

АНАНЬЄВА О. М., д.т.н., професор,
БАБАЄВ М. М., д.т.н., професор,
ДАВИДЕНКО М. Г., к.т.н., доцент,
ПАНЧЕНКО В. В., к.т.н., доцент
(Український державний університет залізничного транспорту)



Границі Крамера-Рао для амплітуди та фази синусоїди, адитивно змішаної з одиночним шумовим імпульсом завади

Синусоїдні електричні коливання широко використовуються в системах передавання інформації, електропостачанні, діагностуванні та інших галузях техніки та науки. Від точності вимірювання параметрів таких коливань залежать якісні характеристики, а інколи і працездатність приладів і систем, в яких їх використовують.

Техніка вимірювання та точнісні характеристики його результатів в умовах спостережень адитивної сигнально-шумової суміші за неперервного в часі характеру шумової завади добре відомі та обґрунтовані теоретично. Технічний бік вимірювання параметрів синусоїдного сигналу, спостереженого на фоні імпульсної завади, розвинено на базі скоріше евристичних підходів. Степінь теоретичного обґрунтування точності отриманих за таких умов оцінок важко назвати прийнятним. У цій роботі на базі статистичної моделі адитивної суміші сигналу та суми імпульсної і неперервної завад, описаної функцією щільності розподілу імовірності, розраховано повний набір елементів відповідної інформаційної матриці Фішера. Визначено границі Крамера-Рао оцінок амплітуди та фази синусоїди відомої частоти за умови її спостереження на фоні вказаних завад. Результати приведені до вигляду, зручного для інженерної практики.

Ключові слова: оцінка амплітуди, оцінка фази, імпульсна завада, матриця Фішера, границя Крамера-Рао.

Вступ

Синусоїдні електричні коливання широко використовують в різних галузях: зв'язок, електропостачання, діагностування та ін. Параметри таких коливань – амплітуда, частота та фаза – несуть корисну для кінцевого споживача інформацію. Зокрема при використанні синусоїдного струму з відомою частотою для контролю технічного стану обмоток статора трифазного асинхронного електродвигуна амплітуда та початкова фаза (надалі – просто «фаза») за відомих параметрів напруги джерела тестового сигналу безпосередньо визначають величини активних і реактивних опорів вказаних обмоток. На результати вимірювання тестового струму чинить вплив низка електромагнітних завад, походження яких притаманне як самому двигуну, так і місцю його встановлення. Дію більшості завад можна нівелювати шляхом раціонального вибору частоти тестового струму. Але короткочасний шумовий імпульс утворює заваду, що впливає на результати вимірювання цього струму в будь-якому придатному діапазоні частот. В результаті цього величини оцінок амплітуди та фази тестового струму мають певний розкид від однієї часової ділянки вимірювань до іншої.

Неточність величини цих оцінок може вийти за межі, які забезпечують надійне визначення електричних параметрів обмоток двигуна, а відтак – призвести до помилки визначення його технічного стану. В умовах, коли зростає насичення середовища потенціальними джерелами імпульсних завад, питання визначення мінімальної досяжної точності вимірювання параметрів тестового струму набуває все більшої актуальності.

Постановка проблеми й аналіз досліджень і публікацій

Важливість синусоїдних коливань для широкого кола технічних застосувань є причиною підвищеної уваги до визначення якомога більш точних числових величин їх параметрів. За наявності завад, викликаних втручанням спотворюючих факторів у спостережені часові залежності досліджуваних коливань, визначені величини є наближеними оцінками фактичних числових значень. Фундаментальною роботою з визначення оцінок параметрів корисних коливань (тобто інформаційних сигналів) в системах зв'язку та в прилеглих галузях є монографія [1].

©АНАНЬЄВА О. М., БАБАЄВ М. М., ДАВИДЕНКО М. Г., ПАНЧЕНКО В. В. 2024

Границя Крамера-Рао є нижньою межею величини дисперсії оцінки, отриманої в рамках певної статистичної моделі спостереженої реалізації коливання. При обмеженні розгляду адитивним впливом завади на синусоїдне коливання до поля зору потрапили публікації, що конкретизують та розширюють фундаментальні результати. По-перше, розроблено процедуру амплітудних і фазових вимірювань для синусоїдного сигналу з поліноміальною зміною фази в часі [2]. Також розроблено процедуру оцінювання фази та затримки сигналів з лінійною частотною модуляцією (такі сигнали є окремим підкласом попередніх) [3]. В обох роботах вважається, що сигнал має постійну амплітуду та спостерігається на фоні неперервного шуму; визначено також границі Крамера-Рао для оцінюваних параметрів; інші варіанти завод не розглянуті. Дещо ширші припущення щодо властивостей синусоїди прийняті в роботі [4]: вважається, що вона зазнала нелінійних спотворень. Розв'язано задачу оцінювання амплітуди, частоти та фази початкового синусоїдного коливання за результатами спостереження спотвореної синусоїди на фоні ширококутового шуму. Цим шумом і обмежується сукупність прийнятих до уваги завод. Особливий випадок дискретної сукупності можливих величин фази сигналу розглянуто в роботі [5], в якій отримано оцінки фази і амплітуди в системах передавання інформації з дискретним фазовим кодуванням при фіксованому сигнальному сузір'ї. Адитивна завада знов-таки вважається неперервною. Задачу статистично обґрунтованого оцінювання амплітуди та фази поширено також на клас трифазних електричних кіл. У роботі [6] ця задача розв'язано для трифазного кола з розбалансом амплітуд у фазах, а в роботі [7] висвітлено розв'язання проблеми забезпечення високої точності оцінювання, коли вимірювання в трифазному колі дискретизовані за часом за низької частоти взяття відліків. Включена до розгляду в обох роботах завада є неперервною. Питанню обчислювальної ефективності запропонованих або вже використовуваних числових методів оцінювання параметрів синусоїдних та інших коливальних присвячені роботи [8-10]. Методи визначення характеристик результатів вимірювань, виконаних цифровими приладами, унормовані стандартом IEEE 1057-2017 [11]. Обчислені на базі його вимог границі Крамера-Рао наведено в роботі [12] для результатів вимірювання параметрів синусоїдного коливання на фоні білого шуму. Коло класів завод спостереженням синусоїдного інформаційного сигналу розширене шляхом включення до нього короткочасної імпульсної шумової завади [13, 14]. В цих роботах розроблено методологію оцінювання амплітуди та фази синусоїдного сигналу, який спостерігається на фоні суми неперервного білого шуму та одиночної імпульсної завади. Питання граничної точності

оцінювання, втім, не знайшло свого висвітлення в цих роботах.

Отже, в опублікованих на сьогодні джерелах всебічно розглянуті теоретичні та прикладні аспекти оцінювання параметрів синусоїдного коливання і визначення точності отриманих оцінок за результатами спостережень, зроблених в умовах дії неперервної завади. Певні доробки наявні й в питанні обчислення таких оцінок з урахуванням дії імпульсних завод. Однак не вдалося виявити публікацій, в яких було б надано співвідношення для визначення потенційно досяжної точності оцінок параметрів синусоїдного коливання, спотвореного дією короткочасної імпульсної завади. Знаходження таких співвідношень дало б змогу визначити об'єктивні межі технічних можливостей систем передавання інформації та досяжної точності вимірювальних пристроїв.

Мета та завдання дослідження

Мета дослідження – отримання математично обґрунтованих виразів для найвищої досяжної точності оцінок амплітуди та початкової фази синусоїдного коливання відомої частоти, адитивно змішаного з короткочасною одиночною імпульсною заводою та неперервним гаусівським шумом, які мають довільні потужності.

Для досягнення поставленої мети було розв'язано дві задачі:

- 1) розрахунок інформаційної матриці Фішера для функції правдоподібності, відповідної до вказаної спостереженої суміші сигналу та завод;
- 2) визначення виразів для границь Крамера-Рао оцінок амплітуди та початкової фази синусоїди, отриманих за критерієм максимуму правдоподібності в описаних вище заводових умовах.

Основна частина

Розрахунок інформаційної матриці Фішера стосовно до описаних умов спостережень

Вихідна ситуація, в якій необхідно отримати оцінки амплітуди та початкової фази синусоїди та знайти границі Крамера-Рао для отриманих оцінок, є такою. На інтервалі часу $[T_1, T_2]$ існує синусоїда з невідомими амплітудою I_{ms} і початковою фазою φ_s та відомою частотою ω . На всьому протязі цього інтервалу адитивно до синусоїди діє неперервний шумовий гаусівський стаціонарний випадковий процес із спектральною густиною потужності величиною $0,5N_0$, рівномірною в інтервалі частот $[-F_p, F_p]$ і величиною 0 поза цим інтервалом. Всередині вказаного інтервалу часу на проміжку $[T_1 + \tau_x, T_1 + \tau_x + \tau_p]$ також адитивно діє

імпульс у вигляді фрагменту гаусівського стаціонарного випадкового процесу зі спектральною густиною потужності $0,5N_p$, рівномірною в тому ж інтервалі частот і величиною 0 поза цим інтервалом. Як показано в роботі [13], умовну щільність ймовірності реалізації струму i , спостережену на інтервалі $[T_1, T_2]$, описує вираз

$$p(i|I_{ms}, \varphi_s, \tau_x, \tau_p) = \frac{1}{(2\pi N_0 F_p)^{F_p(T_2-T_1)} \cdot \left(1 + \frac{N_p}{N_0}\right)^{F_p \tau_p}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} \frac{[i(t) - I_{ms} \cdot \sin(\omega t + \varphi_s)]^2}{\Phi(t, \tau_x, \tau_p)} dt \right\} \quad (1)$$

де $i(t)$ – залежність спостереженого коливання від часу;

$$\Phi(t, \tau_x, \tau_p) = \begin{cases} 1 + \frac{N_p}{N_0}, & t \in [T_1 + \tau_x, T_1 + \tau_x + \tau_p] \\ 1 & \text{при інших } t. \end{cases} \quad (2)$$

Вважатимемо, що величини T_1, T_2, τ_x, τ_p відомі. Виходячи з виразу (1) шукатимемо дисперсії σ_I^2 та σ_φ^2 оцінок \hat{I}_{ms} та $\hat{\varphi}_s$ відповідно амплітуди та початкової фази струму. Ці дисперсії є діагональними елементами коваріаційної матриці \vec{K} . У свою чергу, ця матриця пов'язана з інформаційною матрицею Фішера $\vec{\Phi}$ матричною нерівністю

$$\vec{K} \geq \vec{\Phi}^{-1}. \quad (3)$$

Елементи інформаційної матриці Фішера мають вигляд

$$\Phi_{ij} = -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \cdot \partial \lambda_j} \ln p(u|\vec{\lambda}) \Big| \vec{\lambda} \right\}. \quad (4)$$

Тут $E\{\dots\}$ позначає операцію математичного очікування по вектору параметрів

$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)^T$, « T » позначає матричне

транспонування; u позначає спостережену реалізацію випадкового процесу.

Щодо нашої ситуації $\vec{\lambda} = (I_{ms}, \varphi_s)^T$. Множник перед експонентою у формулі (1) не залежить від $\vec{\lambda}$; позначимо його C . Введемо також позначення

$$u(t) = \frac{i(t)}{\sqrt{\Phi(t, \tau_x, \tau_p)}}, \quad (5)$$

$$s(t, \vec{\lambda}) = \frac{I_{ms} \sin(\omega t + \varphi_s)}{\sqrt{\Phi(t, \tau_x, \tau_p)}}. \quad (6)$$

З урахуванням прийнятих позначень вираз (1) набуде вигляду

$$p(u|\vec{\lambda}, \tau_x, \tau_p) = C \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} [u(t) - s(t, \vec{\lambda})]^2 dt \right\} \quad (7)$$

Підставивши цей вираз у (4) і врахувавши, що $E\{u(t)\} = s(t, \vec{\lambda})$, отримаємо, що

$$\Phi_{ij} = \frac{2}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial s(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial s(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_j} dt. \quad (8)$$

Введемо позначення $\lambda_1 = I_{ms}$, $\lambda_2 = \varphi_s$. Тоді елементи інформаційної матриці Фішера при $\omega \gg 1$ визначатимуться такими виразами:

$$\Phi_{11} = \Phi_{II} = \frac{2}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{\partial s(t, \vec{\lambda})}{\partial I_{ms}} \right]^2 dt = \frac{2}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{\sin^2(\omega t + \varphi_s)}{\Phi(t, \tau_x, \tau_p)} \right] dt \approx \frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{N_0} + \frac{\tau_p}{N_0 + N_p}; \quad (9)$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{I\varphi} = \Phi_{21} = \Phi_{\varphi I} \approx 0; \quad (10)$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{\varphi\varphi} = \frac{2}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{\Phi(t, \tau_x, \tau_p)} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_s} [I_{ms} \sin(\omega t + \varphi_s)] \right\}^2 dt \approx \underset{N_p \gg N_0}{\approx} \sqrt{\frac{N_0}{T_2 - T_1 - \tau_p}}, \quad (16)$$

$$\approx I_{ms}^2 \cdot \left(\frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{N_0} + \frac{\tau_p}{N_0 + N_p} \right). \quad (11)$$

Отже, інформаційна матриця Фішера є такою:

$$\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{N_0} + \frac{\tau_p}{N_0 + N_p} & 0 \\ 0 & I_{ms}^2 \cdot \left(\frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{N_0} + \frac{\tau_p}{N_0 + N_p} \right) \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\sigma_{\varphi_{\min}} = \frac{1}{I_{ms} \cdot \sqrt{\frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{N_0} + \frac{\tau_p}{N_0 + N_p}}} \underset{N_p \gg N_0}{\approx} \frac{1}{I_{ms}} \sqrt{\frac{N_0}{T_2 - T_1 - \tau_p}}. \quad (17)$$

Визначення виразів для границь Крамера-Рао

Отримана матриця (12) є діагональною. Зворотна їй матриця також є діагональною, тому з урахуванням нерівності (3) отримуємо, що

$$\bar{\mathbf{K}} \geq \begin{pmatrix} \left(\frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{N_0} + \frac{\tau_p}{N_0 + N_p} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{ms}^{-2} \cdot \left(\frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{N_0} + \frac{\tau_p}{N_0 + N_p} \right)^{-1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\sigma_{I_{ms \min}} = \frac{1}{\sqrt{18\Delta F \left[\frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{18N_0\Delta F} + \frac{\tau_p}{18(N_0 + N_p)\Delta F} \right]}} \quad (19)$$

При $N_p \gg N_0$ маємо нерівність

$$\bar{\mathbf{K}} \geq \begin{pmatrix} \frac{N_0}{T_2 - T_1 - \tau_p} & 0 \\ 0 & \frac{N_0}{I_{ms}^2 \cdot (T_2 - T_1 - \tau_p)} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

З цих матричних нерівностей дістаємо границі Крамера-Рао як мінімальні величини дисперсій параметрів, тобто діагональні елементи. Відповідні мінімальні середньоквадратичні відхилення оцінок складають

$$\sigma_{I_{ms \min}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{T_2 - T_1 - \tau_p}{N_0} + \frac{\tau_p}{N_0 + N_p}}} \underset{N_p \gg N_0}{\approx} \quad (15)$$

Перетворимо вирази (15) та (17) до вигляду, зручного при візуальному спостереженні процесів на екрані осцилографа. Для цього введемо ширину ΔF смуги пропускання пристрою оцінювання параметрів. У виразі (15) помножимо чисельники і знаменники підкорінних дробів на $18\Delta F$. Отримаємо, що

Оскільки $2N_0 \cdot \Delta F = \sigma_0^2$ (дисперсія неперервного шуму), то $18N_0 \cdot \Delta F = (3\sigma_0)^2 = I_{n0,5}^2$, де

$$I_{n0,5} = 3\sigma_0 \quad (20)$$

є напівшириною шумової «доріжки» на екрані осцилографа.

Аналогічно $18N_p \cdot \Delta F = (3\sigma_p)^2 = I_p^2$, де

$$I_p = 3\sigma_p \quad (21)$$

є умовною амплітудою шумової імпульсної завади. Отже, можна записати, що

$$\sigma_{I_{ms} \min} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{\frac{2\Delta F(T_2 - T_1 - \tau_p)}{I_{n0,5}^2} + \frac{2\Delta F\tau_p}{I_{n0,5}^2 + I_p^2}}} \quad (22)$$

Аналогічно

$$\sigma_{\varphi \min} = \frac{1}{3I_{ms} \cdot \sqrt{\frac{2\Delta F(T_2 - T_1 - \tau_p)}{I_{n0,5}^2} + \frac{2\Delta F\tau_p}{I_{n0,5}^2 + I_p^2}}} \quad (23)$$

величини амплітуди струму в формулу (23) можна підставити її оцінку, обчислену у такий спосіб, як у роботі [13].

На рис. 1 і 2 наведено результати обчислення залежностей МСВ оцінок відповідно амплітуди та фази від I_p при $I_{ms}=0,1$ А; $I_{n0,5}=0,02$ А;

$T_2 - T_1 = 0,01$ с; $\Delta F = 16$ кГц і трьох величин протяжності імпульсу.

Крива 1 відповідає $\tau_p = 0,1(T_2 - T_1)$, крива 2 –

$\tau_p = 0,5(T_2 - T_1)$, крива 3 –

$\tau_p = 0,75(T_2 - T_1)$.

Для обчислення величини мінімального середньоквадратичного відхилення (МСВ) у ході експериментальних досліджень замість точної

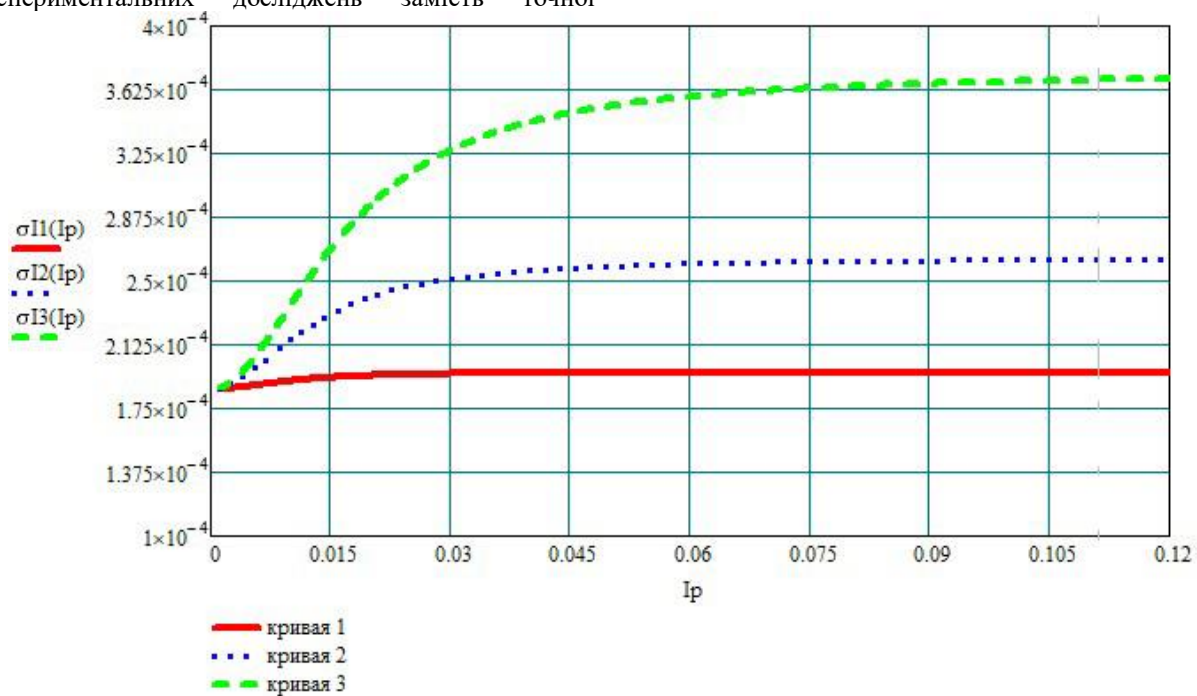


Рис. 1. Залежність мінімального середньоквадратичного відхилення оцінки амплітуди синусоїди від амплітуди імпульсу завади

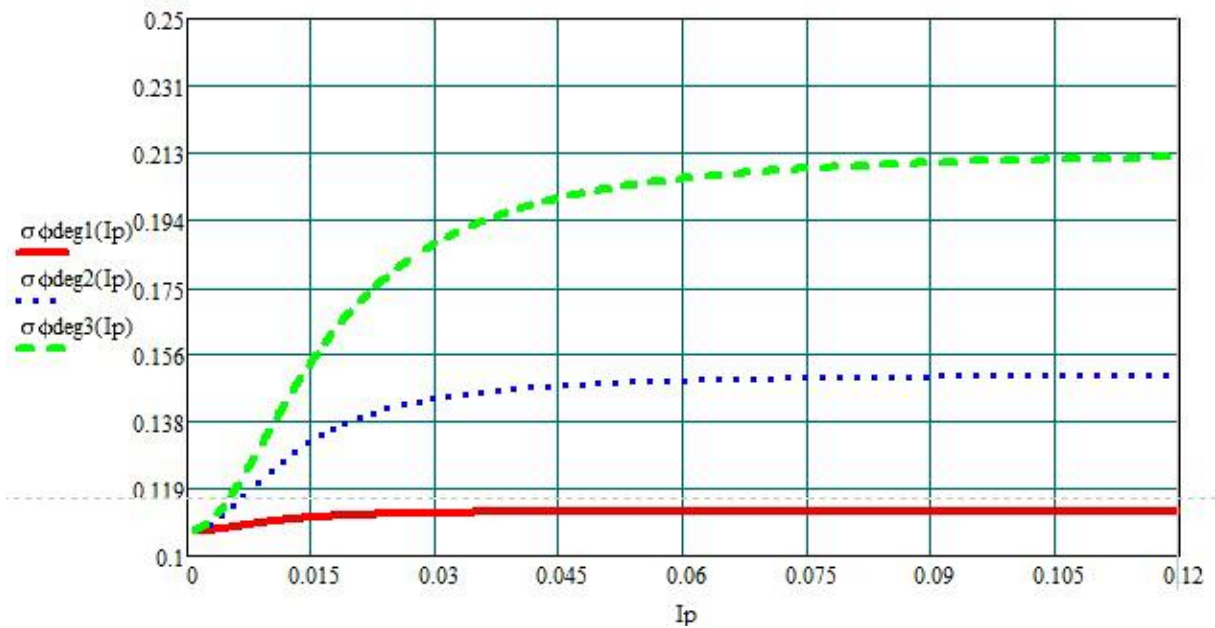


Рис. 2. Залежність мінімального середньоквадратичного відхилення оцінки початкової фази синусоїди від амплітуди імпульсу завади

Стабілізація величин МСВ при зростанні амплітуд імпульсу обумовлена зростанням за цих умов бланкуючої дії знаменника виразу (1), з причини чого уражена імпульсом ділянка сигнально-завадової реалізації робить все менший внесок у формування оцінок. Згідно з виразами (22) та (23) при великих величинах амплітуди імпульсу величини МСВ майже цілком визначаються стаціонарним шумом. На рис. 3 наведено графік залежності МСВ оцінки амплітуди від ΔF при $I_{n0,5}=10^{-3}$ А; $I_p=1$ А;

$T_2 - T_1=0,01$ с; $\tau_p = 0,5(T_2 - T_1)$. На рис. 4 наведено графіки залежності МСВ оцінки фази від ΔF за тих самих початкових даних. Крива 1 відповідає $I_{ms}=0,01$ А, крива 2 – $I_{ms} = 0,05$ А, крива 3 – $I_{ms} = 0,1$ А.

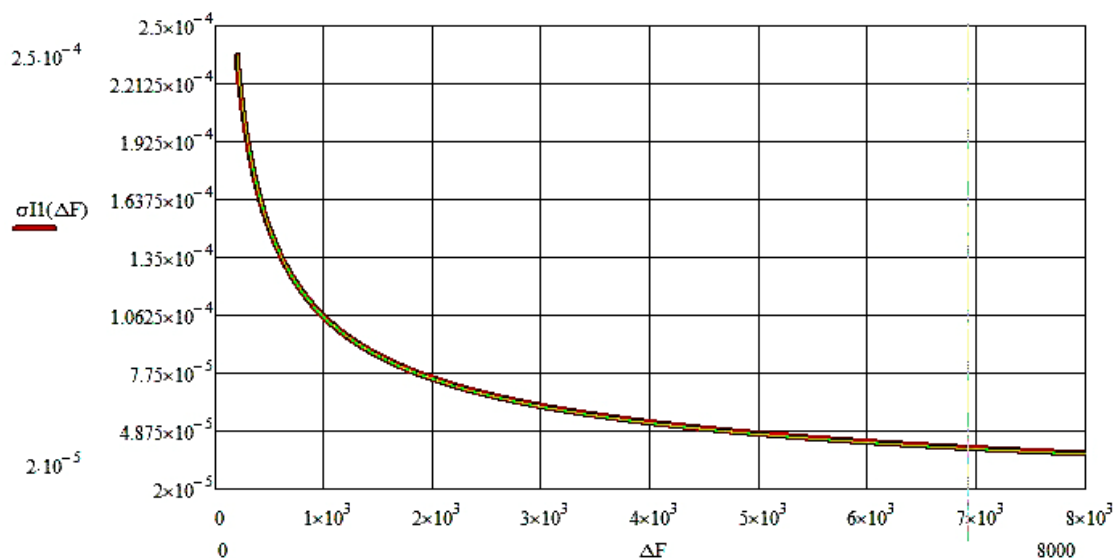


Рис. 3. Залежність мінімального середньоквадратичного відхилення оцінки амплітуди синусоїди від ширини смуги пропускання оцінювача

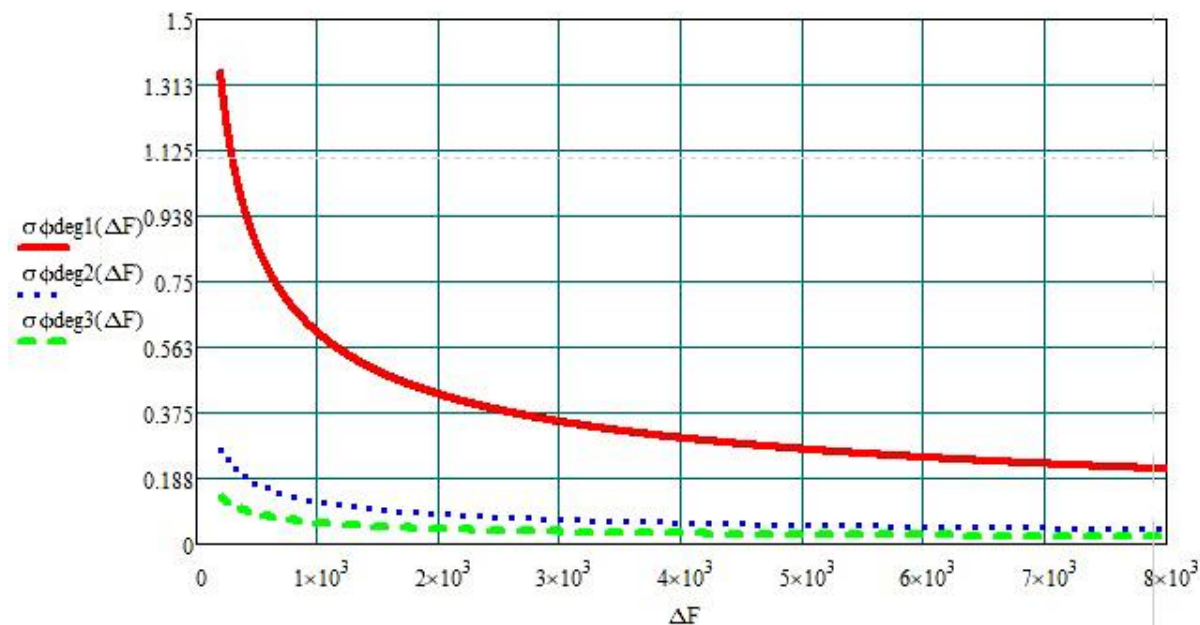


Рис. 4. Залежність мінімального середньоквадратичного відхилення оцінки початкової фази синусоїди від ширини смуги пропускання оцінювача

Зменшення величин МСВ із зростанням величини ΔF при сталих I_p та $I_{n0,5}$ пояснюється відповідним до формул (20) і (21) зменшенням спектральних густин потужності обох завад.

Висновки

Розглянуте питання відноситься до методології визначення параметрів інформаційних сигналів в системах передавання інформації, електропостачанні, діагностиці пристроїв і суміжних галузях. В якості відправних даних використано статистичну модель адитивної суміші сигналу та завад, описану функцією щільності розподілу ймовірності миттєвого значення. Такий підхід забезпечив можливість визначення виразів для найвищої досяжної точності оцінок параметрів через проміжний етап визначення повної сукупності елементів інформаційної матриці Фішера. В результаті обернення цієї матриці визначено нижні границі дисперсій оцінок параметрів (Границі Крамера-Рао) дослідженої моделі. У цій роботі такі границі знайдено для оцінок параметрів синусоїдного сигналу, отриманих в досі залишених поза увагою умовах дії короткочасної імпульсної завади. Отже, результати цієї роботи розширюють коло класів завад, дія яких піддається кількісному врахуванню. Це дасть змогу додатково об'єктивізувати визначення граничних технічних можливостей як нових, так і сучасних систем і пристроїв, що використовують синусоїдні інформаційні сигнали. Отримані найвищі граничні точності оцінок є абсолютними, оскільки вони розраховані за всіх відомих параметрів (крім

інформаційних) функції щільності розподілу ймовірності спостереженої реалізації вхідного колювання. Врахування апріорної невизначеності неінформаційних параметрів цієї функції є завданням наступних досліджень.

Список використаних джерел

1. Van Trees H. L. Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I: Detection, Estimation and Linear Modulation Theory: Wiley & Sons, Inc. 2001, 686 p. URL : DOI: 10.1002/0471221082.
2. McKilliam R., Pollok A. On the Cramér-Rao bound for polynomial phase signals. *Signal Processing*. Vol. 95. February, 2014. P. 27-31. URL : <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2013.08.007>.
3. Vlnrotter V., Breidenthal J. Maximum Likelihood Estimation of Delay and Phase for Chirped Signals. *IPN Progress Report*. 42-215 B. November 15, 2018. P. 1-17. URL : https://ipnpr.jpl.gov/progress_report/42-215_B.pdf.
4. Belega D., Petri D. Fast procedure for accurate parameter estimation of sine-waves affected by noise and harmonic distortion. *Digital Signal Processing*. Vol.114, July 2021. P. 103035. URL : <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103035>.
5. McKilliam R. et al. Carrier Phase and Amplitude Estimation for Phase Shift Keying Using Pilots and Data / McKilliam R., Pollok A., Cowley W., Vaughan L., Quinn B. *IEEE Transactions on Signal Processing*. Vol. 62. Issue

15. August 2014. P. 3976-3989. URL : DOI: 10.1109/ TSP.2014. 2332976.
6. Choqueuse V., Belouchrani A., El Houssin B., Benbouzid M. Estimation of amplitude, phase and unbalance parameters in three phase systems: analytical solutions, efficient implementation and performance analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*. Vol. 62. Issue 16. 2014. P. 4064-4076. URL : DOI: 10.1109/ TSP.2014. 2333565. hal-01058109.
7. Abusorrah A. M., Sepahvand H. A. Frequency/ Phase/ Amplitude Estimator for Three-Phase Applications Operating at a Low Sampling Rate. *Mathematics*. 2024. № 12. P. 363. URL : <https://doi.org/10.3390/math 12030363>.
8. Chen D., Su X., Shen T., Mou L. A Parameter Estimation Algorithm for Damped Real-value Sinusoid in Noise. *Measurement Science Review*. Vol. 23. № 3. 2023. P. 99-105. URL : <https://doi.org/10.2478/msr-2023-0013>.
9. Литвин-Попович А. И. Обнаружение сигналов и измерение их параметров в следящих радиотехнических системах. *Технологический аудит и резервы производства*. № 6/1 (14), 2013. С. 30-34. URL : <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2013.19560>.
10. Kokalj M., Lindič M., Voljč B., Pinter B., Svetik Z., Lapuh R. High accuracy signal parameter estimation algorithm for calibration of PMU devices. 2012 *Conference on Precision Electromagnetic Measurements, Washington, DC, USA*. 2012. P. 288-289. URL : <https://doi:10.1109/CPEM.2012.6250915>.
11. IEEE Standard for Digitizing Waveform Recorders. URL : <standards.ieee.org/ieee/1057/5945>.
12. Andersson T., Handel P. IEEE Standard 1057, Cramér-Rao bound and the parsimony principle. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2006. Vol. 55. № 1. P. 44-53. URL : <doi:1109/TIM.2005.861497>.
13. Ананьева О. М., Бабаєв М. М., Давиденко М. Г., Панченко В. В. Оцінювання параметрів неперервного зонduючого сигналу при тестуванні обмотки статора трифазного асинхронного двигуна. *Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті*. 2024. № 2. С. 52-60. URL : <https://doi.org/10.18664/iksz.v29i2. 307682>.
14. Ананьева О. М., Бабаєв М. М., Давиденко М. Г., Панченко В. В. Синтез пристрою оцінювання параметрів синусоїдного сигналу, адитивно змішаного з одиночною імпульсною завадою. *Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті*. 2024. № 3. С. 25-32. URL : <https://doi.org/10.18664/iksz.v29i3. 313625>.
- Ananieva O., Babaiev M., Davidenko M., Panchenko V.**
- The Cramer-Rao bounds for the amplitude and phase of a sine wave additively mixed with a single interference noise pulse**
- Abstract.** Sinusoidal electrical oscillations are widely used in information transmission systems, power supply, diagnostics and other branches of technology and science. The quality characteristics, and sometimes the performance of devices and systems in which they are used, depend on the accuracy of measuring the parameters of such oscillations. The measurement technique and the accuracy characteristics of its results in conditions of observations of an additive signal-noise blend with a continuous nature of noise interference in time are well known and theoretically justified. The technical side of measuring the parameters of a sinusoidal signal observed against a background of impulse noise has been developed on the basis of rather heuristic approaches. The degree of theoretical justification for the accuracy of estimates obtained under such conditions can hardly be considered acceptable. In this work, based on the statistical model of the additive blend of the signal and the sum of impulse and continuous noise, described by the probability density function, the full set of elements of the corresponding Fisher information matrix has been calculated. Mathematically justified expressions for the highest achievable accuracy of estimates of the amplitude and initial phase of a sinusoidal oscillation of a known frequency, additively mixed with short-term single impulse noise and continuous Gaussian noise, which have arbitrary powers, are obtained. The Cramér-Rao bounds of the amplitude and phase estimates of a sinusoid of known frequency are determined, provided that it is observed against the background of the specified interference. The results are presented in a form convenient for engineering practice.
- Key words:** amplitude estimate, phase estimate, pulse interference, Fisher matrix, Cramér-Rao bound.
- Ананьева Ольга Михайлівна, д.т.н., професор, кафедра автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків, Україна. E-mail: romashka13052015@gmail.com. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6686-8249>.*
- Бабаєв Михайло Михайлович, д.т.н., професор, завідувач кафедри, кафедра електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків, Україна. E-mail: mmbxiit@gmail.com. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3553-8786>.*
- Давиденко Михайло Георгійович, к.т.н., доцент, кафедра електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків, Україна. E-mail: davdenk@kart.edu.ua. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7255-3059>.*

Панченко Владислав Вадимович, к.т.н., доцент, кафедра електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків, Україна.
E-mail: vlad_panchenko@ukr.net. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4822-7151>.

Olha Ananieva, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Automation and computer telecontrol of trains, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine. E-mail: romashka13052015@gmail.com. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6686-8249>.

Mykhailo Babaiev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Electric Power Engineering,

Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine. E-mail: mmbxiit@gmail.com. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3553-8786>.

Mykhailo Davidenko, PhD, Associate Professor, Department of Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine. E-mail: davdenk@kart.edu.ua. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7255-3059>.

Vladyslav Panchenko, PhD, Associate Professor, Department of Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine. E-mail: vlad_panchenko@ukr.net. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4822-7151>.