ФАКУЛЬТЕТ ЕКОНОМІКИ ТРАНСПОРТУ

Кафедра управління державними і корпоративними фінансами

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять

Харків – 2015

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри управління державними і корпоративними фінансами 10 вересня 2014 р., протокол № 3.

Методичні вказівки призначено для студентів усіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030508 «Фінанси і кредит».

Укладач

доц. О.О. Коковіхіна

Рецензент

доц. М.В. Бормотова

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять

Відповідальний за випуск Коковіхіна О.О.

Редактор Буранова Н.В.

Підписано до друку 16.02.15 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,25. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

Зміст

Загальні вказівки

Практичні заняття з дисципліни «Фінансова математика» проводяться з метою закріплення і поглиблення знань студентів з питань використання методів кількісного фінансового аналізу, які складають предмет фінансової математики.

Знання методів, які використовуються у фінансовій математиці, є необхідним безпосередньо при роботі у сфері фінансів та кридиту,а також на етапі розроблення умов контрактів. Неможливо обійтись без них при фінансовому проектуванні, а також при порівнянні та виборі довгострокових інвестиційних проектів. Фінансові розрахунки є необхідною складовою розрахунків у довгостроковому особистому страхуванні, довгостроковому медичному страхуванні. Галузі використання методів кількісного аналізу фінансових операцій послідовно розширюються.

Методичні вказівки містять умови задач та варіанти завдань для індивідуальної роботи студентів за основними темами курсу:

1 Прості відсотки.

2 Складні відсотки.

3 Конверсія платежів. Еквівалентність відсоткових ставок.

4 Постійні фінансові ренти.

5 Змінні потоки платежів.

6 Врахування інфляційного знецінювання грошей при прийнятті фінансових рішень.

7 Типові приклади застосування фінансової математики у фінансових і комерційних розрахунках.

За кожною темою наводяться основні розрахункові формули, стислі методичні вказівки та відповіді до розв’язання задач.

До виконання завдань з практичних занять студент повинен приступати після вивчення відповідного теоретичного матеріалу.

Тема «Прості відсотки»

Варіанти задач з теми

1 Позику в розмірі 50 000 грн видано на півроку за простою ставкою відсотків 28 % річних. Визначити нарощену суму.

2 Кредит у розмірі 10 000 грн було надано 2-го березня до 11-го грудня під 30 % річних, рік високосний. Визначити розмір нарощеної суми для різних варіантів (звичайного і точного) розрахунку відсотків.

3 Кредит у розмірі 20 000 грн надається на 3,5 року. Ставка відсотків за перший рік – 30 %, а за кожне наступне півріччя вона зменшується на 1 % . Визначіть множник нарощення та нарощену суму.

4 Визначити термін, за який початковий капітал у розмірі 25 000 грн зросте до 40 000 грн, якщо використовується проста ставка 28 % річних.

5 Визначити просту ставку відсотків, при якій початковий капітал у розмірі 24 000 грн збільшиться до 30 000 грн за рік.

6 Кредит надається під просту ставку 26 % річних на 250 днів. Розрахувати суму, яку отримає позичальник, та суму відсоткових грошей, якщо треба повертати 40 000 грн.

7 Кредит надається на півроку під просту облікову ставку 20 %. Розрахувати суму, яку отримає позичальник, та суму дисконту, якщо треба повернути 30 000 грн.

8 Кредит у розмірі 40 000 грн надається під просту облікову ставку 25 % річних. Визначити термін, на який надається кредит, якщо позичальник бажає отримати 35 000 грн.

9 Розрахувати облікову ставку, яка забезпечує отримання 9 000 грн, якщо сума в 10 000 грн надається в позику на півріччя.

10 Банк видав громадянину позику у розмірі 9 000 грн на два роки під простий дисконт, що дорівнює 12 % на рік. Яку суму буде видано громадянину на руки? За тими самими умовами громадянин бажає отримати на руки 9 000 грн. Яку суму він заборгує банку? Яку суму заборгує громадянин банку, якщо він отримає позику під 12 % річних (простих)? Що вигідніше для громадянина: одержати позику під простий дисконт або під прості відсотки?

11 Визначити, у скільки разів збільшиться множник нарощення, якщо позику, яка дорівнює 7 000 грн, було надано на чотири роки під прості відсотки за умови, що позикова ставка складала 20 % річних і збільшилась утричі.

12 Є два зобов'язання. Умови першого: сплатити 1 тис. грн через сім місяців; умови другого: сплатити 1,15 тис. грн через 12 місяців. Якою є бар'єрна, тобто критична ставка, при якій $P_1 = P_2$, тобто зобов'язання є еквівалентним?

13 Сума 5 000 грн надається в борг на 10 місяців під прості відсотки (іп = 18 % річних). Для погашення суми боргу боржник виписав вексель з терміном оплати 20.10.2014 року. Кредитор, не маючи коштів, облікував цей вексель у банку 15.08.2014 року за обліковою ставкою 20 % простих. Яку суму отримав власник векселя (без сплати комісійних)? Яка сума дисконту?

14 Позику в 3 000 грн надано 10-го січня терміном до 5-го травня включно під 18 % річних (простих). Яку суму повинен сплатити боржник наприкінці терміну боргу, якщо використовуються:

а) точні відсотки з точною кількістю днів позики;

б) звичайні відсотки з точною кількістю днів позики;

в) звічайні відсотки з наближеною кількістю днів позики.

15 Контракт передбачає такий порядок нарахування відсотків: перший рік — ставка 15 %, у кожні наступні три місяці ставка підвищується на 0,5 %. Необхідно обчислити множник нарощення за два роки, відстоки прості.

16 Сума 2 000 грн вкладається 1-го лютого на місячний депозит під 20 % річних простих. Якою буде нарощена сума, якщо ця операція повторюється тричі при умові нарахування точних та звичайних відсотків?

17 Позику в сумі 2 000 грн надано 20-го січня до 10-го вересня включно під 15 % річних простих. Яку суму повинен сплатити боржник наприкінці терміну боргу? При розрахунку використати усі три методи нарахування простих відсотків.

18 Позику у 5 000 грн надано 5-го січня терміном до 5-го травня включно. Яку суму повинен сплатити боржник, якщо позика надана під простий дисконт dп = 18 %?

19 У банк, який сплачує 10 % простих річних вкладено 10 000 грн. Через скільки років на рахунку буде 20 000 грн?

20 Через три місяці після підписання договору боржник сплатив 3 000 грн. Кредит було надано під 20 % річних простих. Розрахувати початкову суму боргу за умови, що часова база дорівнює 365 днів.

Методичні вказівки до розв'язання задач

Для розв'язання задач з теми «Прості відсотки» використовуються формули, наведені в таблиці 1 даних методичних вказівок.

Тема «Складні відсотки»

Варіанти задач з теми

1 Банк нараховує на кошти, що до нього вкладені, відсотки безперервно за ставками: у 2011 році – 12 %, у 2012 році – 18 %, а у 2013 – 14 роках – 24 %. Яка сума була на рахунку 31-го грудня 2014 року, якщо 1-го січня 2011 року на цей рахунок було покладено 30 000 грн?

2 Початкова вкладена сума дорівнює 2 000 грн. Визначити нарощену суму через п'ять років при використанні простої і складної ставок відсотків у розмірі 28 % річних. Розв'язати цю задачу також для випадків, коли відсотки нараховуються за півріччями, поквартально, безперервно.

3 Початкова сума боргу дорівнює 50 000 грн. Визначити нарощену суму через 2,5 року, використовуючи два способи нарахування складних відсотків за ставкою 25 %.

4 Визначити сучасну (поточну, дійсну, приведену) величину суми 100 000 грн, яка буде виплачена через три роки при використанні ставки складних відсотків 24 % річних.

5 За який термін початковий капітал 50 000 грн підвищиться до 200 000 тис. грн, якщо:

а) на нього будуть нараховуватися складні відсотки за ставкою 28 % річних;

б) відсотки будуть нараховуватись щоквартально.

6 Якою має бути складна ставка позикового відсотка, щоб початковий капітал збільшився втричі за п'ять років? Розв'язати задачу також для випадку нарахування відсотків за півріччями.

7 Початкова сума боргу дорівнює 25 000 грн. Визначити величину нарощеної суми через три роки при використанні складної ставки нарощення та складної облікової ставки.

8 Визначити сучасну вартість суми в 120 000 грн, яка буде сплачена через два роки при використанні складної облікової ставки 20 % річних.

9 Громадянин може вкласти кошти до банку, що виплачує j12 = 7 %. Яку суму він повинен вкласти для того, щоб отримати 3 000 грн через чотири роки і шість місяців?

10 Визначити річну відсоткову ставку, якщо відсотки нараховуються щорічно, а сума коштів, вкладена до банку, подвоюється через вісім років.

11 Якою буде сума боргу через 15 місяців, якщо його початкова величина дорівнює 5 000 грн, відсотки складні, ставка — 20 % річних, нарахування відсотків поквартальне? Розв'язати задачу за умови використання загального та змішаного способів нарахування відсотків.

12 У контракті передбачається погашення зобов'язань у сумі 3 000 грн через 12 місяців, початкова сума боргу складає 2 500 грн. Необхідно визначити доходність позикової операції для кредитора у вигляді відсоткової ставки та облікової ставки.

13 Боргове зобов'язання на суму 5 000 грн, термін сплати якого настає через 3 роки, продано з дисконтом. Дисконтування проводиться з силою зростання 15 % і за дискретною складною обліковою ставкою такого ж розміру. Визначити сучасну вартість платежу.

14 Термін позики – три роки, договірна відсоткова ставка – 20 % річних плюс маржа 0,5 % першого року, та 0,75 % і 0,8 % у другому і третьому році відповідно. Чому буде дорівнювати множник нарощення?

15 Банк нарахував на вкладені в нього кошти складні відсотки за ставкою 15 % у 2011 р., 18 % у 2012 р., 20 % у 2013 році. Яка сума була на рахунку 31-го грудня 2013 року, якщо 1-го січня 2011 року на рахунок було покладено 3 000 грн?

16 За який термін сума, що дорівнює 3 000 грн, набуде величини 5 000 грн при нарахуванні відсотків за складною ставкою 15 % річних один раз на рік та поквартально?

17 Обчислити кількість років, необхідних для збільшення початкового капіталу у три рази, використовуючи прості і складні відсотки 20 % річних.

18 Громадянин Петренко бажає вкласти 2 000 грн, щоб через 3 роки отримати 3 500 грн. Під яку відсоткову ставку j12 він повинен вкласти свої гроші?

19 Фінансовий інструмент на суму 6 000 грн, термін сплати за яким настає через три роки, продано з дисконтом за складною обліковою ставкою 15 % річних. Якою є сума дисконту при дисконтуванні один раз на рік та поквартально?

20 Громадянин має вексель на суму 5 000 грн, який він бажає облікувати 1-го березня поточного року у банку за складною обліковою ставкою 20 % річних. Яку суму він отримає, якщо термін векселя – 10-те серпня того ж року? Порівняти отриманий результат з результатом обліку векселя за простою обліковою ставкою 20 %. В якому разі доход банку буде більшим?

Методичні вказівки

Розрахункові формули для різних відсоткових ставок зведені в таблицю 1.

Тема «Конверсія платежів. Еквівалентність відсоткових ставок»

Варіанти задач

1 Термін сплати за борговим зобов’язанням – півроку, облікова ставка дорівнює 18 %. Якою є доходність цієї операції?

2 Розрахувати ефективну ставку складних відсотків, якщо номінальна ставка дорівнює 24 % та нарахування відсотків відбувається щомісячно.

3 Визначити, під яку ставку відсотків вигідніше розмістити капітал у 10 000 грн на п’ять років:

а) під просту ставку 30 % річних;

б) під складну ставку 25 % при щоквартальному нарахуванні.

4 Визначити номінальну ставку відсотків, яка забезпечувала б річну доходність 26 %, якщо нарахування відсотків відбувається щомісячно.

5 Капітал, отриманий у кредит, вкладено під складну ставку позикового відсотка 22 % річних. Для розрахунків з кредиторами необхідно сплатити 30 000 грн через два роки або 36 000 грн через три роки. Якому варіанту віддати перевагу?

6 Платіж у 5 000 грн з терміном сплати 4 місяці замінити платежем з терміном сплати: а) три місяці; б) шість місяців. Використовується проста відсоткова ставка 10 % річних.

7 Платіж у 5 000 грн з терміном сплати через чотири місяці збираються замінити платежем у 4,85 тис. грн. Знайти величину повного терміну сплати боргу, якщо використовується проста відсоткова ставка 10 % річних.

8 Клієнт отримав від банку кредит на суму 3 000 грн під 12 % річних. Відповідно до фінансового контракту клієнт зобов’язаний погасити кредит трьома платежами з відсотками: 1,5 тис. грн; 0,5 тис. грн і 1 тис. грн відповідно через 30, 90 та 150 днів. Проте через деякий час за взаємною угодою сторін було вирішено погасити кредит одним платежем через 120 днів. Знайти величину консолідованого платежу, якщо нараховуються прості звичайні відсотки.

9 Платежі у 2 000 грн та 3 000 грн мають бути погашені відповідно через 45 та 90 днів. Кредитор і боржник погодились замінити два платежі одниму 5 000 грн. Знайти термін сплати консолідованого платежу, якщо використовується проста відсоткова ставка 12 % та спосіб 360/360.

10 Платіж у 3 000 грн з терміном 30 днів замінюється платежем у 3 500 грн. Знайти тривалість нового терміну, якщо використовується проста відсоткова ставка 20 % і вважають, що в році 360 днів.

11 Треба замінити платіж у 200 000 грн терміном сплати 45 днів платежем з терміном сплати: а) 70 днів; б) 15 днів. У розрахунках використовується проста облікова ставка 16 % і в році 365 днів. Яким буде розмір нового платежу?

12 Треба замінити платіж у 200 000 грн терміном сплати 45 днів платежем у 210 000 грн. Знайти величину нового терміну, якщо використовується проста облікова ставка 16 % і в році 365 днів.

13 Власник векселів (кредитор) з терміном сплати 11.06.2014 року (1 000 грн) та 15.08.2014 року (3 000 грн) погодився з пропозицією боржника про об'єднання двох векселів в один з терміном погашення 01.07.2014 року. Яку суму необхідно проставити в консолідованому векселі, якщо використовується облікова ставка 10 % і спосіб 365/360?

14 За фінансовою угодою фірма має сплатити одному кредитору суму у розмірі 3, 8 та 5 млн грн через 30, 50 та 120 днів після 1-го березня. Проте пізніше було прийнято рішення погасити всі суми одним платежем у 16,1 млн грн. Знайти термін сплати консолідованого платежу, якщо використовується облікова ставка 8 % і вважають, що в році 365 днів.

15 За умовою контракту три суми в 3, 1 та 2,5 тис грн має бути сплачено відповідно 5-го травня, 15 червня та 25 жовтня. Сторони вирішили переглянути порядок виплат: 3,5 тис. грн сплачуються 1-го червня; 1,5 тис. грн. – 1-го липня і залишок боргу погашається 10-го вересня. Визначити величину третього платежу, якщо перерахунок здійснюється за простою відсотковою ставкою, яка дорівнює 15 %, за способом 365/360. Всі операції виконуються в межах одного року.

16 За умовою контракту три суми в 3,1 та 2,5 тис. грн має бути сплачено відповідно 5-го травня, 15-го червня та 25-го жовтня. Сторони вирішили переглянути порядок виплати і здійснити у нові терміни 1-го червня, 1-го липня та 10-го вересня три однакові платежі. Знайти величину цих платежів, якщо перерахунок здійснюється за простою відсотковою ставкою, яка дорівнює 15 % за способом 365/365. Усі операції виконуються в межах одного року.

17 Платіж у 6 000 грн з терміном сплати через чотири роки замінити платежем з терміном сплати: а) через два роки; б) через п'ять років. Використовується складна відсоткова ставка 12 % річних. Яким буде розмір нового платежу?

18 Пропонується сплатити за використання деякого майна або 20 000 грн через 5 років або 30 000 грн через 10 років. Оцінити, яка пропозиція краще, якщо є можливість інвестування грошових коштів під складну відсоткову ставку 15 % річних.

19 Визначити величину нового терміну, якщо платіж у 2 000 грн через п'ять років замінити платежем у 3 000 грн і використовується складна відсоткова ставка 15 %.

20 Три платежі 3,1 та 1,5 тис. грн з терміном виплат відповідно через 1, 2,5 та 4 роки замінюються одним платежем, що сплачується через 3 роки, причому використовується складна облікова ставка 14 % річних. Знайти величину консолідованого платежу. Яким буде термін виплати, якщо консолідований платіж буде дорівнювати сумі вихідних платежів?

21 Три платежі в 3,1 та 1,5 тис. грн з термінами виплат відповідно через 1, 2,5 та 4 роки замінюються одним платежем, що сплачується через 3 роки. Нарахування відсотків здійснюється щоквартально при номінальній річній ставці 14 %. Знайти величину консолідованого платежу та новий термін виплати, якщо консолідований платіж буде дорівнювати 5000 грн.

22 Пропонується розмістити товар на чотири роки або під складну відсоткову ставку 20 % з щопівроковим нарахуванням відсотків або під просту відсоткову ставку 20 % річних. З'ясувати, що вигідніше.

23 Банком виданий кредит на півроку під 15 % річних із щомісячним нарахуванням складних відсотків. Визначити величину простої облікової ставки, яка забезпечує таку саму величину нарахування відсотків.

24 Визначити складну облікову ставку, еквівалентну річній номінальній відсотковій ставці 18 % з щоквартальним нарахуванням складних відсотків.

25 Визначити величину сили зростання при нарахуванні безперервних відсотків протягом року, яка еквівалентна відсотковій ставці 16 % річних з щомісячним нарахуванням складних відсотків.

Методичні вказівки до розв'язання задач

Дві відсоткові ставки називаються еквівалентними, якщо застосування їх до однакових сум протягом однакових проміжків часу дає однакові нарощені суми. Формули, в яких одну відсоткову ставку виражають через еквівалентну їй іншу відсоткову ставку, наведені в таблиці 2.

Доходність фінансових операцій визначається ефективною відсотковою ставкою, яка еквівалентна ставці, указаній у контракті, тобто ставкою складних відсотків i_c, що не залежить від терміну застосування вихідної еквівалентної ставки. З таблиці 2 випливає, що ефективні ставки існують тільки для ставок j_m, δ, d_c, f_m.

Загальний метод розв'язання задач зміни умов виплати грошових сум міститься в розробці так званого рівняння еквівалентності, в якому сума платежів, що замінюються, приведених до деякого моменту часу, дорівнюється до суми платежів за новим зобов'язанням, приведених до тієї ж дати. Для короткострокових зобов'язань приведення здійснюється звичайно на основі простих ставок, для середньо- та довгострокових – за допомогою складних ставок. У простих випадках часто можна обійтись без спеціальної розробки і розв'язання рівняння еквівалентності.

Одним з найпоширеніших випадків зміни умов є консолідація (об'єднання) платежів. Нехай платежі S_1, S_2 ......S_m з термінами n_1, n_2 ... n_m замінюються одним у сумі S_0 з терміном n_0. В такому випадку можливі дві постановки задачі: якщо відомий термін n_0, то знаходять суму S_0, або навпаки, якщо надана сума консолідованого платежу S_0, то знаходять термін n_0.

Визначення суми консолідованого платежу при застосуванні простих відсоткових ставок:

$$S_0 = \sum_j S_j\left(1 + t_j \times i_n\right) + \sum_k S_k\left(1 + t_k \times i_n\right)^{-1},$$

де S_j — розміри платежів, що об'єднуються, з термінами $n_j < n_0$;

S_k — розміри платежів, що об'єднуються, з термінами $n_k > n_0$;

$t_j = n_0 - n_j$; $t_k = n_k - n_0$.

При об'єднанні зобов'язань можна застосувати і облікові ставки. В такому випадку

$$S_0 = \sum_j S_j\left(1 - t_j d_{\Pi}\right)^{-1} + \sum_k S_k\left(1 - t_k d_{\Pi}\right),$$

де t_j і t_k мають той ж самий сенс, що і вище.

Крім того, консолідацію платежів можна здійснити і на основі складних ставок:

$$S_0 = \sum_j S_j (1+i_c)^{t_j} + \sum_k S_k (1+i_c)^{-t_k},$$

якщо $n_1 < n_0 < n_m$.

Визначення терміну консолідованого платежу при застосуванні простої ставки здійснюється на основі рівності сучасних вартостей:

$$S_0 (1+n_0 \cdot i_n)^{-1} = \sum_j S_j (1+n_j \cdot i_n)^{-1}.$$

Звідси $n_0 = \frac{1}{i_n}\left[\frac{S_0}{\sum_j S_j (1+n_j \cdot i_n)^{-1}} - 1\right]$.

Рішення може бути отримано pf умовb, що $S_0 > \sum_j S_j (1+n_j \cdot i_n)^{-1}$, інакше кажучи, розмір нового платежу має бути більшим за суму сучасних вартостей старих платежів.

При консолідації платежів на основі складних відсоткових ставок рівняння еквівалентності має такий вигляд:

$$S_0 (1+i_c)^{-n_0} = \sum_j S_j (1+i_c)^{-n_j}.$$

Для полегшення подальших записів приймаємо $Q = \sum_j S_j (1+i_c)^{-n_j}$, після чого отримаємо:

$$n_0 = \frac{\mathrm{In}\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\mathrm{In}(1+i_c)}.$$

Рішення існує, якщо справедлива умова $S_0 > Q$.

У випадках, коли при зміні умов виплат рішення не можна отримати простим додаванням платежів, приведених на деяку дату, воно грунтується на принципі еквівалентності платежів до і після зміни умов контракту. Якщо при цьому приведення платежів здійснюється на деяку початкову дату, то отримаємо такі рівняння еквівалентності в загальному вигляді:

при застосуванні простих відсотків:

$$\sum_j S_j \left(1 + n_j \cdot i_n\right)^{-1} = \sum_k S_k \left(1 + n_k \cdot i_n\right)^{-1};$$

при застосуванні складних відсотків:

$$\sum_j \frac{S_j}{\left(1 + i_c\right)^{n_j}} = \sum_k \frac{S_k}{\left(1 + i_c\right)^{n_k}},$$

де S_j і n_j – параметри платежів, що змінюємо;
S_k і n_k – параметри платежів, на які змінюємо.

Конкретний вигляд рівняння еквівалентності визначається змістом контракту.

Тема «Постійні фінансові ренти»

Варіанти задач

1 Вам пропонують здати в оренду ділянку на три роки, вибравши один з варіантів оплати оренди: а) 10 тис. грн наприкінці кожного року; б) 35 тис. грн після закінчення трирічного терміну. Який варіант є більш придатним, якщо банк пропонує 20 % річних за вкладами?

2 Вам пропонують здати в оренду ділянку на три роки. Виберіть один із запропонованих варіантів, який є більш вигіднішим для вас. Пропонується оплата по 5 тис. грн у кінці кожного півріччя, при цьому можливе нарахування відсотків: а) щорічно; б) за півріччями; в) щоквартально. Банк пропонує 20 % річних за вкладами.

3 Страхова компанія, уклавши договір з деякою фірмою, отримує від неї страхові внески по 20 тис. грн наприкінці кожного півріччя. Ці внески компанія розміщує в банк під 12 % річних. Знайти сучасну вартість суми, яку отримає страхова компанія за цим контрактом, якщо відсотки нараховуються: а) раз у півріччя; б) щомісячно.

4 Банк пропонує ренту постнумерандо на 10 років із щоквартальною виплатою 100 грн. Річна відсоткова ставка протягом всього періоду залишається незмінною. За якою ціною

можна придбати таку ренту, якщо початок виплат буде відбуватись одразу, а відсоткова ставка дорівнює 2, 4, 12 % річних?

5 Деяке підприємство бажає створити фонд у розмірі 200 тис. грн. З цією метою наприкінці кожного року підприємство збирається вносити по 50 тис. грн у банк під 18 % річних. Знайти термін, необхідний для створення фонду.

6 Працівник укладає з фірмою контракт, відповідно до якого у випадку його постійної роботи на фірмі до виходу на пенсію (в 60 років) фірма зобов'язується перераховувати наприкінці кожного року протягом 20 років на рахунок працівника в банк однакові суми, які забезпечать йому після виходу на пенсію щорічно додаткові виплати по 6 000 грн на протягом 15 років. Яку суму кожного ріу має перераховувати фірма, якщо працівнику 40 років і припускається, що банк гарантує відсоткову ставку 10 %?

7 Визначити поточну (сучасну) вартість безстрокової ренти постнумерандо з щорічним надходженням 4,2 тис. грн, якщо відсоток за терміновими вкладами, який пропонує державний банк, дорівнює 14 % річних.

8 Компанія гарантує виплату дивідендів у розмірі 6 тис. грн на акцію наприкінці кожного року протягом невизначено довгого часу. Чи є сенс купити акції цієї компанії за ціною 35 тис. грн, якщо можна покласти гроші на депозит під 15 % річних?

9 Фірма збирається створити фонд для щорічної (наприкінці року) виплати допомоги своїм працівникам. Визначити суму, яку фірма має помістити на депозит у банк, щоб забезпечити отримання необмежено довго наприкінці кожного року 8 тис грн, якщо банк нараховує: а) щорічно складні відсотки за ставкою 16 %; б) щоквартально складні відсотки за ставкою 16 % річних; в) безперервні відсотки з силою зростання 16 %.

10 Визначити сучасну вартість довічної ренти з платежем у 3 тис. грн, який виплачується наприкінці кожного кварталу, якщо використовується складна річна ставка 16 %.

11 Працівник укладає з фірмою пенсійний контракт на 10 років, відповідно до якого на рахунок працівника в банку наприкінці кожного дворічного періоду буде надходити 1,4 тис. грн. Треба визначити нарощену суму на кінець терміну

контракту, якщо на суми, які надходять, будуть щорічно нараховуватись складні відсотки за ставкою 12 % річних.

12 Фірма вирішила створити фонд для забезпечення майбутніх витрат. З цією метою наприкінці кожних трьох років фірма перераховує в банк 8 тис. грн. Яка сума буде на рахунку фірми через 15 років, якщо на суми, що надходять, будуть нараховуватись: а) щоквартально складні відсотки з номінальною річною відсотковою ставкою 16 %; б) безперервні відсотки з силою зростання 16 %?

13 Визначити суму, яку необхідно вкласти на рахунок до банку, щоб протягом восьми років наприкінці кожного дворічного терміну мати можливість знімати з рахунка 3 тис. грн, причому в кінці терміну повністю вибрати усі гроші з рахунка, якщо на грошові суми, які містяться на рахунку, будуть нараховуватись: а) щорічно складні відсотки за ставкою 12 %; б) щопівріччя складні відсотки по ставкою 12 %; в) безперервні відсотки з силою зростання 12 %.

14 Інвестор планує вкладати 2 000 грн в ануїтет на початку кожного року впродовж 10 років. Визначити суму, яку отримає інвестор через 10 років, якщо відсотки нараховуються щорічно в розмірі 6 %.

15 Інвестор планує вкладати 3 000 грн в ануїтет наприкінці кожного року впродовж 10 років. Якщо відсотки в розмірі 9 % нараховуються щорічно, то яку суму через 10 років може одержати інвестор?

16 Інвестор планує вкладати 2 000 грн в ануїтет на початку кожного року впродовж 10 років. Визначити суму, яку отримає інвестор через 10 років, за умови, що відсотки нараховуються щорічно в розмірі 6 %.

17 Корпорації через 15 років необхідно покрити витрати за випуск облігацій у сумі 10 000 000 грн. Вона створює для цього фонд відшкодування і сподівається отримувати 8 % щорічно від використання коштів фонду. Яку суму щорічно корпорація має вкладати до фонду, щоб акумулювати повністю 10 000 000 грн, якщо щорічно платежі вносяться до фонду в кінці кожного року?

18 Корпорація розраховує отримувати грошові надходження від впровадження нового проекту 5 000 грн щорічно упродовж 10

років. Знайти сучасну вартість грошей, яку отримає корпорація, якщо ставка дисконту 10 %?

19 Позичальнику потрібні 30 000 грн для подальшого інвестування. Банк надає позику на 20 років під 8 % річних з рівними щорічними платежами в кінці року. Знайти суму, яку повинен сплачувати позичальник у кінці кожного року.

20 Якщо річна відсоткова ставка дорівнює 10 %, то якою буде теперішня вартість довічної ренти, якщо річний платіж дорівнює 1 000 грн?

21 Щорічно на початку року в банк робиться черговий внесок у розмірі 10 тис. грн. Банк виплачує 20 % річних. Яка сума буде на рахунку через три роки?

22 Вам пропонують інвестувати 100 тис. грн на термін 5 років за умови повернення цієї суми частинами (щорічно по 20 тис. грн). Після закінчення п’яти років виплачується додаткова винагорода в розмірі 30 тис. грн. Приймати чи ні цю пропозицію, якщо можна “безпечно” депонувати гроші в банк з розрахунку 12 % річних?

23 Громадянин Іваненко вкладає суму 1 000 грн у кінці кожного місяця до банку, який виплачує відсотки за ставкою $j_{12} = 9$ %. Яку суму він накопичить за два роки?

24 Громадянин Петренко бажає накопичити протягом восьми років суму 5 000 грн, для чого він буде робити щорічні внески до банку, який сплачує відсотки за річною ставкою і = 5 % складних. Скільки грошей має вноситися кожного разу?

25 Громадянин Іваненко вирішив щорічно класти на свій рахунок суму 40 000 грн, роблячи рівні внески щоквартально. Яка сума буде на його рахунку через шість років, якщо банк нараховує за внесками 5 % річних складних?

Методичні вказівки до розв’язання задач

Формули для розв’язання задач з теми «Постійні фінансові ренти» зведені в таблицях:

таблиця 3 – нарощена сума постійних рент постнумерандо;

таблиця 4 – сучасна вартість постійних рент постнумерандо;

таблиця 5 – сучасна вартість постійних вічних рент постнумерандо.

Тема «Змінні потоки платежів»

Варіанти задач

1 Платежі постнумерандо відображають регулярний у часі потік, перший член якого дорівнює 15 млн грн. Наступні платежі збільшуються кожного разу на 1 млн грн. Нарахування відсотків відбувається за ставкою 20 % річних. Термін виплат – десять років. Розрахувати сучасну вартість і нарощену суму цієї ренти.

2 Платежі постнумерандо відображають регулярний у часі потік, перший член якого дорівнює 15 млн грн. Наступні платежі зменшуються на 1 млн грн. Нарахування відсотків відбувається за ставкою 20 % річних. Термін виплат – десять років. Розрахувати сучасну вартість та нарощену суму цієї ренти.

3 Очікується, що збут продукції буде збільшуватись протягом двох років – коженого кварталу на 25 тис. грн. Початковий обсяг збуту – 500 тис. грн. Визначити нарощену суму на кінець терміну за умови, що надходження грошей – постнумерандо.

4 Платежі постнумерандо відображають регулярний у часі потік, перший член якого дорівнює 15 млн грн. Наступні платежі збільшуються кожного року на 12 %. Нарахування відсотків відбувається за ставкою 20 % річних. Термін виплат – десять років. Розрахувати сучасну вартість та нарощену суму цієї ренти.

5 Платежі постнумерандо відображають регулярний у часі потік, перший член якого дорівнює 15 млн грн. Наступні платежі зменшуються у часі з темпом приросту 10 %. Нарахування відсотків відбувається за ставкою 20 % річних. Термін виплат – десять років. Розрахувати сучасну вартість і нарощену суму цієї ренти.

6 Платежі постнумерандо відображають регулярний у часі потік, перший член якого дорівнює 15 млн грн. Наступні платежі збільшуються з кожним півріччям на 6 %. Нарахування відсотків відбувається за ставкою 20 % річних. Термін виплат – десять років. Розрахувати сучасну вартість і нарощену суму цієї ренти.

7 Прогнозується протягом трьох років збільшувати щорічно випуск продукції на 1 млрд грн. Базовий рівень випуску — 10 млрд грн. Необхідно визначити вартісний обсяг випуску з

нарахуванням відсотків із силою зростання $\delta = 8$ %. Розрахувати сучасну вартість і нарощену суму цієї ренти.

8 Капіталовкладення складають 1 000 млн грн, початкова віддача від них оцінюється в сумі 300 млн грн на рік. Очікується, що віддача буде безперервно збільшуватись протягом всього терміну експлуатації (п’ять років) — по 10 млн грн на рік. Якою є доходність інвестицій у вигляді сили зростання і яка відсоткова ставка?

9 Очікується, що приріст доходів буде складати 5 % на рік. Якою є сучасна вартість і нарощена сума потоку доходів, якщо $R = 100$, $i = 7$ %, $n = 3$ роки.

10 Три ренти постнумерандо, невідкладені, замінюються однією відкладеною на три роки рентою постнумерандо. Замінна рента має термін $n = 10$ років, включаючи відстрочку. Характеристики замінюваних рент: $R = 100$; 120; 300. Терміни цих рент – 6; 11 та 8 років відповідно. В розрахунку прийняти ставку складних відсотків, яка дорівнює 20 %. Розрахувати член ренти, на яку замінюємо, за умови, що вона відкладена на 3 роки, і за умови, що вона є невідкладною.

11 Консолідуються ренти, за якими передбачаються річні платежі в сумах 0,5 тис., 1,5 тис. і 3 тис. грн, терміни цих рент – 10; 15 та 12 років, відсоткова ставка у замінної ренти – 5 % річних, R = 5. Розрахувати термін ренти, на яку замінюємо.

12 Припустимо, що невідкладна рента постнумерандо з умовами R = 2 млн грн і терміном вісім років відкладається на два роки без зміни терміну самої ренти. Відсоткова ставка прийнята для пролонгування — 20 % річних. Розрахувати член

цієї ренти, а також значення члена відкладеної ренти за умови, що термін ренти збільшився ще на три роки, тобто n = 11.

13 Рента з умовами R = 2 000 тис. грн, n = 5 років, i = 8 % відкладається на три роки без зміни її члена. Необхідно знайти новий термін та збалансувати результати.

14 Змінити річну ренту на квартальну за умови, що $R_1 = 2$; $n_1 = n_2 = n$; i = 20 %, виконавши коригування розміру виплат.

15 Змінити річну ренту на квартальну за умови, що $R_1 = 2$; $n_1 = 3$; $n_2 = 4$; i = 20 %. Розрахувати член квартальної ренти.

Методичні вказівки до теми «Змінні потоки платежів»

У практиці зустрічаються випадки, коли розміри членів потоків платежів змінюються в часі. Члени змінної ренти змінюються за деякими встановленими (прийнятими, домовленими і т. ін.) законами або умовами розвитку.

Для розв’язання задач з цієї теми треба використати навчальну літературу [1], [2], [5].

Тема «Урахування інфляційного знецінювання грошей при прийнятті фінансових рішень»

Варіанти задач

1 Кредит сумою 50 000 000 грн був наданий на два роки. Реальна доходність операції має скласти 10 % річних за складною ставкою позикового відсотка. Очікуваний рівень інфляції складає 15 % на рік. Визначити множник нарощення, складну ставку відсотків, яка враховує інфляцію та нарощену суму.

2 Початковий капітал сумою 20 000 000 грн видається на три роки, відсотки нараховуються наприкінці кожного кварталу за номінальною ставкою 8 % річних. Визначити номінальну ставку відсотків та нарощену суму з урахуванням інфляції, якщо очікуваний річний рівень інфляції складає 12 %.

3 При видачі кредиту має бути забезпечено реальну доходність операції, яка визначається обліковою ставкою 5 % річних. Кредит надається на півріччя, за які очікуваний індекс

інфляції складає 1,06. Розрахувати значення облікової ставки, яка компенсує втрати від інфляції.

4 Визначити реальну доходність фінансової операції, якщо при рівні інфляції 0, 9 % у місяць надається кредит на два роки за номінальною ставкою складних відсотків 15 % річних. Відсотки нараховуються щоквартально.

5 Визначити, яка реальна збитковість буде у фінансової операції, якщо при рівні інфляції 14 % на рік капітал вкладається на один рік під номінальну ставку 8 % при щомісячному нарахуванні.

6 Визначити річний індекс інфляції та річний темп інфляції, якщо середньомі сячний темп інфляції дорівнює 5 %.

7 Припустимо, що прирости цін за місяцями склали 1,5; 1,2 та 0,5 %. Визначити індекс цін за три місяці і темп інфляції за три місяці.

8 На суму 1,5 тис. грн протягом трьох місяців нараховуються прості відсотки за ставкою 28 % річних. Щомісячна інфляція характеризується темпами 2,5; 2,0 та 1,8 %. Визначити нарощену суму, індекс цін за три місяці та нарощену суму з урахуванням її знецінювання.

9 Розрахувати реальну річну ставку для таких умов: річний темп інфляції – 20 %, брутто – ставка 25 % річних; t = 0,5 року.

10 Розрахувати реальну річну ставку для таких умов: термін – 5 років, річна брутто-ставка – 25 % складних. Індекс цін за цей період — 1,7.

11 На депозиті була розміщена сума у 30 тис. грн під 10 % річних на півтора року, причому нараховуються прості відсотки. Визначити нарощену суму з урахуванням уплати податку на відсотки, якщо ставка податку на відсотки дорівнює 12 %.

12 На депозиті було розміщено суму у 30 тис. грн, причому нарощення здійснювалося за річною обліковою ставкою 14 %. Якою буде нарощена сума через півтора року після сплати податку на відсотки, якщо ставка податку на відсотки дорівнює 12 %?.

13 На суму 15 тис. грн протягом трьох місяців нараховувались прості відсотки за ставкою 40 % річних. За кожен місяць ціни зростали на 15, 12, 10 %. Визначити нарощену

суму з урахуванням інфляції та величину додатної відсоткової ставки.

14 Визначити реальну ставку простих відсотків за рік, якщо брутто-ставка дорівнює 60 % при річній інфляції в 30 %.

15 Банк надає клієнту кредит на два місяці, протягом яких, за оцінками експертів, щомісячний індекс інфляції складе 1,01. Знайти значення облікової ставки, яка компенсує втрати від інфляції, якщо банк бажає забезпечити реальну доходність, яка визначається простою обліковою ставкою у 25 % річних.

16 На вклад у 2 тис. грн протягом чотирьох років кожного півріччя нараховувались складні відсотки за річною номінальною ставкою 12 %. Визначити нарощену суму після сплати податку на відсотки, якщо ставка податку на відсотки дорівнює 8 %.

17 На вклад у 30 тис. грн щомісячно нараховуються складні відсотки за номінальною річною відсотковою ставкою 40 %. Оцінити суму вкладу через 1,5 року з точки зору купівельної спроможності, якщо очікуваний темп інфляції складає 2 % у місяць. Якою має бути величина додатної відсоткової ставки? Як зміниться ситуація, якщо темп інфляції буде 4 % у місяць?

18 Банк пропонує клієнтам класти гроші на депозит на один рік під 32 % річних із щоквартальним нарахуванням складних відсотків. Знайти реальну доходність такої пропозиції для клієнтів банку, якщо щомісячний індекс інфляції прогнозується 1,02.

19 Нехай ставка податку на відсотки дорівнює 10 %, відсоткова ставка – 30 % річних, а термін нарахування – три роки. Визначити нарощену суму з урахуванням сплати податку на відсотки при нарахуванні простих відсотків і суму податку, якщо первісна сума позики складає 1 000 тис. грн.

20 Нехай ставка податку на відсотки дорівнює 10 %., відсоткова ставка — 30 % річних, а термін нарахування – три роки. Визначити нарощену суму з урахуванням сплати податку на відсотки при нарахуванні простих відсотків і суму податку, якщо первісна сума позики складає 1 000 тис. грн.

21 Нехай ставка податку на відсотки дорівнює 10 %, відсоткова ставка – 30 %, а термін нарахування – три роки. Визначити нарощену суму з урахуванням сплати податку на

відсотки при нарахуванні складних відсотків і суму податку, якщо первісна сума позики складає 1 000 тис. грн. Визначити суму податку взагалі і за роками.

Методичні вказівки до розв’язання задач.

Тема «Податки та інфляція» викладена в навчальній літературі з курсу «Фінансова математика» [2], [4], [5].

Тема «Типові приклади застосування фінансової математики у фінансових і комерційних розрахунках»

Варіанти задач

1 Борг в 1 млн грн одержано під 8 % річних на чотири роки. Одночасно з одержанням позики для її погашення утворюється страховий фонд, в який вносяться рівні щорічні внески. На гроші, внесені у фонд, виплачуються 5 % річних. Знайти щорічну термінову виплату за боргом.

2 Корпорація бажає купити рудник, який, як сподіваються, буде давати протягом наступних 10 років по 200 000 грн доходу за рік, після чого стане повністю непридатним. Корпорація бажає отримувати 18 % щорічно доходу на вкладену суму. Одночасно вона збирається встановити страховий фонд, щоб накопичити під кінець терміну дії рудника вкладену суму. Скільки вона має заплатити за рудник, якщо за вкладами в страховий фонд можна отримати 10 % за рік?

3 Борг у 300 тис. грн треба сплатити рівними терміновими сплатами за п’ять років, роблячи платежі наприкінці кожного року. За борг виплачуються відсотки за річною ставкою $i = 5$ %. Скласти план погашення боргу.

4 Борг у 300 тис. грн треба сплатити рівними терміновими сплатами, роблячи платежі наприкінці кожного року. За борг виплачуються відсотки за річною ставкою $i = 5$ %. Термінова сплата буде дорівнювати 70 000 грн. Скласти план погашення боргу.

5 Для повернення боргу треба накопичити за 10 років 2 млн грн. Щорічно боржник може вкладати до банку з цією метою 150 тис. грн. Під яку ставку складних відсотків необхідно

вкладати гроші, щоб накопичити необхідну суму в указаний термін?

6 На момент виходу на пенсію підприємець Іваненко накопичив 1 500 000 грн, які бажає покласти до банку, щоб протягом 20 років отримувати по 120 000 грн, вичерпавши свій вклад під кінець цього терміну. Під яку ставку складних відсотків йому треба вкласти свої гроші?

7 Магазин продав декілька відеомагнітофонів, уклавши контракт, за яким покупець зобов'язався сплачувати щокварталу по 10 000 грн протягом п'яти років. Власник магазину, не маючи коштів, продає цей контракт банку, який отримує на позичені гроші відсотки за ставкою j_4 = 12 %. Яку суму заплатить банк власнику магазину за цей контракт?

8 Громадянин Василенко купив меблі за 20 000 грн у кредит, зобов'язавшись сплатити його щомісячними платежами протягом року, виплачуючи при цьому відсотки за борг за ставкою j_{12} = 6 %. Власник магазину продає цей контракт фінансовій компанії, яку не задовольняють умови контракту, вона бажає отримувати доход за ставкою j_{12} = 12 %. Скільки має заплатити компанія за цей контракт?

9 Порівняти два контракти:

1 – й контракт. Вартість товару – 20 млн грн; робляться три авансових платежі по 3 млн грн кожен: перший — у момент укладання контракту, другий — через рік, третій — ще через рік. Поставка товару проводиться після закінчення авансових платежів. Кредит надається на шість років, починаючи з моменту поставки товару, під 5 % річних та погашається разовим платежем наприкінці терміну кредиту.

2 – й контракт. Вартість товару – 21 млн грн; у момент укладання контракту виплачується один фінансовий платіж, який дорівнює 5 млн грн. Поставка проводиться в момент укладання контракту. Кредит видається на 10 років під 5 % річних з погашенням однаковими щорічними терміновими сплатами. Порівняння контрактів провести при ставці порівняння і = 10 %.

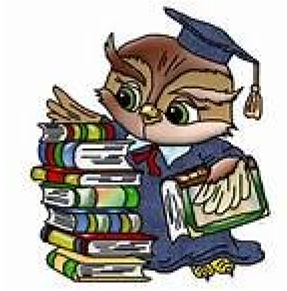
10 Порівняти наступні два контракти:

1 – й контракт. Вартість товару – 100 000 грн; сплачуються два авансових платежі: перший, що дорівнює 20 000 грн, — у момент укладання контракту; другий, що дорівнює 10 000 грн, — через рік після укладання контракту. Поставка товару відбувається після другого авансового платежу. Кредит надається на три роки, починаючи від моменту поставки товару, під 8 % річних і сплачується одноразовим платежем наприкінці терміну кредиту.

2 – й контракт. Вартість товару – 110 000 грн; сплачується три авансових платежі по 10 000 грн: перший — у момент укладання контракту, другий – через рік після укладання контракту, третій — ще через рік; поставка відбувається в момент укладання контракту. Кредит надається на 10 років, починаючи від моменту поставки товару, під 3 % річних і починається однаковими терміновими щорічними сплатами. Порівняння контрактів провести при ставці порівняння і = 10 %.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основний



1 Конспект лекцій з дисципліни «Фінансова математика» для студентів економічних спеціальностей всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030508 «Фінанси і кредит» / О.О. Коковіхіна, О.В. Саленко. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 65 с.

2 Машина Н. І. Вищі фінансові обчислення: Навч. посібник / Н.І. Машина. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 208 с.

3 Малыхин В.И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов / В.И. Малыхин. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 2-е изд., перераб. и доп. – 237 с.

4 Тижненко Л.О. Фінансова математика: Конспект лекцій для студентів напряму підготовки "Фінанси" / Л.О. Тижненко, В.О. Кожевніков. – Харків: Вид-во ХНЕУ, 2008. – 116 с.

5 Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник / Е.М. Четыркин. – 4-е изд. – М.: Дело, 2004.– 400 с.

Додатковий

6 Бланк И.А. Основы финансового менеджмента / И.А. Бланк. – К.: НИКА-ЦЕНТР, 2007. – Т. 1. – 592 с.

7 Бланк И.А. Основы финансового менеджмента / И.А. Бланк. – К.: НИКА-ЦЕНТР, 2007. – Т. 2. – 512 с.

8 Бочаров П.П. Финансовая математика: учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. – М.: Гардарики, 2002. – 624 с.

9 Власова Н. О. Фінанси підприємств: навч. посібник / Н.О. Власова, О.А. Круглова, Л.І. Безгінова. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 271 с.

10 Капитоненко В.В. Задачи и тесты по финансовой математике: Учеб. пособие / В.В. Капитоненко. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 256 с.

11 Кирлица В.П. Финансовая математика: руководство к решению задач: Учеб. пособие / В.П. Кирлица. – Мн.: Тетра Системс, 2005. – 192 с.

12 Ковалев В.В. Курс финансовых вычислений / В.В. Ковалев, В.А. Уланов. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 328 с.

13 Ковалев В.В. Финансовый менеджмент: теория и практика / В.В. Ковалев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Проспект, 2011. – 880 с.

14 Крамаренко Г.О. Фінансовий менеджмент : підручник / Г.О. Крамаренко, О.Є. Чорна. – 2-ге вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 520 с.

15 Станиславчик Е.Н. Основы финансового менеджмента / Е.Н. Станиславчик. – М.: "Ось-89", 2001. – 128 с.

16 Медведев Г.А. Начальный курс финансовой математики: учеб. пособие / Г.А. Медведев. – Мн.: ТОО "Остожье", 2003. – 267 с.

17 Мелкумов Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика / Я.С. Мелкумов. – 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2010. – 416 с.

18 Мицкевич А. Финансовая математика / А. Міцкевич. – М.: ОЛМА-ПРЕСС Инвест: Институт экономических стратегий, 2003. – 128 с.

19 Морошкин В. А. Практикум по финансовому менеджменту: технология финансовых расчетов с процентами : Учеб. пособие / В.А. Морошкин, А.Л. Ломакин. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 112 с.

20 Ченг Ф. Ли. Финансы корпорации: теория, методы и практика / Ченг. Ф. Ли, Джозеф И. Финнерти; Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 686 с.

Ресурси мережі Internet

21 Агапов С. Вычисление эффективной процентной ставки [Электронный ресурс]. / С. Агапов. – Режим доступа: www.finmath.ru

22 Латишева І.Л. Персональна навчальна система з дисципліни "Фінансова математика" / І.Л. Латишева, І.І. Гринащук, В.С. Хвостенко [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://ikt.ksue.edu.ua/

Таблиця 1 — Прості і складні відсотки

Вид відсоткової ставки	Формула нарощення	Формула дисконтування	Термін фінансової операції	Відсоткова ставка
Проста відсоткова ставка нарощення $i_п$	$S = P(1 + t \cdot i_п)$	$P = \frac{S}{(1 + t \cdot i_п)}$	$t = \frac{S/P - 1}{i_п}$	$i_п = \frac{S - P}{P \cdot i}$
Проста облікова ставка $d_п$	$S = \frac{P}{(1 - t \cdot d_п)}$	$P = S(1 - t \cdot d_п)$	$t = \frac{1 - P/S}{d_п}$	$d_n = \frac{S - P}{S \cdot t}$
Складна ставка нарощення при нарахуванні відсотків один раз на рік i_c	$S = P(1 + i_c)^t$	$P = \frac{S}{(1 + i_c)^t}$	$t = \frac{\log(S/P)}{\log(1 + i_c)}$	$i_c = \sqrt[t]{S/P} - 1$
Складна ставка нарощення при нарахуванні відсотків m разів на рік j_m	$S = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm}$	$P = \frac{S}{\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm}}$	$t = \frac{\log(S/P)}{m \cdot \log\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)}$	$j_m = m\left(\sqrt[mt]{S/P} - 1\right)$
Сила зростання при безперервному нарахуванні відсотків δ	$S = Pe^{\delta t}$	$P = \frac{S}{e^{\delta t}}$	$t = \frac{\ln(S/P)}{\delta}$	$\delta = \frac{\ln(S/P)}{t}$
Складна облікова ставка при дисконтуванні один раз на рік d_c	$S = \frac{P}{(1 - d_c)^t}$	$P = S(1 - d_c)^t$	$t = \frac{\log(P/S)}{\log(1 - d_c)}$	$d_c = 1 - \sqrt[t]{P/S}$
Складна облікова ставка при дисконтуванні m разів на рік f_m	$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{tm}}$	$P = S\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{tm}$	$t = \frac{\log(P/S)}{m \cdot \log\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)}$	$f_m = m\left(1 - \sqrt[mt]{P/S}\right)$

Таблиця 2 — Формули еквівалентних відсоткових ставок

	$S = P(1 + t \times i_n)$	$S = P(1 + i_c)^t$	$S = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm}$	$S = P\ell^{\delta t}$	$S = \frac{P}{1 - t \times d_n}$	$S = \frac{P}{(1 - d_c)^t}$	$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{tm}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
$S = P(1 + t \times i_n)$		$i_n = \frac{(1 + i_c)^t - 1}{t}$	$i_n = \frac{\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm} - 1}{t}$	$i_n = \frac{\ell^{\delta t} - 1}{t}$	$i_n = \frac{d_n}{1 - t \cdot dn}$	$i_n = \frac{(1 - d_c)^{-t} - 1}{t}$	$i_n = \frac{\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{-tm}}{t}$
$S = P(1 + i_c)^t$	$i_c = \sqrt[t]{1 + ti_n} - 1$		$i_c = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1$	$i_c = \ell^{\delta} - 1$	$i_c = \frac{1}{\sqrt[t]{1 - td_n}} - 1$	$i_c = \frac{d_c}{1 - d_c}$	$i_c = \frac{1}{\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^m} -$
$S = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm}$	$j_m = m\left(\sqrt[tm]{1 + ti_n} - \right.$	$j_m = m\left(\sqrt[m]{1 + i_c} - 1\right.$		$j_m = m\left(\sqrt[m]{\ell^{\delta}} - 1\right)$	$j_m = m\left(\frac{1}{\sqrt[tm]{1 - td_n}} - \right.$	$j_m = m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{1 - d_c}} - \right.$	$j_m = \frac{f_m}{1 - \frac{f_m}{m}}$
$S = P\ell^{\delta t}$	$\delta = \frac{\ln(1 + ti_n)}{t}$	$\delta = \ln(1 + i_c)$	$\delta = m \cdot \ln\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)$		$\delta = -\frac{\ln(1 - td_n)}{t}$	$\delta = -\ln(1 - d_c)$	$\delta = -m \cdot \ln\left(1 - \frac{f_m}{m}\right.$

Продовження таблиці 2

1	2	3	4	5	6	7	8
$S = \frac{P}{1 - td_n}$	$d_n = \frac{i_n}{1 + ti_n}$	$d_n = \frac{1-(1+i_c)^{-t}}{t}$	$d_n = \frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-}}{t}$	$d_n = \frac{1-\ell^{-\delta t}}{t}$		$d_n = \frac{1-(1-d_c)^{t}}{t}$	$d_n = \frac{1-\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{tm}}{t}$
$S = \frac{P}{(1-d_c)^{t}}$	$d_c = 1 - \frac{1}{\sqrt[t]{1+ti_n}}$	$d_c = \frac{i_c}{1+i_c}$	$d_c = 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}}$	$d_c = 1-\ell^{-\delta}$	$d_c = 1-\sqrt[t]{1-td_n}$		$d_c = 1-\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{m}$
$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{tm}}$	$f_m = m\left(1-\frac{1}{\sqrt[tm]{1+t}}\right.$	$f_m = m\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{1+i}}\right.$	$f_m = \frac{j_m}{1+\frac{j_m}{m}}$	$f_m = m\left(1-\sqrt[m]{\ell^{-\delta}}\right)$	$f_m = m\left(1-\sqrt[tm]{1-t}\right.$	$f_m = m\left(1-\sqrt[m]{1-d}\right.$	

Таблиця 3 — Нарощені суми постійних рент постнумерандо

Вид рент за нарахуванням відсотків	Вид рент за терміном виплати платежів	Нарощена сума S всієї ренти у момент n	Геометрична прогресія			Нарощена сума		Функція
			b_i	q	K			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Фінансові ренти з нарахуванням відсотків наприкінці року	річна рента	$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-1}$	R	1+i	n	$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$S = R \cdot S_{n:i}$	$S_{n:i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	P – терміно-ва рента	$S = \frac{R}{P} + \frac{R}{P}(1+i)^{\frac{1}{P}} + \frac{R}{P}(1+i)^{\frac{2}{P}} + \dots + \frac{R}{P}(1+i)^{\frac{np-1}{P}}$	$\frac{R}{P}$	$(1+i)^{\frac{1}{P}}$	np	$S = R\frac{(1+i)^n -}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} -\right.}$	$S = R \cdot S_{n;i}^{(p)}$ $S_{n;i}^{(p)} = S_{n;i} \cdot K_{p;i}$	$S_{n;i}^{(P)} = \frac{(1+i)^n -}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}\right.}$
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r + R_r(1+i)^r + R_r(1+i)^{2r} + \dots + R_r(1+i)^{n-r}$	R_r	$(1+i)^r$	$\frac{n}{r}$	$S = R_r\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}$	$S = R_r\frac{S_{n;i}}{S_{r;i}}$	$S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
Фінансові ренти з нарахуванням відсотків m разів на рік	річна рента	$S = R + R(1+\frac{j_m}{m})^m + R(1+\frac{j_m}{m})^{2m} + \dots + R(1+\frac{j_m}{m})^{(n-1)m}$	R	$\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m$	n	$S = R\frac{(1+\frac{j_m}{m})^{mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m}$	$S = R\frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{m;\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n:i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	P – термі-нова рента	$S = \frac{R}{P} + \frac{R}{P}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{P}} + \frac{R}{P}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{2m}{P}} + \dots + \frac{R}{P}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m\left(n-\frac{1}{p}\right)}$	$\frac{R}{P}$	$\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{P}}$	np	$S = \frac{R}{P}\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$	$S = \frac{R}{P} \cdot \frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Продовження таблиці 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr} + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{2mr} + \ldots + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m(n-r)}$	R_r	$\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}$	$\frac{n}{r}$	$S = R_r \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn} -}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr} -}$	$S = R_r \frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{mr;\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
Фінансові ренти з безперервним нарахуванням відсотків	річна рента	$S = R + Re^{\delta} + Re^{2\delta} + \ldots + Re^{(n-1)\delta}$	R	e^{δ}	n	$S = R\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}$		
	Р - термінова рента	$S = \frac{R}{P} + \frac{R}{P}e^{\frac{\delta}{P}} + \frac{R}{P}e^{\frac{2\delta}{P}} + \ldots + \frac{R}{P}e^{\frac{(np-1)\delta}{P}}$	$\frac{R}{P}$	$e^{\frac{\delta}{P}}$	np	$S = \frac{R}{P}\frac{\left[e^{\delta n} - 1\right]}{e^{\frac{\delta}{P}} - 1}$		
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r + R_r e^{\delta r} + R_r e^{2\delta r} + \ldots + R_r e^{(n-r)\delta}$	R_r	$e^{\delta r}$	$\frac{n}{r}$	$S = R_r\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}$		

Таблиця 4 – Формули розрахунку сучасної вартості різних видів постійних фінансових рент постнумерандо

Вид рент за нарахуванням відсотків	Вид рент за терміном виплати платежів	Нарощена сума	Сучасна вартість фінансової ренти		Функція
1	2	3	4	5	6
Фінансові ренти з нарахуванням відсотків наприкінці року	річна рента	$S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$	$A = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$A = R \cdot a_{n;i}$	$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
	Р - термінова рента	$S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]}$	$A = \dfrac{R}{P} \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{\left[(1+i)^{\frac{1}{P}} - 1\right]}(1+i)^{-n} = \dfrac{R}{P} \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\left[(1+i)^{\frac{1}{P}} - 1\right]}$	$A = R \cdot a_{n;i}^{(p)}$ $a_{n;i}^{(p)} = a_{n;i} \cdot K_{p;i}$	$a_{n;i}^{(P)} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}} - 1\right]}$ $K_{n;i} = \dfrac{i}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}} - 1\right]}$
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}$	$A = R_r\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}(1+i)^{-n} = R_r\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1}$	$A = R_r\dfrac{a_{n;i}}{S_{r;i}}$	$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $S_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5	6

на рікФінансові ренти з нарахуванням відсотків m разів	річна рента	$S = R\dfrac{(1+\frac{j_m}{m})^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}$	$A = R\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn} = R\dfrac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-m}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}$	$A = R\dfrac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{m;\frac{j_m}{m}}}$	$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $S_{n:i} = \dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$
	P – термінова рента	$S = \dfrac{R}{P}\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$	$A = \dfrac{R}{P}\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn} = \dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$	$A = \dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}}$	$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $S_{n;i} = \dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$
	окремий випадок - P – термінової ренти (p = m)	$S = \dfrac{R}{m}S_{mn;\frac{i_m}{m}}$		$A = R\dfrac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{m}$	$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}$	$A = R_r\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm} = R_r\dfrac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}}$	$A = R_r\dfrac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{mr;\frac{j_m}{m}}}$	$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $S_{n;i} = \dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5	6

Фінансові ренти з безперервним нарахуванням відсотків	річна рента	$S = R\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}$	$A = R\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}e^{-\delta n} = R\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$		
	P – терміно-ва рента	$S = \frac{R}{P}\frac{\left[e^{\delta n}-1\right]}{e^{\frac{\delta}{P}}-1}$	$A = \frac{R}{P}\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}e^{-\delta n} = \frac{R}{P}\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}$		
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta r}-1}$	$A = R_r\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta r}-1}e^{-\delta n} = R_r\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta r}-1}$		

Таблиця 5 — Формули розрахунку сучасної вартості постійних вічних рент постнумерандо

Вид рент за нараху-ванням відсот-ків	Вид рент за терміном виплати платежів	Сучасна вартість кінцевої ренти відповідного виду	Сучасна вартість вічної ренти		Функція
1	2	3	4	5	6
наприкі відсоткінарахув Вічні нці року в анням ренти з	річна рента	$A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$A_\infty = R\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \dfrac{R}{i}$	$A_\infty = \dfrac{R}{i}$	
	P - терміновa рента	$A = \dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right]}$	$A_\infty = R\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]} = \dfrac{R}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$	$A_\infty = R\dfrac{K_{p;i}}{i}$	$K_{p;i} = \dfrac{i}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right.}$
	рента з періодом більше року (r>1)	$A = R_r\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r-1}$	$A_\infty = R_r\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r-1} = \dfrac{R_r}{(1+i)^r-1}$	$A_\infty = \dfrac{R_r}{i\cdot S_{r;i}}$	$S_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n-1}{i}$
	річна рента	$A = R\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^m-1}$	$A_\infty = R\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^m-1} = \dfrac{R}{\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^m-1}$	$A_\infty = \dfrac{R}{\dfrac{j_m}{m}\times S_{m;\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n:i} = \dfrac{(1+i)^n-1}{i}$

Продовження таблиці 5

1	2	3	4	5	6

рікВічні ренти з нарахуванням відсотків m разів на	P - термінова рента	$A=\frac{R}{P}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$	$A_\infty=\frac{R}{P}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}=\frac{R}{P}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$ в окремому випадку, коли m = p	$A_\infty=\frac{R}{P\times\frac{j_m}{m}\times S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}}$ $A_\infty=\frac{R}{j_m}$	$S_{n;i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$
	рента з періодом більше року (r>1)	$A=R_r\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}$	$A_\infty=R_r\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}=\frac{R_r}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}$	$A_\infty=\frac{R_r}{\frac{j_m}{m}\times S_{mr;\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n;i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$
	річна рента	$A=R\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$	$A_\infty=R\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=\frac{R}{e^{\delta}-1}$	$A_\infty=\frac{R}{e^{\delta}-1}$	
	P - термінова рента	$A=\frac{R}{P}\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{P}}-1}$	$A_\infty=R\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\delta n}}{P\left(e^{\frac{\delta}{P}}-1\right)}=\frac{R}{P\left(e^{\frac{\delta}{P}}-1\right)}$	$A_\infty=\frac{R}{P\left(e^{\frac{\delta}{P}}-1\right)}$	

Вічні ренти з безперервним нарахуванням відсотків	рента з періодом більше року (r>1)	$A = R_r \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta r} - 1}$	$A_\infty = R_r \lim_{n \to \infty} \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta r} - 1} = \frac{R_r}{e^{\delta r} - 1}$	$A_\infty = \frac{R_r}{e^{\delta r} - 1}$	