_1 - \ 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Звідки можна взяти $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Тому, за виразом (6.30), загальний розв’язок

$$\vec{y}_{зо}(x) = e^{\lambda x}\left(C_1\vec{e}_1 + \ C_2(\vec{e}_2 + x\vec{e}_1)\right) =$$

$$= e^{5x}\left(C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = e^{5x}\begin{pmatrix} C_1 + C_2x \\ C_1 + C_2\left(x - \dfrac{1}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Нарешті розглянемо **схему інтегрування ЛОСДР (6.7) у загальному випадку**. Нам знадобиться такий відомий факт [8, дод. I].

Для будь-якої квадратної матриці A n–го порядку (зокрема матриці ЛОСДР (6.7)) існує така невироджена матриця T, що

$$A = TJ(A)T^{-1}. \tag{6.31}$$

Тут $J(A)$ є блочно-діагональною матрицею

$$J(A) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

де $m_k \times m_k$ – блоки.

$$J_{m_k}(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}. \tag{6.33}$$

Тут $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$ – це власні значення матриці A (які не є обов’язково попарно відмінними), $\sum_{k=1}^{s} m_k = n.$

Матрицю $J(A)$ називають **жордановою нормальною формою матриці $\boldsymbol{A}$**, а блоки $J_{m_k}(\lambda_k)$ – **жордановими блоками**. Кількість жорданових блоків, які відповідають власному значенню μ матриці A, дорівнює $n - rank(A - \mu I)$.

Коли матриця A має n лінійно незалежних власних векторів, то $J(A)$ перетворюється в діагональну матрицю

$$J(A) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s),$$

а стовпчики матриці T є відповідними власними векторами.

Тепер повернемося до системи (6.7) і для її розв’язання зробимо в ній заміну

$$\vec{y}(x) = T\vec{z}(x). \qquad (6.34)$$

Маємо

$$T\vec{z}\,' = AT\vec{z} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{z}\,' = T^{-1}AT\vec{z}.$$

За виразами (6.31), (6.32) одержали систему

$$\vec{z}\,'(x) = J(A)\vec{z}(x), \qquad (6.35)$$

яка розпадається на m_s систем

$$\vec{z}\,'_{m_k}(x) = J(\lambda_k)\vec{z}_{m_k}(x), \qquad (6.36)$$

де $\begin{pmatrix} \vec{z}_{m_1} \\ \vec{z}_{m_2} \\ \vdots \\ \vec{z}_{m_s} \end{pmatrix} = \vec{z}$ — розв’язок системи (6.35).

Для компонент векторів $\vec{z}_{m_k}$ маємо внаслідок виразу (6.34) систему вигляду

$$\begin{cases} z_1' = \mu z_1 + z_2, \\ z_2' = \mu z_2 + z_3, \\ \qquad \cdots \\ z_{l-1}' = \mu z_{l-1} + z_l, \\ z_l' = \mu z_l, \end{cases}$$

яку розв'язуємо «знизу догори». Маємо з останнього рівняння

$$z_l = C_l\ e^{\mu x}.$$

Тому передостаннє рівняння набуває вигляду

$$z'_{l-1} - \mu z_{l-1} = C_l e^{\mu x},$$

звідки одержуємо (п. 4.4.3)

$$z_{l-1} = C_{l-1} e^{\mu x} + C_l x e^{\mu x}.$$

Аналогічно

$$z_{l-2} = C_{l-2}\ e^{\mu x} + C_{l-1} x e^{\mu x} + C_l\ \frac{x^2}{2} e^{\mu x},$$

$$\cdots$$

$$z_1 = \left(C_1 + C_2 \frac{x}{1!} + C_3 \frac{x^2}{2!} + \ \cdots\ + C_l \frac{x^{l-1}}{(l-1)!}\right) e^{\mu x}.$$

Розв'язавши в такий спосіб кожну з систем (6.36), одержимо загальний розв'язок $\vec{z}_{зо}(x) = \vec{z}(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ системи (6.35). Тому, за виразом (6.34), загальний розв'язок системи (6.7) дорівнює

$$\vec{y}_{зо}(x) = T\vec{z}(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Багато прикладів різних реалізацій наведеної схеми інтегрування ЛОСДР (6.7) наведено в роботах [3, 5-9].

6.3.2. Матричний метод

Для ЛОДР $y' = ay$ загальний розв'язок $y_{зо}(x) = C\ e^{ax}$.

Ця формула в певному сенсі зберігається і для ЛОСДР (6.7). Щоб це показати, потрібно визначити функцію від матриці. Для простоти ми це зробимо для матриць другого порядку.

Нехай 2×2 – матриця $A -$ має **два лінійно незалежних власних вектори** $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, які відповідають власним значенням λ_1, λ_2, тобто

$$A\ \vec{e}_1 = \lambda_1\ \vec{e}_1, \quad A\ \vec{e}_2 = \lambda_2\ \vec{e}_2. \tag{6.37}$$

Якщо позначити T матрицю, стовпцями якої є $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, то рівності (6.37) можна записати у вигляді

$$AT = \ T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

звідки

$$A = \ T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{6.38}$$

Визначення 6.1. Нехай функція $f(\lambda)$ визначена в точках $\lambda = \lambda_1$, а $\lambda = \lambda_2$. Тоді **функцію $\boldsymbol{f(A)}$ від матриці $\boldsymbol{A}$** визначено формулою

$$f(A) = \ T\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{6.39}$$

Сформулюємо **властивості функції від матриці**.

1. Якщо $f(\lambda)$ є многочленом, тобто $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} c_k \lambda^k$, то $f(A) = \sum_{k=0}^{s} c_k A^k$.

Зокрема,

$$f(\lambda) = \lambda \qquad \Rightarrow \qquad f(A) = A;$$

$$f(\lambda) = C = const \qquad \Rightarrow \qquad f(A) = CI.$$

2. Якщо $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$, то

$$f(A) = g(A)h(A) = h(A)g(A),$$

звідки

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad f(A) = A^{-1}.$$

Зазначимо, що якщо $AB \neq BA$, то $g(A)h(B) \neq h(B)g(A)$.

3. Якщо у виразі (6.38) $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, то $f(A) = f(\mu)I$.

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Оскільки

$$T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k T^{-1} = \left(T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1} \right)^k,$$

то, за виразом (6.39),

$$f(A) = T\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{s} c_k {\lambda_1}^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{s} c_k {\lambda_2}^k \end{pmatrix} T^{-1} = \sum_{k=0}^{s} c_k T \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{s} c_k \left(T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1} \right)^k = \sum_{k=0}^{s} c_k A^k.$$

За $\lambda_1 \neq \lambda_2$ функцію $f(A)$ можна знайти, не обчислюючи власні вектори матриці A, як показує наступна теорема.

Теорема 6.9. Нехай $P(\lambda)$ є таким інтерполяційним многочленом першого степеня, який співпадає з $f(\lambda)$ за $\lambda = \lambda_1$, та $\lambda = \lambda_2$, тобто

$$P(\lambda_1) = f(\lambda_1), \;\; P(\lambda_2) = f(\lambda_2),$$

і, отже, цей многочлен дорівнює

$$P(\lambda) = f(\lambda_1)\frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2)\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Тоді

$$f(A) = P(A) = f(\lambda_1)\frac{A - \lambda_2 \mathbb{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2)\frac{A - \lambda_1 \mathbb{I}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{6.40}$$

Доведення

$$f(\lambda_1)\frac{A - \lambda_2 \mathbb{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} = f(\lambda_1)\frac{T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1} - \lambda_2 T T^{-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} =$$

$$= f(\lambda_1)\frac{T\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1}}{\lambda_1-\lambda_2} = f(\lambda_1)T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1} =$$

$$= T\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1}.$$

Аналогічно

$$f(\lambda_2)\frac{A-\lambda_1\mathbb{I}}{\lambda_2-\lambda_1} = T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}T^{-1}.$$

Тому

$$P(A) = T\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1} + T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}T^{-1} =$$

$$= T\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}T^{-1} = f(A).$$

У випадку, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ і власному значенню μ відповідає **лише один власний вектор**, то, за формулами (6.31)-(6.33), існує така невироджена матриця T, що

$$A = T\begin{pmatrix}\mu & 1\\ 0 & \mu\end{pmatrix}T^{-1}. \qquad (6.41)$$

У цьому випадку замість формули (6.40) $f(A)$ визначають за формулою

$$f(A) = f(\mu)\mathbb{I} + f'(\mu)(A - \mu\mathbb{I}), \qquad (6.42)$$

яку одержують граничним переходом за $\lambda_2 \to \lambda_1 = \mu$ з формули (6.40). Дійсно,

$$f(A) = f(\lambda_1)\frac{A - \lambda_2\mathbb{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2)\frac{A - \lambda_1\mathbb{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}A +$$

$$+f(\lambda_1)\mathbb{I} - \lambda_1\frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathbb{I} \underset{\lambda_2 \to \lambda_1 = \mu}{\to} f(\mu)\mathbb{I} + f'(\mu)A - \mu f'(\mu)\mathbb{I}.$$

Матричну експоненту, за виразами (6.38)-(6.42), визначають у випадку виразу (6.38) як

$$e^{Ax} = T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}T^{-1} \underset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{=} e^{\lambda_1 x}\frac{A - \lambda_2\mathbb{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} + e^{\lambda_2 x}\frac{A - \lambda_1\mathbb{I}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad (6.43, \text{а})$$

а в випадку виразу (6.41) як

$$e^{Ax} = e^{\mu x}\mathbb{I} + xe^{\mu x}(A - \mu\mathbb{I}). \qquad (6.43, \text{б})$$

При написанні формул (6.43, а), (6.43, б) урахували, що при множенні матриці на число її власні значення множаться на це число, а відповідні власні вектори не змінюються (*пояснити чому*).

Сформулюємо **властивості матричної експоненти**.

1. $e^{Ax}\, e^{At} = e^{A(x+t)}$.
2. $e^{Ax}\, e^{Bx} = e^{(A+B)x}$, якщо $AB = BA$.

Якщо ж $AB \neq BA$, то $e^{Ax}\, e^{Bx} \neq e^{(A+B)x}$.

3. $\det e^{Ax} = e^{x\,\mathrm{Sp}A}$.
4. $(e^{Ax})' = Ae^{Ax} = e^{Ax}A$.

Отже, стовпчики матриці e^{Ax} є розв'язками ЛОСДР (6.7). Тому оскільки, за властивістю 3, $\det e^{Ax} \neq 0$, то e^{Ax} є фундаментальною матрицею ЛОСДР (6.7) і такою, що дорівнює $\mathbb{I}$ за $x = 0$. Тому, за теоремою 6.7, загальний розв'язок ЛОСДР (6.7) дорівнює

$$\vec{y}_{зо}(x) = e^{Ax}\ \vec{c}. \tag{6.44}$$

Доведемо, наприклад, властивість 1 у випадку виразу (6.41).

Маємо

$$e^{Ax}\ e^{At} = \left(e^{\mu x}\mathbb{I} + xe^{\mu x}(A - \mu\mathbb{I})\right)\left(e^{\mu t}\mathbb{I} + te^{\mu t}(A - \mu\mathbb{I})\right) =$$

$$= e^{\mu(x+t)}\mathbb{I} + (x+t)e^{\mu(x+t)}(A - \mu\mathbb{I}) + xt\ e^{\mu(x+t)}(A - \mu\mathbb{I})^2,$$

властивість 1 доведено, оскільки

$$(A - \mu\mathbb{I})^2 = \left(T\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}T^{-1} - \mu TT^{-1}\right)^2 =$$

$$= \left(T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}\right)^2 = T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 T^{-1} = 0.$$

Приклад 6.6. Відомо, що для марківського ланцюга з неперервним часом і двома можливими станами **матриця переходу** $\mathbb{P}(t)$ за час t є розв'язком задачі Коші.

$$\mathbb{P}'(t) = \Lambda\mathbb{P}(t), \quad \mathbb{P}(0) = \mathbb{I}, \tag{6.45}$$

де матриця Λ (яку називають **генератором марківського ланцюга**) має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0, \ \ \beta > 0. \qquad (6.46)$$

Знайдемо $\mathbb{P}(t)$. З властивості 4 матричної експоненти випливає, що $\mathbb{P}(t) \ = \ e^{\Lambda t}$.

Обчислимо $e^{\Lambda t}$ за другою формулою (6.43, а). Характеристичне рівняння для матриці Λ (6.46)

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}\Lambda)\lambda \ + \det \Lambda = \lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda = 0$$

має нерівні корені $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -(\alpha + \beta)$. Тому, за другою формулою (6.43, а), одержуємо

$$e^{\Lambda t} = e^{0t}\,\frac{\Lambda + (\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} + e^{-(\alpha+\beta)\,t}\,\frac{\Lambda}{-(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{e^{-(\alpha+\beta)\,t}}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\mathbb{P}(t) = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)\,t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha+\beta)\,t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha+\beta)\,t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)\,t} \end{pmatrix}$.

Приклад 6.7. Знайти за формулою (6.44) загальний розв’язок системи

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x). \qquad (6.47)$$

Тут $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - (\mathrm{SpA})\lambda + \det A = \lambda^2 + \lambda - 20 = 0$$

має нерівні корені $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -5$. Тому, за другою формулою (6.43, а), одержуємо

$$e^{Ax} = e^{4x}\frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{4-(-5)} + e^{-5x}\frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{-5-4} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2e^{4x} + 7e^{-5x} & 2e^{4x} - 2e^{-5x} \\ 7e^{4x} - 7e^{-5x} & 7e^{4x} + 2e^{-5x} \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи (6.47)

$$\vec{y}_{зо}(x) = e^{Ax}\,\vec{c} = e^{Ax}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} e^{4x}(2c_1 + 2c_2) & e^{-5x}(7c_1 - 2c_2) \\ e^{4x}(7c_1 + 7c_2) & e^{-5x}(-7c_1 + 2c_2) \end{pmatrix}.$$

Перепозначивши $\frac{1}{9}(c_1 + c_2)$ та $\frac{1}{9}(7c_1 - 2c_2)$ через C_1 та C_2, одержимо

$$\vec{y}_{зо}(x) = C_1 e^{4x}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6.8. Знайти за формулою (6.44) загальний розв'язок системи

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\vec{y}(x). \qquad (6.48)$$

Тут $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

має два рівних корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, але лише один власний вектор (бо в іншому разі матриця A була б діагональною). Тому, за формулою (6.43, б),

$$e^{Ax} = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + xe^{2x}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 - x & x \\ -x & 1 + x \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи (6.48) дорівнює

$$\vec{y}_{зо}(x) = e^{Ax}\ \vec{c} = e^{Ax}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{2x}\begin{pmatrix} c_1 + (c_2 - c_1)x \\ c_2 + (c_2 - c_1)x \end{pmatrix}.$$

Перепозначивши c_1 та $c_2 - c_1$ через C_1 та C_2 відповідно, одержимо

$$\vec{y}_{зо}(x) = e^{2x}\left(C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = e^{2x}\begin{pmatrix} C_1 + C_2 x \\ C_1 + C_2(1 + x) \end{pmatrix}.$$

Тепер розглянемо ЛНСДР зі сталими коефіцієнтами

$$\vec{y}\,'(x) = A\,\vec{y}(x) + \vec{f}(x). \qquad (6.49)$$

Для цієї системи формула (6.18) для загального розв'язку і формула (6.19) для розв'язку задачі Коші спрощується.

Дійсно, оскільки, за теоремою 6.7 і властивістю 4 матричної експоненти, фундаментальна матриця ЛСОДР (6.7) $Y(x) = e^{Ax}\ C$, то

$$Y(x)Y^{-1}(t) = e^{Ax}CC^{-1}e^{-At} = e^{A(x-t)}.$$

Тому загальний розв'язок системи (6.49) дорівнює

$$\vec{y}_{зо}(x) = e^{Ax}\,\vec{c} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)}\,\vec{f}(t)dt, \tag{6.50}$$

а розв'язок задачі Коші

$$\vec{y}\,'(x) = A\,\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

дорівнює

$$\vec{y}(x) = e^{A(x-x_0)}\,\vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)}\,\vec{f}(t)dt. \tag{6.51}$$

Приклад 6.9. Розв'язати за допомогою формули (6.51) задачу Коші

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^{2x}, \\ y_2' = -y_1 + 3y_2 + xe^{2x}, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \qquad y_2(0) = 1. \tag{6.52}$$

Запишемо систему (6.52) у матричній формі (6.49), позначивши

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix}, \ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки e^{Ax} знайдено в прикладі 6.8 як

$$e^{Ax} = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix},$$

то, за формулою (6.51), розв'язок задачі Коші (6.52) дорівнює

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \vec{y}(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_0^x e^{2(x-t)}\begin{pmatrix} 1-(x-t) & x-t \\ -(x-t) & 1+(x-t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} dt =$$

$$= e^{2x}\begin{pmatrix} x \\ 1+x \end{pmatrix} + e^{2x}\int\limits_0^x \begin{pmatrix} 1-x+t+xt-t^2 \\ -x+t+t+xt-t^2 \end{pmatrix} dt =$$

$$= e^{2x}\begin{pmatrix} x+x-x^2+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^3}{3} \\ 1+x-x^2+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^3}{3} \end{pmatrix} = e^{2x}\begin{pmatrix} 2x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6} \\ 1+x+\dfrac{x^3}{6} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $y_1(x) = e^{2x}\left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)$, $y_2(x) = e^{2x}\left(1 + x + \frac{x^3}{6}\right)$.

6.3.3. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі спеціальними правими частинами

Нехай права частина $\vec{f}(x)$ системи ЛНСДР (6.49) є **спеціальною**, тобто має вигляд

$$\vec{f}(x) = e^{\alpha x}\left(\vec{P}_k(x)\cos\beta x + \vec{Q}_l(x)\sin\beta x\right), \qquad (6.53)$$

де $\vec{P}_k(x)$, $\vec{Q}_l(x)$ – многочлени степенів k та l з векторними коефіцієнтами.

Тоді аналогічно ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною частинний розв'язок систем (6.49), (6.53) можна шукати у вигляді

$$\vec{y}_{\text{чн}}(x) \;=\; e^{\alpha x}\left(\vec{\tilde{P}}_{m+s}(x)\cos\beta\, x \;+\; \vec{\tilde{Q}}_{m+s}(x)\sin\beta\, x\right), \qquad (6.54)$$

де $\vec{\tilde{P}}_{m+s}(x)$ і $\vec{\tilde{Q}}_{m+s}(x)$ – многочлени степенів $m+s$ з векторними коефіцієнтами;

$m = max\{k, l\}$, $s = 0$, якщо $\alpha + i\beta$ не є власним значенням матриці A; якщо ж $\alpha + i\beta$ є власним значенням матриці A, то s дорівнює максимальному розміру жорданового блока в жордановій нормальній формі матриці A, який відповідає цьому власному значенню.

Зауваження 6.4 Для системи (6.49) із двох рівнянь s може дорівнювати, крім нуля, одиниці (коли лише одне власне значення матриці A дорівнює $\alpha + i\beta$ або $A = (\alpha + i\beta)\mathbb{I}$) або двом (коли обидва власні значення матриці A дорівнюють $\alpha + i\beta$, але $A \neq (\alpha + i\beta)\mathbb{I}$).

Приклад 6.10. Знайти частинний розв'язок ЛНСДР

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 + e^{4x}, \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 + 6e^{4x}. \end{cases} \qquad (6.55)$$

Запишемо систему (6.55) у матричній формі (6.49), позначивши

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \;\; A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}. \qquad (6.56)$$

Корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0$$

співпадають і дорівнюють $\lambda = 4$, але $A \neq 4\mathbb{I}$.

Права частина $\vec{f}(x)$ має спеціальний вигляд (6.53). Тому, за виразом (6.54), враховуючи зауваження 6.4, частинний розв'язок системи (6.55), (6.49), (6.56) шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{y}_{\text{чн}}(x) \ = e^{4x}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right). \qquad (6.57)$$

Для знаходження векторів $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ підставляємо вираз (6.57) у системи (6.49), (6.56). Маємо

$$4e^{4x}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) + e^{4x}\left(2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= e^{4x}\left(\begin{pmatrix} 3a_1 + a_2 \\ -a_1 + 5a_2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 3b_1 + b_2 \\ -b_1 + 5b_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 \\ -c_1 + 5c_2 \end{pmatrix}\right) + e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Скоротивши обидві частини на e^{4x} і прирівнюючи покомпонентно вектори за однакових степенів x, одержимо систему

$$\begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 - b_2 + 2a_1 = 0, \\ c_1 - c_2 + b_1 = 1, \\ c_1 - c_2 + b_2 = 6 \end{cases} \qquad (6.58)$$

лише чотирьох рівнянь для шести невідомих (оскільки при прирівнюванні компонент за однакових степенів x одержуємо шість рівнянь, два з яких співпадають із першим рівнянням системи (6.59), а ще два – з другим).

З двох останніх рівнянь одержуємо, що $b_1 - b_2 = -5$, тому $a_1 = a_2 = \frac{5}{2}$. Отже, система (6.58) зведена до системи з двох рівнянь для чотирьох невідомих

$$\begin{cases} c_1 - c_2 + b_1 = 1, \\ c_1 - c_2 + b_2 = 6. \end{cases}$$

Тому, вибравши, наприклад, $b_1 = c_1 = 0$, одержимо $b_2 = 5$, $c_2 = -1$. Отже,

$$\vec{y}_{\text{чн}}(x) = e^{4x}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Відповідь: $y_1(x) = \frac{5}{2}x^2 e^{4x}$, $y_2(x) = \left(\frac{5}{2}x^2 + 5x - 1\right) e^{4x}$.

Зауваження 6.5. Приклад 6.10 показує, що, на відміну від ЛОДР зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, для системи вигляду (6.49), (6.53) частинний розв'язок методом невизначених коефіцієнтів знаходиться неоднозначно.

6.3.4. Метод зведення до одного рівняння

Цим методом можна розв'язувати нескладні системи. Пояснимо його на прикладах.

Приклад 6.11. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2. \end{cases} \tag{6.59}$$

Маємо $y_1(x) = C_1 e^{3x}$. Тому

$$y_2' = 2C_1 e^{3x} + 3y_2.$$

Для $y_2(x)$ одержали ЛНДР першого порядку зі спеціальною правою частиною

$$y_2' - 3y_2 = 2C_1 e^{3x}. \tag{6.60}$$

Характеристичне рівняння $\lambda - 3 = 0$ має корінь $\lambda = 3$.

Для ДР (6.60) загальний розв'язок відповідного однорідного ДР дорівнює

$$y_{\text{зо}}(x) = C_2 e^{3x},$$

тому частинний розв'язок ДР (6.60) шукаємо у вигляді (п. 4.4.3)

$$y_{\text{чн}}(x) = Axe^{3x}. \tag{6.61}$$

Підставляємо вираз (6.61) у ДР (6.60) і одержуємо

$$Ae^{3x} + 3Axe^{3x} - 3Axe^{3x} = 2C_1 e^{3x},$$

звідки $A = 2C_1$. Тому $y_2(x) = C_2 e^{3x} + 2C_1 x e^{3x}$.

Відповідь: загальний розв'язок системи (6.59) дорівнює
$y_1(x) = C_1 e^{3x}$, $y_2(x) = e^{3x}(C_2 + 2C_1 x)$.

Приклад 6.12. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y_1' &= 5y_1 + 2y_2, \\ y_2' &= -5y_1 - 6y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = -3. \qquad (6.62)$$

Щоб звести систему до одного ДР, диференціюємо перше рівняння системи (6.62):

$$y_1'' = 5y_1' + 2y_2'.$$

В одержаний вираз підставляємо y_2' з другого рівняння системи (6.62):

$$y_1'' = 5y_1' + 2(-5y_1 - 6y_2) = 5y_1' - 10y_1 - 12y_2. \qquad (6.63)$$

Далі, використовуючи перше рівняння системи (6.62), виражаємо y_2 через y_1 і підставляємо у вираз (6.63):

$$y_1'' = 5y_1' - 10y_1 - 12\frac{1}{2}(y_1' - 5y_1) = -y_1' + 20y_1.$$

Отже, y_1 задовольняє ЛОДР

$$y_1'' + y_1' - 20y_1 = 0. \qquad (6.64)$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda - 20 = 0$$

має корені $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 4$.

Тому загальний розв'язок ДР (6.64) дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{4x}.$$

З першого рівняння системи (6.62) знаходимо

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(y_1' \ - 5y_1\right) = \frac{1}{2}(-5C_1e^{-5x} + 4C_2e^{4x} - 5C_1e^{-5x} - 5C_2e^{4x}) =$$

$$= -5C_1e^{-5x} - \tfrac{1}{2}C_2e^{4x}.$$

Отже, загальний розв’язок системи (6.62) дорівнює

$$y_1(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{4x},$$

$$y_2(x) = -5C_1e^{-5x} - \frac{1}{2}C_2e^{4x}. \qquad (6.65)$$

Далі шукаємо розв’язок задачі Коші. За виразом (6.65) і початковими умовами, маємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_1(0) = 2, \\ -5C_1 - \dfrac{1}{2}C_2 = y_2(0) = -3. \end{cases}$$

Одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -5C_1 - \dfrac{1}{2}C_2 = -3, \end{cases}$$

розв’язавши яку, маємо $C_1 = \frac{4}{9}$, $C_2 = \frac{14}{9}$.

Відповідь: $y_1(x) = \frac{4}{9}e^{-5x} + \frac{14}{9}e^{4x}$, $y_2(x) = -\frac{20}{9}e^{-5x} - \frac{7}{9}C_2e^{4x}$.

Приклад 6.13. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} y_1{}' = 3y_1 + 2y_2 + 4e^{2x}, \\ y_2' = -2y_1 + 8y_2 - 2e^{-5x}. \end{cases} \qquad (6.66)$$

Щоб звести систему до одного ДР, диференціюємо перше рівняння системи (6.66):

$$y_1'' = 3y_1{}' + 2y_2{}' + 8e^{2x}.$$

В одержаний вираз підставляємо $y_2{}'$ з другого рівняння системи (6.66):

$$y_1'' = 3y_1{}' + 2(-2y_1 + 8y_2 - 2e^{-5x}) + 8e^{2x} =$$
$$= 3y_1{}' - 4y_1 + 16y_2 - 4e^{-5x} + 8e^{2x}. \qquad (6.67)$$

Далі, використовуючи перше рівняння системи (6.66), виражаємо y_2 через y_1 і підставляємо у вираз (6.67):

$$y_1'' = 3y_1{}' - 4y_1 + 16 \cdot \frac{1}{2}(y_1{}' - 3y_1 - 4e^{2x}) - 4e^{-5x} + 8e^{2x} =$$

$$= 11y_1{}' - 28y_1 - 4e^{-5x} - 24e^{2x}.$$

Отже, y_1 задовольняє ЛНДР

$$y_1'' - 11y_1{}' + 28y_1 = -4e^{-5x} - 24e^{2x}. \qquad (6.68)$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \ 11\lambda \ + \ 28 \ = 0$$

має корені $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 7$. Тому для ДР (6.68) загальний розв'язок відповідного однорідного ДР дорівнює

$$y_{зо}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{7x}.$$

Частинний розв'язок ДР (6.68) дорівнює, за принципом суперпозиції (п. 4.1), сумі частинних розв'язків двох ЛНДР

$$y_1'' \ - \ 11y_1{}' \ + \ 28y_1 \ = \ -4e^{-5x},$$

$$y_1'' \ - \ 11y_1{}' \ + \ 28y_1 \ = \ -24e^{2x}$$

зі спеціальними правими частинами.

Для першого з цих рівнянь (п. 4.4.3)

$$y_{чн}(x) = -\frac{1}{27}e^{-5x},$$

а для другого

$$y_{чн}(x) = -\frac{12}{5}e^{2x}.$$

Отже, загальний розв'язок ДР (6.68) дорівнює

$$y_1(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{7x} - \frac{1}{27}e^{-5x} - \frac{12}{5}e^{2x}.$$

З першого рівняння системи (6.66) знаходимо

$$y_2(x) = \frac{1}{2}\left(y_1' - 3y_1 - 4e^{2x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(4C_1e^{4x} + 7C_2e^{7x} + \frac{5}{27}e^{-5x} - \frac{24}{5}e^{2x} -$$

$$-3C_1e^{4x} - 3C_2e^{7x} + \frac{1}{9}e^{-5x} + \frac{36}{5}e^{2x} - 4e^{2x}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}C_1e^{4x} + 2C_2e^{7x} + \frac{4}{27}e^{-5x} - \frac{4}{5}e^{2x}.$$

Отже, загальний розв’язок системи (6.66) дорівнює

$$y_1(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{7x} - \frac{1}{27}e^{-5x} - \frac{12}{5}e^{2x},$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}C_1e^{4x} + 2C_2e^{7x} + \frac{4}{27}e^{-5x} - \frac{4}{5}e^{2x}.$$

Запитання до розділу 6

1. Який вигляд має система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку? Як записати її у векторній формі?
2. Яку систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку називають однорідною?
3. Яку систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку називають неоднорідною?
4. Як лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зводять до системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку?

5. Сформулювати теорему існування і єдиності розв'язку задачі Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Що означає, що вона має глобальний характер?

6. Які вектор-функції називають лінійно залежними?

7. Які вектор-функції називають лінійно незалежними?

8. Навести приклади систем лінійно незалежних функцій, за допомогою яких конструюють загальні розв'язки лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

9. Який визначник називають визначником Вронського (вронскіаном) системи вектор-функцій?

10. Як за допомогою визначника Вронського перевіряють лінійну незалежність системи вектор-функцій?

11. Коли з того, що визначник Вронського системи вектор-функцій дорівнює нулю в деякий точці, випливає, що ці вектор-функції лінійно залежні?

12. Навести формулу Ліувілля.

13. Що називають фундаментальною системою розв'язків лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку?

14. Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку?

15. Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку?

16. Що називають фундаментальною матрицею лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку? Які вона має властивості?

17. У чому полягає метод варіації довільної сталої розв'язання лінійної системи диференціальних рівнянь першого порядку?

18. У чому полягає метод Ейлера знаходження розв'язків лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами?

19. Яке рівняння називають характеристичним?

20. Який вигляд має загальний розв'язок лінійної однорідної системи двох диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами?

21. У чому полягає схема інтегрування системи лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку в загальному випадку?

22. Як визначають функцію від матриці?

23. Сформулювати властивості функції від матриці.

24. Як визначають матричну експоненту?

25. Сформулювати властивості матричної експоненти. Як вона пов'язана з фундаментальною матрицею?

26. Як за допомогою матричної експоненти знаходять для лінійної системи диференціальних рівнянь першого порядку загальний розв'язок і розв'язок задачі Коші?

27. Який вигляд має спеціальна права частина неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами?

28. У якому вигляді потрібно шукати частинний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною?

Завдання до розділу 6

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок:

$$1)\ \begin{cases} y_1' = -2y_1 - 3y_2, \\ y_2' = -y_1; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2; \end{cases}$$

3) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_2 - 4y_1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2, \\ y_2' = -4y_1 - y_2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y_1' = y_2 - 7y_1, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 4y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 + 4e^{5x}, \\ y_2' = y_1 + 2y_2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = 25y_1 - y_2 + 6\cos 3x - 33\sin 3x\,; \end{cases}$

9) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2, \\ y_2' = -6y_2 - 4y_1 + (6t+1)e^{3x}. \end{cases}$

Завдання 2. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 8y_2, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2, \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 6,\ \ y_2(0) = -2;$

2) $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2, \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 1,\quad y_2(0) = 1;$

3) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 + y_2 - 2e^{x}, \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 0,\ \ y_2(0) = 1;$

4) $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2 + 2x, \\ y_2' = y_1 + y_2 + x, \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 14,\ \ y_2(0) = -7.$

Завдання 3. Знайти e^{Ax}:

1) $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix};$

2) $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$

3) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Завдання 4*. Довести, що не існує такої 2×2 матриці, що $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Завдання 5*. Знайти всі такі 2×2 матриці A, що $A^2 = \mathbb{I}$.

Завдання 6*. Нехай обидва власні значення 2×2 матриці A є додатними. Знайти таку матрицю B, що $B^2 = A$, і обидва власні значення матриці B є додатними.

Завдання 7*. Знайти $e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x}$.

Завдання 8*. Знайти e^{Ax} для 2×2 матриці A, у якої $\operatorname{Sp} A = 0$, $\det A = \omega^2$.

Відповіді до завдань розділу 6

Завдання 1:

1) $\begin{cases} y_1 = 3C_1 e^{-3x} - C_2 e^x \\ y_2 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \end{cases}$;

2) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{5x} + C_2 e^x \\ y_2 = 3C_1 e^{5x} - C_2 e^x \end{cases}$;

3) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \\ y_2 = -2C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{-x} \end{cases}$;

4) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \\ y_2 = -2C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{-x} \end{cases}$;

5) $\begin{cases} y_1 = e^{-6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ y_2 = e^{-6x}((C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x \end{cases}$;

6) $\begin{cases} y_1 = -2e^x(C_1 \sin 2x - C_2 \cos 2x) \\ y_2 = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \end{cases}$;

7) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{4x} + C_2 e^x + e^{5x} \\ y_2 = 2C_1 e^{4x} - C_2 e^x + 3e^{5x} \end{cases}$;

8) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{4x} + \sin 3x \\ y_2 = -3C_1 e^{-6x} + 5C_2 e^{4x} + 3 \cos 3x + \sin 3x \end{cases}$;

9) $\begin{cases} y_1 = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + (x-1)e^{3x} \\ y_2 = -6C_1e^{-3x} - C_2e^{2x} + e^{3x} \end{cases}$.

Завдання 2:

1) $\begin{cases} y_1 = 4e^{x} + 2e^{-x} \\ y_2 = -e^{x} - e^{-x} \end{cases}$;

2) $\begin{cases} y_1 = e^{-2x}(1-2x) \\ y_2 = e^{-2x}(1+2x) \end{cases}$;

3) $\begin{cases} y_1 = e^{2x} - e^{x} \\ y_2 = -2e^{2x} + 3e^{x} \end{cases}$;

4) $\begin{cases} y_1 = -8xe^{-x} - 6x + 14 \\ y_2 = e^{-x}(2+4x) + 5x - 9 \end{cases}$.

Завдання 3:

1) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5e^{t} - 2e^{-2t} & 5(e^{t} - e^{-2t}) \\ -2(e^{t} - e^{-2t}) & -2e^{t} + 5e^{-2t} \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} e^{2t} - te^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}$.

Завдання 5*:

$\pm\mathbb{I}$; $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, де $x^2 + zy = 1$.

Завдання 6*:

$B = \frac{1}{\sqrt{Sp\,A + 2\Delta}}(A + \Delta\mathbb{I}\,)$, де $\Delta = \sqrt{\det A}$.

Завдання 7*: $e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 8*: $\cos\omega x\ \mathbb{I} + \frac{\sin\omega x}{\omega}A$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закл. Київ: А.С.К., 2006. 648 с.

2. Куліш Ю. В., Рибачук О. В. Диференціальні рівняння: метод. вказівки і завд. до контр. робіт з дисц. «Вища математика». Харків: УкрДАЗТ, 2002. 54 с.

3. Диференціальні рівняння: підручник / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. Київ: Вища школа, 1981. 504 с.

4. Овчинников П. П., Яремчук Ф. Г., Михайленко В. М. Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ: Техніка, 2004. 792 с.

5. Перестюк М. О., Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь: навч. посіб. Київ: ТВіМС, 2004. 224 с.

6. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ: Вища Школа, 1994. 454 с.

7. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах: навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.

8. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: підручник. Київ: Либідь, 2003. 600 с.

9. Фардигола Л. В. Курс звичайних диференціальних рівнянь: навч. посіб. Київ: Наукова Думка, 2023. 312 с.

10. Appell P. Traite de mecanique rationnelle. Vol. 1: Statique. Dynamique de point. Paris: Gauthier-Villars, 1893. 549 p.

11. Hartman P. Ordinary Differential Equations: Second Edition. Philadelphia: SIAM, 2002. 612 p.

12. Landau L., Lifshitz E.Course of Theoretical Physics. Vol. 7: Theory of Elasticity. Bristol: Pergamon Press, 1970. 165 p.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

С

Т

Навчальний посібник

Храбустовський Володимир Іванович,

Осмаєв Олег Аданійович,

Рибачук Олена Василівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина 1

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ

Відповідальний за випуск Храбустовський В. І.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 04.06.2024 р.
Умовн. друк. арк. 12,0. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.