ФАКУЛЬТЕТ ЕКОНОМІКИ ТРАНСПОРТУ

**Кафедра управління державними
і корпоративними фінансами**

О.О. Коковіхіна, О.В. Саленко

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Харків – 2015

Коковіхіна О.О., Саленко О.В. Фінансова математика:

Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2015. – 70 с.

Конспект лекцій містить матеріал за такими темами курсу, як предмет курсу “Фінансова математика”, прості та складні відсотки, конверсія, еквівалентність відсоткових ставок, постійні фінансові ренти, визначення параметрів постійних рент постнумерандо.

Конспект лекцій може бути використаний для підготовки до практичних занять та заліку студентами всіх форм навчання.

Рекомендується для студентів економічних спеціальностей всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030508 «Фінанси і кредит».

Іл. 3, табл. 7, бібліогр.: 22 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри фінансів 8 квітня 2014 р., протокол № 10.

Рецензент

доц. О.Д. Стешенко

О.О. Коковіхіна, О.В. Саленко

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Коковіхіна О.О.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 08.05.14 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

Українська державна академія залізничного транспорту

Кафедра “Фінанси”

О.О. Коковіхіна, О. В. Саленко

Конспект лекцій з дисципліни «Фінансова математика» для студентів економічних спеціальностей всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030508 «Фінанси і кредит»

Харків 2015

Коковіхіна О.О., Саленко О.В. Конспект лекцій з дисципліни «Фінансова математика» для студентів економічних спеціальностей всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030508 «Фінанси і кредит». – Харків: УкрДАЗТ, 2015. – 70 с.

Конспект лекцій містить матеріал за такими темами курсу, як предмет курсу "Фінансова математика", прості та складні відсотки, конверсія, еквівалентність відсоткових ставок, постійні фінансові ренти, визначення параметрів постійних рент постнумерандо.

Конспект лекцій може бути використаний для підготовки до практичних занять та заліку студентами всіх форм навчання.

Іл. 3, табл. 7, бібліогр.: 22 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Фінанси» 8 квітня 2014 р., протокол № 10.

Рецензент

доц. О.Д. Стешенко

ЗМІСТ

ПРЕДМЕТ, МЕТОД І ЗАВДАННЯ КУРСУ “ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА”

Будь-яка фінансово-кредитна операція, інвестиційний проект або комерційна угода припускають наявність ряду умов їх виконання, з якими погоджуються діючі сторони. До таких умов відносяться наступні кількісні дані: грошові суми, часові параметри, відсоткові ставки та деякі інші додаткові величини. Кожна з перелічених характеристик може бути задана самим різним способом. Наприклад, платежі можуть бути разовими або в розстрочку, постійними або змінними у часі. Існує більш десяти видів відсоткових ставок і методів нарахування відсотків. Час встановлюється у вигляді фіксованих термінів платежів, інтервалів надходження доходів, моментів погашення заборгованостей і інакше. В рамках однієї фінансової операції перелічені показники утворюють деяку взаємопов’язану систему, яка підкоряється відповідній логіці. У зв’язку з множинністю параметрів такої системи кінцеві конкретні результати (крім елементарних ситуацій) часто неочевидні. Більш того, зміна значення хоча б однієї величини в системі у більшій чи меншій мірі, але обов’язково вплине на результати відповідної операції. З цього випливає, що такі системи можуть і повинні бути об’єктом застосування кількісного фінансового аналізу. Перевірені практикою методи цього аналізу і складають **предмет фінансової математики.**

Кількісний фінансовий аналіз використовується як в умовах визначеності, так і в умовах невизначеності. В першому разі припускається, що дані для аналізу заздалегідь визначені і фіксовані. Наприклад, при випуску звичайних облігацій однозначно обумовлюються всі параметри – термін, купона доходність, порядок викупу. Аналіз значно ускладнюється, коли треба враховувати невизначеність – динаміку грошового ринку (рівень відсоткових ставок, коливання валютного курсу та ін.) поведінку контрагента.

До основних задач фінансової математики відносяться:

– вимірювання кінцевих фінансових результатів операції (угоди, контракту) для кожної з діючих сторін;
– розробка планів виконання фінансових операцій, зокрема планів погашення заборгованості;
– вимірювання залежності кінцевих результатів операції від основних її параметрів;
– визначення припустимих критичних значень цих параметрів та розрахунок параметрів еквівалентної (беззбиткової) зміни початкових умов операції.

Звичайно, даний перелік не є повним. Сучасна практика ставить нові задачі. До останніх, наприклад, відноситься оптимізація портфеля активів та, що більш цікаво, оптимізація за якимось критерієм портфеля заборгованості.

Знання методів, які використовуються у фінансовій математиці необхідно безпосередньо при роботі в будь-якій сфері фінансів та кредиту, зокрема на етапі розробки умов контрактів. Не можна обійтись без них при фінансовому проектуванні, а також при порівнянні та виборі довгострокових інвестиційних проектів. Фінансові розрахунки є необхідною складовою розрахунків в довгостроковому особистому страхуванні, наприклад проектування та аналіз стану пенсійних фондів (розрахунок тарифів, оцінка спроможності фондів виконати свої зобов’язання перед пенсіонерами та ін.), довгостроковому медичному страхуванні.

Галузь використання методів кількісного аналізу фінансових операцій послідовно поширюється.

1 ЧАС ЯК ФАКТОР У ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКАХ

1.1 Теперішня та майбутня вартість грошей

Незалежно від призначення чи походження, гроші в практичних фінансових операціях так чи інакше пов'язуються з часом: конкретними моментами або періодами. Для цього в контрактах фіксуються відповідні терміни, дати періодичність виплат. За межами часу грошей нема. Фактор часу, особливо в довгострокових операціях, відіграє не меншу, а іноді й більшу роль, ніж розміри грошових сум. Необхідність враховувати часовий фактор виходить з суті фінансування й кредитування і проявляється у **принципі нерівної вартості грошей, що відносяться до різних моментів часу** або в іншому формулюванні – **принципі зміни цінності грошей у часі**. Урахування фактора часу здійснюється за допомогою нарахування відсотків або дисконтування.

Інтуїтивно зрозуміло, що 1000 грн, які будуть отримані через 5 років, не рівноцінні цій же сумі, яка надійшла сьогодні, навіть, якщо не враховувати інфляцію та ризик їх неотримання.

Відзначена нерівноцінність двох однакових за абсолютною величиною різночасових сум пов'язана перш за все з тим, що гроші, які ми маємо сьогодні, можуть бути інвестовані і принести доход в майбутньому. Отриманий доход у свою чергу реінвестується і так далі. Якщо сьогоднішні гроші цінніше майбутніх, то відповідно майбутні надходження менш цінні, ніж більш близькі при рівних їх сумах. Вплив фактору часу значно посилюється в період інфляції.

Під **нарощеною сумою** позики (боргу, депозиту, інших видів грошей, що були надані у борг або інвестовані) розуміють первісну її суму з відсотками, нарахованими наприкінці терміну. Нарощена сума **S** визначається множенням первісної суми боргу **P** на **множник нарощення**, який вказує, у скільки разів нарощена сума **S** більша, ніж первісна **P**. Розрахункова формула залежить від виду відсоткової ставки, що застосовується, та умов нарощення.

У фінансовій практиці можна зустрітися з задачею, яка обернена до задачі нарощення відсотків, а саме за розміром суми **S**, яку треба буде сплатити через **t** років, треба визначити суму отриманої позики **P**.Такий розрахунок потрібен у випадках, коли відсотки з суми **S** утримуються наперед, тобто одразу ж при наданні позики. В таких випадках кажуть, що сума **S** **дисконтується** або **обліковується**, сам процес нарахування відсотків та їх утримання називають **обліком**, а самі утримані відсотки – **дисконтом**.

Термін “дисконтування” вживається і в більш широкому значенні – як спосіб визначення будь-якої вартісної величини, що відноситься до майбутнього часу на будь-який момент часу, що був раніше.

Величину **P**, яка знаходиться за допомогою дисконтування, називають **сучасною величиною** суми **S**, а іноді, в залежності від контексту, **сучасною (поточною, капіталізованою) вартістю.**

В залежності від виду відсоткової ставки застосовуються два методи дисконтування – **математичне дисконтування** та **банківський (комерційний) облік**. В першому випадку використовується ставка нарощення, в другому –облікова ставка.

1.2 Відсотки. Види відсоткових ставок

Під **відсотковими грошима,** або **відсотками,** розуміють абсолютну величину доходу від надання грошей у борг у будь-якому вигляді: видача позики, продаж товару у кредит, розміщення грошей на депозитному рахунку, облік векселя, придбання ощадного сертифіката або облігацій тощо. Який би вигляд або походження не мали відсотки, завжди це конкретний прояв такої економічної категорії, як позиковий відсоток.

Відсотки розрізняють згідно з базою їх нарахування. Для розрахунків може використовуватись постійна база або така, що послідовно змінюється. В останньому випадку за базу приймається сума, яка була одержана на попередньому етапі нарощення або дисконтування, інакше кажучи, відсотки нараховуються на відсотки. При постійній базі використовуються **прості**, а при змінній – **складні** відсоткові ставки.

Також важливим є вибір принципу розрахунку відсотків. Існує **два** такі принципи: нарощення на суму боргу і скидка з кінцевої суми заборгованості. Згідно з цим застосовують **ставку нарощення** і **облікову ставку.**

На практиці застосовують так звані **дискретні** відсотки, тобто відсотки, які нараховуються за фіксовані в угоді інтервали часу (рік, півріччя та ін). Інакше кажучи, час приймається за дискретну змінну. В деяких випадках існує необхідність нарахування **безперервних** відсотків.

2 ПРОСТІ ВІДСОТКИ

2.1 Нарощення простими відсотками

Надаючи свої грошові кошти в борг, їх власник отримує певний доход у вигляді відсотків, які нараховуються за певним алгоритмом упродовж визначеного проміжку часу, який називається базовим. Оскільки стандартним часовим інтервалом у фінансових операціях є один рік, найбільш поширений варіант, коли цей рік береться як базовий інтервал і відсоткова ставка встановлюється у вигляді річної ставки, тобто розуміється, що відсотки нараховуються одноразово наприкінці року після отримання позики.

Відомі дві основні схеми дискретного нарахування, тобто нарахування відсотків за фіксований в договорі інтервал часу:

- схема простих відсотків;
- схема складних відсотків.

Схема простих відсотків припускає незмінність величини, з якої відбувається нарахування відсотків. Нехай початковий капітал, який інвестується, дорівнює $\mathbf{P}$; вимагається доходність – $\mathbf{i_п}$ (у вигляді десяткового дробу). Вважається, що інвестиція відбувається на умовах простого відсотка, якщо капітал, що інвестований, щорічно збільшується на величину $\mathbf{P \cdot i_п}$. Таким чином розмір $\mathbf{S}$ інвестованого капіталу через $\mathbf{n}$ років буде дорівнювати

$$S=P+P\cdot i_п+...+P\cdot i_п=P+P\cdot n\cdot i_п=P(1+n\cdot i_п). \quad (2.1)$$

Тобто відсотки нараховуються на одну і ту ж величину капіталу впродовж всього терміну.

Вираз (2.1) називається формулою нарощення за простими відсотками, а множник ($1+n\cdot i_п$) – множником нарощення, або коефіцієнтом нарощення простих відсотків.

Легко побачити, що приріст капіталу є пропорційним терміну позики і ставці відсотку, тобто можна зробити висновок, що доход інвестора зростає лінійно разом з **n**

$$I = P\cdot n\cdot i_п. \quad (2.2)$$

Якщо ставка $i_п$ задана у відсотках, то при використанні формули (2.1) ставку треба виражати у вигляді десяткового дробу.

Приклад 2.1

Знайти величину відсотка та нарощену суму за трирічний кредит в 20 тис грн, отриманий під 9 %.

Тут **P = 20** тис грн; **n = 3** роки; $i_п = 0{,}09$.

Тоді **I = 20·3·0,09 = 5,4** тис грн,
S = P + I = 20 + 5,4 = 25,4 тис грн.

Нарощення за простими відсотками у разі, коли тривалість **n** фінансової операції не дорівнює цілому числу років (наприклад, менше року), визначається за формулою

$$S = P(1+\frac{k}{K}\cdot i_n), \quad (2.3)$$

де **к** – тривалість фінансової операції в днях;
К – кількість днів у році.

Тоді $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{K}}$ – тривалість фінансової операції, яка вже вимірюється в роках (тобто в даній ситуації $\mathbf{n} = \mathbf{t} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{K}}$).

Нарощення за простими відсотками використовується при обслуговуванні ощадних вкладів з щомісячною виплатою відсотків і взагалі в тих випадках, коли відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично сплачуються кредитору. Прості відсотки використовують також при видачі широко поширених короткотермінових позик, тобто позик, які надаються на термін до одного року з одноразовим нарахуванням відсотків.

Визначаючи тривалість фінансової операції, день видачі і день погашення позики вважають за один день. В залежності від того, якою береться тривалість року (кварталу, місяця) отримують два варіанти відсотків:

– **точні відсотки** — визначаються виходячи з точної кількості днів у році (365 або 366), в кварталі (від 89 до 92), в місяці (від 28 до 31);
– **звичайні відсотки** — визначаються виходячи з наближеної кількості днів у році, кварталі і місяці (відповідно 360, 90, 30).

При визначенні тривалості періоду, на який видана позика, також можливі два варіанти:

– приймається в розрахунок точна кількість днів позики, тобто розрахунок ведеться за днями;
– приймається в розрахунок наближена кількість днів позики виходячи з тривалості місяця 30 днів.

Для спрощення процедури розрахунку точної кількості днів користуються спеціальними таблицями.

В тому разі, коли в розрахунках використовуються точні відсотки, береться також і точна величина тривалості фінансової операції. При використанні звичайних відсотків можуть використовуватись як точна, так і наближена кількість днів позики. Таким чином, розрахунок може виконуватись одним із трьох способів:

– звичайний відсоток з наближеною кількістю днів позики, який позначається як 360/360;

– звичайний відсоток з точною кількістю днів позики, який позначається як 365/360 або АСТ/360;

– точний відсоток з точною кількістю днів позики, який позначається як 365/365 або АСТ/АСТ.

Приклад 2.2

Надана позика в сумі 7 тис грн 10 лютого з погашенням 10 червня під 20 % річних (рік не високосний). Розрахувати різними способами суму до погашення (**S**). Розмір сплачуваних за користування позикою відсотків залежить від кількості днів, які беруться в розрахунок. Точна кількість днів визначається за спеціальними таблицями і є 120 днів. Наближена кількість днів дорівнює: 18 днів у лютому плюс 90 днів (по 30 днів у трьох місяцях: березень, квітень, травень) плюс 10 днів червня, що дорівнює 118 днів.

Можливі варіанти повернення боргу:

а) в розрахунок приймаються точні відсотки і точна кількість днів позики

$$\mathbf{S = 7 \cdot (1 + \frac{120}{365} \cdot 0{,}2) = 7{,}460} \text{ тис грн;}$$

б) в розрахунок приймаються звичайні відсотки і точна кількість днів

$$\mathbf{S = 7 \cdot (1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}2) = 7{,}467} \text{ тис грн;}$$

в) в розрахунок приймаються звичайні відсотки та наближена кількість днів

$$S = 7 \cdot (1 + \frac{118}{360} \cdot 0{,}2) = 7{,}459 \text{ тис грн.}$$

2.2 Змінні ставки і реінвестування

В кредитних угодах іноді передбачаються змінні в часі відсоткові ставки. Якщо це прості ставки, то нарощена до кінця терміну сума визначається таким чином:

$$\mathbf{S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m) = P(1 + \sum_t n_t \cdot i_t)}, \quad (2.4)$$

де $\mathbf{i_t}$ – ставка простих відсотків в періоді $\mathbf{t}$;

$\mathbf{n_t}$ – тривалість періоду з постійною ставкою $\mathbf{i_t}$ та $\mathbf{n = \sum_t n_t}$.

Приклад 2.3

Контракт передбачає такий порядок нарахування відсотків: перший рік – 16 %, в кожному наступному півріччі ставка підвищується на 1 %. Необхідно визначити множник нарощення за 2,5 роки. Знаходимо:

$$\mathbf{1 + \sum_t n_t \cdot i_t = 1 + 1 \cdot 0{,}16 + 0{,}5 \cdot 0{,}17 + 0{,}5 \cdot 0{,}18 + 0{,}5 \cdot 0{,}19 = 1{,}43.}$$

В практиці при інвестуванні коштів в короткотермінові депозити іноді звертаються до неодноразового послідовного повторного нарощення за простими відсотками в межах заданого загального терміну. Фактично це означає реінвестування коштів, отриманих на кожному етапі нарощення, за допомогою постійної або змінної ставок. Нарощена сума для всього терміну складе в цьому випадку

$$\mathbf{S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)\ldots(1+n_t i_t)}, \quad (2.5)$$

де $\mathbf{i_t}$ – розміри ставок, за якими відбувається реінвестування.

Якщо проміжні терміни нарахування і ставки не змінюються в часі, то замість (2.5) маємо

$$\mathbf{S = P(1+i_j n_j)^m}, \qquad (2.6)$$

де **m** – кількість повторення реінвестування.

Приклад 2.4

100 тис грн покладено 1-го березня на місячний депозит під 20 % річних. Яка буде нарощена сума, якщо операція повторюється 3 рази?

Якщо нараховувати точні відсотки (365/365), то

$$\mathbf{S = 100\left(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}2\right)\left(1+\frac{28}{365}\cdot 0{,}2\right)\left(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}2\right) = 105{,}013} \text{ тис грн.}$$

Нарахування звичайних відсотків (360/360) при реінвестуванні дає

$$\mathbf{S = 100\left(1+\frac{30}{360}\cdot 0{,}2\right)^3 = 105{,}084} \text{ тис грн.}$$

2.3 Дисконтування за простими відсотками

Математичне дисконтування являє собою формальне розв’язання задачі, що є оберненою до задачі нарощення первісної суми позики, тобто: яку первісну суму позики треба надати в борг для того, щоб наприкінці терміну отримати суму **S** при умові, що на борг нараховуються відсотки. Після розв’язання рівняння (2.1) відносно **P**, знаходимо

$$\mathbf{P = \frac{S}{1+n\cdot i}}. \qquad (2.7)$$

Нагадаємо, що $\mathbf{n = \frac{k}{K}}$ – термін позики в роках.

Встановлена таким шляхом величина **P** є сучасною вартістю суми **S**, яка буде виплачена через **n** років. Дріб **1/(1+n·i)** називається дисконтним, або дисконтуючим множником.

Дисконтний множник показує, яку частку складає первісна величина боргу у його кінцевій сумі.

Різниця **S – P** може розглядатись не тільки як відсотки, що нараховані на **P**, але й як дисконт з суми **S**.

Приклад 2.5

Через 180 днів після підписання договору боржник сплатив 310 тис грн. Кредит був наданий під 16% річних. Яка початкова сума боргу при умові, що часова база дорівнює 365 днів? Відповідно (2.7) знаходимо

$$\mathbf{P = \frac{310000}{1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}16} = 287328{,}59} \text{ грн.}$$

Інший вид дисконтування - банківський облік. використовується для обліку векселів. При цій операції банк або інший фінансовий заклад до наставання терміну сплати за векселем або іншим платіжним зобов’язанням купує його у власника за ціною, яка менше суми, що на ньому вказана, тобто купує (обліковує) вексель з дисконтом (зі знижкою). Отримавши при настанні терміну оплати векселя гроші, банк реалізує дисконт. У свою чергу власник векселя за допомогою його обліку має можливість отримати гроші раніше вказаного терміну, хоч і не в повному обсязі. Тобто при застосуванні банківського (комерційного) обліку відсотки за користування позикою у вигляді дисконту нараховуються на суму, яку належить сплатити наприкінці терміну. При цьому використовуються облікові ставки.

При використанні простих відсотків розмір дисконту, або суми обліку, дорівнює $\mathbf{S \cdot n \cdot d_n}$. Якщо $\mathbf{d_n}$ – річна облікова ставка, то **n** вимірюється в роках. Таким чином,

$$\mathbf{P = S - S \cdot n \cdot d_n = S(1 - nd_n),} \qquad (2.8)$$

де **n** – термін від моменту обліку до дати погашення векселя.

Дисконтний множник тут дорівнює $\mathbf{(1 - n \cdot d_n)}$. Із формули

(2.8) випливає, що при **$n>1/d_n$** величина дисконтного множника і сума **P** будуть мати значення **<0**. Інакше кажучи, при відносно великому терміні векселя його облік може привести до нульової або від'ємної суми **P**, що не має сенсу. Наприклад, при **d_n** = 20 % вже п'ятирічний термін приводить до того, що власник векселя нічого не отримує при його обліку.

Облік за допомогою облікової ставки найчастіше виконується при часовій базі **K=360** днів, кількість днів позики звичайно береться точною, АСТ/360.

Приклад 2.6

Трата (перевідний вексель) був виданий на суму 1 тис грн з оплатою 17.11.2002. Власник векселя облікував його у банку 23.09.2002 за обліковою ставкою 20 % (АСТ/360). Період, що залишився до кінця терміну, дорівнює 55 днів. Отримана при обліку сума (без сплати комісійних) дорівнює:

$$\mathbf{P = 1000\left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0{,}2\right) = 969{,}44} \text{ грн.}$$

Дисконт дорівнює 30,56 грн.

Проста облікова ставка іноді використовується і при розрахунку нарощеної суми, наприклад для визначення суми, яку треба проставити у векселі, якщо задана початкова сума боргу. Нарощена сума в такому разі

$$\mathbf{S = P \cdot \frac{1}{1 - n \cdot d_n}}, \tag{2.9}$$

множник нарощення дорівнює $\mathbf{\frac{1}{1 - n \cdot d_n}}$. Цей множник нарощення не є пропорційним ні терміну, ні ставці. Зауважимо, що при **$n=1/d_n$** розрахунок не має сенсу, тому що нарощена сума стає нескінченно великою.

2.4 Визначення терміну позики і відсоткової ставки

При розробленні умов контрактів або їх аналізі виникає необхідність у розв'язанні деяких другорядних задач, а саме – визначення терміну позики або розміру відсоткової ставки при тому чи іншому її вигляді при всіх інших заданих умовах. Формули їх розрахунку можна отримати розв'язуючи рівняння, що пов'язують **S** та **P**, відносно величин, які нас цікавлять.

Термін позики. Потрібні для розрахунку тривалості позики в роках і днях формули отримаємо розв'язавши (2.1) і (2.8) відносно **n**.

Термін в роках

$$\mathbf{n = \frac{S - P}{P \cdot i_n} = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i_n}}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{n = \frac{S - P}{S \cdot d_n} = \frac{1 - \frac{P}{S}}{d_n}}. \tag{2.11}$$

Термін в днях (якщо **n=t/К**, де **К** – часова база)

$$\mathbf{t = \frac{S - P}{P \cdot i_n} \cdot K}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{t = \frac{S - P}{S \cdot d_n} K}. \tag{2.13}$$

Приклад 2.7

Яка повинна бути тривалість позики у днях для того, щоб борг, який дорівнює 100 тис грн, зріс до 120 тис грн при умові, що нараховуються прості відсотки за ставкою 25 % річних (АСТ/

ACT)? За формулою (2.12) знаходимо

$$\mathbf{t = \frac{120 - 100}{100 \cdot 0{,}25} 365 = 292} \text{ дні.}$$

Розмір відсоткової ставки. Необхідність в розрахунку відсоткової ставки виникає при визначенні фінансової ефективності операції та при порівнянні контрактів за їх доходністю у випадках, коли відсоткові ставки у явному вигляді не вказуються. Розв'язавши вирази (2.1), (2.8) відносно $\mathbf{i_n}$ або $\mathbf{d_n}$, отримаємо такі формули для термінів, заданих в днях і роках:

$$\mathbf{i_n = \frac{S - P}{P \cdot n} = \frac{S - P}{P \cdot t} \cdot K}, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{d_n = \frac{S - P}{S \cdot n} = \frac{S - P}{S \cdot t} \cdot K}. \tag{2.15}$$

Приклад 2.8

В контракті передбачається погашення зобов'язання у сумі 110 тис грн через 120 днів. Початкова сума боргу 90 тис грн (ACT/360). Як бачимо, тут не вказаний рівень відсоткової ставки. Необхідно визначити доходність позикової операції для кредитора у вигляді ставки відсотка та облікової ставки. За формулами (2.14), (2.15) знаходимо

$$\mathbf{i_n = \frac{110 - 90}{90 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}666(6)}, \text{ або } \mathbf{66{,}67}\ \%;$$

$$\mathbf{d_n = \frac{110 - 90}{110 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}5454}, \text{ або } \mathbf{54{,}54}\ \%.$$

Іноді розмір дисконту фіксується в договорі у вигляді відсотка знижки (загальної облікової ставки) $\mathbf{d'}$ за весь термін позики. В такому разі:

$$\mathbf{P = S(1 - d')}.$$

Маючи на увазі, що $\mathbf{P = S/(1 + n \cdot i_n)}$, знаходимо:

$$\mathbf{i_n = \frac{d'}{n(1 - d')}}. \qquad (2.16)$$

Річна облікова ставка дорівнює

$$\mathbf{d_n = d'/n.}$$

Приклад 2.9

Сторони домовились про те, що із суми позики, наданої на 210 днів, утримується дисконт 12%. Необхідно визначити ціну кредиту у вигляді річної ставки простих відсотків та облікової ставки (K=360):

$$\mathbf{i_n = \frac{0{,}12}{\frac{210}{360}(1 - 0{,}12)} = 0{,}23376,} \text{ або } \mathbf{23{,}38}\ \%;$$

$$\mathbf{d_n = \frac{0{,}12}{\frac{210}{360}} = 0{,}20571,} \text{ або } \mathbf{20{,}57}\ \%.$$

3 СКЛАДНІ ВІДСОТКИ

3.1 Нарахування складних річних відсотків

У середньо- і довготермінових фінансово-кредитних операціях, якщо відсотки не виплачуються одразу після їх нарахування, а додаються до суми боргу, використовують складні відсотки. База нарахування для складних відсотків на відміну від простих не залишається постійною, вона збільшується з кожним кроком у часі. Абсолютна сума нарахованих відсотків зростає і процес збільшення суми боргу відбувається з прискоренням. Нарощення за складними відсотками можна подати, як послідовне реінвестування коштів, вкладених під прості відсотки на один період нарахування. Приєднання нарахованих відсотків до суми, яка була базою для їх нарахування, часто називають капіталізацією відсотків.

Для запису формули нарощення використаємо ті ж позначення, що і в формулі нарощення за простими відсотками:

P – початкова сума боргу (позики, кредиту, капіталу і т. ін.);

S – нарощена сума на кінець терміну позики;

n – термін, кількість років нарощення;

$\mathbf{i_c}$ – рівень річної ставки відсотків, заданий десятковим дробом.

Очевидно, що наприкінці першого року відсотки дорівнюють величині $\mathbf{P \cdot i_c}$, а нарощена сума складе $\mathbf{P(1 + i_c) + P(1 + i_c)i_c = P(1 + i_c)^2}$ і т.ін. Наприкінці **n**-го року нарощена сума буде дорівнювати

$$\mathbf{S = P(1 + i_c)^n}\ . \tag{3.1}$$

Відсотки за цей же термін в цілому будуть такі:

$$\mathbf{I = S - P = P[(1 + i_c)^n - 1]}. \tag{3.2}$$

Зростання за складними відсотками являє собою процес, що відповідає геометричній прогресії, перший член якої дорівнює **P**, а знаменник – (**1+i**). Останній член прогресії дорівнює нарощеній сумі наприкінці терміну позики.

Величину $\mathbf{(1+i_c)^n}$ називають множником нарощення за складними відсотками. Значення цього множника для цілих **n** наводяться в таблиці складних відсотків.

Час при нарощенні за складною ставкою звичайно вимірюється як АСТ/АСТ.

Приклад 3.1

Якої величини досягне борг, який дорівнює 10 тис грн, через 5 років при зростанні за складною ставкою 15,5 % річних?

За формулою (3.1) знаходимо:

$$\mathbf{S = 10000(1 + 0{,}155)^5 = 20554{,}64}\text{ грн.}$$

Формула нарощення за складними відсотками отримана для річної відсоткової ставки і терміну, виміряного в роках. Але її можна застосувати і при інших періодах нарахування відсотків. В цих випадках $\mathbf{i_c}$ означає ставку за один період нарахування (місяць, квартал і т. ін.), а **n** – кількість таких періодів.

Формула (3.1) припускає постійну ставку впродовж всього терміну нарахування відсотків. Нестійкість кредитно-грошового ринку примушує модернізувати “класичну” схему, наприклад, за допомогою використання змінних ставок. При цьому загальний множник нарощення визначається як добуток часток, тобто:

$$\mathbf{S = P(1 + i_1)^{n1}(1 + i_2)^{n2} \ldots (1 + i_к)^{nк}}, \tag{3.3}$$

де $\mathbf{i_1}$, i_2, ... , $\mathbf{i_к}$ – послідовні значення ставок;
$\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, ... , $\mathbf{n_к}$ – періоди, впродовж яких використовуються відповідні ставки.

Приклад 3.2

Термін позики – 5 років, договірна базова відсоткова ставка – 12 % річних плюс маржа 0,5 % в перші два роки та 0,75 % у роки, що залишилися. Множник нарощення в цьому разі складе:

$$\mathbf{q = (1 + 0{,}125)^2(1 + 0{,}1275)^3 = 1{,}81407.}$$

Часто термін для нарахування відсотків в роках не є цілим числом. В цьому разі використовуються два методи нарахування відсотків. Відповідно до першого, назвемо його загальним, розрахунок ведеться безпосередньо за формулою (3.1). Другий змішаний метод припускає нарахування відсотків за цілу кількість років за формулою складних відсотків і за дробову частину терміну за формулою простих відсотків

$$\mathbf{S = P(1 + i)^a(1 + b \cdot i)}, \tag{3.4}$$

де $\mathbf{n = a + b}$ – термін позики;

a – це кількість цілих років;

b – дробова частина року.

Приклад 3.3

Кредит в розмірі 3 тис грн. виданий на 3 роки і 160 днів ($\mathbf{n = 3\frac{160}{365}}$ = 3,43836 року) під 16,5 % складних річних. Суму боргу на кінець терміну визначимо за формулою (3.1)

$$\mathbf{S = 3000 \cdot 1{,}165^{3{,}43836} = 5071{,}94}\text{ грн},$$

у свою чергу змішаний метод дає

$$\mathbf{S = 3000 \cdot 1{,}165^{3} \cdot (1 + 0{,}43836 \cdot 0{,}165) = 5086{,}59}\textbf{ грн.}$$

3.2 Порівняння зростання за складними і простими відсотками

Для порівняння результатів нарощення за різними відсотковим ставкам треба порівняти відповідні множники нарощення. При однакових рівнях відсоткових ставок, співвідношення цих множників суттєво визначається терміном:

– при терміні менше року прості відсотки більше складних:

$$\mathbf{(1 + ni_п) > (1 + i_c)^n}, \tag{3.5}$$

– при терміні більше року складні відсотки більше простих:

$$\mathbf{(1 + ni_п) < (1 + i_c)^n}, \tag{3.6}$$

– при терміні, який дорівнює одному року, множники нарощення дорівнюють один одному.

3.3 Нарощення відсотків m раз на рік. Номінальна і ефективна ставки

В сучасних умовах відсотки капіталізуються, як правило, не один, а декілька разів на рік – по півріччях, кварталах і т. ін.

В контрактах звичайно фіксуються не ставки за період нарахування, а річна ставка та вказується період нарахування відсотків. Наприклад, 18 % річних з щоквартальним нарахуванням відсотків, тобто $\mathbf{j_4 = 18}$ %.

Якщо річна ставка дорівнює $\mathbf{j_m}$, кількість періодів нарахування за рік **m**, то кожен раз відсотки нараховуються за ставкою $\frac{\mathbf{j_m}}{\mathbf{m}}$ за частину року $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}$. Ставку $\mathbf{j_m}$ називають **номінальною**. Формулу нарощення в цьому разі можна подати таким чином:

$$\mathbf{S = P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}} \tag{3.7}$$

Приклад 3.4

Якої величини досягне борг, який дорівнює 10 тис грн, за 5 років, якщо відсотки нараховуються щоквартально, а номінальна ставка дорівнює 15,5 %. В цьому разі

$$\mathbf{S = 10000\left(1+\frac{0{,}155}{4}\right)^{4\cdot 5} = 21391{,}49} \text{ грн.}$$

В прикладі 3.1 при щорічному нарахуванні відсотків було **S = 20554,64** грн.

Отже, **чим частіше нараховуються відсотки, тим швидше йде процес нарощення**.

Приклад 3.5

Яка сума боргу буде через 25 місяців, якщо його початкова величина 5 тис грн, відсотки складні, ставка 20 % річних, нарахування щоквартальне?

За умовами задачі кількість періодів нарахування $\mathbf{n \cdot m = \frac{25}{12} \cdot 4 = 8\frac{1}{3}}$. Використаємо два методи нарощення – загальний та змішаний. Отримаємо:

$$\mathbf{S = 5000\left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^{8\frac{1}{3}} = 7508,40}\ \text{грн.}$$

$$\mathbf{S = 5000\left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,2}{4}\right) = 7510,40}\ \text{грн.}$$

3.4 Дисконтування за складною ставкою

При розгляданні теми "Прості відсотки" були розглянуті математичне дисконтування і банківський (комерційний) облік. Перше полягає у визначенні **P** за значенням **S** при заданій ставці відсотка, друге – при заданій обліковій ставці. Застосуємо перший метод і дисконтуємо тепер суму S за складною ставкою відсотків. На підставі (3.1) отримаємо

$$\mathbf{P = \frac{S^{/}}{(1 + i_c)^n} = SV^n}. \tag{3.8}$$

Величину $\mathbf{V^n = \frac{1}{(1 + i_c)^n}}$ називають **дисконтним**, **обліковим**, або **дисконтуючим множником**. Значення цього множника легко табулювати для різних значень **n** та $\mathbf{i_c}$.

Для випадків, коли відсотки нараховуються **m** раз на рік, отримаємо

$$\mathbf{P = \frac{S}{(1+\frac{j_m}{m})^{mn}} = SV^{mn}}. \qquad (3.9)$$

Згадаємо, що величину **P**, яка отримується дисконтуванням **S**, називають **сучасною, поточною вартістю**, або **сучасною величиною S.** Сучасна вартість може бути розрахована на будь-який момент часу до виплати суми **S**.

Різницю **S–P** у випадку, коли **P** визначено дисконтуванням, називають **дисконтом**

$$\mathbf{D = S - P = S(1 - V^n).} \qquad (3.10)$$

Приклад 3.6

Сума 5 тис грн виплачується через 5 років. Треба визначити її сучасну величину при умові, що використовується ставка складних відсотків, що дорівнює 12 % річних.

Дисконтний множник для даних умов складе

$$\mathbf{V^5 = 1{,}12^{-5} = 0{,}56574,}$$

тобто початкова сума буде менше приблизно на 44 %. Сучасна вартість дорівнює

$$\mathbf{P = 5000 \cdot 1{,}12^{-5} = 2837{,}1} \text{ тис грн.}$$

3.5 Операції зі складною обліковою ставкою

В практиці облікових операцій іноді використовують **складну облікову ставку**. В цих випадках процес дисконтування відбувається з уповільненням, так як кожен раз облікова ставка застосовується не до початкової суми (як при простій ставці), а до суми, яка отримана дисконтуванням на попередньому кроці у часі. Дисконтування за складною обліковою ставкою виконується за формулою

$$\mathbf{P = S(1 - d_c)^n}, \tag{3.11}$$

де $\mathbf{d_c}$ – складна річна облікова ставка.

Приклад 3.7

Боргове зобов'язання на суму 5 тис грн, термін сплати якого настає через 5 років, продано з дисконтом за складною обліковою ставкою 15 % річних. Який буде розмір отриманої за борг суми і величина дисконту (в тисячах гривень)? Маємо

$$\mathbf{P = 5000(1 - 0{,}15)^5 = 2218{,}5} \text{ тис грн};$$

$$\mathbf{D = 5000 - 2218{,}5 = 2781{,}5} \text{ тис грн}.$$

Як випливає з наведеного прикладу, дисконтування за складною обліковою ставкою вигідніше для боржника, ніж за простою обліковою ставкою.

Дисконтування може проводитись не один, а **m** раз на рік, тобто кожен раз облік проводиться за ставкою $\boldsymbol{f_m/m}$ за частку року **1/m**. В цьому разі

$$\mathbf{P = S(1 - f_m/m)^{mn}}, \tag{3.12}$$

де $\mathbf{f_m}$ – номінальна річна облікова ставка.

Ефективна облікова ставка d_c характеризує ступінь дисконтування за рік. Визначимо її на основі рівності дисконтних множників

$$\mathbf{(1 - d_c)^n = (1 - f_m/m)^{mn}}.$$

Звідси

$$\mathbf{d_c = 1 - (1 - f_m/m)^m.} \tag{3.13}$$

Приклад 3.8

За даними прикладу 3.8 визначити суму, яка буде отримана при поквартальному обліку за номінальною обліковою ставкою 15 %, та ефективну облікову ставку. Маємо $\mathbf{f_4=15\%}$, mn=20:

$$\mathbf{P = 5000(1 - 0{,}15/4)^{4\cdot 5} = 2328{,}0} \text{ тис грн.}$$

Ефективна облікова ставка складе

$$\mathbf{d_c = 1 - (1 - 0{,}15/4)^4 = 0{,}14177} \text{ або } \mathbf{14{,}177}\ \%.$$

Іноді нарощену суму отримують за допомогою складної облікової ставки. Із формули (3.11) та (3.12) отримаємо:

$$\mathbf{S = \frac{P}{(1-d_c)^n}}, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{S = \frac{P}{\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{mn}}}. \tag{3.15}$$

Множник нарощення при використанні складної облікової ставки $\mathbf{d_c}$ дорівнює $\mathbf{(1-d_c)^{-n}}$.

3.6 Безперервне нарощення та дисконтування. Безперервні відсотки

В практичних фінансово-кредитних операціях безперервне нарощення, тобто нарощення за нескінченно малі інтервали часу, використовується дуже рідко. Суттєво більше значення безперервне нарощення має в аналізі складних фінансових проблем, наприклад при обґрунтуванні і виборі інвестиційних фінансових рішень, у фінансовому проектуванні.

При безперервному нарощенні відсотків використовують особливий вид відсоткової ставки – **силу росту**. Сила росту характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона може бути постійною або змінюватись у часі.

Постійна сила росту. Як було показано вище, при дискретному нарахуванні відсотків m раз на рік за номінальною ставкою j_m нарощена сума знаходиться як

$$\mathbf{S = P(1 + j_m/m)^{mn}.}$$

Чим більше m, тим менше проміжок між моментами нарахування відсотків. До межі при $m \to \infty$. Маємо

$$\mathbf{S = P \lim_{m \to \infty} (1 + j_m / m)^{mn} = Pe^{j_m n}},$$

де **e** – основа натуральних логарифмів.

Для того, щоб відрізняти безперервну ставку від дискретної, позначимо силу росту як **δ**. Тепер можна записати

$$\mathbf{S = P}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\delta}\mathbf{n}}. \qquad (3.16)$$

Приклад 3.9

Сума, на яку нараховуються безперервні відсотки, дорівнює 2 тис грн, сила росту 10 %, термін 5 років. Нарощена сума складе

$$\mathbf{S = 2000 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 3297,74} \text{ грн.}$$

Дисконтний множник на основі сили росту (математичне дисконтування) можна отримати, розв’язавши (3.16) відносно **P**:

$$\mathbf{P = Se^{-\delta n}}. \qquad (3.17)$$

Дисконтний множник, як бачимо, дорівнює $\mathbf{e^{-\delta n}}$.

Приклад 3.10

Визначимо сучасну вартість платежу сумою 5000 грн при умові, що дисконтування відбувається з силою росту 12 %, та за дискретною складною обліковою ставкою того ж розміру. Термін боргу 5 років. Отримаємо в гривнях:

$$\mathbf{P = 5000}e^{\mathbf{-0,125}} \mathbf{= 2744,}$$

$$\mathbf{P = 5000(1\text{-}0,12)^5 = 2639.}$$

У фінансових розрахунках в основному застосовуються сім видів відсоткових ставок, а саме:

– прості та складні відсотки, які нараховуються один раз на рік (позначимо їх $\mathbf{i_п}$ та $\mathbf{i_с}$);
– річна ставка $\mathbf{j_m}$, за якою m раз на рік нараховуються $\mathbf{j_m/m}$ складних відсотків;
– постійна ставка безперервних відсотків (сила росту) $\boldsymbol{\delta}$;
– проста та складна облікові ставки $\mathbf{d_п}$ та $\mathbf{d_с}$, при дисконтуванні один раз на рік;
– облікова ставка $\mathbf{f_m}$, при дисконтуванні **m** раз на рік.

Формули для розрахунку нарощеної суми **S** для усіх семи видів відсоткових ставок наведені у таблиці 3.1 (стовпець 2).

В кожній з цих формул **t** позначає кількість років, яка може бути як цілою так і дробовою. Колонка 3 цієї таблиці містить формули дисконтування за різними видами відсоткових ставок.

3.7 Визначення терміну позики і розміру відсоткової ставки

При розробленні умов фінансових операцій часто виникає необхідність розрахувати тривалість позики або рівень відсоткової ставки. Розв’язавши рівняння, які зв’язують **P** та **S**, відносно даних величин можна отримати формули для терміну позики (колонка 4 таблиці 3.1) та відсоткових ставок (колонка 5).

Приклад 3.11

За який термін в роках сума, що дорівнює 75 тис грн, досягне рівня 200 тис грн при нарахуванні відсотків за складною ставкою 15 % раз на рік та щоквартально? За формулами із таблиці 3.1 отримаємо такі терміни:

$$\mathbf{n = \frac{\log(200/75)}{\log 1{,}15} = 7{,}0178} \text{ року,}$$

$$\mathbf{n = \frac{\log(200/75)}{4 \cdot \log\left(1 + \frac{0{,}15}{4}\right)} = 6{,}6607}$$ року.

Приклад 3.12

Ощадний сертифікат, який було куплено за 1000 грн, має викупну ціну 1600 грн через 2,5 роки. Який буде рівень доходності інвестицій у вигляді річної ставки складних відсотків? За формулою із таблиці 3.1 знаходимо

$$\mathbf{i_c = \sqrt[2{,}5]{1{,}6} - 1 = 0{,}20684}$$ або **20,684** %.

4 КОНВЕРСІЯ ПЛАТЕЖІВ. ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ВІДСОТКОВИХ СТАВОК

4.1 Фінансова еквівалентність зобов'язань і конверсія платежів

На практиці доволі часто виникають випадки, коли необхідно змінити одне зобов'язання іншим, наприклад, з більш віддаленим терміном сплати, достроково погасити заборгованість, об'єднати декілька платежів в один (консолідувати платежі) і т. ін. В цих випадках потрібно з'ясувати принцип, на якому повинні базуватись зміни в контрактах. Таким узвичаєним принципом є фінансова еквівалентність зобов'язань, що передбачає незмінність фінансових відносин сторін до та після зміни контракту.

Еквівалентними вважаються такі платежі, які після приведення до одного моменту часу будуть рівні між собою. Приведення здійснюється шляхом дисконтування до більш ранньої дати або навпаки, шляхом нарощення суми платежу, якщо дата відноситься до майбутнього.

Дві суми грошей, що виплачуються в різні моменти часу, вважаються еквівалентними, якщо їх сучасні (або нарощені) розміри, розраховані згідно з однією й тією ж відсотковою ставкою і на один момент часу, однакові. Заміна S_1 на S_2 в цих умовах формально не змінює відносин сторін.

На принципі еквівалентності і грунтується порівняння різнотермінових платежів. Покажемо це на прикладі.

Приклад 4.1

Маємо два зобов'язання. Умови першого: сплатити 4000 грн через 4 місяці; умови другого: сплатити 4500 грн через 8 місяців. Можна вважати їх рівноцінними? Так як платежі короткострокові, то при дисконтуванні на початок терміну використаємо просту ставку, яка дорівнює, припустимо 20 %. Отримаємо

$$\mathbf{P_1 = \frac{4000}{1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}2} = 3750} \text{ грн,} \quad \mathbf{P_2 = \frac{4500}{1+\frac{8}{12}\cdot 0{,}2} = 3970{,}6} \text{ грн.}$$

Як бачимо, зобов'язання не еквівалентні при заданій ставці, у зв'язку з цим не можуть замінити один одного.

Порівняння платежів припускає використання деякої відсоткової ставки і, як наслідок, його результат залежить від вибору розміру ставки.

Загальний метод розв'язання задач зміни умов виплати грошових сум міститься в розробці так званого **рівняння еквівалентності**, в якому сума платежів, що заміняються, приведених до якогось моменту часу, прирівнюється до суми платежів за новим зобов'язанням, приведених до тієї ж дати. Для короткострокових зобов'язань приведення здійснюється звичайно на основі простих ставок, для середньо- та довгострокових – за допомогою складних ставок. В простих випадках часто можна обійтись без спеціальної розробки і розв'язання рівняння еквівалентності.

Одним з найпоширеніших випадків зміни умов є **консолідація** (об'єднання) платежів. Нехай платежі $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$,**…** , $\mathbf{S_m}$ з термінами $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$,… ,$\mathbf{n_m}$ замінюються одним в сумі $\mathbf{S_0}$ з терміном $\mathbf{n_0}$. В такому випадку можливі дві постановки задачі: якщо заданий термін $\mathbf{n_0}$, то знаходять суму $\mathbf{S_0}$, чи навпаки, якщо задана сума консолідованого платежу $\mathbf{S_0}$, то знаходять термін $\mathbf{n_0}$.

Визначення суми консолідованого платежу при застосуванні простих відсоткових ставок:

$$\mathbf{S_0 = \sum_j S_j(1 + t_j \cdot i_n) + \sum_k S_k(1 + t_k \cdot i_n)^{-1}} \tag{4.1}$$

де $\mathbf{S_j}$ – розміри платежів, що об'єднуються, з терміном $\mathbf{n_j < n_0}$;

$\mathbf{S_k}$ – розміри платежів, що об'єднуються, з термінами $\mathbf{n_k > n_0}$;

$\mathbf{t_j = n_0 - n_j}$; $\mathbf{t_k = n_k - n_0}$.

Приклад 4.2

Два платежі 1000 і 500 грн з термінами сплати відповідно 150 і 180 днів об'єднуються в один з терміном 200 днів. Нехай сторони погодилися на використання при конверсії платежів простої ставки, що дорівнює 20 %. Консолідована сума боргу складе

$$\mathbf{S_0 = 1000\left(1 + \frac{200-150}{365} \cdot 0{,}2\right) + 500\left(1 + \frac{200-180}{365} \cdot 0{,}2\right) = 1532{,}87} \text{ грн.}$$

При об'єднанні зобов'язань можна застосувати і облікові ставки. В такому випадку

$$\mathbf{S_0 = \sum_j S_j (1 - t_j \cdot d_n)^{-1} + \sum_k S_k (1 - t_k \cdot d_n)}, \qquad (4.2)$$

де $\mathbf{S_j}$, $\mathbf{S_k}$, $\mathbf{t_j}$ і $\mathbf{t_k}$ мають той самий сенс, що і вище.

Крім того, консолідацію платежів можна здійснити і на основі складних ставок

$$\mathbf{S_0 = \sum_j S_j (1 + i_c)^{t_j} + \sum_k S_k (1 + i_c)^{-t_k}}, \qquad (4.3)$$

Приклад 4.3

Платежі в 1000 і 2000 грн з термінами сплати через 2 і 3 роки об'єднуються в один з терміном 2,5 року. При консолідації використовується складна ставка 20 %. Знайдена сума складе

$\mathbf{S_0 = 10001{,}2^{0,5} + 20001{,}2^{-0,5} = 2921{,}19}$ грн.

Визначення терміну консолідованого платежу при застосуванні простої ставки здійснюється на основі рівності сучасних вартостей консолідованого та суми початкових платежів

$$\mathbf{S_0 (1 + n_0 \cdot i_n)^{-1} = \sum_j S_j (1 + n_j \cdot i_n)^{-1}}. \qquad (4.4)$$

Звідси

$$\mathbf{n_0 = \frac{1}{i_n} \left(\frac{S_0}{\sum_j S_j (1 + n_j \cdot i_n)^{-1}} - 1 \right)}. \qquad (4.5)$$

Розв'язок може бути отриманий при умові, що $\mathbf{S_0 \rangle \sum_j S_j (1 + n_j \cdot i_n)^{-1}}$, інакше кажучи, розмір нового платежу повинен бути більше суми сучасних вартостей початкових платежів.

Приклад 4.4

Суми в розмірі 1000, 2000 і 1500 грн повинні бути сплачені через 50, 80 і 150 днів відповідно. Сторони погодились замінити їх одним платежем в 5000 грн.

Сучасна вартість платежів, які замінюються (позначимо цю величину через **P**) при умові, що $\mathbf{i_n=10\%}$ і **K**=365 днів, складе

$$\mathbf{P = 1000\left(1+\frac{50}{365}\cdot 0{,}1\right)^{-1} + 2000\left(1+\frac{80}{365}\cdot 0{,}1\right)^{-1} +}$$

$$\mathbf{+1500\left(1+\frac{150}{365}\cdot 0{,}1\right)^{-1} = 4384{,}4\ \text{грн}}$$

Відповідно до (4.5) отримаємо

$$\mathbf{n_0 = \frac{1}{0{,}1}\left(\frac{5000}{4384{,}4}-1\right) = 1{,}404}\ \text{року або 512 днів.}$$

Продовжимо приклад. Якщо розмір консолідованого платежу дорівнює 4500 грн, то термін суттєво зменшиться і буде дорівнювати 0,264 року, або 96 днів.

При консолідації платежів на основі складних відсоткових ставок рівняння еквівалентності набуває такого вигляду:

$$\mathbf{S_0(1+i_c)^{-n_0} = \sum_j S_j(1+i_c)^{-n_j}}\ . \tag{4.6}$$

Для полегшення наступних записів приймаємо $\mathbf{Q = \sum_j S_j(1+i_c)^{-n_j}}$, після чого отримаємо

$$\mathbf{n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1+i_c)}}\ . \tag{4.7}$$

Розв’язок існує, якщо виконується умова $\mathbf{S_0>Q}$.

Приклад 4.5

Платежі в 1000 і 2000 грн. з терміном сплати через 2 і 3 роки об'єднуються в один сумою 3000 грн. Визначити термін консолідованого платежу, якщо при консолідації використовується складна ставка 20 %. Для цього спочатку розрахуємо

$$\mathbf{Q = 10001{,}2^{-2} + 20001{,}2^{-3} = 1851{,}8} \text{ грн.}$$

Після цього знаходимо

$$\mathbf{n_0 = \frac{\ln(3000/1851{,}8)}{\ln 1{,}2} = 1{,}646} \text{ року.}$$

4.2 Загальна постановка задачі зміни умов контракту

У випадках, коли при зміні умов виплат розв'язок не можна отримати простим додаванням приведених на деяку дату платежів, розв'язання засновується на принципі еквівалентності платежів до і після зміни умов контракту. Отримаємо такі рівняння еквівалентності в загальному вигляді:

– при застосуванні простих відсотків:

$$\sum_j \frac{S_j}{(1+n_j i_n)} = \sum_k \frac{S_k}{(1+n_k i_n)}, \tag{4.8}$$

– при застосуванні складних відсотків

$$\sum_j \frac{S_j}{(1+i_c)^{n_j}} = \sum_k \frac{S_k}{(1+i_c)^{n_k}}, \tag{4.9}$$

де $\mathbf{S_j}$ і $\mathbf{n_j}$ – параметри платежів, що змінюємо;

$\mathbf{S_k}$ і $\mathbf{n_k}$ – параметри платежів, на які змінюємо.

Конкретний вигляд рівняння еквівалентності визначається змістом контракту, тому методику розроблення рівнянь еквівалентності розглянемо на прикладах.

Приклад 4.6

Дві суми 10000 і 5000 грн повинні бути сплачені 1 листопада та 1 січня наступного року. Сторони погодились переглянути порядок виплат: боржник 1 грудня виплачує 6000 грн. Залишок боргу гаситься 1 березня. Необхідно знайти суму залишку при умові, що перерахунок відбудеться за ставкою простих відсотків, яка дорівнює 20 % (K=365). Графічне зображення умов задачі наведено на рисунку 4.1.

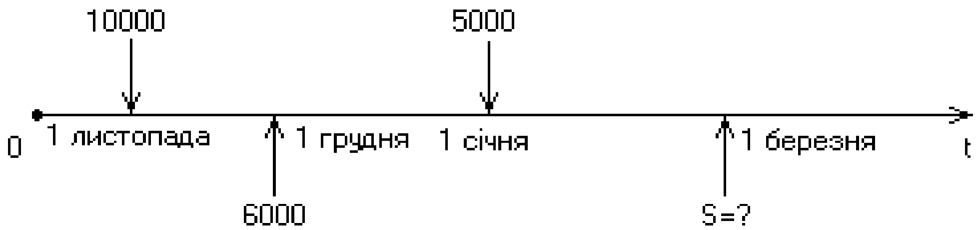

Рисунок 4.1 - Графічне зображення умов задачі

Якщо взяти за базову дату, припустимо, момент виплати 5000 грн, то рівняння еквівалентності буде мати вигляд

$$\mathbf{10000\left(1+\frac{61}{365}\cdot 0{,}2\right)+5000=60000\left(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}2\right)+S\left(1+\frac{59}{365}\cdot 0{,}2\right)^{-1}}.$$

Знаходимо **S** = 9531 грн.

Зміна базових дат приводить до деяких незначних зміщень результатів. Наприклад, при зведенні платежів до 1 березня отримаємо таке рівняння еквівалентності:

$$\mathbf{10000\left(1+\frac{120}{365}\cdot 0{,}2\right)+5000\left(1+\frac{59}{365}\cdot 0{,}2\right)=6000\left(1+\frac{90}{365}\cdot 0{,}2\right)+S}.$$

Звідси **S** = 9523 грн.

Приклад 4.7

Є зобов'язання сплатити 10000 грн через 4 місяці та 7000 грн через 8 місяців після деякої дати. За новим зобов'язанням необхідно виплату провести рівними сумами через 3 та 9 місяців. Зміна умов відбувається з використанням простої ставки, яка дорівнює 10 % (**К** = 360). Якщо за базову дату прийняти початок відліку часу, рівняння еквівалентності записується таким чином:

$$\mathbf{10000\left(1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}1\right)^{-1}+7000\left(1+\frac{8}{12}\cdot 0{,}1\right)^{-1}=S\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}1\right)^{-1}+S\left(1+\frac{9}{12}\cdot 0{,}1\right)^{-1}}$$

Звідси **S** = 8521 грн.

Приклад 4.8

Є зобов'язання сплатити 10000 грн через 5 років. Сторони погодились змінити умови погашення боргу таким чином через два роки виплачується 3000 грн, а борг, що залишився – через 4 роки після першої виплати (див. рисунок 4.2). Необхідно визначити суму останнього платежу. Використовується складна відсоткова ставка 10 %.

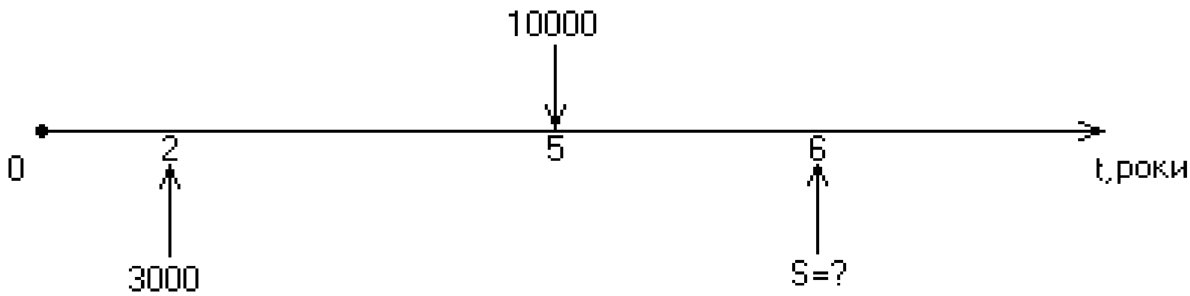

Рисунок 4.2 - Графічне зображення умов задачі

Рівняння еквівалентності складемо на початок відліку часу:

$$\frac{10000}{(1+0{,}1)^5}=\frac{3000}{(1+0{,}1)^2}+\frac{S}{(1+0{,}1)^6}.$$

Аналогічне рівняння можна скласти на будь-яку іншу дату, наприклад, на кінець шостого року. В такому разі

$$10000(1 + 0{,}1) = 3000(1 + 0{,}1)^4 + S.$$

Це рівняння можна отримати з попереднього, помноживши його на $(1+0{,}1)^6$.

При розв'язанні будь-якого з наведених рівнянь відносно **S** знаходимо **S = 6 607,70** грн. Вибір базової дати при використанні складних відсотків не впливає на результати розрахунків по заміні платежів.

4.3 Еквівалентність відсоткових ставок

При укладанні фінансових контрактів кожен учасник угоди бажає отримати для себе найбільш вигідні умови. Умови контракту можуть бути дуже різноманітними, тому треба мати можливість та вміння порівнювати контракти між собою. Угоди можуть передбачати різні види нарахування відсотків, тому для їх порівняння треба розробити засоби приведення різних відсоткових ставок до одного вигляду. Для цього вводиться поняття еквівалентності відсоткових ставок і ефективної відсоткової ставки.

Дві відсоткові ставки називаються **еквівалентними**, якщо застосування їх до однакових сум упродовж однакових проміжків часу дає однакові нарощені суми.

Порівнюючи праві частини будь-яких двох формул розрахунку нарощеної суми **S** для семи видів відсоткових ставок та розв'язуючи ці рівняння відносно однієї з відсоткових ставок, отримаємо умови еквівалентності відповідних пар відсоткових ставок за t років (таблиця 4.1).

Розрахунок еквівалентних ставок застосовується не тільки для порівняння контрактів, а також при зміні умов контрактів.

Аналіз таблиці 4.1 показує, що частина формул розрахунку еквівалентних ставок не залежить від кількості років (**t**) нарахування відсотків, наприклад, формули еквівалентності ставок $\mathbf{i_c}$ та $\mathbf{j_m}$, $\mathbf{i_c}$ та $\boldsymbol{\delta}$, $\mathbf{i_c}$ та $\mathbf{d_c}$, $\mathbf{i_c}$ та $\mathbf{f_m}$, $\mathbf{j_m}$ та $\boldsymbol{\delta}$, $\mathbf{j_m}$ та $\mathbf{d_c}$, $\mathbf{j_m}$ та $\mathbf{f_m}$, $\boldsymbol{\delta}$ та $\mathbf{d_c}$, $\boldsymbol{\delta}$ та $\mathbf{f_m}$, $\mathbf{d_c}$ та $\mathbf{f_m}$.

Приклад 4.9

Вексель обліковується за рік до дати його погашення за складною обліковою ставкою 15 %. Яка доходність операції обліку у вигляді відсоткової ставки? За формулою з таблиці 4.1 знаходимо

$$i_c = \frac{0{,}15}{1 - 0{,}15} = 0{,}17647 \text{ або } 17{,}647\%$$

Інакше кажучи, операція обліку за обліковою ставкою 15 % за рік дає той же доход, що і нарощення за ставкою 17,647 %.

Приклад 4.10

При розробленні умов контракту сторони домовились про те, що доходність кредиту повинна скласти 24 % річних. Яким повинен бути розмір номінальної ставки при нарахуванні відсотків щомісячно, щоквартально?

$$\mathbf{j_{12} = 12(\sqrt[12]{1{,}24} - 1) = 0{,}21705}, \text{ або } \mathbf{21{,}705}\ \%,$$

$$\mathbf{j_4 = 4(\sqrt[4]{1{,}24} - 1) = 0{,}22100}, \text{ або } \mathbf{22{,}100}\ \%.$$

4.4 Ефективна річна відсоткова ставка

Ефективною відсотковою ставкою, що відповідає наведеній відсотковій ставці, називається ставка складних відсотків $\mathbf{i_c}$, що еквівалентна наведеній відсотковій ставці і не залежить від терміну застосування цієї ставки. З таблиці 4.2 випливає, що ефективні відсоткові ставки існують тільки для ставок $\mathbf{j_m}$, $\boldsymbol{\delta}$, $\mathbf{d_c}$, та $\mathbf{f_m}$. Розрахунок ефективної відсоткової ставки застосовується для визначення дійсної доходності фінансової операції. Ця доходність визначається відповідною ефективною відсотковою ставкою.

Приклад 4.11

Банк виплачує за вкладами 10 % річних (складних). Яка реальна доходність вкладів при нарахуванні відсотків а) щомісячно, б) щоквартально, в) по півріччях, г) безперервно?

Треба знайти ефективну відсоткову ставку i_c еквівалентну ставкам а) $\mathbf{j_{12}}$, б) $\mathbf{j_4}$, в) $\mathbf{j_2}$, г) $\boldsymbol{\delta}$. Отримаємо

а) $\mathbf{i_c = (1 + 0{,}1/12)^{12} - 1 = 0{,}1047}$, або **10,47** %;
б) $\mathbf{i_c = (1 + 0{,}1/4)^{4} - 1 = 0{,}1038}$, або **10,38** %;
в) $\mathbf{i_c = (1 + 0{,}1/2)^{2} - 1 = 0{,}1025}$, або **10,25** %;
г) $\mathbf{i_c = e^{0{,}1} - 1 = 0{,}1052}$, або **10,52** %.

5 ПОСТІЙНІ ФІНАНСОВІ РЕНТИ

5.1 Види потоків платежів та їх основні параметри

Сучасні фінансово-банківські операції часто припускають не окремі або разові платежі, а деяку їх послідовність в часі. Наприклад, погашення заборгованості в розстрочку, періодичне надходження доходів від інвестицій, виплата пенсій та ін. Такі послідовності або ряди платежів називають потоком платежів.

Потоки платежів можуть бути регулярними і нерегулярними. В нерегулярному потоці його членами є як додатні (надходження), так і від'ємні (виплати) величини та відповідні платежі можуть здійснюватись через нерівні проміжки часу.

Потік платежів, всі члени якого є тільки додатними або тільки від’ємними величинами та часові інтервали між платежами однакові, називають фінансовою рентою або просто рентою, а іноді ануїтетом, незалежно від призначення чи походження платежів. Наприклад, рентою є послідовність отримання відсотків за облігацією, платежі за споживацьким кредитом, виплати у розстрочку страхових премій та ін.

Рента характеризується такими параметрами:

— член ренти – розмір окремого платежу;
— період ренти – часовий інтервал між двома послідовними виплатами;
— термін ренти – час від початку першого періоду ренти до кінця останнього періоду;
— відсоткова ставка.

Для характеристики окремих видів ренти потрібні додаткові умови та параметри: кількість платежів на рік, спосіб та частота нарахування відсотків.

За кількістю виплат членів ренти впрожовж року ренти розділяються так:

— річні – виплата здійснюється один раз на рік;
— р-термінові – за рік здійснюється **р** виплат.

При аналізі виробничих інвестиційних процесів іноді застосовують ренти з періодами виплат більше року.

За частотою нарахувань відсотків виділяють ренти:

— щорічного нарахування відсотків;
— з нарахуванням відсотків т раз на рік;
— з безперервним нарахуванням відсотків.

Моменти нарахування відсотків не обов'язково збігаються з моментами виплат членів ренти.

За кількістю членів розрізняють ренти:

— з кінцевою кількістю членів ренти, тобто обмежені за терміном;
— безстрокові, або вічні.

На практиці з вічною рентою зустрічаються в деяких довгострокових операціях, коли припускається, що період функціонування системи, що аналізується, або термін операції буде дуже довгим і не оговорюється конкретними датами. Як приклад вічної ренти логічно розглядати виплати відсотків за облігаційними позиками з необмеженим терміном.

Дуже важливою є відмінність рент за моментом виплат платежів у межах періоду. Якщо платежі здійснюються наприкінці періоду, то такі ренти називаються звичайними або постнумерандо, якщо платежі здійснюються на початку періоду, то їх називають пренумерандо. Іноді контракти передбачають платежі або надходження грошей у середині періодів.

5.2 Нарощена сума постійної ренти постнумерандо

У більшій кількості практичних випадків аналіз потоку платежів передбачає розрахунок однієї з двох узагальнюючих характеристик: нарощеної суми або сучасної вартості.

Нарощена сума — сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них до кінця терміну відсотками.

Сучасна вартість потоку платежів — сума всіх його членів. що були дисконтовані на початок терміну ренти або деякий момент часу, що випереджає його.

Конкретне призначення цих характеристик визначається змістом його членів або їх походженням. Нарощена сума може являти собою загальну суму накопиченої заборгованості наприкінці терміну, підсумковий обсяг інвестицій, накопичений грошовий резерв та ін. У свою чергу сучасна вартість характеризує приведені до початку здійснення проекту інвестиційні витрати, підсумковий капіталізований доход або чистий приведений прибуток від реалізації проекту та ін.

Формули для постійних рент постнумерандо різних видів, що відповідають сумі ренти **S**, нарощеній до моменту часу **n**, наведені в таблиці 5.1. Розглянемо виведення цих формул на прикладі річної ренти з нарахуванням відсотків наприкінці року. Будемо вважати, що відбудеться n платежів (наприклад, вкладів до банку), сума кожного з них **дорівнює R**, проміжки часу між платежами однакові — рік, та наприкінці кожного з них (наприкінці року) на всі зроблені до цього платежі нараховуються складні відсотки за ставкою **i**.

Зобразимо цю ренту на осі часу (рисунок 5.1).

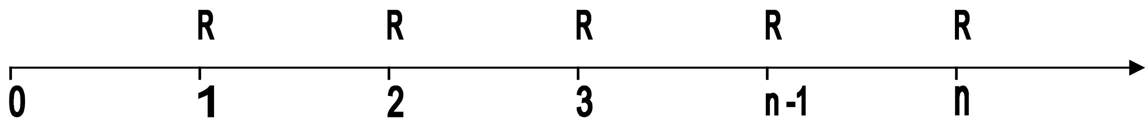

Рисунок 5.1 — Схема постійної ренти постнумерандо

Платіж, що був зроблений в момент n, входить в нарощену суму без змін, тобто в розмірі **R**. Сума, що нарощена на платіж, зроблений у момент (**n – 1**), в момент **n** дорівнює $R \times (1+i)$; сума, нарощена на платіж, зроблений у момент (**n – 2**), в момент n дорівнює $R \times (1+i)^2$ та ін., тобто сума, нарощена на платіж, зроблений у момент 2, в момент **n** дорівнює $R \times (1+i)^{n-2}$, а в момент 1 $R \times (1+i)^{n-1}$. Таким чином, нарощена сума **S** всієї ренти в момент n дорівнює

$$S = R + R \times (1+i) + R \times (1+i)^2 + \ldots + R \times (1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} \qquad (5.1)$$

Додатки цієї суми є членами геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = R$, знаменник $q = 1 + i$, а кількість членів $k = n$. Знайдемо цю суму за формулою суми перших **k** членів геометричної прогресії ($k = n$)

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{R\left[(1+i)^n - 1\right]}{1 + i - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (5.2)$$

Позначимо множник, на який множиться **R**, через $\mathbf{S_{n;i}}$ Індекси **n** та **i** будуть вказувати на тривалість ренти та розмір відсоткової ставки. Цей множник називається коефіцієнтом нарощення ренти. Для цього коефіцієнта розраховані спеціальні таблиці, що містять його значення для різних значень **n** та **i**. Таким чином,

$$\mathbf{S = R \times S_{n;i}} \tag{5.3}$$

Приклад 5.1

Для забезпечення деяких майбутніх витрат створюється фонд. Кошти у фонд надходять у вигляді постійної річної ренти постнумерандо впродовж 5 років. Розмір разового платежу 4000 грн. На внески, що надходять, нараховуються відсотки за ставкою 18,5 % річних. Величина фонду на кінець терміну складе

$$\mathbf{S = 4000\frac{(1+0{,}185)^5 - 1}{0{,}185} = 28900} \text{ грн.}$$

Приклад 5.2

Трохи змінимо умови прикладу 5.1. Нехай тепер відсотки нараховуються щоквартально, а не раз на рік. Маємо

$$\mathbf{S = 4000\frac{\left(1+{}^{0{,}185}\!/_{4}\right)^{4\times 5} - 1}{(1+{}^{0{,}185}\!/_{4})^4 - 1} = 29663} \text{ грн.}$$

Як бачимо, перехід від річного нарахування відсотків до щоквартального збільшив нарощену суму.

Приклад 5.3

Повернемося до умов прикладу 5.1. Припустимо, платежі виплачуються щоквартально, $\mathbf{{}^{R}\!/_{P} = 1000}$ грн, загальна кількість платежів дорівнює 20. Нарощена сума складе

$$S=\frac{4000}{4}\times\frac{1{,}185^5-1}{\left(1{,}185^{1/4}-1\right)}=30834 \text{ грн.}$$

5.3 Сучасна вартість постійної ренти постнумерандо

Сучасна вартість (цінність) потоку платежів еквівалентна у фінансовому значенні сумі сучасних вартостей всіх платежів, які охоплює потік. Методи розрахунку сучасних вартостей фінансових рент розглянемо на прикладі найпростішого випадку — річної ренти постнумерандо з умовами: її член дорівнює **R**, термін ренти — **n**, щорічне нарахування відсотків. Нарощена сума цієї фінансової ренти дорівнює **S**. Сучасна вартість і ренти дорівнює сучасній вартості її нарощеної суми, отже, сучасна вартість ренти дорівнює

$$A=S\times(1+i)^{-n}=R\times S_{n;i}\times(1+i)^{-n}=R\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)^{-n}=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (5.4)$$

Введемо функцію

$$a_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (5.5)$$

Тоді сучасна вартість ренти, що складається з **n** періодичних платежів по **R** грн кожен, на які нараховуються складні відсотки за ставкою і за кожен період, задається формулою

$$A=R\times a_{n;i}. \qquad (5.6)$$

Функція $a_{n;i}$ затабульована для різних значень **n** та **i**. Формули розрахунку сучасної вартості різних видів постійних фінансових рент постнумерандо з кінцевою кількістю членів наведені в таблиці 5.2.

Приклад 5.4

Річна рента постнумерандо характеризується параметрами: **R** = 4000 грн. При дисконтуванні за складною ставкою відсотка, яка дорівнює 18,5 % річних, отримаємо сучасну вартість цієї ренти

$$\mathbf{A = 4000\frac{1-1{,}1855^{-5}}{0{,}185} = 12368} \text{ грн.}$$

Таким чином, всі майбутні платежі оцінюються в поточний момент сумою 12368 грн. Інакше кажучи, 12368, розміщені під 18,5 % річних, забезпечують щорічні виплати по 4000 грн впродовж 5 років.

Приклад 5.5

Для умов прикладу 5.6 при **δ** = 18,5% знаходимо сучасну вартість ренти

$$\mathbf{A = 4000\cdot\frac{1-e^{-0{,}185\times 5}}{e^{0{,}185}-1} = 11878} \text{ грн.}$$

5.4 Вічна рента

Вічною називають ренту, яка має нескінченну кількість членів. Очевидно, що нарощена сума вічної ренти, кожен з членів якої дорівнює додатному числу **R**, нескінченно велика і вести мову про її суму не має сенсу. Інша справа з сучасною цінністю вічної ренти. Сучасною цінністю $\mathbf{A}_\infty$ вічної ренти є сума, яку треба вкласти в початковий момент часу під складні відсотки за вказаною ставкою для того, щоб надалі кожен рік (або інший період) можна було б отримувати з цього вкладу суму **R**. Сучасну вартість вічної ренти можна визначити як межу сучасної вартості скінченої ренти при нескінченому збільшенні кількості членів ренти. При знаходженні таких меж використовується той факт, що для будь-якого **d > 1** є справедливим

$$\lim_{n\to\infty} d^{-n} = 0. \qquad (5.7)$$

Виведення формул розрахунку сучасної вартості вічних рент різних видів розглянемо на прикладі річної ренти з нарахуванням відсотків наприкінці року. Сучасна вартість скінченої ренти цього виду визначається формулою

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (5.8)$$

Знайдемо межу виразу, наведеного в цій формулі при нескінченому збільшенні **n**

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty}\left(R \times a_{n;i}\right) = R\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}. \qquad (5.9)$$

Отже, сучасна вартість вічної ренти в наведеному прикладі дорівнює

$$A_\infty = \frac{R}{i}. \qquad (5.10)$$

Повний перелік формул розрахунку сучасної вартості вічних рент різного виду наведений в таблиці 5.3

Приклад 5.6

Треба викупити вічну ренту, член якої дорівнює 5000 грн та виплачується в кінці кожного півріччя. Капіталізована вартість такої ренти при умові, що для її визначення використана річна ставка 25 %, складе

$$A_\infty = \frac{10000}{2\left(1{,}25^{1/2}-1\right)} = 42361 \text{ грн.}$$

5.5 Ренти з періодом виплати платежів більше року

При аналізі виробничих інвестиційних проектів іноді зустрічаються з рентами, члени яких виплачуються з інтервалами більше року.

Приклад 5.7

Порівнюються два варіанти будівництва деякого об’єкта. Перший потребує разових вкладень в сумі 60000 грн і капітального ремонту вартістю 8000 грн кожні 5 років. Для другого витрати на створення дорівнюють 70000 грн, на капітальний ремонт 4000 грн кожні 10 років. Часовий горизонт в розрахунку – 50 років.

Капіталізована сума витрат при умові, що **i = 10%**, оцінюється для кожного варіанта в таких розмірах:

$$\mathbf{A_1 = 60000 + 8000\frac{a_{50;10}}{s_{5;10}} = 73000} \text{ грн},$$

$$\mathbf{A_1 = 70000 + 4000\frac{a_{50;10}}{s_{5;10}} = 72500} \text{ грн}.$$

Таким чином, у фінансовому відношенні варіанти майже рівноцінні при прийнятному рівні відсоткової ставки. Чим ставка вище, тим менше впливають на результат витрати на ремонт. Так, якщо порівняння проводиться при ставці 20 %, то отримаємо $\mathbf{A_1}$ = 63900 грн; $\mathbf{A_2}$ = 70500 грн.

6 ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ПОСТІЙНИХ РЕНТ ПОСТНУМЕРАНДО

Постійна рента характеризується набором основних параметрів — **R**, **n**, **i** та додатковими параметрами **p**, **m**. Однак при укладенні контрактів і розробленні умов фінансових операцій виникають випадки, коли задається одна з двох узагальнюючих характеристик — **S** або **A**, і необхідно розрахувати значення невідомого параметра.

6.1 Визначення величини члена ренти.

Початкові умови: задається **S** або **A** та набір параметрів, крім **R**. Наприклад, за обумовлену кількість років необхідно створити фонд в сумі **S′** шляхом систематичних постійних внесків. Якщо рента річна, постнумерандо, з щорічним нарахуванням відсотків, то використовуючи (5.3), отримаємо

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}. \tag{6.1}$$

Припустимо тепер, що умовами договору задана сучасна вартість ренти. Якщо рента річна (**m** = 1), то із (5.6) випливає

$$R = \frac{A}{a_{n;i}} \tag{6.2}$$

Таким чином, якщо вирішується задача накопичити за визначений термін деяку суму **S′**, то використовують формулу (6.1), якщо ж мова іде про погашення заборгованості в сумі **A**, то треба використати формулу (6.2).

Аналогічним чином можна визначити **R** і для інших видів фінансової ренти. Формули розрахунку значення **R** по заданими значеннями **S′** або **A** для інших видів фінансових рент зведені в таблиці 6.1, 6.2.

Приклад 6.1

Борг в 3000 грн треба сплатити рівними терміновими виплатами за 5 років, роблячи платежі наприкінці кожного року. За борг сплачуються відсотки за річною ставкою **i** = 5 %.

За умовами задачі **n** = 5; **A** = 30000, **i** = 0,05. Розрахуємо термінову виплату за формулою (6.2)

$$R = \frac{A}{a_{5;5\%}} = \frac{30000}{4{,}329476671} = 6929{,}24 \text{ грн.}$$

6.2 Розрахунок терміну ренти

При розробленні умов контрактів іноді виникає необхідність визначити термін ренти і, відповідно, кількість членів ренти. Розв'язуючи формули розрахунків **S′** або **A** відносно n, можна отримати значення величини **n**. Так, для річної ренти постнумерандо з щорічним нарахуванням відсотків знаходимо

$$\mathbf{n} = \frac{\ln\left(\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{R}}\mathbf{i} + 1\right)}{\ln(1+\mathbf{i})}; \qquad \mathbf{n} = \frac{\ln\left(1 - \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{R}}\mathbf{i}\right)^{-1}}{\ln(1+\mathbf{i})}.$$

Аналогічним чином визначимо терміни і для інших видів рент. Перелік формул, отриманих для різних рент постнумерандо, подано в таблицях 6.1 та 6.2.

При розрахунку терміну ренти необхідно враховувати такі моменти:

а) розрахункові значення терміну будуть найчастіше дробовими. В цих випадках для річної ренти як n часто зручно прийняти найближче ціле число років. У **p**-термінової ренти результат округляється до найближчого цілого числа періодів **np**. Наприклад, припустимо, що для щоквартальної ренти отримано **n** = 6,28 років, звідси **np** = 25,12 кварталів. Округляємо до 25, в цьому разі **n** = 6,25 років;

б) якщо округлення розрахункового терміну виконується до меншого цілого числа, то нарощена сума або сучасна вартість ренти з таким терміном буде менше заданих розмірів. Виникає необхідність у відповідній компенсації. Наприклад, якщо мова йде про погашення заборгованості шляхом виплати постійної ренти, то компенсація може бути здійснена відповідним платежем на початку або наприкінці терміну або за допомогою підвищення суми члена ренти.

Приклад 6.2

Який потрібен термін, щоб накопичити 10000 грн при умові, що щомісячно вкладається по 100 грн та на накопичення нараховуються відсотки за ставкою 25 % річних?

Маємо **R** = 1200, **i** = 25%. За формулою з таблиці 6.1 знаходимо

$$\mathbf{n} = \frac{\ln\left[\frac{10000}{1200}12\left(1{,}25^{1/2}-1\right)+1\right]}{\ln 1{,}25} = 4{,}7356 \text{ року.}$$

Якщо термін округляється до 5 років, то необхідно трохи зменшити розмір члена ренти, тобто знайти член ренти для **n** = 5. В цьому разі щомісячний внесок повинен скласти 91,48 грн.

6.3 Визначення рівня відсоткової ставки

Необхідність у визначенні величини відсоткової ставки виникає кожен раз, коли мова йде про визначення ефективності (доходності) відповідної фінансово-банківської або комерційної операції. Розрахунок відсоткової ставки за іншими параметрами ренти не такий простий, як може здатись на перший погляд. В найпростішому випадку задача ставиться таким чином:

розв'язати рівняння $S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ або $A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ відносно **i**.

Нескладно переконатися в тому, що алгебраїчного розв′язання немає. Для отримання величини **i** можна використати лінійну інтерполяцію. При цьому за заданими **R** і **S** або **R** і **A** знаходять значення коефіцієнтів нарощення або приведення ренти

$$S_{n;i} = S/R; \qquad a_{n;i} = A/R.$$

Для оцінки і використовується така інтерполяційна формула

$$i = i_H + \frac{a - a_H}{a_B - a_H}(i_B - i_H)$$

де $a_н$ і $a_в$ — табличні значення коефіцієнтів нарощення або приведення рент для верхнього та нижнього рівнів ставок ($i_н$, $i_в$);

а — значення коефіцієнта нарощення або приведення, для якого визначається рівень ставки.

Приклад 6.3

Припустимо, що шляхом щорічних внесків постнумерандо по 1000 грн упродовж 7 років створюється фонд в розмірі 10000 грн. Якою повинна бути відсоткова ставка?

Визначимо відповідний коефіцієнт нарощення $\mathbf{S_{7;i}} = \mathbf{10000/1000 = 10}$. За таблицею функції $\mathbf{S_{n;i}}$ знайдемо значення $\mathbf{S_{n;i}}$, більше та менше 10, та рівні відповідних відсоткових ставок:

$$\mathbf{a_в = S_{7;12} = 10{,}08901}, \quad \mathbf{a_н = S_{7;11} = 9{,}78327}.$$

Звідси

$$\mathbf{i = 0{,}11 + \frac{10 - 9{,}78327}{10{,}08901 - 9{,}78327}(0{,}12 - 0{,}11) = 0{,}11709}, \text{ або } \mathbf{11{,}709}\ \%.$$

Перевірка: за формулою знаходимо $\mathbf{S_{7;11,709} = 9{,}999}$.

Таким чином, знайдене значення ставки забезпечує виконання необхідних умов майже точно. Якщо точність відповіді не задовольняє, то слід змінити інтервал між ставками $\mathbf{i_н}$ та $\mathbf{i_в}$.

Оцінки рівня відсоткової ставки декілька відрізняються від точних значень цієї величини, причому, якщо за основу буде взятий коефіцієнт приведення, то оцінка буде завищеною. У свою чергу ставка **i,** розрахована за коефіцієнтом нарощення, буде менше точного значення. Чим менше діапазон $\mathbf{i_н}$ та $\mathbf{i_в}$**,** тим точніше оцінка відсоткової ставки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1 Кузнецов, Б.Т. Финансовая математика [Текст]: учеб. пособие для вузов / Б.Т. Кузнецов. – М.: Изд. "Экзамен", 2005. – 128 с.

2 Машина, Н.І. Вищі фінансові обчислення

[Текст]: навч. посібник / Н.І. Машина. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 208 с.

3 Малыхин, В.И. Финансовая математика [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.И. Малыхин. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 2-е изд., перераб. и доп. – 237 с.

4 Тижненко, Л.О. Фінансова математика [Текст]: конспект лекцій для студентів напряму підготовки "Фінанси" / Л.О. Тижненко, В.О. Кожевніков. – Харків: Вид. ХНЕУ, 2008. – 116 с.

5 Четыркин, Е.М. Финансовая математика [Текст]: учебник / Е.М. Четыркин. – М.: Дело, 2004. – 4-е изд. – 400 с.

Додаткова

6 Бланк, И.А. Основы финансового менеджмента [Текст]: / И.А. Бланк. – К.: НИКА-ЦЕНТР, 2007. – Т. 1. – 592 с.

7 Бланк, И.А. Основы финансового менеджмента [Текст]: / И.А. Бланк. – К.: НИКА-ЦЕНТР, 2007. – Т. 2. – 512 с.

8 Бочаров, П.П. Финансовая математика [Текст]: учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. – М.: Гардарики, 2002. – 624 с.

9 Власова, Н.О. Фінанси підприємств [Текст]: навч. посібник / Н.О. Власова, О.А. Круглова, Л.І. Безгінова. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 271 с.

10 Капитоненко, В.В. Задачи и тесты по финансовой математике [Текст]: учебн. пособие / В.В. Капитоненко. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 256 с.

11 Кирлица В.П. Финансовая математика: рук-во к решению задач [Текст]: учеб. пособие / В.П. Кирлица. – Мн.: Тетра Системс, 2005. – 192 с.

12 Ковалев, В.В. Курс финансовых вычислений [Текст]: / В.В. Ковалев, В.А. Уланов. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 328 с.

13 Ковалев В.В. Финансовый менеджмент [Текст]: теория и практика / В.В. Ковалев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Проспект, 2011. – 880 с.

14 Крамаренко, Г.О. Фінансовий менеджмент [Текст]:

підручник / Г.О. Крамаренко, О.Є. Чорна. – 2-ге вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 520 с.

15 Станиславчик, Е.Н. Основы финансового менеджмента [Текст]: / Е.Н. Станиславчик – М.: "Ось-89", 2001. – 128 с.

16 Медведев, Г.А. Навч. курс финансовой математики [Текст]: учеб. пособие / Г.А. Медведев. – Мн.: ТОО "Остожье", 2003. – 267 с.

17 Мелкумов, Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика [Текст]: / Я.С. Мелкумов. – 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2010. – 416 с.

18 Мицкевич, А. Финансовая математика [Текст]: / А. Мицкевич. – М.: ОЛМА-ПРЕСС Инвест: Институт Экономических стратегий, 2003. – 128 с.

19 Морошкин, В.А. Практикум по финансовому менеджменту [Текст]: технология финансовых расчетов с процентами: учеб. пособие / В.А. Морошкин, А.Л. Ломакин. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 112 с.

20 Ченг Ф. Ли. Финансы корпорации: теория, методы и практика [Текст]: / Ф. Ли Ченг, Джозеф И. Финнерти; пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 686 с.

Ресурси мережі Internet

21 Агапов С. Вычисление эффективной процентной ставки [Электронный ресурс] / С. Агапов. – Режим доступа: www.finmath.ru.

22 Латишева, І.Л. Персональна навчальна система з дисципліни "Фінансова математика" / І.Л. Латишева, І.І. Гринащук, В.С. Хвостенко [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://ikt.ksue.edu.ua/.

Таблиця 3.1 — Відсоткові ставки

Вид відсоткової ставки	Формула нарощення	Формула дисконтування	Термін фінансової операції	Відсоткова ставка
i_n – прості відсотки, які нараховуються один раз на рік	$S = P(1 + t \cdot i_п)$	$P = \frac{S}{(1 + t \cdot i_п)}$	$t = \frac{S/P - 1}{i_п}$	$i_п = \frac{S - P}{P \cdot i}$
i_c – складні відсотки, які нараховуються один раз на рік	$S = P(1 + i_c)^t$	$P = \frac{S}{(1 + i_c)^t}$	$t = \frac{\log(S/P)}{\log(1 + i_c)}$	$i_c = \sqrt[t]{S/P} - 1$
j_m – річна ставка, за якою m разів на рік нараховується **j_m/m** складних відсотків	$S = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm}$	$P = \frac{S}{\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm}}$	$t = \frac{\log(S/P)}{m \cdot \log\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)}$	$j_m = m\left(\sqrt[mt]{S/P} - 1\right)$
δ – ставка безперервних відсотків(сила росту)	$S = Pe^{\delta t}$	$P = \frac{S}{e^{\delta t}}$	$t = \frac{\ln(S/P)}{\delta}$	$\delta = \frac{\ln(S/P)}{t}$
$d_п$ – проста облікова ставка	$S = \frac{P}{(1 - t \cdot d_п)}$	$P = S(1 - t \cdot d_п)$	$t = \frac{1 - P/S}{d_п}$	$d_n = \frac{S - P}{S \cdot t}$
d_c – складна облікова ставка	$S = \frac{P}{(1 - d_c)^t}$	$P = S(1 - d_c)^t$	$t = \frac{\log(P/S)}{\log(1 - d_c)}$	$d_c = 1 - \sqrt[t]{P/S}$
f_m – облікова ставка при дисконтуванні **m** разів на рік	$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{tm}}$	$P = S\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{tm}$	$t = \frac{\log(P/S)}{m \cdot \log\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)}$	$f_m = m\left(1 - \sqrt[mt]{P/S}\right)$

Таблиця 4.1 – Рівняння еквівалентності відсоткових ставок

	$S=P(1+t\times i_n)$	$S=P(1+i_c)^t$	$S=P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{tm}$	$S=P\ell^{\delta t}$	$S=\frac{P}{1-t\times d_n}$	$S=\frac{P}{(1-d_c)^t}$	$S=\frac{P}{\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{tm}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
$S=P(1+t\times i_n)$		$i_n=\frac{(1+i_c)^t-1}{t}$	$i_n=\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{tm}-1}{t}$	$i_n=\frac{\ell^{\delta t}-1}{t}$	$i_n=\frac{d_n}{1-t\cdot dn}$	$i_n=\frac{(1-d_c)^{-t}-1}{t}$	$i_n=\frac{\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{-tm}-1}{t}$
$S=P(1+i_c)^t$	$i_c=\sqrt[t]{1+ti_n}-1$		$i_c=\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m-1$	$i_c=\ell^{\delta}-1$	$i_c=\frac{1}{\sqrt[t]{1-td_n}}-1$	$i_c=\frac{d_c}{1-d_c}$	$i_c=\frac{1}{\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^m}-1$
$S=P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{tm}$	$j_m=m\left(\sqrt[tm]{1+ti_n}-1\right)$	$j_m=m\left(\sqrt[m]{1+i_c}-1\right)$		$j_m=m\left(\sqrt[m]{\ell^{\delta}}-1\right)$	$j_m=m\left(\frac{1}{\sqrt[tm]{1-td_n}}-1\right)$	$j_m=m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{1-d_c}}-1\right)$	$j_m=\frac{f_m}{1-\frac{f_m}{m}}$
$S=P\ell^{\delta t}$	$\delta=\frac{\ln(1+ti_n)}{t}$	$\delta=\ln(1+i_c)$	$\delta=m\cdot\ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right)$		$\delta=-\frac{\ln(1-td_n)}{t}$	$\delta=-\ln(1-d_c)$	$\delta=-m\cdot\ln\left(1-\frac{f_m}{m}\right)$

Продовження таблиці 4.1

1	2	3	4	5	6	7	8
$S=\frac{P}{1-td_n}$	$d_n=\frac{i_n}{1+ti_n}$	$d_n=\frac{1-(1+i_c)^{-t}}{t}$	$d_n=\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-tm}}{t}$	$d_n=\frac{1-\ell^{-\delta t}}{t}$		$d_n=\frac{1-(1-d_c)^t}{t}$	$d_n=\frac{1-\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{tm}}{t}$
$S=\frac{P}{(1-d_c)^t}$	$d_c=1-\frac{1}{\sqrt[t]{1+ti_n}}$	$d_c=\frac{i_c}{1+i_c}$	$d_c=1-\frac{1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m}$	$d_c=1-\ell^{-\delta}$	$d_c=1-\sqrt[t]{1-td_n}$		$d_c=1-\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^m$
$S=\frac{P}{\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{tm}}$	$f_m=m\left(1-\frac{1}{\sqrt[tm]{1+ti_n}}\right)$	$f_m=m\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{1+i_c}}\right)$	$f_m=\frac{j_m}{1+\frac{j_m}{m}}$	$f_m=m\left(1-\sqrt[m]{\ell^{-\delta}}\right)$	$f_m=m\left(1-\sqrt[tm]{1-td_n}\right)$	$f_m=m\left(1-\sqrt[m]{1-d_c}\right)$	

Таблиця 5.1 – Нарощені суми постійних рент постнумерандо

Вид рент за нарахуванням відсотків	Вид рент за терміном виплати платежів	Нарощена сума S всієї ренти у момент n	Геометрична прогресія			Нарощена сума		Функція
			b_i	q	K			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Фінансові ренти з нарахуванням відсотків наприкінці року	річна рента	$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \\ + \ldots + R(1+i)^{n-1}$	R	$1+i$	n	$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$S = R \cdot S_{n:i}$	$S_{n:i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	P – термінова рента	$S = \frac{R}{P} + \frac{R}{P}(1+i)^{\frac{1}{P}} + \frac{R}{P}(1+i)^{\frac{2}{P}} + \\ + \ldots + \frac{R}{P}(1+i)^{\frac{np-1}{P}}$	$\frac{R}{P}$	$(1+i)^{\frac{1}{P}}$	np	$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - \right.}$	$S = R \cdot S_{n;i}^{(p)}$ $S_{n;i}^{(p)} = S_{n;i} \cdot K_{p;i}$	$S_{n;i}^{(P)} = \frac{(1+i)^n -}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}\right.}$
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r + R_r(1+i)^r + R_r(1+i)^{2r} + \\ + \ldots + R_r(1+i)^{n-r}$	R_r	$(1+i)^r$	$\frac{n}{r}$	$S = R_r\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}$	$S = R_r\frac{S_{n;i}}{S_{r;i}}$	$S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	річна рента	$S = R + R(1+\frac{j_m}{m})^m + R(1+\frac{j_m}{m})^{2m} + \\ + \ldots + R(1+\frac{j_m}{m})^{(n-1)m}$	R	$\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m$	n	$S = R\frac{(1+\frac{j_m}{m})^{mn} -}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m -}$	$S = R\frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{m;\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n:i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Продовження таблиці 5.1

1	2	3	4	5	**6**	7	8	9
Фінансові ренти з нарахуванням відсотків m разів на рік	Р – термі-нова рента	$S=\frac{R}{P}+\frac{R}{P}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{P}}+\frac{R}{P}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{2m}{P}}+\ldots+\frac{R}{P}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m\left(n-\frac{1}{p}\right)}$	$\frac{R}{P}$	$\left(1+\frac{j_m}{m}\right)$	**np**	$S=\frac{R}{P}\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-}$	$S=\frac{R}{P}\cdot\frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n;i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$

	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr} + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{2m} + \ldots + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m(n-r)}$	R_r	$\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{n}$	$\frac{n}{r}$	$S = R_r \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn} -}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr} -}$	$S = R_r \frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{mr;\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
відсотківФінансові ренти з безперервним нарахуванням	річна рента	$S = R + Re^{\delta} + Re^{2\delta} + \ldots + Re^{(n-1)\delta}$	R	e^{δ}	n	$S = R\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}$		
	Р - термінова рента	$S = \frac{R}{P} + \frac{R}{P}e^{\frac{\delta}{P}} + \frac{R}{P}e^{\frac{2\delta}{P}} + \ldots + \frac{R}{P}e^{\frac{(np-1)\delta}{P}}$	$\frac{R}{P}$	$e^{\frac{\delta}{P}}$	np	$S = \frac{R}{P}\frac{\left[e^{\delta n} - 1\right]}{e^{\frac{\delta}{P}} - 1}$		
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r + R_r e^{\delta r} + R_r e^{2\delta r} + \ldots + R_r e^{(n-r)\delta}$	R_r	$e^{\delta r}$	$\frac{n}{r}$	$S = R_r \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}$		

Таблиця 5.2 – Формули розрахунку сучасної вартості різних видів постійних фінансових рент постнумерандо

Вид рент за нарахуванням відсотків	Вид рент за терміном виплати платежів	Нарощена сума	Сучасна вартість фінансової ренти		Функція
1	2	3	4	5	6
	річна рента	$S = R\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$	$A = R\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)^{-n} = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$A = R \cdot a_{n;i}$	$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
	Р - терміновa рента	$S = R\dfrac{(1+i)^{n}-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$	$A = \dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{(1+i)^{n}-1}{\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right]}(1+i)^{-n} = \dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right]}$	$A = R \cdot a_{n;i}^{(p)}$ $a_{n;i}^{(p)} = a_{n;i} \cdot K_{p;i}$	$a_{n;i}^{(P)} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right]}$ $K_{n;i} = \dfrac{i}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right]}$

Фінансові ренти з нарахуванням відсотків наприкінці року	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}$	$A = R_r \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}(1+i)^{-n} = R_r \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1}$	$A = R_r \frac{a_{n;i}}{S_{r;i}}$	$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Продовження таблиці 5.2

1	2	3	4	5	6

рікФінансові ренти з нарахуванням відсотків m разів на	річна рента	$S=R\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}$	$A=R\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}=R\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-m}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}$	$A=R\frac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{m;\frac{j_m}{m}}}$	$a_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $S_{n;i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$
	P – терміно-ва рента	$S=\frac{R}{P}\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$	$A=\frac{R}{P}\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}=\frac{R}{P}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$	$A=\frac{R}{P}\cdot\frac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}}$	$a_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $S_{n;i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$
	окремий випадок - P – термі-нової ренти (p = m)	$S=\frac{R}{m}S_{mn;\frac{i_m}{m}}$		$A=R\frac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{m}$	$a_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
	рента з періодом більше року (r>1)	$S=R_r\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}$	$A=R_r\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}=R_r\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}}$	$A=R_r\frac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{mr;\frac{j_m}{m}}}$	$a_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $S_{n;i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$

Закінчення таблиці 5.2

1	2	3	4	5	6

відсотківФінансові ренти з безперервним нарахуванням	річна рента	$S = R\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}$	$A = R\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}e^{-\delta n} = R\frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1}$		
	P – терміно-ва рента	$S = \frac{R}{P}\frac{\left[e^{\delta n} - 1\right]}{e^{\frac{\delta}{P}} - 1}$	$A = \frac{R}{P} \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}e^{-\delta n} = \frac{R}{P} \cdot \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}$		
	рента з періодом більше року (r>1)	$S = R_r\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}$	$A = R_r\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}e^{-\delta n} = R_r\frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta r} - 1}$		

Таблиця 5.3 – Формули розрахунку сучасної вартості постійних вічних рент постнумерандо

Вид рент за нараху-ванням відсот-ків	Вид рент за терміном виплати платежів	Сучасна вартість кінцевої ренти відповідного виду	Сучасна вартість вічної ренти		Функція
1	2	3	4	5	6
	річна рента	$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$A_{\infty} = R\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}$	$A_{\infty} = \frac{R}{i}$	
	Р - термінова рента	$A = \frac{R}{P}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$	$A_{\infty} = R\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]} = \frac{R}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$	$A_{\infty} = R\frac{K_{p;i}}{i}$	$K_{p;i} = \frac{i}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right]}$

Вічні ренти з нарахуванням відсотків наприкінці	рента з періодом більше року (r>1)	$A = R_r \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1}$	$A_\infty = R_r \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{(1+i)^r - 1} = \frac{R_r}{(1+i)^r - 1}$	$A_\infty = \frac{R_r}{i \cdot S_{r;i}}$	$S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	річна рента	$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m - 1}$	$A_\infty = R \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m - 1} = \frac{R}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m - 1}$	$A_\infty = \frac{R}{\frac{j_m}{m} \times S_{m;\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n:i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Продовження таблиці 5.3

1	2	3	4	5	6
Вічні ренти з нарахуванням відсотків m разів	Р - термінова рента	$A=\frac{R}{P}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$	$A_\infty=\frac{R}{P}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}=\frac{R}{P}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-}$ в окремому випадку, коли **m = p**	$A_\infty=\frac{R}{P\times\frac{j_m}{m}\times S_{\frac{m}{p}}}$ $A_\infty=\frac{R}{j_m}$	$S_{n;i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$
	рента з періодом більше року (r>1)	$A=R_r\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}$	$A_\infty=R_r\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}=\frac{R_r}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}$	$A_\infty=\frac{R_r}{\frac{j_m}{m}\times S_{mr;\frac{j_m}{m}}}$	$S_{n;i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$
	річна рента	$A=R\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$	$A_\infty=R\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=\frac{R}{e^{\delta}-1}$	$A_\infty=\frac{R}{e^{\delta}-1}$	
	Р - термінова рента	$A=\frac{R}{P}\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}$	$A_\infty=R\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\delta n}}{P\left(e^{\frac{\delta}{P}}-1\right)}=\frac{R}{P\left(e^{\frac{\delta}{P}}-1\right)}$	$A_\infty=\frac{R}{P\left(e^{\frac{\delta}{P}}-1\right)}$	

Вічні ренти з безперервним нарахуванням	рента з періодом більше року (r>1)	$A = R_r \dfrac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta r}-1}$	$A_\infty = R_r \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta r}-1} = \dfrac{R_r}{e^{\delta r}-1}$	$A_\infty = \dfrac{R_r}{e^{\delta r}-1}$	

Таблиця 6.1 – Параметри фінансових рент постнумерандо, розраховані за значенням нарощеної суми

Вид рент за нарахуванням відсотків	Вид рент за терміном виплати платежів	Нарощена сума	Член ренти **R**	Термін ренти **n**
1	2	3	4	5
	річна рента	$S = R\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ $S = R \cdot S_{n;i}$	$R = \dfrac{S}{S_{n;i}}$	$n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}\cdot i+1\right)}{\ln(1+i)}$

Фінансові ренти з нарахуванням відсотків наприкінці року	Р-термінова рента	$S = \frac{R\left((1+i)^n - 1\right)}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]}$ $S = R \cdot S_{n;i}^{(p)}$	$R = \frac{S}{S_{n;i}^{(p)}}$	$n = \frac{\ln\left\{\frac{S}{R} p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right] + 1\right\}}{\ln(1+i)}$
	рента з періодом більше року **(r>1)**	$S = R_r \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}$ $S = R_r \cdot S_{n;i} / S_{r_{j;i}}$	$R_r = \frac{S \cdot S_{r;i}}{S_{n;i}}$	$n = \frac{\ln\left\{\frac{S}{R_r}\left[(1+i)^r - 1\right] + 1\right\}}{\ln(1+i)}$

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4	5

Фінансові ренти з нарахуванням відсотків **m** разів на рік	***річна рента***	$S = R\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}$ $S = R\cdot S_{mn;\frac{j_m}{m}} \big/ S_{m;\frac{j_m}{m}}$	$R = \dfrac{S\cdot S_{m;\frac{j_m}{m}}}{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}$	$n = \dfrac{\ln\left\{\frac{S}{R}\left[\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1\right]+1\right\}}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right)}$
	Р-термінова рента	$S = \dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$ $S = \dfrac{R}{P}\cdot S_{mn;\frac{j_m}{m}} \big/ S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}$	$R = \dfrac{S\cdot P\cdot S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}}{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}$	$n = \dfrac{\ln\left\{\frac{S}{R}P\left[\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]+1\right\}}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right)}$
	окремий випадок р-термінової ренти (**p=m**)	$S = \dfrac{R}{m}\cdot S_{mn;\frac{j_m}{m}}$	$R = \dfrac{S\cdot m}{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}$	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}j_m+1\right)}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right)}$

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4	5

	рента з періодом більше року (**r>1**)	$S = R_r \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}$ $S = R_r \cdot S_{mn;\frac{j_m}{m}} \Big/ S_{mr;\frac{j_m}{m}}$	$R_r = \dfrac{S \cdot S_{mr;\frac{j_m}{m}}}{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}$	$n = \dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R_r}\left[\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^{mr}-1\right]+1\right\}}{m \cdot \ln\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)}$
	річна рента	$S = R\dfrac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}$	$R = S\dfrac{e^{\delta}-1}{e^{\delta n}-1}$	$n = \dfrac{\ln\left[\dfrac{S}{R}\left(e^{\delta}-1\right)+1\right]}{\delta}$
	Р-термінова рента	$S = \dfrac{R}{P} \cdot \dfrac{e^{\delta n}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}$	$R = \dfrac{S \cdot P \cdot \left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)}{e^{\delta n}-1}$	$n = \dfrac{\ln\left[\dfrac{S}{R}P\left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)+1\right]}{\delta}$

Фінансові ренти з безперервним нарахуванням відсотків	рента з періодом більше року (**r**>**1**)	$\mathbf{S = R_r \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}}$	$\mathbf{R_r = S \frac{e^{\delta r} - 1}{e^{\delta n} - 1}}$	$\mathbf{n = \frac{\ln\left[\frac{S}{R_r}\left(e^{\delta r} - 1\right) + 1\right]}{\delta}}$

Таблиця 6.2 – Параметри фінансових рент постнумерандо, розраховані за значенням сучасної вартості

Вид рент за нарахуванням відсотків	Вид рент за терміном виплати платежів	Сучасна вартість ренти	Член ренти **R**	Термін ренти **n**
1	2	3	4	5

Фінансові ренти з нарахуванням відсотків наприкінці року	***річна рента***	$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $A = R \cdot a_{n;i}$	$R = \frac{A}{a_{n;i}}$	$n = \frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}\cdot i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$
	Р-термінова рента	$A = \frac{R\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right]}$ $A = R \cdot a_{n;i}^{(p)}$	$R = \frac{A}{a_{n;i}^{(p)}}$	$n = \frac{\ln\left\{\left(1-\frac{A}{R}P\left[(1+i)^{\frac{1}{P}}-1\right]\right)^{-1}\right\}}{\ln(1+i)}$
	рента з періодом більше року **(r>1)**	$A = R_r\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r-1}$ $A = R_r \cdot {}^{a_{n;i}}/_{S_{r;i}}$	$R_r = \frac{A \cdot S_{r;i}}{a_{n;i}}$	$n = \frac{\ln\left\{\left(1-\frac{A}{R_r}\left[(1+i)^r-1\right]\right)^{-1}\right\}}{\ln(1+i)}$

Продовження таблиці 6.2

1	2	3	4	5

Фінансові ренти з нарахуванням відсотків **m** разів на рік	***річна рента***	$A = R\dfrac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}$ $A = R\cdot a_{mn;\frac{j_m}{m}} \Big/ S_{m;\frac{j_m}{m}}$	$R = \dfrac{A\cdot S_{m;\frac{j_m}{m}}}{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}$	$n = \dfrac{\ln\left\{\left(1-\frac{A}{R}\left[\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1\right]\right)^{-1}\right\}}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right)}$
	Р-термінова рента	$A = \dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{\left[1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}\right]}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$ $A = \dfrac{R}{P}\cdot a_{mn;\frac{j_m}{m}} \Big/ S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}$	$R = \dfrac{A\cdot P\cdot S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}}{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}$	$n = \dfrac{\ln\left\{\left(1-\frac{A}{R}P\left[\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]\right)^{-1}\right\}}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right)}$
	окремий випадок р-термінової ренти (**p=m**)	$A = \dfrac{R}{m}\cdot a_{mn;\frac{j_m}{m}}$	$R = \dfrac{A\cdot m}{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}$	$n = \dfrac{\ln\left[\left(1-\frac{A}{R}j_m\right)^{-1}\right]}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right)}$

Продовження таблиці 6.2

1	2	3	4	5

	рента з періодом більше року **(r>1)**	$$A = R_r \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}$$ $$A = R_r \cdot a_{mn;\frac{j_m}{m}} \Big/ S_{mr;\frac{j_m}{m}}$$	$$R_r = \frac{A \cdot S_{mr;\frac{j_m}{m}}}{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}$$	$$n = \frac{\ln\left\{\left\{1-\frac{A}{R_r}\left[\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1\right]\right\}^{-1}\right\}}{m \cdot \ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right)}$$
	річна рента	$$A = R\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$$	$$R = A\frac{e^{\delta}-1}{1-e^{-\delta n}}$$	$$n = \frac{\ln\left\{\left[1-\frac{A}{R}\left(e^{\delta}-1\right)\right]^{-1}\right\}}{\delta}$$
	Р-термінова рента	$$A = \frac{R}{P} \cdot \frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}$$	$$R = \frac{A \cdot P \cdot \left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)}{1-e^{-\delta n}}$$	$$n = \frac{\ln\left\{\left[1-\frac{A}{R}P\left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)\right]^{-1}\right\}}{\delta}$$

Фінансові ренти з безперервним нарахуванням відсотків	рента з періодом більше року (**r>1**)	$A = R_r \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta r} - 1}$	$R_r = A \frac{e^{\delta r} - 1}{1 - e^{-\delta n}}$	$n = \frac{\ln\left\{\left[1 - \frac{A}{R_r}\left(e^{\delta r} - 1\right)\right]^{-1}\right\}}{\delta}$