

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра „Вища математика”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**і завдання до контрольних робіт 3, 4
з дисципліни**

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Харків – 2009

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Вища математика” 31 березня

2008 р., протокол № 9.

Методичні вказівки призначено для студентів 1 курсу спеціальності «Управління процесами перевезень на залізничному транспорті» заочної форми навчання.

Укладачі:

доц. Н.С. Юрчак,
старші викладачі Н.І. Волохова, Н.Г. Панченко

Рецензент

доц. С.Д. Бронза

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання до контрольних робіт 3, 4
з дисципліни

«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»

Відповідальний за випуск Юрчак Н.С.

Редактор Буранова Н.В.

Підписано до друку 19.05.08 р.
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 2,5. Обл.-вид.арк. 2,75.
Замовлення № Тираж 300. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

ЗМІСТ

Контрольна робота 3	
Завдання 1 Комплексні числа.....	3
Завдання 2 Невизначений інтеграл.....	7
Завдання 3 Визначений інтеграл.....	13
Завдання 4 Невласні інтеграли.....	16
Завдання 5 Застосування визначеного інтеграла.....	18
Завдання 6 Подвійні інтеграли.....	21
Завдання 7 Криволінійні інтеграли.....	23
Контрольна робота 4	
Завдання 1 Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку.....	26
Завдання 2 Диференціальні рівняння другого порядку.....	29
Завдання 3 Системи диференціальних рівнянь.....	31
Завдання 4 Числові ряди.....	33
Завдання 5 Степеневі ряди. Радіус та інтервал збіжності.....	39
Завдання 6 Розклади функцій у степеневі ряди.....	45
Завдання 7 Застосування розкладів деяких функцій у степеневі ряди.....	46
Список літератури.....	48

Контрольна робота 3

Завдання 1 Комплексні числа

1 Задані величини $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $z_3 = a_3 + b_3i$.

Знайти:

а) $z = \frac{(z_3 - z_1) \cdot z_2}{z_1}$, записавши відповідь в алгебраїчній

формі;

б) $z = \frac{z_1^3 + 2z_2^2 + z_3}{-i^{n+1}}$, записавши відповідь в показниковій

та тригонометричній формах.

Значення величин $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ подані у таблиці 1, n – номер варіанта ($n = 1, 2, 3, \dots, 30$) [6, с. 4-8].

Таблиця 1

Варіант	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
1	3	-2	5	7	-7	-16
2	-1	3	2	-5	5	-13
3	4	3	5	-2	3	8
4	-2	5	1	-2	5	-12
5	-2	-3	5	4	8	5
6	3	2	-5	6	1	10
7	6	3	1	8	-9	18
8	8	2	-3	-1	25	7
9	-3	8	5	-5	-19	34
10	5	3	8	7	1	5
11	-4	-3	1	5	-10	1
12	7	10	2	7	20	41
13	-2	5	3	-6	-14	29
14	-1	7	8	3	-31	-19
15	4	-2	5	5	-11	13
16	5	2	3	1	17	7
17	-3	7	2	5	-10	33
18	8	-5	3	3	20	7
19	-9	-7	5	1	6	-4
20	-8	-5	3	4	-21	-11
21	2	7	5	3	13	2
22	5	-2	3	3	12	-9
23	-3	-5	7	4	-24	-17
24	7	5	-4	-2	-25	-17
25	-5	-1	3	4	10	19
26	4	-5	7	3	27	-22
27	3	-5	4	7	17	40
28	-1	3	2	5	-7	10
29	7	-1	3	-2	-32	3
30	4	5	-3	7	19	-30
31	-5	-2	-3	1	17	7

2 Розв'язати квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, якщо a, b, c задані таблицею 2 [б, с.8].

Таблиця 2

Варіант	a	b	c
1	4	-4	5
2	9	12	5
3	8	-20	17
4	5	6	2
5	36	-48	25
6	49	14	10
7	4	-16	25
8	9	18	58
9	16	-40	29
10	25	20	29
11	36	-36	25
12	49	70	26
13	4	-24	45
14	9	24	65
15	8	-28	65
16	25	20	53
17	18	-18	17
18	49	56	25
19	4	-4	17
20	9	30	74
21	16	-40	29
22	5	14	10
23	18	30	17
24	49	-28	13
25	2	-14	25
26	9	48	89
27	16	-24	34
28	5	16	13
29	36	-48	25
30	49	84	40
31	1	-4	29

3 Знайти величину $z = \sqrt[3]{a + bi}$, якщо значення a і b задані таблицею 3. Відповідь записати в алгебраїчній формі та зобразити в комплексній площині [6, с. 8-10].

Таблиця 3

Варіант	a	b
1	-1	-2
2	2	3
3	-1	2
4	-2	1
5	3	-1
6	-1	3
7	-3	-2
8	2	-3
9	-3	-1
10	1	-3
11	-3	2
12	-2	3
13	-2	-1
14	-1	4
15	3	-2
16	1	-4
17	1	4
18	-4	3
19	-2	4
20	2	-5
21	5	1
22	-5	-2
23	5	2
24	5	-3
25	-1	5
26	5	-3
27	5	-1
28	-5	3
29	4	5
30	-4	1
31	-4	-5

Завдання 2 Невизначений інтеграл

Знайти невизначені інтеграли [6, с. 10-28; 11, с. 4-9, 20-25; 12, с. 5-11].

Варіанти завдань

1 а) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$; б) $\int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$; г) $\int \arctg x dx$;

д) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$; е) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$; ж) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$; у) $\int \sin^3 x \cdot \cos^{15} x dx$.

2 а) $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{\cos^3 3x}}$; б) $\int \frac{x}{e^{2x^2+1}} dx$; в) $\int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{8-x^2-2x}}$; г) $\int \arctg \sqrt{4x-1} dx$;

д) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$; е) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$; ж) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$;

у) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

3 а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$; б) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$; в) $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$; г) $\int \ln(x-5) dx$;

д) $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$; ж) $\int \frac{(3\sin x-2\cos x)dx}{1+\cos x}$;

у) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{10} x} dx$.

4 а) $\int \frac{3xdx}{4x^2+1}$; б) $\int \frac{\cos x}{\sin x+2} dx$; в) $\int \frac{(3x-6)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; г) $\int x \cos 8x dx$;

д) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx$; е) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})} dx$; ж) $\int \frac{dx}{5-5\sin x+3\cos x}$;

у) $\int \sin^3 x \cdot \cos^9 x dx$.

$$5 \text{ a) } \int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}; \text{ б) } \int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx; \text{ в) } \int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}; \text{ г) } \int \operatorname{arctg} 2x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{10\sin x + \cos x}; \text{ у) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$$

$$6 \text{ a) } \int \frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}; \text{ б) } \int \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx; \text{ в) } \int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}; \text{ г) } \int x^2 e^{-x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{x^2+x+10}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3-\sin x+2\cos x}; \text{ у) } \int \frac{dx}{\cos^3 x \cdot \sin x}.$$

$$7 \text{ a) } \int \frac{4xdx}{\sqrt{3+4x^2}}; \text{ б) } \int \frac{\cos x}{3-\sin x} dx; \text{ в) } \int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}; \text{ г) } \int (x+1)e^{-4x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx; \text{ е) } \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{5-3\cos x}; \text{ у) } \int \sin^3 x \cdot \cos^{12} x dx.$$

$$8 \text{ a) } \int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}; \text{ б) } \int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^2 5x}} dx; \text{ в) } \int \frac{(3x-2)dx}{x^2-4x+5}; \text{ г) } \int x^2 e^{-2x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2}} dx; \text{ ж) } \int \frac{dx}{5-4\sin x+7\cos x};$$

$$\text{у) } \int \frac{4-\operatorname{tg} x}{2+3\operatorname{tg} x} dx.$$

$$9 \text{ a) } \int \frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{3x^2-2}}; \text{ б) } \int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx; \text{ в) } \int \frac{5dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}; \text{ г) } \int \operatorname{arctg} 3x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{36}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3+5\cos x}; \text{ у) } \int \frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5} dx.$$

$$10 \text{ a) } \int \frac{2xdx}{\sqrt{3x^2-2}}; \text{ б) } \int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx; \text{ в) } \int \frac{(3x-6)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}; \text{ г) } \int \operatorname{arctg} 4x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(x-1)}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3+2\sin x+3\cos x}; \text{ у) } \int \frac{11-3\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+3} dx.$$

$$11 \text{ a) } \int \frac{2xdx}{\sqrt{7-2x^2}}; \text{ б) } \int \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-8)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}; \text{ г) } \int \arcsin 5x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(7x-10)}{x^3+8} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{5+4\sin x}; \text{ у) } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$12 \text{ a) } \int \frac{xdx}{2x^2-7}; \text{ б) } \int \frac{dx}{\cos^2 3x \cdot \operatorname{tg}^4 3x}; \text{ в) } \int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}; \text{ г) } \int (x+1)e^{-x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(4x^2+3x+17)}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{2+\cos x}; \text{ у) } \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$$

$$13 \text{ a) } \int \frac{xdx}{3x^2+8}; \text{ б) } \int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x} dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{x^2+4x+14}; \text{ г) } \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(2x+1)}{x^4+4x^2} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}; \text{ у) } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^9 x} dx.$$

$$14 \text{ a) } \int \frac{2xdx}{3x^2-7}; \text{ б) } \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{x^2+3x+6}; \text{ г) } \int x^2 e^{3x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(4x+2)}{x^4+8x} dx; \text{ е) } \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}; \text{ у) } \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx.$$

$$15 \text{ a) } \int \frac{2x dx}{\sqrt{2x^2 + 5}}; \text{ б) } \int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx; \text{ в) } \int \frac{(3x + 4) dx}{x^2 + 7x + 14}; \text{ г) } \int x \cos(x + 4) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(x^2 - 5x + 40)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{x}}{x - 4\sqrt{x^2}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{2 + 4 \sin x + 3 \cos x}; \text{ у) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx.$$

$$16 \text{ a) } \int \frac{2x dx}{\sqrt{7 - 3x^2}}; \text{ б) } \int \frac{dx}{(1 + x^2) \arctg^7 x}; \text{ в) } \int \frac{(2x - 3) dx}{x^2 + x + 5}; \text{ г) } \int x \cos(x - 2) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(4x - x^2 - 12)}{x^3 + 8} dx; \text{ е) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{3x + 1} - 1} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}; \text{ у) } \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$$

$$17 \text{ a) } \int \frac{x dx}{2x^2 + 9}; \text{ б) } \int \frac{\arctg^4 5x dx}{(1 + 25x^2)}; \text{ в) } \int \frac{(x - 3) dx}{x^2 - 9x + 13}; \text{ г) } \int x \cos(x + 3) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(x^2 - 13x + 40)}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx; \text{ е) } \int \frac{x + 2}{\sqrt{3x + 1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x} dx; \text{ у) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^{12} x} dx.$$

$$18 \text{ a) } \int \frac{5x dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}; \text{ б) } \int \frac{\arcsin^5 5x dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}; \text{ в) } \int \frac{(2x + 3) dx}{x^2 - 7x + 12}; \text{ г) } \int x e^{x+2} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(1 - 3x)}{x^3 - 1} dx; \text{ е) } \int \frac{x - 1}{\sqrt{2x - 1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{1}{5 + \sin x + 3 \cos x} dx; \text{ у) } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$$

$$19 \text{ a) } \int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 8}}; \text{ б) } \int \frac{x dx}{e^{3x^2 + 4}}; \text{ в) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 + 15x + 4}}; \text{ г) } \int x e^{-7x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(2 - 3x)}{(x^3 + 8x)} dx; \text{ е) } \int \frac{x + 2}{\sqrt{3x + 1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx; \text{ у) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$$

$$20 \text{ a) } \int \frac{5x dx}{\sqrt{5x^2 + 3}}; \text{ б) } \int e^{(2x^3-1)} \cdot x^2 dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{\sqrt{6x^2 + 15x + 11}}; \text{ г) } \int \arcsin 2x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(2x-5)}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx; \text{ е) } \int \frac{dx}{(9+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}};$$

$$\text{ж) } \int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x} dx; \text{ у) } \int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx.$$

$$21 \text{ a) } \int \frac{x dx}{3x^2-6}; \text{ б) } \int e^{4-5x^2} x dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}; \text{ г) } \int (x+3)e^{-x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(x^2+23)}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x+1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}; \text{ у) } \int \operatorname{tg}^5 x dx.$$

$$22 \text{ a) } \int \frac{x dx}{5x^2+1}; \text{ б) } \int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)} dx}{x+1}; \text{ в) } \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}; \text{ г) } \int \arccos x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(2x^2+7x+7)}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx; \text{ е) } \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}; \text{ у) } \int \frac{1}{\cos^6 x} dx.$$

$$23 \text{ a) } \int \frac{5x dx}{5x^2-3}; \text{ б) } \int \frac{dx}{(1-x)\ln^3(1-x)}; \text{ в) } \int \frac{x dx}{\sqrt{8-3x-2x^2}}; \text{ г) } \int (x^2-3)e^x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(19x-x^2-34)}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}; \text{ у) } \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$24 \text{ a) } \int \frac{x dx}{2x^2-7}; \text{ б) } \int \frac{\ln^3(2-x) dx}{x-2}; \text{ в) } \int \frac{(x-2) dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}; \text{ г) } \int x e^{-4x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{(2x^2+19)}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx; \text{ е) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+1} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{5+3\cos x}; \text{ у) } \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}.$$

$$25 \text{ a) } \int \frac{9x dx}{\sqrt{1-9x^2}}; \text{ б) } \int \frac{\ln^4(3x+1) dx}{3x+1}; \text{ в) } \int \frac{dx}{3x^2-x+1}; \text{ г) } \int x \cos(x+7) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{8}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx; \text{ е) } \int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{4 \sin x - 6 \cos x}; \text{ у) } \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$26 \text{ a) } \int \frac{3x dx}{9x^2+2}; \text{ б) } \int \frac{\ln^5(x-8) dx}{x-8}; \text{ в) } \int \frac{(3x-2) dx}{x^2-4x+5}; \text{ г) } \int x e^{-5x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{x^2+2x+10}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx; \text{ е) } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3+5 \sin x+3 \cos x}; \text{ у) } \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos^4 x} dx.$$

$$27 \text{ a) } \int \frac{2x dx}{5x^2-3}; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x-4) \ln^5(x-4)}; \text{ в) } \int \frac{dx}{2x^2-5x+7}; \text{ г) } \int x e^{x+3} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx; \text{ е) } \int \frac{x^3}{\sqrt{x-5}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}; \text{ у) } \int \cos^3 \frac{x}{2} \cdot \sin^5 \frac{x}{2} dx.$$

$$28 \text{ a) } \int \frac{5x dx}{\sqrt{7x^2-1}}; \text{ б) } \int \frac{\operatorname{arctg}^4 8x dx}{1+64x^2}; \text{ в) } \int \frac{(x-1) dx}{x^2-x-1}; \text{ г) } \int x \cos(2-x) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8} dx; \text{ е) } \int \frac{1}{x^3 \sqrt{x-8}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{4-4 \sin x+3 \cos x}; \text{ у) } \int \operatorname{tg}^3 x dx.$$

$$29 \text{ a) } \int \frac{3x dx}{\sqrt{9x^2+5}}; \text{ б) } \int e^{3 \cos x+2} \sin x dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}; \text{ г) } \int \operatorname{arctg} \frac{x}{4} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx; \text{ е) } \int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}; \text{ у) } \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$30 \text{ а) } \int \frac{xdx}{3x^2 - 2}; \text{ б) } \int \frac{e^{\arctg x} dx}{1 + x^2}; \text{ в) } \int \frac{(x + 3)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}; \text{ г) } \int \arccos \frac{x}{12} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} dx; \text{ е) } \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{2 + \sin x - 3 \cos x}; \text{ у) } \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos^3 x}} dx.$$

$$31 \text{ а) } \int \frac{7xdx}{7x^2 + 1}; \text{ б) } \int \frac{x^4 dx}{e^{x^5 + 1}}; \text{ в) } \int \frac{xdx}{5x^2 - 2x + 1}; \text{ г) } \int \ln(1 - 2x) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{6}{x^3 - 1} dx; \text{ е) } \int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{8 \sin^2 x - 16 \sin x \cos x}; \text{ у) } \int \operatorname{tg}^7 x dx.$$

Завдання 3 Визначений інтеграл

Обчислити визначені інтеграли [6, с.28-30; 11, с.25-26; 12, с.11].

Варіанти завдань

$$1 \text{ а) } \int_0^1 x e^{-2x} dx; \text{ б) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx.$$

$$2 \text{ а) } \int_1^e x \ln x dx; \text{ б) } \int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx.$$

$$3 \text{ а) } \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx; \text{ б) } \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$4 \text{ а) } \int_0^5 \frac{1}{2 + \sqrt{3x + 1}} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx.$$

$$5 \text{ а) } \int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx; \text{ б) } \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$6 \text{ а) } \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos x dx; \text{ б) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx.$$

- 7 a) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$; б) $\int_0^{\pi/4} x \cdot \sin 3x dx$.
- 8 a) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx$; б) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos \frac{x}{2} dx$.
- 9 a) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$.
- 10 a) $\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{x}{\sqrt{2+3x}} dx$; б) $\int_0^1 x \cdot e^{3x} dx$.
- 11 a) $\int_0^{\pi/3} (x+3) \sin x dx$; б) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^2 x dx$.
- 12 a) $\int_1^e x \ln^2 x dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x dx$.
- 13 a) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cdot \sin x dx$.
- 14 a) $\int_1^2 \ln(3x+2) dx$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} ctg^3 x dx$.
- 15 a) $\int_0^4 x \sqrt{x^2+9} dx$; б) $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos 2x dx$.
- 16 a) $\int_{-1}^0 (x+1)e^{2x} dx$; б) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x dx$.
- 17 a) $\int_0^1 x \arctg x dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos x dx$.
- 18 a) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$; б) $\int_2^3 \ln(4x+1) dx$.
- 19 a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1}} dx$; б) $\int_2^5 (x-2) \ln x dx$.

- 20 a) $\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x) dx$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$.
- 21 a) $\int_0^{13} \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$; б) $\int_0^{\pi/8} x \cdot \sin 3x dx$.
- 22 a) $\int_{3/2}^2 \operatorname{arctg}(2x-3) dx$; б) $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} dx$.
- 23 a) $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x-1}} dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+2\sin x} dx$.
- 24 a) $\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$.
- 25 a) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int_1^{e^2} x \cdot \ln x dx$.
- 26 a) $\int_1^2 (x-1) \ln x dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$.
- 27 a) $\int_0^1 x^3 \cdot e^x dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{4-7\operatorname{tg} x}{2+3\operatorname{tg} x} dx$.
- 28 a) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$; б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x dx$.
- 29 a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$.
- 30 a) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$; б) $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x dx$.
- 31 a) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x+3+x^2}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4+\sin x} dx$.

Завдання 4 Невласні інтеграли

Обчислити невластні інтеграли або встановити їх розбіжність [6, с. 30-32; 11, с. 29-31; 12, с.13-14].

Варіанти завдань

$$1 \quad a) \int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx; \quad б) \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

$$2 \quad a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}; \quad б) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$$

$$3 \quad a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}; \quad б) \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}.$$

$$4 \quad a) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}; \quad б) \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}.$$

$$5 \quad a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1) \ln \frac{3}{4}}; \quad б) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16 - x^2)^3}}.$$

$$6 \quad a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}; \quad б) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}.$$

$$7 \quad a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}; \quad б) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

$$8 \quad a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}; \quad б) \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$9 \quad a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}; \quad б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

$$10 \quad a) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}; \quad б) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$11 \quad a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}; \quad б) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}}.$$

- 12 a) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}$; б) $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$.
- 13 a) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$; б) $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$.
- 14 a) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{\pi(1+4x^2)}$; б) $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.
- 15 a) $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)}$; б) $\int_{-1/3}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}} dx$.
- 16 a) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2 + 4x + 5}$; б) $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.
- 17 a) $\int_1^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 4x + 1)^4}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$.
- 18 a) $\int_0^{+\infty} \frac{(3-x^2)dx}{x^2 + 4}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-4}}$.
- 19 a) $\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$; б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.
- 20 a) $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$; б) $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.
- 21 a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2 - 4x) \ln 5}$; б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3} \ln 2}$.
- 22 a) $\int_{1/3}^{+\infty} \frac{\pi dx}{\operatorname{arctg}^2 3x(1+9x^2)}$; б) $\int_0^{1/3} \frac{1}{9x^2 - 9x + 2} dx$.
- 23 a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\pi \operatorname{arctg} \frac{x}{2}(x^2 + 4)}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$.
- 24 a) $\int_1^{+\infty} \frac{16x dx}{(16x^4 - 1)}$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$.

- 25 а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$; б) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.
- 26 а) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.
- 27 а) $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.
- 28 а) $\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$; б) $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$.
- 29 а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$; б) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{20x^2 - 9x + 1} dx$.
- 30 а) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$; б) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)} dx$.
- 31 а) $\int_4^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$; б) $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$.

Завдання 5 Застосування визначеного інтеграла

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x$; $y = 2 - x^2$ (рисунок 1).

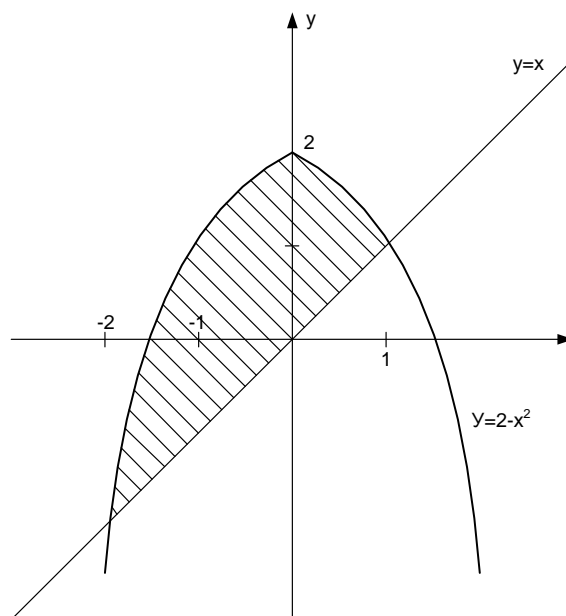


Рисунок 1

Розв'язок:

Знайдемо абсциси точок перетину даних ліній:
$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases}.$$

З цієї системи дістанемо $x_1 = -2, x_2 = 1$. Це і є межі інтегрування.

За формулою $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$ знаходимо площу

$$S = \int_{-2}^1 [(2 - x^2) - x] dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2} \text{ (кв.од.)}.$$

2 Знайти площу області, обмеженої віссю Ox та кривою $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (рисунок 2).

Знайдемо точки перетину заданої кривої з віссю Ox . Легко бачити, що одним з коренів рівняння $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ є $x_1 = 1$. Два інші корені знайдемо так: поділивши ліву частину рівняння на $x - 1$, отримаємо $x^2 - 5x + 6$.

Прирівнюючи цей вираз нулю, маємо: $x_2 = 2, x_3 = 3$.

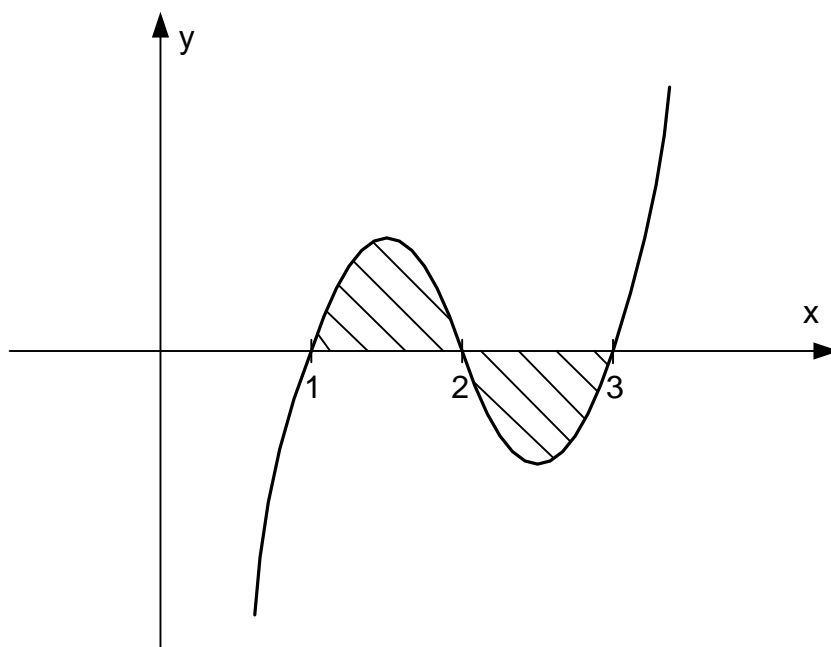


Рисунок 2

З графіка заданої функції бачимо, що на відрізку $[2, 3]$ область знаходиться під віссю Ox , тому

$$S = S_1 + S_2 ;$$

$$S_1 = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 11\frac{x^2}{2} - 6x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (\text{кв.од.});$$

$$S_2 = -\int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx = -\left(\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 11\frac{x^2}{2} - 6x \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{4} (\text{кв.од.});$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} (\text{кв.од.}).$$

Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями [11, с. 12, 26-27].

Варіанти завдань

- 1 $y = x^2 + 1, x - y + 3 = 0.$
- 2 $y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7.$
- 3 $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$
- 4 $y^2 = 2x, y^2 = 4x - x^2.$
- 5 $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0.$
- 6 $y^2 = 6x, x = \sqrt{16 - y^2}.$
- 7 $xy = 4, x + y - 5 = 0.$
- 8 $y^2 = 2x, x^2 = 2y.$
- 9 $y = (x + 1)^2, y^2 = x + 1.$
- 10 $y = \sqrt{36 - x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 6.$
- 11 $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3.$
- 12 $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0, -2 \leq x \leq 1.$
- 13 $y = \sqrt{x}, y = x^2.$
- 14 $y = \sqrt{8 - x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}.$
- 15 $y = 4 - x^2, x = 0, y = 2 - x.$
- 16 $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 2.$
- 17 $y = 4 - x^2, y = 2 + x.$

- 18 $y = x^2 + 4x + 4, y = x + 4.$
 19 $y = 2x^2 - x, y = 2x + 2.$
 20 $y = 2x^2 + x, y = -2x + 2.$
 21 $y = 2x^2, y = x^2 + x + 2.$
 22 $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y.$
 23 $y = 2x^2, y = x^2 - x + 2.$
 24 $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x.$
 25 $y = \sqrt{x}, y = x.$
 26 $y = 2 + x - x^2, y = 2 - x.$
 27 $y = 2 - x - x^2, y = 2 + x.$
 28 $y = x^2, y = \sqrt{x}.$
 29 $y = 9 - x^2, y = x^2 - 6x + 9.$
 30 $y = x^2, y = \sqrt{-x}.$
 31 $y = x^2, y = 2\sqrt{x}.$

Завдання 6 Подвійні інтеграли

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ за заданою областю D і функцією $f(x, y)$. Область D задана обмежуючими її лініями або системою нерівностей [8, с. 33-37].

Варіанти завдань

- 1 $D: y = x, x = 0, y = 1, y = 2; f(x, y) = x^2 + y^2.$
 2 $D: x = 0, x = y^2, y = 2; f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y.$
 3 $D: y = x, y = x^2, x = 3; f(x, y) = x - y.$
 4 $D: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{2x}{3} + 3; f(x, y) = 3x + y.$
 5 $D: y = 2 - x^2, x = 0, y = 2x - 1; f(x, y) = x - y.$

- 6 $D: y = 2 - x, y = x, x \geq 0; f(x, y) = x^2 y.$
- 7 $D: y = x, x = 2, y = \frac{x}{2}; f(x, y) = (x - 2)y.$
- 8 $D: y = x^3, x = 3, y = 0, y = 8; f(x, y) = x + y.$
- 9 $D: y = x + 5, x + y + 5 = 0, x \leq 0; f(x, y) = x(y + 5).$
- 10 $D: y = x^3, y = 3x; f(x, y) = y(1 + x^2).$
- 11 $D: y = x, xy = 1, y = 2; f(x, y) = \frac{y^2}{x^2}.$
- 12 $D: xy = 1, y = \sqrt{x}, x = 2; f(x, y) = y \ln x.$
- 13 $D: y = \ln x, x = 2, y = 0; f(x, y) = e^y.$
- 14 $D: y = 2, x = 0, y^2 = x; f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y.$
- 15 $D: y \geq -x + 2, x^2 + y^2 = 2y; f(x, y) = xy.$
- 16 $D: y = \frac{x}{2}, y = x, x = 4; f(x, y) = y.$
- 17 $D: x^2 = 4y, y = 1, x \geq 0; f(x, y) = 4 - y.$
- 18 $D: y = e^x, x = 0, y = 2; f(x, y) = e^{x+y}.$
- 19 $D: y = \frac{x}{2}, y = 2x, y = \frac{2}{x}, x > 0; f(x, y) = x^2 + y^2.$
- 20 $D: y = 1, x + y = 6, y = 2x; f(x, y) = x^2 + y^2.$
- 21 $D: y = 0, 3x + y = 6, 3x + 2y = 12; f(x, y) = 6 - x - y.$
- 22 $D: y = 0, x = 0, y = 4, x = 4; f(x, y) = x^2 + y^2 + 1.$
- 23 $D: y^2 = 2x, x = 1; f(x, y) = xy^2.$
- 24 $D: y = x^2, y = 0, x + y - 2 = 0; f(x, y) = x + 2y.$
- 25 $D: y = \frac{x^2}{2}, y = x; f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$
- 26 $D: y^2 = x, x^2 + y^2 = 2, y \geq 0; f(x, y) = 1.$
- 27 $D: y^2 = x, x = 0, y = 1; f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}.$
- 28 $D: x = \pi, x = 0, y = 0, y = 1 + \cos x; f(x, y) = y^2 \sin x.$
- 29 $D: x = \frac{\pi}{2}, x = 0, y = \cos x, y = 1; f(x, y) = y^4.$

$$30 \quad D: y = x, y = 2x, x = 2, x = 4; f(x, y) = \frac{y}{x}.$$

$$31 \quad D: y = x^2, x = y^2; f(x, y) = x^2 + y.$$

Завдання 7 Криволінійні інтеграли

Обчислити: криволінійний інтеграл другого роду по заданій кривій L [8, с. 29-33].

$$1 \quad \int_L \cos^2 x dx + \frac{1}{y^3} dy, L - \text{дуга кривої } y = \operatorname{tg} x \text{ від точки } A(\pi/4; 1) \text{ до точки } B(\pi/3; \sqrt{3}).$$

$$2 \quad \int_L (x^2 + y^2) dx + xy dy, L - \text{дуга кривої } y = e^x \text{ від точки } A(0; 1) \text{ до точки } B(1; e).$$

$$3. \quad \int_{L_{ABC}} (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy, L_{ABC} - \text{ламана, де } A(2; 0); C(5; 0); B(5; 3).$$

$$4 \quad \int_L x dy - y dx, \text{ де } L - \text{контур трикутника } ABC, \text{ де } A(-1; 0); B(1; 0); C(0; 1) \\ \text{при додатному напрямі обходу.}$$

$$5. \quad \int_L z dx + x dy - \frac{xy}{z} dz, L - \text{дуга кривої } x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{у напрямі зростання параметра } t.$$

$$6. \quad \int_L z dx + y dy - (x^2 + y^2) dz, L - \text{дуга кривої } x = a \cos t, y = a \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{у напрямі зростання параметра } t.$$

$$7. \quad \int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy + z dz, L_{OA} - \text{відрізок прямої, що з'єднує точки } O(0; 0; 0); A(2; 1; -1).$$

$$8. \quad \int_{L_{AB}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, L_{AB} - \text{ламана лінія } y = |x|, \text{ від точки } A(-1; 1) \\ \text{до точки } B(2; 2).$$

$$9 \quad \int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy, L_{OA} - \text{дуга параболи } y = \frac{x^2}{4} \text{ від точки } O(0; 0) \text{ до точки } A(2; 1).$$

10. $\int_L ydx - xdy$, L – дуга еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ при додатному напрямі обходу.

11. $\int_L x^2 dx + (x+z)dy - x y dz$, L – дуга кривої $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $z = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
у напрямі зростання параметра t .

12. $\int_{L_{AB}} (x^2 + y + z)dx + z^2 dy + (x + y^2)dz$, L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує
точки $A(2;1;0)$; $B(4;3;1)$.

13. $\int_L ydx + x^2 dy + z dz$, L : $x = t$, $y = t^3$, $z = t^5$, $0 \leq t \leq 1$
у напрямі зростання параметра t .

14. $\int_L \frac{y}{x} dx + x dy$, L – дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

15. $\int_L 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz$, L – дуга одного витка гвинтової лінії $x = \cos t$,
 $y = \sin t$, $z = 2t$ у напрямі від точки $A(1;0;0)$ до точки $B(1;0;4\pi)$.

16. $\int_L (xy - 1)dx + x^2 y dy$, L – відрізок прямої AB у напрямі від точки $A(1;1)$
до точки $B(0;2)$.

17. $\int_L (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2 dy$, L – дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $A(0;0)$
до точки $B(1;2)$.

18. $\int_L y^2 dx + x y dy$, L – дуга еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
при додатному напрямі обходу.

19. $\int_L \sin^2 x dx + \frac{1}{y^2} dy$, L – дуга кривої $y = \operatorname{ctg} x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ у напрямі зростання
змінної x .

20 $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$, L – дуга кола $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
у напрямі зростання параметра t .

21. $\int_L xdy - ydx$, L – дуга астроїди $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ у напрямі
від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$.

22. $\int_L (xy - y^2)dx + xdy$, L – дуга параболи $y = x^2$ у напрямі від
точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

23. $\int_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz$, L_{OBA} – ламана OBA , де $O(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $B(0;2;1)$.

24. $\int_L (xy - 1)dx + x^2ydy$, L – дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$ у напрямі від
точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.

25 $\int_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, L – ламана OAB , $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$.

26. $\int_{L_{AB}} \cos z dx - \sin x dz$, L_{AB} – відрізок прямої AB у напрямі від точки
 $A(2;0;-2)$ до точки $B(-2;0;2)$.

27 $\int_L xdy$, де L – контур трикутника, утвореного прямими $y = x$, $x = 2$, $y = 0$
при додатному напрямі обходу.

28 $\int_L xdx + xydy$, де L – верхня половина кола $x^2 + y^2 = 2x$
при додатному напрямі обходу контура.

29 $\int_L (x^2 - y)dx$, де L – контур прямокутника, що утворений прямими
 $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ при додатному напрямі обходу контура.

30 $\int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$, L_{OB} – відрізок прямої OB у напрямі від
точки $O(0;0;0)$ до точки $B(-2;4;5)$.

31 $\int_L ydx + xdy$, L – дуга кола $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ у напрямі від точки $A(R;0)$ до точки $B(0;R)$.

Контрольна робота 4

Завдання 1 Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння другого порядку. Які допускають зниження порядку

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння [7, с. 4-11; 10, с. 4-13].

Варіанти завдань

1 а) $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$; б) $y' = 2 + \frac{y}{x}$; в) $y' - \frac{y}{x} = 3x$; г) $y'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

2 а) $(x+1)y - \sqrt{x^2+1}(y^3-1)y' = 0$; б) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$; в) $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x$; г) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$.

3. а) $2x(1+y^2)dx + e^{-x^2}dy = 0$; б) $(x+2y)dx - xdy = 0$;

в) $x^2y' + 2xy - 1 = 0$; г) $y'' \cdot y^3 + 1 = 0$.

4 а) $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$; б) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$;

в) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$; г) $y''(y-1) - 2(y')^2 = 0$.

5. а) $y' = e^{x+y}$; б) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;

в) $y' - 7y = 8e^{3x}$; г) $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$.

6 а) $\sin^2 x dy - y \ln y dx = 0$; б) $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x)$;

в) $(x^2+1)y' - xy = x^3 + x$; г) $y \cdot y'' - y'(2\sqrt{y \cdot y'} + y') = 0$.

$$7 \text{ a) } y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}; \text{ б) } (x^2+y^2)y' = 2xy;$$

$$\text{в) } y^2 dx + (5xy - 4)dy = 0; \text{ г) } x \cdot y'' = y'(\ln y' - \ln x).$$

$$8. \text{ a) } \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{ctg} y dx + \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \operatorname{ctg} x dy = 0; \text{ б) } xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2};$$

$$\text{в) } (x^2 + 4)y' - xy = \sqrt{x^2 + 4}; \text{ г) } 2y \cdot y'' - (3y')^2 = 4y^2.$$

$$9. \text{ a) } y' + \sin(x+y) = \sin(x-y); \text{ б) } xy' = y - xe^{\frac{y}{x}};$$

$$\text{в) } y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}}; \text{ г) } y''(e^x + 1) + y' = 0.$$

$$10 \text{ a) } \operatorname{ctg} y \cdot dx - x \cdot \ln x \cdot dy = 0; \text{ б) } x \cdot \sin \frac{y}{x} \cdot y' + x = y \cdot \sin \frac{y}{x};$$

$$\text{в) } xy' \ln x = 5x - y; \text{ г) } y''(y+5) = (y')^2.$$

$$11. \text{ a) } y dx - (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy = 0; \text{ б) } y^2 + x^2 y' = xyy';$$

$$\text{в) } y' + 3y = x \cdot e^{-3x}; \text{ г) } xy'' - y' = x^2 \cdot e^{2x}.$$

$$12 \text{ a) } ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0; \text{ б) } (2x - 3y) dx + x dy = 0;$$

$$\text{в) } y'(1-x^2) = xy + 1; \text{ г) } y''(x^2 + 4) + 2xy' = x^3(x^2 + 4).$$

$$13 \text{ a) } dy = e^{x+y} dx; \text{ б) } xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x};$$

$$\text{в) } y' + y = e^{2x}; \text{ г) } y \cdot y'' = (y')^2.$$

$$14 \text{ a) } x(y^6 + 1) dx + y^2(x^4 + 1) dy = 0; \text{ б) } xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$$

$$\text{в) } xy' \cdot \ln x = y + \ln x; \text{ г) } x \cdot y'' - y' = x^3 \cdot \sin x.$$

$$15 \text{ a) } dy - 2\sqrt{y} \cdot \ln x dx = 0; \text{ б) } xy' = 5y + x;$$

$$\text{в) } y' + 4\frac{y}{x} + x = 0; \text{ г) } 2y \cdot y'' = (y')^2 - y^2.$$

16 a) $xydx + (x+1)dy = 0$; б) $y - xy' = x + y \cdot y'$;

в) $(x^2 + 1)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$; г) $x \cdot y'' + y' = \frac{1}{x^2}$.

17 a) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$; б) $(5\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$;

в) $xy' - y = x^2 \cdot \cos x$; г) $(1 + y^2)y'' = 2y(y')^2$.

18 a) $y' \cdot \text{ctgx} + y = 2$; б) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$;

в) $y' + \frac{y}{1+x^2} = \frac{\text{arctgx}}{1+x^2}$; г) $x^2 \cdot y'' + xy' = 1$.

19 a) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$; б) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$;

в) $y' \cdot \sin x - y = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; г) $y'' + y' \cdot \text{tgx} = \cos^3 x$.

20 a) $xy' + y = y^2$; б) $xy' - \frac{x}{\text{arctg} \frac{y}{x}} = y$;

в) $x \cdot \ln x \cdot y' + y = 2 \ln x$; г) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

21. a) $2x^2yy' + y^2 = 2$; б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$;

в) $y' + y \text{tgx} = \frac{1}{\cos x}$; г) $x \cdot y'' + y' = \ln x + 1$.

22. a) $(y-1)^2 dx + (1-x)^3 dy = 0$; б) $xy' = y(3 + \ln y - \ln x)$;

в) $xy' - 2y = 2x^4$; г) $y'' - y' \cdot \text{ctgx} = \sin 2x$.

23 a) $(\sqrt{xy} - 2\sqrt{x})y' - y = 0$; б) $y' = \frac{2(y - \sqrt{xy})}{x}$;

в) $x^2y' - 2y = 2x^4$; г) $x \cdot y'' = \frac{y}{x \ln x}$.

$$24 \text{ a) } x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0; \text{ б) } (x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0;$$

$$\text{в) } 2x(x^2 + y)dx = dy; \text{ г) } x \cdot y'' - y' - x \cdot \sin \frac{y'}{x} = 0.$$

$$25. \text{ a) } (xy^2 - y^2)dx - (x^2y + x^2)dy = 0; \text{ б) } x^3 \cdot y' = y(y^2 + x^2);$$

$$\text{в) } y' - y = e^x; \text{ г) } x^2 \cdot y'' = (y')^2.$$

$$26 \text{ a) } \cos y \cdot \cos x dx - \sin x \cdot \sin y dy = 0; \text{ б) } xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x};$$

$$\text{в) } (x^2 + 1)y' + 4xy = 1; \text{ г) } (1 - x^2)y'' = xy'.$$

$$27 \text{ a) } y' \cdot 3^{x^2} + x \cdot 9^{-y} = 0; \text{ б) } xy' - y = x \cos^2 \left(\frac{y}{x} \right);$$

$$\text{в) } y' + \frac{2xy}{x^2 + 1} = \frac{e^{3x}}{x^2 + 1}; \text{ г) } x \cdot y'' = y'.$$

$$28 \text{ a) } \ln x \cdot \sin^3 y dx + x \cdot \cos y dy = 0; \text{ б) } \left(x \cdot \operatorname{ctg} \frac{y}{x} - y \right) dx + x dy = 0;$$

$$\text{в) } y' \cdot \operatorname{ctg} x + y = 2; \text{ г) } x \cdot y'' = 2y \cdot y'.$$

$$29 \text{ a) } y dx - (4 + x^2) \cdot \ln y \cdot y dy = 0; \text{ б) } xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2};$$

$$\text{в) } y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}; \text{ г) } y''(e^x + 1) + y' = 0.$$

$$30. \text{ a) } 3x\sqrt[3]{y}dx + (1 - x^2)dy = 0; \text{ б) } (x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0;$$

$$\text{в) } (x^2 + 1)y' - 2xy = (3 + x^2)(x^2 + 1); \text{ г) } 2y \cdot y'' + (y')^2 = 0.$$

$$31 \text{ a) } xy' = y \ln x; \text{ б) } (x^2 - y^2)y' = 2xy;$$

$$\text{в) } xy' + y - 3 = 0; \text{ г) } x \cdot y'' + \frac{1}{x}y' = x^2.$$

Завдання 2 Диференціальні рівняння другого порядку

Розв'язати задачу Коші для неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами [7, с. 12-15; 10, с. 15-24].

Варіанти завдань

- 1 $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 2 $y'' + y = 4xe^x$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$.
- 3 $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$; $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$.
- 4 $y'' - 5y' = \sin 5x$; $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$.
- 5 $y'' + y = 4\sin x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.
- 6 $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$; $y(0) = \frac{1}{4}$; $y'(0) = \frac{3}{2}$.
- 7 $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 8 $y'' + y' - 2y = 3e^x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$.
- 9 $y'' - 2y' + y = 2e^x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.
- 10 $y'' - y = 2\sin x + 2\cos x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
- 11 $y'' + 9y' - 10y = 11e^x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 12$.
- 12 $y'' + y = 2\cos x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.
- 13 $y'' + 4y = 2\sin 2x - \cos 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 14 $y'' + y' - 6y = (2x^2 - 2x - 7)e^x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 15 $y'' + 2y - 3y = 4\cos 2x - 7\sin 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 16 $y'' + y = x^3 + 1$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 17 $y'' - y = 4\sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 18 $y'' - y' - 2y = (x + 2)e^{-x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 19 $y'' - y' - 6y = x \cdot e^{2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 20 $y'' + y' = x^3 + x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 21 $y'' + 4y' - 5y = x \cdot e^x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 22 $y'' + y' = x^2 - x + 3$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
- 23 $y'' + 16y = 5\sin 2x$; $y(0) = -3$; $y'(0) = 5$.
- 24 $y'' + 25y = 5\cos 3x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 3$.
- 25 $y'' + 4y = (6x + 5)e^{-2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = \frac{3}{4}$.
- 26 $y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x$; $y(0) = 6$; $y'(0) = 3$.
- 27 $y'' + 9y = 15\sin 2x$; $y(0) = -7$; $y'(0) = 0$.

- 28 $3y'' - 4y = x + 1; y(0) = 0; y'(0) = 1.$
 29 $2y'' - 5y' - 3y = 2e^{-x}; y(0) = 1; y'(0) = 0.$
 30 $y'' + 4y' + 4y = e^{3x}; y(0) = 1; y'(0) = 8.$
 31 $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x; y(0) = 1; y'(0) = 3.$

Завдання 3 Системи диференціальних рівнянь

Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами [7, с. 15-17].

Варіанти завдань

$$1 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 2y. \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 2y. \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -12x - 2y. \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 12x - 2y. \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -30x + 7y. \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 30x + 7y. \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -15x + 7y. \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 15y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 7y. \end{cases}$$

$$11 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -10x + 7y. \end{cases}$$

$$12 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 10x + 7y. \end{cases}$$

$$13 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 7y. \end{cases}$$

$$14 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 3y. \end{cases}$$

$$15 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -5x + 3y. \end{cases}$$

$$16 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

$$17 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y. \end{cases}$$

$$18 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -28x - 5y. \end{cases}$$

$$19 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 28x - 5y. \end{cases}$$

$$20 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x + 28y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

$$21 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -14x - 5y. \end{cases}$$

$$22 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 14x - 5y. \end{cases}$$

$$23 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x + 14y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 5y. \end{cases}$$

$$24 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 14y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y. \end{cases}$$

$$25 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$26 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$$

$$27 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$28 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$$

$$29 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

$$30 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

$$31 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$$

Завдання 4 Числові ряди

Перевірити, збігаються чи розбігаються ряди а) – д). Чи буде ряд е) абсолютно або умовно збігатися [8, с. 19-24; 9, с. 33-36].

Варіанти завдань

$$1 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+4} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+5n-4} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+3}.$$

$$2 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n+3} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{n+2n^3+7}} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} ;$$

$$\text{ д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\operatorname{arctg}^2 n} ; \text{ е) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} .$$

$$3 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n+2} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+2n+5} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n ;$$

$$\text{ д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt[3]{\ln \ln n}} ; \text{ е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} .$$

$$4 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n-1} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n ;$$

$$\text{ д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln n+1}} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+5} .$$

$$5 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+2}{n^2+2n+1} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n+1}{n^2+8}} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)!} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} ;$$

$$\text{ д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n+2)} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+1} .$$

$$6 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+n^2}{2+n+3n^2} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+4} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n} ;$$

$$\text{ д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n+3)^2} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3+4} .$$

$$7 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{2n+1} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+7} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(\ln(n+2)+1)} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(-1)^n}{n!} .$$

$$8 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{3n+1} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2^n+1)} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1)+4)^2} ; \text{ е) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \ln n} .$$

$$9 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+2}{2n^2+1} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{7n^5+3n} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{2+\ln n}} ; \text{ е) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3n^2+5} .$$

$$10 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+(n+1)}{n^2+3} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+4)} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n+3)^2 n} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+19} .$$

$$11 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+4)(2n+3)} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^2+1}} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n} 2^n} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt{\ln(n+3)+1}} ; \text{ е) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n \cdot \ln n} .$$

$$12 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+5)}{(n+3)(2+5n)} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+(n+1)^2} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{3n} 2^n} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2} ; \text{ е) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{\ln n}} .$$

$$13 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+7} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^2+1}} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1} \right)^n ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right) \sqrt{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)+3}} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^3}{4^n}.$$

$$14 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)n}{n^2+2} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+(n+1)^2} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n} ; \text{ г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{\ln^n n} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(3n)} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(n+1)!}.$$

$$15 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{2\sqrt{n^3}} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5}} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(5n)} ; \text{ е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-0.5}.$$

$$16 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n+6} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4n^3+9n^2+1} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+10)^n}{4^n} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \sqrt[4]{2+\ln(n+1)}} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^3+8}.$$

$$17 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5n^2+4}{n^2+3n+2} ; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^2+3}} ; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} ; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{n+1}{\sqrt{3n+1}} ;$$

$$\text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n) \sqrt[4]{\ln \ln(n)+5}} ; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}.$$

$$18 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{4+3n^2}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+7)^2}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^{n+1}}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{3+8n}\right)^n;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\arctgn}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+5}}.$$

$$19 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2+3}{3n^2+2}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+1}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{7+4n}\right)^n;$$

$$\text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n+5}.$$

$$20 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{2n+3}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+3}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)3^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n n}{4^n};$$

$$\text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln \sqrt{n}}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \arctgn.$$

$$21 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n^2}{3n^2+2n+1}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^2+1}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)5^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n+5};$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}; \text{ е) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{2\ln n+5}.$$

$$22 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{7n+5}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+5}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{2^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{5n+2}\right)^n;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n+1)^2}; \text{ е) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^n n}.$$

$$23 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^2+3n+2}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n^2+1}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{9^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2};$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(\ln\left(n+\frac{1}{3}\right)+2\right)}; \text{ е) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

$$24 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7)n}{n+1}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+1)(n+5)}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)7^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n};$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1)+3)^{\frac{2}{3}}}; \text{ е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2n}}.$$

$$25 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)(n+2)}{(2n+3)(n+5)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2+3}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\ln\left(n-\frac{1}{2}\right)+5\right)^3}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+11}.$$

$$26 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n^2+5}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3\sqrt{n+3}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}; \text{ г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{\ln^n n};$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(\ln(n+3)+1)^2}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+11}.$$

$$27 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{n^3+5}{2n^2+1}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n \cdot 3^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{n}\right)^n;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln^2 n + 1)n}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+5)^n}.$$

$$28 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+11}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{4^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{3^n};$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln^2(n+2)+1)(n+2)}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+7}}.$$

$$29 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2+1}{2n^2}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{n^4+9n+5}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n};$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+\ln n}}; \text{ е) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$$

$$30 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{n^2+5}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+3}}{n+1}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+2)!}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+7}\right)^n;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4+\ln n)^2}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}.$$

$$31 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+7}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n+4}}{n+1}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n;$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4+\ln n)^3}; \text{ е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}.$$

Завдання 5 Степеневі ряди. Радіус та інтервал обіжності

Знайти радіус, інтервал і область збіжності степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} (x+5)^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{n^4 \sqrt{n}} (x+4)^n.$$

Приклад а). Будемо послідовно знаходити:

1 Радіус збіжності за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \cdot \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, радіус збіжності степеневого ряду $R = \frac{1}{4}$.

2 Зобразимо інтервал збіжності $(x_0 - R; x_0 + R)$. В нашому випадку $x_0 = 0$. Тому отримаємо інтервал $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ (рисунок 3).

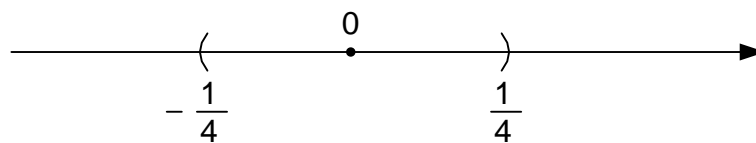


Рисунок 3

Для $x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ ряд збігається абсолютно, для $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ ряд розбігається.

3 Для отримання області збіжності числового ряду потрібно перевірити, чи буде збігатися або розбігатися ряд на кінцях інтервалу збіжності $\left(x = -\frac{1}{4}; x = \frac{1}{4}\right)$. Якщо $x = -\frac{1}{4}$, степеневий ряд

в цій точці перетворюється у числовий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Цей числовий ряд буде знакопереміжним. Ряд, отриманий з модулів, розбігається $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{ряд Діріхле, } \alpha = \frac{1}{2}\right)$. Але сам ряд

збігається умовно за теоремою Лейбніца, оскільки його члени, монотонно спадаючи, прямують до нуля:

$\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \dots \rightarrow 0$. Тому $x = -\frac{1}{4}$ треба додати

до області збіжності. Перевіримо правий кінець інтервалу збіжності $x = \frac{1}{4}$. В цій точці степеневий ряд перетворюється в числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Цей числовий ряд розбігається. Таким чином, точка $x = \frac{1}{4}$ не належить області збіжності.

Відповідь: областю збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{\sqrt{n}}$ є інтервал $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Приклад б). Знайдемо радіус збіжності за формулою $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 (n+1)!}{n! (n+2)^3} = \infty$. Таким чином, радіус збіжності степеневого ряду $R = \infty$.

Відповідь: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} (x+5)^n$ збігається на всій числовій осі.

Приклад в). 1 Знайдемо радіус збіжності за формулою $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^2 \cdot (n+1)^4 \sqrt{n+1}}{n^4 \sqrt{n} \cdot (n+4)^2} = 1$. Таким чином, радіус збіжності степеневого ряду $R = 1$.

2 Зобразимо інтервал збіжності $(x_0 - R; x_0 + R)$. В нашому випадку $x_0 = -4$. Тому отримаємо інтервал $(-4 - 1; -4 + 1) = (-5; -3)$ (рисунок 4).

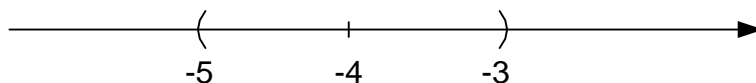


Рисунок 4

Для $x \in (-5; -3)$ ряд збігається абсолютно, для $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$ ряд розбігається.

3 Для отримання області збіжності числового ряду потрібно перевірити, чи буде збігатися або розбігатися ряд на кінцях інтервалу збіжності ($x = -5; x = -3$). Якщо $x = -5$, степеневий ряд в цій точці перетворюється у числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2(-5+4)^n}{n^4\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)^2}{n^4\sqrt{n}}.$$

Отримаємо знакопереміжний числовий ряд. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{n^4\sqrt{n}}$, отриманий з модулів, збігається за

ознакою рівняння з рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha = \frac{5}{2}$. Тому ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)^2}{n^4\sqrt{n}}$ збігається абсолютно. Таким чином $x = -5$ треба

додати до області збіжності. Перевіримо правий кінець інтервалу збіжності $x = -3$. В цій точці степеневий ряд перетворюється в

числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2(-3+4)^n}{n^4\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{n^4\sqrt{n}}$. Цей числовий ряд

збігається. Таким чином, точка $x = -3$ належить області збіжності.

Відповідь: областю збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{n^4\sqrt{n}}(x+4)^n \text{ є сегмент } [-5; -3].$$

Визначити: для а) інтервал збіжності; для б) область збіжності степеневих рядів [8, с. 24-26; 9, с. 36-38].

Варіанти завдань

1 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(n+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+\sqrt{n}}$.

2 а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n-1}}$.

$$3 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} (x-3)^n.$$

$$4 \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{15^n}{n\sqrt{n}} (x+2)^n.$$

$$5 \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)} x^n; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2+1}.$$

$$6 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^n; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} (x+6)^n.$$

$$7 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^3+1}.$$

$$8 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{4\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)^n}.$$

$$9 \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^n}{n(n+2)}.$$

$$10 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{7\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n} (x-1)^n.$$

$$11 \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4)^5}{n!} x^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+5)^n}.$$

$$12 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{9^n} (x-2)^n.$$

$$13 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3}{n!} x^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} (x-2)^n}{(n+1)}.$$

$$14 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^4} (x-1)^n.$$

$$15 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{(n+1)^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n5^n} (x-3)^n.$$

$$16 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

- 17 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+2)^n}{(n+1)^n}$.
- 18 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+1)^n}{n(n+1)}$.
- 19 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-1)^n}{n+1}$.
- 20 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{\sqrt[5]{n}}$.
- 21 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x-5)^n}{2^n}$.
- 22 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n(n+6)}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{(n+1)^3}$.
- 23 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{8^{n+1}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{3^{n-1}}$.
- 24 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n\sqrt[3]{n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} (x-5)^n$.
- 25 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+5)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!} (x+4)^n$.
- 26 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n(3n+2)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} (x+2)^n$.
- 27 a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^2 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n(n+3)} (x-4)^n$.
- 28 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{n-1}}$.
- 29 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{\sqrt[3]{n}} (x+2)^n$.
- 30 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n(n+5)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!n^n}$.

$$31 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3} x^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n} (x-5)^n$$

Завдання 6 Розкладання функцій у степеневі ряди

Знайти п'ять перших членів розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x; y)$, яке задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$, [8, с. 28-29].

Варіанти завдань

- | | |
|---|---|
| 1 $y' = \cos x + y^2; \quad y(0) = 1.$ | 2 $y' = e^x + y^2; \quad y(0) = 0.$ |
| 3 $y' = e^x + y^3; \quad y(0) = 1.$ | 4 $y' = e^y - xy; \quad y(0) = 0.$ |
| 5 $y' = 2e^y + xy; \quad y(0) = 1.$ | 6 $y' = e^x + 3xy; \quad y(0) = 1.$ |
| 7 $y' = x^2 - 2y^2; \quad y(0) = 1.$ | 8 $y' = e^y + xy; \quad y(0) = 0.$ |
| 9 $y' = \sin xy; \quad y(0) = 1.$ | 10 $y' = 1 - xy; \quad y(0) = 0.$ |
| 11 $y' = x^2 + 3xy; \quad y(0) = 1.$ | 12 $y' = 2x + 3x^2 - 2y^2; \quad y(0) = 1.$ |
| 13 $y' = x^2 - y^2; \quad y(0) = 0.$ | 14 $y' = 5x^2 + 2y^2; \quad y(0) = 1.$ |
| 15 $y' = 7x + 3x^2 - 2y^2; \quad y(0) = 2.$ | 16 $y' = 4y^3 + 5x^2; \quad y(0) = 3.$ |
| 17 $y' = 4e^{2y} + xy; \quad y(0) = 0.$ | 18 $y' = \cos 5x - 2y^3; \quad y(0) = 1.$ |
| 19 $y' = 6e^y + 2xy; \quad y(0) = 0.$ | 20 $y' = 4\cos 2x + 5y^2; \quad y(0) = 1.$ |
| 21 $y' = 4x + 5x^2 - 2y^3; \quad y(0) = 3.$ | 22 $y' = \sin 4x + 5y^2; \quad y(0) = 1.$ |
| 23 $y' = 2e^y + 7xy; \quad y(0) = 0.$ | 24 $y' = 3e^x + 2y^2; \quad y(0) = 0.$ |
| 25 $y' = e^{3x} + 5xy; \quad y(0) = 1.$ | 26 $y' = e^x + xy; \quad y(0) = 4.$ |
| 27 $y' = 2\sin x + 2y^2; \quad y(0) = 1.$ | 28 $y' = 3e^y + 5xy; \quad y(0) = 0.$ |
| 29 $y' = x^2 + 4x + 2y^2; \quad y(0) = 1.$ | 30 $y' = 4e^y - 7xy; \quad y(0) = 0.$ |
| 31 $y' = 0.2e^y + 3xy; \quad y(0) = 0.$ | |

Завдання 7 Застосування розкладів деяких функцій у степеневі ряди

Обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши підінтегральну функцію в ряд, а потім проінтегрувавши її почленно.

Примітка – Всі наведені в завданні невласні інтеграли є збіжними [8, с.26-28].

Варіанти завдань

$$1 \int_0^1 e^{-x^2} dx .$$

$$2 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} .$$

$$3 \int_0^{0.5} e^{-2x^2} dx .$$

$$4 \int_0^{0.3} e^{-x^2} dx .$$

$$5 \int_0^{0.5} \cos(x^2) dx .$$

$$6 \int_0^{0.2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} .$$

$$7 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} .$$

$$8 \int_0^{0.5} e^{-x^3} dx .$$

$$9 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1-\cos x}{x} dx .$$

$$10 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^x - 1}{x} dx .$$

$$11 \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{1+x^3} dx .$$

$$12 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx .$$

$$13 \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4} .$$

$$14 \int_0^1 \sin(x^3) dx .$$

$$15 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$16 \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$17 \int_0^{0.5} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx.$$

$$18 \int_0^1 \cos(x^2) dx.$$

$$19 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$$

$$20 \int_0^{\frac{1}{2}} \arctg(x^2) dx.$$

$$21 \int_0^{0.4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$22 \int_0^{0.5} x \cdot \arctg(x) dx.$$

$$23 \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

$$24 \int_0^1 e^{-3x^2} dx.$$

$$25 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx.$$

$$26 \int_0^{\frac{1}{2}} x \ln(1+x^2) dx.$$

$$27 \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$28 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(x^2) dx.$$

$$29 \int_0^1 e^{-x/3} dx.$$

$$30 \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx.$$

$$31 \int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2} dx.$$

Список літератури

- 1 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.
- 2 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Зб. задач. – К.: А.С.К., 2005.
- 3 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.
- 4 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1966.
- 5 Тевящев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник для студентів технічних університетів. – Харків: УкрДАЗТ, 2002.
- 6 Комплексні числа. Інтегральне числення функції однієї змінної: Методичні вказівки і контрольні завдання для студ. 1 курсу спец. «Управління процесами перевезень на залізничному транспорті» / Уклад. Р.О. Єфременко. – Харків: УкрДАЗТ, 2000.
- 7 Диференціальні рівняння: Методичні вказівки і контрольні завдання для студентів 1 курсу спец. «Управління процесами перевезень на залізничному транспорті» / Уклад. Р.О. Єфременко. – Харків: УкрДАЗТ, 2000.
- 8 Методичні вказівки і завдання до контрольних робіт 5,6 з дисципліни «Вища математика» Методичні вказівки і контрольні завдання для студ. 1 курсу спец. «Управління процесами перевезень на залізничному транспорті» / Уклад. Р.О. Єфременко, Л.В. Наземцева. – Харків: УкрДАЗТ, 2002.
- 9 Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з тем «Диференціальні рівняння і ряди»/ Уклад. І.В. Ковалішина. – Харків: УкрДАЗТ, 1998.
- 10 Диференціальні рівняння: Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з дисципліни «Вища математика»/ Уклад. Ю.В. Куліш, О.В. Рибачук. – Харків: УкрДАЗТ, 2002.
- 11 Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з теми «Інтегральне числення»/ Уклад. І.В. Ковалішина. – Харків, УкрДАЗТ, 1998.

12 Інтегральне числення функцій однієї змінної та його застосування: Методичні вказівки до виконання контрольних робіт для студ. загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання/ Уклад. Л.М.Забеліна. – Харків: УкрДАЗТ, 1998.

