УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧ-НОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
І завдання до контрольної роботи
з дисципліни

“ВИЩА МАТЕМАТИКА”

Харків 2002

Методичні вказівки розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 2 від 8 жовтня 2001 р.

Рекомендуються для студентів загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання.

Укладачі:
доц. Куліш Ю.В.
асист. О.В.Рибачук

Рецензент
доц. Р.М.Давидов

Вступ

Диференціальним називається рівняння, яке містить незалежні змінні, невідому функцію і її похідні. Диференційне рівняння (ДР) для функції однієї змінної називається звичайним ДР, а для функції багатьох змінних – ДР в частинних похідних. Порядком ДР називається порядок старшої похідної в ньому.

У даних методичних вказівках будемо вивчати звичайні ДР.
В результаті інтегрування звичайного ДР невідома функція може бути знайдена явно або неявно (тобто невідома функція входить в деяке співвідношення). В першому випадку знаходять розв'язок, а в другому інтеграл ДР. При інтегруванні ДР в загальному випадку невідома функція, а також співвідношення із невідомою функцією, виражається через невизначені інтеграли і тому залежить від довільних сталих. Кількість довільних сталих при даному аргументі дорівнює порядку ДР. Розв'язок ДР (інтеграл), який залежить від довільних сталих, називається загальним розв'язком (або інтегралом) . Розв'язок (інтеграл) ДР, який відповідає конкретним значенням довільних сталих, називається частинним розв'язком (інтегралом).

1 Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші

Будемо вивчати ДР, які можна розв'язати відносно похідної $y\,'(x)$ невідомої функції $y(x)$; тобто можна представити у вигляді

$$y'(x) = f(x, y). \tag{1.1}$$

Розв'язати задачу Коші для рівняння першого порядку означає знайти невідому функцію або співвідношення, які задовольняють (1.1) і відповідають умові $y(x_0) = y_0$.

В залежності від властивостей $f(x,y)$ можуть бути різні розв'язки ДР.

Якщо $f(x,y)$ неперервна і має неперервну похідну $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в області D на площині XOY, то ДР (1.1) має тільки один розв'язок, який відповідає умові $y(x_0) = y_0$. Тобто, через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ в області D проходить тільки одна крива (інтегральна крива), яка відповідає розв'язку ДР (1.1). Ця інтегральна крива відповідає певному значенню довільної сталої C в загальному розв'язку ДР, конкретне значення якої відповідає розв'язку рівняння $y(x_0, C) = y_0$.

Якщо в деяких точках порушується умова неперервності $f(x,y)$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$, то розв'язок в цих точках може не існувати або існувати більше одного розв'язку. Такі точки називаються особливими . Сукупність особливих точок можуть утворювати лінії на площині XOY. Ці лінії (особливі лінії) відповідають особливим розв'язкам ДР. При цьому рівняння особливої лінії неможливо одержати із загального розв'язку ДР (1.1) ні при якому значенні довільної сталої C. В кожній точці особливої лінії порушується єдиність розв'язку, тобто через кожну точку на особливій лінії проходить хоча б одна лінія, яка відповідає конкретному значенню довільної сталої C в загальному розв'язку. Ми будемо вивчати як правило не особливі розв'язки.

Розглянемо деякі типи ДР першого порядку.

1.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

Ці рівняння можна представити у вигляді

$$y' = f(x) \quad g(y) \tag{1.2}$$

Тобто похідна може бути представлена у вигляді добутку функції тільки x ($f(x)$) на функцію тільки y $(g(y))$. При цьому $g(y) \neq 0$. Розв'язати це рівняння можна в три етапи:

1) за формулою $dy = y'dx$ переписати (1.1) у вигляді $dy = f(x) \cdot g(y) dx$;
2) поділити обидві частини на $g(y)$, тобто $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$;
3) проінтегрувати обидві частини (оскільки ліва частина залежить тільки від y, а права тільки від x) і одержати загальний інтеграл ДР (1.2)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{1.3}$$

До розв'язків (1.3) ДР (1.2) необхідно додати сталі значення $y = a$, для яких $g(a) = 0$, оскільки $y' = a' = 0$.

1.2 Однорідне рівняння першого порядку

В цьому рівнянні похідна y' може бути представлена у вигляді функції відношення $\frac{y}{x}$, тобто

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.4}$$

Для розв'язання (1.4) вводимо нову змінну $z=\frac{y}{x},\ y=zx,\ y'=z\,x+z$ і

$$z'x+z=f(z), \qquad z'=\frac{f(z)-z}{x}. \tag{1.5}$$

Останнє рівняння представляє собою рівняння з відокремлюваними змінними . Загальний інтеграл (1.5) має вигляд

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\int\frac{dx}{x}+\ln C=\ln x+\ln C=\ln Cx. \tag{1.6}$$

Тепер замість z підставляємо $z=\frac{y}{x}$ і одержуємо співвідношення між $y\ i\ x$.

1.3 Лінійні рівняння

Рівняння першого порядку:

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{1.7}$$

називають лінійним. Функції $P(x)\ i\ Q(x)$ називаються коефіцієнтами. Якщо $Q(x)=0$, то лінійне рівняння називається однорідним або ДР без правої частини. Якщо $Q(x)\neq 0$, то лінійне рівняння називається неоднорідним або ДР з правою частиною. Для розв'язання ДР (1.7) представимо $y(x)$ у вигляді добутку $y=u(x)\cdot v(x)$. Будемо вважати $u(x)$ розв'язком однорідного лінійного рівняння, тобто

$$u'+P(x)u=0. \tag{1.8}$$

Якщо перенести $P(x)u$ вправо, то одержимо рівняння з відокремлюваними змінними $u'=-P(x)u$, розв'язок якого має вигляд

$$u(x)=e^{-\int P(x)dx}. \tag{1.9}$$

Тут ми взяли частинний розв'язок ДР (1.8). Тепер

$$y'+P(x)y=[u'+P(x)\ u]v+uv'=Q(x). \tag{1.10}$$

Оскільки вираз у квадратних скобках дорівнює нулю, то

$$v'=\frac{Q(x)}{u(x)} \quad\Rightarrow\quad v(x)=\int\frac{Q(x)}{u(x)}dx+C. \tag{1.11}$$

Якщо підставити $u(x)\ i\ v(x)$ в $y(x)$, то можна одержати загальний розв'язок лінійного рівняння

$$y_{зн}(x)=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]. \tag{1.12}$$

З цієї формули бачимо, що

а) лінійне рівняння першого порядку може бути завжди виражено через інтеграли від $P(x)\ i\ Q(x)$;

б) загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння може бути представлений у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння $y_{зо}$ і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y_{чн}$

$$y_{зн}(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x), \qquad (1.13)$$

$$y_{зо}(x) = C\, e^{-\int P(x)dx}, \quad y_{чн}(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right].$$

При розв'язанні конкретних рівнянь використання формули (1.12) досить складне, тому краще скористатися схемою, яка приводить до (1.12).

1.4 Рівняння Бернуллі

Ці рівняння мають вигляд:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0{,}1. \qquad (1.14)$$

Якщо поділити обидві частини на y^n і ввести нову змінну $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$, то для z одержуємо лінійне рівняння

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x), \quad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \qquad (1.15)$$

Далі розв'язуємо рівняння для z і знаходимо $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-n}} = \sqrt[1-n]{z(x)}$.

Рівняння Бернуллі, як і лінійне ДР (1.7), можна розв'язувати з допомогою підстановки $y = u(x)\cdot v(x)$, де $u' + P(x)u = 0$.

1.5 Приклади розв'язання завдань

Приклад 1.1

$$y' = (y^2 + 4)e^{3x+1} \qquad (1.16)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними (1.2), де $f(x) = e^{3x+1}$, $g(y) = y^2 + 4$. Ми одержуємо послідовно:

$$1)\ dy = (y^2+4)e^{3x+1}dx; \qquad 2)\ \frac{dy}{y^2+4} = e^{3x+1}dx;$$

$$3)\ \int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{y}{2}; \qquad \int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C.$$

Результат розв'язання ДР можна записати у вигляді загального інтеграла $arctg\frac{y}{2} = \frac{2}{3}e^{3x+1} + C$ і загального розв'язку:

$$y = 2tg\left(\frac{2}{3}e^{3x+1} + C\right). \qquad (1.17)$$

Приклад 1.2

$$y' + \frac{y}{sin^2 x} = e^{ctgx}\ \frac{x}{x^2+5} \qquad (1.18)$$

Це лінійне неоднорідне рівняння (1.7) з $P(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$,

$Q(x) = e^{ctgx}\ \frac{x}{x^2+5}$, $x \neq \pi\ n$.

Нехай $y = uv$. Для *u* маємо ДР з відокремлюваними змінними

$$u' + \frac{u}{\sin^2 x} = 0$$

Знайдемо його розв'язок:

1) $\frac{du}{u} = -\frac{dx}{\sin^2 x}$;

2) $\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \ln u = ctgx \quad \Rightarrow u = e^{ctgx}$.

Для *v(x)* одержуємо

$$v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)} dx + C = \int \frac{e^{ctgx}}{e^{ctgx}} \cdot \frac{x}{x^2+5} dx + C = \int \frac{x}{x^2+5} dx + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + C.$$

Загальний розв'язок ДР (1.18) має вигляд

$$y_{зн}(x) = uv = e^{ctgx}\left[\ln\sqrt{x^2+5} + C\right]. \qquad (1.19)$$

При цьому $y_{зо}(x) = Ce^{ctgx}$, $\quad y_{чн} = e^{ctgx}\ln\sqrt{x^2+5}$.

Приклад 1.3

$$y' = \frac{x^2}{y^2}\exp\left(\frac{y^3}{x^3}\right) + \frac{y}{x} \qquad (1.20)$$

Це однорідне рівняння першого порядку. При цьому $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Вводимо $z = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = zx \quad \Rightarrow \quad y' = z'x + z$.

Тоді рівняння (1.20) прийме вигляд $z'x + z = \frac{e^{z^3}}{z^2} + z$, або $\quad z' = \frac{e^{z^3}}{z^2 x}$.

Отримали ДР з відокремлюваними змінними.

Далі одержуємо $\quad z^2 e^{-z^3} dz = \frac{dx}{x}$. Знайдемо загальний інтеграл:

$$\int z^2 e^{-z^3} dz = \int \frac{dx}{x}.$$

Для обчислення $\int z^2 e^{-z^3} dz$ вводимо нову змінну

$t = -z^3 \Rightarrow dt = -3z^2 dz \Rightarrow \int z^2 e^{-z^3} dz = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t = -\frac{1}{3}e^{-z^3}$. Тому загальний інтеграл має вигляд:

$$-\frac{1}{3}e^{-z^3} = \mathbf{ln}\, x + \mathbf{ln}\, C = \mathbf{ln}\, Cx,$$

$$e^{-z^3} = -3\,\mathbf{ln}\, Cx \Rightarrow e^{-z^3} = \mathbf{ln}(Cx)^{-3},$$

$$\mathbf{exp}\left(-\frac{y^3}{x^3}\right) = \mathbf{ln}(Cx)^{-3} = \mathbf{ln}\frac{1}{(Cx)^3}.$$

Загальний розв’язок має вигляд

$$-\frac{y^3}{x^3} = \mathbf{ln}\,\mathbf{ln}\frac{1}{(Cx)^3}, \qquad y = -x\cdot\left(\mathbf{ln}\,\mathbf{ln}\frac{1}{(Cx)^3}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{1.21}$$

Приклад 1.4

$$y\,' + \frac{2}{3}\frac{y}{x} = \frac{2}{3}\frac{\mathbf{cos}^2 x}{x\sqrt{y}}. \tag{1.22}$$

Це рівняння Бернуллі ($n = -\frac{1}{2}$). При цьому $x \neq 0,\ y \neq 0$. Помножимо обидві частини на $\sqrt{y}$. Тоді $\sqrt{y}y\,' + \frac{2}{3}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x} = \frac{2}{3}\frac{\mathbf{cos}^2 x}{x}$. Вводимо $z = y^{\frac{3}{2}},\ z\,' = \frac{3}{2}\sqrt{y}y\,',\ y\,'\sqrt{y} = \frac{2}{3}z\,'$. Для z одержуємо лінійне рівняння

$$z\,' + \frac{z}{x} = \frac{\cos^2 x}{x}.$$

Нехай $z = uv$ тоді

$$u\,' + \frac{u}{x} = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = -\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \underline{u = \frac{1}{x}}.$$

Для $v(x)$ маємо

$$v\,'u = \frac{\cos^2 x}{x} \Rightarrow v\,' = \frac{\cos^2 x}{xu} \Rightarrow v = \int \frac{\cos^2 x}{xu} + C = \int \cos^2 x dx + C =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x) dx + C = \underline{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.}$$

Тому $z = uv = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}\sin 2x + \frac{C}{x}$. Тепер можна написати загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y(x) = \sqrt[3]{z^2(x)} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4x}\sin 2x + \frac{C}{x}\right]^{\frac{2}{3}}. \qquad (1.23)$$

2 Диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо ДР, які розв'язані відносно другої похідної:

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (2.1)$$

Якщо функція $f(x, y, y')$ неперервна разом з частинними похідними $\frac{\partial f}{\partial y}$ і $\frac{\partial f}{\partial y'}$ в області D у тривимірному просторі (з координатами x, y, y') то існує тільки один розв'язок ДР (2.1), який відповідає умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, де y_0 і y'_0 числа. Тобто, в площині XOY при заданому тангенсу кута нахилу кривої в т. $M_0(x_0, y_0)$ проходить тільки одна крива. Загальний розв'язок ДР (2.1) містить дві довільні сталі. Задачею Коші для ДР (2.1) називається задача знаходження частинного розв'язку, який відповідає умовам $y(x_0) = y_0$, $y(x_0) = y_0$, де y_0 і y'_0 – числа. Тому для розв'язання задачі Коші одержуємо систему двох рівнянь, одне з яких представляє собою умову $y(x_0) = y_0$, а інше умову $y'(x_0) = y'_0$.

Частинні розв'язки ДР (2.1) відповідають конкретним значенням довільних сталих . Відзначимо, що окрім розв'язання задачі Коші можливі й інші способи знаходження значень довільних сталих.

2.1 Рівняння другого порядку які допускають зниження порядку

В деяких випадках можна розв'язати ДР другого порядку з допомогою зниження порядку . Найбільш просто знижується порядок і навіть інтегрується ДР вигляду $y'' = f(x)$. Для інтегрування цього ДР достатньо двічі проінтегрувати ліву і праву частини цього рівняння.

Розглянемо інші ДР які допускають зниження порядку.

1. Рівняння виду $F(x, y', y'') = 0$. Ці рівняння не містять невідомої функції $y(x)$. До таких рівнянь відносяться ДР

$$y'' = f(x, y'). \qquad (2.2)$$

Для їхнього інтегрування позначимо $y'=p(x)$. Тоді $y''=(y')'=p'$ і ми одержуємо ДР першого порядку для функції $p(x)$:

$$p'=f(x,y). \tag{2.3}$$

Якщо позначити розв'язок цього рівняння $p(x)=\varphi(x,C_1)$, то можна одержати загальний розв'язок

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1) \Rightarrow y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2. \tag{2.4}$$

2. Рівняння виду $F(y,y',y'')=0$. В таких рівняннях немає явно незалежної змінної x. Прикладом таких ДР є рівняння

$$y=f(y,y'). \tag{2.5}$$

Для інтегрування цього ДР вводимо заміну $y'=p(y)$. Тоді

$$y'=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

і ми одержуємо ДР

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p). \tag{2.6}$$

Це ДР першого порядку для функції $p(y)$, яку розглядаємо як функцію від y - невідомої функції ДР (2.5). Якщо знайдено загальний розв'язок (2.6)

$$p=\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1) \Rightarrow dy=\varphi(y,C_1)dx \Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx, \tag{2.7}$$

то можна написати загальний інтеграл ДР (2.5)

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2. \tag{2.8}$$

Приклад 2.1.1

$$y'-3\frac{y'}{x}=\frac{x^3}{1+x^2}. \tag{2.9}$$

Це рівняння не містить явно у. Як і в (2.2) вводимо $y'=p,\ p=p(x)$ Тоді

$$p'-3\frac{p}{x}=\frac{x^3}{1+x^2}.$$

Це лінійне рівняння першого порядку для функції *p(x).* Нехай $p(x)=uv,$ тоді $u'-3\frac{u}{x}=0\Rightarrow$

$$\frac{du}{u}=3\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u=3\ln x=\ln x^3 \Rightarrow \underline{u=x^3}.$$

Для *v(x)* маємо

$$v\,'(x)u(x) = \frac{x^3}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad v\,'(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)u(x)} \quad \Rightarrow \quad v\,'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$v(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx + C_1 = arctgx + C_1,$$

і

$$p(x) = y\,' = x^3 arctgx + C_1 x^3,$$

$$y = \int p(x)dx = \int x^3 arctgxdx + C_1 \int x^3 dx + C_2.$$

Знайдемо $\int x^3 arctgxdx$ з допомогою інтегрування частинами:

$$\int x^3 arctgxdx = \left| \begin{array}{ll} u_1 = arctgx, & du_1 = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv_1 = x^3 dx, & v_1 = \dfrac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} arctg\,x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} arctg\,x - \frac{1}{4}\int \frac{\left(x^4-1\right)+1}{1+x^2}dx = \frac{x^4}{4} arctg\,x - \frac{1}{4}\int\left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} arctg\,x - \frac{1}{4} arctg\,x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + C_1.$$

Тому

$$y(x) = \frac{x^4}{4} arctg\,x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} arctgx + \frac{C_1}{4}x^4 + C_2. \qquad (2.10)$$

Приклад 2.1.2

$$y\,' = (y\,')^3 e^y \qquad (2.11)$$

Це рівняння не містить явно *x*. Як і в (2.5) вводимо $y\,' = p, \qquad y\,'' = p\dfrac{dp}{dy}$.

Тоді

$$p\frac{dp}{dy} = p^3 e^y, \qquad p\left(\frac{dp}{dy} - p^2 e^y\right) = 0,$$

$$а)\, p = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = C$$

$$б)\, \frac{dp}{dy} = p^2 e^y.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int e^y dy + C_1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{p} = e^y + C_1 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{e^y + C_1}.$$

Таким чином $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e^y + C_1}$ і $\int(e^y + C_1)dy = -\int dx + C_2$. Одержуємо загальний інтеграл:

$$e^y + C_1 y = -x + C_2. \qquad (2.12)$$

2.2 Лінійні рівняння

Рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2.13)$$

називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) другого порядку, або рівнянням без правої частини. Рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (2.14)$$

при $f(x) \neq 0$ називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) другого порядку або рівнянням з правою частиною. Як і для лінійних рівнянь першого порядку загальний розв'язок $y_{зн}(x)$ ЛНДР можна представити у вигляді суми загального розв'язку $y_{зо}(x)$ ЛОДР і частинного розв'язку $y_{чн}(x)$ ЛНДР:

$$y_{зн}(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x). \qquad (2.15)$$

У випадку довільних функцій $p(x)$ і $q(x)$ (коефіцієнтів) ЛОДР (2.13) не розв'язується, тобто не існує формули подібної до (1.12) для лінійних рівнянь першого порядку. Але властивості лінійних рівнянь спрощують пошук розв'язків ЛНДР.

У випадку довільних функцій $p(x)$ і $q(x)$ (коефіцієнтів) ЛОДР (2.13) не існує формули, яка дозволяє виразити $y(x)$ через інтеграли від функцій $p(x)$ і $q(x)$ (на відміну від лінійних рівнянь першого порядку (1.7) для яких є розв'язок (1.12)).

2.2.1 Однорідні рівняння

Нехай функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є частинні розв'язки ЛОДР (2.13). Тоді їхня лінійна комбінація:

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x), \qquad (2.16)$$

де C_1 і C_2-сталі, також є розв'язок цього ДР. Функція $y(x)$ (2.16) буде загальним розв'язком (2.13), якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є лінійно незалежні функції. Для лінійної незалежності двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ необхідно і достатньо, щоб був відмінний від нуля визначник Вронського (вронскіан):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'. \qquad (2.17)$$

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні ($W(x) \neq 0$), якщо відношення $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ є функція від x.

При одному відомому частинному розв'язку $y_1(x)$ ЛОДР (2.13) можна знайти другий частинний розв'язок $y_2(x)$ за формулою

$$y_2(x) = y_1(x) \int e^{-\int p(x)dx} \frac{1}{y_1^2(x)} dx. \qquad (2.18)$$

2.2.2 Неоднорідні рівняння

Частинний розв'язок $y_{чн}(x)$ ЛНДР (2.14) можна одержати при відомих частинних лінійно незалежних розв'язках ЛОДР (2.13) $y_1(x)$ і $y_2(x)$. Якщо в (2.16) сталі C_1 і C_2 замінити на функції, то $y(x)$ в (2.16) вже не буде розв'язком ЛОДР. Тому $y_{чн}(x)$ можна шукати у вигляді

$$y_{чн}(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x). \qquad (2.19)$$

Для похідних $C_1'(x)$ і $C'_2(x)$ маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y'_1 + C_2'(x)y'_2 = f(x) \end{cases}. \qquad (2.20)$$

Звідси легко знайти

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx, \qquad (2.21)$$

де $W(x)$ вронскіан (2.17). Після підстановки (2.21) в (2.19) одержуємо $y_{чн}(x)$. Описаний метод розв'язання ЛНДР (2.14) називається методом варіації довільних сталих.

Загальний розв'язок ЛНДР (2.14) можна представити у вигляді

$$y_{зн}(x) = \left[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\right] +$$
$$+ \left\{ -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx \right\} \qquad (2.22)$$

Вираз у квадратних дужках в (2.22) є $y_{зо}(x)$, а у фігурних дужках - $y_{чн}(x)$.

2.3 Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Вивчимо лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = P_n(t)e^{at}, \qquad (2.23)$$

де *p, q, a* -числа. $P_n(t)$ - многочлен (поліном) степені *n*. Для деяких *n* поліноми мають такий загальний вигляд

$$\begin{aligned} &n = 0, && P_0(t) = a_0, \\ &n = 1, && P_1(t) = a_1 t + a_0, \\ &n = 2, && P_2(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \\ &n = 3, && P_3(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0. \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Відмітимо, що права частина (2.23) при комплексному $a = \alpha + i\beta$ може бути представлена у вигляді

$$P_n(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + Q_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t, \qquad (2.25)$$

де $Q_m(t)$ поліном степені m. При $a = 0$ права частина зводиться до поліному, а при $n = 0$ до експоненти (або, наприклад до $\sin\beta t$ і $\cos\beta t$ для уявного $a = i\beta$). Рівняння (2.23) можна розв'язати без використання формули (2.22), тобто без знаходження невизначених інтегралів.

Розглянемо два метода розв'язання задачі Коші рівняння (2.23), тобто знайдемо такі розв'язки(2.23), які задовольняють умовам:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \qquad (2.26)$$

де y_0, *і* y'_0 задані числа.

2.3.1 Загальний розв'язок ЛНДР

Загальний розв'язок ЛНДР, як розв'язок будь якого лінійного диференціального рівняння, можна представити у вигляді суми загального розв'язку $y_{зо}(t)$ лінійного однорідного диференціального рівняння ЛОДР і частинного розв'язку $y_{чн}(t)$ ЛНДР (2.15).

А) Загальний розв'язок ЛОДР

Загальний розв'язок ЛОДР, відповідного (2.23)

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0 \qquad (2.27)$$

шукаємо у вигляді $y(t) = e^{kt}$, де числа *k* є розв'язки алгебраїчного характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad (2.28)$$

яке одержують з (6) замінами $y(t) \to 1,\ y'(t) \to k,\ y''(t) \to k^2$. При відомих розв'язках (7) $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ маємо

$$y_{зо}(t)=\begin{cases} C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}, якщо\ \ k_1\neq k_2 & (2.29)\\ (C_1+C_2t)\,e^{kt}, якщо\ \ k_1=k_2=k & (2.30)\end{cases}$$

де *C₁* і *C₂* - довільні числа. У випадку комплексних $k_{1,2}=\lambda\pm i\omega$ $\left(\lambda=-\dfrac{p}{2},\ \omega=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}\right)$ можна використати формулу Ейлера $e^{i\omega t}=cos\omega t+isin\omega t$ і окрім (2.30) написати

$$y_{зо}(t)=e^{\lambda t}\left(A\cos\omega t+B\sin\omega t\right) \qquad (2.31)$$

Б) Метод невизначених коефіцієнтів для ЛНДР

Частинний розв'язок ЛНДР (2.23) шукаємо у вигляді

$$y_{чн}(t)=t^r\widetilde{P}_n(t)e^{at}, \qquad (2.32)$$

де $\widetilde{P}_n(t)$ - поліном з невідомими коефіцієнтами степені n (як і $P_n(t)$) в (2.23)), *r*-кількість коренів характеристичного рівняння (2.27), які дорівнюють числу a в правій частині (1). В таблиці 1 наведені $y_{зо}(t)$ і $y_{чн}(t)$ для різних k_1, k_2, a.

Таблиця 2.1. Розв'язки $y_{зо}(t)$ ЛОДР і $y_{чн}(t)$ ЛНДР (2.23) при різних значеннях a і коренів характеристичного рівняння k_1, k_2.

Права частина (2.23)	*Корені (2.28)* $k_1, k_2, i\ a$	*r*	$y_{зо}(t)$	$y_{чн}(t)$
1	2	3	4	5
$P_n(t)e^{at}$ *a -дійсне*	$k_1\neq k_2 - дійсні$ $a\neq k_1, a\neq k_2$	0	$C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}$	$\widetilde{P}_n(t)e^{at}$
$P_n(t)e^{at}$ *a -дійсне*	$k_1=k_2=k$ $a\neq k$	0	$(C_1+C_2t)e^{kt}$, $якщо\ k_1=k_2=k$	$\widetilde{P}_n(t)e^{at}$
$e^{\alpha t}(P_n(t)\cos\beta t+$ $Q_m(t)\sin\beta t)$ $a=\alpha+i\beta$ *комплексне*	$k_1\neq k_2$ *дійсні* $a\neq k_1$ $a\neq k_2$	0	$C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}$	$e^{\alpha t}\,[U_l(t)\cos\beta t+$ $+V_l(t)\sin\beta t]$ $l=\max(m,\ n)$

1	2	3	4	5
$e^{\alpha t}(P_n(t)\cos\beta t +$ $Q_m(t)\sin\beta t)$ $a=\alpha+i\beta$ *комплексне*	$k_{1,2}=\lambda\pm i\omega$ *комплексні* $k_1\neq a$ $k_2\neq a$	0	$C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}=$ $=e^{\lambda t}\times(A\cos\omega t$ $+B\sin\omega t)$	$e^{\alpha t}[U_l(t)\cos\beta t+$ $+V_l(t)\sin\beta t]$ $l=\max(m,\ n)$
$P_n(t)e^{at}$ a -дійсне	$k_1\neq k_2$ *дійсні* $a=k_1$ *або* $a=k_2$	1	$C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}$	$t\widetilde{P}_n(t)e^{at}$
Права частина (2.23)	*Корені (2.28)* $k_1, k_2, i\ a$	*r*	$y_{зо}(t)$	$y_{чн}(t)$
$e^{\alpha t}(P_n(t)\cos\beta t +$ $Q_m(t)\sin\beta t)$ $a=\alpha+i\beta$ *комплексне*	$k_{1,2}=\lambda+i\omega$ *комплексні* $\alpha=\lambda,$ $\beta=\begin{cases}+\omega \text{ або}\\ -\omega\end{cases}$ $k_2\neq a$	1	$C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}=$ $e^{\lambda t}\times$ $\times(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$	$te^{\alpha t}[U_l(t)\cos\beta t+$ $+V_l(t)\sin\beta t]$ $l=\max(m,\ n)$
$P_n(t)e^{at}$ a -дійсне	$k_1=k_2=$ $=k=a$	2	$(C_1+C_2t)e^{kt}$	$t^2\widetilde{P}_n(t)e^{kt}$

Відмітимо, що при комплексному a можливі випадки коли $P_n(t)=0$ *або* $Q_m(t)=0$ (тобто в правій частині (2.23) присутні тільки $\cos\beta t$ (без $\sin\beta t$) або тільки $\sin\beta t$ (без $\cos\beta t$)), в цих випадках $y_{чн}(t)$ необхідно шукати з двома поліномами однакової степені $l=\max(m,n)$ при $\sin\beta t\ i\ \cos\beta t.$

Щоб знайти $y_{чн}(t)$ необхідно визначити коефіцієнти $a_0, a_1, ..a_n$ в

$$\widetilde{P}_n(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0\,. \qquad (2.33)$$

Для визначення цих коефіцієнтів обчислюємо $y'_{чн}(t)$ і $y''_{чн}(t)$, які потім підставляємо в ЛНДР (2.23). Після цього прирівнюємо коефіцієнти при однакових виразах $t^je^{at}(t^je^{\alpha t}\cos\beta t$ і $t^je^{\alpha t}\sin\beta t$ для $a=\alpha+i\beta), (j=0,1,\ldots,n)$.

В результаті визначаємо поліном $\widetilde{P}_n(t)$ а з ним і $y_{чн}(t)$, а за формулою (2.15) одержуємо $y_{зн}(t)$.

2.3.2 Розв'язання задачі Коші

На основі загального розв'язку задача Коші за методом невизначених коефіцієнтів розв'язується в три етапи. На першому етапі $y_{зн}(t)$. і знайдена похідна $y'_{зн}(t)$.обчислюються при $t = t_0$. В результаті одержуємо два співвідношення, які розглядаємо як систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих C_1 і C^5 в (2.29), або A і B в (2.30) для комплексних k_1 . і k_2. На другому етапі знаходимо розв'язок цієї системи $\overline{C}_1$ і $\overline{C}_2$, або $\overline{A}$. і $\overline{B}$. На третьому етапі $\overline{C}_1$ та $\overline{C}_2$, або $\overline{A}$ та $\overline{B}$, підставляємо в $y_{чн}(t)$ і одержуємо розв'язок задачі Коші. Далі розглянемо приклади розв'язання задачі Коші для ЛНДР різних рівней складності.

2.4 Приклади

Приклад 2.4.1

Дано лінійне неоднорідне диференційне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = f_i(t),$$

і початкові умови $y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0$.

Розглянемо розв'язання задачі Коші на основі загального розв'язку.

Для демонстрації різних варіантів пошуку $y_{чн}(t)$ ЛНДР в цьому завданні розглянуто три різних правих частин рівняння (2.23), де $p = 14,\ q = 49,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$, тобто $y''(t) + 14y'(t) + 49y(t) = f_i(t)$

1) $f_1(t) = 5e^{4t}$;
2) $f_2(t) = 3e^{-7t}$;
3) $f_3(t) = 5t\cos 2t$;

В першому варіанті наше рівняння має вигляд

$$y''(t) + 14y'(t) + 49y(t) = 5e^{4t}, \qquad (2.34)$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 0$$

а) знайдемо розв'язок задачі Коші на основі загального розв'язку.

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн},$$

де $y_{зо}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y''(t) + 14y'(t) + 49y(t) = 0 \ .$$

Складемо характеристичне рівняння:

$k^2+14k+49=0 \quad \Rightarrow \quad (k+7)^2=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=k_2=k=-7$ - двократний корінь рівняння, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{зо}=C_1e^{-7t}+C_2te^{-7t}. \qquad (2.35)$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок $y_{чн}$.

Права частина має спеціальний вигляд:

$f(t)=5e^{4t}\ =P_n(t)\,e^{at};$ де $P_0(t)=5;\ a=4,\ n=0$.

Перевіримо чи буде $a=4$ коренем характеристичного рівняння: $a=4\neq k=-7 \ \Rightarrow\ r=0$ - кількість коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють *a.* Тому шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн}=t^r\widetilde{P}_0(t)e^{at}=\widetilde{P}_0(t)e^{at}=Ae^{4t},$$

де *A* – невідома стала. Для того щоб знайти цю сталу використовуємо те ,що $y_{чн}$ - розв'язок рівняння, тому при підстановці його в ЛНДР ми повинні отримати тотожність. Знайдемо похідні:

$$\begin{array}{r|l} 49 & y_{чн}=Ae^{4t} \\ 14 & y'_{чн}=4Ae^{4t} \\ 1 & y''_{чн}=16Ae^{4t}. \end{array}$$

отже $16Ae^{4t}+14\cdot 4Ae^{4t}+49Ae^{4t}=5e^{4t} \quad \Rightarrow \quad 121Ae^{4t}=5e^{4t} \ \Rightarrow A=\dfrac{5}{121}$.

Таким чином,

$$y_{чн}=\frac{5}{121}e^{4t}. \qquad (2.36)$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y_{зн}=C_1e^{-7t}+C_2te^{-7t}+\frac{5}{121}e^{4t}. \qquad (2.37)$$

Тепер відшукаємо частинний розв'язок, враховуючи початкові дані: $y(0)=2,\ y'(0)=0$.

Спочатку знайдемо

$$y'_{зн}=-7C_1e^{-7t}+C_2e^{-7t}-7C_2te^{-7t}+\frac{20}{121}e^{4t} \quad \Rightarrow$$

$$y(0)=C_1+\frac{5}{121}=2,$$

$$y'(0)=-7C_1+C_2+\frac{20}{121}=0.$$

Отримали систему для визначення сталих C_1 і C_2, знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} C_1 = 2 - \frac{5}{121} \\ -7C_1 + C_2 = -\frac{20}{121} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 - \frac{5}{121} \\ C_2 = -\frac{20}{121} + 7C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{237}{121} \\ C_2 = \frac{1639}{121} = \frac{149}{11} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = \frac{237}{121}e^{-7t} + \frac{1639}{121}te^{-7t} + \frac{5}{121}e^{4t}. \qquad (2.38)$$

В другому варіанті маємо задачу Коші

$$y''(t) + 14y'(t) + 49y(t) = 3e^{-7t}, \qquad (2.39)$$

$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 0.$$

Аналогічно попередньому прикладу будемо шукати розв'язок у вигляді (2.15) і для $y_{зо}$ маємо (2.35), як і раніше

$$y_{зо} = C_1e^{-7t} + C_2te^{-7t}.$$

Знайдемо $y_{чн}$. Права частина має спеціальний вигляд

$f(t) = 3e^{-7t} = P_n(t)\, e^{at}$ де $P_0(t) = 3;\;\; a = -7,\;\; n = 0$.

$a = -7 = k_1 = k_2 = -7 \;\Rightarrow\; r = 2$ - кількість коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють *a.* Тому шукаємо $y_{чн}$ у вигляді

$$y_{чн} = t^r\tilde{P}_0(t)e^{at} = t^2\tilde{P}_0(t)e^{at} = t^2Ae^{-7t},$$

де *A* невідома стала. Для того, щоб знайти цю сталу, використовуємо те що, $y_{чн}$ є розв'язок рівняння. Тому при підстановці його в ЛНДР ми повинні отримати тотожність. Знайдемо похідні:

$$\begin{array}{r|l} 49 & y_{чн} = At^2e^{-7t} \\ 14 & y'_{чн} = Ae^{-7t}(2t - 7t^2) \\ 1 & y''_{чн} = Ae^{-7t}(49t^2 - 28t + 2). \end{array}$$

Підставимо $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ у рівняння:

$$Ae^{-7t}(49t^2 - 28t + 2 + 28t - 98t^2 + 49t^2) = 3e^{-7t} \Rightarrow 2Ae^{-7t} = 3e^{-7t} \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$y_{чн} = \frac{3}{2}t^2e^{-7t}. \qquad (2.39)$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y_{зн} = C_1e^{-7t} + C_2te^{-7t} + \frac{3}{2}t^2e^{-7t}.$$

Для визначення сталих C_1, C_2 використаємо початкові умови.

Спочатку знайдемо похідну

$$y'_{зн} = -7C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-7t} - 7tC_2 e^{-7t} + 3t\,e^{-7t} - \frac{21}{2}t^2\,e^{-7t}.$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2 \\ y'(0) = -7C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 14. \end{cases}$$

Таким чином одержали розв'язок задачі Коші

$$y_{зн} = 2e^{-7t} + 14te^{-7t} + \frac{3}{2}t^2 e^{-7t}. \qquad (2.40)$$

3) В третьому варіанті маємо ЛНДР

$$\begin{aligned} &y''(t) + 14y'(t) + 49y(t) = 5t\cos 2t, \\ &y(0) = 2, \;\; y'(0) = 0. \end{aligned} \qquad (2.41)$$

В цьому ЛНДР права частина представляє собою добуток многочлена першого порядку t на $\cos 2t$. Згідно з табл. 1 частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = (A_0 + A_1 t)\cos 2t + (B_0 + B_1 t)\sin 2t$$

Для визначення коефіцієнтів знаходимо похідні, підставляємо їх у рівняння і прирівнюємо коефіцієнти в лівій і правій частинах по черзі при $\cos 2t, \;\; t\cos 2t, \;\; \sin 2t, \;\; t\cos 2t$. Тоді

$$y''_{чн} + 14y'_{чн} + 49y_{чн} = (4B_1 - 4A_0 - 4A_1 t)\cos 2t +$$

$$+ (-4A_1 - 4B_0 - 4B_1 t)\sin 2t + 14(B_1 - 2A_0 - 2A_1 t)\sin 2t +$$

$$+ 14(A_1 + 2B_0 + 2B_1 t)\cos 2t + 49(A_0 + A_1 t)\cos 2t + 49(B_0 + B_1 t)\sin 2t = 5t\cos 2t.$$

Одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 45A_0 + 28B_0 + 14A_1 + 4B_1 = 0 \\ 45A_1 + 28B_1 = 5 \\ 45B_0 - 28A_0 + 14B_1 - 4A_1 = 0 \\ 45B_1 - 28A_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи

$$A_0 = -\frac{70 \cdot 37}{53^3} = -\frac{2590}{53^3} \approx -0{,}0174; \qquad A_1 = \frac{225}{53^2} \approx 0{,}0801;$$

$$B_0 = -\frac{2860}{53^3} \approx -0{,}0192; \qquad B_1 = \frac{140}{53^2} \approx 0{,}0498.$$

Загальний розв'язок ЛНДР

$$\begin{aligned} y_{зн}(t) \approx (C_1 + C_2 t)\,e^{-7t} &+ (-0{,}0174 + 0{,}0801\,t)\cos 2t + \\ &+ (-0{,}0192 + 0{,}0498\,t)\sin 2t. \end{aligned} \qquad (2.42)$$

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші

$$y_{зо}(0) = C_1 - 0.0174 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 \approx 2.0174,$$

$$y'_{зо}(t) = \left[C_2 - 7(C_1 + C_2 t)\right] e^{-7t} + 0.0801\cos 2t + 2(0.0174 - 0.0801\,t)\sin 2t +$$

$$+0.0498\sin 2t + 2(-0.0192 + 0.0498\,t)\cos 2t$$

$$y'_{зо}(0) = C_2 - 7C_1 + 0.0801 - 2\cdot 0.0192 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 14.0801.$$

Таким чином одержуємо розв'язок задачі Коші

$$y(t) \approx (2.0174 + 14.0801\,t)e^{-7t} + (-0.0174 + 0.0801\,t)\cos 2\,t. +$$
$$+ (-0.0192 + 0.0498)\sin 2t \qquad (2.43)$$

Приклад 2.4.2

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{e^{3t}}{9 + e^{2t}} = f(t).$$
$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 0. \qquad (2.45)$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок цього ЛНДР:

$$y_{зн}(t) = y_{зо}(t) + y_{чн}(t).$$

З допомогою характеристичного рівняння $k^2 - 2k - 3 = 0$ одержуємо корені $k_1 = -1, \;\; k_2 = 3$ і частинні розв'язки ЛОДР

$$y_1(t) = e^{k_1 t} = e^{-t}, \quad y_2(t) = e^{k_2 t} = e^{3t}.$$

Тоді $y_{зо}(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y(t) = C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2. \qquad (2.46)$$

тепер $C_1(t)$ і $C_2(t)$ функції. Для цих функцій, згідно з (2.20) , маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1' e^{-t} + C_2' e^{3t} = 0 \\ -C_1' e^{-t} + 3C_2' e^{3t} = \dfrac{e^{3t}}{9 + e^{2t}}. \end{cases}$$

Визначник системи (вронскіан)

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{vmatrix} = 4e^{2t}.$$

Розв'язок системи

$$C_1(t) = -\int \frac{y_2(t) f(t)}{W(t)} dt = -\frac{1}{4}\int \frac{e^{4t}}{e^{2t} + 9} dt, \qquad (2.47)$$

$$C_2(t)=\int\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt=\frac{1}{4}\int\frac{1}{e^{2t}+9}dt\,. \tag{2.48}$$

Знайдемо ці інтеграли

$$\int\frac{1}{e^{2t}+9}dt=\left|\begin{array}{l} u=e^{2t} \\ du=2e^{2t}dt \\ dt=\dfrac{du}{2u}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u(u+9)}=\frac{1}{2\cdot 9}\int\left(-\frac{1}{u+9}+\frac{1}{u}\right)du$$

(2.49)

$$=\frac{1}{18}(\ln u-\ln|u+9|)+\widetilde{C}_2=\frac{1}{9}\left[t-\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+9)\right]+\widetilde{C}_2,$$

$$\int\frac{e^{4t}}{e^{2t}+9}dt=\left|\begin{array}{l} u=e^{2t} \\ du=2e^{2t}dt \\ dt=\dfrac{du}{2u}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{u^2du}{u(u+9)}=\frac{1}{2}\int\frac{u}{u+9}du=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{9}{u+9}\right)du=\frac{1}{2}\big[u-9\ln|u+9|\big]+\widetilde{C}_1=\frac{1}{2}\left[e^{2t}-9\ln\left|e^{2t}+9\right|\right]+\widetilde{C}_1\,. \tag{2.50}$$

Після підстановки цих інтегралів в (2.47), (2.48) одержуємо $C_1(t)$ і $C_2(t)$:

$$C_1(t)=\frac{1}{8}\left[-e^{2t}+9\ln(e^{2t}+9)\right],$$

$$C_2(t)=\frac{1}{36}\left[t-\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+9)\right].$$

Підставляємо вирази для $C_1(t)$ і $C_2(t)$ в (2.46) і одержуємо $y_{чн}(t)$. Для $y_{зн}(t)$ маємо

$$y_{зн}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+\frac{e^{-t}}{8}\left[-e^{2t}+9\ln(e^{2t}+9)\right]+$$

$$+\frac{e^{3t}}{36}\left[t-\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+9)\right]. \tag{2.51}$$

C_1 і C_2 в (2.51) числа.

Щоб розв'язати задачу Коші знаходимо $y(0)$ і $y'(0)$. Для чисел C_1 і C_2 одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{8} + \frac{10}{9}\ln 10 = 2 \\ -C_1 + 3C_2 = \frac{-1}{8} + \frac{7}{6}\ln 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{13}{8} - \frac{9}{8}\ln 10 \\ C_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{72}\ln 10. \end{cases}$$

Підставляємо ці значення C_1, C_2 і одержуємо розв'язок задачі Коші

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{8}\left[-e^{2t} + 13 + 9\ln\frac{e^{2t}+9}{10}\right] + \frac{e^{3t}}{36}\left[t + 18 - \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2t}+9}{10}\right]. \qquad (2.52)$$

3 Системи диференціальних рівнянь

Розглянемо систему двох лінійних ДР для функцій $x(t)$ і $y(t)$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases} \qquad (3.1)$$

При $f_1(t) = f_2(t) = 0$ ми маємо однорідну систему. Якщо хоча б одна з функцій $f_1(t)$ або $f_2(t)$ відмінна від нуля, то система неоднорідна.

Існують різні методи розв'язання систем. Загальний розв'язок неоднорідної системи можна представити у вигляді загального розв'язку однорідної системи і частинного розв'язку неоднорідної системи. Задачу Коші $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ можна розв'язати на основі загального розв'язку, а для систем із сталими коефіцієнтами також операційним методом.

3.1 Метод виключень

Систему (3.1) можна звести до звичайних лінійних рівнянь другого порядку окремо для $x(t)$ і окремо для $y(t)$. Для розв'язання системи достатньо одержати рівняння для однієї функції, знайти її, а потім знайти другу функцію.

Одержати звичайне ДР другого порядку можна в три етапи.

1 Обираємо функцію і рівняння із системи для цієї функції і диференціюємо за t. Ліворуч одержуємо другу похідну обраної функції, а праворуч алгебраїчну суму похідних двох невідомих функцій.

2 В правій частині останнього рівняння замість похідної іншої функції підставляємо її вираз з іншого рівняння системи. Праворуч одержуємо алгебраїчну суму вибраної функції та іншої функції.

3 Підставляємо вираз для іншої функції з вибраного рівняння в праву частину рівняння для другої похідної обраної функції.

Після цього одержуємо лінійне рівняння, яке містить обрану функцію, її першу і другу похідні, а також функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ разом з їхніми похідними.

З цього рівняння можна знайти загальний розв'язок ЛНДР для обраної функції. Щоб знайти загальний розв'язок іншої функції використовуємо обране рівняння системи. При цьому необхідно знайти похідну обраної функції.

3.2 Метод Ейлера для однорідних систем зі сталими коефіцієнтами

Якщо коефіцієнти $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$ в (3.1) сталі, то розв'язки системи містять функції e^{kt}, де k - корені характеристичного рівняння для $x_{зо}(t)$, і $y_{зо}(t)$. Для знаходження цих коренів не обов'язково одержувати рівняння другого порядку. Ці корені за методом Ейлера можна знайти з визначника рівного нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.2)$$

Якщо ми знайшли корені k_1 і k_2, то, наприклад, при $k_1 \neq k_2$ можна написати

$$x_1 = e^{k_1 t},\ x_2 = e^{k_2 t}. \qquad (3.3)$$

Тоді з ДР для $x(t)$ маємо

$$y_1 = \frac{k_1 - a_{11}}{a_{12}} x_1,\ \ y_2 = \frac{k_2 - a_{11}}{a_{12}} x_2 \qquad (3.4)$$

і

$$\begin{aligned} x_{зо} &= C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \\ y_{зо} &= \frac{k_1 - a_{11}}{a_{12}} C_1 e^{k_1 t} + \frac{k_2 - a_{11}}{a_{12}} C_2 e^{k_2 t}. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Відмітимо, що при відомих $x_{зо}(t)$ і $y_{зо}(t)$ неоднорідну систему ДР можна також розв'язати методом варіації довільних сталих або невизначених коефіцієнтів (при $f(t)$ спеціального вигляду) безпосередньо без одержання рівнянь другого порядку.

3.3 Приклад розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь

Розв'язати задачу Коші для системи ДР

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + he^{4t} \\ y' = 5x + 4y \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1 \qquad (3.6)$$

Для однорідної системи стала *h* = 0, а для неоднорідної системи *h* = 1.

1 Щоб одержати диференціальне рівняння для однієї з невідомих функцій $(x(t)$ або $y(t))$, вибираємо одне з рівнянь системи і диференціюємо його. Одержимо другу похідну для вибраної невідомої функції. Візьмемо, наприклад, 4 друге рівняння. Тоді

$$y'' = 5x' + 4y'.$$

Тепер скористаємося ДР для похідної іншої невідомої функції (у даному випадку для $x'(t)$):

$$y'' = 5(2x + 3y + he^{4t}) + 4y'.$$

В останньому рівнянні є інша невідома . Її можна виразити через вибрану невідому функцію і її похідну за допомогою вибраного ДР $(x = \frac{1}{5}(y' - 4y))$

$$y'' = 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5}(y' - 4y) + 15y + 5he^{4t} + 4y' = 6y' + 7y + 5he^{4t}.$$

Останнє рівняння переписуємо у стандартному вигляді

$$y'' - 6y' - 7y = 5he^{4t}.$$

Ми одержали ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

2 Спочатку знаходимо загальний розв'язок ЛНДР $y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}$. Для $y_{зо}$ складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k - 7 = 0.$$

Розв'язки останнього рівняння дійсні прості: $k_1 = -1$, $k_2 = 7$. Тому можна написати

$$y_{зо}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{7t}.$$

Права частина (*h*=1) має спеціальний вигляд

$$5e^{4t} = P_0(t)e^{at}, a = 4.$$

Оскільки $a = 4$ не дорівнює $k_1 = -1,\ k_2 = 7,$ то кількість коренів характеристичного рівняння , які дорівнюють a , $r = 0$, то $y_{чн}(t)$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн}(t) = t^r \widetilde{P}_0(t)e^{at} = \widetilde{P}_0(t)e^{at} = Ae^{4t},$$

де А невідома стала . Цю сталу знаходимо з ЛНДР. Для цього спочатку знаходимо похідні

$$y'_{чн}(t) = 4Ae^{4t}, y''_{чн}(t) = 16Ae^{4t}$$

і підставляємо їх в ЛНДР:

$$y''_{чн}(t) - 6y'_{чн}(t) - 7y_{чн}(t) = Ae^{4t}(16 - 6 \cdot 4 - 7) = -15Ae^{4t} = 5e^{4t}, A = -\frac{1}{3}.$$

Таким чином, $y_{чн}(t) = -\frac{1}{3}e^{4t}$, $y_{зн}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t} - \frac{1}{3}e^{4t}$.

З вибраного ДР знаходимо другу невідому функцію:

$$x_{зн}(t) = \frac{1}{5}(y' - 4y) = \frac{1}{5}(-C_1 e^{-t} + 7C_2 e^{7t} - \frac{4}{3}e^{4t} - 4C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{7t} + \frac{4}{3}e^{4t}) =$$

$$= -C_1 e^{-t} + \frac{3}{5}C_2 e^{7t}.$$

В результаті одержуємо загальний розв’язок системи ЛДР

$$\begin{aligned} x_{зн}(t) &= -C_1 e^{-t} + \frac{3}{5}C_2 e^{7t}; \\ y_{зн}(t) &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t} - \frac{1}{3}e^{4t}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для розв’язання задачі Коші прирівнюємо $x_{зн}(0) = 0$ і $y_{зн}(0) = 1$ і одержуємо систему для C_1 i C_2:

$$\begin{cases} -C_1 + \frac{3}{5}C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 - \frac{1}{3} = 1 \end{cases}$$

Розв’язок цієї системи $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{5}{6}$ підставляємо в $x_{зн}(t)$ і $y_{зн}(t)$ і одержуємо розв’язок задачі Коші

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(-e^{-t} + e^{7t}); \\ y(t) &= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{7t} - \frac{1}{3}e^{4t}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

4 Операційний метод розв’язання диференціальних рівнянь

За операційним методом безпосередньо розв'язується задача Коші. При цьому використовується інтегральне перетворення Лапласа. Так функції $f(t)$ (оригіналу) ставиться у відповідність функція $F(p)$ (зображення)

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\,. \tag{4.1}$$

Відповідність оригіналу і зображенню будемо записувати також як

$$f(t) \doteq F(p) \text{ або } f(t) \leftarrow F(p)\,. \tag{4.2}$$

Перетворення Лапласа (4.1) відповідає постановці задачі, при якій система, поведінка якої вивчається при $t \ge 0$, не працює до моменту часу $t = 0$. Тому $f(t) = 0$ при $t < 0$. Ця умова накладається в операційному методі навіть на сталі функції $f(t)$, для яких пишеться перетворення Лапласа. При $t \to \infty$ функції можуть спадати, наближатися до сталої і навіть зростати але не сильніше від константи помноженої $e^{s_0 t}$, де $s_0 \ge 0$-стала. Тоді в (4.1) *p* вибирається більше s_0. При цій умові інтеграл (4.1), який залежить від параметра p є неперервно-диференційна функція від *p*. Завдяки цій властивості неважко одержати для $f(t) = e^{at}(a \langle\ p)$,

$$F(p) = \int_0^\infty e^{(a-p)t}dt = \left.\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right|_0^\infty = \frac{1}{a-p}\,. \tag{4.3}$$

Згідно з (4.2) можна записати (4.3) у вигляді

$$e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}\,. \tag{4.4}$$

За формулою (4.4) при різних a можна одержати зображення: одиниці при $t \ge 0$ $(a = 0)$, $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ $(a = i\omega)$; $t^n e^{at}$(*n* – кратним диференціюванням). В таблиці 4.1 наведені оригінали функцій $f(t)$ і їхні зображення $F(p)$. Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, то для похідних цієї функції можна одержати такі зображення:

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0); \tag{4.5}$$

$$f''(t) \doteq p^2F(p) - pf(0) - f'(0); \tag{4.6}$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{4.7}$$

Таблиця 4.1 Співвідношення оригіналів і їхніх зображень

№	Оригінал	Зображення
1	**2**	**3**
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$t^n\ e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9	$\mathrm{t}\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
10	$\mathrm{t}\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
11	$e^{\lambda t}\ \sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
12	$e^{\lambda t}\ \cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
13	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$	$\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
14	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$	$\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

Для розв’язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за операційним методом на першому етапі переходимо від оригіналів до зображень. Для похідних використовуємо таблицю 4.1 і формули (4.5), (4.6), (4.7). Одержуємо алгебраїчне рівняння для зображення. На другому етапі розв’язуємо ці рівняння, як правило зображення зображуються через дріб. Цей дріб розкладаємо на елементарні дроби, які є в таблиці 4.1. Нарешті на третьому етапі з допомогою таблиці 4.1 за відомим зображенням знаходимо оригінал невідомої функції.

4.1 Приклади розв'язання завдань

ПРИКЛАД 4.1.1

Знайти розв'язок задачі Коші (2.33) операційним методом

$$\begin{aligned} &y''(t) + 14y'(t) + 49y(t) = 5e^{4t}, \\ &y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Вводимо зображення:

$$y(t) \doteq Y(p),$$

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2,$$

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p,$$

$$5e^{4t} \doteq 5\frac{1}{p-4}.$$

Підставляємо одержані зображення в (4.8) і одержуємо алгебраїчне рівняння для $Y(p)$

$$p^2Y(p) - 2p + 14(pY(p) - 2) + 49Y(p) = \frac{5}{p-4} \qquad \Rightarrow$$

$$Y(p)(p^2 + 14p + 49) - 2p - 28 = \frac{5}{p-4} \qquad \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{\dfrac{5}{p-4} + 2p + 28}{(p^2 + 14p + 49)} = \frac{2p^2 + 20p - 107}{(p-4)(p^2 + 14p + 49)}.$$

Для того, щоб знайти оригінал цього зображення, спочатку розкладемо раціональний дріб

$$\frac{2p^2 + 20p - 107}{(p-4)(p+7)^2} = \frac{A_1}{p-4} + \frac{A_2}{(p+7)} + \frac{A_3}{(p+7)^2}.$$

Знайдемо невідомі A_1, A_2, A_3 за методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{2p^2 + 20p - 107}{(p-4)(p+7)^2} = \frac{A_1(p+7)^2 + A_2(p-4)(p+7) + A_3(p-4)}{(p-4)(p+7)^2}.$$

Знаменники однакові, тому числівники повинні теж бути однаковими

$$2p^2 + 20p - 107 = A_1(p+7)^2 + A_2(p-4)(p+7) + A_3(p-4)$$

$$p = -7 \qquad \Rightarrow \qquad -149 = -11A_3$$

$$\Rightarrow \qquad A_3 = \frac{149}{11}$$

$$p = 4 \qquad \Rightarrow \qquad 5 = 121A_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad A_1 = \frac{5}{121}$$

(де $p = -7$, $p = 4$ - корені знаменника).

Для того, щоб знайти A_2, порівняємо коефіцієнти при p^2:

$$2 = A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 2 - A_1 = \frac{237}{121},$$

$$Y(p) = \frac{5}{121}\frac{1}{p-4} + \frac{237}{121}\frac{1}{p+7} + \frac{149}{121}\frac{1}{(p+7)^2}. \quad - \qquad (4.9)$$

Знайдемо оригінал з таблиці 4.1 співвідношень оригіналів і їх зображень

$$y(t) = \frac{5}{121}e^{4t} + \frac{237}{121}e^{-7t} + \frac{149}{11}te^{-7t}, \qquad (4.10)$$

який співпадає з (2.38).

ПРИКЛАД 4.1.2

Знайти розв'язок задачі Коші (2.39)

$$\begin{aligned} &y''(t) + 14y'(t) + 49y(t) = 3e^{-7t}, \\ &y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Вводимо зображення:

$$y(t) \doteq Y(p), \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2$$

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p, \quad 3e^{-7t} \doteq 3\frac{1}{p+7}$$

Підстановка зображень в (2.39) дає рівняння

$$p^2Y(p) - 2p + 14(pY(p) - 2) + 49Y(p) = \frac{3}{p+7} \qquad \Rightarrow$$

$$Y(p)(p^2 + 14p + 49) - 2p - 28 = \frac{3}{p+7} \qquad \Rightarrow$$

$$Y(p)=\frac{\frac{3}{p+7}+2p+28}{(p^2+14p+49)}=\frac{3}{(p+7)^3}+\frac{2(p+14)}{(p+7)^2}$$
$$=\frac{3}{(p+7)^3}+\frac{2}{p+7}+\frac{14}{(p+7)^2}.$$

Використовуємо таблицю 4.1 співвідношень оригіналів і їх зображень:

$$\frac{3}{(p+7)^3}\doteq\frac{3}{2}t^2e^{-7t};\quad \frac{2}{p+7}\doteq 2e^{-7t};\quad \frac{14}{(p+7)^2}\doteq 14te^{-7t}$$

і одержуємо розв'язок задачі Коші :

$$y=\frac{3}{2}t^2e^{-7t}+2e^{-7t}+14te^{-7t}, \qquad (4.12),$$

який співпадає з (2.41).

ПРИКЛАД 4.1.3

Знайти розв'язок задачі Коші (2.42)

$$\begin{aligned} &y''(t)+14y'(t)+49y(t)=5t\cos 2t, \\ &y(0)=2,\quad y'(0)=0. \end{aligned} \qquad (4.\ 13)$$

У даному рівнянні права частина має спеціальний вигляд, але в той же час представляє собою добуток функцій. Тому розв'язувати це ЛНДР можна двома способами.

У першому способі, як і раніше (в п. 1 і 2), відношення багаточленів, яке є зображенням розв'язку $y(t)$, розкладаємо на елементарні дроби, а потім з допомогою таблиці 4.1 знаходимо саму функцію $y(t)$.

У другому способі застосовується згортка зображень. До речі, другий спосіб можна застосовувати для розв'язання ЛНДР із сталими коефіцієнтами з правими частинами, які не мають спеціального вигляду.

Ми продемонструємо розв'язання даного ЛНДР обома способами.

Для розв'язання ЛНДР операційним методом вводимо зображення

$$\begin{aligned} &y(t)\doteq Y(p), \\ &y'(t)\doteq pY(p)-2, \\ &y''(t)\doteq p^2Y(p)-2p-0 \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Перший спосіб знаходження зображення правої частини:

$$t\cos 2t \doteq \frac{5(p^2-4)}{(p^2+4)^2}.$$

Тоді підстановка в ЛНДР дає співвідношення

$$(p^2+14p+49)Y(p)-2p-28=\frac{5(p^2-4)}{(p^2+4)^2}.$$

Звідси одержуємо рівняння для $Y(p)$:

$$(p+7)^2 Y(p)=\frac{5(p^2-4)}{(p^2+4)^2}+2p+28. \qquad (4.15)$$

Розв'язок цього рівняння

$$Y(p)=\frac{5(p^2-4)}{(p^2+4)^2(p+7)^2}+\frac{2}{p+7}+\frac{14}{(p+7)^2}.$$

З таблиці 4.1 одержуємо

$$\frac{2}{p+7}\doteq 2e^{-7t}, \qquad \frac{14}{(p+7)^2}\doteq 14te^{-7t}.$$

Знаменник дробу $\dfrac{5(p^2-4)}{(p^2+4)^2(p+7)^2}$ – має подвійний дійсний корінь $p=-7$ і подвійні уявні корені $p_2=2i,\quad p_3=-2i$ $(p^2+4=(p-2i)(p+2i))$. Тому можна написати

$$\frac{5(p^2-4)}{(p^2+4)^2(p+7)^2}=\frac{D_1}{p+7}+\frac{D_2}{(p+7)^2}+\frac{D_3}{p-2i}+$$

$$+\frac{D^*{}_3}{p+2i}+\frac{D_4}{(p-2i)^2}+\frac{D^*{}_4}{(p+2i)^2}=h(p).$$

Найпростішим є обчислення коефіцієнтів D_2 і D_4:

$$D_2=\lim_{p\to -7} h(p)(p+7)=\frac{5(7^2-4)}{(7^2+4)^2}=\frac{225}{53^2}=0.0801;$$

$$D_4=\lim_{p\to 2i} h(p)(p-2i)^2=\frac{5(-4-4)}{(4i)^2(7+2i)^2}=\frac{-40}{-16}\cdot\frac{1}{(7+2i)^2}= \qquad (4.16)$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{(7-2i)^2}{53^2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{45-28i}{53^2}.$$

Тепер зручно знайти

$$\frac{D_4}{(p-2i)^2}+\frac{D^*{}_4}{(p+2i)^2}=2\,\mathbf{Re}\frac{D_4}{(p-2i)^2}=$$

$$=2\,\mathbf{Re}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{45-28i}{53^2}\cdot\frac{(p+2i)^2}{(p^2+4)^2}\right)=\frac{5}{53^2}\cdot\frac{45(p^2-4)+112p}{(p^2+4)^2}.$$

Коефіцієнт D_1 можна знайти за формулою:

$$D_1=\lim_{p\to-7}\frac{d}{dp}\left[h(p)(p+7)^2)\right]=\lim_{p\to-7}\frac{d}{dp}\left[5\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\right]=$$

$$=\lim_{p\to-7}10p\frac{p^2+4-2(p^2-4)}{(p^2+4)^3}=10(-7)\frac{12-(-7)^2}{\left[(-7)^2+4\right]^3}=$$

$$=\frac{70\cdot37}{53^2}=0.0174. \tag{4.17}$$

Аналогічно для D_3 маємо

$$D_3=\lim_{p\to2i}\frac{d}{dp}\left[h(p)(p-2i)^2\right]=\lim_{p\to2i}\frac{d}{dp}5\cdot\frac{p^2-4}{(p+2i)^2(p+7)^2}$$

$$=\lim_{p\to2i}10\cdot\frac{p(p+2i)(p+7)-(p^2-4)(2p+7+2i)}{(p+2i)^3(p+7)^3}=-\frac{5}{(7+2i)^3}= \tag{4.18}$$

$$=-\frac{5(7-2i)^3}{(49+4)^3}=-\frac{5}{53^3}\left[373-294i-84-(2i)^3)\right]=5\cdot\frac{-259+286i}{53^3}.$$

Далі

$$\frac{D_3}{p-2i}+\frac{D^*{}_3}{p+2i}=2\,\mathbf{Re}\frac{D_3}{p-2i}=10\cdot\mathbf{Re}\frac{(-259+286i)(p+2i)}{53^2(p^2+4)}=$$

$$=-\frac{2590p+2\cdot2860}{53^3(p^2+4)}.$$

Таким чином одержуємо

$$Y(p)=\left(2+\frac{70\cdot37}{53^3}\right)\cdot\frac{1}{P+7}+\frac{225}{53^3}\cdot\frac{1}{(p+7)^2}-\frac{2590p+2\cdot2860}{53^3(p^2+4)}+$$

$$+\frac{1}{53^2}\cdot\frac{225(p^2-4)+560p}{(p^2+4)^2}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{p+7}\doteq e^{-7t},\qquad \frac{1}{(p+7)^2}\doteq te^{-7t},\quad \frac{p}{p^2+4}\doteq\cos2t,\qquad \frac{2}{p^2+4}\doteq\sin2t,$$

$$\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\doteq t\cos2t,\qquad \frac{4p}{(p^2+4)^2}\doteq t\sin2t,$$

то це $Y(p)$ відповідає одержаному раніше $y(t)$ (2.44)

$$y(t) = (2.0174 + 14.0801t)e^{-7t} + (-0.0174 + 0.0801t)\cos 2t + \\ +(-0.0192 + 0.0498t)\sin 2t. \qquad (4.19)$$

Тепер розглянемо розв'язок рівняння (2.42)

$$y''(t) + 14y'(t) + 49y(t) = 5t\cos 2t = f(t).$$

З допомогою згортки вводимо, як і в (4.13) зображення, а зображення $f(t) = 5t\cos 2t$ позначимо, як $F(p)$. Тоді аналогічно (4.15) одержуємо рівняння

$$(p+7)^2 Y(p) = F(p) + 2p + 28;$$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{(p+7)^2} + \frac{2p+28}{(p+7)^2} = Y_1(p) + Y_2(p).$$

Зображенню $Y_1(p) = \dfrac{(2p+28)}{(p+7)^2}$ відповідає оригінал $\dfrac{F(p)}{(p+7)^2}$.

Позначимо $\dfrac{1}{(p+7)^2} = G(p)$, причому зображенню $G(p)$ відповідає оригінал $g(t) = te^{-t}$. Як відомо, для добутку зображень маємо оригінал (згортку):

$$F(p)\cdot G(p) \doteq f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-z)g(z)dz = \int_0^t f(z)g(t-z)dz.$$

В даному випадку $F(p) \doteq 5t\cos 2t, \quad G(p) \doteq g(t) = te^{-7t}$.

Тоді

$$Y_1(p) = F(p)\cdot G(p) \doteq f(t) * g(t) = 5\int_0^t (t-z)\ e^{-7(t-z)}\ z\ \cos 2z dz =$$

$$= 5e^{-7t}\int_0^t (t-z)e^{7z}\cos 2z dz.$$

Цей інтеграл обчислюється методом інтегрування частинами. Для спрощення обчислення скористаємося формулою Ейлера

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \quad i \quad \cos\phi = \operatorname{Re} e^{i\phi}, \quad \sin\phi = \operatorname{Im} e^{i\phi},$$

тоді

$$f(t) * g(t) = 5e^{-7t}\operatorname{Re}\int_0^t (t-z)ze^{(7+2i)z}dz.$$

Обчислимо інтеграл

$$\int_0^t (t-z)ze^{(7+2i)z}dz = \frac{(t-z)}{7+2i}ze^{(7+2i)z}\Big|_0^t - \frac{1}{7+2i}\int_0^t (t-2z)e^{(7+2i)z}dz$$

$$= -\frac{(t-2z)}{(7+2i)^2}e^{(7+2i)z}\Big|_0^t - \frac{2}{(7+2i)^2}\int_0^t e^{(7+2i)z}dz = \frac{1}{(7+2i)^2}(te^{(7+2i)t}+t) -$$

$$-\frac{2}{(7+2i)^3}e^{(7+2i)z}\Big|_0^t = t\frac{e^{(7+2i)}+1}{(7+2i)^2} + \frac{2}{(7+2i)^3}\left[-e^{(7+2i)t}+1\right] =$$

$$= \frac{t(7-2i)^2}{|7+2i|^4}\left[e^{(7+2i)t}+1\right] + \frac{2(7-2i)^3}{|7+2i|^6}\left[-e^{(7+2i)t}+1\right] =$$

$$= \frac{t(49-28i+(2i)^2)}{(49+4)^2}\cdot\left[(\cos 2t + i\sin 2t)e^{7t}+1\right] +$$

$$+\frac{7^3-3\cdot 7^2\cdot 2i+3\cdot 7(2i)^2-(2i)^3)}{(49+4)^3}\cdot\left[-e^{7t}(\cos 2t + i\sin 2t)+1\right] =$$

$$= \frac{t(45-28i)}{53^2}\cdot\left[(e^{7t}\cos 2t+1) + ie^{7t}\sin 2t\right] +$$

$$+2\frac{259-286i}{53^3}\cdot\left[(1-e^{7t}\cos 2t) - ie^{7t}\sin 2t\right].$$

Тоді

$$\mathbf{Re}\int_0^t (t-z)ze^{(7+2i)z}dz = \frac{1}{53^2}\left[45\left(te^{7t}\cos 2t + t\right) + 28te^{7t}\sin 2t\right] +$$

$$+\frac{2}{53^3}\left[259(1-e^{7t}\cos 2t) - 286e^{7t}\sin 2t\right].$$

Помножимо останній вираз на $5e^{-7t}$ і одержимо згортку

$$y_1(t) = f(t)*g(t) = \frac{5}{53^2}\left[45(t\cos 2t + te^{-7t}) + 28t\sin 2t\right] +$$

$$+\frac{10}{53^3}\left[259(e^{-7t} - \cos 2t) - 286\sin 2t\right].$$

Тепер додаємо до згортки оригінал зображення

$$Y_2(p) = \frac{(2p+28)}{(p+7)^2} \doteq (2e^{-7t} + 14te^{-7t}) = y_2(t)$$

і отримаємо розв'язок даного ЛНДР

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=\left(2+\frac{2590}{53^3}\right)e^{-7t}+\left(14+\frac{225}{53^2}\right)te^{-7t}+$$
$$+\left(-\frac{2590}{53^3}+\frac{225}{53^2}t\right)\cos 2t+\left(-\frac{2860}{53^3}+\frac{140}{53^2}t\right)\sin 2t \qquad (4.20)$$

ПРИКЛАД 4.1.4

Розв'язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь, (3.6) операційним методом

$$\begin{cases} x'=2x+3y+e^{4t} \\ y'=5x+4y \end{cases}, \qquad x(0)=0,\ y(0)=1. \qquad (4.21)$$

Вводимо зображення

$$x(t)\doteq X(p),\ x'(t)\doteq pX(p)-x(0)=pX(p),$$
$$y(t)\doteq Y(p),\ y'(t)\doteq pY(p)-y(0)=pY(p)-1,$$
$$e^{4t}\doteq\frac{1}{p-4}.$$

Після підстановки зображень в систему ЛДР одержуємо алгебраїчну систему для зображень $X(p),Y(p)$:

$$\begin{cases} pX(p)=2X(p)+3Y(p)+\dfrac{1}{p-4}, \\ pY(p)-1=5X(p)+4Y(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-p)X(p)+3Y(p)=\dfrac{1}{4-p} \\ 5X(p)+(4-p)Y(p)=-1 \end{cases}.$$

Детермінант системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2-p & 3 \\ 5 & 4-p \end{vmatrix}=p^2-6p-7=(p-7)(p+1).$$

За правилом Крамера маємо:

$$X(p)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{4-p} & 3 \\ -1 & 4-p \end{vmatrix}=\frac{4}{(p-7)(p+1)}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p-7}\right).$$

Цьому зображенню відповідає оригінал $\left(e^{at}\doteq\dfrac{1}{p-a}\right)$: $\quad x(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{7t}\right)$

Аналогічно,

$$Y(p)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2-p & \dfrac{1}{4-p} \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=\frac{p^2-6p+13}{(p-7)(p+1)(p-4)}=\frac{A_1}{p+1}+\frac{A_2}{p-7}+\frac{A_3}{p-4},$$

$$A_1 = \lim_{p\to -1}(p+1)Y(p) = \frac{(-1)^2 - 6(-1) + 13}{(-1-7)(-1-4)} = \frac{1}{2};$$

$$A_2 = \lim_{p\to 7}(p-7)Y(p) = \frac{7^2 - 6\cdot 7 + 13}{(7+1)(7-4)} = \frac{5}{6};$$

$$A_3 = \lim_{p\to 4}(p-4)Y(p) = \frac{4^2 - 6\cdot 4 + 13}{(4-7)(1+4)} = -\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$Y(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} + \frac{5}{6}\frac{1}{p-7} - \frac{1}{3}\frac{1}{p-4} \quad і$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{7t} - \frac{1}{3}e^{4t}$$

Одержаний за операційним методом розв’язок Задачі Коші для системи ДР (3.6) співпадає з розв’язком (3.8).

ПРИКЛАД 4.1.5

Розглянемо розв’язання задачі Коші для ДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною неспеціального вигляду (2.45):

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{e^{3t}}{9+e^{2t}} = f(t) \tag{4.22}$$

$$y(0) = 2,\ y'(0) = 0$$

Для розв’язання рівняння і задачі Коші операційним методом вводимо зображення

$$y(t) \doteq Y(p),$$

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2,$$

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p,$$

$$f(t) \doteq F(p).$$

Одержуємо рівняння

$$p^2Y(p) - 2p - 2pY(p) + 4 - 3Y(p) = F(p);$$

$$(p^2 - 2p + 3)Y(p) = F(p) + 2p - 4;$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 3}F(p) + \frac{2(p-2)}{p^2 - 2p + 3} \equiv Y_1(p) + Y_2(p).$$

Знайдемо спочатку оригінал для зображення

$$Y_2(p) = \frac{2(p-2)}{p^2 - 2p + 3} = \frac{2(p-2)}{(p+1)(p-3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Згідно таблиці 4.1 маємо:

$$Y_2(p) \doteq y_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}. \qquad (4.23)$$

Для $Y_1(p) = \dfrac{1}{p^2 - 2p - 3}F(p)$ вводимо зображення

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - 2p - 3} = \frac{1}{(p+1)(p-3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+1}\right),$$

$$G(p) \doteq g(t) = \frac{1}{4}\left[e^{3t} - e^{-t}\right].$$

Тоді $Y_1(p)$ є добуток зображень $G(p)\cdot F(p)$. Оригінал $y_1(t) \doteq Y_1(p)$ знаходимо з допомогою згортки

$$y_1(t) = g(t) * f(t) = \int_0^t g(t-z) f(z) dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left[e^{3(t-z)} - e^{z-t}\right]\frac{e^{3z}}{9+e^{2z}}dz = \frac{1}{4}\left[e^{3t}\int_0^t \frac{dz}{9+e^{2z}} - e^{-t}\int_0^t \frac{e^{4z}dz}{9+e^{2z}}\right].$$

Видно, що в $y_1(t)$ входять ті самі невизначені інтеграли, що і в $C_1(t)$, $C_2(t)$. Тому будемо використовувати невизначені інтеграли (2.49), (2.50). Тоді для $y_1(t)$ маємо:

$$y_1(t) = \frac{1}{4}e^{3t}\cdot\frac{1}{9}\left(t - \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2t}+9}{10}\right) - \frac{1}{4}e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{2t} - 1 - 9\ln\frac{e^{2t}+9}{10}\right). \qquad (4.24)$$

Оскільки $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, то для розв'язку задачі Коші ми одержуємо формулу (2.52), де $y_1(t)$ і $y_2(t)$ визначаються формулами (4.23) і (4.24). Відмітимо, що $y_1(t)$ відповідає розв'язку задачі Коші для однорідних початкових даних $y(0) = y'(0) = 0$, а $y_2(t)$ відповідає відмінним від нуля значенням $y(0)$ або $y'(0)$.

5 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

ЗАВДАННЯ № 1

Проінтегрувати рівняння

1 $y' = 3^{3x+2y}$.

2 $yy' = \dfrac{2x}{\cos y^2}$.

3 $x\sin\dfrac{y}{x}y' + x = y\sin\dfrac{y}{x}$.

4 $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$.

5 $y'\left(2x^2 + xy\right) = xy + y^2$.

6 $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dx + \left(\sqrt{xy} + \sqrt{y}\right)dy = 0$.

7 $\left(1 + e^{2x}\right)y^2 y' = e^x$.

8 $y'\sqrt{x+1} + y\ln^3 y = 0$.

9 $xtgyy' + \ln\cos y = 0$.

10 $xyy' = y^2 + xy$.

11 $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$.

12 $\frac{yy'}{x} + e^{y^2} = 0$.

13 $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$.

14 $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

15 $xy' = \frac{y^2}{x} e^{x/y} + y$.

16 $xy' = 2\left(y - \sqrt{xy}\right)$.

17 $y' = \sqrt{1 - y^2}\, xe^{x^2}$.

18 $y' = \frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

19 $y' = \frac{y}{x}\left(\frac{1}{\ln^3\frac{y}{x}} + 1\right)$.

20 $y' = \frac{\sin^2 y}{x^2 - 5x + 6}$.

21 $y' = \frac{x^2 e^{x^3}}{y\sin\left(y^2 + 5\right)}$.

22 $y' = \left(y^2 + 4\right)e^{3x+1}$.

23 $y' = 9 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

24 $xyy' = x^2 + y^2$.

25 $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{arctg\frac{y}{x}}$.

26 $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$.

27 $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right) + y$.

28 $y' = (2x - 1)ctgy$.

29 $\left(1 + e^x\right)ydy - e^{y^2}dx = 0$.

30 $\left(xy + x^3 y\right)y' = 1 + y^2$.

31 $y' = (y^2 + 4)e^{3x+1}$.

32 $y' = \frac{x^2}{y^2}\exp\left(\frac{y^3}{x^3}\right) + \frac{y}{x}$.

ЗАВДАННЯ № 2

Знайти загальний розв’язок диференціальних рівнянь

1 $y' - 2xy = e^{x^2}\cos 3x$.

2 $y' - y\frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{e^{\arcsin 2x}}{5x + 3}$.

3 $y' + 5xy = e^{-\frac{5}{2}x^2}\sin^2 x$.

4 $y' + \frac{8}{x}y = \frac{1}{x^8}\frac{1}{4 + x^2}$.

5 $y' + y\sin x = \frac{e^{-\cos x}}{x^2 - 5x + 4}$.

6 $y' + ytgx = \frac{\cos x}{\sqrt{9 - x^2}}$.

7 $y' + \frac{5}{x} y = x^{-3} e^{x^3}$.

8 $y' + 3y\,\mathbf{sin}\,x = \frac{e^{3\cos x}}{\sqrt{1-x^2}}$.

9 $y' - y\frac{2}{x\,\mathbf{ln}\,x} = \mathbf{ln}^2\, x e^{5x}$.

10 $y' - y\frac{4}{x\,\mathbf{ln}\,x} = \mathbf{ln}^4\, x \frac{3x}{x^4+1}$.

11 $y' - y\frac{x}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{9-x^2}}$.

12 $y' - y\frac{\mathbf{sin}\,x}{\mathbf{cos}^2\,x} = \frac{e^{\frac{1}{\cos x}}}{x^2+25}$.

13 $y' - \frac{2}{x} y = x^4\,\mathbf{cos}\,x^3$.

14 $y' + \frac{1}{\mathbf{cos}^2\,x} y = \mathbf{sin}\,5xe^{-tgx}$.

15 $y' + 4xy = \frac{xe^{-2x^2}}{x^2+16}$.

16 $y' - \frac{2}{x\,\mathbf{ln}\,x} y = \frac{5}{x}$.

17 $y' - y = 2xe^{x+x^2}$.

18 $y' - y\frac{2}{x} = x^3 + 1$.

19 $xy' - y = x^2\,\mathbf{cos}\,x$.

20 $y'\,\mathbf{cos}\,x + y = 1 - \mathbf{sin}\,x$.

21 $y' + y\frac{1}{1+x^2} = \frac{arctgx}{1+x^2}$.

22 $y' - y\frac{1}{\mathbf{sin}\,x} = \mathbf{cos}^2\,x\,tg\frac{x}{2}$.

23 $y' - 2xy = 1 - 2x^2$.

24 $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

25 $y' + ytgx = \mathbf{cos}^2\,x$.

26 $y' - y\frac{1}{x+2} = x^2 + 4x + 5$.

27 $y' + y\,\mathbf{sin}\,x = \mathbf{cos}\,x\,\mathbf{sin}\,x$.

28 $y' - y\frac{1}{x\,\mathbf{ln}\,x} = x\,\mathbf{ln}\,x$.

29 $y' + y\frac{1}{x+3} = e^{2x}(x+3)$.

30 $y' - y\frac{2}{x} = x^2\,\mathbf{cos}\,2x$.

31 $y' + y\frac{1}{\mathbf{sin}^2\,x} = e^{ctgx}\frac{x}{x^2+5}$.

32 $y' + \frac{y}{x}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\frac{\mathbf{cos}^2\,x}{x\sqrt{y}}$.

ЗАВДАННЯ № 3

Проінтегрувати диференціальне рівняння

1. $(1 - x^2)y'' = xy'$.

2. $y'' + y'tgx = \mathbf{sin}\,2x$.

3 . $1 + (y')^2 - yy'' = 0$.

4. $xy'' + 2y' = x^3$.

5. $yy'' + (y')^2 + (y')^3 = 0$.

6. $y'' + y'\frac{1}{x} = x^2$.

7. $y''(1+y) - 5(y')^2 = 0$.

8. $y''tgy = 2(y')^2$.

9 . $y'' - 2y' tgx = \sin x$.

10. $3yy'' + (y')^2 = 0$.

11. $y'' - 2\frac{(y')^2}{y} + y' = 0$.

12. $xy'' + y' = x + 1$.

13. $y'' + (y')^2 ctgy = 0$.

14. $y''y = 3(y')^2$.

15. $xy'' = 2y'$.

16. $y^3 y'' + y' = 0$.

17. $(x+1)y'' + y' = 0$.

18. $y'' - 3\frac{(y')^2}{y} = 8y'$.

19. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

20. $yy'' - 2y^2 y' - (y')^2 = 0$.

21. $y'' = e^{2y}$.

22. $(y-1)y'' = 2(y')^2$.

23. $xy'' + y' - 2x - 3 = 0$.

24. $xy''y' - (y')^2 = x^4$.

25. $yy'' + (y')^2 = y'y$.

26. $y''(1 + y^2) = 2y(y')^2$.

27. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

28. $8yy'' = 1 + 4(y')^2$.

29. $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$.

30. $(y'')^2 = \left[1 + (y')^2\right]^3$.

31. $y'' - 3y'\frac{1}{x} = \frac{x^3}{1 + x^2}$.

32. $y'' = (y')^3 e^y$.

ЗАВДАННЯ № 4

Надано лінійне неоднорідне диференційне рівняння

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = f_i(t)$$

Розв'язати задачу Коши:

а)на основі загального розв'язку;

б) за операційним методом;

в) написати загальний вигляд $y_{чн}$ для $f_i = f_2$ і $f_i = f_3$.

№	p	q	f₁(t)	f₂(t)	f₃(t)	Y(0)	Y´(0)
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	-5	6	$2e^{4t}$	$4e^{2t}$	$t\cos 3t$	0	1
2	-4	4	$3e^{5t}$	e^{2t}	$2t^2 + 1$	1	0
3	0	9	$4e^{-2t}$	$2\sin 3t$	te^{4t}	0	2
4	1	-12	$2e^{-2t}$	$5e^{3t}$	$t\sin 2t$	1	0
5	6	9	$5e^{-4t}$	$2e^{-3t}$	$t\cos 4t$	0	1

1	2	3	4	5	6	7	8
6	0	16	$4e^{-3t}$	$3\sin 4t$	te^{2t}	1	0
7	3	-10	$2e^{3t}$	$4e^{2t}$	t^2e^t	0	1
8	-10	25	$4e^{2t}$	$2e^{5t}$	$t\sin 4t$	2	0
9	0	25	$2e^{3t}$	$4\cos 5t$	te^{-2t}	0	2
10	3	-4	$2e^{5t}$	$3e^{-4t}$	$t\cos 2t$	1	0
11	12	36	$3e^{-2t}$	$4e^{-6t}$	$t\sin 3t$	0	2
12	0	36	$5e^{4t}$	$3\cos 6t$	te^{-3t}	1	0
13	-1	-6	$2e^{-3t}$	$3e^{-2t}$	t^2+2t	0	1
14	4	4	$3e^{4t}$	$5e^{-2t}$	$t\cos 3t$	2	0
15	0	64	$4e^{-5t}$	$3\cos 8t$	te^{3t}	0	1
16	1	-6	$2e^{5t}$	$4e^{-3t}$	$2t\sin 4t$	1	0
17	-18	81	$5e^{4t}$	$6e^{9t}$	$3t\cos 5t$	0	2
18	0	9/4	$3e^{-2t}$	$5\cos\frac{3}{2}t$	$t\sin 3t$	1	0
19	-1	-12	$2e^{-5t}$	$3e^{4t}$	$2t\cos 5t$	0	1
20	2	1	$4e^{-3t}$	$4e^{-t}$	$3t\sin 4t$	2	0
21	0	16/9	$3e^{-2t}$	$\cos\frac{4}{3}t$	t^2+5t	0	1
22	-3	-10	$4e^{3t}$	$3e^{-2t}$	$5t\sin 3t$	1	0
23	4	4	$5e^{-4t}$	$4e^{-2t}$	$6t\cos 4t$	0	2
24	0	25/4	$2e^{3t}$	$\sin\frac{5}{2}t$	$4t\sin 2t$	2	0

1	2	3	4	5	6	7	8
25	-3	-4	$5e^{-2t}$	$2e^{4t}$	$3t\cos 5t$	0	1
26	6	9	$6e^{2t}$	$4e^{-3t}$	$5t\sin 4t$	1	0
27	0	49/4	$4e^{-3t}$	$3\cos\frac{7}{2}t$	$2t\cos 3t$	0	2
28	1	-6	$2e^{-5t}$	$5e^{2t}$	$3t\sin 4t$	1	0
29	8	16	$2e^{6t}$	$3e^{-4t}$	$4t\cos 5t$	0	1
30	0	25/9	$4e^{-2t}$	$2\sin\frac{5}{3}t$	$3t\sin 2t$	0	2
31	14	49	$5e^{4t}$	$3e^{-7t}$	$5t\cos 2t$	2	0

ЗАВДАННЯ № 5

Розв'язати задачу Коші для неоднорідної системи $(h=1)$:

а) на основі загального розв'язку;

б) операційним методом.

1. $\begin{cases} x' = 4x - 7y + he^{4t} \\ y' = 2x - 5y \end{cases}, x(0)=0, y(0)=1$

2. $\begin{cases} x' = 5x - 3y \\ y' = 4x - 3y + ht \end{cases}, x(0)=1, y(0)=0$

3. $\begin{cases} x' = 2x + 7y + he^{2t} \\ y' = x - 4y \end{cases}, x(0)=0, y(0)=1$

4. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 4y + he^{3t} \end{cases}, x(0)=1, y(0)=0$

5. $\begin{cases} x' = 3x + 4y + he^{-2t} \\ y' = 2x + y \end{cases}, x(0)=0, y(0)=1$

6. $\begin{cases} x' = -5x - 7y \\ y' = 2x + 4y + he^{-5t} \end{cases}, x(0)=1, y(0)=0$

7. $\begin{cases} x' = -3x - 3y + he^{-2t} \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 1$

8. $\begin{cases} x' = -4x - 5y \\ y' = x + 2y + he^{-4t} \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$

9. $\begin{cases} x' = 4x + 3y + he^{-3t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 1$

10. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y + he^{2t} \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$

11. $\begin{cases} x' = 4x + 2y + he^{4t} \\ y' = -7x - 5y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 1$

12. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = -3x - 3y + he^{5t} \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$

13. $\begin{cases} x' = 2x - y + he^{2t} \\ y' = -7x - 4y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 1$

14. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y + he^{-3t} \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$

15. $\begin{cases} x' = 3x + 2y + he^{-4t} \\ y' = 4x + y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 1$

16. $\begin{cases} x' = -4x - 7y \\ y' = 2x + 5y + he^{-5t} \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$

17. $\begin{cases} x' = -5x - 3y + he^{-2t} \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 1$

18. $\begin{cases} x' = -2x - 7y \\ y' = -x + 4y + he^{-4t} \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$

19. $\begin{cases} x' = -2x + 3y + he^{3t} \\ y' = x - 4y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 1$

20. $\begin{cases} x' = -3x + 4y + he^{-2t} \\ y' = 2x - y \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$

$$21.\begin{cases} x' = 4x + 7y \\ y' = -2x - 5y + he^{4t} \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1$$

$$22.\begin{cases} x' = 5x + 3y + he^{5t} \\ y' = -4x - 3y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 0$$

$$23.\begin{cases} x' = 2x + 7y \\ y' = x - 4y + he^{-2t} \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1$$

$$24.\begin{cases} x' = 2x - 3y + he^{-3t} \\ y' = -x + 4y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 0$$

$$25.\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = -2x + y + he^{-4t} \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1$$

$$26.\begin{cases} x' = -4x + 7y + he^{-4t} \\ y' = -2x + 5y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 0$$

$$27.\begin{cases} x' = -5x + 3y \\ y' = -4x + 3y + he^{2t} \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1$$

$$28.\begin{cases} x' = -2x + 7y + he^{4t} \\ y' = x + 4y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 0$$

$$29.\begin{cases} x' = -2x - 3y + he^{3t} \\ y' = -x - y \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1$$

$$30.\begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = -2x - y + he^{-2t} \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 0$$

$$31.\begin{cases} x' = 2x + 3y + he^{4t} \\ y' = 5x + 4y \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1$$

ЗАВДАННЯ № 6

Розв’язати задачу Коші:
а) на основі загального розв’язку;
б) операційним методом.

1. $y'' - y' - 2y = \dfrac{e^{2t}}{5 + e^{t}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{te^{2t}}{1 + t^{2}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

3. $y'' + 4y = \dfrac{\sin 4t}{3 + \cos^{2} 2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

4. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3t}}{4+e^{t}}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

5. $y'' - 2y' - 8y = \dfrac{e^{5t}}{1+e^{2t}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

6. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{te^{3t}}{t^2+5t+4}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

7. $y'' + y' - 2y = \dfrac{e^{2t}}{3+e^{t}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

8. $y'' + 9y = \dfrac{\mathbf{sin}\,6t}{2+\mathbf{sin}^2 3t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

9. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{e^{4t}}{4+e^{2t}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

10. $y'' - 8y' + 16y = \dfrac{te^{4t}}{9+t^2}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

11. $y'' + 4y' + 3y = \dfrac{e^{-t}}{2+e^{t}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

12. $y'' + 16y = \dfrac{1}{3+\mathbf{cos}\,8t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

13. $y'' - 5y' + 4y = \dfrac{e^{4t}}{9+e^{2t}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

14. $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{e^{5t}}{t^2+6t+8}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

15. $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{e^{3t}}{4+e^{t}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$

16. $y'' + 25y = \dfrac{1}{\mathbf{cos}^2 5t+8}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

17. $y'' + 5y' + 4y = \dfrac{e^{t}}{4+e^{2t}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

18. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{t^2+8t+12}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

19. $y'' - 7y' + 12y = \dfrac{e^{5t}}{5+e^{t}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

20. $y'' - 4y = \dfrac{\mathrm{sh}4t}{5 + \mathrm{ch}^2 2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

21. $y'' - 9y' + 20y = \dfrac{e^{6t}}{1 + e^{2t}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

22. $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3t}}{4 + t^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

23. $y'' + 7y' + 12y = \dfrac{e^{-2t}}{1 + e^{2t}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

24. $y'' - 9y = \dfrac{sh6t}{2 + ch6t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

25. $y'' + 9y' + 20y = \dfrac{e^{-3t}}{4 + e^{t}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

26. $y'' + 8y' + 16y = \dfrac{te^{-4t}}{t^2 + 9}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

27. $y'' - 8y + 15y = \dfrac{e^{5t}}{4 + e^{2t}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

28. $y'' - 16y = \dfrac{1}{5 + sh^2 4t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

29. $y'' + 9y' + 18y = \dfrac{e^{-2t}}{1 + e^{2t}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

30. $y'' + 10y' + 25y = \dfrac{te^{-5t}}{t^2 + 4t + 3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

31 $y'' - 2y' - 3y = \dfrac{e^{3t}}{9 + e^{2t}} = f(t)$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$