МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра „Механіка і проектування машин”

З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни
„*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*”

Змістовний модуль
"СТАТИКА"

Харків - 2009

Іванова З.О., Аксьонова Н.А. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». Змістовний модуль

«Статика». – Харків: УкрДАЗТ, 2009. – 50 с.

Конспект лекцій призначений для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей механічного, будівельного та АТЗ факультетів. За обсягом конспект охоплює повний курс розділу "Статика" та являє собою складову частину методичного забезпечення роботи студентів при вивченні „Теоретичної механіки”.

Іл. 61, табл. 1, бібліогр.: 2 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 24 грудня 2007 р., протокол № 5.

Рецензент

доц. О.В. Братченко

З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни „ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”

Змістовний модуль "СТАТИКА"

Відповідальний за випуск Іванова З.О.

Редактор Губарева К.А.

Підписано до друку 05.02..08 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 3,0. Обл.-вид.арк. 3,25.
Замовлення № Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

УКРАІНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра “Механіка і проектування машин”

З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни „ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”

Змістовний модуль "СТАТИКА"

Харків 2009 р.

Іванова З.О., Аксьонова Н.А. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». Змістовний модуль «Статика». – Харків: УкрДАЗТ, 2009. – 50 с.

Конспект лекцій призначений для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей механічного, будівельного та АТЗ факультетів. За обсягом конспект охоплює повний курс розділу "Статика" та являє собою складову частину методичного забезпечення роботи студентів при вивченні „Теоретичної механіки”.

Іл. 61, табл. 1, бібліогр.: 2 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 24 грудня 2007 р., протокол № 5.

Рецензент

доц. О.В. Братченко

ЗМІСТ

ВСТУП

Впровадження кредитно - модульної системи навчання вимагає нових підходів до викладання загальноінженерних дисциплін, у тому числі дисципліни "Теоретична механіка".

Сучасна методика викладання цієї дисципліни базується на концепції "Положення про впровадження кредитно - модульної системи організації навчального процесу" від 22.02.2005 р.

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного, будівельного та АТЗ факультетів на І, ІІ та ІІІ курсах дисципліни “Теоретична механіка”. При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам. Вищесказане зумовило необхідність розробки і введення до навчального процесу конспекту лекцій, який висвітлює основні питання розділу "Статика". Конспект лекцій є складовою методичного забезпечення самостійної роботи студентів при вивченні дисципліни "Теоретична механіка".

Теоретична механіка – це наука про найзагальніші закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл.

Механічним рухом називається зміна положення одного тіла відносно іншого, яка відбувається у просторі з плином часу.

Механічною взаємодією називаються такі взаємодії матеріальних тіл, які змінюють або намагаються змінити характер їх механічного руху чи форми (створити деформацію).

Теоретична механіка належить до фундаментальних дисциплін та створює основу багатьох інженерних дисциплін.

В основі теоретичної механіки лежать закони, що називаються законами класичної механіки або законами Ньютона, які встановлені шляхом узагальнення результатів великої кількості експериментів і спостережень. Їхня справедливість перевірена багатовіковою практичною діяльністю людини.

Для вивчення всієї різноманітності механічних явищ теоретична механіка узагальнена в три розділи, які розглядаються у сукупності: статика, кінематика і динаміка.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКСІОМИ СТАТИКИ

Статика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються сили, методи перетворення систем сил на еквівалентні та встановлюються умови рівноваги сил, прикладених до твердого тіла.

1.1 Основні поняття і визначення

Матеріальна точка – фізичне тіло певної маси, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху.

Системою матеріальних точок називається така сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух кожної точки залежать від положення і руху інших точок цієї системи.

Тверде тіло є системою матеріальних точок.

Абсолютно тверде тіло – тіло, в якому відстані між двома довільними його точками залишаються незмінними. Вважаючи тіла абсолютно твердими, не враховують деформацій, що виникають у реальних тілах.

Кінематичний стан тіла – стан спокою або руху певного характеру, в якому тіло може знаходитись.

Сила – величина, яка є мірою механічної взаємодії тіл і визначає інтенсивність та напрямок цієї взаємодії (рисунок 1). Одиницею вимірювання сили в системі СІ є ньютон (1 Н).

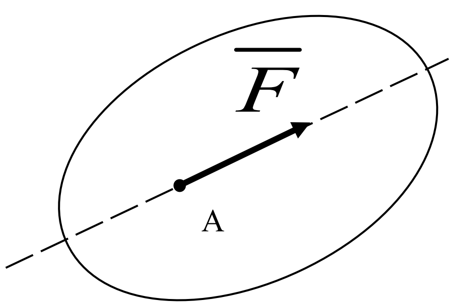


Рисунок 1

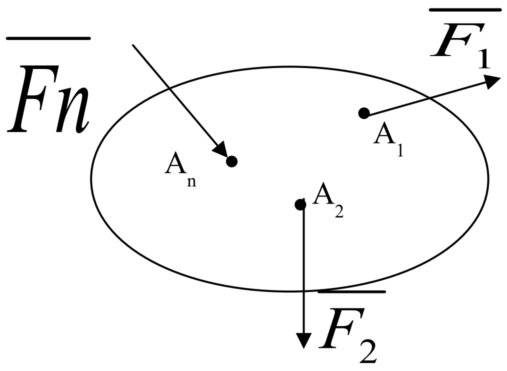


Рисунок 2

Системою сил називається сукупність сил, що діють на матеріальне тіло або точку $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2,.....\overline{Fn}\}$, або $\{\overline{Fn}\}$, де $n = 1,2,...k$ (рисунок 2).

Еквівалентні системи сил - це такі дві системи сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2,.....\overline{Fn}\}$ і $\{\overline{P_1}, \overline{P_2},.....\overline{Pk}\}$, кожну з яких можна замінити іншою, не порушуючи кінематичний стан твердого тіла

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2,.....\overline{Fn}\} \quad \infty \quad \{\overline{P_1}, \overline{P_2},.....\overline{Pk}\}.$$

Рівнодійна система сил - сила $\overline{R}$, яка еквівалентна системі сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2,.....\overline{Fn}\}$.

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2,.....\overline{Fn}\} \quad \infty \quad \overline{R}.$$

Рисунок 3

Зрівноважуючою силою називається сила $\overline{F}$, що дорівнює за модулем рівнодійній та спрямована вздовж лінії її дії протилежно (рисунок 3)

$$\overline{F} = -\overline{R}.$$

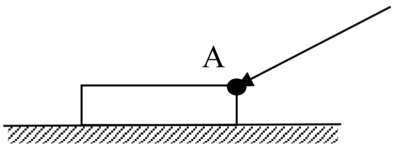
Зрівноважена система сил – система сил, під дією якої тіло знаходиться у рівновазі. Зрівноважена система сил еквівалентна нулю.

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2,.....\overline{Fn}\} \quad \infty \quad \overline{R} \quad \infty \quad 0.$$

Види сил

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між точками (тілами) даної системи.

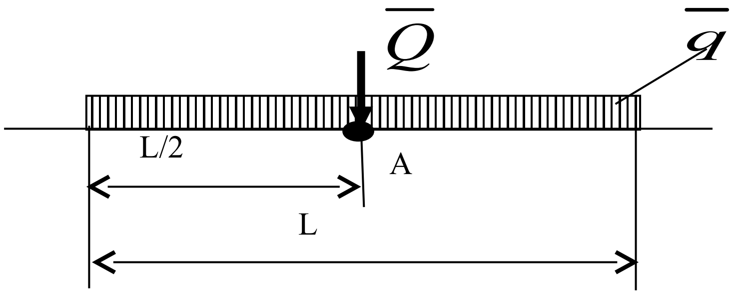
Зовнішні сили - це сили, що діють на матеріальні точки (тіла) даної системи з боку матеріальних точок (тіл), що цій системі не належать.



Зосереджена сила - це сила $\overline{Q}$, прикладена до тіла в будь-якій одній його точці (рисунок 4).

Рисунок 4

Розподіленими силами називаються сили, що діють на всі точки тіла (масові, об’ємні) чи на всі точки певної частини поверхні тіла (поверхневі) (рисунок 5).



$\overline{q} = const$,

$Q = L \cdot q.$

Рисунок 5

Основна задача статики

1 Приведення систем сил, діючих на тіло, до еквівалентних спрощеного вигляду.

2 Визначення умов рівноваги діючих на тіло систем сил.

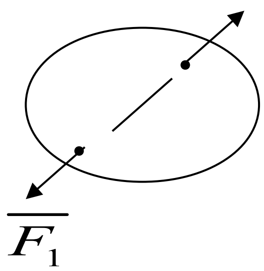
Щоб тіло під дією системи сил знаходилось у **рівновазі** (спокої), необхідна відповідність сил умовам рівноваги даної системи сил.

1.2 Аксіоми статики

Аксіоми відображають властивості сил, що діють на тіло.

1.2.1 Аксіома інерції (закон Галілея)

Під дією взаємозрівноважених сил матеріальна точка (тіло) знаходиться у стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно.



1.2.2 Аксіома рівноваги двох сил

Дві сили, прикладені до твердого тіла, будуть зрівноважені тільки у випадку, коли вони рівні за модулем і спрямовані вздовж однієї прямої протилежно (рисунок 6).

Рисунок 6

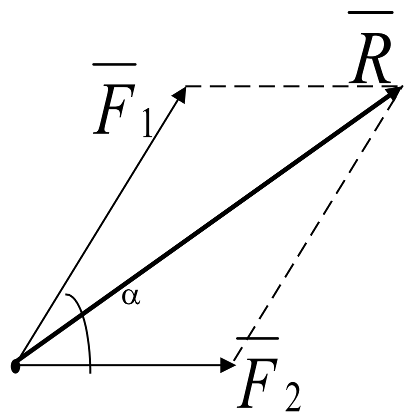
$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2\} \infty 0, \quad \overline{F}_1 = -\overline{F}_2, \quad |F_1| = |F_2|.$$

Друга аксіома є умовою рівноваги тіла під дією двох сил.

1.2.3 Аксіома додавання та вилучення зрівноважених сил

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або вилучити будь-яку зрівноважену систему сил.

Наслідок. Не порушуючи стан абсолютно твердого тіла, силу можна переносити вздовж її лінії дії у будь-яку точку, зберігаючи незмінними її модуль та напрямок. Тобто сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є **ковзним вектором**.



1.2.4 Аксіома паралелограма сил

Рівнодійна двох сил, які перетинаються в одній точці, прикладена в точці їх перетину і визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як сторонах (рисунок 7).

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}, \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

Рисунок 7

1.2.5 Аксіома дії та протидії

Кожній дії відповідає рівна за модулем та протилежна за напрямком протидія.

1.2.6 Аксіома рівноваги сил, прикладених до деформовного тіла при його твердінні (принцип твердіння)

Рівновага сил, прикладених до деформовного тіла (змінної системи), зберігається, якщо тіло вважати затверділим (незмінним).

1.2.7 Аксіома звільнення тіла від зв'язків

Не змінюючи стан тіла, будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв'язки, а їх дію замінити реакціями.

1.3 Зв'язки та їх реакції

Вільне тіло - таке тіло, яке може здійснювати довільні переміщення у просторі в будь-якому напрямку.

Зв'язками називаються тіла, що обмежують рух даного тіла в просторі.

Невільне тіло - тіло, переміщення якого в просторі обмежено іншими тілами (зв'язками).

Реакцією зв'язку називається сила, з якою зв'язок діє на дане тіло.

Реакція зв'язку завжди спрямовується протилежно тому напрямку, в якому зв'язок протидіє можливому руху тіла.

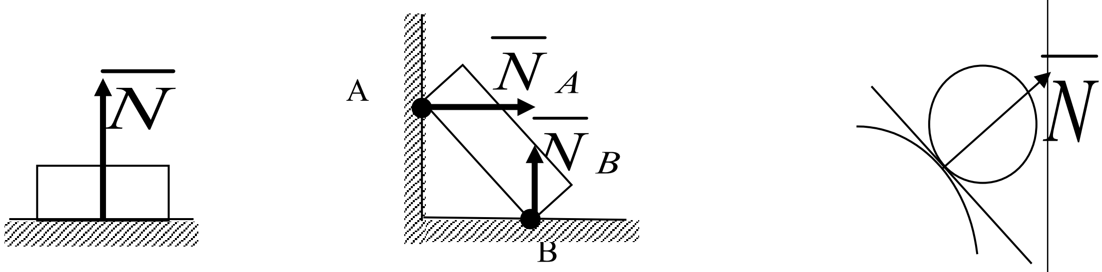
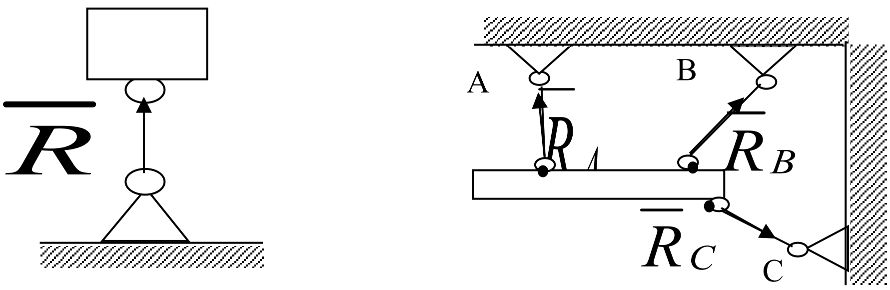
Активна сила - це сила, яка характеризує дію інших тіл на задане, що викликає або може викликати зміну його кінематичного стану.

Реактивна сила – це сила, що характеризує дію зв'язків на дане тіло.

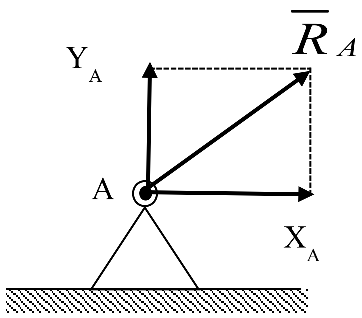
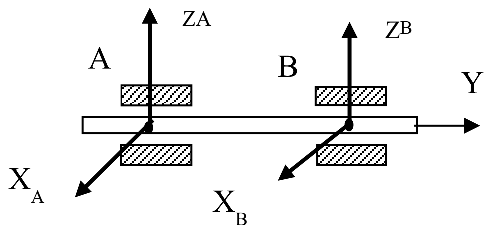
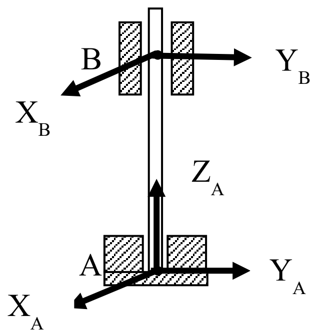
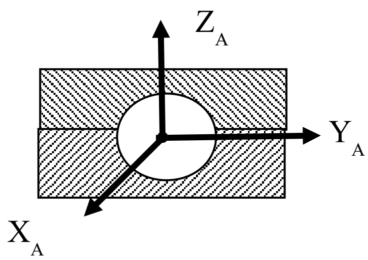
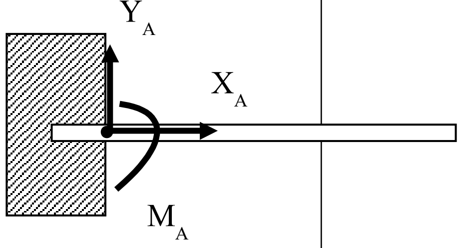
За аксіомою про звільнення тіла від зв'язків, будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, звільнивши його від зв'язків і замінивши їх дію реакціями. У цьому полягає **принцип звільнення від зв'язків**.

Основні види зв'язків наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 - Основні види зв'язків

1	*Ідеальна (гладка) поверхня або опора* (реакція перпендикулярна поверхні - $\overline{N}$ -нормальна реакція поверхні) 
2	*Ідеальна нитка* (реакція $\overline{R}$ спрямована вздовж нитки, троса) 
3	*Ідеальний стрижень* (реакція $\overline{R}$ спрямована вздовж стрижня) 
4	*Шарнірно – рухома опора* (опора на котках) (реакція $\overline{R}$ перпендикулярна поверхні) 

Продовження таблиці 1

5	*Шарнірно – нерухома опора* (реакція $\overline{R}_A$ складається з її проекцій на координатні осі X_A та Y_A) $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$	
6	*Циліндричний шарнір або підшипник* (реакція складається з проекцій, спрямованих вздовж осей, перпендикулярних осі циліндра)	
7	*Упорний підшипник* (реакція точки А складається з проекцій вздовж координатних осей. В точці В – циліндричний шарнір)	
8	*Сферичний підшипник* (реакція складається з проекцій на просторові осі координат) $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$	
9	*Нерухоме закріплення* (жорстке закладання) (реакції складаються з проекцій X_A і Y_A, а також реактивного моменту M_A)	

1.4 Теорема про три сили

Теорема:

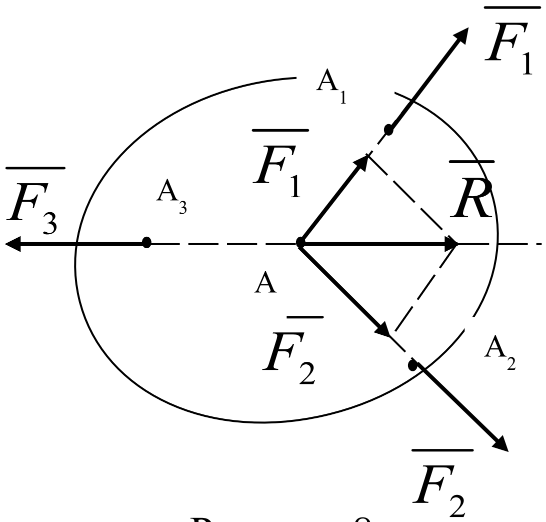


Рисунок 8

Лінії дії трьох непаралельних взаємно зрівноважених сил, які лежать в одній площині, перетинаються в одній точці.

Якщо лінії дії трьох сил перетинаються в одній точці, то тіло під дією цих сил може і не бути в стані рівноваги, тобто обернена теорема не має місця (рисунок 8).

Для доведення теореми використовують аксіоми статики про паралелограм сил та про рівновагу двох сил.

Теорема про три непаралельні сили дається за умови, що прикладена система сил зрівноважена.

2 СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

2.1 Визначення рівнодійної системи збіжних сил

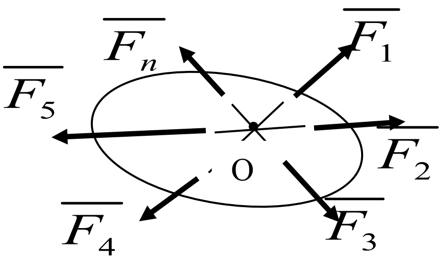


Рисунок 9

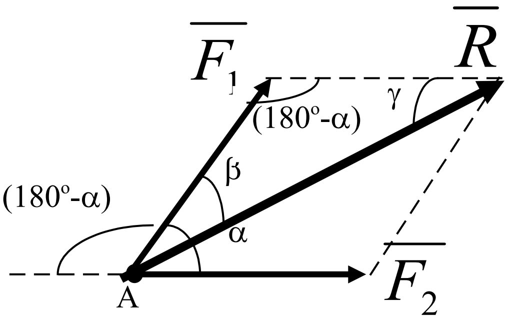
Система збіжних сил - це система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Така система сил $\{\overline{F_n}\}$ наведена на рисунку 9. Точка перетину ліній дії сил – точка О.

Система збіжних сил еквівалентна одній силі – **рівнодійній**, яка дорівнює векторній сумі сил і прикладена в точці перетину ліній їх дії:

$$\overline{R} = \overline{F_1}, + \overline{F_2} + ... + \overline{F_k} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}. \tag{1}$$

Методи визначення рівнодійної системи збіжних сил



1 Метод паралелограмів сил. На підставі аксіоми паралелограма сил, кожні дві сили даної системи послідовно приводяться до однієї сили – рівнодійної (рисунок 10).

Рисунок 10

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}. \tag{2}$$

Напрямок вектора рівнодійної

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180-\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

2 Побудова векторного силового багатокутника. Послідовно паралельним перенесенням кожного вектора сили в кінцеву точку попереднього вектора утворюється багатокутник, сторонами якого є вектори сил системи, а замикаючою стороною – вектор рівнодійної системи збіжних сил (рисунок 11).

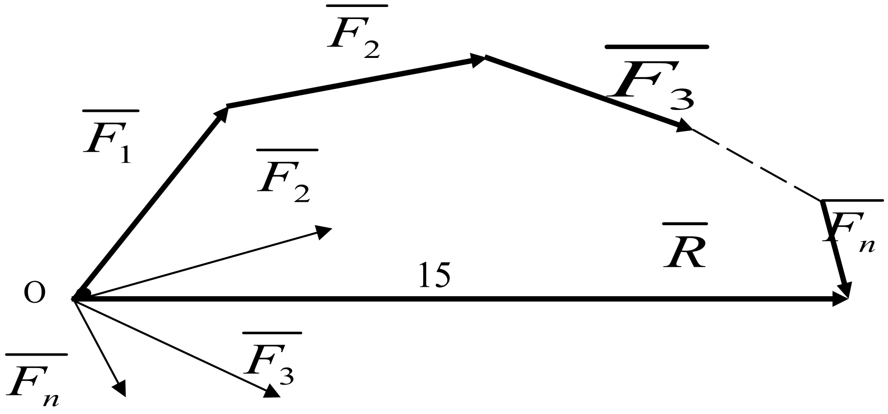


Рисунок 11

2.2 Умови рівноваги системи збіжних сил

Геометрична умова рівноваги збіжної системи сил: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб векторний силовий багатокутник, побудований на цих силах, був замкнутим.

$$\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F}_n = 0 . \qquad (4)$$

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на координатні осі дорівнювали нулю.

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0, \ \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, \ \sum_{n=1}^{k} F_{nZ} = 0 . \qquad (5)$$

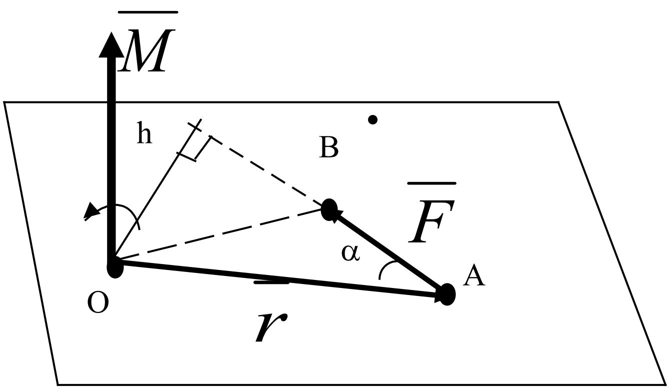
Рівняння (5) є умовою рівноваги системи збіжних сил, розташованих у просторі.

2.3 Момент сили відносно центра

Будь – який кінематичний стан тіл, що мають точку або вісь обертання, можна описати **моментом сили**, який характеризує обертальний ефект дії сили.

Момент сили відносно центра як вектор - це векторний добуток радіуса–вектора $\overline{r}$ точки прикладання сили на вектор сили $\overline{F}$.

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} \ . \qquad (6)$$



Сила $\overline{F}$ прикладена до точки А, радіус–вектор якої відносно довільного центра О визначається як $\overline{r} = \overline{OA}$ (рисунок 12).

Рисунок 12

Модуль моменту сили визначається за векторним добутком $\overline{r}$ і $\overline{F}$ та кутом α між радіусом–вектором та вектором сили

$$|\overline{M_O}(\overline{F})| = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin(\overline{r} \wedge \overline{F}) = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin(\alpha) = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h. \qquad (7)$$

Величина (r·sin α) = **h** –**плече сили** – найкоротша відстань від центра (точки) до лінії дії сили (перпендикуляр із центра на лінію дії сили) (рисунок 12).

Вектор $\overline{M_O}(\overline{F})$ спрямовується за правилом векторного добутку: момент сили відносно центра (точки) як вектор спрямовується перпендикулярно площині, в якій розміщені сила і центр так, щоб з його кінця було видно намагання сили повертати тіло навколо центра проти ходу стрілки годинника.

Алгебраїчна величина моменту сили

Момент сили відносно центра в площині – алгебраїчна величина, яка дорівнює добутку модуля сили $\overline{F}$ на плече h відносно того ж центра з урахуванням знака.

$$M_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h\,. \tag{8}$$

Знак моменту сили залежить від напрямку, в якому сила намагається обертати центр (рисунок 13):

1) проти ходу стрілки годинника – „+” (додатній);

2) за стрілкою годинника – „-” (від’ємний).

Рисунок 13

Одиницею вимірювання моменту сили є ньютон на метр (1 Н•м).

Властивості моменту сили відносно центра (точки)

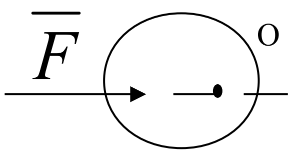
1 Модуль моменту сили відносно точки дорівнює подвоєній площі трикутника, побудованого на векторах $\overline{r}$ і $\overline{F}$.

$$M_O(\overline{F}) = F \cdot h = AB \cdot h = 2\, S_{\Delta OAB}, \tag{9}$$

де $S_{\Delta OAB} = AB \cdot h\,/2$ (рисунок 12).

2 Момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні сили вздовж її лінії дії, оскільки незмінним залишається плече сили.

3 Момент сили відносно центра

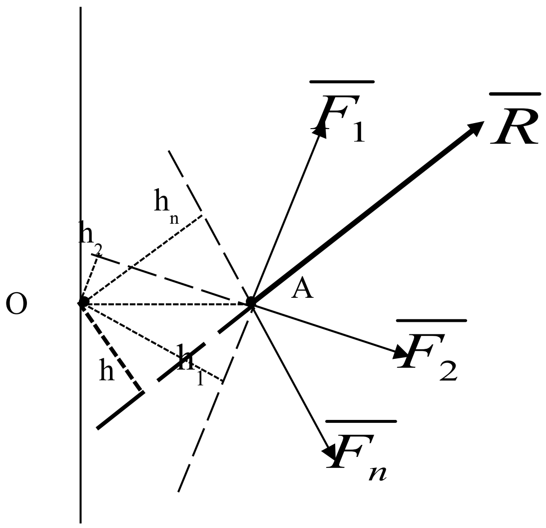


(точки) **дорівнює нулю** $M_O(\overline{F}) = 0$**,** коли:

- сила дорівнює нулю $F = 0$;
- плече сили $h = 0$, тобто лінія дії сили проходить через центр (рисунок 14).

Рисунок 14

Теорема Варіньона (про момент рівнодійної)



$$\overline{M}_O(\overline{R}) = \overline{r} \times \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n} = \sum_{n=1}^{k} (\overline{r} \times \overline{F_n});$$

$$M_O(\overline{R}) = \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) = \sum_{n=1}^{k} (F_n \cdot h_n), \quad (10)$$

де h_n - плечі сил системи відносно центра О.

Рисунок 15

Теорема

Момент рівнодійної плоскої системи збіжних сил відносно будь - якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил системи відносно того ж центра (рисунок 15)

$$M_O(\overline{R}) = M_O(\sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}) = \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}). \quad (11)$$

3 ТЕОРІЯ ПАР СИЛ

3.1 Складання двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону

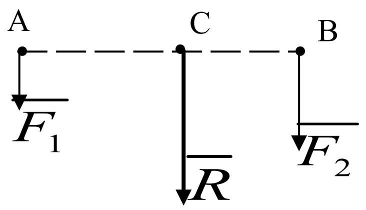


Рисунок 16

Сили $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$ діють на абсолютно тверде тіло в точках А і В відповідно.

$F_1 \neq F_2$, $\overline{F_1}\,\text{II}\,\overline{F_2}$ та спрямовані в одну сторону (рисунок 16).

Рівнодійна системи двох паралельних, спрямованих в одну сторону, дорівнює за модулем сумі модулів складових сил $R = F_1 + F_2$, паралельна їм та спрямована в тому ж напрямку.

Лінія дії рівнодійної проходить між точками прикладання складових сил на відстанях від цих точок, обернено пропорційних силам $\frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R}$ (рисунок 16).

3.2 Складання двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони

Випадок сил різних за модулем.

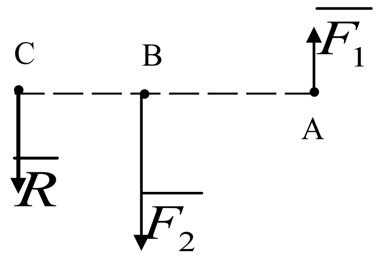


Рисунок 17

Сили $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$ діють на абсолютно тверде тіло в точках А і В відповідно. $F_1 \neq F_2$, $\overline{F_1}\,\text{II}\,\overline{F_2}$ та спрямовані в різні сторони (рисунок 17).

Рівнодійна двох паралельних, нерівних за модулем, протилежно спрямованих сил, паралельна їм і спрямована в напрямку більшої сили, а також за модулем дорівнює різниці складових сил $R = F_1 - F_2$.

Лінія дії рівнодійної проходить через точку, що розташована зовні відрізка AB з боку більшої сили, і поділяє відстань між точками прикладання сил на відрізки, обернено пропорційні силам (рисунок 17) $\frac{BC}{F_1}=\frac{AC}{F_2}=\frac{AB}{R}$.

3.3 Поняття про пару сил

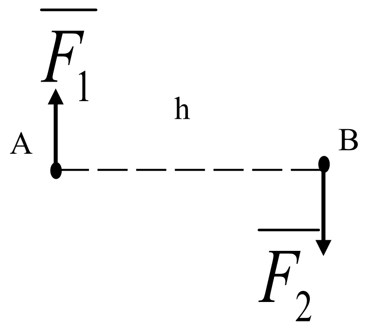


Рисунок 18

Пара сил – система двох паралельних, рівних за модулем та протилежних за напрямком сил, прикладених до абсолютно твердого тіла (рисунок 18).

Поряд із силою пара сил є самостійним елементом статики.

Плече пари сил h – відстань між лініями дії сил пари, тобто довжина перпендикуляра, проведеного з довільної точки лінії дії однієї із сил пари на лінію дії іншої сили.

Площина дії пари сил – це площина, в якій розташовані лінії дій сил пари.

Момент пари сил як вектор

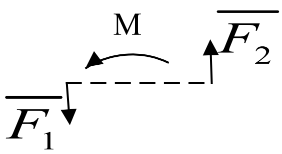
Моментом пари називається вектор $\overline{M}$ (рисунок 19) з такими ознаками:

- перпендикулярний площині пари;
- спрямований в ту сторону, звідки обертання, що здійснює пара, видно таким, яке відбувається проти стрілки годинника;
- його модуль дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече h пари з урахуванням знака

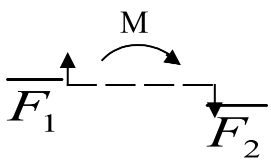
$$M = \pm F \cdot h \quad . \tag{12}$$

Рисунок 19

Знак моменту пари сил:



„+” – обертання проти стрілки годинника,



„-„ – обертання за стрілкою годинника.

Момент пари сил дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече пари (12).

Момент пари – **вільний вектор** – для нього ні точку прикладання, ні лінію дії не означено, вони можуть бути довільними (рисунок 19).

Властивість моменту пари сил: момент пари дорівнює моменту однієї із сил відносно точки прикладання іншої сили (рисунок 18).

$$M_B(\overline{F_1}) = M_A(\overline{F_2}) = M(\overline{F_1}\overline{F_2})\,. \tag{13}$$

Теореми про пару сил

Теорема 1 Пара сил не має рівнодійної, тобто пару сил не можна замінити однією силою.

Теорема 2 Пара сил не є системою зрівноважених сил.

Наслідком перших двох теорем є вже наведене твердження: пара сил, що діє на абсолютно тверде тіло, намагається обертати його.

Теорема 3 Сума моментів сил пари відносно довільного центра (точки) в просторі є величиною незмінною і являє собою вектор-момент цієї пари.

Теорема 4 Сума моментів сил, що складають пару, відносно довільного центра в площині дії пари не залежить від центра та дорівнює добутку сили на плече пари з урахуванням знака, тобто самому моменту пари.

$$M_O(\overline{F_1}) + M_O(\overline{F_2}) = \pm F_1 \cdot h\,. \tag{14}$$

Теорема 5 (про еквівалентність пар) Пари сил, моменти яких дорівнюють один одному чисельно та за знаком, є еквівалентними. Тобто пару сил можна замінити або зрівноважити тільки іншою еквівалентною парою сил.

Теорема 6 (про зрівноваженість пари сил) Пара сил складає зрівноважену систему сил тоді і тільки тоді, коли момент пари дорівнює нулю.

Теорема 7 (про можливості переміщення пари сил в площині її дії) Пара сил, що отримана переміщенням пари у будь-яке положення в площині її дії, еквівалентна наданій парі.

Теорема 8 (про додавання пар сил у площині) Момент пари, еквівалентної наданій системі пар у площині, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар. Тобто для складання пар сил необхідно скласти їх моменти.

$$M = \sum_{n=1}^{k} M_n \,. \tag{15}$$

Умови рівноваги системи пар сил

Пари сил у площині зрівноважуються у тому випадку, якщо алгебраїчна сума їх моментів дорівнює нулю.

$$\sum_{n=1}^{k} M_n = 0 \,. \tag{16}$$

4 ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

4.1 Приведення сили до даного центра.

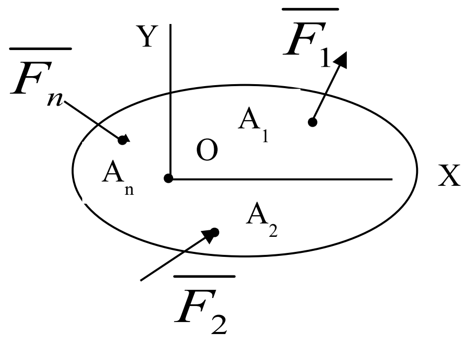


Рисунок 20

Теорема про паралельне перенесення сили

Довільна плоска система сил – це система сил, лінії дії яких розташовані в площині незалежно. A_1, A_2, A_n - точки прикладання сил системи $\{\overline{F_1}, \overline{F_2}, .. \overline{F_n}\}$ (рисунок 20).

Точка О - **центр приведення системи** (рисунок 20).

Теорема про паралельне перенесення сили (метод Пуансо): Силу $\overline{F}$, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна перенести паралельно самій собі в будь-який центр О (рисунок 21), додавши при цьому пару сил з моментом, що дорівнює моменту цієї сили відносно центра приведення.

Сила $\overline{F}$, прикладена в точці А, перенесена паралельно самій собі до центра О (рисунок 21) таким чином, що в центрі отримано силу $\overline{F'} = \overline{F}$ та пару сил ($\overline{F}, \overline{F''}$), момент якої дорівнює моменту сили $\overline{F}$ відносно центра О

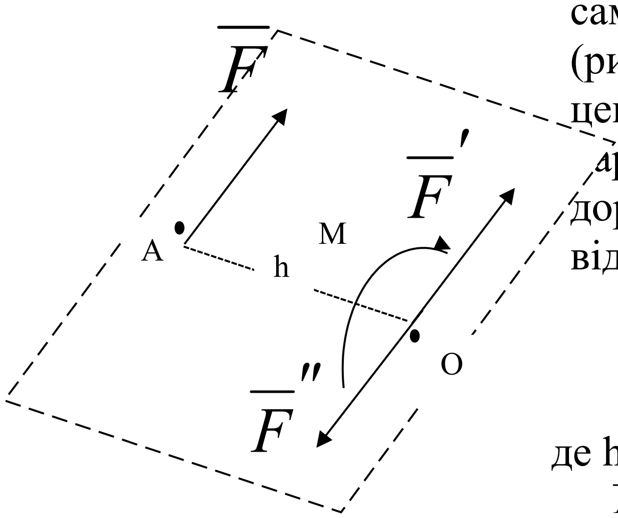


Рисунок 21

$$M(\overline{F}, \overline{F''}) = M_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h,$$

де h – плече пари (рисунок 21).

$\overline{F}_A$ замінюється $\overline{F}_O$ та $M_O(\overline{F})$.

Приведення довільної системи сил до даного центра. Головний вектор та головний момент системи сил

Методом Пуансо в центрі приведення О буде отримано систему сил і систему пар, моменти кожної з яких дорівнюють моментам відповідної сили відносно центра приведення (рисунок 22).

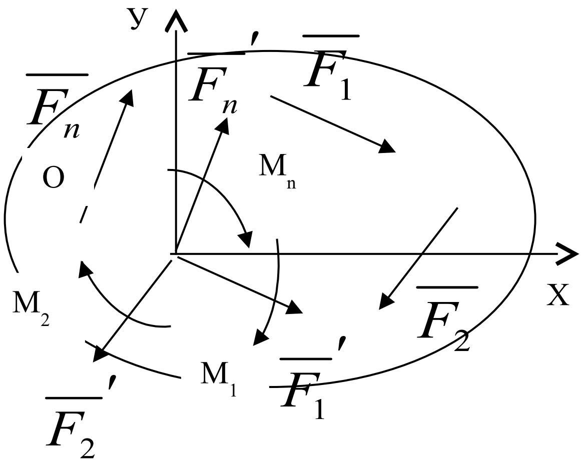


Рисунок 22

Головним вектором системи $\overline{R}$ називається вектор, що дорівнює геометричній сумі всіх сил системи.

$$\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}. \tag{17}$$

Модуль $\overline{R}$:

$$R=\sqrt{R_X^2+R_Y^2}\,,\;\; R_X=\sum_{n=1}^{k}F_{nX}\,,\;\;\; R_Y=\sum_{n=1}^{k}F_{nY}\;.$$

Напрямок вектора $\overline{R}$:

$$\cos(\overline{R},\overline{i})=\frac{R_X}{R}\,,\;\;\cos(\overline{R},\overline{j})=\frac{R_Y}{R}\;.$$

Головним моментом системи M_O відносно центра О в площині називається алгебраїчна сума моментів сил системи відносно центра приведення О.

$$M_O=\sum_{n=1}^{k}M_O(\overline{F_n})\,. \qquad (18)$$

Головний вектор $\overline{R}$ не залежить від обирання центра приведення О.

Головний момент сил M_O залежить від центра приведення.

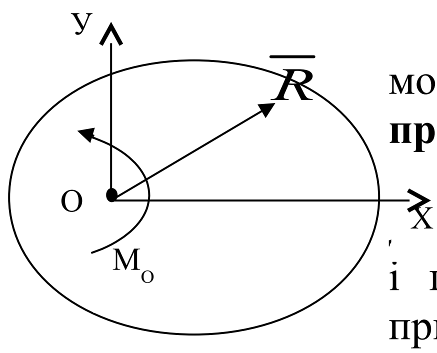


Рисунок 23

Головний вектор $\overline{R}$ і головний момент M_O називають **елементами приведення системи**.

Для задання системи сил гатньо задати її головний вектор $\overline{R}$ і головний момент відносно центра приведення M_O (рисунок 23).

Основна теорема статики про приведення системи сил до даного центра: Будь – яка плоска довільна система сил, діючих на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно обраного центра О може бути замінена однією силою $\overline{R}$, що дорівнює головному вектору системи і прикладається в центрі приведення О, та однією парою з моментом M_O, що дорівнює головному моменту системи відносно центра О.

Випадки приведення плоскої системи сил до спрощеного вигляду

1 $\overline{R} = 0$ і $M_O = 0$ - система знаходиться в стані **рівноваги**.

2 $\overline{R} = 0$ і $M_O \neq 0$ – система приводиться **до пари** з моментом, який дорівнює головному моменту системи M_O. Система може викликати обертальний рух тіла, до якого прикладена.

3 $\overline{R} \neq 0$ і $M_O = 0$ – система приводиться д**о рівнодійної** $\overline{R}$, яка проходить через центр О. Під дією такої сили тіло, на яке вона діє, може рухатись поступально в напрямку вектора сили $\overline{R}$.

4 $\overline{R} \neq 0$, $M_O \neq 0$ – система приводиться д**о рівнодійної** $\overline{R}$, яка прикладається в іншій точці, що не проходить через центр О.

4.2 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

4.2.1 Геометричні умови рівноваги

Для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб водночас головний вектор і головний момент системи дорівнювали нулю:

$$\overline{R} = 0, \quad M_O = 0. \tag{19}$$

4.2.2 Аналітичні умови рівноваги

Основна форма умов рівноваги

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) = 0. \tag{20}$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на координатні осі та сума їх моментів відносно будь – якого центра, який лежить у площині дії сил, дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0. \qquad (21)$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь – яких двох центрів А і В та сума їх проекцій на вісь ОХ, не перпендикулярну до прямої АВ $(AB \perp OX)$, дорівнювали нулю.

Третя форма умов рівноваги (рівняння трьох моментів)

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_C(\overline{F_n}) = 0. \qquad (22)$$

Для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь – яких трьох центрів А, В і С, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю.

Рівновага плоскої системи паралельних сил

Розглянемо систему сил $\{\overline{F_1}, \ \overline{F_2}, .. \overline{F_n}\}$ (рисунок 24), паралельних осі ОУ.

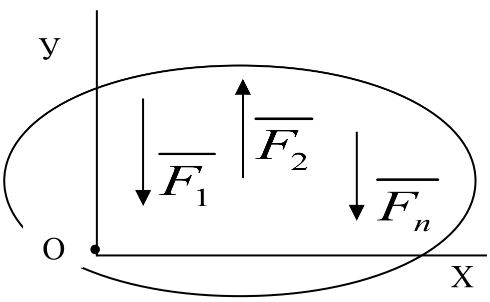


Рисунок 24

Перша форма:

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) = 0. \qquad (23)$$

Друга форма:

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0, \qquad (24)$$

точки А і В не повинні належати прямій, паралельній силам.

5 РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ

5.1 Основні поняття і визначення

Ферма - геометрично незмінна шарнірно-стрижнева конструкція (рисунок 25).

Ферма називається **плоскою**, якщо всі стрижні ферми лежать в одній площині (рисунок 25).

Визначеність або **стійкість ферми** відображає залежність кількості вузлів N і стрижнів K ферми:

- $K = 2N - 3$ - ферма визначена, стійка;
- $K > 2N - 3$ - ферма має зайві стрижні та є невизначеною;
- $K < 2N - 3$ - ферма нестійка, ферма є механізмом.

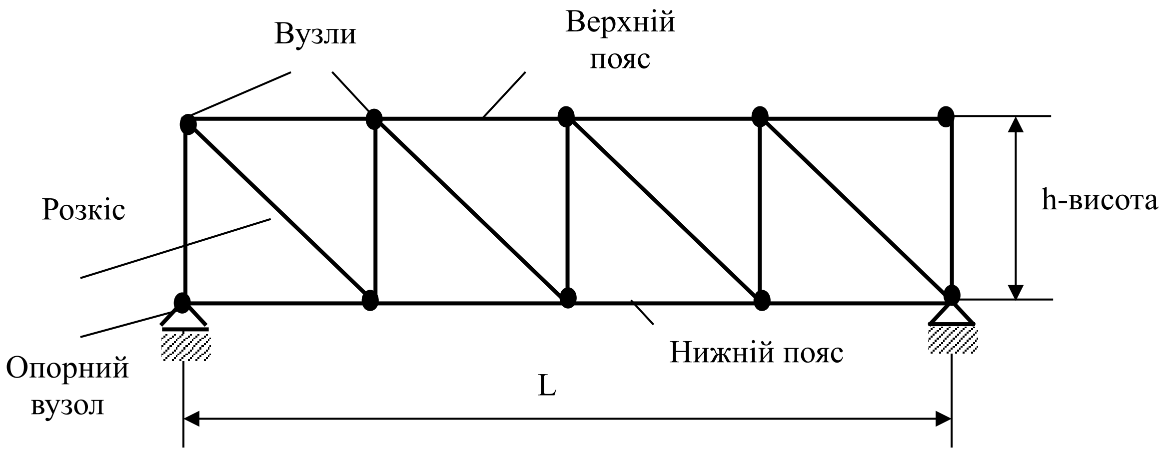


Рисунок 25

При розрахунку ферми тертям у вузлах та вагою стрижнів нехтують або розподіляють вагу стрижнів по вузлах. Усі зовнішні навантаження (сили) до ферми прикладають тільки у вузлах, тому всі стрижні ферми відчувають або стиснення, або розтягнення.

Розрахунок ферми зводиться до визначення опорних реакцій та зусиль у її стрижнях.

Для **визначення опорних реакцій** складають та розв'язують три рівняння рівноваги, вважаючи ферму абсолютно твердим тілом під дією відомих зовнішніх навантажень (активних сил) та невідомих реакцій опор (реактивних сил).

Для **визначення зусиль у стрижнях ферм** існує два методи.

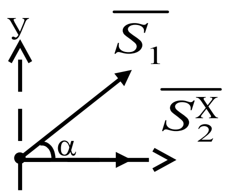
5.2 Метод вирізання вузлів

Метод вирізання вузлів полягає у тому, що уявно вирізають вузли ферми, прикладаючи до них відповідні зовнішні сили, реакції опор та реакції стрижнів, і складають рівняння рівноваги сил, прикладених до кожного вузла. Вирізається вузол з **двома невідомими зусиллями**, тому що в кожному вузлі складається збіжна система сил, відповідно складають два рівняння рівноваги у вигляді рівнянь (5)

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0, \; \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0.$$

Умовно припускають, що всі стрижні розтягнуті (реакції стрижнів спрямовані від вузлів).

Леми про нульові стрижні



Лема 1 Якщо у ненавантаженому вузлі плоскої ферми збігаються два стрижні, то зусилля у цих стрижнях дорівнюють нулю (рисунок 26) $\overline{S_1}$ =0, $\overline{S_2}$ =0.

Рисунок 26

Лема 2 Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми збігаються три стрижні, два з яких спрямовані вздовж однієї прямої, то зусилля у третьому стрижні дорівнюють нулю, а зусилля двох перших рівні між собою (рисунок 27) $\overline{S_1}$ = - $\overline{S_2}$, $\overline{S_3}$ =0.

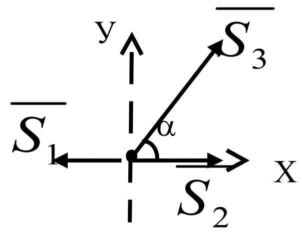
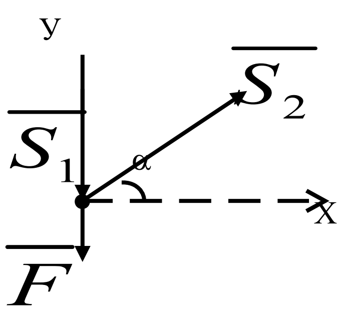


Рисунок 27



Лема 3 Якщо у вузлі плоскої ферми збігаються два стрижні і до вузла прикладена зовнішня сила, лінія дії якої співпадає з віссю одного зі стрижнів, то зусилля у цьому стрижні дорівнює за модулем прикладеній силі, а зусилля у другому - нулю (рисунок 28) $\overline{S_1} = \overline{F}$, $\overline{S_2}$ =0.

Рисунок 28

5.3 Метод Ріттера (метод перерізу)

Метод Ріттера полягає у тому, що ферму поділяють на дві частини перерізом, який проходить через **три** стрижні, в яких потрібно визначити зусилля, і розглядають рівновагу однієї з частин. Дію відкинутої частини замінюють відповідними силами, які спрямовують вздовж розрізаних стрижнів від вузлів.

Потім складають рівняння рівноваги у вигляді (20), (21) або (22), обираючи центри моментів (або вісь проекцій) так, щоб у кожному рівнянні було тільки одне невідоме зусилля. Центром моментів (точкою Ріттера) обирають точку для кожного з трьох перерізаних стрижнів, окремо таку, щоб вона була точкою перетину двох інших стрижнів даного перерізу (відносно неї складають рівняння суми моментів обраної частини ферми). У випадку, коли стрижні не мають точки перетину (є паралельними), складається рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій всіх сил обраної частини ферми на вісь, перпендикулярну цим стрижням.

6 РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТІЛ

Статично визначені та статично невизначені системи

Статичні розрахунки конструкцій, складених із системи тіл, поєднаних зв'язками, потребують визначення умов рівноваги кожного тіла конструкції та складеної конструкції в цілому.

Сили взаємодії між тілами даної конструкції називають **внутрішніми реакціями**.

Зовнішніми зв'язками називаються зв'язки, що з'єднують дану конструкцію з тілами, які до неї не входять (наприклад, з опорами).

На основі принципу твердіння система сил, що діють на конструкцію, повинна при рівновазі відповідати умовам рівноваги твердого тіла. Для розв'язання такої задачі необхідно додатково розглянути рівновагу часток конструкції, вважаючи їх вільними тілами. Розділення (перерізи) виконують за аксіомою про рівновагу двох сил: реакції внутрішніх зв'язків будуть дорівнювати одна одній за модулем та протилежними за напрямком вздовж однієї лінії.

Умови рівноваги складеної конструкції визначають рівняннями рівноваги. Якщо конструкція складається із *n* тіл, на кожне з яких діє довільна плоска система сил, то можна скласти 3*n* рівнянь рівноваги.

Рівняння рівноваги – це умови рівноваги, в які входять відомі активні сили і невідомі реакції зв’язків, тобто аналітичні умови рівноваги даної системи сил.

Застосовуючи метод перерізу, розглядають рівновагу окремих тіл або груп системи і при цьому дію відкинутих сил замінюють відповідними реакціями зв’язку, які стають зовнішніми силами і входять до рівнянь рівноваги.

Задача називається **статично визначеною**, якщо кількість невідомих реакцій зв’язків дорівнює кількості незалежних рівнянь рівноваги.

Якщо для даної конструкції кількість всіх реакцій (невідомих) буде більшою за кількість рівнянь, в які входять реакції, то конструкція буде **статично невизначеною.**

7 РІВНОВАГА ПРИ НАЯВНОСТІ СИЛ ТЕРТЯ

Залежно від взаємних рухів тіл тертя між твердими тілами буває трьох видів:

1 Якщо відносна швидкість точок дотику тіл, що контактують, не дорівнює нулю, то виникає **тертя ковзання**.

2 Якщо відносна швидкість точок дотику тіл, що контактують, дорівнює нулю і має місце кочення без ковзання, то виникає **тертя кочення**.

3 Існує ще **тертя вертіння**.

7.1 Закони тертя ковзання

Силою тертя ковзання $\overline{F_{TP}}$ називається сила, що виникає в точках співдотику, лежить у спільній дотичній площині до поверхонь контактуючих тіл і чинить опір ковзанню одного тіла відносно іншого.

Сила тертя, що розвивається при відсутності взаємних рухів, називається **силою тертя спокою**.

Рівновага при наявності сил тертя для тіл, що могли б рухатись під дією сили $\overline{S}$ по шорсткій (неідеальній) поверхні, зумовлена силою **тертя зчеплення** $\overline{F_{ЗЧ}}$ ($\overline{F_{TP}}$), яка чинить опір цьому руху (рисунок 29).

Закони тертя ковзання (закони Амонтона – Кулона) відображають практично всі основні особливості явища тертя ковзання.

1 При намаганні зсунути одне тіло по поверхні іншого в площині дотику тіл виникає сила тертя, величина якої може приймати будь – які значення від нуля до значення $\overline{F_{TP}}^{MAX}$ ($\overline{F_{ЗЧ}}^{MAX}$) – **максимальна (гранична) сила тертя.**

$$\overline{F_{TP}} \leq \overline{F_{TP}}^{MAX}. \tag{25}$$

Сила тертя **спрямована** в бік, протилежний тому, в якому діють сили, що намагаються зсунути тіло. При рівновазі сила тертя спокою спрямована протилежно можливому напрямку руху.

2 **Величина граничної сили тертя** дорівнює добутку статичного коефіцієнта тертя на силу нормального тиску (нормальну реакцію)

$$F_{TP}^{MAX} = f \cdot N. \tag{26}$$

Статичний коефіцієнт тертя f - число безрозмірне, визначається експериментальним шляхом і залежить від матеріалу взаємодіючих тіл та стану поверхні (характер обробки, температура, вологість, змащення і т.п.).

Для абсолютно гладких поверхонь $f = 0$, для реальних - $f > 0$. При сухому терті ”дерево – дерево” $f \in [0{,}4;\ 0{,}7]$; „метал – метал” $f \in [0{,}15;\ 0{,}25]$; „сталь – лід” $f = 0{,}025$.

3 Величина граничної сили тертя в широких межах **не залежить** від розмірів площі контакту поверхонь тіл, що стикаються.

При **рівновазі сила тертя спокою (тертя зчеплення)** визначається за визначенням

$$F_{TP} \le f \cdot N \tag{27}$$

Для тіл, які рухаються, сила тертя спрямована протилежно руху і дорівнює добутку динамічного коефіцієнта тертя на силу нормального тиску

$$F_{TP} = f \cdot N\,. \tag{28}$$

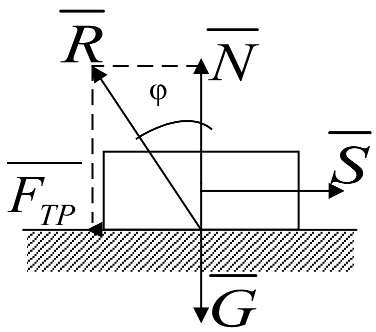


Рисунок 29

Повна **реакція шорсткої поверхні** $\overline{R} = \overline{N} + \overline{F_{TP}}$ складається з нормальної реакції $\overline{N}$ та перпендикулярної їй сили тертя $\overline{F_{TP}}$, тобто $\overline{R}$ буде відхилена від нормалі до поверхні на кут φ (рисунок 29).

Максимальне значення кута φ^{max}, який складає повна реакція шорсткої поверхні з нормаллю до поверхні, називається **кутом тертя**.

$$tg\varphi^{max} = \frac{F_{TP}^{max}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f\,. \tag{29}$$

При дії на тіло будь–якою силою, прикладеною під кутом до нормалі меншим за кут тертя ($\varphi < \varphi^{max}$), зсунути тіло неможливо.

7.2 Тертя кочення

Тертям кочення називають опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого тіла.

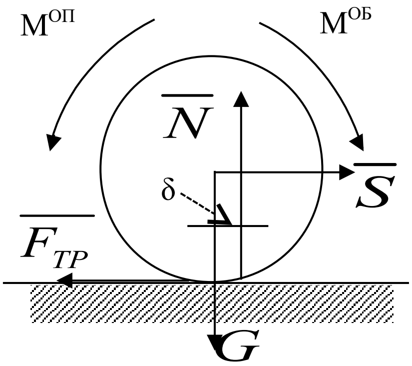


Рисунок 30

В реальних умовах поверхня тіла, що котиться, і площина, по якій тіло котиться, **не абсолютно тверді,** а дещо **деформуються** внаслідок тиску тіла на площину.

Кочення викликано деформацією тіл і рух відбувається під дією двох пар сил ($\overline{S}, \overline{F_{TP}}$) і ($\overline{N}$, $\overline{G}$), які показано на рисунку 30.

Момент пари ($\overline{S}, \overline{F_{TP}}$) - $M(\overline{S}, \overline{F_{TP}}) = S \cdot R$ викликає кочення тіла і називається **моментом кочення (обертання)** $M^{ОБ}$ **.** Його плечем є радіус котка (рисунок 30).

Момент пари ($\overline{N}$, $\overline{G}$) - $M(\overline{N}, \overline{G}) = N \cdot \delta$ чинить опір повороту тіла і називається **моментом опору кочення** $M^{ОП}$ (рисунок 30). У момент початку руху

$$M^{ОП} = M^{\max} = N \cdot \delta, \tag{30}$$

де δ (плече пари) – **коефіцієнт тертя кочення**.

Одиниці вимірювання δ - це одиниці довжини, найчастіше сантиметри (см).

$S \le \dfrac{\delta}{R} N$ **- умова кочення котка**.

Умова кочення без ковзання $S \le F_{TP}^{\max} \le f \cdot N$.

7.3 Тертя вертіння

Опір вертіння виникає внаслідок тертя кулі по площині приклад – упорний підшипник підп’ятник).

$$M = \lambda \cdot N, \tag{31}$$

де N - сила нормального тиску кулі на площину, яка в даному випадку дорівнює значенню ваги тіла;

λ - **коефіцієнт тертя вертіння**, має розмірність довжини (метр, сантиметр), малий за величиною (у 5 – 10 разів менший за коефіцієнт тертя кочення $\lambda < \delta$).

8 ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

8.1 Момент сили відносно осі

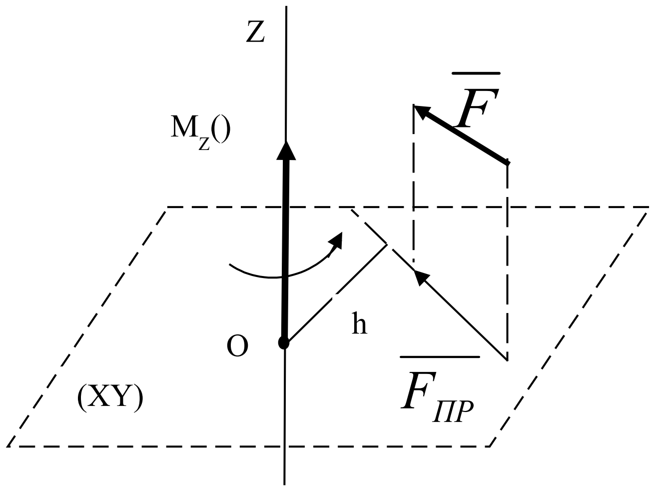


Рисунок 31

Момент сили відносно осі – це алгебраїчна величина (число), яка дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з площиною (рисунок 31).

$$M_Z(\overline{F}) = M_O(\overline{F}_{ПР}) = \pm F_{ПР} \cdot h. \tag{32}$$

Момент буде вважатись **додатнім**, якщо з кінця осі Z поворот, який сила $\overline{F}_{ПР}$ намагається створити, можна побачити спрямованим проти стрілки годинника, і **від’ємним**, якщо за стрілкою годинника.

Момент сили відносно осі буде **дорівнювати нулю**, якщо сила і вісь лежать в одній площині, тобто:

1) сила паралельна осі, тому що при цьому $\overline{F}_{ПР}$=0;
2) лінія дії сили перетинає вісь, тому що при цьому h=0.

Аналітичні визначення моментів сили відносно осей координат.

$$\left.\begin{aligned} M_X(\overline{F}) &= \pm F_{YZ}\cdot h = y\cdot F_Z - z\cdot F_Y\,,\\ M_Y(\overline{F}) &= \pm F_{XZ}\cdot h = z\cdot F_X - x\cdot F_Z\,,\\ M_Z(\overline{F}) &= \pm F_{XY}\cdot h = x\cdot F_Y - y\cdot F_X\,. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

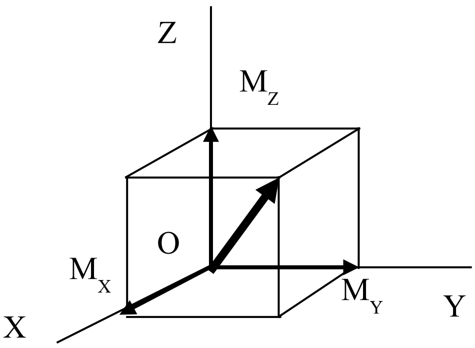


Рисунок 32

Момент сили відносно центра (точки) в просторі $\overline{M_O}$ прикладається в центрі O (рисунок 32) та за модулем визначається за рівнянням

$$M_O(\overline{F}) = \sqrt{M_X^2(\overline{F}) + M_Y^2(\overline{F}) + M_Z^2(\overline{F})}\,. \qquad (34)$$

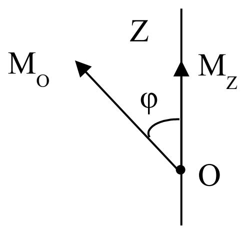


Рисунок 33

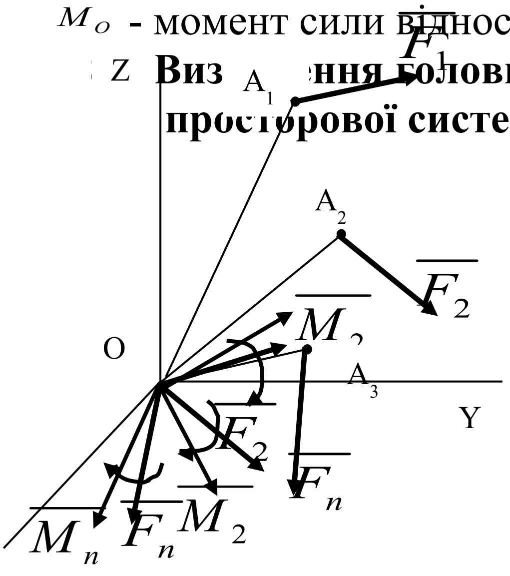
Залежність моментів сили відносно точки і осі, яка проходить через цю точку (центр): Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь вектора, утворюючого момент даної сили відносно будь – якого центра, що проходить через цю вісь (рисунок 33)

$$M_Z = M_O\cdot\cos\varphi\,, \qquad (35)$$

де M_Z - момент сили відносно осі Z;

M_O - момент сили відносно центра O.

Визначення головного вектора та головного момента просторової системи сил



Головним вектором системи $\overline{R}$ (рисунок 34) називається вектор, прикладений у центрі приведення, що дорівнює геометричній сумі всіх сил системи

$$\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n} \,. \qquad (36)$$

$\overline{F_1}$

Головний момент системи $\overline{M_O}$ відносно даного центра дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил відносно центра О

Рисунок 34

$$\overline{M_O} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{F_n}) \,. \qquad (37)$$

За основною теоремою статики, будь – яка система сил, діючих на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно обраного центра О може бути замінена однією силою $\overline{R}$, що дорівнює головному вектору системи і прикладається в центрі приведення О, та однією парою з моментом $\overline{M_O}$, що дорівнює головному моменту системи відносно центра приведення О (рисунок 35).

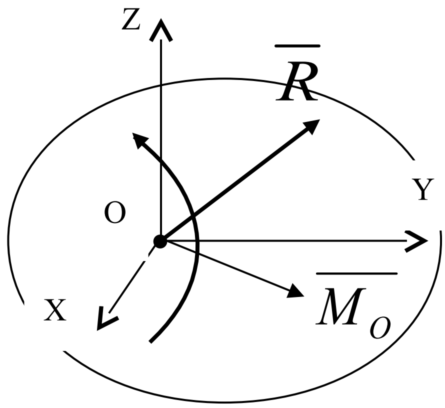


Рисунок 35

Аналітичне визначення векторів $\overline{R}$ та $\overline{M_O}$

1 Проекції $\overline{R}$ головного вектора системи на координатні осі:

$$R_X = \sum_{n=1}^{k} F_{nX} \,, \quad R_Y = \sum_{n=1}^{k} F_{nY} \,, \quad R_Z = \sum_{n=1}^{k} F_{nZ} \,. \qquad (38)$$

Модуль головного вектора:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} \,. \tag{39}$$

Напрямок головного вектора:

$$\cos(\overline{R}, \overline{i}) = \frac{R_X}{R}, \quad \cos(\overline{R}, \overline{j}) = \frac{R_Y}{R}, \quad \cos(\overline{R}, \overline{k}) = \frac{R_Z}{R} \,. \tag{40}$$

2 Проекції $\overline{M_O}$ головного моменту системи

$$M_{OX} = \sum_{n=1}^{k} M_X(\overline{F_n}), \quad M_{OY} = \sum_{n=1}^{k} M_Y(\overline{F_n}), \quad M_{OZ} = \sum_{n=1}^{k} M_Z(\overline{F_n}) \,. \tag{41}$$

Модуль головного моменту:

$$M_O = \sqrt{M_{OX}^2 + M_{OY}^2 + M_{OZ}^2} \,. \tag{42}$$

Напрямок головного моменту системи:

$$\cos(\overline{M_O}, \overline{i}) = \frac{M_{OX}}{M}, \quad \cos(\overline{M_O}, \overline{j}) = \frac{M_{OY}}{M}, \quad \cos(\overline{M_O}, \overline{k}) = \frac{M_{OZ}}{M} \,. \tag{43}$$

Системи сил, для яких $\overline{R}$ та $\overline{M_O}$ співпадають, **статично еквівалентні**.

Випадки приведення просторової системи сил

1 $\overline{R} = 0$ та $\overline{M_O} = 0$ - система знаходиться у **стані рівноваги**.

2 $\overline{R} = 0$ та $\overline{M_O} \neq 0$ - система приводиться **до пари сил**, момент якої дорівнює головному моменту системи. Вільне тіло під дією такої системи може рухатись обертально.

3 $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M_O} = 0$ - система сил приводиться **до рівнодійної**,

лінія дії якої проходить через центр приведення. Вільне тіло під дією такої системи може рухатись поступально (якщо рівнодійна проходить через центр ваги тіла).

4 $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M_O} \neq 0$, $\overline{M_O} \perp \overline{R}$ ($\overline{M^*}$=0) - система приводиться **до рівнодійної**, лінія дії якої не проходить через центр приведення (рисунок 36).

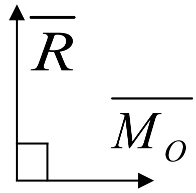


Рисунок 36

$\overline{M_O} \perp \overline{R}$ - нормальний головний момент, перпендикулярний головному вектору системи ($\overline{M_\perp}$),
$\overline{M^*}$ - найменший головний момент.

5 $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M_O} \neq 0$, $\overline{M_O} II \overline{R}$, ($\overline{M^*} \neq 0$) - система приводиться до динамічного гвинта (**динами сил**) – сукупності сили $\overline{R}$ та пари, що розташована у площині, перпендикулярній силі (рисунок 37).

Вісь динами - лінія дії сили $\overline{R}$, яка проходить через центр приведення (рисунок 37).

Найменший головний момент визначається за формулою

$$M^* = \frac{Rx \cdot Mox + Ry \cdot Moy + Rz \cdot Moz}{R}.$$

Рисунок 37

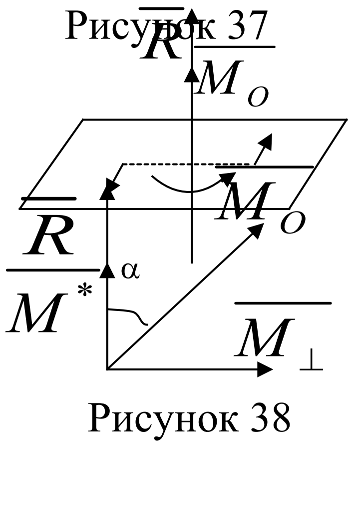


Рисунок 38

6 $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M_O} \neq 0$, $\overline{M_O} II \overline{R}$, $\overline{M_O} \not\perp \overline{R}$, $\overline{M^*} \neq 0$ - система приводиться **до динами сил**, вісь якої не проходить через центр приведення О (рисунок 38).

8.3 Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} F_{nZ} = 0, \\ &\sum_{n=1}^{k} M_X(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_Y(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_Z(\overline{F_n}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Випадок паралельних сил

Для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на вісь, паралельну силам, і суми їх моментів відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

Для системи сил, паралельних осі Z

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nZ} = 0, \sum_{n=1}^{k} M_X(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_Y(\overline{F_n}) = 0. \tag{45}$$

9 ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ. ЦЕНТР ВАГИ

9.1 Центр паралельних сил

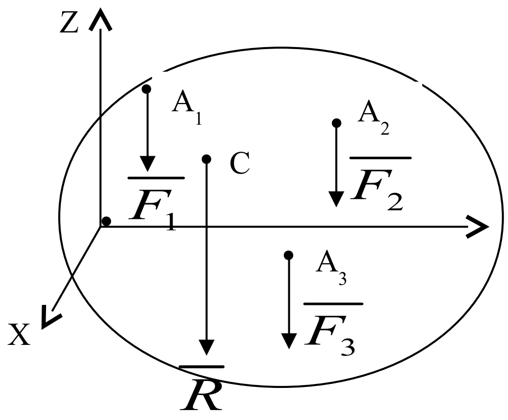


Рисунок 39

Рівнодійна $\overline{R}$ системи паралельних сил $\{\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots \overline{F_n}\}$ дорівнює $\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}$.

Лінія дії рівнодійної $\overline{R}$ (рисунок 39) паралельна силам, положення точки її прикладання залежить від величин та положень точок A_1, A_2,... A_n прикладання сил системи.

Центр паралельних сил – точка С прикладання рівнодійної $\overline{R}$ системи паралельних сил.

Положення центра паралельних сил – точки С - визначається **координатами цієї точки С (** x_C, y_C, z_C **)**:

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} (F_n \cdot x_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} (F_n \cdot y_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} (F_n \cdot z_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n} \tag{46}$$

де $$\sum_{n=1}^{k} F_n = R .$$

9.2 Центр ваги твердого тіла. Координати центра ваги тіл

Вага тіла - це рівнодійна сил ваги окремих часток тіла, яка дорівнює їх сумі

$$\overline{G} = \sum_{n=1}^{k} \overline{\Delta G_n} . \tag{47}$$

Кожна окрема з n - часток тіла знаходяться під дією власних сил ваги $\overline{\Delta G_n}$, які складають систему паралельних, односпрямованих сил $\overline{\Delta G_1}, \overline{\Delta G_2}, ...\overline{\Delta G_n}$, прикладених у точках A_1, A_2,.., A_n відповідно (рисунок 40).

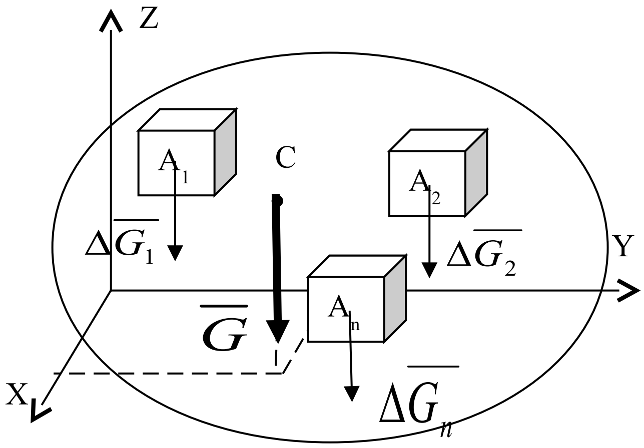


Рисунок 40

Центр ваги тіла - незмінно пов'язана з цим тілом геометрична точка, в якій прикладена рівнодійна сил ваги окремих часток тіла, тобто вага тіла в просторі.

Координати центра ваги визначають аналогічно координатам центра паралельних сил С (x_C, y_C, z_C) (формула 43), складених силами ваги часток тіла $\overline{\Delta G_1}, \overline{\Delta G_2}, ...\overline{\Delta G_n}$:

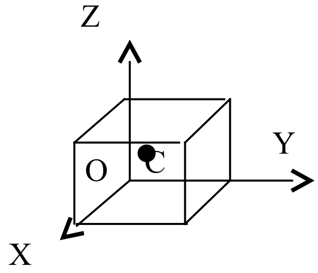
$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta G_n \cdot x_n\right)}{G}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta G_n \cdot y_n\right)}{G}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta G_n \cdot z_n\right)}{G}, \qquad (48)$$

де $G = \sum_{n=1}^{k} \Delta G_n$ - вага тіла;

x_n, y_n, z_n - відповідні координати точок прикладання A_1, A_2,.., A_n сил ваги часток тіла.

Положення **центра ваги однорідного тіла** $(\rho = const)$ залежить тільки від його геометричної форми і розмірів та не залежить від властивостей матеріалу, з якого тіло виготовлено.

1 Центр ваги об'єму ($G \sim V$) (рисунок 41)

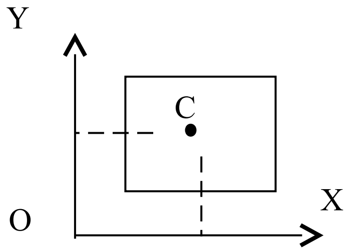


$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta V_n \cdot x_n\right)}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta V_n \cdot y_n\right)}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta V_n \cdot z_n\right)}{V} \quad (49)$$

Рисунок 41

7

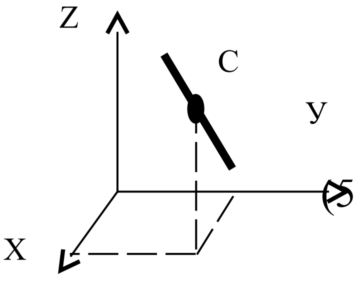
2 Центр ваги площини ($G \sim S$) (рисунок 42)



$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta S_n \cdot x_n\right)}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta S_n \cdot y_n\right)}{S}. \quad (50)$$

Рисунок 42

3 Центр ваги лінії ($G \sim L$) (рисунок 43)



$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta L_n \cdot x_n\right)}{L}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta L_n \cdot y_n\right)}{L}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta L_n \cdot z_n\right)}{L}. \quad (51)$$

Рисунок 43

9.3 Способи визначення положення центра ваги

Аналітичні методи

9.3.1 Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, ось або центр симетрії, то центр ваги лежить відповідно або в площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії.

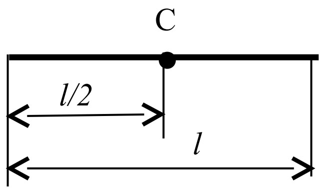


Рисунок 44

Центр ваги лінії довжини l знаходиться по середині (рисунок 44).

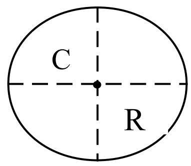


Рисунок 45

Центр ваги кола (або кулі) радіуса R - у його центрі, тобто в точці перетину діаметрів (рисунок 45).

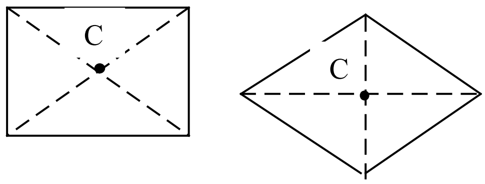
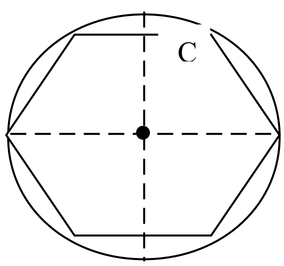


Рисунок 46

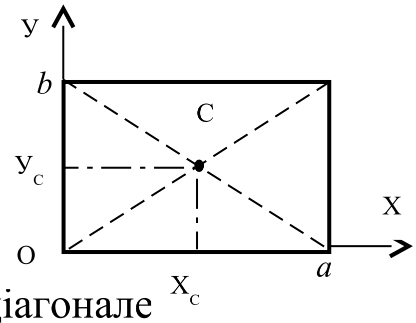
Центр ваги паралелограма, ромба або паралелепіпеда – у точці перетину діагоналей (рисунок 46).



Центр ваги правильного багатокутника – у центрі вписаного або описаного кола (рисунок 47).

Рисунок 47

Координати центра ваги симетричних фігур



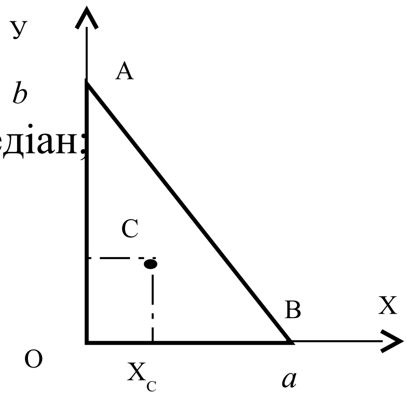
1 Прямокутник (рисунок 48)

$S = a \cdot b$ - площа прямокутника;

С ($\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$) – точка перетину діагонале

Рисунок 48

2 Прямокутний трикутник (рисунок 49)



$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ - площа;

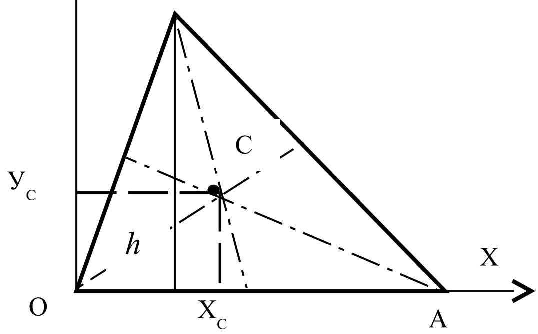
С (x_C, y_C) – точка перетину медіан;

$x_C = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_O) = \frac{1}{3}b$;

$y_C = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}a$.

Рисунок 49

3 Трикутник (рисунок 50)



$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AO$ - площа;

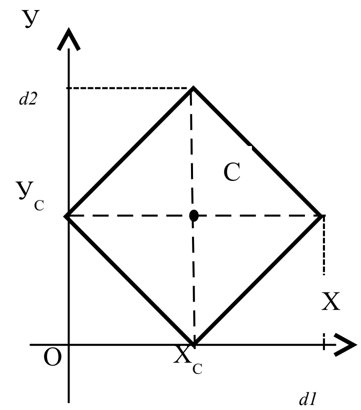
С (x_C, y_C) – точка перетину медіан;

$x_C = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_O)$;

$y_C = \frac{1}{3}h$.

Рисунок 50

4 Ромб (рисунки 51, 52)

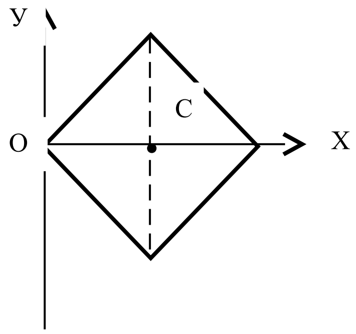


$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ - площа:

C (x_C, y_C) - точка перетину діагоналей.

C ($\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}$)

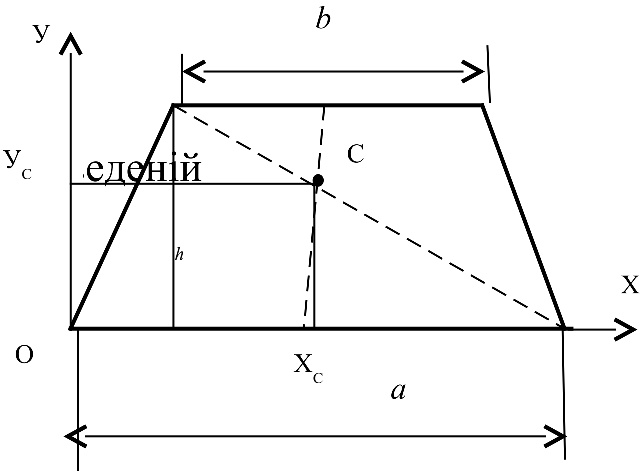
Рисунок 51



C ($\frac{d_1}{2}$,0)

Рисунок 52

5 Трапеція (рисунок 53)



$S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$;

C (x_C, y_C) - на лінії, еденій

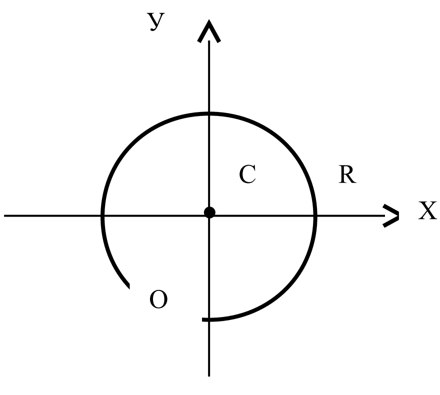
через середини основ;

$x_C = \frac{a}{2}$;

$y_C = \frac{h \cdot (a+2b)}{3 \cdot (a+b)}$.

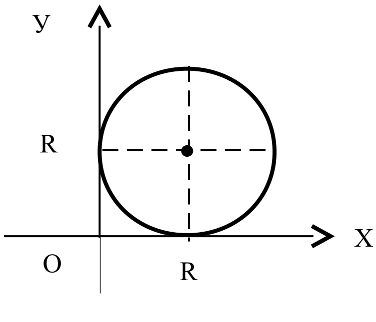
Рисунок 53

6 Коло (рисунки 54, 55)



$S = \pi \cdot R^2$;

C (x_C, y_C) – точка перетину діаметрів.



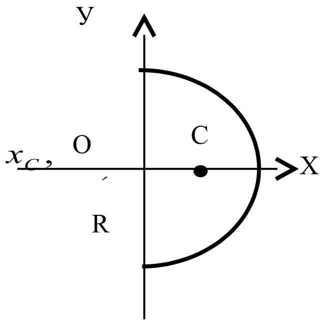
C(R, R)

C (0,0)

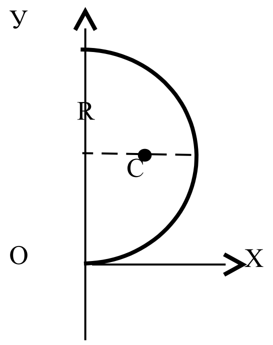
Рисунок 54 Рисунок 55

7 Півколо (рисунок 56, 57)

$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$



C (x_C , 0)



C (

$x_C = \frac{4R}{3\pi}$;

$y_C = 0$.

$x_C = \frac{4R}{3\pi}$;

$y_C = R$.

Рисунок 56

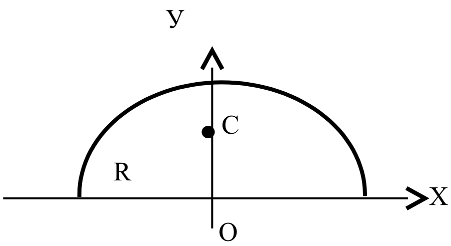


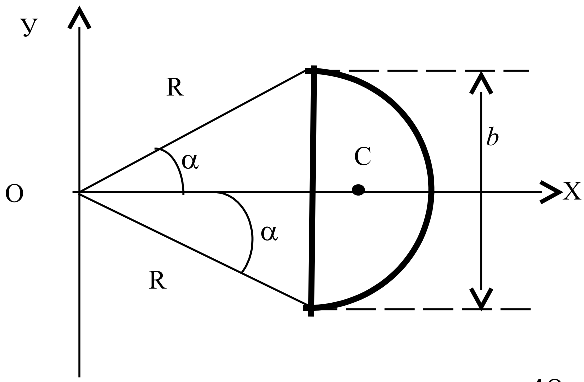
Рисунок 57

C (0; y_C)

$x_C = 0$;

$y_C = \frac{4R}{3\pi}$.

8 Круговий сегмент (рисунок 58)



$S = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$;

C (x_C , 0);

$x_C = \frac{b^3}{12 \cdot S}$.

Рисунок 58

9 Круговий сектор (рисунок 59)

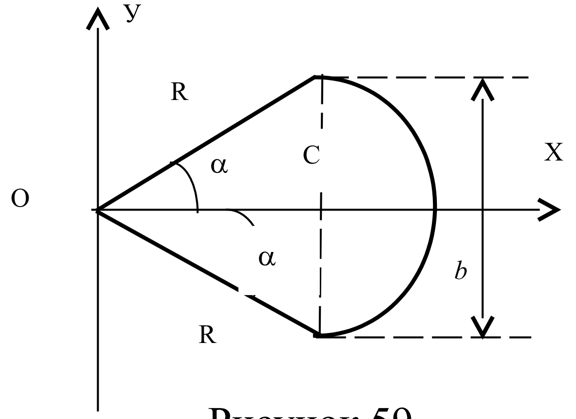


Рисунок 59

$S = \alpha \cdot R^2$;

C (x_C, 0);

$x_C = \dfrac{b \cdot R^2}{3 \cdot S}$.

При $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$; $S = \dfrac{\pi R^2}{6}$; $x_C = \dfrac{2R}{\pi}$.

9.3.2 Метод розбиття

Якщо тіло можна розбити на кінцеву кількість елементів (об'ємів, площин, ліній (рисунок 60), для кожної з яких положення центра ваги відоме), то координати центра ваги всього тіла можна визначити, складаючи значення елементів безпосередньо за формулами (46), (47), (48).

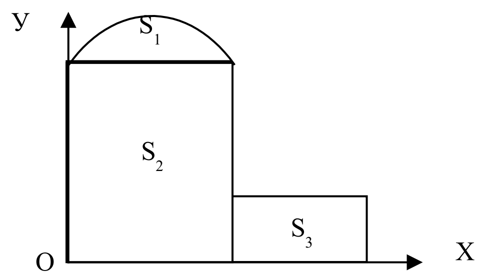


Рисунок 60

$S = S_1 + S_2 + S_3$;

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta S_n \cdot x_n\right)}{S} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3}{S};$$

$$y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}\left(\Delta S_n \cdot y_n\right)}{S} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3}{S}.$$

9.3.3 Метод доповнення (від'ємних площин)

Якщо тіло має вирізані елементи, то при розбитті на елементи вирізана частина (площа, об'єм) вилучається із загальної, тобто вирізаним елементам надається від'ємне значення площі або об'єму (рисунок 61).

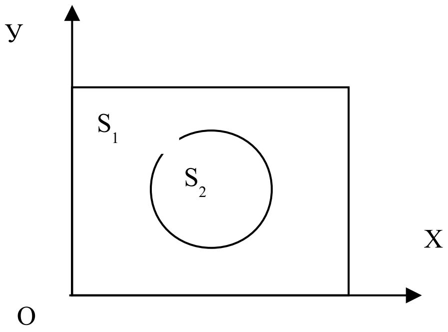


Рисунок 61

$$S = S_1 - S_2;$$

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} \left(\Delta S_n \cdot x_n \right)}{S} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S};$$

$$y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} \left(\Delta S_n \cdot y_n \right)}{S} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М., 1986.

2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. - М., 1984. - Ч. 1, 2.