

**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**ФАКУЛЬТЕТ АВТОМАТИКИ, ТЕЛЕМЕХАНІКИ ТА ЗВ'ЯЗКУ**

**Кафедра "Автоматика та комп'ютерне телекерування  
рухом поїздів"**

**В.Ш. Хісматулін, Д.С. Сафонов**

# **ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

## **ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ**

Для студентів денної форми навчання

Напрямок 0925 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Спеціальність 092507 – Автоматика і автоматизація на транспорті

**Харків  
2007**

УДК 62-50 (75-8)

ББК 32.965

X51

Лабораторний практикум розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри "Автоматика та комп'ютерне телекерування рухом поїздів" 21 грудня 2006 р., протокол № 5.

У практикумі подано завдання та матеріали для підготовки й виконання дев'яти лабораторних робіт з дисципліни "Теорія автоматичного керування". До кожної з робіт додані короткі відомості з теорії. Виконання всіх робіт здійснюється на ПК за допомогою пакетів Control System та Simulink програмної оболонки Matlab.

Практикум рекомендовано для студентів денної форми навчання за напрямом 0925 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології", спеціальність 092507 "Автоматика і автоматизація на транспорті".

Рецензент

доц. С.В. Кошевий

## Зміст

Вступ	4
Перелік скорочень	5
1 Функціональна структура та принцип дії типової САК	6
2 Рівняння та характеристики функціонального блока САК	19
3 Перехідні характеристики лінійних ланок	40
4 Частотні характеристики лінійних ланок	52
5 Схеми математичних моделей та частотні характеристики САК	65
6 Аналіз стійкості САК	81
7 Аналіз якості функціонування САК в перехідному режимі	97
8 Аналіз точності процесів керування	108
9 Застосування коректуючих пристроїв для поліпшення якості функціонування САК	121
Список літератури	133
Додаток А	134
Додаток Б	137
Додаток В	138
Додаток Г	141

## ВСТУП

У практикумі наведені завдання до дев'яти лабораторних робіт з дисципліни "Теорія автоматичного керування". Завдання до всіх лабораторних робіт мають такі розділи:

- мета роботи;
- програма роботи;
- підготовка до виконання роботи;
- короткі відомості з теорії;
- вказівки щодо виконання роботи;
- зміст звіту;
- контрольні запитання.

У розділі "Підготовка до виконання роботи" вказано, який теоретичний матеріал необхідно вивчити та яке аналітичне дослідження потрібно провести перед початком досліджень в лабораторії, як підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

Розділ "Короткі відомості з теорії" призначений для пояснення змісту та сутності причинно-наслідкових зв'язків, що спостерігаються під час досліджень, а також для допомоги при виконанні домашнього завдання.

У розділі "Вказівки щодо виконання роботи" наведені завдання для аналітичного дослідження, схеми та методика проведення експериментальних досліджень.

Виконанню кожної лабораторної роботи передуює колоквиум. Запитання для підготовки до колоквиуму наведені в розділі "Контрольні запитання".

Всі звіти з лабораторних робіт повинні бути оформлені в спеціальному журналі або в окремому зошиті обсягом 18...24 аркушів у відповідності до розділу "Зміст звіту". Звіт необхідно здати для перевірки після виконання роботи.

Залік з лабораторної роботи виставляється, якщо виконані такі вимоги:

- 1) за результатами колоквиуму отримана позитивна оцінка;
- 2) аналітичні та експериментальні дослідження виконані в повному обсязі, без помилок;
- 3) звіт оформлено відповідно до розділу "Зміст звіту";
- 4) висновки за результатами роботи свідчать про те, що студент засвоїв відповідний матеріал.

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АКП –	автоматичний керуючий пристрій
АЧХ –	амплітудно-частотна характеристика
БП –	блок порівняння
ВБ –	виконавчий блок
ВД –	виконавчий двигун постійного струму з незалежним збудженням
ЕМСС –	електромеханічна слідкуюча система
ЕОМ –	електронно-обчислювальна машина
е.р.с. –	електрорушійна сила
ЗБ –	задавальний блок
КЧХ –	комплексна частотна характеристика
ЛАЧХ –	логарифмічна амплітудно-частотна характеристика
ЛФЧХ –	логарифмічна фазочастотна характеристика
НЗЗ –	негативний зворотний зв'язок
ОК –	об'єкт керування
ПВД –	пневматичний виконавчий двигун
ПД –	пропорційно-диференціальний
ПЗЗ –	позитивний зворотний зв'язок
ПІ –	пропорційно-інтегральний
ПІД –	пропорційно-інтегрально-диференціальний
ПК –	персональний комп'ютер
ППБ –	підсилювально-перетворюючий блок
ППП –	пакет прикладних програм
САК –	система автоматичного керування
ФЧХ –	фазочастотна характеристика

# **1 ФУНКЦІОНАЛЬНА СТРУКТУРА ТА ПРИНЦИП ДІЇ ТИПОВОЇ САК**

## **1.1 Мета роботи**

1 Закріпити знання основних понять автоматики, принципів побудови і функціональної структури САК з керуванням за помилкою.

2 Дослідити функціонування типової САК з керуванням за помилкою за різних законів зміни задавального діяння.

## **1.2 Програма роботи**

1 Аналітичне дослідження функціонування електромеханічної сліdkуючої системи (ЕМСС) при типових вхідних діяннях.

2 Експериментальне дослідження функціонування ЕМСС при відпрацьовуванні початкової кутової непогодженості.

3 Експериментальне дослідження функціонування ЕМСС при обертанні задавального вала з постійною швидкістю.

4 Експериментальне дослідження функціонування ЕМСС в режимі гармонічних коливань.

## **1.3 Підготовка до виконання роботи**

1 За рекомендованою літературою [1, 3-8] та конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:

- мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
- основні поняття автоматики, класифікацію САК за алгоритмом функціонування, принципи автоматичного керування;
- функціональну структуру ЕМСС, призначення її блоків та принцип дії.

2 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

3 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

## **1.4 Короткі відомості з теорії**

*Керування* – процес надання на технічний об'єкт спеціально організованих діянь ззовні, спрямованих на отримання необхід-

ного результату його функціонування незалежно від властивостей об'єкта і впливу зовнішнього середовища.

При *автоматичному керуванні* між собою взаємодіють об'єкт керування (ОК) і спеціальний технічний засіб, за допомогою якого організується керування об'єктом – автоматичний керуючий пристрій (АКП). Взаємодіючі між собою об'єкт керування та автоматичний керуючий пристрій називаються *системою автоматичного керування* (САК).

На рисунку 1.1 наведена узагальнена структура САК та позначені основні діяння:

– задавальне діяння  $g(t)$ , яке визначає приписаний (бажаний) результат функціонування об'єкта;

– вихідне діяння (керована величина)  $y(t)$ , яке визначає фактичний хід технічного процесу;

– керуюче діяння  $u(t)$ , яке подається з автоматичного керуючого пристрою на об'єкт з метою отримання необхідного результату його функціонування – зміни вихідної величини  $y(t)$  відповідно до величини задавального діяння  $g(t)$ ;

– контрольне діяння  $y_0(t)$ , за допомогою якого інформація про фактичний хід технічного процесу подається від об'єкта керування до АКП.

– заважаючі діяння  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , які приводять до порушення нормального функціонування об'єкта.

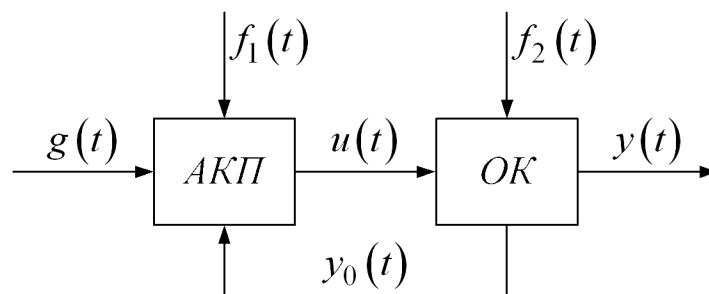


Рисунок 1.1 – Узагальнена структура САК

За *алгоритмом функціонування* (сукупністю правил, якими визначається наказаний хід технічного процесу) виділяють такі види САК:

1 *Системи стабілізації*, алгоритм функціонування яких приписує підтримувати незмінним значення керованої величини

$$g(t) = g_0 = \text{const}.$$

2 *Системи програмного керування*, алгоритм функціонування яких приписує змінювати керовану величину відповідно до заздалегідь відомого закону

$$g(t) = g_0(t).$$

3 *Системи слідування*, алгоритм функціонування яких приписує змінювати керовану величину відповідно до задавального діяння  $g(t)$ , закон зміни якого заздалегідь невідомий.

Відомі такі фундаментальні принципи побудови САК:

– *пряме керування*, коли керуюче діяння формується на підставі інформації про величину задавального діяння;

– *принцип компенсації*, коли керуюче діяння формується на підставі інформації про величину заважаючого діяння;

– *принцип зворотного зв'язку*, який полягає у формуванні керуючого діяння за наслідками зіставлення інформації про приписане і фактичне значення керованої величини.

Принцип зворотного зв'язку знайшов найбільше розповсюдження внаслідок того, що він дозволяє досягнути найкращих результатів керування навіть в неповністю визначених умовах функціонування САК. При його реалізації для зіставлення інформації про приписане і фактичне значення керованої величини до складу автоматичного керуючого пристрою вводять порівнюючий блок. На виході блока порівняння формується помилка системи

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t),$$

або величина  $F[\varepsilon(t)]$ , яка залежить від неї.



Варіант реалізації принципу зворотного зв'язку, коли керуюче діяння є функцією помилки, називається *керуванням за помилкою*. Алгоритм роботи автоматичного керуючого пристрою буде так, щоб формоване ним керуюче діяння було спрямовано на усунення помилки, що виникає в системі, незалежно від причини її виникнення (динамічних властивостей об'єкта, впливу заважаючих діянь, зміни характеристик об'єкта та ін.).

Розглянемо функціональну структуру та принцип дії типової САК з керуванням за помилкою на прикладі електромеханічної слідкуючої системи (рисунок 1.2).

Електромеханічна слідкуюча система призначена для розвороту вала об'єкта  $\beta(t)$  відповідно до величини кута повороту задавального вала  $\alpha(t)$ .

Як впливає з визначення алгоритму слідкування, за яким побудована ЕМСС, задавальна величина – кут повороту задавального вала  $\alpha(t)$  – може бути довільною. У результаті здійснення процесу керування вихідна величина – кут повороту вала об'єкта  $\beta(t)$  – повинна наближатися до задавальної величини, тобто непогодження (помилка системи)

$$\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t) \quad (1.1)$$

між задавальною і керованою величинами повинно бути усунено.

ЕМСС, як і інші слідкуючі системи, побудована із застосуванням принципу керування за помилкою.

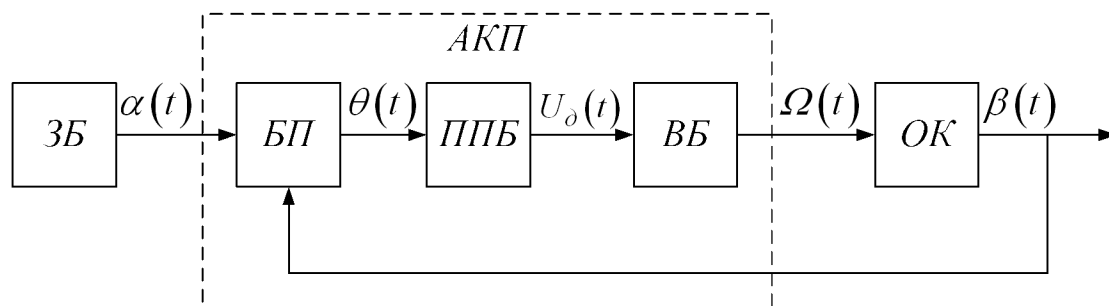


Рисунок 1.2 – Структурна схема електромеханічної слідкуючої системи

Основні функціональні блоки електромеханічної слідкуючої системи:

– задавальний блок (ЗБ) – сукупність пристроїв, за допомогою якої формується кут повороту  $\alpha(t)$  задавального вала;

– блок порівняння (БП) – пристрій, що служить для вимірювання величини кутового непогодження  $\theta(t)$ ;

– підсилювально-перетворюючий блок (ППБ) – сукупність пристроїв, в якій здійснюється формування напруги  $U_\theta(t)$  з параметрами, необхідними для приведення в обертання виконавчого двигуна;

– виконавчий блок (ВБ) – електричний двигун з редуктором.

БП, ППБ та ВБ входять до складу автоматичного керуючого пристрою (АКП).

Розглянемо роботу ЕМСС в деяких типових режимах. З метою спрощення пояснень будемо вважати, що вхідні та вихідні величини окремих блоків пов'язані між собою рівняннями пропорційного зв'язку.

#### ***Робота ЕМСС при усуненні початкового непогодження***

Нехай перед вмиканням системи існувало початкове непогодження  $\theta_0 = \alpha_0 - \beta_0$  між задавальним та вихідним валами. Тоді після її вмикання на виході БП виникає сигнал помилки

$$U_\theta = K_{БП} \cdot \theta. \quad (1.2)$$

Він підсилюється у ППБ до величини

$$U_\theta = K_{ППБ} \cdot U_\theta = K_{БП} \cdot K_{ППБ} \cdot \theta, \quad (1.3)$$

де  $K_{БП}$ ,  $K_{ППБ}$  – коефіцієнти підсилення БП та ППБ.

Напруга  $U_\theta(t)$  подається на якір виконавчого двигуна, внаслідок чого він починає обертатися. Виконавчий двигун через редуктор повертає вал об'єкта керування ОК. Як впливає з виразу (1.3), вихідний вал буде обертатися, доки існує напруга  $U_\theta(t)$ , тобто доки помилка системи не встановиться рівною нулю:

$\theta_{уст} = 0$ . Отже, внаслідок роботи системи початкове непогодження буде повністю усунуто, і вихідний вал повернеться в положення  $\beta_{уст} = \alpha_0$ , яке дорівнює початковому значенню кута повороту задавального вала (рисунок 1.3).

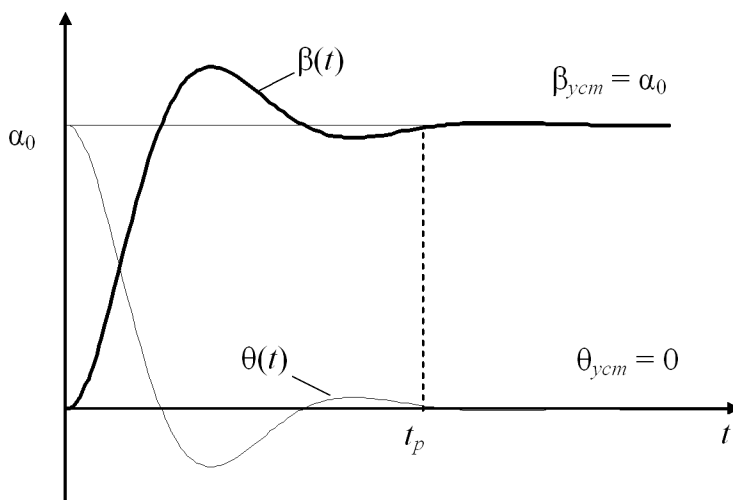


Рисунок 1.3

Відзначимо, що внаслідок інерційності процесів у колі живлення якоря двигуна та інерційності мас, що обертаються, потрібен деякий час на усунення початкового непогодження – *час регулювання*  $t_p$ . Його величина та характер процесу регулювання (монотонний або коливальний) суттєво залежать від величини коефіцієнта підсилення ППБ.

***Робота ЕМСС при обертанні задавального вала з постійною швидкістю***

Якщо задавальний вал обертається з постійною швидкістю  $\alpha' = \Omega_0$ , вихідний вал внаслідок інерційності двигуна та об'єкта керування спочатку буде запізнюватись відносно задавального, і тому виникне помилка слідкування. Доведемо, що в цьому випадку усталена швидкість обертання вихідного вала  $\beta'_{уст} = \Omega_{уст}$  буде дорівнювати швидкості обертання задавального вала  $\Omega_0$ , а між валами буде існувати постійна кутова помилка  $\theta_{уст}$  (рисунок 1.4).

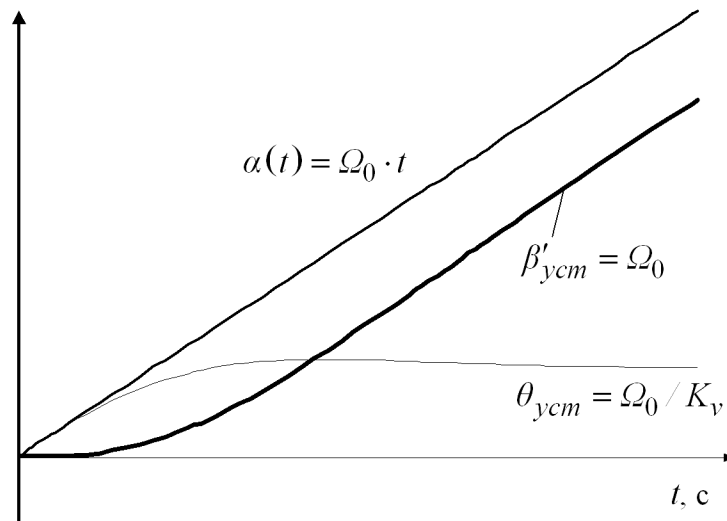


Рисунок 1.4

Усталена швидкість обертання вихідного вала пропорційна величині напруги на якорі двигуна:

$$\Omega_{уст} = K_{\partial} \cdot K_{ред} \cdot U_{\partial}, \quad (1.4)$$

де  $K_{\partial}$ ,  $K_{ред}$  – коефіцієнти підсилення (передачі) виконавчого двигуна та редуктора.

З урахуванням залежності (1.3) величини напруги на якорі від сигналу помилки маємо

$$\Omega_{уст} = K_{\partial} \cdot K_{ред} \cdot K_{БП} \cdot K_{ППБ} \cdot \theta = K_v \cdot \theta_{уст}, \quad (1.5)$$

де  $K_v$  – загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи,  
 $K_v = K_{\partial} \cdot K_{ред} \cdot K_{БП} \cdot K_{ППБ}$ .

Отже, з аналізу виразів (1.4), (1.5) можна зробити такі висновки:

а) при постійній усталеній кутовій помилці  $\theta_{уст} = \text{const}$  вихідний вал буде обертатись з постійною швидкістю;

б) усталена кутова помилка буде постійною лише у тому випадку, якщо усталена швидкість обертання вихідного вала дорівнює швидкості обертання задавального:  $\Omega_{уст} = \Omega_0$ ;

в) для зменшення величини усталеної помилки необхідно збільшувати коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K_v$ :

$$\theta_{уст} = \Omega_0 / K_v. \quad (1.6)$$

### ***Робота ЕМСС при розвертанні задавального вала за гармонічним законом***

Якщо задавальний вал розвертається за гармонічним законом, то варто очікувати, що:

а) при малих частотах коливань вихідний вал буде встигати за рухом задавального вала, і тому амплітуди та фази коливань обох валів будуть співпадати;

б) при зростанні частоти коливань вихідний вал внаслідок інерційності двигуна та об'єкта керування буде все більше запізнюватись за фазою по відношенню до руху задавального вала;

в) можливе існування області частот, в якій система має резонансні властивості, коли амплітуда вихідних коливань перевищує амплітуду коливань задавального вала;

г) при великих частотах обертання вихідний вал не встигає за рухом задавального вала, і тому амплітуда його коливань буде суттєво меншою за амплітуду коливань задавального вала.

## **1.5 Вказівки щодо виконання роботи**

### ***1.5.1 Аналітичне дослідження ЕМСС при типових вхідних діях***

1 За допомогою часових діаграм з'ясувати процеси, що протікають у функціональних блоках ЕМСС в режимах:

– відпрацювання початкової непогодженості (при стрибкоподібному змінюванні задавального діяння);

– обертання задавального вала з постійною швидкістю (при змінюванні задавального діяння за лінійним законом);

– коливань задавального вала за гармонічним законом.

2 Користуючись виразом (1.6), розрахувати та занести до таблиці 1.1 величину усталеної помилки системи  $\theta_{уст}^{(розр)}$  при обер-

танні задавального вала з постійною швидкістю  $\Omega_0 = 1$  рад/с для значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K_v = 1, 2, 5$  та  $10 \text{ с}^{-1}$ .

Таблиця 1.1 – Вплив коефіцієнта підсилення розімкненої системи на величину усталеної помилки

$K_v, \text{с}^{-1}$	1	2	5	10
$\theta_{уст}^{(розр)}$ , рад				
$\theta_{уст}^{(експ)}$ , рад				

### 1.5.2 Експериментальне дослідження функціонування ЕМСС при відпрацьовуванні початкової кутової непогодженості

Дослідження проводиться на ПК за допомогою пакета імітаційного моделювання Simulink програмної оболонки Matlab.

Відкрити файл **EMSS**. На екрані з'являється схема математичної моделі ЕМСС, котру зображено на рисунку 1.5. В лівій частині відображені датчики вхідних діянь – ступеневого (**Step**), лінійного (**Ramp**) та гармонічного (**Sine Wave**). Вони підключаються до входу системи за допомогою перемикача **Switch g**, що керується блоком **Key g**. Модель системи складається з моделей блока порівняння **BP**, підсилювального блока **Gain** та виконавчого блока (двигуна з редуктором) **VB**. Спостереження процесів здійснюється за допомогою віртуального осцилографа (**Scope**), входи якого комутуються мультиплексором **Mux**.

1 Підключити до входу системи датчик стрибкоподібного вхідного діяння (**Step**). Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Key g**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення константи **1** та натиснути **Ok**.

2 Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K_v = 1 \text{ с}^{-1}$ . Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Gain**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення **Gain = 1** та натиснути **Ok**.

3 Запустити імітацію процесу функціонування ЕМСС натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів.

4 Переключитися у вікно **Scope**. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Scope**. У випадку, якщо графіки не спостерігаються на екрані віртуального осцилографа, натиснути кнопку "**Бінокль**" на панелі інструментів. Проаналізувати залежності (жовта – задавальне діяння  $g(t)$ , блакитна – керована величина  $y(t)$ , фіолетова – помилка системи  $eps(t)$ ).

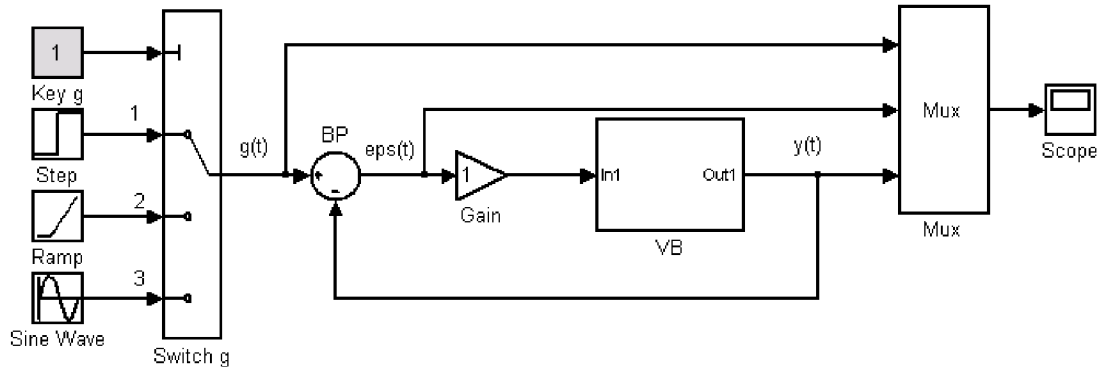


Рисунок 1.5 – Схема математичної моделі ЕМСС в пакеті Simulink

5 Виміряти та занести до таблиці 1.2 значення часу встановлення перехідного режиму – часу регулювання  $t_p$ . Він визначається як момент часу, з якого вихідна величина більше не виходить поза межі 0.95... 1.05 відносно усталеного значення  $y(\infty)$ .

Проаналізувати графік відпрацювання помилки. Переконатися, що значення усталеної помилки  $\theta_{уст} = 0$  ( $eps(\infty) = 0$ ).

6 Повторити дослідження для коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K_v = 2, 5, 10$  та  $20 \text{ c}^{-1}$  (**Gain** = 2, 5, 10, 20).

Таблиця 1.2 – Вплив коефіцієнта підсилення розімкненої системи на час встановлення перехідного режиму

$K_v, \text{c}^{-1}$	1	2	5	10	20
$t_p, \text{c}$					

7 За результатами досліджень побудувати залежність  $t_p(K_v)$  та зробити відповідні висновки.

### 1.5.3 Експериментальне дослідження функціонування ЕМСС при обертанні задавального вала з постійною швидкістю

1 Переключитися у вікно **EMSS**. Підключити до входу системи датчик вхідного діяння, що змінюється за лінійним законом (**Ramp**). Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Key g**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення константи **2** та натиснути **Ok**.

2 Виставити значення швидкості змінювання задавального діяння  $\Omega = 1$  рад/с. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Ramp**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення **Slope (Плита)** рівним **1** та натиснути **Ok**.

3 Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K_v = 1 \text{ c}^{-1}$  (**Gain = 1**).

4 Запустити імітацію процесу функціонування ЕМСС натисканням кнопки **► (Start)** на панелі інструментів.

5 Переключитися у вікно **Scope**. Проаналізувати залежності. Звернути увагу, що кут повороту вихідного вала запізнюється за кутом повороту задавального вала, тобто в системі існує помилка.

Визначити та занести до таблиці 1.1 усталену помилку системи  $\theta_{уст}^{(експ)}$  (**eps( $\infty$ )**). Для точного визначення усталеної помилки підвести курсор "миші" до ділянки, де помилка встановилася, натиснути на ліву кнопку "миші", протягнути її, щоб вказана ділянка була виділеною пунктиром, і відпустити кнопку "миші". На екрані з'явиться виділена ділянка у збільшеному масштабі.

6 Повторити дослідження для коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K_v = 2, 5$  та  $10 \text{ c}^{-1}$  (**Gain = 2, 5, 10**).

7 За результатами досліджень побудувати залежність  $\theta_{уст}^{(експ)}(K_v)$ , зіставити її з результатами розрахунків та зробити відповідні висновки.



### 1.5.4 Експериментальне дослідження функціонування ЕМСС в режимі гармонічних коливань

1 Переключитися у вікно **EMSS**. Підключити до входу системи датчик вхідного діяння, що змінюється за гармонічним законом (**Sine Wave**). Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Key g**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення константи **3** та натиснути **Ok**.

2 Виставити значення частоти коливань задавального вала  $\omega = 1$  рад/с, амплітуди коливань  $A_{ex} = 1$  рад. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Sine Wave**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення **Frequency** та **Amplitude** рівними **1** та натиснути **Ok**.

3 Виставити значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K_v = 2 \text{ c}^{-1}$  (**Gain = 2**).

4 Запустити імітацію процесу функціонування ЕМСС натисканням кнопки **► (Start)** на панелі інструментів.

5 Переключитися у вікно **Scope**. Проаналізувати залежності. Визначити та занести до таблиці 1.3 амплітуду усталених коливань вихідного вала  $A_{вих}(\omega)$  при  $\omega = 1$  рад/с.

6 Повторити дослідження для частоти коливань задавального вала = 2, 5 та 10 рад/с (блок **Sine Wave**, у вікні **Parameters** ввести **Frequency = 2, 5, 10**).

Таблиця 1.3 – Вплив частоти коливань задавального вала на амплітуду коливань вихідного вала

$\omega$ , рад/с	1	2	5	10
$A_{вих}(\omega)$ , рад				
$W(\omega)$				

7 За результатами досліджень розрахувати та побудувати амплітудно-частотну характеристику замкненої системи

$$W(\omega) = A_{вих}(\omega) / A_{ex}.$$

Зробити висновки про частотні властивості замкненої системи.

8 Після закінчення досліджень закрити вікно керування програмної оболонки **Matlab**, на запитання про збереження змін у файлі **EMSS** відповісти **No**.

## **1.6 Зміст звіту**

- 1 Назва і мета роботи.
- 2 Функціональна схема ЕМСС.
- 3 Схема проведення досліджень ЕМСС в пакеті Simulink.
- 4 Таблиці 1.1 – 1.3 з результатами досліджень.
- 5 Графіки залежностей, побудовані за результатами досліджень.
- 6 Висновки за результатами лабораторної роботи.

## **1.7 Контрольні запитання**

- 1 Визначте поняття керування.
- 2 Наведіть та поясніть загальну структуру системи автоматичного керування.
- 3 Дайте характеристику основних діянь САК: задавального, керуючого, контрольного, заважаючого, вихідного.
- 4 Визначте поняття алгоритму функціонування системи автоматичного керування.
- 5 Дайте характеристику алгоритму слідкування.
- 6 Визначте поняття "принцип автоматичного керування".
- 7 Дайте характеристику принципу зворотного зв'язку.
- 8 Наведіть функціональну схему та поясніть принцип дії електромеханічної слідкуючої системи.
- 9 Якою буде усталена помилка ЕМСС після відпрацювання початкової кутової непогодженості?
- 10 Якою буде усталена помилка ЕМСС при обертанні задавального валу з постійною швидкістю?
- 11 Як впливає величина коефіцієнта підсилення розімкненої системи на усталену помилку ЕМСС при обертанні задавального валу з постійною швидкістю?
- 12 Наведіть та поясніть графік амплітудно-частотної характеристики ЕМСС.

## **2 РІВНЯННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО БЛОКА САК**

### **2.1 Мета роботи**

1 Засвоїти методику складання диференціального рівняння "вхід-вихід" та аналітичного визначення характеристик функціонального блока САК.

2 Ознайомитись з методикою отримання часових характеристик функціонального блока САК за допомогою пакета Control System програмної оболонки Matlab.

### **2.2 Програма роботи**

1 Складання диференціального рівняння "вхід-вихід" та аналітичне визначення характеристик функціонального блока САК.

2 Дослідження часових характеристик функціонального блока САК за допомогою пакета Control System програмної оболонки Matlab.

### **2.3 Підготовка до виконання роботи**

1 За рекомендованою літературою [1, 3-8] та конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:

- мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: диференціальне рівняння "вхід-вихід" та диференціальний оператор передачі динамічної системи; характеристики, методика їх визначення та застосування для складання оператора "вхід-вихід".

2 Ознайомитись з порядком користування пакетом Control System програмної оболонки Matlab (додаток А).

3 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

4 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

### **2.4 Короткі відомості з теорії**

*Математичною моделлю САК* називається сукупність співвідношень і (або) правил, які зв'язують між собою функції, що описують вхідні і вихідні діяння системи.

Основою для отримання математичної моделі системи є закони фізики, що визначають принципи її роботи, або операції, що виконуються над діями у системі. Математична модель задається або рівнянням "вхід-вихід", або оператором "вхід-вихід".

**Рівняння "вхід-вихід"** – співвідношення, що зв'язують між собою вхідні і вихідні дії системи.

**Оператор "вхід-вихід"** – послідовність дій, які необхідно виконати над вхідним дією, щоб отримати вихідне дії системи. Ця послідовність дій може бути задана у вигляді співвідношень, алгоритму або їх сукупності.

Графічне зображення математичної моделі системи називають **схемою математичної моделі**.

Процеси, що відбуваються в лінійних стаціонарних неперервних системах, описуються лінійними диференціальними рівняннями "вхід-вихід" з постійними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} a_k \cdot y^{(k)}(t) + a_{k-1} \cdot y^{(k-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot x'(t) + \dots + b_m \cdot x^{(m)}(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введемо в розгляд оператор (символ) диференціювання  $D$ , дія якого на довільну функцію  $u(t)$  визначається за правилом

$$D^i u(t) = u^{(i)}(t) = \frac{d^i u(t)}{dt^i}.$$

Запишемо рівняння "вхід-вихід" (2.1) в операторній (символьній) формі

$$\begin{aligned} a_k \cdot D^k y(t) + a_{k-1} \cdot D^{k-1} y(t) + \dots + a_1 \cdot Dy(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot Dx(t) + \dots + b_m \cdot D^m x(t). \end{aligned}$$

Винесемо функції часу за дужки:

$$\left( \sum_{i=0}^k a_i \cdot D^i \right) y(t) = \left( \sum_{l=0}^m b_l \cdot D^l \right) x(t).$$

Якщо формально розв'язати отриманий вираз відносно вихідної величини  $y(t)$ , його можна записати у такому вигляді:

$$y(t) = K(D) \cdot x(t), \quad (2.2)$$

де  $K(D)$  – *диференціальний оператор передачі* системи, що визначається за формулою

$$K(D) = \frac{\sum_{l=0}^m b_l \cdot D^l}{\sum_{i=0}^k a_i \cdot D^i}. \quad (2.3)$$

Отже, для знаходження диференціального оператора передачі за заданим диференціальним рівнянням "вхід-вихід" необхідно:

- 1) записати диференціальне рівняння "вхід-вихід" в операторній формі шляхом введення символу диференціювання  $D$ ;
- 2) формально розв'язати отримане рівняння відносно виходу.

Вираз, що пов'язує вхідну та вихідну величини і залежить від символу диференціювання  $D$ , і є диференціальним оператором передачі системи.

Запис диференціального рівняння в операторній формі (2.2) є зручним для зображення схеми математичної моделі системи у часовій області, яка зображена на рисунку 2.1.

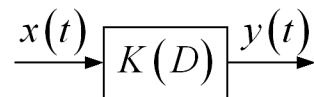


Рисунок 2.1

Для знаходження реакції системи на вхідне діяння необхідно або розв'язувати диференціальне рівняння, або застосовувати ха-

рактеристики системи. Введемо характеристики лінійних стаціонарних САК та розглянемо, як на їх основі скласти оператор "вхід-вихід".

**Імпульсною характеристикою** системи  $k(t)$  називається її реакція на вхідне діяння у вигляді  $\delta$ -функції при нульових початкових умовах.

В силу принципу причинності імпульсна характеристика дорівнює нулю при від'ємних значеннях аргументу.

Оператор "вхід-вихід" системи за відомою імпульсною характеристикою визначається у вигляді так званого **інтеграла згортки** або інтеграла суперпозиції. Якщо вхідне діяння дорівнює нулю при  $t < 0$  (таке діяння називається оригіналом), то при нульових початкових умовах інтеграл згортки має такий вигляд:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot k(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \theta) \cdot k(\theta) d\theta. \quad (2.4)$$

**Перехідною характеристикою** системи  $h(t)$  називається її реакція на вхідне діяння у вигляді одиничної функції при нульових початкових умовах.

В силу принципу причинності перехідна характеристика, як і імпульсна, дорівнює нулю при від'ємних значеннях аргументу.

Зв'язок між імпульсною і перехідною характеристикою системи визначається виразами:

$$h(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau; \quad k(t) = h'(t),$$

або в операторній формі

$$h(t) = \frac{1}{D} k(t), \quad k(t) = Dh(t).$$

**Передаточною функцією** системи  $K(p)$  називається перетворення Лапласа її імпульсної характеристики:

$$K(p) = \int_0^{\infty} k(t) \cdot e^{-pt} dt = L\{k(t)\},$$

де  $L\{\cdot\}$  – оператор (символ) перетворення за Лапласом;  
 $p$  – комплексний аргумент (змінна Лапласа),  $p = \sigma + j\omega$ .

Передаточна функція системи може бути просто знайдена за її оператором передачі шляхом формальної заміни символу диференціювання  $D$  на змінну Лапласа  $p$ :

$$K(p) = K(D) \Big|_{D=p}. \quad (2.5)$$

З властивостей перетворення Лапласа (див. додаток Б) випливає, що для знаходження реакції системи на вхідне діяння за допомогою її передаточної функції необхідно виконати такі дії:

1) перейти від вхідного діяння  $x(t)$ , заданого в часовій області, до його перетворення Лапласа  $X(p) = L\{x(t)\}$ ;

2) знайти перетворення Лапласа  $Y(p)$  вихідного діяння  $y(t)$  як добуток передаточної функції системи і перетворення Лапласа вхідного діяння

$$Y(p) = K(p) \cdot X(p); \quad (2.6)$$

3) перейти від перетворення Лапласа  $Y(p)$  вихідного діяння до оригіналу, виконавши обернене перетворення Лапласа:  
 $y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}$ .

Сукупність трьох зазначених дій являє собою оператор ”вхід-вихід” системи, побудований на основі її передаточної функції. Він може бути записаний у такій скороченій формі:

$$y(t) = L^{-1}\{K(p) \cdot L\{x(t)\}\}. \quad (2.7)$$

Виразу (2.6) відповідає схема математичної моделі системи в області перетворень Лапласа, що наведена на рисунку 2.2.

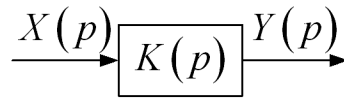


Рисунок 2.2

## 2.5 Вказівки щодо виконання роботи

### 2.5.1 Складання диференціального рівняння "вхід-вихід" та аналітичне визначення характеристик функціонального блока САК

#### Завдання 1. Пневматичний виконавчий двигун

Пневматичний виконавчий двигун (ПВД), схему якого зображено на рисунку 2.3, забезпечує пересування поршня в залежності від різниці тисків у лівій і правій частинах циліндра  $\Delta P(t) = P_1(t) - P_2(t)$ . Площа поршня дорівнює  $S$ , маса всіх рухомих частин –  $m$ , сила опору пересуванню поршня пропорційна швидкості пересування з коефіцієнтом пропорційності  $\beta$ .

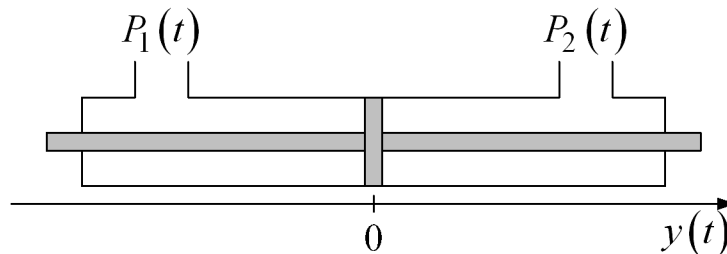


Рисунок 2.3 – Схема пневматичного виконавчого двигуна

Виконати таке:

- 1) скласти диференціальне рівняння "вхід-вихід" ПВД, що зв'язує пересування поршня  $y(t)$  з різницею тисків  $\Delta P(t)$ ;
- 2) визначити оператор передачі та побудувати схему математичної моделі ПВД в часовій області;
- 3) визначити передаточну функцію та побудувати схему математичної моделі ПВД в області зображень за Лапласом;
- 4) визначити імпульсну характеристику ПВД;
- 5) визначити перехідну характеристику ПВД.



### Розв'язання

#### 1 Складання диференціального рівняння "вхід-вихід" ПВД

Основою для складання математичної моделі є основні закони фізики, які описують процеси, що відбуваються в технічних пристроях. Рух поршня кількісно може бути описаний другим законом Ньютона:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}, \quad (2.8)$$

де  $\vec{a}(t)$  – прискорення, з яким пересувається поршень;

$\vec{F}(t)$  – рівнодіюча всіх сил, що діють на поршень;

$m$  – маса всіх рухомих частин.

На поршень діють дві сили: сила  $\vec{F}_p(t)$ , що обумовлена різницею тисків  $\Delta P(t)$  у лівій і правій частинах циліндра, та сила опору пересуванню поршня  $\vec{F}_o(t)$ . Отже, рівнодіюча всіх сил, що діють на поршень, дорівнює їх векторній сумі

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_p(t) + \vec{F}_o(t).$$

Її модуль з урахуванням напрямку дії сил визначається виразом

$$F(t) = F_p(t) - F_o(t). \quad (2.9)$$

Оскільки тиск – це сила, котра прикладається на одиницю площі, то сила  $F_p(t)$  визначається за формулою

$$F_p(t) = S \cdot \Delta P(t). \quad (2.10)$$

Сила опору пересуванню поршня згідно із зазначеними вище умовами пропорційна швидкості пересування  $v(t)$  з коефіцієнтом пропорційності  $\beta$

$$F_o(t) = \beta \cdot v(t). \quad (2.11)$$

Підставляючи вирази (2.10) й (2.11) у (2.9), а потім у скалярний аналог виразу (2.8), отримаємо

$$a(t) = \frac{S \cdot \Delta P(t) - \beta \cdot v(t)}{m}. \quad (2.12)$$

З урахуванням того, що  $v = y'$ ,  $a = y''$ , отримуємо диференціальне рівняння "вхід-вихід" ПВД

$$m \cdot y''(t) + \beta \cdot y'(t) = S \cdot \Delta P(t). \quad (2.13)$$

## 2 Визначення оператора передачі ПВД

Для визначення оператора передачі диференціальне рівняння необхідно записати в операторній формі шляхом введення символу диференціювання  $D$

$$m \cdot D^2 \cdot y(t) + \beta \cdot D \cdot y(t) = S \cdot \Delta P(t). \quad (2.14)$$

Розв'яжемо формально вираз (2.14) відносно вихідного діяння

$$y(t) = \frac{S}{m \cdot D^2 + \beta \cdot D} \cdot x(t). \quad (2.15)$$

Отже, оператор передачі ПВД

$$K(D) = \frac{S}{m \cdot D^2 + \beta \cdot D}. \quad (2.16)$$

Схема математичної моделі ПВД у часовій області наведена на рисунку 2.4.

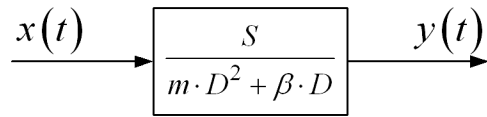


Рисунок 2.4 – Схема математичної моделі ПВД у часовій області

### 3 Знаходження передаточної функції ПВД

Згідно з виразом (2.5) здійснюємо формальну заміну символу диференціювання  $D$  в операторі передачі (2.16) на змінну Лапласа  $p$

$$K(p) = K(D) \Big|_{D=p} = \frac{S}{m \cdot p^2 + \beta \cdot p}. \quad (2.17)$$

Схема математичної моделі ПВД в області зображень за Лапласом наведена на рисунку 2.5.

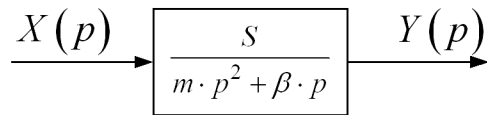


Рисунок 2.5 – Схема математичної моделі ПВД в області зображень за Лапласом

### 4 Визначення імпульсної характеристики ПВД

Імпульсна характеристика пов'язана з передаточною функцією зворотним перетворенням Лапласа

$$k(t) = L^{-1} \{K(t)\}. \quad (2.18)$$

Підставляючи передаточну функцію (2.17) у вираз (2.18), отримуємо

$$k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{S}{m \cdot p^2 + \beta \cdot p} \right\}.$$

Скориставшись таблицею перетворень Лапласа (додаток Б), маємо

$$k(t) = \frac{S}{\beta} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{\beta/m}{p \cdot (p + \beta/m)} \right\} = \frac{S}{\beta} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{m} \cdot t} \right) \cdot 1(t).$$

### 5 Визначення перехідної характеристики ПВД

Для знаходження перехідної характеристики потрібно спочатку визначити перетворення Лапласа вхідного діяння – одиничної функції:  $L\{1(t)\} = 1/p$  (див. додаток Б). Отже,

$$h(t) = L^{-1} \left\{ K(p) \cdot L\{1(t)\} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{S}{m \cdot p^3 + \beta \cdot p^2} \right\}.$$

Перетворимо вираз у фігурних дужках так, щоб можна було скористатись таблицею перетворень Лапласа:

$$\frac{S}{m \cdot p^3 + \beta \cdot p^2} = \frac{S}{\beta} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p + \beta/m)} \right).$$

Після відшукування зворотних перетворень Лапласа для окремих складових отримуємо

$$h(t) = \frac{S}{\beta} \left( t - \frac{m}{\beta} \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{m} t} \right) \right) 1(t).$$

### ***Завдання 2 Виконавчий двигун постійного струму з незалежним збудженням***

Схему виконавчого двигуна постійного струму з незалежним збудженням (ВД) зображено на рисунку 2.6. На статорі розташовані обмотки збудження (на рисунку не показані), які створюють постійний магнітний потік  $\vec{O}$ . До якірної обмотки за допомогою щітково-колекторного пристрою підводиться напруга керування  $U$ . При взаємодії струму якоря  $I_{\text{я}}$  з магнітним потоком  $\vec{O}$  виникають сили Ампера  $F$ , які ведуть до створення обертового моменту

$$M = c_M I_{\text{я}}, \quad (2.19)$$

де  $c_M$  – постійна двигуна по моменту.

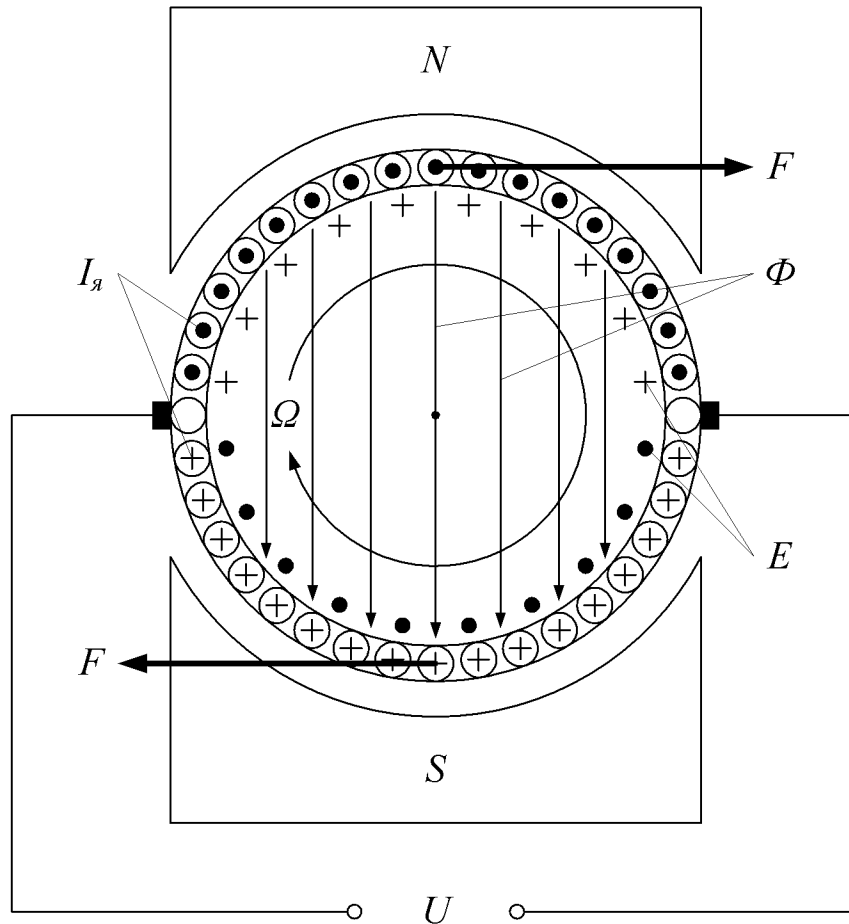


Рисунок 2.6 – Принцип дії двигуна постійного струму

Внаслідок цього якір починає обертатися з кутовим прискоренням

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}(M - M_0), \quad (2.20)$$

де  $\Omega$  – кутова швидкість обертання;

$M_0$  – момент сил опору;

$J$  – момент інерції мас, що обертаються.

При обертанні в якорі відповідно до закону електромагнітної індукції виникає противо-е.р.с.

$$E = c_E \Omega, \quad (2.21)$$

яка пропорційна швидкості обертання з коефіцієнтом пропорційності  $c_E$ , який називається постійною двигуна по противо-е.р.с.

Коло живлення якоря представлено еквівалентною схемою, наведеною на рисунку 2.7. Тут  $E_0$  – е.р.с. джерела,  $R_i$  і  $L_i$  – активна й індуктивна складові вихідного опору джерела,  $R_y$  і  $L_y$  – активний та індуктивний опори якорного кола двигуна.

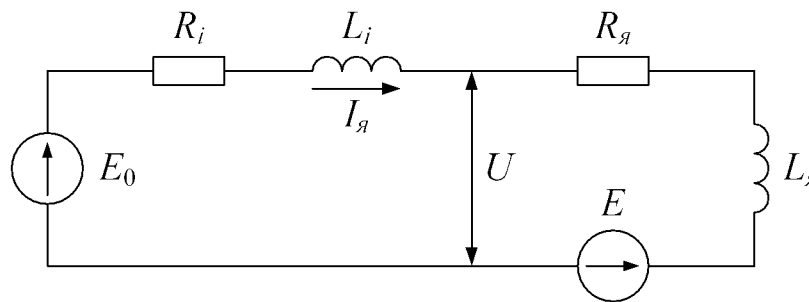


Рисунок 2.7

Виконати таке:

- 1) скласти диференціальне рівняння "вхід-вихід" ВД, що зв'язує кутову швидкість обертання  $\Omega$  з е.р.с. джерела  $E_0$  та моментом сил опору  $M_0$ ;
- 2) визначити оператор передачі та побудувати схему математичної моделі ВД в часовій області;
- 3) визначити передаточну функцію та побудувати схему математичної моделі ВД в області зображень за Лапласом;
- 4) розрахувати криву розгону ВД.

*Розв'язання*

1 Складання диференціального рівняння "вхід-вихід" ВД

При розгляді динамічних властивостей двигуна необхідно врахувати інерційність механічних частин, що обертаються на

валу двигуна, а також електричну інерційність кола живлення якоря.

Інерційність механічних частин, що обертаються на валу двигуна, враховується рівнянням (2.20), яке отримало назву рівняння механічної рівноваги. Введемо оператор (символ) диференціювання

$$D = (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dt},$$

користуючись яким перейдемо до символічної форми запису цього рівняння

$$D\Omega = \frac{1}{J}(M - M_0). \quad (2.22)$$

Динаміка процесів у колі живлення якоря описується так званним рівнянням електричної рівноваги. На підставі першого закону Кірхгофа зі схеми кола живлення (рисунок 2.7) маємо

$$RI_{\text{я}} + L \frac{dI_{\text{я}}}{dt} = E_0 - E, \quad (2.23)$$

де  $R, L$  – повні активний та індуктивний опори кола живлення якоря,  $R = R_{\text{я}} + R_i$ ,  $L = L_{\text{я}} + L_i$ .

Перейдемо до символічної форми запису цього рівняння

$$RI_{\text{я}} + LD I_{\text{я}} = E_0 - E,$$

після чого винесемо  $I_{\text{я}}$  за дужки:

$$(R + LD)I_{\text{я}} = E_0 - E.$$

Формально розв'яжемо отримане рівняння відносно  $I_{\text{я}}$ :

$$I_{я} = \frac{1/R}{T_e D + 1} (E_0 - E), \quad (2.24)$$

де  $T_e$  – параметр, який називається електромагнітною постійною часу двигуна (з урахуванням параметрів джерела живлення),  $T_e = L/R$ .

Таким чином, рух двигуна постійного струму визначається:  
– рівнянням електричної рівноваги (2.24)

$$I_{я} = \frac{1/R}{T_e D + 1} (E_0 - E);$$

– рівнянням закону електромагнітних сил (2.19)

$$M = c_M I_{я};$$

– рівнянням механічної рівноваги (2.22)

$$D\Omega = \frac{1}{J} (M - M_0);$$

– рівнянням закону електромагнітної індукції (2.21)

$$E = c_E \Omega.$$

У цих рівняннях зовнішніми діями є е.р.с.  $E_0$  джерела живлення якорного кола і момент  $M_0$  сил опору, що діють на валу двигуна з боку об'єкта. Вихідною величиною є швидкість обертання якоря  $\Omega$ . Отже, виключаючи проміжні змінні – струм якоря  $I_{я}$  і противо-е.р.с.  $E$ , одержимо диференціальне рівняння "вхід-вихід" двигуна

$$JD\Omega = \frac{c_M/R}{T_e D + 1} (E_0 - c_E \Omega) - M_0.$$



Після розділення вхідних і вихідних змінних і нескладних перетворень це рівняння приводиться до такого вигляду:

$$JRT_e D^2 \Omega + JRD \Omega + c_M c_E \Omega = c_M E_0 - R(T_e D + 1) M_0.$$

Поділимо обидві частини одержаного рівняння на  $c_M c_E$ . В результаті диференціальне рівняння "вхід-вихід" ВД набуває такого кінцевого вигляду:

$$T_M T_e D^2 \Omega + T_M D \Omega + \Omega = K_\partial E_0 - \frac{1}{F_\partial} (T_e D + 1) M_0, \quad (2.25)$$

де  $T_M$  – параметр, який називається електромеханічною по-

$$\text{стійною часу двигуна, } T_M = J \frac{R}{c_M c_E} = \frac{J}{F_\partial};$$

$K_\partial$  – коефіцієнт підсилення двигуна,  $K_\partial = 1/c_E$ ;

$F_\partial$  – коефіцієнт демпфірування моменту сил опору,  
 $F_\partial = c_M c_E / R$ .

Таким чином, рух навантаженого виконавчого двигуна постійного струму з незалежним збудженням описується диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

## 2 Визначення оператора передачі ВД

Формально розв'язуючи рівняння (2.25) щодо  $\Omega$ , одержимо рівняння "вхід-вихід" ВД в операторній формі

$$\Omega(t) = K_\partial(D) \left( E_0(t) - \frac{1}{K_\partial F_\partial} (T_e D + 1) M_0(t) \right), \quad (2.26)$$

де  $K_\partial(D)$  – оператор передачі двигуна (по результуючій вхідній дії, що записана в дужках)

$$K_\partial(D) = \frac{K_\partial}{T_M T_e D^2 + T_M D + 1} \quad (2.27)$$

На підставі рівнянь (2.26), (2.27) на рисунку 2.8 наведена схема математичної моделі виконавчого двигуна постійного струму з незалежним збудженням.

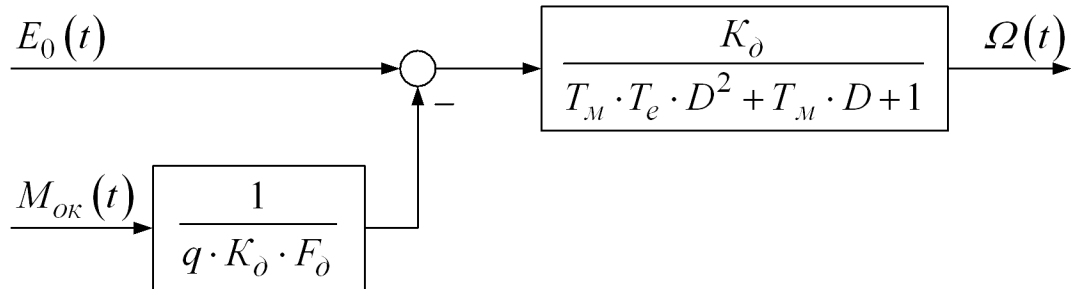


Рисунок 2.8

### 3 Визначення передаточної функції ВД

Для запису передаточної функції ВД здійснюємо згідно з виразом (2.5) формальну заміну символу диференціювання  $D$  в операторі передачі (2.27) на змінну Лапласа  $p$ :

$$K_{\delta}(p) = K_{\delta}(D) \Big|_{D=p} = \frac{K_{\delta}}{T_M T_e p^2 + T_M p + 1}. \quad (2.28)$$

Схема математичної моделі ВД в області зображень за Лапласом наведена на рисунку 2.9.

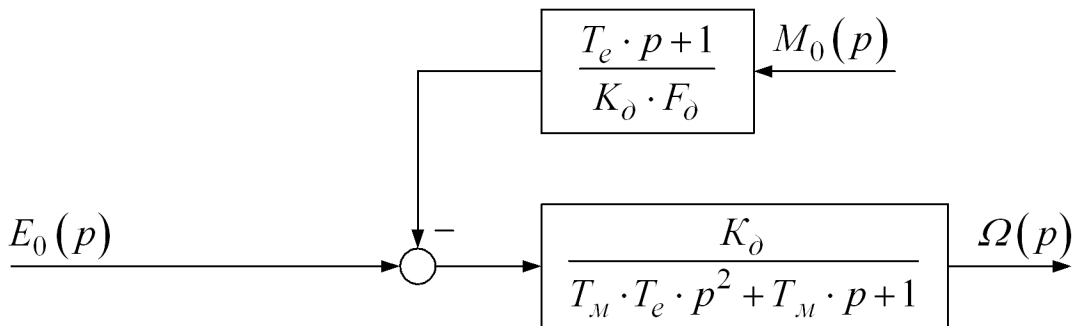


Рисунок 2.9

#### 4 Розрахунок кривої розгону ВД

Кривою розгону ВД називається часовий графік встановлення його швидкості після вмикання кола живлення якоря:

$$\Omega(t) \Big|_{E_0(t)=E_0 \cdot 1(t)}.$$

Для знаходження кривої розгону за відомою передаточною функцією ВД необхідно:

1) визначити перетворення Лапласа ступеневого вхідного діяння  $E_0(t) = E_0 \cdot 1(t)$ . Відповідно до властивостей та таблиці перетворення Лапласа маємо (див. додаток Б)

$$E_0(p) = L\{E_0 \cdot 1(t)\} = E_0 \cdot L\{1(t)\} = \frac{E_0}{p};$$

2) відповідно до виразу (2.6) визначити зображення за Лапласом кривої розгону

$$\Omega(p) = K_o(p) \cdot E_0(p);$$

3) перейти від зображення за Лапласом кривої розгону до оригіналу

$$\Omega(t) = L^{-1}\{\Omega(p)\}.$$

З метою спрощення викладень розглянемо розв'язання задачі для випадку, коли електромагнітною постійною двигуна можна знехтувати:  $T_e = 0$ . В цьому випадку зображення за Лапласом кривої розгону має такий вигляд:

$$\Omega(p) = \frac{K_o E_0}{p(T_m p + 1)}.$$

Перетворимо отриманий вираз так, щоб можна було скористатись таблицею перетворень Лапласа (додаток Б):

$$\frac{K_{\partial}E_0}{p(T_M p + 1)} = K_{\partial}E_0 \frac{\alpha}{p(p + \alpha)},$$

де  $\alpha = 1/T_M$ .

Тоді крива розгону визначається виразом

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= L^{-1} \left\{ K_{\partial}E_0 \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} \right\} = K_{\partial}E_0 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} \right\} = \\ &= K_{\partial}E_0 (1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t) = K_{\partial}E_0 (1 - e^{-t/T_M}) \cdot 1(t). \end{aligned}$$

Графік кривої розгону зображений на рисунку 2.10. При подачі на вхід ВД ступеневої вхідної напруги швидкість обертання вала монотонно зростає до усталеного значення  $\Omega_{уст} = K_{\partial}E_0$ . Можна показати, що час зростання швидкості до значення  $0.95 \Omega_{уст}$  дорівнює  $t_{\epsilon} \approx 3 \cdot T_M$ .

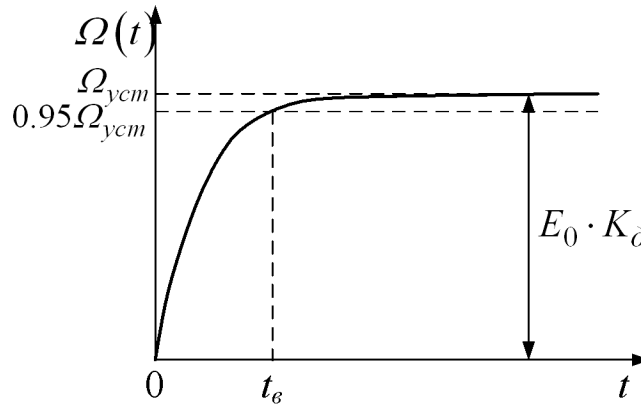


Рисунок 2.10 – Графік кривої розгону ВД при  $T_e = 0$

Відзначимо, що в загальному випадку залежно від співвідношення між постійними часу  $T_M$  і  $T_e$  корені характеристичного рівняння двигуна  $T_M T_e p^2 + T_M p + 1 = 0$  можуть бути або дійсними (при  $T_M > 4T_e$ ), або комплексно-спряженими (при  $T_M < 4T_e$ ). Відповідно до цього у першому випадку графік кривої розгону матиме монотонний характер, а в другому – коливальний.

## 2.5.2 Дослідження часових характеристик функціонального блока САК за допомогою пакета Control System програмної оболонки Matlab

### Завдання 1 Пневматичний виконавчий двигун

1 Завантажити програмну оболонку Matlab двократним натисканням відповідної піктограми.

Задати передаточну функцію ПВД (2.17) з параметрами:  $S = 0.1 \text{ м}^2$ ,  $\beta = 0.1 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$  та  $m = 1 \text{ кг}$ . Із зіставлення виразів (2.17) та (А.1) додатка А випливає, що коефіцієнти передаточної функції ПВД:  $b_0 = S = 0.1$ ,  $a_2 = m = 1$ ,  $a_1 = \beta = 0.1$ ,  $a_0 = 0$ . Тому в командному вікні (**Command Window**) програмної оболонки Matlab необхідно набрати:

$$\mathbf{K} = \mathbf{tf}([0.1],[1 \ 0.1 \ 0])$$

та натиснути **Enter**.

Після введення функції **tf** у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті Matlab змінна Лапласа  $p$  відображається літерою  $s$ ).

2 Побудувати перехідну характеристику ПВД. Для цього згідно з п. А.3 додатка А в командному вікні набрати:

$$\mathbf{step}(\mathbf{K})$$

та натиснути **Enter**.

Після введення функції **step** з'являється вікно **Figure 1**, у якому побудована перехідна характеристика ПВД. Нанести масштабну сітку, після чого перерисувати до звіту отриманий графік перехідної характеристики.

3 Повторити дослідження для маси рухомих частин  $m = 2 \text{ кг}$ . Отримані графіки перехідної характеристики креслити одне на одному, щоб отримати сім'ю характеристик.

За результатами досліджень зробити відповідні висновки.

### Завдання 2 Виконавчий двигун постійного струму з незалежним збудженням

1 Завантажити програмну оболонку Matlab двократним натисканням відповідної піктограми.

Задати передаточну функцію ВД (2.28) з параметрами:  $K_\delta = 1$  рад/(сВ),  $T_M = 0.1$  с та  $T_e = 0.05$  с. Із зіставлення виразів (2.28) та (А.1) додатка А випливає, що коефіцієнти передаточної функції ВД:  $b_0 = K_\delta = 1$ ,  $a_2 = T_M T_e = 0.005$ ,  $a_1 = T_M = 0.1$ ,  $a_0 = 1$ . Тому в командному вікні (**Command Window**) програмної оболонки Matlab необхідно набрати:

$$\mathbf{K} = \mathbf{tf}([1],[0.005 \ 0.1 \ 1])$$

та натиснути **Enter**.

Після введення функції **tf** у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті Matlab змінна Лапласа  $p$  відображається літерою  $s$ ).

2 Побудувати перехідну характеристику ПВД. Для цього згідно з п. А.3 додатка А в командному вікні набрати:

$$\mathbf{step}(\mathbf{K})$$

та натиснути **Enter**.

Після введення функції **step** з'являється вікно **Figure 1**, у якому побудована перехідна характеристика ВД – крива розгону при  $E_0 = 1$  В. Нанести масштабну сітку, після чого перерисувати до звіту отриманий графік.

3 Повторити дослідження для  $T_M = 0.2$  с. Отримані графіки креслити один на одному, щоб отримати сім'ю характеристик.

Звернути увагу на те, що:

1) час встановлення усталеної швидкості зростає практично пропорційно електромеханічній постійній  $T_M$  ВД (інерційності рухомих частин);

2) якщо  $T_M < 4T_e$ , то графік кривої розгону ВД має коливальний характер, а при  $T_M > 4T_e$  – монотонний характер.

За результатами досліджень записати відповідні висновки.

## 2.6 Зміст звіту

1 Назва і мета роботи.

2 Схема досліджуваного функціонального блока (пневматичного або електричного двигуна).

3 Аналітичні вирази: диференціального рівняння "вхід-вихід", оператора передачі, передаточної функції та перехідної характеристики (кривої розгону) досліджуваного функціонального блока.

4 Схеми математичних моделей досліджуваного функціонального блока в часовій області та в зображеннях за Лапласом.

5 Побудовані сім'ї графіків перехідної характеристики (кривої розгону).

6 Висновки за результатами лабораторної роботи.

## 2.7 Контрольні запитання

1 Викладіть алгоритм знаходження диференціального оператора передачі за диференціальним рівнянням "вхід-вихід".

2 Дайте визначення імпульсної характеристики системи.

3 Запишіть оператор "вхід-вихід", побудований на основі імпульсної характеристики системи.

4 Дайте визначення перехідної характеристики системи.

5 Як пов'язані між собою імпульсна та перехідна характеристики?

6 Дайте визначення передаточної функції системи.

7 Як пов'язані між собою передаточна функція та диференціальний оператор передачі?

8 Запишіть оператор "вхід-вихід", побудований на основі передаточної функції системи.

9 Диференціальне рівняння "вхід-вихід" динамічної системи має вигляд

$$a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot x(t).$$

Визначити:

1) диференціальний оператор передачі  $K(D)$ ;

2) передаточну функцію  $K(p)$ ;

3) імпульсну характеристику  $k(t)$ ;

4) перехідну характеристику  $h(t)$ .

## **3 ПЕРЕХІДНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНИХ ЛАНОК**

### **3.1 Мета роботи**

1 Дослідити вплив параметрів лінійних ланок на їх перехідні характеристики.

2 Закріпити навички отримання перехідних характеристик за допомогою пакета програм Control System програмної оболонки Matlab.

### **3.2 Програма виконання роботи**

1 Експериментальне дослідження впливу параметрів інерційної ланки на її перехідну характеристику.

2 Експериментальне дослідження впливу параметрів коливальної ланки на її перехідну характеристику.

### **3.3 Підготовка до роботи**

1 За рекомендованою літературою [1, 3-8], конспектом лекцій та додатком В у позааудиторний час вивчити:

- мету, програму і методичні вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: елементарні ланки та їх часові характеристики.

2 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

3 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

### **3.4 Короткі відомості з теорії**

Перехідною характеристикою називається реакція динамічної системи на вхідне діяння у вигляді одиничної функції за нульовими початковими умовами.

Вхідне діяння у вигляді одиничної функції описується виразом

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0, \\ 1, & \text{якщо } t > 0. \end{cases}$$



У роботі досліджується вплив параметрів двох лінійних ланок – інерційної ланки та коливальної ланки – на перехідну характеристику.

Інерційна (аперіодична) ланка має таку передаточну функцію:

$$K(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1}, \quad (3.1)$$

де  $K$  – коефіцієнт підсилення ( у елементарної інерційної ланки  $K=1$ );

$T$  – постійна часу інерційної ланки, с.

Перехідну характеристику інерційної ланки знайдемо за допомогою алгоритму (2.7), заснованого на перетворенні Лапласа:

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \{ K(p) \cdot L \{ 1(t) \} \} = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{K}{p \cdot (T \cdot p + 1)} \right\} = K \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Графік перехідної характеристики інерційної ланки зображений на рисунку 3.1. При подачі на вхід інерційної ланки одиничної функції її вихідна величина монотонно зростає до усталеного значення  $h(\infty)$ , що дорівнює коефіцієнту підсилення ланки  $K$ .

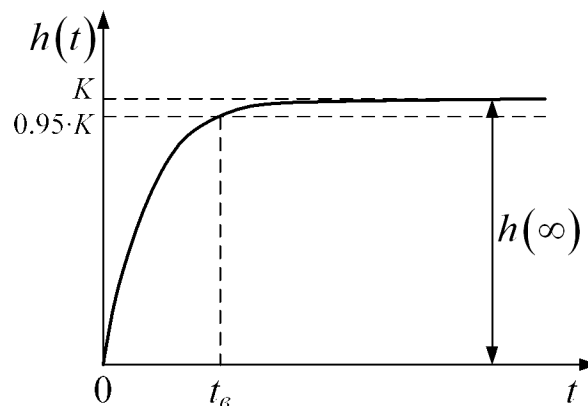


Рисунок 3.1 – Графік перехідної характеристики інерційної ланки

Важливим кількісним показником перехідної характеристики є час встановлення  $t_g$ . Під ним розуміється інтервал часу, протягом якого перехідна характеристика досягає рівня 0.95 від усталеного значення:

$$h(t_g) = 0.95 \cdot h(\infty). \quad (3.3)$$

З виразів (3.2) і (3.3) випливає, що

$$\frac{h(t_g)}{h(\infty)} = 1 - e^{-\frac{t_g}{T}} = 0.95,$$

звідки маємо

$$t_g = -T \cdot \ln(0.05) \approx 3 \cdot T, \quad (3.4)$$

тобто час встановлення перехідної характеристики інерційної ланки прямо пропорційний її постійній часу.

Коливальна ланка має таку передаточну функцію:

$$K(p) = \frac{K}{T_0^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T_0 \cdot p + 1}, \quad (3.5)$$

де  $K$  – коефіцієнт підсилення (у елементарної коливальної ланки  $K=1$ );

$T_0$  – постійна часу коливальної ланки, с;

$\xi$  – відносний коефіцієнт згасання ( $0 < \xi < 1$ ).

Перехідна характеристика коливальної ланки, яка може бути отримана з передаточної функції за стандартною методикою, визначається виразом

$$h(t) = K \cdot \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \cdot \frac{t}{T_0}}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin(\omega_g \cdot t + \theta) \right] \cdot 1(t), \quad (3.6)$$

де  $\theta$  – початковий фазовий зсув.

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = \arcsin \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Перехідна характеристика коливальної ланки має вигляд згасаючих коливань, які встановлюються на рівні усталеного значення  $h(\infty)$ , що дорівнює коефіцієнту підсилення  $K$  (рисунок 3.2).

Основними показниками, що кількісно характеризують перехідну характеристику коливальної ланки, є час встановлення  $t_\sigma$  та величина відносного максимального викиду  $\sigma$ .

Для коливальної ланки час встановлення визначається за моментом, коли перехідна характеристика входить до меж смуги  $\pm 0.05 \cdot h(\infty)$  (рисунок 3.2).

Величина відносного максимального викиду характеризує ступінь коливальності перехідної характеристики і визначається виразом

$$\sigma = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100 \%, \quad (3.7)$$

де  $h_{max}$  – максимальне значення перехідної характеристики.

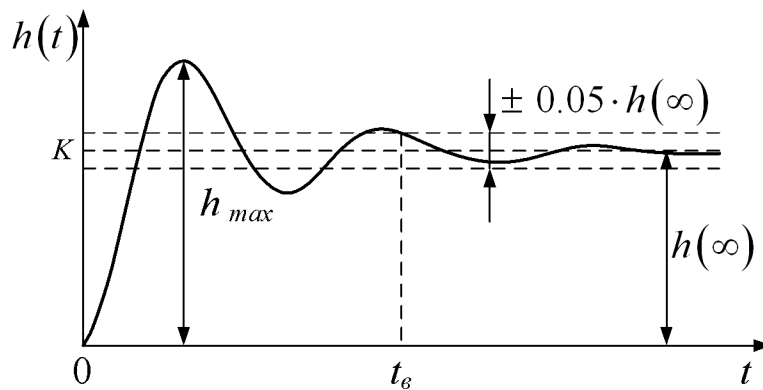


Рисунок 3.2 – Графік перехідної характеристики коливальної ланки

В інженерній практиці широке застосування знайшла нормована перехідна характеристика коливальної ланки, яку отримують з перехідної характеристики шляхом введення нормованого (безрозмірного) часу  $\tau = t/T_0$  та нормуванням її до усталеного значення:

$$h_n(\tau) = \frac{h(t/T_0)}{h(\infty)} = \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \cdot \tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\tau\sqrt{1-\xi^2} + \theta) \right] \cdot 1(\tau). \quad (3.8)$$

Сім'я нормованих перехідних характеристик коливальної ланки для різних значень відносного коефіцієнта згасання  $\xi$  зображена на рисунку 3.3.

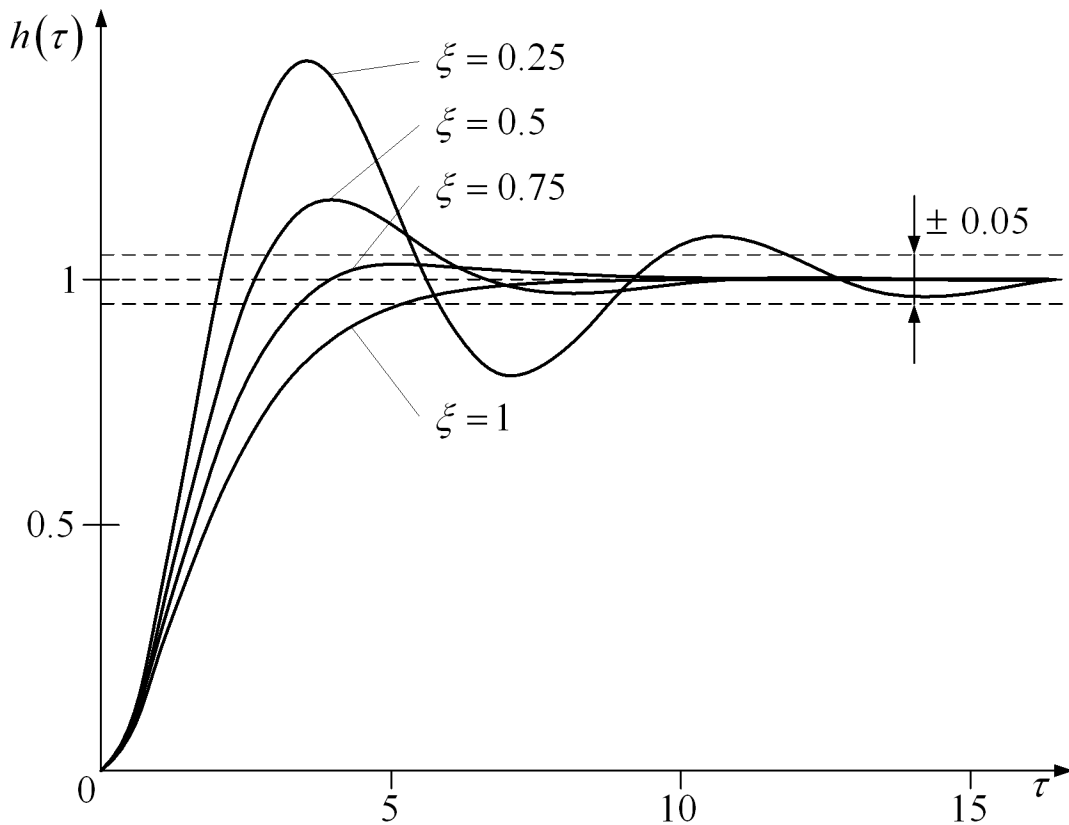


Рисунок 3.3

Користуючись сім'єю нормованих перехідних характеристик, проведемо аналіз впливу відносного коефіцієнта згасання на перехідну характеристику.

Залежність нормованого часу встановлення  $\tau_e = f_1(\xi)$  зображена на рисунку 3.4. Зі збільшенням відносного коефіцієнта згасання  $\xi$  час встановлення спочатку зменшується у зв'язку зі зменшенням ступеня коливальності перехідної характеристики, а потім починає зростати, що обумовлено зменшенням коливальної

складової перехідної характеристики. Мінімальне значення часу встановлення спостерігається при  $\xi \approx 0.7 \dots 0.8$ .

Відзначимо, що нормовані перехідні характеристики не залежать від постійної часу ланки  $T_0$ . Перехід від нормованого часу  $\tau$  до абсолютного  $t$  здійснюється за правилом  $t = \tau \cdot T_0$ , тому час встановлення прямо пропорційний постійній часу ланки:

$$t_e = \tau_e \cdot T_0, \quad (3.9)$$

де  $\tau_e$  – безрозмірний час встановлення, що визначається по моменту, починаючи з якого нормована перехідна характеристика не виходить за межі  $0.95 \dots 1.05$  (рисунок 3.2).

Залежність відносного максимального викиду  $\sigma = f_2(\xi)$  зображена на рисунку 3.5. Зі збільшенням відносного коефіцієнта згасання  $\xi$  зменшується ступінь коливальності перехідної характеристики, і тому відносний максимальний викид також монотонно зменшується від 100 до 0 %.

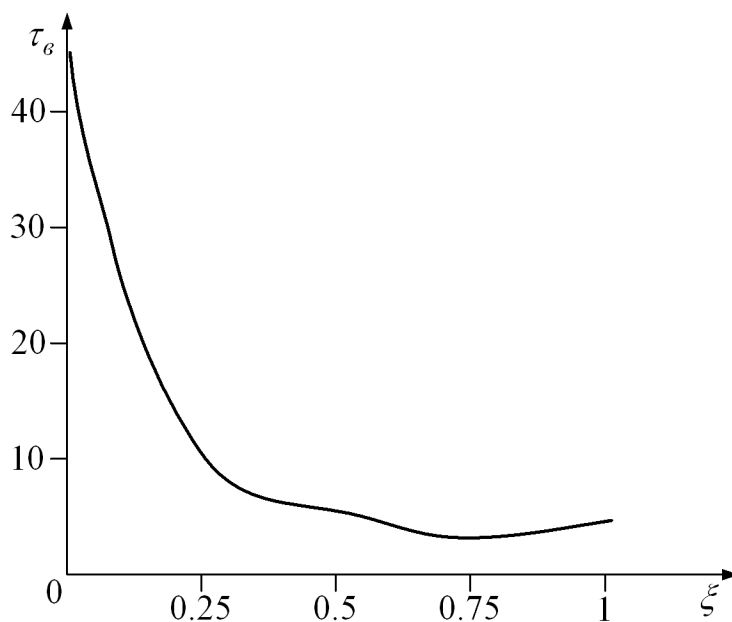


Рисунок 3.4

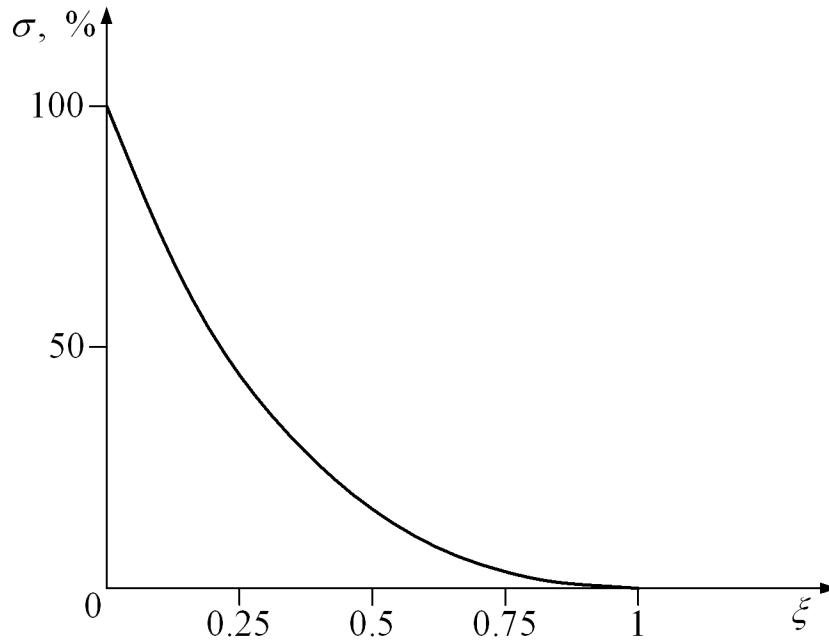


Рисунок 3.5

### 3.5 Вказівки щодо виконання роботи

Дослідження часових характеристик лінійних ланок проводиться за допомогою пакета Control System програмної оболонки Matlab.

#### 3.5.1 Експериментальне дослідження впливу параметрів інерційної ланки на її перехідну характеристику

1 Завантажити програмну оболонку Matlab двократним натисканням відповідної піктограми.

2 Задати передаточну функцію інерційної ланки з параметрами: коефіцієнт підсилення  $K = 1$ , постійна часу  $T = 0.05$  с. З виразів (3.1) та (A.1) додатка А випливає, що  $b_0 = K = 1$ ,  $a_1 = T = 0.05$ ,  $a_0 = 1$ . Тому в командному вікні (**Command Window**) програмної оболонки Matlab необхідно набрати:

$$K = \text{tf}([1],[0.05 \ 1])$$

та натиснути **Enter**.

Після введення функції **tf** у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті Matlab змінна Лапласа  $p$  відображається літерою  $s$ ).

3 Запустити програму на виконання розрахунку перехідної характеристики. Для цього згідно з п. А.3 додатка А в командному вікні (**Command Window**) набрати:

**step (K); grid**

та натиснути **Enter**<sup>1</sup>.

Після виконання програми з'являється вікно **Figure 1**, у якому побудована перехідна характеристика з нанесеною масштабною сіткою. Перерисувати до звіту отриманий графік перехідної характеристики.

На графіку перехідної характеристики визначити та занести до таблиці 3.1 значення часу встановлення. Для визначення значення часу встановлення у вікні "Figure 1" підвести покажчик "миші" до рівня 0.95, натиснути на ліву кнопку "миші" і, не відпускаючи її, перемістити покажчик "миші" таким чином, щоб було виділене потрібне значення перехідної характеристики та часу її встановлення.

Таблиця 3.1 – Вплив постійної часу на час встановлення перехідної характеристики інерційної ланки

$T, \text{с}$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1
$t_e, \text{с}$							

4 Повторити експеримент для інерційної ланки з постійними часу  $T = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1 \text{ с}$ .

5 За результатами досліджень побудувати залежність  $t_e(T)$ , Порівняти отриману залежність з аналітичною (вираз (3.4)) й зробити відповідні висновки.

---

<sup>1</sup> З метою скорочення часу можна суміщати команди набору передаточної функції та виконання розрахунків (наприклад: **K=tf([1],[0.05 1]);step (K);grid**). Однак при цьому набрана передаточна функція не буде видаватись на екран.

### 3.5.2 Експериментальне дослідження впливу параметрів коливальної ланки на її перехідну характеристику

#### *А Дослідження впливу відносного коефіцієнта згасання коливальної ланки на її перехідну характеристику*

1 Задати передаточну функцію коливальної ланки з параметрами: коефіцієнт підсилення  $K = 1$ , постійна часу  $T_0 = 0.1$  с, відносний коефіцієнт згасання  $\xi = 0.15$ . Згідно з виразами (3.5) та (А.1) додатка А маємо

$$b_0 = K = 1, a_2 = T_0^2 = 0.01 \text{ с}^2, a_1 = 2\xi \cdot T_0 = 0.03, a_0 = 1.$$

Тому в командному вікні (**Command Window**) треба набрати:

$$\mathbf{K} = \text{tf}([1],[0.01 \quad 0.03 \quad 1])$$

та натиснути **Enter**.

2 За допомогою команд **step (K); grid** запустити програму на виконання розрахунку перехідної характеристики.

На графіку перехідної характеристики визначити та занести до таблиці 3.2 значення часу встановлення  $t_e$  та величини відносного максимального викиду  $\sigma$ . Для визначення значення часу встановлення у вікні **Figure 1** необхідно натиснути на ліву кнопку "миші" і, не відпускаючи її, перемістити покажчик "миші" таким чином, щоб значення перехідної характеристики вперше ввійшло в межі від 0.95 до 1.05 і більш не виходило з них.

Для визначення величини відносного максимального викиду у вікні **Figure 1** натиснути на ліву кнопку "миші" і, не відпускаючи її, перемістити покажчик "миші" таким чином, щоб було визначене максимальне значення  $h_{max}$  перехідної характеристики. Далі за формулою (3.7) розрахувати величину відносного максимального викиду з урахуванням того, що  $h(\infty) = 1$ .

3 Повторити експеримент для коливальної ланки з відносним коефіцієнтом згасання  $\xi = 0.25, 0.5, 0.75, 1$  (відповідні значення параметрів  $a_2$  та  $a_1$  передаточної функції наведені в таблиці 3.2).



Таблиця 3.2 – Вплив відносного коефіцієнта згасання на параметри перехідної характеристики коливальної ланки

$\xi$	0.15	0.25	0.5	0.75	1
$a_2 = T_0^2, \text{с}^2$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$a_1 = 2 \cdot \xi \cdot T_0, \text{с}$	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
$t_g, \text{с}$					
$h_{max}$					
$\sigma, \%$					

4 За результатами досліджень побудувати залежності  $t_g(\xi)$  та  $\sigma(\xi)$  й зробити відповідні висновки.

***Б Дослідження впливу постійної часу коливальної ланки на її перехідну характеристику***

1 У командному вікні (Command Window) задати передаточну функцію коливальної ланки з параметрами: коефіцієнт підсилення  $K = 1$ , постійна часу  $T_0 = 0.1 \text{ с}$ , відносний коефіцієнт згасання  $\xi = 0.5$ . Для цього треба набрати:

$$\mathbf{K} = \mathbf{tf}([1],[0.01 \ 0.1 \ 1])$$

та натиснути **Enter**.

2 За допомогою команд **step (K); grid** запустити програму на виконання розрахунку перехідної характеристики.

На графіку перехідної характеристики визначити та занести до таблиці 3.3 значення часу встановлення  $t_g$  та величини відносного максимального викиду  $\sigma$ .

3 Повторити експеримент для коливальної ланки з постійною часу  $T_0 = 0.5$  та  $1 \text{ с}$ .

4 За результатами досліджень побудувати залежності  $t_g(T_0)$  та  $\sigma(T_0)$  й зробити відповідні висновки.

Таблиця 3.3 – Вплив постійної часу на параметри перехідної характеристики коливальної ланки

$T_0, \text{с}$	0.1	0.5	1
$a_2 = T_0^2, \text{с}^2$	0.01	0.25	1
$a_1 = 2 \cdot \xi \cdot T_0, \text{с}$	0.1	0.5	1
$t_g, \text{с}$			
$h_{max}$			
$\sigma, \%$			

### 3.6 Зміст звіту

- 1 Назва і мета роботи.
- 2 Таблиці 3.1 – 3.3 з результатами досліджень.
- 3 Залежності, отримані в результаті досліджень.
- 4 Висновки про вплив параметрів ланок на перехідну характеристику.

### 3.7 Контрольні запитання

- 1 Дайте визначення перехідної характеристики.
- 2 Запишіть аналітичний вираз та якісно побудуйте графік перехідної характеристики інерційної ланки з коефіцієнтом підсилення  $K$  і постійною часу  $T$ .
- 3 Поясніть, як впливають параметри інерційної ланки на час встановлення її перехідної характеристики.
- 4 На рисунку 3.6 наведена перехідна характеристика інерційної ланки. Визначити її параметри та записати передаточну функцію.
- 5 Яким буде усталене значення  $h(\infty)$  та час встановлення  $t_g$  перехідної характеристики ланки, якщо її передаточна функція

$$K(p) = \frac{2}{p+2}.$$

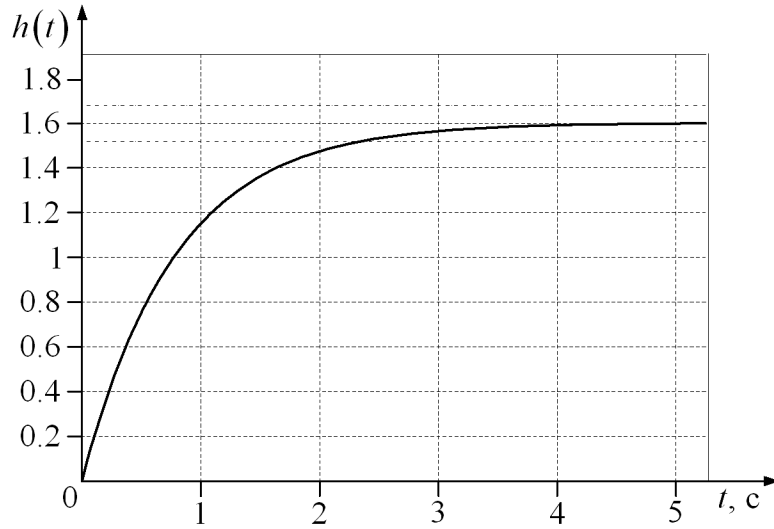


Рисунок 3.6

6 Визначте час встановлення та величину відносного максимального викиду перехідної характеристики коливальної ланки, наведеної на рисунку 3.7.

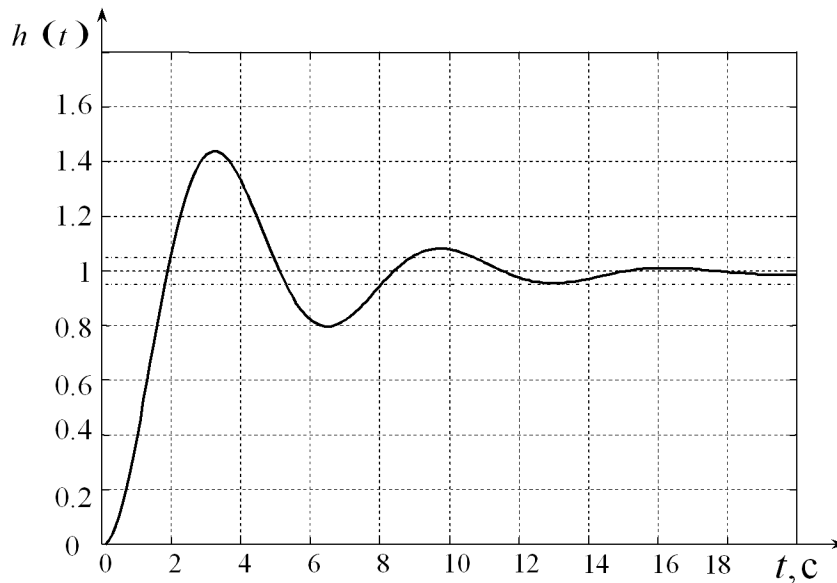


Рисунок 3.7

7 Користуючись нормованими перехідними характеристиками коливальної ланки (рисунок 3.3), поясніть, як впливає відносний коефіцієнт згасання  $\xi$  на час встановлення і величину відносного максимального викиду її перехідної характеристики.

## **4 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНИХ ЛАНОК**

### **4.1 Мета роботи**

1 Дослідити вплив параметрів лінійних ланок на їх частотні характеристики.

2 Набути навичок в отриманні частотних характеристик неперервних САК за допомогою пакета програм Control System програмної оболонки Matlab.

### **4.2 Програма виконання роботи**

1 Дослідження впливу параметрів інерційної ланки на її частотні характеристики.

2 Дослідження впливу параметрів коливальної ланки на її частотні характеристики.

### **4.3 Підготовка до роботи**

1 За рекомендованою літературою [1, 3-8], конспектом лекцій та додатком В у позааудиторний час вивчити:

- мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: частотні характеристики лінійних динамічних систем; елементарні ланки та їх частотні характеристики.

2 Ознайомитись з порядком користування пакетом Control System програмної оболонки Matlab для побудови логарифмічних частотних характеристик (додаток Б).

3 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

4 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

### **4.4 Короткі відомості з теорії**

При аналізі САК найбільше застосування знайшли комплексна частотна, амплітудно-частотна й фазочастотна характеристики.

*Комплексною частотною характеристикою* системи називається перетворення Фур'є її імпульсної характеристики:

$$K(j\omega) = F\{k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt. \quad (4.1)$$

Комплексна частотна характеристика системи є комплексно-значною функцією, тому вона може бути подана в показниковій формі:

$$K(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}, \quad (4.2)$$

де  $K(\omega)$  – модуль комплексної частотної характеристики;  
 $\varphi(\omega)$  – аргумент комплексної частотної характеристики.

Модуль комплексної частотної характеристики системи називається *амплітудно-частотною характеристикою* (АЧХ), а аргумент – *фазочастотною характеристикою* (ФЧХ).

У більшості випадків частотні методи аналізу й синтезу САК є графоаналітичними, тому для їх застосування необхідно будувати частотні характеристики. Побудова частотних характеристик істотно спрощується при використанні логарифмічного масштабу. У зв'язку з цим вводяться логарифмічні частотні характеристики.

*Логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою* (ЛАЧХ) системи називається 20 десяткових логарифмів АЧХ:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K(\omega). \quad (4.3)$$

В цьому випадку величина підсилення виражається в логарифмічних одиницях – децибелах (дБ).

Логарифмічна фазочастотна характеристика (ЛФЧХ) системи являє собою фазочастотну характеристику, що будується як функція логарифма частоти.

При побудові ЛАЧХ і ЛФЧХ по осі абсцис відкладається частота  $\omega$  в логарифмічному масштабі ( $\lg(\omega)$  в лінійному масштабі), а тому відстань між частотами вимірюється логарифмічними одиницями (рисунок 4.1). Інтервал між частотами, значення яких відрізняються у два рази ( $\omega_2 / \omega_1 = 2$ ), називається *октавою*. Інтервал між частотами, значення яких відрізняються в десять разів

( $\omega_2 / \omega_1 = 10$ ), називається *декадою*. Оскільки при  $\omega = 0$  величина  $\lg(\omega) = -\infty$ , шкала ординат проводиться через довільну точку осі абсцис, виходячи з розуміння зручності побудови логарифмічних частотних характеристик.

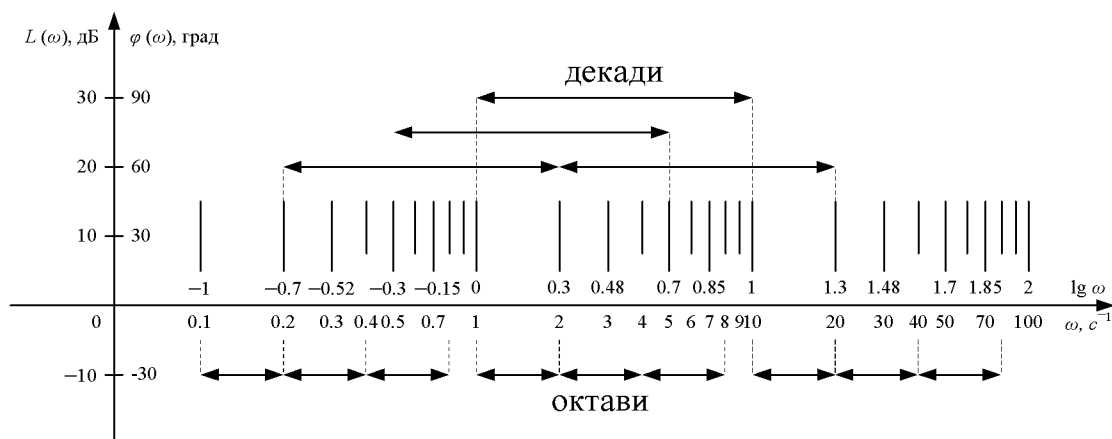


Рисунок 4.1 – Масштаб для побудови логарифмічних частотних характеристик

Розглянемо частотні характеристики аперіодичної (інерційної) та коливальної ланок.

Комплексна частотна характеристика інерційної ланки може бути знайдена за передаточною функцією (3.1) шляхом відповідної формальної заміни

$$K(j\omega) = K(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{K}{j\omega \cdot T + 1}. \quad (4.4)$$

Для визначення АЧХ і ФЧХ перетворимо вираз (4.4) таким чином, щоб у ньому фігурували дійсна й уявна частини КЧХ:

$$K(j\omega) = \frac{K}{j\omega \cdot T + 1} \cdot \frac{1 - j\omega \cdot T}{1 - j\omega \cdot T} = \frac{K}{1 + (\omega \cdot T)^2} - j \frac{K \cdot \omega \cdot T}{1 + (\omega \cdot T)^2}.$$

Звідси випливає, що АЧХ і ФЧХ інерційної ланки визначаються виразами:

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega \cdot T)^2}}, \quad (4.5)$$

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = -\arctg(\omega \cdot T). \quad (4.6)$$

ЛАЧХ інерційної ланки впливає з виразу (4.5):

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{1+(\omega \cdot T)^2}} = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{1+(\omega \cdot T)^2}. \quad (4.7)$$

Вона є нелінійною функцією  $\lg(\omega)$ . Для спрощення побудови зазвичай користуються асимптотичною ЛАЧХ інерційної ланки. Вона визначається асимптотичними наближеннями ЛАЧХ при  $\omega \rightarrow 0$  і  $\omega \rightarrow \infty$ . Як впливає з виразу (4.7)

$$L_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} L(\omega) = 20 \cdot \lg K, \quad (4.8)$$

$$L_\infty(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{K}{T} - 20 \cdot \lg(\omega). \quad (4.9)$$

Асимптота  $L_0(\omega)$  являє собою низькочастотну асимптоту – пряму, що проходить паралельно осі абсцис на рівні  $20 \cdot \lg K$  (у елементарної інерційної ланки при  $K=1$  – на рівні 0 дБ). Асимптота  $L_\infty(\omega)$  являє собою високочастотну асимптоту – пряму, що проходить з нахилом  $-20$  дБ/дек. У точці спряження (з'єднання) асимптот виконується умова

$$L_0(\omega_c) = L_\infty(\omega_c).$$

Прирівнюючи (4.8) та (4.9), отримуємо, що частота спряження асимптот  $\omega_c = 1/T$ . Відзначимо, що, як впливає з виразу (4.5), на частоті спряження асимптот фактична АЧХ інерційної ланки проходить на рівні  $K/\sqrt{2} \approx 0.707 \cdot K$ . Тому значення частоти

спряження одночасно дорівнює значенню смуги перепускання інерційної ланки, яка з точки зору її частотних властивостей є фільтром низьких частот.

Графіки асимптотичної ЛАЧХ і ЛФЧХ інерційної ланки зображені на рисунку 4.2 суцільною та штрихпунктирною лініями відповідно. Там же пунктирною лінією показана фактична ЛАЧХ інерційної ланки. Вона добре збігається з асимптотичною ЛАЧХ при  $\omega < (0.2 \dots 0.3) \cdot \omega_c$  та  $\omega > (3 \dots 5) \cdot \omega_c$ . Найбільша відмінність між ними існує на частоті спряження асимптот та дорівнює  $-3$  дБ ( $20 \cdot \lg(K/\sqrt{2}) - 20 \cdot \lg K = -3$  дБ).

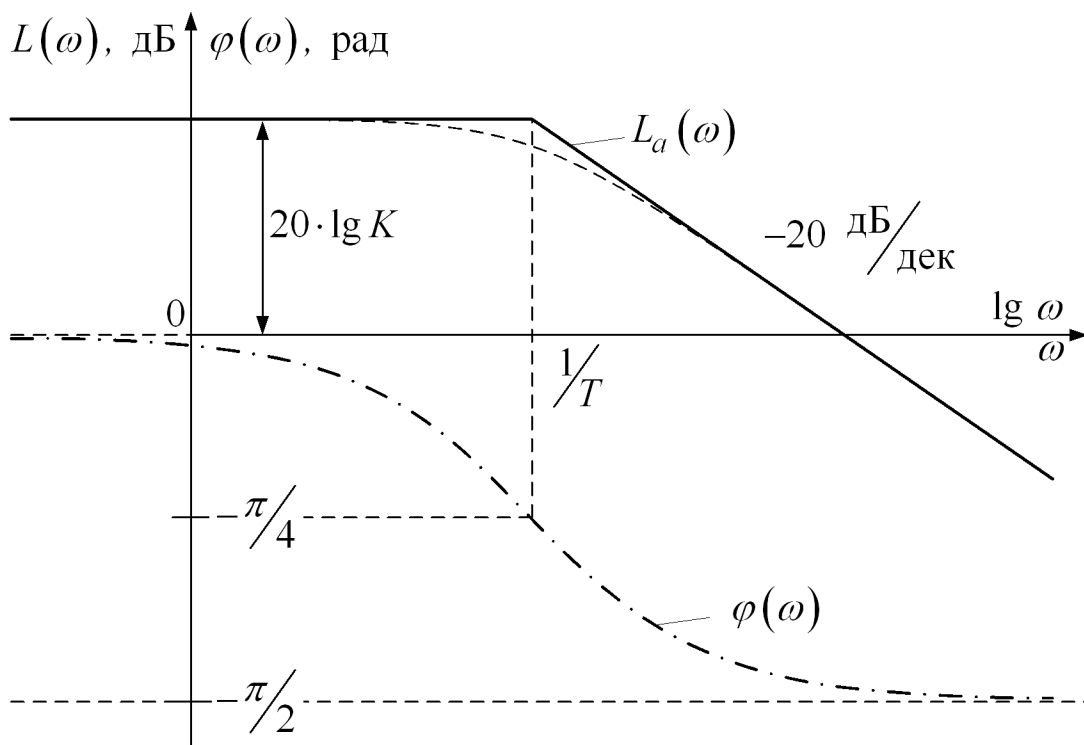


Рисунок 4.2

Комплексна частотна характеристика коливальної ланки може бути знайдена за передаточною функцією (3.5) шляхом відповідної формальної заміни



$$K(j\omega) = K(p)\Big|_{p=j\omega} = \frac{K}{1 - (\omega \cdot T_0)^2 + j\omega \cdot 2 \cdot \xi \cdot T_0}.$$

Звідси випливає, що АЧХ і ФЧХ коливальної ланки визначаються виразами:

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - (\omega \cdot T_0)^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot T_0 \cdot \omega)^2}}; \quad (4.10)$$

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \xi \cdot T_0 \cdot \omega}{1 - (\omega \cdot T_0)^2}, \omega < \frac{1}{T_0}; \\ -\frac{\pi}{2}, \omega = \frac{1}{T_0}; \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \xi \cdot T_0 \cdot \omega}{1 - (\omega \cdot T_0)^2}, \omega > \frac{1}{T_0}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Частотні характеристики коливальної ланки істотно залежать від значення відносного коефіцієнта згасання  $\xi$ : при  $0.707 < \xi < 1$  вона має властивості фільтра нижніх частот, а при  $\xi < 0.707$  – властивості резонансного фільтра. В останньому випадку АЧХ має максимум

$$K_{max} = \frac{K}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.12)$$

на резонансній частоті

$$\omega_p = \frac{\sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}}{T_0}. \quad (4.13)$$

ЛАЧХ коливальної ланки впливає з виразу (4.10):

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{\left(1 - (\omega \cdot T_0)^2\right)^2 + (2 \cdot \xi \cdot T_0 \cdot \omega)^2}. \quad (4.14)$$

Вона є нелінійною функцією  $\lg(\omega)$ . Для спрощення побудови зазвичай користуються асимптотичною ЛАЧХ коливальної ланки

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \cdot \lg K, & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T_0}, \\ 20 \cdot \lg \frac{K}{T_0^2} - 40 \cdot \lg(\omega), & \text{при } \omega \geq \frac{1}{T_0}, \end{cases} \quad (4.15)$$

яку вводять аналогічно асимптотичній ЛАЧХ інерційної ланки.

Відповідно до виразу (4.15) асимптотична ЛАЧХ коливальної ланки складається з відрізків двох прямих, що з'єднуються (спрягуються) в точці з частотою, оберненою до постійної часу ланки:

$$\omega_0 = 1/T_0. \quad (4.16)$$

Ліворуч від частоти спряження вона йде паралельно осі абсцис на рівні  $20 \cdot \lg K$  (у елементарної коливальної ланки при  $K=1$  – на рівні 0 дБ), а праворуч від частоти спряження вона йде з нахилом – 40 дБ/дек. Графік асимптотичної ЛАЧХ коливальної ланки зображений на рисунку 4.3 суцільною лінією.

Графіки фактичних ЛАЧХ та графіки ЛФЧХ коливальної ланки для двох значень відносного коефіцієнта згасання  $\xi$  зображені на рисунку 4.3 пунктирними та штрихпунктирними лініями відповідно. Фактичні ЛАЧХ добре збігаються з асимптотичною ЛАЧХ при  $\omega < (0.1 \dots 0.5) \cdot \omega_0$  і  $\omega > (2 \dots 10) \cdot \omega_0$ . Найбільша відмінність між ними спостерігається поблизу частот резонансу  $\omega_p$  та спряження асимптот  $\omega_0$ . На цих частотах значення фактичних ЛАЧХ суттєво залежать від величини відносного коефіцієнта згасання  $\xi$ . Як впливає з виразів (4.12), (4.14) та (4.16), тут фактична ЛАЧХ дорівнює

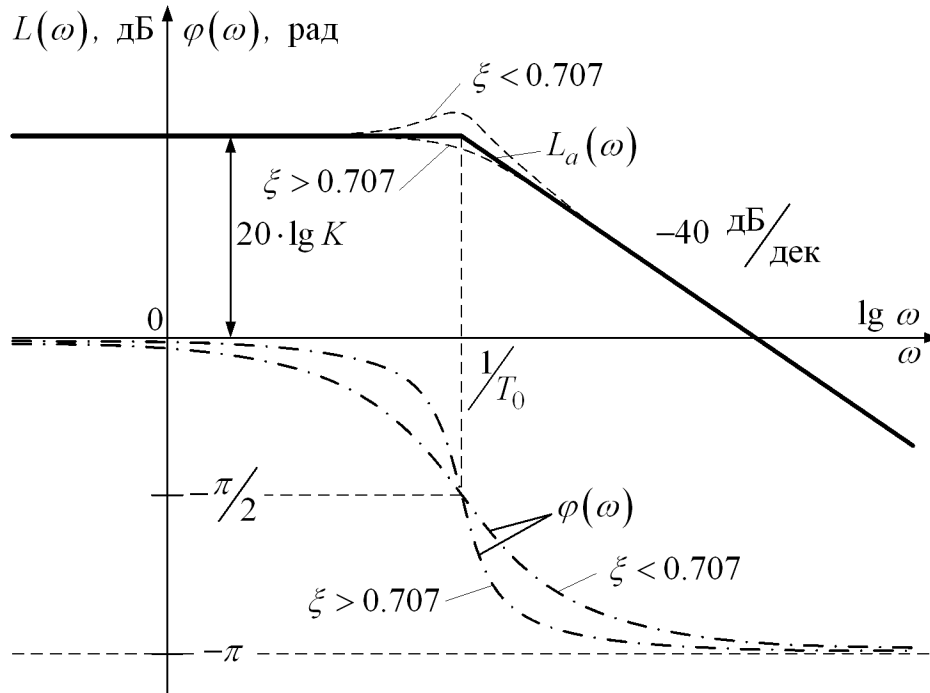


Рисунок 4.3

$$L_{max} = 20 \cdot \lg K_{max} = 20 \cdot \lg \left( \frac{K}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \right), \quad (4.17)$$

$$L(\omega_0) = 20 \cdot \lg (K / (2 \cdot \xi)).$$

## 4.5 Вказівки щодо виконання роботи

### 4.5.1 Дослідження впливу параметрів інерційної ланки на її частотні характеристики

1 На бланку з логарифмічним масштабом (додаток Г) побудувати асимптотичні ЛАЧХ інерційних ланок з коефіцієнтом підсилення  $K = 1$  і постійними часу  $T = 0.05$  с та  $0.5$  с.

Проаналізувати вплив постійної часу на величину смуги перепускання інерційної ланки як фільтра низьких частот.

2 Натисканням відповідної піктограми запустити програмну оболонку Matlab.

Задати передаточну функцію інерційної ланки з параметрами: коефіцієнт підсилення  $K = 1$ , постійна часу  $T = 0.05$  с. З виразів (3.1) та (А.1) додатка А випливає, що  $b_0 = K = 1$ ,  $a_1 = T = 0.05$ ,  $a_0 = 1$ . Тому в командному вікні (**Command Window**) програмної оболонки Matlab необхідно набрати:

$$K = \text{tf}([1],[0.05 \ 1])$$

та натиснути **Enter**.

Після введення функції **tf** у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті Matlab змінна Лапласа  $p$  відображається літерою  $s$ ).

3 Запустити програму на виконання розрахунку логарифмічних частотних характеристик. Для цього в командному вікні згідно з п. А.4 додатка А набрати:

$$\text{bode}(K); \text{grid}$$

та натиснути **Enter**.

Після виконання команди з'являється вікно **Figure 1**, у якому побудовані ЛАЧХ та ЛФЧХ з нанесеною у логарифмічному масштабі сіткою.

Виміряти значення ЛАЧХ інерційної ланки на частоті спряження  $\omega_c = 1/T$  та відзначити його на бланку з логарифмічним масштабом, де були побудовані асимптотичні ЛАЧХ інерційних ланок. Для вимірювання у вікні **Figure 1** необхідно натиснути на ліву кнопку "миші" і, не відпускаючи її, перемістити покажчик "миші" на ту точку графіка ЛАЧХ, де  $\omega = \omega_c = 1/T = 20 \text{ с}^{-1}$ . З урахуванням отриманої точки якісно побудувати експериментально отриману ЛАЧХ інерційної ланки.

Виміряти декілька точок ЛФЧХ, занести їх до таблиці 4.1. На бланку з ЛАЧХ побудувати експериментально отриману ЛФЧХ.

Таблиця 4.1 – Експериментальні дані для побудови ЛФЧХ

$\omega, \text{с}^{-1}$							
$\varphi(\omega), \text{град.}$							

4 Повторити експеримент для інерційної ланки з постійною часу  $T = 0.5$  с.

5 Зіставити частотні характеристики інерційної ланки з її перехідними характеристиками, отриманими в роботі 3. Звернути увагу на існування обернено пропорційного зв'язку між величиною смуги перепускання інерційної ланки та величиною часу встановлення  $t_e$  її перехідної характеристики.

#### **4.5.2 Дослідження впливу параметрів коливальної ланки на її частотні характеристики**

1 На бланку з логарифмічним масштабом (додаток Г) побудувати асимптотичну ЛАЧХ коливальної ланки з коефіцієнтом підсилення  $K = 1$  та постійною часу  $T_0 = 0.1$  с.

2 У командному вікні задати передаточну функцію коливальної ланки з параметрами: коефіцієнт підсилення  $K = 1$ , постійна часу  $T_0 = 0.1$  с, відносний коефіцієнт згасання  $\xi = 0.15$ . Згідно з виразами (3.5) та (А.1) додатка А маємо:

$$b_0 = K = 1, a_2 = T_0^2 = 0.01 \text{ с}^2, a_1 = 2\xi \cdot T_0 = 0.03 \text{ с}, a_0 = 1.$$

Тому в командному вікні (**Command Window**) треба набрати:

$$\mathbf{K} = \mathbf{tf}([1],[0.01 \quad 0.03 \quad 1])$$

та натиснути **Enter**.

3 За допомогою команд **bode (K); grid** запусити програму на виконання розрахунку логарифмічних частотних характеристик.

На графіку з ЛАЧХ виміряти та занести в таблицю 4.2 максимальне значення ЛАЧХ  $L_{max}$  і резонансну частоту  $\omega_p$ , а також значення ЛАЧХ на частоті спряження асимптот  $L(\omega_0)$ , де  $\omega_0 = 1/T_0$ . Для покращення точності вимірювань доцільно, спочатку активізувавши функцію збільшення масштабу  $\oplus$ , виділити прямокутником фрагмент ЛАЧХ поблизу частоти спряження, після чого знов скасувати функцію збільшення масштабу та провести необхідні вимірювання. Результати відзначити на бланку, де

побудована асимптотична ЛАЧХ, після чого якісно побудувати експериментально отриману ЛАЧХ.

Виміряти декілька точок ЛФЧХ, занести їх до таблиці за формою таблиці 4.1. На бланку побудувати експериментально отриману ЛФЧХ.

Таблиця 4.2 – Вплив відносного коефіцієнта згасання на резонансні властивості коливальної ланки

$\xi$	0.15	0.25	0.5	0.75	1
$a_2 = T_0^2, \text{с}^2$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$a_1 = 2 \cdot \xi \cdot T_0, \text{с}$	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
$L_{max}, \text{дБ}$					
$\omega_p, \text{с}^{-1}$					
$L(\omega_0), \text{дБ}$					

4 Повторити експеримент для коливальної ланки з відносним коефіцієнтом згасання  $\xi = 0.25, 0.5, 0.75$  та 1 (таблиця 4.2).

5 Побудувати графік залежності  $L_{max} = f(\xi)$ . Зробити висновок про вплив відносного коефіцієнта згасання на резонансні властивості коливальної ланки.

6 Зіставити частотні характеристики коливальної ланки з її перехідними характеристиками, отриманими в роботі 3. Звернути увагу на наявність взаємно однозначного зв'язку між резонансними властивостями АЧХ та ступенем коливальності перехідної характеристики.

7 Зробити висновки за результатами досліджень.

#### 4.6 Зміст звіту

1 Назва і мета роботи.

2 Асимптотичні ЛАЧХ та експериментально отримані ЛАЧХ та ЛФЧХ інерційної ланки з даними, необхідними для їх побудови.

3 Асимптотична ЛАЧХ та експериментально отримані ЛАЧХ та ЛФЧХ коливальної ланки з даними, необхідними для їх побудови.

4 Графік залежності  $L_{max} = f(\xi)$ .

5 Висновки про вплив параметрів лінійних ланок на їх ЛАЧХ, допустимість застосування асимптотичних ЛАЧХ і внесену при цьому похибку.

6 Висновки про характер зв'язку між частотними та перехідними характеристиками лінійних ланок.

#### 4.7 Контрольні запитання

1 Дайте перелік частотних характеристик динамічних систем.

2 Дайте визначення:

а) комплексної частотної характеристики;

б) амплітудно-частотної характеристики;

в) фазочастотної характеристики;

г) логарифмічної амплітудно-частотної характеристики;

д) логарифмічної фазочастотної характеристики.

3 Вкажіть зв'язок між комплексною частотною характеристикою, амплітудно-частотною характеристикою і фазочастотною характеристикою.

4 В яких одиницях вимірюється коефіцієнт підсилення при побудові ЛАЧХ?

5 Які частотні інтервали називаються октавою та декадою?

6 Побудуйте асимптотичні ЛАЧХ:

а) інерційної ланки з коефіцієнтом підсилення  $K$  і постійною часу  $T$ ;

б) коливальної ланки з коефіцієнтом підсилення  $K$  і постійною часу  $T_0$ .

7 Поясніть, як впливає відносний коефіцієнт згасання  $\xi$  на хід ЛАЧХ коливальної ланки.

8 Диференціальне рівняння "вхід-вихід" динамічної системи має вигляд

$$5 \cdot y'(t) + 2 \cdot y(t) = 10 \cdot x(t).$$

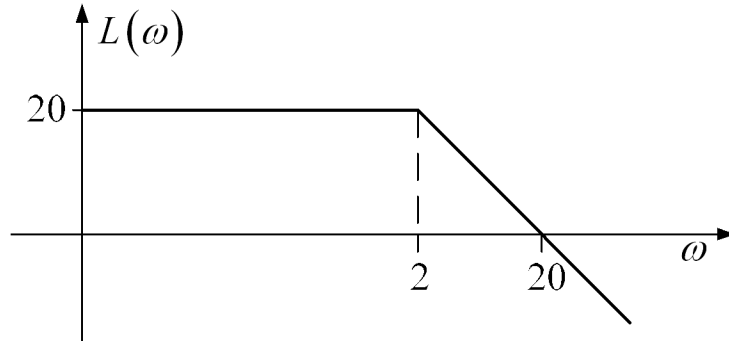
Виконати таке:

1) визначити оператор передачі системи  $K(D)$ ;

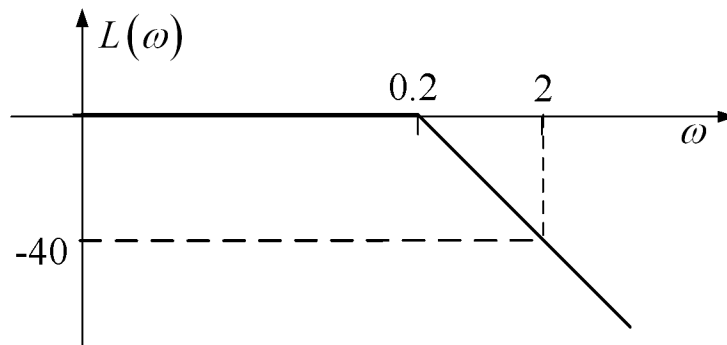
2) визначити передаточну функцію  $K(p)$ ;

3) побудувати асимптотичну ЛАЧХ системи.

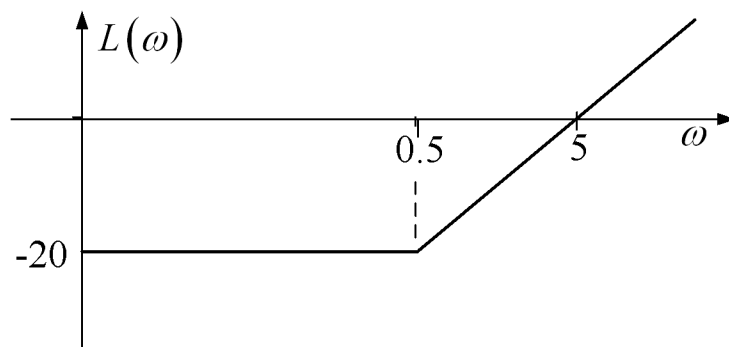
9 На рисунку 4.4,а –в наведені ЛАЧХ елементарних ланок. Записати їх передаточні функції та визначити параметри.



а



б



в

Рисунок 4.4



## **5 СХЕМИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ САК**

### **5.1 Мета роботи**

1 Засвоїти методику перетворення схем математичних моделей САК.

2 Засвоїти методику побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої САК.

### **5.2 Програма виконання роботи**

1 Перетворення схеми математичної моделі САК.

2 Побудова асимптотичної ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої САК.

3 Отримання передаточної функції та логарифмічних частотних характеристик розімкненої САК за допомогою пакета Control System програмної оболонки Matlab.

### **5.3 Підготовка до роботи**

1 За рекомендованою літературою [1, 3-8] та конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:

– мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;

– теоретичні положення за темою роботи: правила перетворення схем математичних моделей САК до типового вигляду; методику побудови асимптотичної ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої САК.

2 Ознайомитись з порядком користування пакетом Control System програмної оболонки Matlab для визначення передаточної функції з'єднань ланок та побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої САК (додаток А).

3 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

4 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

### **5.4 Короткі відомості з теорії**

Для розв'язання задачі аналізу САК застосовуються основні рівняння системи, що пов'язують її вхідні діяння (задавальне

$g(t)$  та заважаюче  $f(t)$ ) з вихідним діянням  $y(t)$  або з помилкою системи  $\varepsilon(t)$ . Оскільки схеми математичних моделей реальних САК складаються з динамічних ланок, з'єднаних між собою, процес отримання основних рівнянь системи може виявитися достатньо складним. Тому схему математичної моделі спочатку перетворюють до деякого типового вигляду, а потім знаходять основні рівняння, використовуючи заздалегідь відомі правила.

Для систем, що побудовані за принципом зворотного зв'язку, як типову (стандартну) використовують одноконтурну математичну модель, наведену на рисунку 5.1.

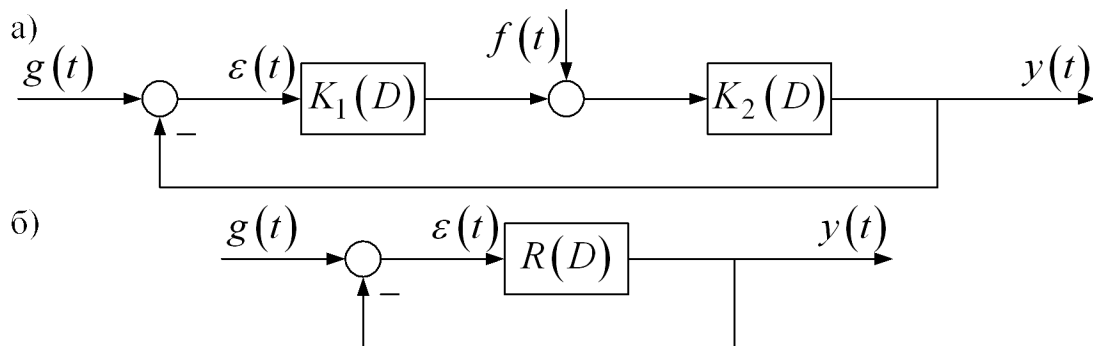


Рисунок 5.1 – Типова одноконтурна математична модель САК:  
 а – при наявності заважаючого діяння;  
 б – при відсутності заважаючого діяння

Для перетворення схеми математичної моделі САК довільної конфігурації до типового одноконтурного вигляду виконують (у тій чи іншій послідовності) такі операції:

- заміну з'єднань ланок еквівалентними ланками;
- зміну порядку підсумовування;
- переміщення суматора чи точки розгалуження з виходу ланки на вхід і зворотне переміщення.

Розрізняють такі види з'єднань ланок: послідовне, паралельне та зустрічно паралельне.

При *послідовному з'єднанні* ланок вихідне діяння попередньої ланки є вхідним діянням наступної (рисунок 5.2).

При *паралельному з'єднанні* ланок на їх входи подається одне й те ж діяння, а вихідні діяння ланок додаються (рисунок 5.3).

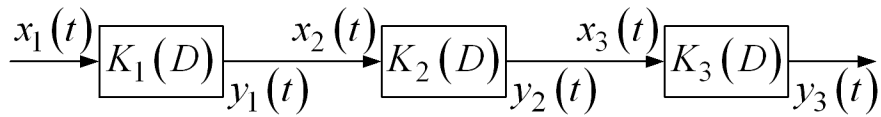


Рисунок 5.2 – Послідовне з'єднання ланок

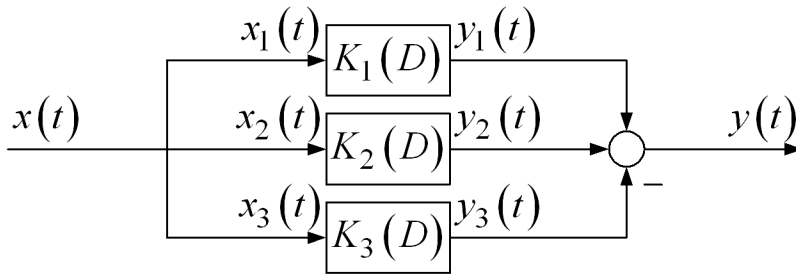


Рисунок 5.3 – Паралельне з'єднання ланок

На схемі математичної моделі подача на вхід декількох ланок одного діяння відображається точкою розгалуження. Операція сумування діянь відображається на схемі математичної моделі САК у вигляді суматора. Якщо при цьому біля одного з входів суматора стоїть знак " – ", то відповідна величина віднімається.

*Зустрічно паралельне з'єднання* ланок являє собою охоплення однієї ланки зворотним зв'язком, що містить іншу ланку (рисунок 5.4).

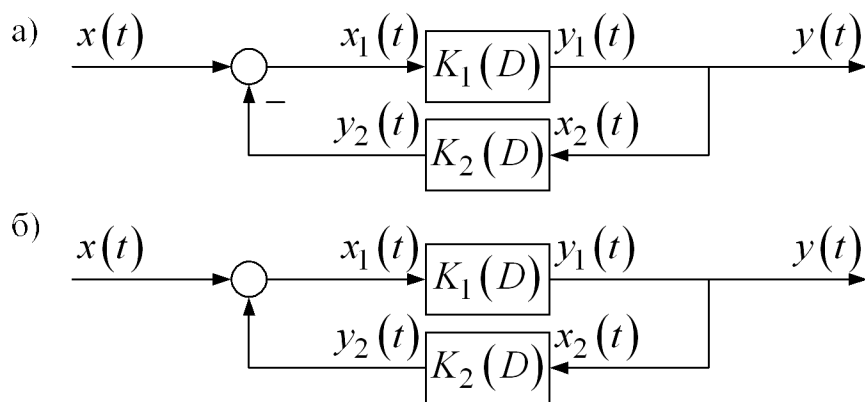


Рисунок 5.4 – Зустрічно паралельне з'єднання ланок:

а – негативний зворотний зв'язок;

б – позитивний зворотний зв'язок

При заміні з'єднання ланок еквівалентною ланкою (рисунок 5.5) її оператор передачі визначається за такими правилами:

– при послідовному з'єднанні ланок

$$K(D) = K_1(D) \cdot K_2(D) \cdot K_3(D); \quad (5.1)$$

– при паралельному з'єднанні ланок

$$K(D) = K_1(D) + K_2(D) - K_3(D), \quad (5.2)$$

де знак кожної складової визначається знаком біля суматора (див. рисунок 5.3);

– при зустрічно паралельному з'єднанні

$$K(D) = \frac{K_1(D)}{1 \mp K_1(D) \cdot K_2(D)}, \quad (5.3)$$

де  $K_1(D)$  – оператор передачі кола прямої передачі діянь;

$K_2(D)$  – оператор передачі кола зворотного зв'язку.

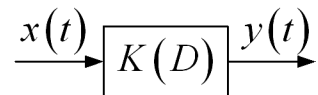


Рисунок 5.5 – Схема заміни з'єднань ланок еквівалентною ланкою

У виразі (5.3) знак " – " відповідає позитивному, а " + " негативному зворотному зв'язку, тобто він обернений у порівнянні з видом зворотного зв'язку.

Правила зміни порядку підсумовування засновані на сполучній і переставній властивостях додавання й зводяться до такого правила: від перестановки місць сусідніх суматорів кінцева сума не змінюється. Це твердження пояснюється рисунком 5.6.

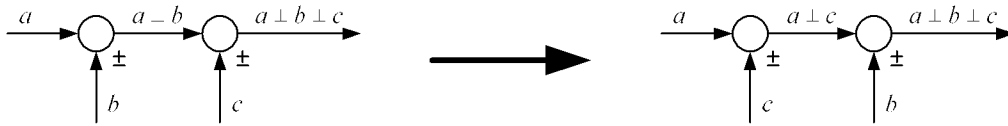


Рисунок 5.6 – Зміна порядку підсумовування

Правила переміщення суматора чи точки розгалуження засновані на принципі еквівалентності: незалежно від проведених переміщень вхідні й вихідні діяння перетвореної частини схеми повинні залишитися незмінними. Основні види та правила переміщень наведені в таблиці 5.1.

Складання основних рівнянь системи проводять після перетворення схеми математичної моделі системи до одноконтурного вигляду. На першому етапі складають рівняння розімкненої системи, яке отримують, виходячи з одноконтурної схеми математичної моделі системи за умови, що зворотний зв'язок розімкнений.

Рівняння розімкненої системи в загальному випадку має такий вигляд:

$$y(t) = R(D) \cdot \varepsilon(t) + R_f(D) \cdot f(t), \quad (5.4)$$

де  $R(D)$  – оператор передачі розімкненої системи;

$R_f(D)$  – оператор передачі розімкненої системи за заважуючим діянням.

Відповідно до одноконтурної схеми математичної моделі, що наведена на рисунку 5.1,а, оператори передачі розімкненої системи визначаються виразами:

$$R(D) = K_1(D) \cdot K_2(D), \quad R_f(D) = K_2(D). \quad (5.5)$$

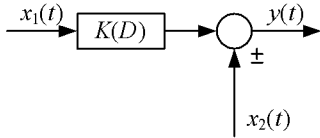
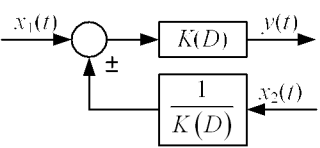
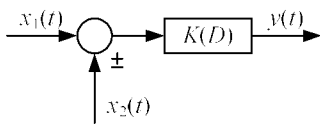
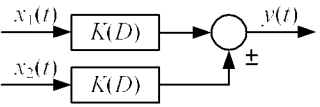
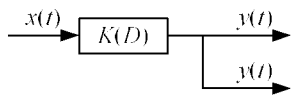
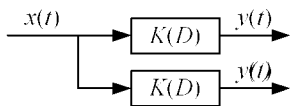
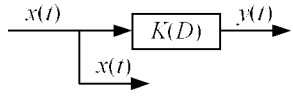
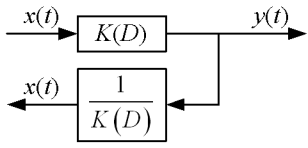
Для аналізу САК частотним методом найбільш часто застосовують логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи – ЛАЧХ та ЛФЧХ

$$L_R(\omega) = 20 \cdot \lg |R(j\omega)|,$$

$$\varphi_R(\omega) = \arg(R(j\omega)),$$

де  $R(j\omega)$  – комплексна частотна характеристика розімкненої системи,  $R(j\omega) = R(D) \Big|_{D=j\omega} = R(p) \Big|_{p=j\omega}$ .

Таблиця 5.1 – Правила переміщення суматора та точки розгалуження

Операція	Вихідна схема	Еквівалентна схема
1 Переміщення суматора з виходу ланки на вхід		
2 Переміщення суматора з входу ланки на вихід		
3 Переміщення точки розгалуження з виходу ланки на вхід		
4 Переміщення точки розгалуження з входу ланки на вихід		

Побудову логарифмічних частотних характеристик зручно виконувати, попередньо розклавши передаточну функцію розімкненої системи на добуток передаточних функцій елементарних ланок

$$R(p) = \prod_i K_i(p), \quad (5.6)$$

де  $K_i(p)$  – передаточна функція  $i$ -ї елементарної ланки.

Тоді ЛАЧХ та ФЧХ розімкненої системи визначаються з ЛАЧХ та ФЧХ елементарних ланок такими виразами:

$$\begin{aligned}
 L_R(\omega) &= \sum_i L_i(\omega), \\
 \varphi_R(\omega) &= \sum_i \varphi_i(\omega),
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

де  $L_i(\omega)$ ,  $\varphi_i(\omega)$  – ЛАЧХ та ФЧХ  $i$ -ї елементарної ланки.

На практиці зазвичай обмежуються побудовою асимптотичної ЛАЧХ розімкненої системи. Асимптотичну ЛАЧХ розімкненої системи будують на бланку з логарифмічним масштабом шляхом послідовного підсумовування асимптотичних ЛАЧХ елементарних ланок за таким алгоритмом:

1 За відомим оператором передачі  $R(D)$  визначають передаточну функцію розімкненої системи

$$R(p) = R(D) \Big|_{D=p},$$

після чого записують її у вигляді добутку передаточних функцій елементарних ланок (5.6).

Розраховують загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи

$$K = \prod_i K_i,$$

де  $K_i$  – коефіцієнти підсилення елементарних ланок.

Визначають вид та параметри всіх елементарних ланок.

2 Розраховують частоти спряження  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  асимптот елементарних ланок (аперіодичної, форсуючої, коливальної та форсуючої другого порядку).

Пронумерують частоти спряження асимптот у порядку зростання та розмічають вісь абсцис (частот) таким чином, щоб можна було побудувати ЛАЧХ лівіше найменшої  $\omega_1$  та правіше найбільшої  $\omega_n$  з частот спряження асимптот:  $\omega_{min} < \omega_1, \omega_{max} > \omega_n$ .

3 Загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи переводять у логарифмічні одиниці – децибели (дБ):

$$L = 20 \cdot \lg K.$$

3 з урахуванням отриманого значення загального коефіцієнта підсилення системи  $L$  та частотного діапазону, в якому будується ЛАЧХ, визначають масштаб по осі ординат (у дБ). На частоті  $\omega = 1$  відкладають величину  $L$ .

4 На ділянці частот  $(0, \omega_1)$  будують першу (низькочастотну) асимптоту. Її хід визначається загальним коефіцієнтом підсилення системи  $L$ , інтегруючими та диференціюючими ланками. Вона являє собою пряму, що проходить через точку з координатами  $(1, L)$  з коефіцієнтом нахилу

$$b = 20 \cdot \nu \text{ дБ/дек}, \quad (5.8)$$

де  $\nu$  – різниця між кількістю диференціюючих та інтегруючих ланок у передаточній функції системи.  $\nu = \nu_{\text{диф}} - \nu_{\text{инт}}$ .

5 Починаючи з першої частоти спряження  $\omega_1$ , послідовно прибудовують наступні відрізки асимптот результуючої ЛАЧХ на інтервалах частот  $(\omega_1, \omega_2)$ ,  $(\omega_2, \omega_3)$ , ...,  $(\omega_n, \infty)$ , змінюючи нахил ЛАЧХ на кожній частоті спряження на:

- 20 дБ/дек, якщо це частота спряження інерційної (аперіодичної) ланки;
- + 20 дБ/дек, якщо це частота спряження форсуючої ланки;
- 40 дБ/дек, якщо це частота спряження коливальної ланки або двох інерційних ланок з однаковими постійними часу;
- + 40 дБ/дек, якщо це частота спряження форсуючої ланки другого порядку або двох форсуючих ланок з однаковими постійними часу.

У результаті побудови згідно з цим алгоритмом отримують асимптотичну ЛАЧХ системи. Вона являє собою ламану лінію з відрізків прямих, злами якої відбуваються на частотах спряження асимптот. Фактична ЛАЧХ буде відрізнятися від асимптотичної лише поблизу частот спряження асимптот.

Для побудови ЛФЧХ розімкненої системи спочатку заповнюють таблицю, в якій записують розраховані значення ФЧХ окремих ланок  $\varphi_i(\omega)$  та результуючої ФЧХ  $\varphi_R(\omega)$  для множини точок на осі частот. Для розрахунку звичайно обирають частоти, значення яких дорівнюють 1, 2, 5 та менше або більше їх на цілу кількість декад. ЛФЧХ будують по точках на тому ж бланку з логарифмічним масштабом по осі частот, де побудована ЛАЧХ.



За наведеною методикою будують ЛАЧХ та ЛФЧХ не лише розімкненої системи, а й будь-якої динамічної системи.

Відзначимо, що між всіма характеристиками динамічної системи, яка складається з елементарних ланок, існує взаємно однозначний зв'язок. Крім того, між ЛАЧХ та ЛФЧХ такої системи також існує взаємно однозначний зв'язок (вони отримали назву *мінімально-фазових* систем). Тому за заданою ЛАЧХ мінімально-фазової системи можна відновити її передаточну функцію, тобто визначити склад та параметри всіх елементарних ланок, що входять до неї. Розв'язання задачі відновлення проводиться в тому самому порядку, як і побудова ЛАЧХ, однак в цьому випадку за параметрами фрагментів ЛАЧХ, починаючи з низькочастотного, встановлюють типи ланок та визначають їх параметри:

1) за значенням коефіцієнта підсилення  $L$ , який має низькочастотна асимптота (або її продовження) на частоті  $\omega = 1$ , розраховують коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K = 10^{L/20}$ ;

2) за коефіцієнтом нахилу  $b$  низькочастотної асимптоти, що вимірюється у децибелах на декаду, визначають наявність та кількість інтегруючих або диференціюючих ланок:  $\nu = b/20$ . Якщо результат є додатним, в системі присутня відповідна кількість диференціюючих ланок, при від'ємному результаті присутні інтегруючі ланки, при  $\nu = 0$  є лише підсилюючі ланки;

3) починаючи з першої частоти спряження, послідовно підраховують величину зміни коефіцієнта нахилу ЛАЧХ, на підставі чого визначають тип наступної елементарної ланки (див. п. 5 методики побудови ЛАЧХ) та додають її передаточну функцію. Постійні часу інерційних, форсуючих та коливальних ланок розраховують за значеннями відповідних частот спряження.

## **5.5 Вказівки щодо виконання роботи**

### **5.5.1 Перетворення схеми математичної моделі САК**

Перетворити схему математичної моделі системи, котра наведена на рисунку 5.7, до стандартного вигляду одноконтурної САК.

Записати передаточну функцію розімкненої системи, якщо

$$K_1(p) = \frac{1.25}{p}; K_2(p) = 0.4; K_3(p) = \frac{400}{p}; K_4(p) = 40. \quad (5.8)$$

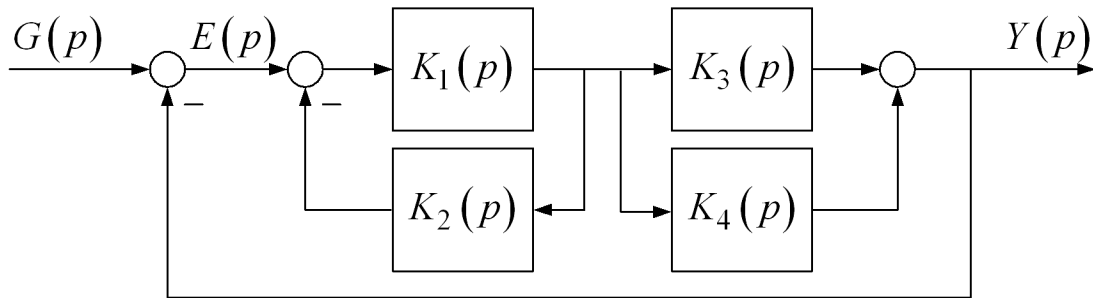


Рисунок 5.7 – Схема математичної моделі САК

**Методика розв'язання**

Ланки  $K_1(p)$  та  $K_2(p)$  з'єднані зустрічно паралельно. Тому еквівалентна ланка має таку передаточну функцію (див. вираз (5.3)):

$$K_{12}(p) = \frac{K_1(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p)} = \frac{1.25}{p + 0.5}.$$

Ланки  $K_3(p)$  та  $K_4(p)$  з'єднані паралельно. Тому еквівалентна ланка має таку передаточну функцію (див. вираз (5.2)):

$$K_{34}(p) = K_3(p) + K_4(p) = \frac{400 + 40p}{p}.$$

Ланки  $K_{12}(p)$  та  $K_{34}(p)$  з'єднані послідовно. Тому еквівалентна ланка має таку передаточну функцію (див. вираз (5.1)):

$$K_{1234}(p) = K_{12}(p) \cdot K_{34}(p) = \frac{1.25}{p + 0.5} \cdot \frac{400 + 40p}{p}.$$

Відповідно до рисунка 5.1,б, маємо САК зі зворотним зв'язком при відсутності заважаючого діяння. Передаточна функція розімкненої системи  $R(p) = K_{1234}(p)$ .

### 5.5.2 Побудова асимптотичної ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи

Побудувати асимптотичну ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи, наведеної на рисунку 5.7.

#### Методика розв'язання

##### А Побудова асимптотичної ЛАЧХ

1 Запишемо передаточну функцію розімкненої системи  $R(p) = K_{1234}(p)$  у вигляді добутку передаточних функцій елементарних ланок:

$$\begin{aligned} R(p) &= \frac{1.25}{p+0.5} \cdot \frac{400+40p}{p} = \frac{1.25 \cdot 400 \cdot (1+0.1p)}{0.5 \cdot p \cdot (1+2p)} = \\ &= 1000 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+2p} \cdot (1+0.1p). \end{aligned}$$

Отже, загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи дорівнює  $K = 1000 \text{ с}^{-1}$ . Розімкнена система складається з послідовно з'єднаних інтегруючої ланки  $1/p$ , інерційної ланки  $\frac{1}{2p+1}$  з постійною часу  $T = 2 \text{ с}$  та форсуючої ланки  $(0,1p+1)$  з постійною часу  $\tau = 0,1 \text{ с}$ .

2 Знаходимо частоти спряження асимптот як величини, обернені постійним часу елементарних ланок:

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Вони пронумеровані за порядком зростання.

Розмітимо вісь абсцис таким чином, щоб можна було побудувати графік лівіше меншої та правіше більшої з частот спряження асимптот: обираємо  $\omega_{min} = 0.01 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_{max} = 1000 \text{ с}^{-1}$  та відмічаємо частоти спряження  $\omega_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 10 \text{ с}^{-1}$  (рисунок 5.8).

3 Визначаємо загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи у децибелах. Згідно з умовами задачі

$$L = 20 \cdot \lg K = 20 \cdot \lg 1000 = 60 \text{ дБ.}$$

З урахуванням отриманого значення обираємо масштаб по осі ординат. Відмічаємо на бланку з логарифмічним масштабом точку з координатами (1; 60) (точка  $A_1$  на рисунку 5.8).

4 Будуємо низькочастотну асимптоту. Перша точка для її побудови є точка  $A_1$ . Нахил низькочастотної асимптоти відповідно до виразу (5.8) визначається нахилом ЛАЧХ однієї інтегруючої ланки, отже, складає  $-20$  дБ/дек. Для забезпечення такого нахилу прямої від точки  $A_1$  з координатами (1; 60) рухаємось праворуч на одну декаду (до частоти  $10 \text{ с}^{-1}$ ) та вниз на 20 дБ, де й отримуємо другу точку  $A_2$  з координатами (10; 40).

Через точки  $A_1$  і  $A_2$  пунктирною лінією проводимо низькочастотну асимптоту. Вона закінчується на першій частоті спряження асимптот  $\omega_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$  (точка  $A_3$ ). Тому на ділянці частот (0,  $\omega_1$ ) її виділяємо суцільною лінією.

5 Проводимо побудову ЛАЧХ після першої частоти спряження асимптот (точка  $A_3$ ).

Частота спряження  $\omega_1$  відповідає інерційній ланці, тому після точки  $A_3$  нахил ЛАЧХ змінюється на  $-20$  дБ/дек і буде дорівнювати  $-20$  дБ/дек +  $(-20$  дБ/дек) =  $-40$  дБ/дек. Для побудови асимптоти ЛАЧХ з таким нахилом від точки  $A_3$  рухаємось праворуч на одну декаду та вниз на 40 дБ, де й отримуємо точку  $A_4$ , яка визначає напрям руху ЛАЧХ на ділянці ( $\omega_1, \omega_2$ ). З точки  $A_3$  через точку  $A_4$  проводимо другу асимптоту ЛАЧХ. Вона закінчується на другій частоті спряження  $\omega_2 = 10 \text{ с}^{-1}$  (точка  $A_5$ ).

Після точки  $A_5$  нахил ЛАЧХ змінюється на 20 дБ/дек, оскільки частота спряження  $\omega_2$  відповідає форсуючій ланці з постійною часу  $\tau$ . Таким чином, після точки  $A_5$  нахил ЛАЧХ буде дорівнювати  $-40$  дБ/дек + 20 дБ/дек =  $-20$  дБ/дек. Для побудови асимптоти ЛАЧХ з таким нахилом від точки  $A_5$  рухаємось праворуч на одну декаду та вниз на 20 дБ, де й отримуємо точку  $A_6$ . З точки  $A_5$  через точку  $A_6$  проводимо третю асимптоту ЛАЧХ.

Оскільки при побудові ЛАЧХ урахovanі всі елементарні ланки, які можна виділити в передаточній функції розімкненої системи, нахил ЛАЧХ при збільшенні частоти далі не змінювати-

меться. Тому останню асимптоту ЛАЧХ наводимо суцільною лінією до меж бланка з логарифмічним масштабом.

Асимптотична ЛАЧХ розімкненої САК зображена на рисунку 5.8 суцільною лінією.

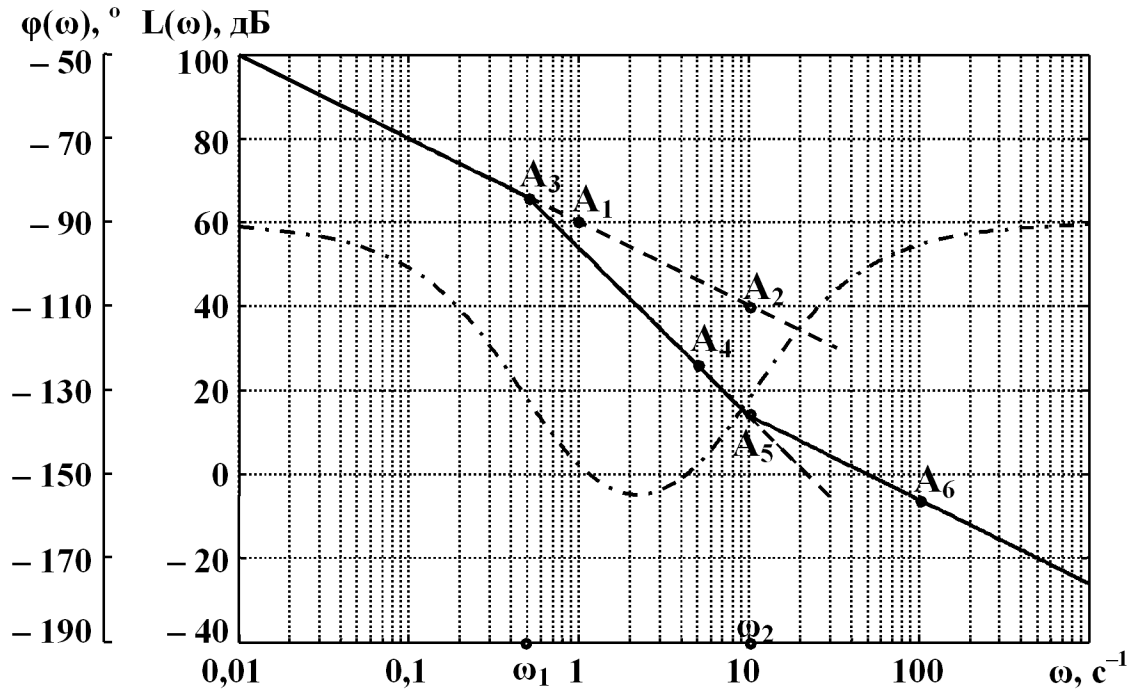


Рисунок 5.8

### Б Побудова ЛФЧХ

Відповідно до виразу (5.7) та заданої передаточної функції ФЧХ розімкненої САК визначається виразом

$$\varphi_R(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega),$$

де ФЧХ окремих ланок дорівнюють:

– ФЧХ інтегруючої ланки

$$\varphi_1(\omega) = -90^\circ;$$

– ФЧХ інерційної ланки

$$\varphi_2(\omega) = -\arctg(\omega \cdot T) = -\arctg(\omega \cdot 2);$$

– ФЧХ форсуючої ланки

$$\varphi_3(\omega) = \text{arctg}(\omega \cdot \tau) = \text{arctg}(\omega \cdot 0.1).$$

Для побудови ЛФЧХ заповнюємо таблицю 5.2, до якої заносимо значення ФЧХ елементарних ланок  $\varphi_1(\omega)$ ,  $\varphi_2(\omega)$ ,  $\varphi_3(\omega)$  та результуючої ФЧХ для різних значень частоти.

Таблиця 5.2 – Розрахунок ЛФЧХ розімкненої САК

$\omega, \text{с}^{-1}$	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	50	100
$\varphi_1(\omega), ^\circ$	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90
$\varphi_2(\omega), ^\circ$	-2	-6	-11	-22	-45	-63	-76	-84	-87	-89	-90	-90
$\varphi_3(\omega), ^\circ$	0	0	0	1	3	5	11	26	45	64	79	84
$\varphi_R(\omega), ^\circ$	-92	-96	-101	-111	-132	-148	-155	-148	-132	-115	-101	-96

ЛФЧХ розімкненої САК зображена на рисунку 5.8 штрихпунктирною лінією.

### 5.5.3 Отримання передаточної функції та логарифмічних частотних характеристик розімкненої САК за допомогою пакета Control System програмної оболонки Matlab

1 Натисканням відповідної піктограми запустити програмну оболонку Matlab.

Задати передаточні функції окремих ланок САК, наведеної на рисунку 5.7. Для цього в командному вікні (**Command Window**) програмної оболонки Matlab необхідно відповідно до виразу (5.8) набрати:

$$\mathbf{K1} = \text{tf}([1.25],[1 \ 0]); \mathbf{K2} = 0.4;$$

$$\mathbf{K3} = \text{tf}([400],[1 \ 0]); \mathbf{K4} = 40;$$

та натиснути **Enter**.

Отримати вираз для передаточної функції розімкненої системи. Для цього в командному вікні необхідно відповідно до правил перетворення з'єднань динамічних ланок набрати (див. додаток А, п. А.2):

$$\mathbf{R} = \mathbf{K1}/(1 + \mathbf{K1} * \mathbf{K2}) * (\mathbf{K3} + \mathbf{K4})$$

Після натискання **Enter** у командному вікні з'являється передаточна функція розімкненої системи. Перевірити правильність отриманого виразу.

2 Запустити програму на виконання розрахунку логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи. Для цього в командному вікні (**Command Window**) згідно з п. А.3 додатка А набрати:

**bode (R);grid**

та натиснути **Enter**.

У точках  $\omega_{\min} = 0.01 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_{\max} = 1000 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_1 = 0.5 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 10 \text{ c}^{-1}$ , що дорівнюють частотам спряження, а також на частоті зрізу  $\omega_{zR} = 50 \text{ c}^{-1}$  виміряти значення отриманих ЛАЧХ та ЛФЧХ, занести їх у таблицю 5.3. Нанести їх на бланк, де побудована асимптотична ЛАЧХ та розрахункова ЛФЧХ. Зіставити отримані результати. Зробити висновки.

Таблиця 5.3 – Експериментальні дані для побудови ЛАЧХ та ЛФЧХ

$\omega, \text{c}^{-1}$	0.01	0.5	10	50	1000
$L(\omega), \text{дБ}$					
$\varphi(\omega), \text{град.}$					

## 5.6 Зміст звіту

- 1 Назва і мета роботи.
- 2 Схема математичної моделі системи, котру треба перетворити до стандартного вигляду одноконтурної САК (рисунок 5.7).
- 3 Схема математичної моделі після перетворення до стандартного вигляду й передаточна функція розімкненої САК.
- 4 Асимптотична ЛАЧХ та розрахункова ЛФЧХ розімкненої САК.
- 5 Таблиця з даними та графіки ЛАЧХ й ЛФЧХ розімкненої системи, отримані за допомогою пакета Control System.

## 5.7 Контрольні запитання

1 Наведіть схему послідовно з'єднаних ланок. Як визначається оператор передачі еквівалентної ланки?

2 Наведіть схему паралельно з'єднаних ланок. Як визначається оператор передачі еквівалентної ланки?

3 Наведіть схему зустрічно паралельного з'єднання ланок. Як визначається оператор передачі еквівалентної ланки?

4 Наведіть схему типової (стандартної) одноконтурної математичної моделі САК.

5 Які дії виконуються при перетворенні схеми математичної моделі САК довільної конфігурації до стандартного одноконтурного вигляду?

6 Як пов'язані ЛАЧХ розімкненої системи і ЛАЧХ елементарних ланок, які можна виділити в передаточній функції розімкненої системи?

7 Викладіть методику побудови асимптотичної ЛАЧХ розімкненої системи.

8 Схема математичної моделі САК наведена на рисунку 5.9. Необхідно:

- 1) перетворити схему до стандартного вигляду;
- 2) скласти рівняння розімкненої системи;
- 3) побудувати асимптотичну ЛАЧХ розімкненої системи, якщо  $K_1 = 10$ ,  $K_2 = 0.5$ .

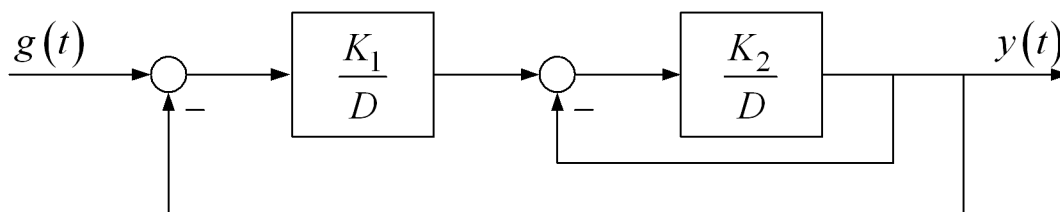


Рисунок 5.9



## **6 АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ САК**

### **6.1 Мета роботи**

- 1 Засвоїти методи аналізу стійкості САК.
- 2 Розрахунковим і експериментальним шляхом встановити вплив параметрів САК на її стійкість.

### **6.2 Програма роботи**

- 1 Аналітичне дослідження умов стійкості та граничних параметрів САК.
- 2 Експериментальне дослідження стійкості САК.

### **6.3 Підготовка до роботи**

- 1 За рекомендованою літературою [1, 3, 4, 7-9] та конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
  - мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
  - теоретичні положення за темою роботи: поняття та умови стійкості лінійних стаціонарних неперервних САК; алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца; частотний критерій стійкості Найквіста; запаси стійкості.
- 2 Виконати аналітичне дослідження стійкості САК. Зміст аналітичного дослідження викладений в п. 6.5.1.
- 3 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
- 4 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

### **6.4 Короткі відомості з теорії**

Стійкістю називається здатність САК усувати збурення її вихідної величини (руху) після припинення збурень початкового стану та (або) вхідних діянь.

В лінійних САК внаслідок справедливості принципу суперпозиції зі стійкості хоча б одного руху впливає стійкість системи в цілому, тобто стійкість лінійних САК є властивістю, яка залежить тільки від їх структури та параметрів і не залежить від зовнішніх діянь та початкового стану. Вказана властивість дозволяє обме-

житися тільки аналізом стійкості вільного руху лінійних САК – руху, обумовленого довільним початковим станом при відсутності зовнішніх діянь – *стійкості за Ляпуновим*. Відомо, що *лінійна САК є стійкою, якщо її вільний рух задовольняє умову*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (6.1)$$

Оскільки процеси, що протікають в системі неперервної дії, описуються диференціальними рівняннями, то аналіз умов стійкості САК необхідно проводити на основі вивчення властивостей їх розв'язків.

Диференціальне рівняння вільного руху є рівнянням "вхід-вихід" замкненої САК при відсутності вхідних діянь, тобто лінійним однорідним диференціальним рівнянням. В загальному випадку воно має такий вигляд:

$$C(D) \cdot y(t) = 0, \quad (6.2)$$

де  $C(D)$  – характеристичний оператор замкненої САК

$$C(D) = c_0 + c_1 \cdot D + c_2 \cdot D^2 + \dots + c_k \cdot D^k \quad (6.3)$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (6.2) з постійними коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$y(t) = \sum_{i=1}^k \gamma_i \cdot e^{p_i \cdot t}, \quad (6.4)$$

де  $p_i$  – корені *характеристичного рівняння замкненої системи:*

$$C(p) = c_0 + c_1 \cdot p + c_2 \cdot p^2 + \dots + c_k \cdot p^k = 0; \quad (6.5)$$

$\gamma_i$  – константи або функції-поліноми, що визначаються початковими умовами (початковим станом) та кратністю коренів.

Корені можуть бути дійсними та комплексно-спряженими, а деякі з них можуть бути однаковими (кратними). Однак, як випливає з (6.4), незалежно від їх характеру вільна складова буде задовольняти умову стійкості (6.1) тоді і тільки тоді, коли *всі корені характеристичного рівняння замкненої САК від'ємні або мають від'ємні дійсні частини*:

$$\operatorname{Re}[p_i] < 0, \quad i \in [1, k]. \quad (6.6)$$

Якщо порядок характеристичного рівняння дорівнює або більше 3, розв'язання задачі пошуку коренів без ЕОМ неможливе. Для усунення цієї незручності застосовують критерії стійкості – сукупність умов, виконання яких гарантує стійкість САК без відшукання коренів. Найбільше застосування знайшли алгебраїчний критерій А. Гурвіца та частотний критерій Г. Найквіста.

Дамо спрощене формулювання алгебраїчного критерію Гурвіца. Нехай відомий характеристичний многочлен замкненої САК

$$C(p) = c_0 + c_1 \cdot p + c_2 \cdot p^2 + \dots + c_k \cdot p^k, \quad (6.7)$$

причому  $c_0 > 0$ .

З коефіцієнтів многочлена складається визначник Гурвіца

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \dots & 0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_k \end{vmatrix}. \quad (6.8)$$

Потім складають головні діагональні мінори  $\Delta_{k-1}, \Delta_{k-2}, \dots, \Delta_1 = c_1$ , які отримують поступовим викреслюванням останніх рядків і стовпців.

**Теорема.** *Для стійкості лінійної стаціонарної САК необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:*

1) *всі коефіцієнти характеристичного многочлена замкненої системи повинні бути додатними:*

$$c_0 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \dots, \quad c_k > 0;$$

2) головні діагональні мінори визначника Гурвіца, розраховані через один, повинні бути додатними:

$$\Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \dots, \quad \text{або} \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \quad \dots$$

Користуючись критерієм Гурвіца, визначимо умови стійкості систем першого, другого та третього порядку.

Система першого порядку має характеристичний многочлен

$$C(p) = c_0 + c_1 p.$$

Відповідно до п.1 теореми вона буде стійкою, якщо  $c_0 > 0, \quad c_1 > 0$ . Другу умову теореми тут можна не перевіряти.

Система другого порядку має характеристичний многочлен

$$C(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2.$$

Відповідно до п.1 теореми вона буде стійкою, якщо  $c_0 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0$ . Другу умову теореми тут також можна не перевіряти.

Характеристичний многочлен системи третього порядку має вигляд

$$C(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3.$$

Відповідно до критерію Гурвіца система третього порядку буде стійкою, якщо:

1) всі коефіцієнти характеристичного многочлена додатні

$$c_0 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0;$$

2) діагональний мінор  $\Delta_2$  додатний, тобто коефіцієнти характеристичного многочлена задовольняють нерівність

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot c_2 - c_0 \cdot c_3 > 0.$$

Критерій Гурвіца дає можливість не тільки визначити стійкість системи, а й побудувати так звану *область стійкості* – область значень параметрів, в межах яких система є стійкою. Параметри, при яких система виходить на межі області стійкості, мають назву *граничних параметрів*.

Доведено, що САК знаходиться на межі області стійкості, коли дві нерівності в критерії Гурвіца перетворюються на рівності, а саме:

$$c_0 = 0, \quad \Delta_{k-1} = 0. \quad (6.9)$$

При використанні частотного критерію Найквіста судження про стійкість замкненої САК здійснюється на підставі аналізу частотних характеристик розімкненої САК. Внаслідок простоти побудови та отримання результатів найбільш зручно для цього користуватись логарифмічними частотними характеристиками розімкненої САК.

Розглянемо поняття, що застосовуються при формулюванні логарифмічного частотного критерію Найквіста, на прикладі розімкненої системи з передаточною функцією:

$$R(p) = \frac{K_v (1 + \tau p)^2}{p(1 + T_1 p)^2 (1 + T_2 p)^2},$$

причому

$$T_1 > \tau > T_2; \quad \frac{1}{\tau} < K_v < \frac{1}{T_2}.$$

Для застосування логарифмічного частотного критерію необхідно, по-перше, побудувати логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи (рисунок 6.1). Відзначимо, що частота, на якій ЛАЧХ розімкненої системи дорівнює нулю, називається частотою зрізу розімкненої системи і позначається  $\omega_{3R}$ .

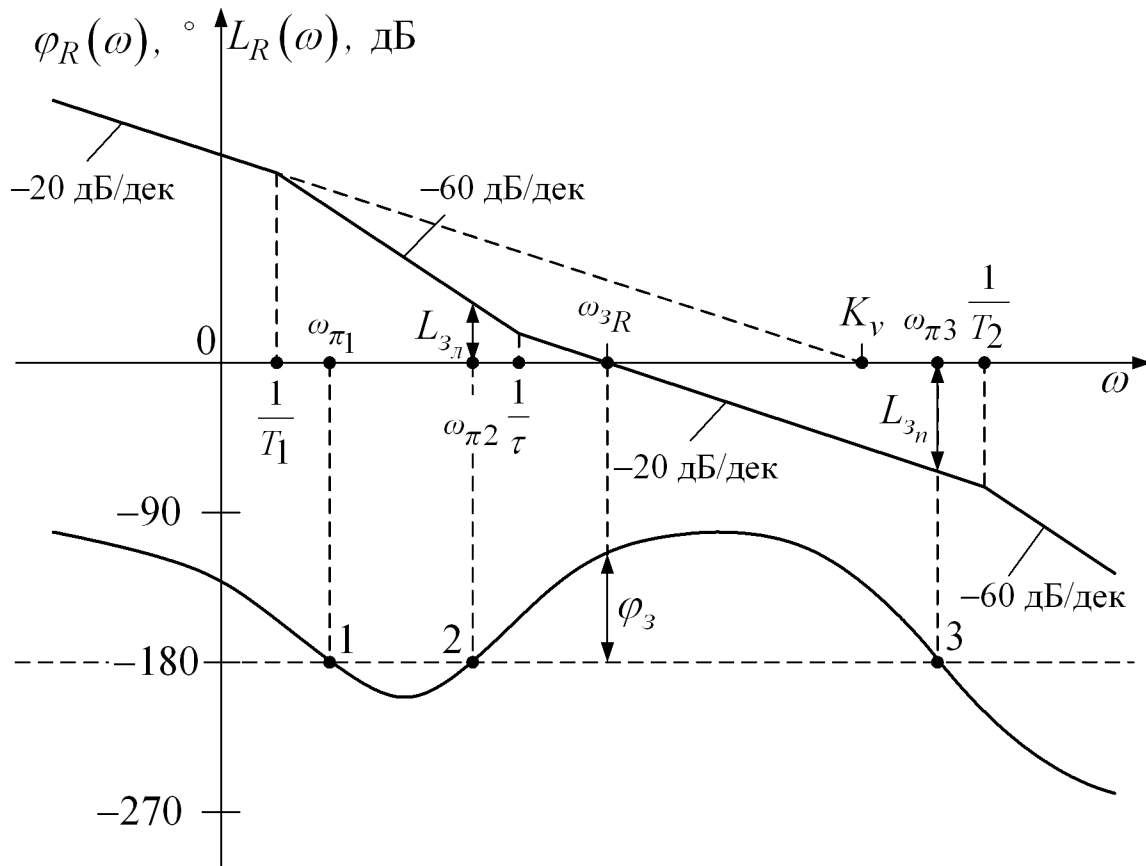


Рисунок 6.1

По-друге, необхідно з'ясувати, скільки додатних та від'ємних переходів через рівні  $\pm 180^\circ (2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  має ЛФЧХ.

Перехід ЛФЧХ через деякий рівень називають додатним, якщо характеристика при збільшенні частоти перетинає його знизу вгору. Перехід ЛФЧХ через деякий рівень називають від'ємним, якщо характеристика при збільшенні частоти перетинає його згори вниз. Для системи, що розглядається, точки 1, 3 – точки від'ємних переходів, а точка 2 – точка додатного переходу.

По-третє, необхідно з'ясувати, чи має характеристичний многочлен розімкненої системи  $A(p)$ , який є знаменником передаточної функції розімкненої системи, корені з додатною дійсною частиною ("праві" корені). Для розглянутої системи характеристичний многочлен розімкненої системи визначається виразом

$$A(p) = p(1 + T_1 p)^2 (1 + T_2 p)^2.$$

Його корені  $p_1 = 0$ ,  $p_{2,3} = -1/T_1$ ,  $p_{4,5} = -1/T_2$ . З огляду на те, що постійні часу інерційних ланок  $T_1, T_2$  більше нуля, "правих" коренів немає. На практиці в більшості випадків характеристичний многочлен розімкненої системи  $A(p)$  не має "правих" коренів. Тому надалі обмежимося формулюванням критерію Найквіста лише для такого випадку.

**Теорема.** *Для того, щоб замкнена система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб в усіх областях частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною, кількість додатних та від'ємних переходів ЛФЧХ розімкненої системи через рівні  $\pm 180^\circ (2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , була однаковою.*

Аналіз логарифмічних частотних характеристик розглянутої системи показує, що ЛФЧХ розімкненої системи в області частот, де ЛАЧХ є додатною ( $\omega < \omega_{z_R}$ ), має один від'ємний перехід через рівень  $-180^\circ$  (точка 1) і один додатний перехід (точка 2). Отже, за критерієм Найквіста система є стійкою.

Якщо розімкнена система має кратні нульові корені (має декілька інтегруючих ланок), слід враховувати так звані фіктивні переходи ЛФЧХ через рівні  $\pm 180^\circ (2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Їх отримують, спрямовуючи ЛФЧХ до нульового рівня при  $\omega \rightarrow 0$ . Так, ЛФЧХ САК з передаточною функцією розімкненої системи

$$R(p) = \frac{K_a}{p^2 (1 + Tp)}$$

має один фіктивний від'ємний перехід (точка 1 на рисунку 6.2).

Характеристичний многочлен цієї розімкненої системи

$$A(p) = p^2 (1 + Tp)$$

не має правих коренів. Оскільки ЛФЧХ системи в області частот, де ЛАЧХ більше нуля ( $\omega < \omega_{z_R}$ ), має лише один від'ємний перехід, то система є нестійкою.

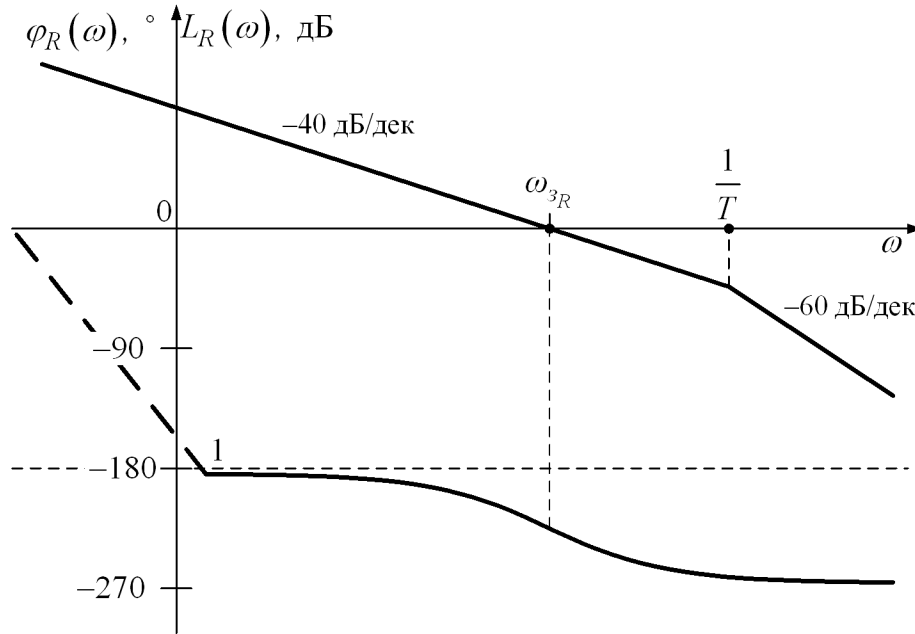


Рисунок 6.2

Для того, щоб забезпечити високу якість функціонування САК, необхідно не тільки забезпечити її стійкість, а й вибрати параметри системи достатньо далеко від меж області стійкості. Для кількісної характеристики ступеня віддалення системи від меж області стійкості застосовуються запаси стійкості.

**Запасом стійкості за фазою** називають різницю між значенням ЛФЧХ на частоті зрізу розімкненої системи  $\omega_{3R}$  і рівнем  $-180^\circ$ :

$$\varphi_z = 180^\circ - \left| \varphi_R(\omega_{3R}) \right|. \quad (6.10)$$

Якщо система є стійкою, її запас стійкості за фазою є додатним (рисунок 6.1). В нестійкій системі він буде від'ємним (рисунок 6.2).

**Запасом стійкості за підсиленням (амплітудою)** називають відношення дійсного і граничного значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи. Під граничним  $K_{zp}$  мають на увазі таке значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи, при якому система опиняється на межі області стійкості (частота зрізу  $\omega_{3R}$



співпадає з однією із частот  $\omega_{\pi}$  переходів ЛФЧХ через рівні  $\pm 180^{\circ} (2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

За логарифмічними частотними характеристиками запаси стійкості за підсиленням (в децибелах) дорівнюють відстані від ЛАЧХ розімкненої системи до осі абсцис у точках  $\omega_{\pi}$ , сусідніх до частоти зрізу  $\omega_{zR}$ :

$$L_z = |L_R(\omega_{\pi})|. \quad (6.11)$$

Наприклад, САК, ЛАЧХ та ЛФЧХ якої зображено на рисунку 6.1, має два запаси стійкості за підсиленням: запас  $L_{z1}$  визначається на частоті  $\omega_{\pi 2}$  і характеризує можливе зменшення коефіцієнта підсилення розімкненої САК, а запас  $L_{z1}$  визначається на частоті  $\omega_{\pi 3}$  і характеризує його можливе збільшення. На частоті  $\omega_{\pi 1}$  запас стійкості не визначається, тому що стійкість буде порушена раніше.

Відзначимо, що у тих випадках, коли ЛФЧХ не перетинає рівень  $-180^{\circ}$  правіше або лівіше частоти зрізу, то відповідний запас стійкості за підсиленням дорівнює нескінченності.

## 6.5 Вказівки щодо виконання роботи

### 6.5.1 Аналітичне дослідження умов стійкості та граничних параметрів САК

#### Завдання 1

1 Користуючись критерієм Гурвіца, визначити умови стійкості САК, математична модель якої зображена на рисунку 6.3, якщо вона має оператори передачі

$$K_1(D) = K; \quad K_2(D) = \frac{1}{D(1 + T_1 \cdot D)(1 + T_2 \cdot D)}, \quad (6.12)$$

де  $T_1, T_2$  – постійні часу аперіодичних ланок.

Розрахувати за виразом (6.9) граничне значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K_{zp}^{(\Gamma)}$ , якщо  $T_1 = 0.2$  с,  $T_2 = 0.05$  с.

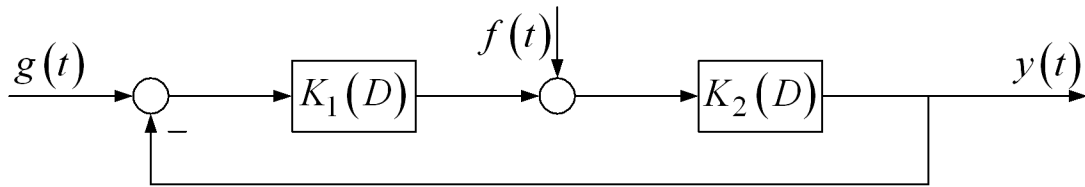


Рисунок 6.3

2 За допомогою пакета Control System побудувати сім'ю ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої САК, заданої в п.1, для  $T_1 = 0.2$  с,  $T_2 = 0.05$  с і значень  $K = 10, 15, 20, 25$  та  $30$  с<sup>-1</sup>.

Для цього запустити програмну оболонку Matlab, після чого в командному вікні (**Command Window**) відповідно до виразу (6.12) та виразу для передаточної функції розімкненої системи набрати:

```
K1 = K; K2 = tf([1],[0.05*0.2 0.05+0.2 1 0]);  
R = K1 * K2; margin(R); grid
```

(тут  $K = 10, 15, 20, 25$  або  $30$ ) та натиснути **Enter**.

Після натискання **Enter** у командному вікні з'являються логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи зі значеннями запасів за підсиленням (амплітудою) та за фазою (в Matlab вони позначені  $G_m$  та  $P_m$  відповідно). Занести отримані значення запасів в таблицю 6.1. Побудувати графік залежності запасу за фазою від коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $\varphi_3 = f_1(K)$ .

Таблиця 6.1 – Залежність запасів за підсиленням (амплітудою) та за фазою від коефіцієнта підсилення розімкненої системи

$K, \text{с}^{-1}$	10	15	20	25	30
$L_3 (G_m), \text{дБ}$					
$\varphi_3 (P_m), \text{град}$					

Користуючись критерієм стійкості Найквіста, проаналізувати виконання умов стійкості системи для різних значень коефіцієнта підсилення  $K$ , визначити граничне значення  $K_{zp}^{(H)}$  та зіставити його з результатами розв'язання за п. 1.

### Завдання 2

1 Користуючись критерієм Гурвіца, визначити умови стійкості САК, математична модель якої зображена на рисунку 6.4, якщо вона має оператори передачі

$$K_1(D) = K; \quad K_2(D) = \frac{1 + T_2 D}{D^2 (1 + T_1 D)}, \quad (6.13)$$

де  $T_1, T_2$  – постійні часу аперіодичної та форсуючої ланок.

Розрахувати за виразом (6.9) граничне значення постійної часу форсуючої ланки  $T_{2zp}^{(r)}$ , якщо постійна часу аперіодичної ланки  $T_1 = 0.1$  с, а коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K = 10$  с<sup>-2</sup>.

2 За допомогою пакета Control System побудувати сім'ю ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої САК для  $K = 10$  с<sup>-2</sup>,  $T_1 = 0.1$  с і значень постійної часу форсуючої ланки  $T_2 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$  та  $0.25$  с.

Для цього запустити програмну оболонку Matlab, після чого в командному вікні (**Command Window**) відповідно до виразу (6.13) та виразу для передаточної функції розімкненої системи набрати:

```
K1 = 10; K2 = tf([T2 1],[0.1 1 0 0]);  
R = K1 * K2; margin(R); grid
```

(тут  $T_2 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$  або  $0.25$ ) та натиснути **Enter**.

Після обчислень у командному вікні з'являються логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи зі значеннями запасів за підсиленням (амплітудою) та за фазою. Занести отримані значення запасів у таблицю 6.2. Побудувати графік залежності запасу за фазою від постійної часу форсуючої ланки  $\varphi_3 = f_2(T_2)$ .

Користуючись критерієм стійкості Найквіста, проаналізувати виконання умов стійкості системи для різних значень постійної часу форсуючої ланки  $T_2$ , визначити граничне значення  $T_{2pr}^{(H)}$  та зіставити його з результатами розв'язання за п. 1.

Таблиця 6.2 – Залежність запасів за підсиленням (амплітудою) та за фазою від постійної часу форсуючої ланки

$T_2, \text{с}$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
$L_3 (G_m), \text{дБ}$					
$\varphi_3 (P_m), \text{град}$					

### 6.5.2 Експериментальне дослідження стійкості САК

#### Методика досліджень

Дослідження проводиться за допомогою пакета моделювання Simulink. Для з'ясування, стійка система або ні, на вхід моделі системи подається східчасте діяння (**Step**) і за допомогою віртуального осцилографа (**Scope**) спостерігається перехідна характеристика. У випадку, якщо параметри системи розташовані в межах області стійкості, перехідний процес через деякий час завершується. В нестійкій системі перехідний процес триває нескінченно, а амплітуда коливань з часом зростає. При граничних значеннях параметрів перехідний процес триває нескінченно, однак амплітуда коливань з часом залишається постійною.

#### Дослідження 1

1 Відкрити файл **Styjkist1**. На екрані з'являється схема математичної моделі досліджуваної системи з передаточною функцією (6.11), котру зображено на рисунку 6.4. Модель системи складається з моделей блока порівняння, підсилувального блока **Gain** та блока **Transfer Fcn**, за допомогою якого моделюються інтегруюча та дві інерційні ланки з постійними часу 0.05 с та 0.2 с.

2 Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K = 10 \text{ с}^{-1}$ . Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Gain**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення **Gain: 10** та натиснути **Ok**.

3 Запустити імітацію процесу функціонування системи натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів.

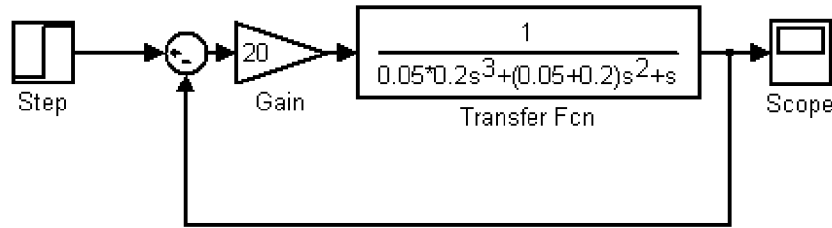


Рисунок 6.4 – Схема моделювання першої САК в пакеті Simulink

Переключитися у вікно **Scope**. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Scope**. У випадку, якщо графіки не спостерігаються на екрані віртуального осцилографа, натиснути кнопку "**Бінокль**" на панелі інструментів. За виглядом перехідної характеристики прийняти рішення про стійкість системи.

4 Поступово збільшувати коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K$ , доки в системі не виникнуть автоколивання з постійною амплітудою. Звернути увагу на те, що при наближенні коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K$  до граничного значення внаслідок зменшення запасу за фазою (див. таблицю 6.1 та графік залежності  $\varphi_3 = f_1(K)$ ) амплітуда коливань та тривалість перехідного процесу зростають.

Отримане значення граничного коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K_{sp}^{(експ)}$  записати у звіт. Зіставити його з результатами аналітичного дослідження  $K_{sp}^{(Г)}$  та  $K_{sp}^{(H)}$  за завданням 1 та зробити висновки.

### Дослідження 2

1 Відкрити файл **Styjkist2**. На екрані з'являється схема математичної моделі досліджуваної системи з передаточною функцією (6.12), котру зображено на рисунку 6.5. Модель системи складається з моделей блока порівняння, підсилувального блока **Gain** (коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K = 10 \text{ c}^{-1}$ ) та блока **Transfer Fcn**, за допомогою якого моделюються два інтегратори, інерційна ланка з постійною часу  $T_1 = 0.1 \text{ c}$  та форсуюча ланка.

2 Встановити постійну часу форсуючої ланки  $T_2 = 0.3$  с. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Transfer Fcn**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення чисельника **Nominator** [0.3 1] та натиснути **Ok**.

3 Запустити імітацію процесу функціонування системи натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів.

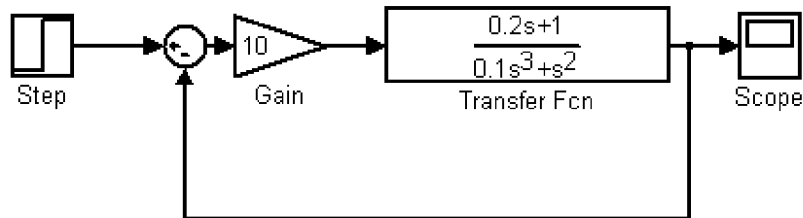


Рисунок 6.5 – Схема моделювання другої САК в пакеті Simulink

Переключитися у вікно **Scope**. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Scope**. У випадку, якщо графіки не спостерігаються на екрані віртуального осцилографа, натиснути кнопку "**Бінокль**" на панелі інструментів. За виглядом перехідної характеристики прийняти рішення про стійкість системи.

4 Поступово зменшувати постійну часу форсуючої ланки  $T_2$ , доки в системі не виникнуть автоколивання з постійною амплітудою. Звернути увагу на те, що при наближенні постійної часу форсуючої ланки  $T_2$  до граничного значення внаслідок зменшення запасу за фазою (див. таблицю 6.2 та графік залежності  $\varphi_3 = f_2(T_2)$ ) амплітуда коливань та тривалість перехідного процесу зростають.

Отримане граничне значення  $T_{2pr}^{(експ)}$  записати у звіт. Зіставити його з результатами аналітичного дослідження  $T_{2pr}^{(\Gamma)}$  та  $T_{2pr}^{(H)}$  за завданням 2 та зробити висновки.

## 6.6 Зміст звіту

1 Назва і мета роботи.

2 Схема математичної моделі досліджуваної системи (рисунок 6.4).

3 Хід та результати розв'язання завдань 1, 2 аналітичного дослідження.

4 Таблиці 6.1, 6.2 та графіки залежностей  $\varphi_3 = f_1(K)$ ,  $\varphi_3 = f_2(T_2)$ .

5 Схеми та результати досліджень САК в пакеті Simulink.

6 Висновки за роботою.

## 6.7 Контрольні запитання

1 Дайте визначення поняття стійкості за Ляпуновим.

2 Яку умову повинна задовольняти вільна складова руху стійкої лінійної стаціонарної системи?

3 Як, користуючись схемою математичної моделі САК, скласти характеристичне рівняння замкненої системи?

4 Викладіть і поясніть необхідні та достатні умови стійкості лінійної стаціонарної САК неперервної дії.

5 Викладіть правило складання визначника Гурвіца та його головних діагональних мінорів.

6 Сформулюйте критерій стійкості Гурвіца.

7 Користуючись критерієм Гурвіца, доведіть умови стійкості систем першого, другого та третього порядку.

8 Викладіть поняття області стійкості та граничних параметрів САК. Як можна знайти граничні параметри САК за допомогою критерію Гурвіца?

9 Які переходи ЛФЧХ через рівні  $\pm 180^\circ (2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , називають додатними, а які – від'ємними?

10 В яких випадках виникають фіктивні переходи ЛФЧХ розімкненої САК через рівні  $\pm 180^\circ (2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ?

11 Сформулюйте критерій стійкості Найквіста.

12 Дайте визначення поняття запасу стійкості САК за фазою. Що він характеризує? Як знайти запас стійкості САК за фазою по логарифмічних частотних характеристиках розімкненої системи?

13 Дайте визначення поняття запасу стійкості САК за підсиленням (амплітудою). Що він характеризує? Як знайти запас стійкості САК за підсиленням по логарифмічних частотних характеристиках розімкненої системи?

14 На рисунку 6.6 наведені логарифмічні частотні характеристики розімкненої САК. Виконати таке:

- 1) визначити, чи стійка система за критерієм Найквіста;
- 2) визначити запаси стійкості за амплітудою та за фазою.

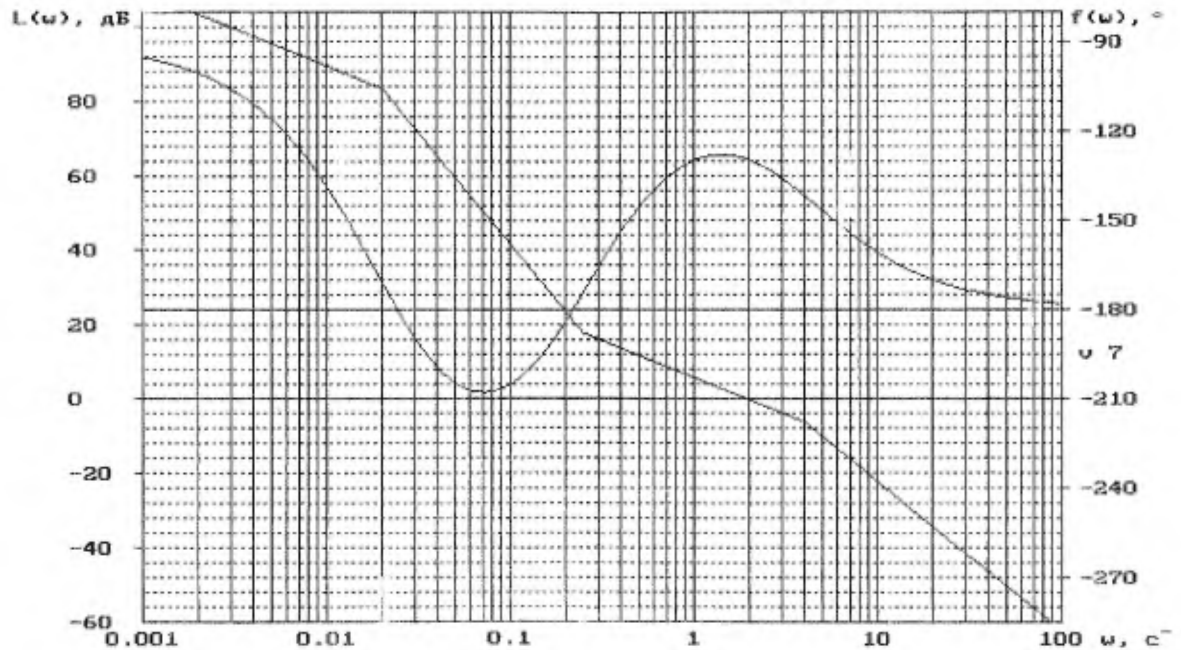


Рисунок 6.6

15 Схема математичної моделі САК наведена на рисунку 6.7. Її оператори передачі

$$K_1(D) = \frac{M_1}{D}; \quad K_2(D) = \frac{M_2(1+T_1D)}{D(1+T_2D)}.$$

Користуючись критерієм Гурвіца, визначити умови стійкості системи.

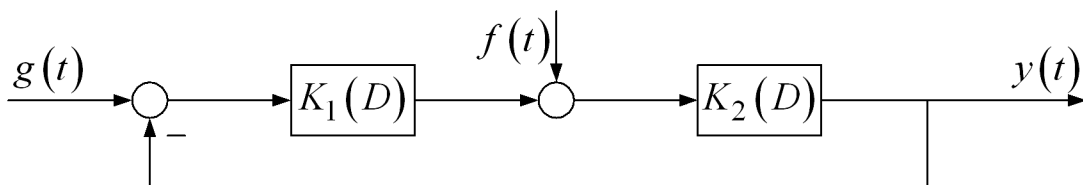


Рисунок 6.7



## **7 АНАЛІЗ ЯКОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ САК В ПЕРЕХІДНОМУ РЕЖИМІ**

### **7.1 Мета роботи**

- 1 Засвоїти методи аналізу якості САК в перехідному режимі.
- 2 Дослідити вплив параметрів САК на показники якості її функціонування в перехідному режимі.

### **7.2 Програма роботи**

- 1 Аналітичне визначення показників якості САК в перехідному режимі.
- 2 Експериментальне дослідження впливу параметрів САК на показники якості в перехідному режимі.

### **7.3 Підготовка до роботи**

- 1 За рекомендованою літературою [1, 3, 4, 7-9 ] та конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
  - мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
  - теоретичні положення за темою роботи: поняття перехідного та усталеного режимів функціонування САК; показники якості функціонування САК в перехідному режимі та методи їх визначення; зв'язок між перехідною та частотними характеристиками; вимоги до логарифмічних частотних характеристик, що гарантують задовільну якість функціонування САК в перехідному режимі.
- 2 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
- 3 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

### **7.4 Короткі відомості з теорії**

Перехідним називається режим, що виникає в системі безпосередньо після прикладення до неї вхідного діяння. Для аналізу якості функціонування САК в перехідному режимі застосовують перехідну характеристику  $h(t)$ , яка є реакцією системи на вхідне діяння у вигляді одиничної функції при нульових початкових

умовах. В стійких САК перехідна характеристика з часом прагне до постійного усталеного значення  $h_{уст}$ .

Типовий графік перехідної характеристики САК наведений на рисунку 7.1.

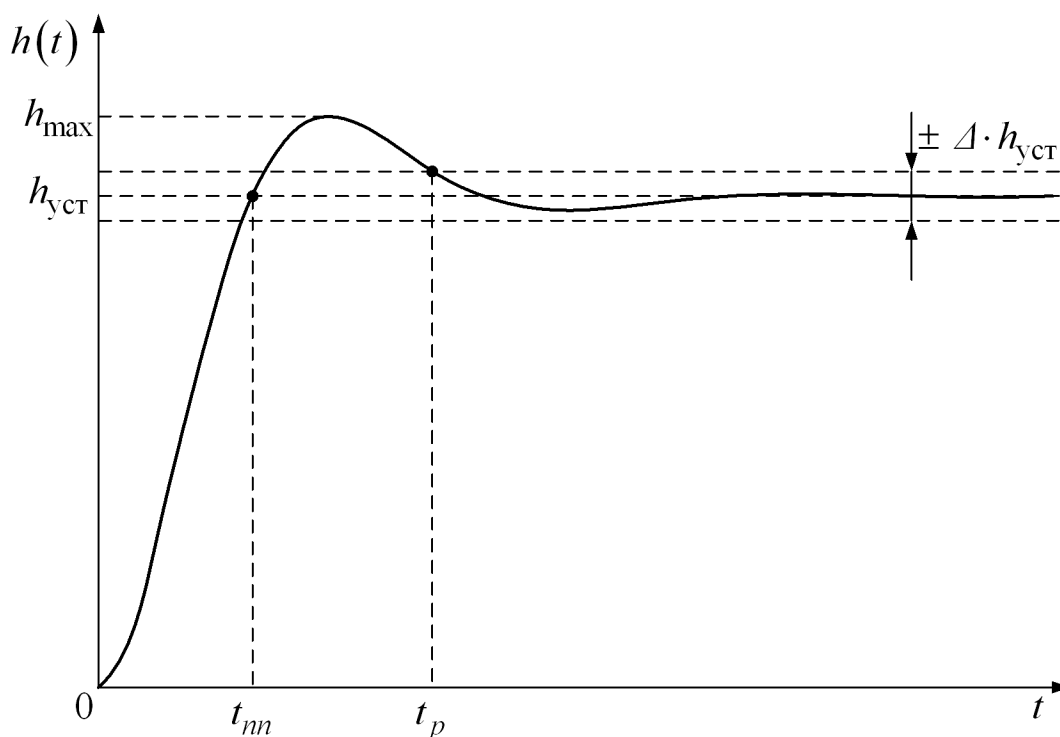


Рисунок 7.1

Основним показником якості функціонування САК в перехідному режимі є час його існування, який називається *часом регулювання*  $t_p$ . Він дорівнює інтервалу часу, після закінчення якого вихідна величина залишається близькою до усталеного значення із заданою точністю, тобто для всіх  $t \geq t_p$  виконується умова

$$\left| \frac{h(t)}{h_{уст}} - 1 \right| \leq \Delta, \quad (7.1)$$

де  $\Delta$  – достатньо мала величина. При практичних розрахунках значення  $\Delta$  приймають в межах 0.01–0.1 (зазвичай  $\Delta = 0.05$ ).

Якщо перехідна характеристика має коливання відносно усталеного значення, якість функціонування САК, крім часу регулювання, прийнято оцінювати за такими показниками (рисунки 7.1):

1) величина *перерегулювання*  $\sigma$  – максимальне відхилення перехідної характеристики від усталеного значення, яке виражають у процентах:

$$\sigma[\%] = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100; \quad (7.2)$$

2) *час першого погодження*  $t_{nn}$  – інтервал часу від моменту прикладення на вхід системи східчастого діяння до моменту, коли перехідна характеристика вперше досягне свого усталеного значення;

3) *кількість коливань*  $N_p$  – число максимумів перехідної характеристики на інтервалі часу регулювання.

Найбільш важливими з усіх показників якості САК в перехідному режимі є час регулювання  $t_p$  і перерегулювання  $\sigma$ . Перша величина характеризує швидкодію системи, а друга – ступінь її коливальності.

Перехідна характеристика може бути отримана розрахунковими методами, шляхом моделювання та експериментально.

Серед розрахункових методів розглянемо операційний і частотний методи.

**Операційний метод** побудови перехідної характеристики зводиться до відшукування оригіналу  $h(t)$  за відомою передаточною функцією замкненої системи  $W(p)$ :

$$h(t) = L^{-1}\{W(p)L[1(t)]\} = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}. \quad (7.3)$$

Для цього використовують таблиці перетворень Лапласа, теорему розкладання Хевисайда та інші способи відшукування оригіналу.

**Частотний метод** побудови перехідної характеристики заснований на застосуванні зв'язку між перехідною характеристикою та комплексною частотною характеристикою (КЧХ) замкненої системи  $W(j\omega)$ :

$$h(t) = F^{-1} \left\{ \frac{W(j\omega)}{j\omega} \right\}. \quad (7.4)$$

Методи, при використанні яких для відшукування показників якості функціонування САК в перехідному режимі використовуються графік перехідної характеристики, називаються прямими методами. Дослідження прямими методами суттєво полегшується при застосуванні для розрахунків пакетів прикладних програм (ППП), які призначені для розв'язання диференціальних рівнянь або для математичного моделювання динамічних систем. Серед них слід відмітити систему MATLAB, в складі якої є пакети структурного моделювання динамічних систем Simulink, пакети аналізу і синтезу систем керування Control System Toolbox та ін.

Поряд з прямими застосовуються й непрямі методи, які дозволяють судити про якість функціонування САК в перехідному режимі без відшукування графіка її перехідної характеристики.

Серед непрямих методів виділимо частотні методи, засновані на застосуванні взаємно однозначного зв'язку між перехідною характеристикою та частотними характеристиками системи. З аналізу особливостей цього зв'язку випливає, що властивості САК в перехідному режимі визначаються областю середніх частот (ОСЧ) – областю  $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$ , де ЛАЧХ  $L_R(\omega)$  розімкненої системи знаходиться в межах  $\pm 20$  дБ (рисунок 7.2).

Проведені дослідження показали, що САК буде мати прийнятні показники якості функціонування в перехідному режимі, якщо її логарифмічні частотні характеристики задовольняють такі вимоги:

1) на частоті зрізу розімкненої системи  $\omega_{zR}$  і в області частот, що примикають до неї, ЛАЧХ проходить з нахилом  $-20$  дБ/дек, причому загальна довжина за частотою відрізка ЛАЧХ з таким нахилом не менша за одну декаду;

2) значення запасів стійкості за амплітудою і за фазою задовольняють умови:

$$L_3 \geq 10 \text{ дБ}, \quad 45^\circ \leq \varphi_3 \leq 75^\circ.$$

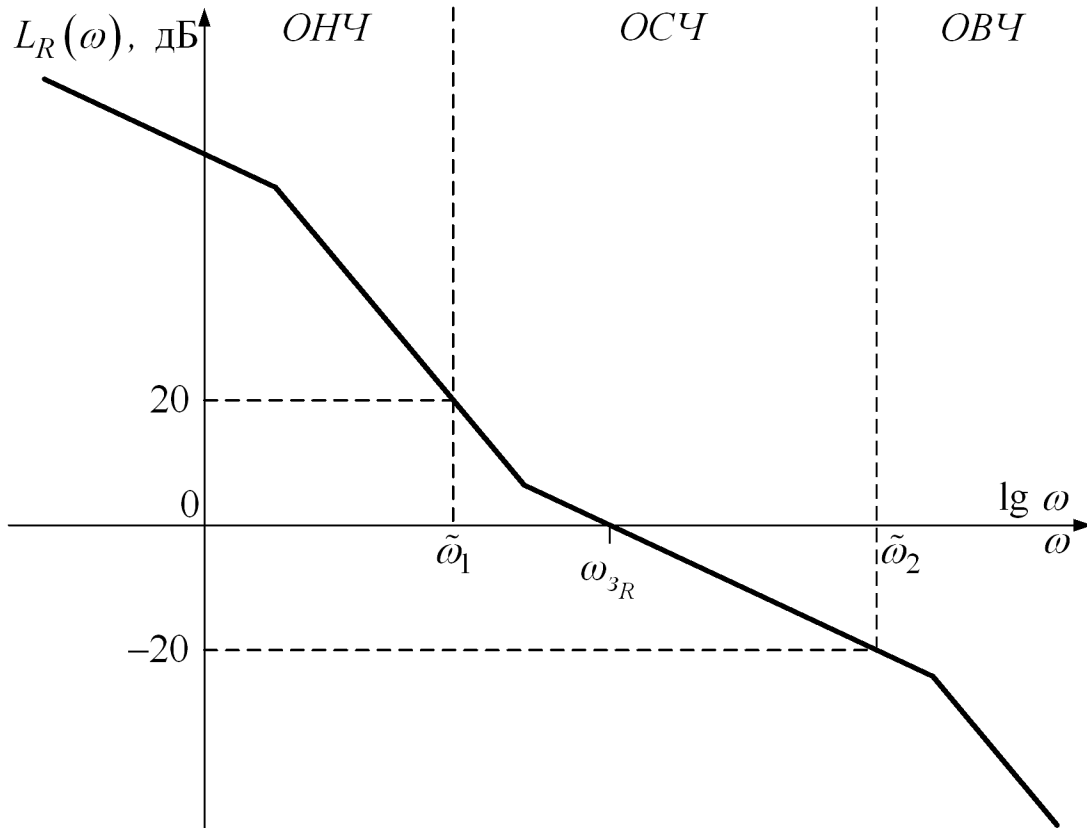


Рисунок 7.2

Ці вимоги тісно пов'язані з вимогами до величин запасів стійкості за амплітудою і за фазою, при яких корені характеристичного рівняння замкненої системи знаходяться достатньо далеко від уявної осі і тому рух системи не має значних коливань.

На практиці найбільш часто застосовуються мінімально-фазові САК, у яких ЛАЧХ розімкненої системи однократно перетинає вісь частот з нахилом  $-20$  дБ/дек. Такі ЛАЧХ називаються *типовими*. З досвіду аналізу і синтезу САК встановлено, що при виконанні вказаних вимог показники якості функціонування САК з типовою ЛАЧХ в перехідному режимі можуть бути з достатньою для інженерної практики точністю розраховані за такими евристичними формулами:

$$t_p = \frac{5 \dots 9}{\omega_{3R}}; \quad \sigma = \begin{cases} (73 - \varphi_3^\circ) \%, & \text{якщо } \varphi_3 < 73^\circ; \\ 0, & \text{якщо } \varphi_3 \geq 73^\circ. \end{cases} \quad (7.5)$$

При розрахунку часу регулювання менші значення коефіцієнта чисельника треба брати для більших значень запасу за фазою.

Як впливає з формул (7.5), час регулювання обернено пропорційний частоті зрізу розімкненої системи, а величина перерегулювання зростає при зменшенні запасу за фазою.

## 7.5 Вказівки щодо виконання роботи

### 7.5.1 Аналітичне визначення показників якості САК в перехідному режимі

1 На рисунку 7.3 наведена схема математичної моделі САК. Вона має оператори передачі

$$K_1(D) = K; \quad K_2(D) = \frac{1 + T_2 \cdot D}{D(1 + T_1 \cdot D)}; \quad K_3(D) = \frac{1}{(1 + T_3 \cdot D)^2}, \quad (7.6)$$

де  $T_1 = 10$  с,  $T_2 = 1$  с,  $T_3 = 0.05$  с – постійні часу ланок.

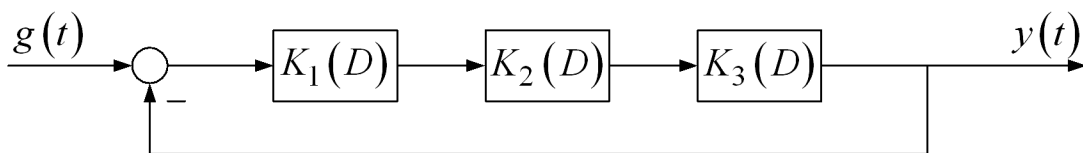


Рисунок 7.3

Записати передаточні функції розімкненої системи  $R(p)$  та замкненої системи  $W(p)$ .

2 За допомогою пакета Control System побудувати сім'ю ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої САК, заданої в п.1, для значень  $K = 2, 10, 20, 50$  та  $100 \text{ с}^{-1}$ .

Для цього запустити програмну оболонку Matlab, після чого в командному вікні (**Command Window**) відповідно до виразу (7.6) та виразу для передаточної функції розімкненої системи набрати:

**K1 = K; K2 = tf([1 1],[10 1 0]); K3 = tf([1],[0.05 1]);**  
**R = K1 \* K2 \* K3 \* K3; margin(R); grid**

(тут  $K = 2, 5, 10, 20, 50$  або  $100$ ) та натиснути **Enter**.

Після натискання **Enter** у командному вікні з'являються графіки логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи зі значеннями запасів за підсиленням (амплітудою)  $L_3$  та за фазою  $\varphi_3$  (в Matlab вони позначені  $G_m$  та  $P_m$  відповідно). Занести отримані значення запасів та частоти зрізу розімкненої системи  $\omega_{3R}$  в таблицю 7.1.

3 Користуючись евристичними формулами (7.5), розрахувати та занести у таблицю 7.1 значення показників якості САК в перехідному режимі – часу регулювання  $t_p^{(розр)}$ , перерегулювання  $\sigma^{(розр)}$ .

Таблиця 7.1 – Залежність показників якості перехідного режиму від коефіцієнта підсилення розімкненої системи

$K, c^{-1}$	2	5	10	20	50	100
$L_3 (G_m), \text{дБ}$						
$\varphi_3 (P_m), \text{град}$						
$\omega_{3R}, c^{-1}$						
$t_p^{(розр)}, \text{с}$						
$\sigma^{(розр)}, \%$						
$t_p^{(експ)}, \text{с}$						
$\sigma^{(експ)}, \%$						

Побудувати залежності:

а) запасів стійкості та частоти зрізу розімкненої системи від коефіцієнта підсилення розімкненої системи

$$L_3 = f_1(K); \varphi_3 = f_2(K); \omega_{3R} = f_3(K);$$

б) показників якості перехідного режиму від коефіцієнта підсилення розімкненої системи

$$t_p^{(розр)} = f_1(K), \quad \sigma^{(розр)} = f_2(K).$$

Зробити висновки про вплив коефіцієнта підсилення розімкненої системи на її частотні характеристики та на показники якості в перехідному режимі.

### 7.5.2 Експериментальне дослідження впливу параметрів САК на показники якості в перехідному режимі

1 За допомогою пакета Control System побудувати сім'ю перехідних характеристик замкненої САК, заданої в п.1 завдання на аналітичне дослідження, для значень  $K = 2, 10, 20, 50$  та  $100 \text{ с}^{-1}$ .

Запустити програмну оболонку Matlab, після чого в командному вікні (**Command Window**) відповідно до виразу (7.6) та виразів для передаточних функцій розімкненої системи  $R(p)$  та замкненої системи  $W(p)$  набрати:

```
K1 = K; K2 = tf([1 1],[10 1 0]); K3 = tf([1],[0.05 1]);  
R = K1 * K2 * K3 * K3; W = feedback(R,1); step(W); grid
```

(тут  $K = 2, 5, 10, 20, 50$  або  $100$ ) та натиснути **Enter**.

Після натискання **Enter** у командному вікні з'являється графік **Figure 1** перехідної характеристики замкненої системи для заданого значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K$ .

На кожному з графіків перехідної характеристики визначити та занести до таблиці 7.1 значення часу регулювання  $t_p^{(експ)}$  та величини перерегулювання  $\sigma^{(експ)}$ . Для визначення значення часу регулювання у вікні **Figure 1** необхідно натиснути на ліву кнопку "миші" і, не відпускаючи її, перемістити покажчик "миші" таким чином, щоб значення перехідної характеристики вперше ввійшло в межі від 0.95 до 1.05 і більш не виходило з них (див. рисунок 7.1 та вираз (7.1)). Для визначення величини перерегулювання



натиснути на ліву кнопку "миші" і, не відпускаючи її, перемістити покажчик "миші" таким чином, щоб було визначене максимальне значення  $h_{\max}$  перехідної характеристики (див. рисунок 7.1). Далі за формулою (7.2) розрахувати величину перерегулювання з урахуванням того, що  $h_{\text{уст}} = 1$ .

2 За результатами досліджень побудувати графіки залежностей  $t_p^{(\text{експ})}(K)$ ,  $\sigma^{(\text{експ})}(K)$  поряд з аналітичними результатами  $t_p^{(\text{розрах})}(K)$ ,  $\sigma^{(\text{розрах})}(K)$ . Порівняти отримані залежності й зробити висновки про можливість застосування евристичних формул (7.5) та точність результатів, що отримані за ними.

## 7.6 Зміст звіту

- 1 Назва і мета роботи.
- 2 Схема математичної моделі досліджуваної системи (рисунок 7.3).
- 3 Хід та результати аналітичного дослідження.
- 4 Таблиця 7.1 та графіки залежностей:
  - а)  $L_3 = f_1(K)$ ;  $\varphi_3 = f_2(K)$ ;  $\omega_{3R} = f_3(K)$ ;
  - б)  $t_p^{(\text{розрах})}(K)$ ,  $\sigma^{(\text{розрах})}(K)$ ;
  - в)  $t_p^{(\text{експ})}(K)$ ,  $\sigma^{(\text{експ})}(K)$ .
- 5 Висновки за роботою.

## 7.7 Контрольні запитання

- 1 Дайте визначення перехідного режиму САК.
- 2 Дайте визначення перехідної характеристики САК.
- 3 Якими показниками визначається якість функціонування САК в перехідному режимі? Вкажіть їх на графіку перехідної характеристики.

4 Якою областю частот визначаються властивості САК в перехідному режимі? Виділіть вказану область на ЛАЧХ розімкненої САК.

5 Які вимоги повинні задовольняти ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої САК для того, щоб замкнена система мала прийнятні показники якості функціонування в перехідному режимі?

6 Наведіть евристичні формули для розрахунку показників якості функціонування САК в перехідному режимі. Користуючись ними, поясніть зв'язок параметрів ЛАЧХ розімкненої САК з показниками якості функціонування САК в перехідному режимі.

7 Схема математичної моделі САК наведена на рисунку 7.4. Користуючись нормованими перехідними характеристиками ланки другого порядку (рисунок 7.5, де  $\tau = t/T_0$ ), розрахувати показники якості САК в перехідному режимі, якщо  $K_v = 0.5 \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 0.125 \text{ с}$ .

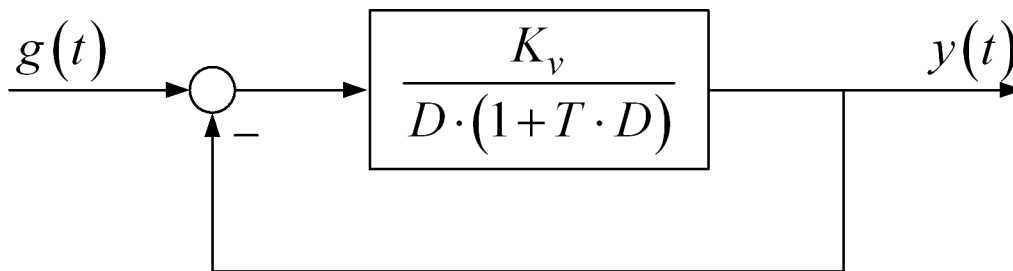


Рисунок 7.4

8 На рисунку 7.6 наведені асимптотична ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої САК. Виконати таке:

1) провести аналіз, чи відповідають частотні характеристики вимогам, що гарантують задовільну якість функціонування САК в перехідному режимі;

2) розрахувати за евристичними формулами показники якості функціонування САК в перехідному режимі.

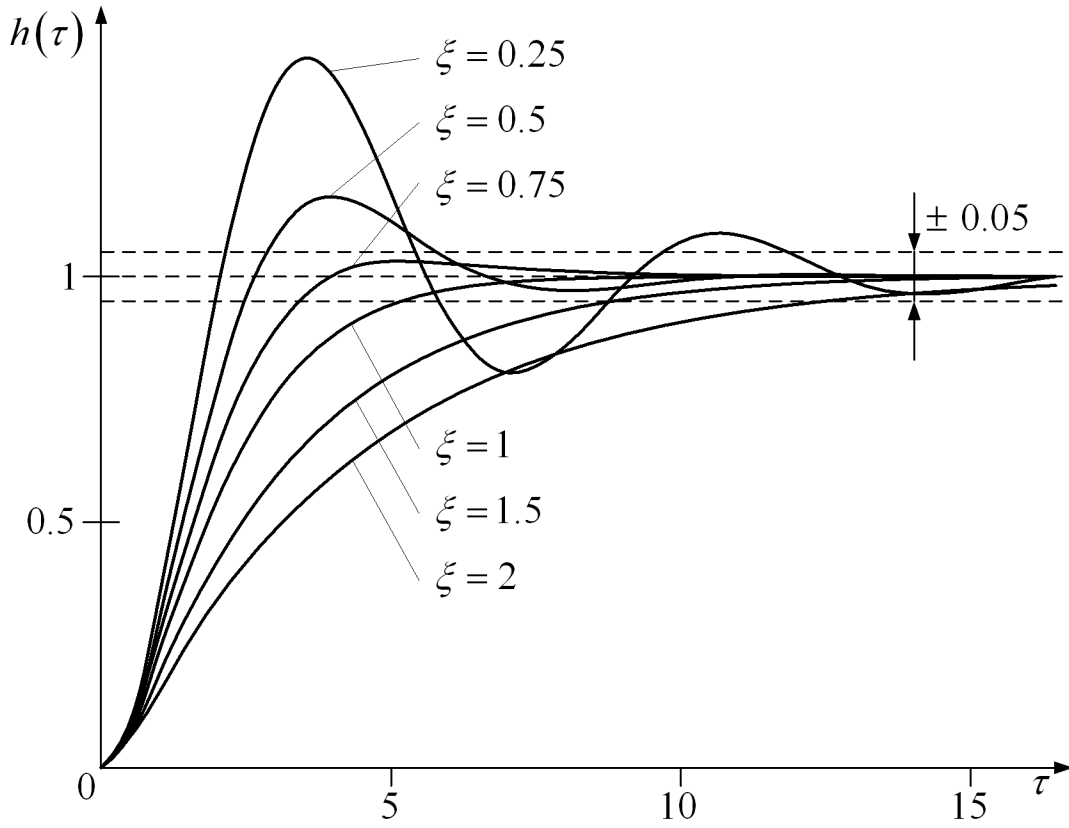


Рисунок 7.5

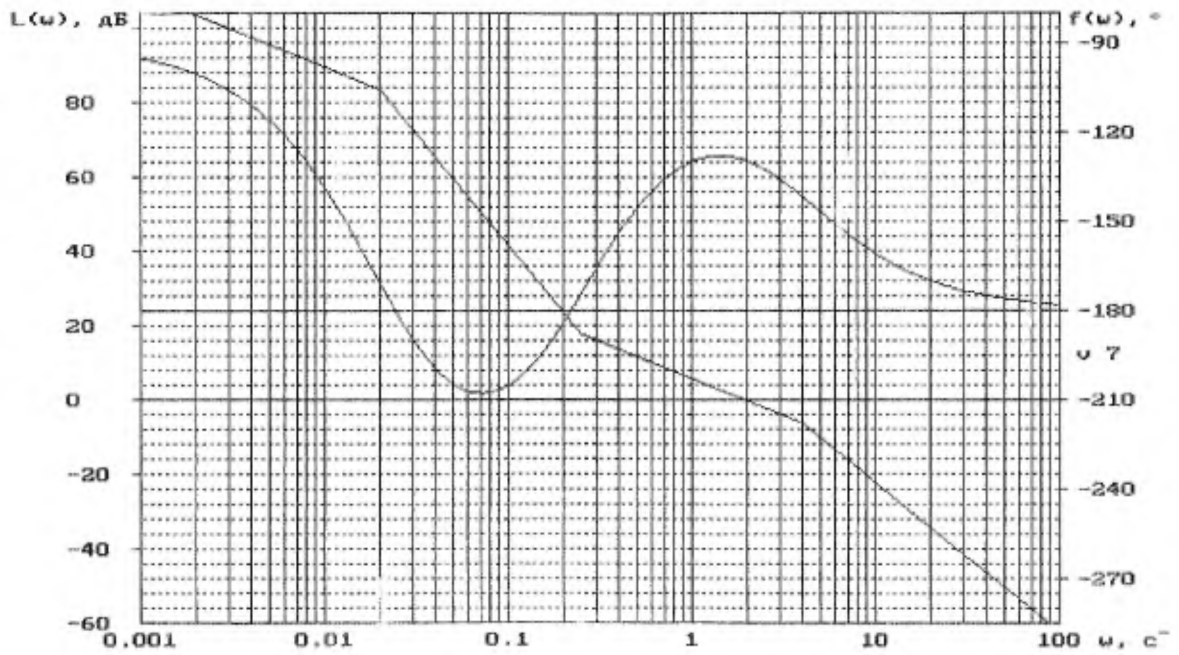


Рисунок 7.6

## **8 АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ПРОЦЕСІВ КЕРУВАННЯ**

### **8.1 Мета роботи**

- 1 Засвоїти методи аналізу точності САК.
- 2 Розрахунковим і експериментальним шляхом встановити вплив параметрів та структури САК на точність її функціонування.

### **8.2 Програма виконання роботи**

- 1 Аналітичне дослідження точності САК.
- 2 Експериментальне дослідження точності статичної САК.
- 3 Експериментальне дослідження точності САК з астатизмом першого порядку.
- 4 Експериментальне дослідження точності САК з астатизмом другого порядку.

### **8.3 Підготовка до роботи**

- 1 За рекомендованою літературою [1, 3, 8, 9] та конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
  - мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
  - теоретичні положення за темою роботи: поняття усталеної помилки САК та методи її визначення; поняття статизму та астатизму САК; ознаки порядку астатизму; вплив порядку астатизму на величину усталеної помилки при типових вхідних діяннях.
- 2 Виконати аналітичне дослідження точності САК (п. 8.5.1).
- 3 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
- 4 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

### **8.4 Короткі відомості з теорії**

Точність функціонування САК характеризується величиною усталеної помилки  $\varepsilon_{уст}(t)$ , яка дорівнює різниці між значеннями задавального діяння  $g(t)$  й усталеного значення вихідної величини  $y_{уст}(t)$ :

$$\varepsilon_{уст}(t) = g(t) - y_{уст}(t). \quad (8.1)$$

Надалі з метою спрощення позначень опустимо підрядковий індекс в позначеннях усталеної помилки.

В загальному випадку усталена помилка має дві складових:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_f(t),$$

де  $\varepsilon_g(t)$  – динамічна помилка – помилка, яка викликана неточністю відпрацьовування задавального діяння  $g(t)$ ;

$\varepsilon_f(t)$  – помилка, що обумовлена заважаючим діянням.

Надалі обмежимося аналізом динамічної помилки, тобто будемо вважати, що заважаюче діяння відсутнє.

Для проведення інженерного аналізу точності застосовуються так звані **типові режими** – режими, що виникають під впливом діянь, що описуються степеневими функціями часу 0...2 порядків. Види діянь, назви відповідних ним типових режимів роботи САК й усталених помилок наведені в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Характеристика типових режимів роботи САК

Вид діяння	Типовий режим роботи САК	Назва усталеної помилки
Постійне $g(t) = A$	Статичний	Статична
Лінійне $g(t) = V \cdot t$	Кінетичний	Кінетична
Квадратичне $g(t) = W \cdot t^2 / 2$	Рівноприскорений	Інерційна

Всі САК в залежності від наявності чи відсутності статичної помилки, тобто усталеної помилки при постійному вхідному діянні (в статичному режимі), поділяються на статичні або астатичні.

**Статичною** називається САК, у якої існує статична помилка ( $\varepsilon_{ст} \neq 0$ ). В **астатичній** САК статична помилка відсутня ( $\varepsilon_{ст} = 0$ ), тобто постійне вхідне діяння відпрацьовується без помилки.

Визначимо ознаки статизму та астатизму САК відносно задавального діяння.

Для відшукування усталених динамічних помилок скористаємось теоремою про граничні значення функції та її зображення за Лапласом (див. додаток Б):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot L\{u(t)\}.$$

В нашому випадку маємо

$$\varepsilon_g = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_g(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot L\{\varepsilon_g(t)\}. \quad (8.2)$$

Перетворення Лапласа динамічної помилки САК визначається виразом

$$L\{\varepsilon_g(t)\} = E(p) \cdot L\{g(t)\}, \quad (8.3)$$

де  $E(p)$  – передаточна функція САК за динамічною помилкою.

Після підстановки (8.3) до (8.2) отримаємо вираз для розрахунку усталених динамічних помилок

$$\varepsilon_g = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) \cdot L\{g(t)\}. \quad (8.4)$$

Якщо математична модель САК приведена до стандартного вигляду (рисунок 5.1), то передаточна функція САК за динамічною помилкою визначається через передаточну функцію розімкненої САК  $R(p)$  виразом

$$E(p) = \frac{1}{1 + R(p)}. \quad (8.5)$$

Запишемо передаточну функцію розімкненої САК  $R(p)$  у такому вигляді:

$$R(p) = \frac{K \cdot B_1(p)}{p^\nu \cdot A_1(p)}, \quad (8.6)$$

де  $K$  – загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи;  
 $\nu = 0, 1, 2, \dots$  – загальна кількість інтегруючих ланок у складі системи;

$B_1(p)$  – многочлени чисельника та знаменника, перші коефіцієнти яких дорівнюють одиниці.

$$B_1(p) = 1 + \beta_1 \cdot p + \beta_2 \cdot p^2 + \dots; \quad A_1(p) = 1 + \alpha_1 \cdot p + \alpha_2 \cdot p^2 + \dots$$

Після підстановки (8.6) у (8.5) маємо

$$E(p) = \frac{p^\nu \cdot A_1(p)}{p^\nu \cdot A_1(p) + K \cdot B_1(p)}. \quad (8.7)$$

Підставимо вираз (8.7) у (8.4) та здійснимо часткове визначення границі:

$$\varepsilon_g = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu+1}}{p^\nu + K} L\{g(t)\}. \quad (8.8)$$

Тут враховано, що  $\lim_{p \rightarrow 0} B_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} A_1(p) = 1$ .

При постійному задавальному діянні  $g(t) = A$  маємо  $L\{g(t)\} = \frac{A}{p}$ , й тому статична помилка системи дорівнює

$$\varepsilon_{cm} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu+1}}{p^\nu + K} \cdot \frac{A}{p} = \begin{cases} A/(1+K), & \text{якщо } \nu = 0; \\ 0, & \text{якщо } \nu > 0. \end{cases} \quad (8.9)$$

**Отже, система є статичною, якщо в ній відсутні інтегруючі ланки ( $\nu = 0$ ), та навпаки, система є астатичною, якщо в ній є хоча б одна інтегруюча ланка.**

Астатичні САК у свою чергу розподіляють на системи з астатизмом першого, другого й т.д. порядків. **Ознакою порядку астатизму САК є кількість  $\nu$  інтегруючих ланок в передаточній функції розімкненої системи.**

Встановимо вплив порядку астатизму на точність САК в типових режимах роботи. Для цього запишемо у вигляді (8.6) передавальні функції розімкнених систем:

– статичної  $R(p) = \frac{K \cdot B_1(p)}{A_1(p)}$ ;

– астатичної першого порядку  $R(p) = \frac{K \cdot B_1(p)}{p \cdot A_1(p)}$ ;

– астатичної другого порядку  $R(p) = \frac{K \cdot B_1(p)}{p^2 \cdot A_1(p)}$ .

Користуючись додатком Б, запишемо зображення за Лапласом типових вхідних діянь:

– постійного діяння  $L\{A \cdot 1(t)\} = \frac{A}{p}$ ;

– лінійного діяння  $L\{V \cdot t\} = \frac{V}{p^2}$ ;

– квадратичного діяння  $L\{W \cdot t^2 / 2\} = \frac{W}{p^3}$ .

Результати розрахунків за формулою (8.8) усталених помилок, що виникають в статичній системі і в астатичних системах першого та другого порядків у типових режимах роботи, зведені до таблиці 8.2.

Таблиця 8.2 – Вплив порядку астатизму на точність САК в типових режимах роботи

Тип САК	Усталена помилка		
	Статична $\varepsilon_{cm}$	Кінетична $\varepsilon_{\kappa}$	Інерційна $\varepsilon_{in}$
Статична	$\frac{A}{1+K}$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
Астатична 1-го порядку	0	$\frac{V}{K}$	$\rightarrow \infty$
Астатична 2-го порядку	0	0	$\frac{W}{K}$



З аналізу отриманих результатів можна зробити такі висновки:

1) статичні САК можуть задовільно функціонувати лише при вхідних діяннях, які є постійними або змінюються повільно і в малих межах;

2) системи з астатизмом 1-го порядку здатні відпрацьовувати до-вільні постійні діяння, а також діяння, що змінюються з постійною швидкістю;

3) системи з астатизмом 2-го порядку можуть працювати на-віть в умовах, коли існують прискорення вхідних діянь;

4) у будь-яких САК для зменшення величини динамічної по-милки необхідно збільшувати коефіцієнт підсилення розімкненої системи.

## 8.5 Вказівки щодо виконання роботи

### 8.5.1 Аналітичне дослідження точності САК

#### 1 Дослідження статичної системи

Для системи, схема математичної моделі якої наведена на ри-сунку 8.1, записати вирази для усталених помилок у типових ре-жиммах роботи. Зробити висновок про порядок астатизму системи.

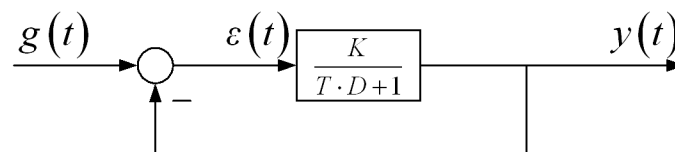


Рисунок 8.1 – Схема математичної моделі статичної САК

Розрахувати і побудувати графік залежності статичної помил-ки  $\varepsilon_{ст}^{(розр)}$  від величини коефіцієнта підсилення розімкненої САК  $K$ , припускаючи, що задавальне діяння дорівнює

$$g(t) = A \cdot 1(t) \text{ при } A = 1.$$

Результати розрахунку занести до таблиці 8.3.

Таблиця 8.3 – Вплив коефіцієнта підсилення розімкненої статичної САК на статичну помилку

$K$	1	2	5
$\varepsilon_{ст}^{(розр)}$			
$\varepsilon_{ст}^{(експ)}$			

### 2 Дослідження системи з астатизмом 1-го порядку

Для системи, схема математичної моделі якої наведена на рисунку 8.2, записати вирази для усталених помилок в типових режимах роботи. Зробити висновок про порядок астатизму системи.

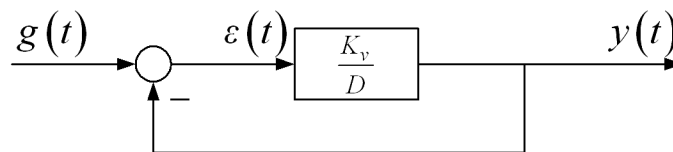


Рисунок 8.2 – Схема математичної моделі САК з астатизмом 1-го порядку

Розрахувати і побудувати графік залежності кінетичної помилки  $\varepsilon_{к}^{(розр)}$  від величини коефіцієнта підсилення розімкненої САК  $K_v$ , припускаючи, що задавальне діяння у кінетичному режимі дорівнює

$$g(t) = V \cdot t \text{ при } V = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Результати розрахунку занести до таблиці 8.4.

Таблиця 8.4 – Вплив коефіцієнта підсилення розімкненої САК з астатизмом 1-го порядку на кінетичну помилку

$K_v, \text{с}^{-1}$	1	2	5
$\varepsilon_{к}^{(розр)}$			
$\varepsilon_{к}^{(експ)}$			

### 3 Дослідження системи з астатизмом 2-го порядку

Для системи, схема математичної моделі якої наведена на рисунку 8.3, записати вирази для усталених помилок в типових режимах роботи. Зробити висновок про порядок астатизму системи.

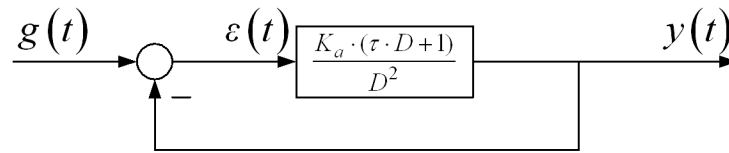


Рисунок 8.3 – Схема математичної моделі САК з астатизмом 2-го порядку

Розрахувати і побудувати графік залежності інерційної помилки  $\varepsilon_{ін}^{(розр)}$  від величини коефіцієнта підсилення розімкненої САК  $K$ , припускаючи, що задавальне діяння у рівноприскореному режимі дорівнює

$$g(t) = W \cdot t^2 / 2 \text{ при } W = 1 \text{ с}^{-2}.$$

Результати розрахунку занести до таблиці 8.5.

Таблиця 8.5 – Вплив коефіцієнта підсилення розімкненої САК з астатизмом 2-го порядку на інерційну помилку

$K_a, \text{с}^{-2}$	1	2	5
$\varepsilon_{ін}^{(розр)}$			
$\varepsilon_{ін}^{(експ)}$			

#### 8.5.2 Експериментальне дослідження динамічних помилок САК

Дослідження проводиться за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає у подачі на вхід досліджуваної САК типового входного діяння і реєстрації за допомогою осцилографа процесу його відпрацювання та помилки для декількох значень коефіцієнта підсилення розімкненої САК.

Відкрити файл **Tochnist**. Схема проведення експерименту в пакеті Simulink зображена на рисунку 8.4. Вона складається з датчика вхідних діянь, набору моделей досліджуваних систем та віртуального осцилографа.

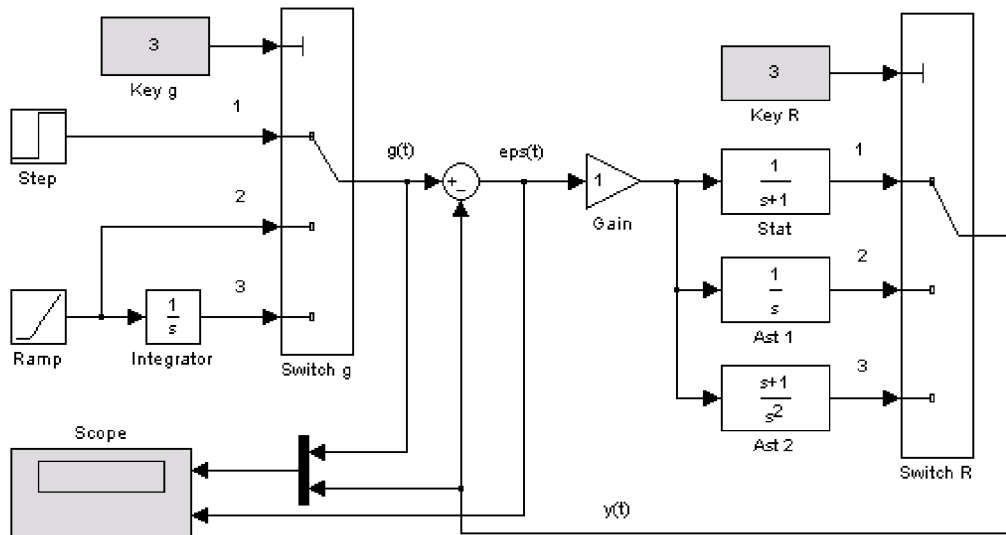


Рисунок 8.4 – Схема проведення експерименту

Дослідження точності здійснюється в статичному, кінетичному і рівноприскореному режимах. Тому датчик вхідних діянь складається з генератора одиничної функції (**Step**), генератора лінійної функції (**Ramp**), генератора квадратичної функції (**Ramp** та **Integrator**), а також керованого перемикача (**Switch g**) та блока керування (**Key g**). Підключення необхідного генератора здійснюється так: двократно натиснути лівою кнопкою "миші" елемент **Key g**, після чого у вікні **Constant value** ввести значення константи **1**, **2** або **3**, що дорівнює номеру входу, до якого підключений обраний генератор.

Набір моделей досліджуваних систем складається із загальних блоків віднімання та підсилювання (**Gain**) і додаткових моделей статичної системи (блок **Stat**), системи з астатизмом 1-го порядку (блок **Ast 1**) та системи з астатизмом 2-го порядку (блок **Ast 2**). Вони підключаються для проведення досліджень за допомогою керованого перемикача (**Switch R**) та блока керування (**Key R**).

Спостереження процесів у системі здійснюється за допомогою двоканального віртуального осцилографа (**Scope**). На верхньому екрані спостерігаються вхідна величина  $g(t)$  (оранжевий колір) та вихідна величина  $y(t)$  (малиновий колір). На нижньому екрані спостерігається помилка системи  $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ .

### *1 Дослідження статичної системи*

Для створення статичної системи двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Key R**, після чого у вікні **Constant value** ввести значення константи **1** та натиснути **Ok**.

Провести дослідження системи в статичному режимі. Підключити до входу системи генератор одиничної функції (**Step**).

Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K = 1$ . Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Gain**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення **1** та натиснути **Ok**.

Запустити імітацію процесу функціонування системи натисканням кнопки **► (Start)** на панелі інструментів.

Відкрити вікно **Scope**. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Scope**. У випадку, якщо графіки не вдало спостерігаються на екрані віртуального осцилографа, натиснути кнопку **"Бінокль"** на панелі інструментів. Проаналізувати хід відпрацювання системою ступеневого вхідного діяння та графік помилки. Одержати й занести до таблиці 8.3 експериментальні дані для усталеного значення статичної помилки  $\varepsilon_{ст}^{(експ)}$ .

Повторити дослідження для коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K = 2$  та  $5$ . Порівняти результати розрахунку з даними експерименту.

Якісно дослідити точність статичної САК у кінетичному та рівноприскореному режимах. Для цього по чергово у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **2** та **3**, запустити імітацію процесу функціонування натисканням кнопки **► (Start)** на панелі інструментів, після чого у вікні **Scope** спостерігати хід відпрацювання системою відповідного вхідного діяння та графіки помилок. Зробити висновок про спроможність статичної системи до роботи в кінетичному та рівноприскореному режимах.

## 2 Дослідження системи з астатизмом 1-го порядку

Для створення системи з астатизмом 1-го порядку двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Key R**, після чого у вікні **Constant value** ввести значення константи **2** та натиснути **Ok**.

Провести дослідження системи в статичному режимі, для чого у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **1**. Підключити до входу системи генератор одиничної функції (**Step**).

Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K_v = 1$ . Для цього двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Gain**, після чого у вікні **Parameters** ввести значення **1** та натиснути **Ok**.

Запустити імітацію процесу функціонування системи натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів.

Відкрити вікно **Scope**. Проаналізувати хід відпрацювання системою ступеневого вхідного діяння та графік помилки. Зробити висновок про величину усталеної статичної помилки.

Дослідити систему в кінетичному режимі, для чого у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **2**. Запустити імітацію процесу функціонування та переключитися у вікно **Scope**. Одержати й занести до таблиці 8.4 експериментальне значення усталеної кінетичної помилки  $\varepsilon_k^{(експ)}$ .

Повторити дослідження для коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K_v = 2$  та  $5 \text{ с}^{-1}$ . Порівняти результати розрахунку з даними експерименту.

Якісно дослідити точність САК в рівноприскореному режимі. Для цього у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **3**. Запустити імітацію процесу функціонування натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів, після чого у вікні **Scope** спостерігати хід відпрацювання системою вхідного діяння та графік помилки. Зробити висновок про спроможність астатичної системи 1-го порядку до роботи в рівноприскореному режимі.

## 3 Дослідження системи з астатизмом 2-го порядку

Для створення системи з астатизмом 2-го порядку двічі натиснути лівою кнопкою "миші" на блок **Key R**, після чого у вікні **Constant value** ввести значення константи **3** та натиснути **Ok**.

Встановити коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K_a = 1$ .

Провести дослідження системи в статичному та кінетичному режимах. Проаналізувати хід відпрацювання системою відповідних вхідних діянь та графіки помилок. Зробити висновок.

Дослідити систему в рівноприскореному режимі, для чого у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **3**. Запустити імітацію процесу функціонування та переключитися у вікно **Scope**. Одержати й занести до таблиці 8.5 експериментальне значення усталеної інерційної помилки  $\varepsilon_{in}^{(експ)}$ .

Повторити дослідження для коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K_a = 2$  та  $5 \text{ с}^{-1}$ . Порівняти результати розрахунку з даними експерименту.

Після закінчення досліджень закрити вікно керування програмної оболонки Matlab, на запитання про збереження змін у файлі **Technist** відповісти **No**.

## 8.6 Зміст звіту

- 1 Назва і мета роботи.
- 2 Схеми математичних моделей та результати виконання аналітичного дослідження динамічних помилок САК.
- 3 Таблиці 8.3 – 8.5 з результатами аналітичних та експериментальних досліджень.
- 4 Графіки аналітичних та експериментальних залежностей усталених помилок від коефіцієнтів підсилення розімкненої САК, які побудовані в одних координатних осях.
- 5 Висновки про вплив порядку астатизму, коефіцієнта підсилення та характеру задавального діяння на динамічну помилку системи.

## 8.7 Контрольні запитання

- 1 Поясніть поняття усталеного режиму роботи стійкої САК.
- 2 Поясніть поняття статичної, кінетичної та інерційної помилок САК.

3 Викладіть методику розрахунку усталеної помилки САК за допомогою теореми про граничні значення оригіналу та його зображення за Лапласом.

4 Дайте визначення статичної САК.

5 Дайте визначення астатичної САК.

6 Наведіть ознаку порядку астатизму САК за задавальним ді-  
янням.

7 Якою буде статична помилка в системі з астатизмом першо-  
го порядку:

а) 0; б) постійна; в)  $\infty$ .

8 Якою буде кінетична помилка в статичній системі:

а) 0; б) постійна; в)  $\infty$ .

9 Якою буде кінетична помилка в системі з астатизмом друго-  
го порядку:

а) 0; б) постійна; в)  $\infty$ .

10 Якою буде інерційна помилка в системі з астатизмом пер-  
шого порядку:

а) 0; б) постійна; в)  $\infty$ .

11 Якою буде кінетична помилка в системі з астатизмом пер-  
шого порядку:

а) 0; б) постійна; в)  $\infty$ .

12 Схема математичної моделі САК наведена на рисунку 8.5.

Її оператори передачі

$$K_1(D) = \frac{M_1}{D}, \quad K_2(D) = \frac{M_2(1+T_1D)}{D(1+T_2D)}.$$

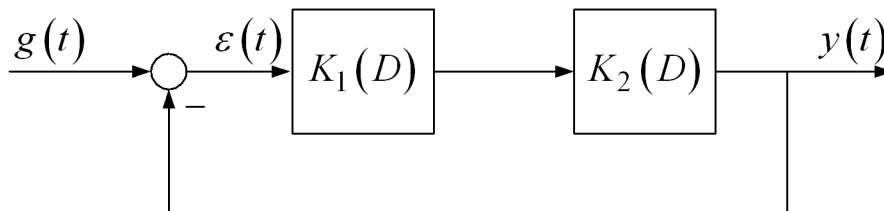


Рисунок 8.5

Розрахувати усталену динамічну помилку, якщо задавальне ді-  
яння  $g(t)$  змінюється за законом

$$g(t) = 0.5 \cdot W \cdot t^2.$$



## **9 ЗАСТОСУВАННЯ КОРЕКТУЮЧИХ ПРИСТРОЇВ ДЛЯ ПОЛПШЕННЯ ЯКОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ САК**

### **9.1 Мета роботи**

- 1 З'ясувати сутність та методи корекції САК.
- 2 Дослідити вплив структури та параметрів коректуючих пристроїв на показники якості функціонування САК.

### **9.2 Програма виконання роботи**

- 1 Дослідження впливу пропорційно-диференціальної корекції на показники якості функціонування САК.
- 2 Дослідження впливу пропорційно-інтегральної корекції на показники якості функціонування САК.

### **9.3 Підготовка до роботи**

- 1 За рекомендованою літературою [1, 3, 4, 8, 9] та конспектом лекцій у позааудиторний час вивчити:
  - мету, програму і вказівки щодо виконання роботи;
  - теоретичні положення за темою роботи: поняття корекції САК та види коректуючих пристроїв; методи корекції та їх вплив на показники якості функціонування САК.
- 2 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.
- 3 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

### **9.4 Короткі відомості з теорії**

Системи автоматичного керування, що містять тільки функціонально необхідні блоки, зазвичай не мають потрібної якості функціонування. Так, динамічна помилка системи тим менша, чим більший коефіцієнт підсилення має розімкнена система. Однак зі збільшенням коефіцієнта підсилення зменшуються запаси стійкості, перехідний процес стає більш коливальним, а при коефіцієнті підсилення вище граничного система взагалі стає нестійкою і, отже, неприцездатною. Зміна структури та параметрів системи з метою усунення протиріч між показниками якості та надання си-

стемі бажаних динамічних властивостей (стійкість, точність, якість перехідного процесу) здійснюється введенням до її складу спеціальних пристроїв, що отримали назву *коректуючих*.

Схема математичної моделі системи автоматичного керування з послідовним коректуючим пристроєм зображена на рисунку 9.1. На цьому рисунку позначено:  $R_H(p)$  – передаточна функція розімкненої некоректованої системи – системи, яка складається лише з функціонально необхідних блоків;  $K_{кп}(p)$  – передаточна функція послідовного коректуючого пристрою;  $G(p)$  – зображення за Лапласом задавального діяння;  $Y(p)$  – зображення за Лапласом вихідної величини.

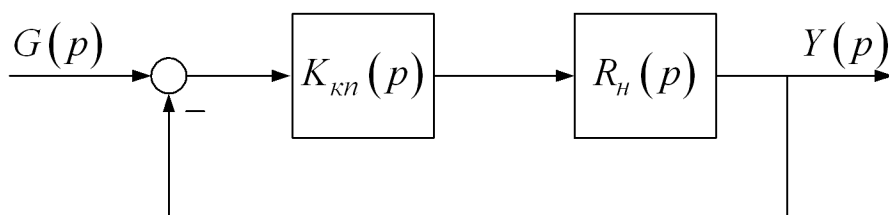


Рисунок 9.1 – Схема математичної моделі САК з послідовним коректуючим пристроєм

При послідовній корекції, показаній на рисунку 9.1, передаточна функція розімкненої коректованої системи дорівнює

$$R_k(p) = K_{кп}(p) \cdot R_H(p). \quad (9.1)$$

Тому логарифмічні частотні характеристики розімкненої коректованої системи:

$$\begin{aligned} L_k(\omega) &= L_{кп}(\omega) + L_H(\omega), \\ \varphi_k(\omega) &= \varphi_{кп}(\omega) + \varphi_H(\omega). \end{aligned} \quad (9.2)$$

З виразу (9.2) випливає, що послідовні коректуючі пристрої змінюють частотні характеристики некоректованої системи  $L_H(\omega)$ ,  $\varphi_H(\omega)$  відповідно до бажаного вигляду  $L_k(\omega)$ ,  $\varphi_k(\omega)$ . Отже, вплив тих чи інших послідовних коректуючих пристроїв на

якість функціонування САК залежить від того, на яку область частот розімкненої некоректованої системи і яким чином вони впливають. З цієї точки зору послідовні коректуючі пристрої розподіляють на пропорційно-диференціальні (ПД), пропорційно-інтегральні (ПІ) та пропорційно-інтегрально-диференціальні (ПІД).

**Пропорційно-диференціальні коректуючі пристрої** застосовують у тих випадках, коли необхідно збільшити частоту зрізу та запаси стійкості до необхідних значень. Такого результату можна досягнути за допомогою пристроїв, ЛАЧХ яких має підйом, а ФЧХ є додатною в області середніх частот (тому вони також називаються фазовипереджуючими).

Як відомо, частота зрізу та запаси стійкості впливають на показники якості функціонування САК в перехідному режимі – час регулювання  $t_p$  та величину перерегулювання  $\sigma$ . Тому ПД корекція призначена для забезпечення насамперед вказаних показників.

Один з видів ПД коректуючих пристроїв має таку передаточну функцію:

$$K_{kn}(p) = K_{kn} \frac{1 + T_1 \cdot p}{1 + T_2 \cdot p}, \text{ де } T_1 > T_2. \quad (9.3)$$

Логарифмічні частотні характеристики ПД коректуючого пристрою наведені на рисунку 9.2. Тут асимптотична ЛАЧХ має нахил + 20 дБ/дек на ділянці  $(1/T_1, 1/T_2)$ , а ФЧХ є додатною з максимумом на частоті  $\omega_m = 1/\sqrt{T_1 \cdot T_2}$ . Для досягнення найкращих результатів корекції необхідно обирати параметри  $T_1, T_2$  так, щоб вони задовольняли умову

$$1/T_1 < \omega_{3R} < 1/T_2,$$

де  $\omega_{3R}$  – частота зрізу розімкненої системи.

Для того, щоб ПД корекція не впливала на динамічну помилку САК, необхідно залишити незмінними коефіцієнт підсилення розімкненої системи та хід частотних характеристик САК в області

низьких частот. Цієї мети можна досягнути, обравши значення коефіцієнта підсилення коректуючого пристрою рівним 1.

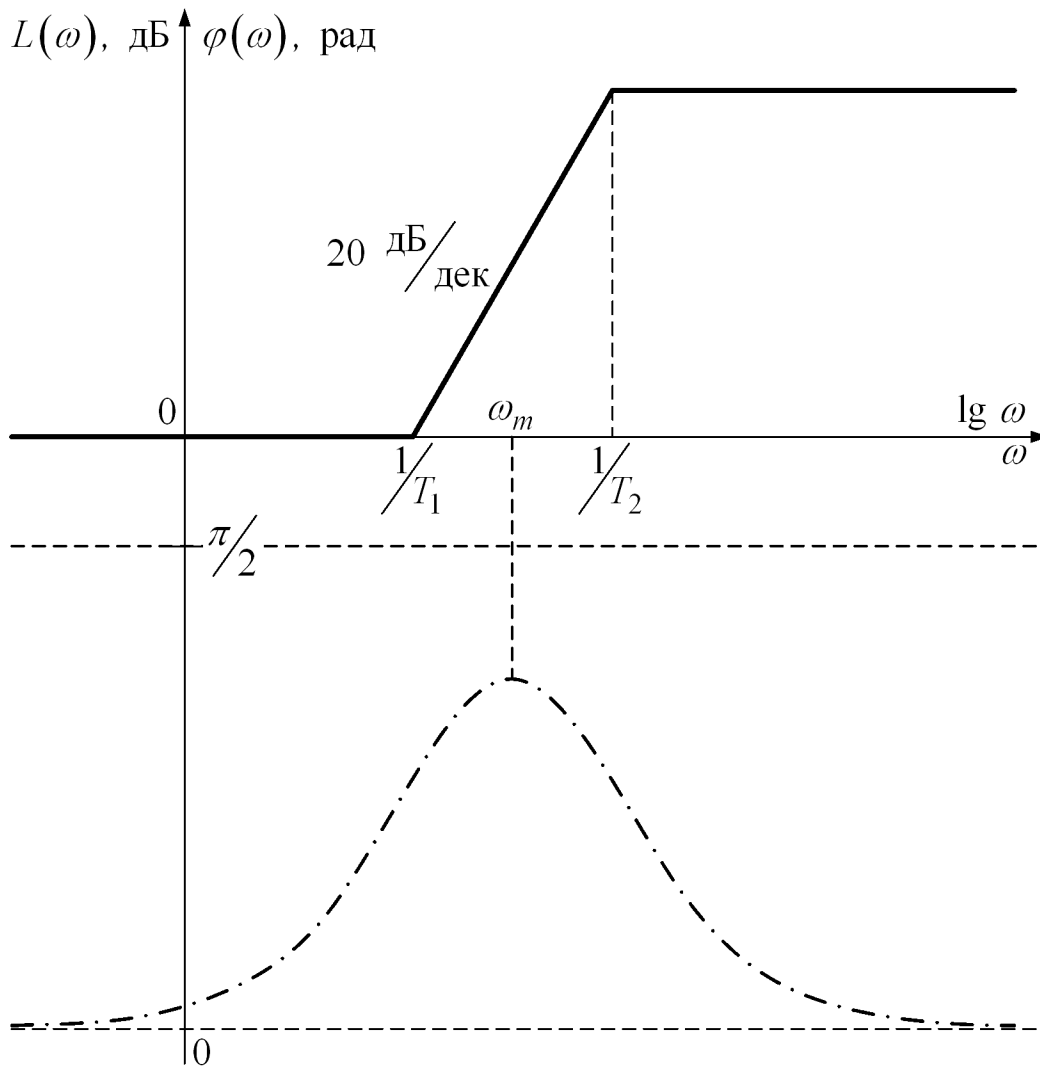


Рисунок 9.2 – Частотні характеристики ПД коректуючого пристрою

*Пропорційно-інтегральні коректуючі пристрої* призначені для підвищення коефіцієнта підсилення розімкненої САК або порядку астатизму за задавальним діянням без зміни частотних характеристик в області середніх частот. Такого результату можна досягнути за допомогою пристроїв, ЛАЧХ яких є додатною в області низьких частот та дорівнює нулю в областях середніх та високих частот.

Як відомо, коефіцієнт підсилення розімкненої САК та порядок астатизму впливають на величину усталеної помилки, тому основне призначення ПІ корекції – підвищення точності функціонування САК.

Один з варіантів ПІ коректуючих пристроїв має таку передаточну функцію:

$$K_{kn}(p) = K_{kn} \frac{1 + \tau \cdot p}{p}. \quad (9.4)$$

Коректуючий пристрій з передаточною функцією (9.4) називають *ізодромним регулятором*. Він являє собою послідовне з'єднання інтегруючої та форсуючої ланок. Його асимптотична ЛАЧХ до частоти спряження  $\omega_c = 1/\tau$  має нахил  $-20$  дБ/дек, а після частоти спряження має нульовий нахил (рисунок 9.3, суцільна лінія). ФЧХ змінюється за законом  $-\frac{\pi}{2} + \text{arctg}(\omega \cdot \tau)$  (рисунок 9.3, пунктир).

Внаслідок введення до складу розімкненої системи інтегруючої ланки порядок астатизму системи за задавальним діям підвищується на одиницю, що й призводить до покращення точності її функціонування.

Для того, щоб при введенні ізодромного регулятора частотні характеристики розімкненої системи залишилися незмінними в області середніх та високих частот, необхідно обирати частоту спряження  $\omega_c = 1/\tau$  лівіше на одну-дві октави від частоти зрізу розімкненої системи  $\omega_{zR}$ , а коефіцієнт підсилення рівним  $K_{kn} = 1/\tau$ .

*Пропорційно-інтегрально-диференціальні* коректуючі пристрої являють собою такі, що дозволяють одночасно здійснити поліпшення динамічної точності та якості функціонування САК в перехідному режимі.

Один з можливих варіантів ПІД коректуючого пристрою має таку передаточну функцію:

$$K_{kn}(p) = K_{kn} \frac{(1 + T_2 \cdot p)(1 + T_3 \cdot p)}{(1 + T_1 \cdot p)(1 + T_4 \cdot p)}, \quad (9.5)$$

де  $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$ .

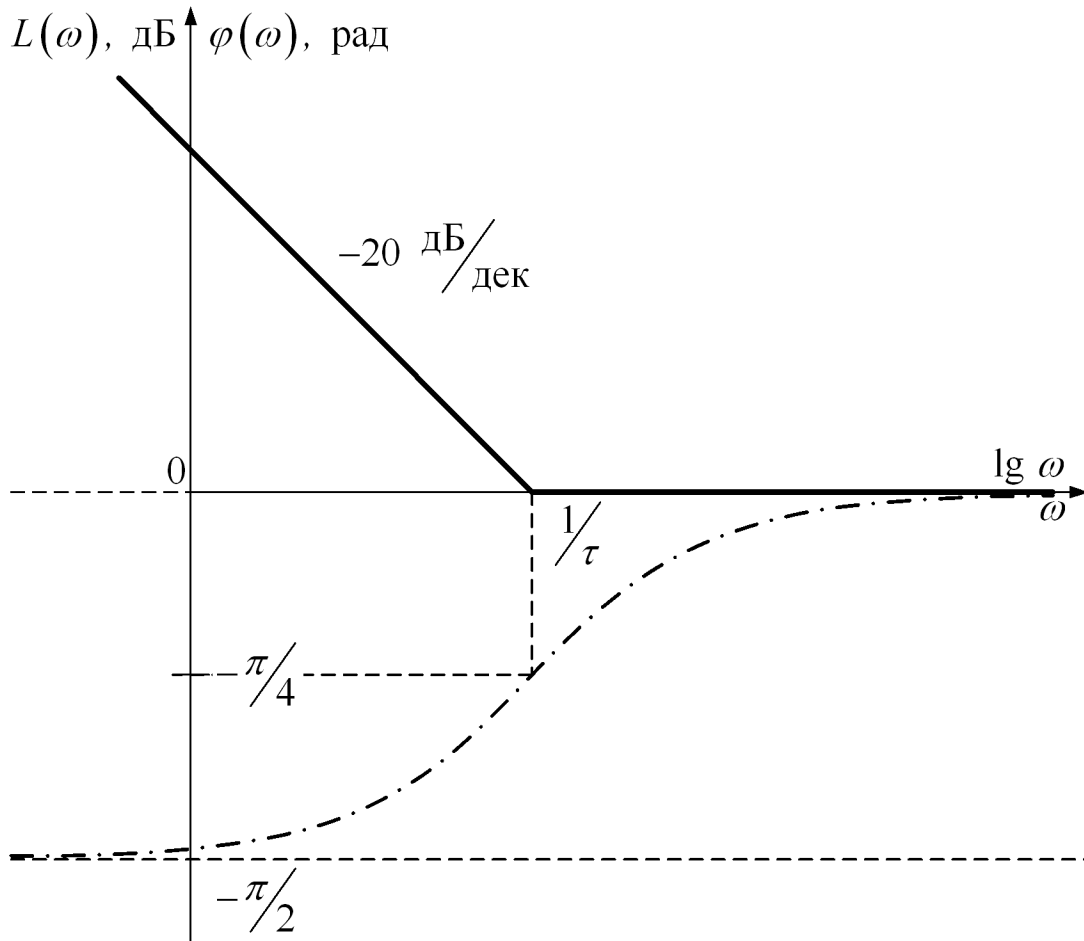


Рисунок 9.3 – Частотні характеристики ізодромного регулятора

## 9.5 Вказівки щодо виконання роботи

### 9.5.1 Дослідження впливу пропорційно-диференціальної корекції на стійкість та якість функціонування САК в перехідному режимі

Досліджувана некоректована система має таку передаточну функцію в розімкненому стані:

$$R_n(p) = \frac{K}{p(1+T_1 \cdot p)} \cdot \frac{1}{(1+T_2 \cdot p)^2}, \quad (9.6)$$

де  $K$  – коефіцієнт підсилення розімкненої системи.  $K = 10 \text{ с}^{-1}$ ;  
 $T_1, T_2$  – постійні часу інерційних ланок.  $T_1 = 1 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0.025 \text{ с}$ .

Послідовний ПД коректуючий пристрій має таку передаточну функцію:

$$K_{kn}(p) = \frac{1 + T_k \cdot p}{1 + 0.1 \cdot T_k \cdot p}, \quad (9.7)$$

де  $T_k = 0.5 \text{ с}$  – постійна часу форсуючої ланки.

*1 Провести детальний аналіз сутності ПД корекції в частотній області*

Для цього в командному вікні (**Command Window**) набрати:

```
K1 = tf([10],[1 1 0]); K2 = tf([1],[0.025 1]); Rn = K1 * K2 * K2;  
Tk = 0.5; Kk = tf([Tk 1],[0.1 * Tk 1]); Rk = Kk * Rn;  
bode(Rn, Kk, Rk); grid
```

та натиснути **Enter**.

У вікні **Figure 1** спостерігаються графіки частотних характеристик розімкненої некоректованої системи (сині лінії), коректуючого пристрою (зелені лінії) та розімкненої коректованої системи (червоні лінії). Занести отримані графіки до звіту.

На графіках логарифмічних частотних характеристик розімкненої некоректованої та коректованої системи визначити запаси стійкості за підсиленням (амплітудою)  $L_3$  та за фазою  $\varphi_3$ , а також частоти зрізу  $\omega_{zR}$ . Для більш детального аналізу доцільно, спочатку активізувавши функцію збільшення масштабу  $\oplus$ , виділити прямокутником фрагмент ЛАЧХ в області низьких та середніх частот, після чого знов скасувати функцію збільшення масштабу та провести необхідні спостереження та вимірювання.

Занести отримані значення запасів та частоти зрізу в таблицю 9.1.

Проаналізувати та зіставити виконання вимог до ходу ЛАЧХ та ФЧХ розімкненої некоректованої та коректованої системи в обла-

сті середніх частот, що гарантують задовільну якість функціонування САК в перехідному режимі. Зробити висновки.

Таблиця 9.1 – Вплив ПД коректуючого пристрою на запаси стійкості та показники якості перехідного режиму

Параметр	Некоректована САК	Коректована САК
$L_3 (G_m)$ , дБ		
$\varphi_3 (P_m)$ , град		
$\omega_{zR}$ , $c^{-1}$		
$t_p$ , с		
$\sigma$ , %		

Звернути увагу:

а) на справедливість формули зв'язку (9.2) між логарифмічними частотним характеристиками розімкненої некоректованої системи, коректуючого пристрою та розімкненої коректованої системи;

б) на те, що ЛАЧХ ПД коректуючого пристрою має підйом, а ФЧХ є додатною в області середніх частот, завдяки чому ПД коректуючий пристрій збільшує частоту зрізу та запаси стійкості САК;

в) на те, що ЛАЧХ та ФЧХ ПД коректуючого пристрою дорівнюють нулю в області низьких частот, внаслідок чого ПД коректуючий пристрій не впливає на коефіцієнт підсилення та порядок астатизму САК.

Зробити висновки за результатами проведеного аналізу.

*2 Визначити та зіставити показники якості некоректованої та коректованої системи в перехідному режимі*

Для цього в командному вікні (**Command Window**) набрати:

**Wn = feedback(Rn,1); Wk = feedback(Rk,1); step(Wn,Wk); grid**

та натиснути **Enter**.



На графіках перехідних характеристик некоректованої системи (синій) та коректованої системи (зелений) визначити та занести до таблиці 9.1 значення часу регулювання  $t_p$  та величини перерегулювання  $\sigma$ .

Зіставити отримані результати, зробити висновки.

### 9.5.2 Дослідження впливу пропорційно-інтегральної корекції на точність функціонування САК

Некоректована система має таку передаточну функцію:

$$R_n(p) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot p)(1 + T_2 \cdot p)}, \quad (9.8)$$

де  $K = 10$  – коефіцієнт підсилення розімкненої системи;

$T_1 = 1$  с,  $T_2 = 0.1$  с – постійні часу інерційних ланок.

ПІ коректуючий пристрій у вигляді ізодромного регулятора, що додається до некоректованої системи, має передаточну функцію

$$K_{кп}(p) = \frac{1 + T_k \cdot p}{p}, \quad (9.9)$$

де  $T_k = 1$  с.

*1 Провести детальний аналіз сутності ПІ корекції в частотній області*

Для цього в командному вікні (**Command Window**) набрати:

```
K1 = tf([10],[1 1]);K2 = tf([1],[0.1 1]);Rn = K1 * K2;  
Kk = tf([1 1],[1 0]);Rk = Kk * Rn; bode(Rn, Kk, Rk); grid
```

та натиснути **Enter**.

У вікні **Figure 1** спостерігаються графіки частотних характеристик розімкненої некоректованої системи (сині лінії), коректуючого пристрою (зелені лінії) та розімкненої коректованої системи (червоні лінії). Занести отримані графіки до звіту.

Звернути увагу:

а) на те, що ЛАЧХ ПІ коректуючого пристрою має нахил  $-20$  дБ/дек в області низьких частот, завдяки чому введення ПІ коректуючого пристрою збільшує порядок астатизму та точність системи;

в) на те, що ЛАЧХ та ФЧХ ПІ коректуючого пристрою прямують до нуля в області високих частот, внаслідок чого ПІ коректуючий пристрій слабо впливає на запаси стійкості та якість в перехідному режимі.

Зробити висновки за результатами проведеного аналізу.

## 2 Провести дослідження точності некоректованої та коректованої системи

Дослідження проводиться за допомогою пакета Simulink. Відкрити файл **PI\_Corr**. Схема проведення експерименту в пакеті Simulink зображена на рисунку 9.4. Вона складається з керованого датчика входних діянь – одиничної функції (**Step**) та лінійної функції (**Ramp**), і моделей досліджуваних систем – некоректованої (**No correct**) та коректованої (**Correct**), які оформлені у вигляді субблоків.

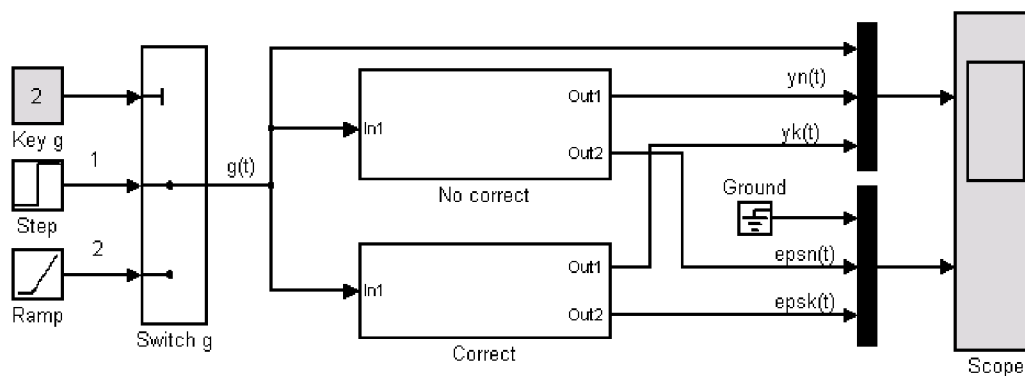


Рисунок 9.4 – Схема проведення експерименту

Спостереження процесів у системі здійснюється за допомогою двоканального віртуального осцилографа (**Scope**). На верхньому екрані спостерігаються задавальна величина  $g(t)$  (оранжевий ко-

лір), вихідні величини некоректованої системи  $yn(t)$  (малиновий колір) та коректованої системи  $yk(t)$  (синій колір). На нижньому екрані спостерігаються відповідні помилки некоректованої та коректованої системи.

Провести дослідження точності в статичному режимі. Для встановлення статичного режиму підключити до входу систем генератор одиничної функції (**Step**) – у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **1**. Запустити імітацію процесу функціонування системи натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів.

Відкрити вікно **Scope**. Проаналізувати хід відпрацювання некоректованою та коректованою системою ступеневого вхідного діяння та графіки помилок. Одержати й занести до таблиці 9.2 експериментальні дані для усталених значень статичної помилки  $\varepsilon_{ст}^{(некор)}$ ,  $\varepsilon_{ст}^{(кор)}$ . Зробити висновок.

Таблиця 9.2 – Вплив ПІ коректуючого пристрою на точність САК

Параметр	Некоректована САК	Коректована САК
Статична помилка, $\varepsilon_{ст}$		
Кінетична помилка, $\varepsilon_{к}$		

Провести дослідження точності у кінетичному режимі. Для встановлення кінетичного режиму підключити до входу систем генератор лінійної функції (**Ramp**) – у вікні блока **Key g** встановити значення **Constant value** рівним **2**. Запустити імітацію процесу функціонування натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів, після чого у вікні **Scope** спостерігати хід відпрацювання некоректованою та коректованою системами лінійного вхідного діяння та графіки помилок. Одержати й занести до таблиці 9.2 експериментальні дані для усталених значень кінетичної помилки  $\varepsilon_{к}^{(некор)}$ ,  $\varepsilon_{к}^{(кор)}$ .

Зробити висновок про спроможність некоректованої та коректованої систем до роботи в кінетичному режимі.

## 9.6 Зміст звіту

1 Назва і мета роботи.

2 Схема математичної моделі системи з послідовною корекцією (рисунок 9.1), вирази (9.1), (9.2) зв'язку між характеристиками САК при послідовній корекції.

3 Вихідні дані (вирази (9.6), (9.7)), графіки частотних характеристик та таблиця 9.1 з результатами досліджень впливу ПД корекції на показники якості САК в перехідному режимі.

4 Вихідні дані (вирази (9.8), (9.9)), графіки частотних характеристик та таблиця 9.2 з результатами досліджень впливу ПІ корекції на показники якості САК в усталеному режимі.

5 Висновки за результатами досліджень.

## 9.7 Контрольні запитання

1 Вкажіть призначення коректуючих пристроїв.

2 Наведіть схему математичної моделі САК з послідовним коректуючим пристроєм.

3 Як пов'язані між собою частотні характеристики некоректованої та коректованої систем при послідовній корекції?

4 Вкажіть призначення ПД корекції та особливості частотних характеристик ПД коректуючих пристроїв.

5 Наведіть приклад передаточної функції ПД коректуючого пристрою та зобразіть його логарифмічні частотні характеристики.

6 За яких умов необхідно обирати параметри ПД коректуючого пристрою?

7 Вкажіть призначення ПІ корекції та особливості частотних характеристик ПІ коректуючих пристроїв.

8 Наведіть приклад передаточної функції ПІ коректуючого пристрою та зобразіть його логарифмічні частотні характеристики.

9 За яких умов необхідно обирати параметри ПІ коректуючого пристрою?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Александров Є.Є. Теорія автоматичного керування. Т. 1. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами / Є.Є. Александров, Є.П. Козлов, Б.І. Кузнецов. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2002.
- 2 Лазарев Ю.П. Моделирование процессов и систем в Matlab: Учебный курс. – СПб.: Питер; К.: Изд. группа ВНУ, 2005.
- 3 Лукас В.А. Теория автоматического управления. – М.: Наука, 1990.
- 4 Самсонкин В.Н., Литовченко Е.О. Теория автоматического управления: Учеб. пособие. – Харьков: ЧП "Новое слово", 2003.
- 5 Сачук І.І., Хісматулін В.Ш. Основи автоматики і систем керування: Навч. посібник. – Харків: ХУПС, 2005. – Ч. 1: Принципи побудови і математичний опис систем автоматичного керування.
- 6 Солодовников В.В. Основы теории и элементы систем автоматического управления / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. – М.: Машиностроение, 1985.
- 7 Теоретические основы железнодорожной автоматики и телемеханики: Учеб. для вузов / А.С. Переборов, А.М. Брылеев, В.В. Сапожников и др.; Под ред. А.С. Переборова. – М.: Транспорт, 1984. – 384 с.
- 8 Теория автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1987.
- 9 Хісматулін В.Ш. Системи керування: Навч. посібник. – Харків: ХВУ, 2004. – Ч. 2: Аналіз лінійних стаціонарних систем автоматичного керування.
- 10 Хисматулин В.Ш. Основы автоматики: Учеб. пособие. – Харьков: ХВУ, 1998.

## Додаток А

### Деякі функції пакета Control Toolbox програмної оболонки Matlab

#### *А.1 Задання передаточної функції динамічної ланки*

Для задання передаточної функції

$$K(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k}, k \geq m \quad (\text{A.1})$$

у командному вікні (Command Window) набирають

$$\mathbf{K} = \mathbf{tf}([\mathbf{b}_m \ \mathbf{b}_{m-1} \ \dots \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_0], [\mathbf{a}_k \ \mathbf{a}_{k-1} \ \dots \ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_0]) \quad (\text{A.2})$$

де  $\mathbf{b}_i$  та  $\mathbf{a}_r$  – коефіцієнти многочленів, що стоять у чисельнику та знаменнику передаточної функції  $K(p)$ , які набирають через пропуск починаючи з більших номерів.

Після введення функції  $\mathbf{tf}()$  у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті Matlab змінна Лапласа  $p$  відображається літерою  $s$ ).

#### *А.2 Задання передаточної функції з'єднань динамічних ланок*

Для задання передаточної функції з'єднань ланок необхідно спочатку задати передаточні функції окремих ланок, після чого записати вираз для з'єднань відповідно до звичайних правил:

– послідовне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1} * \mathbf{K2}$$

– паралельне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1} \pm \mathbf{K2}$$

– зустрічно паралельне з'єднання ланок

–

$$K = K1/(1 \pm K1 * K2)$$

де знак "–" записується при позитивному, а "+" при негативному зворотному зв'язку.

Крім того, при негативному зворотному зв'язку є спеціальна функція

$$K = \text{feedback}(K1, K2)$$

При складній схемі можна записувати або спочатку часткові перетворення, або одразу повне з урахуванням часткових правил заміни.

*А.3 Побудова імпульсної та перехідної характеристик динамічної системи*

Для побудови імпульсної та перехідної характеристик у командному вікні набирають відповідно

**impulse(K)**

**step(K)**

де **K** – передаточна функція, яка задається за допомогою функції **tf()**.

Після введення функцій **impulse** або **step** з'являється вікно Figure № 1, у якому побудована відповідна характеристика досліджуваної системи.

Для нанесення масштабної сітки необхідно натиснути праву кнопку "миші", після чого активізувати лівою кнопкою функцію **grid** або додати у командний рядок запис **grid** після запису відповідної функції (наприклад: **step(K);grid**).

Для визначення параметрів характеристики необхідно підвести курсор до необхідної точки на графіку, натиснути ліву кнопку "миші" та утримати її більш 1 с.

Для більш детального огляду фрагмента необхідно активізувати команду  $\oplus$  (**Zoom In**), після чого, натиснувши ліву кнопку "миші", виділити прямокутником досліджуваний фрагмент (увага: для визначення параметрів характеристики необхідно спочатку скасувати команду  $\oplus$ ).

При необхідності огляду характеристики протягом іншого часу, ніж той, що наведений у вікні Figure № 1, у командному вікні набирають

**impulse(K,L)**

**step(K,L)**

де **L** – бажана тривалість характеристики, с.

Для спостереження одночасно характеристик декількох систем їх записують через кому у відповідній функції.

#### *A.4 Побудова логарифмічних частотних характеристик*

Для побудови логарифмічних частотних характеристик системи у командному вікні набирають

**bode(K)**

де **K** – передаточна функція досліджуваної системи, яка задана за допомогою функції **tf()**.

Після введення функції **bode** з'являється вікно Figure № 1, у якому побудовані ЛАЧХ та ЛФЧХ системи. На графіках можна наносити масштабну сітку, виділяти фрагмент та проводити вимірювання, а також будувати графіки декількох систем за розглянутими раніше правилами.

Для побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи з метою вимірювання запасів стійкості у командному вікні застосовують спеціальну функцію

**margin(K)**

де **K** – передаточна функція розімкненої системи, яка задана за допомогою функції **tf()**.



## Додаток Б

### Основні властивості перетворення Лапласа

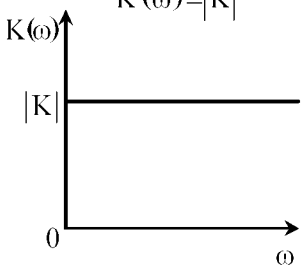
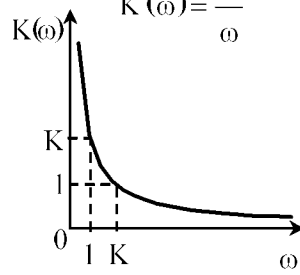
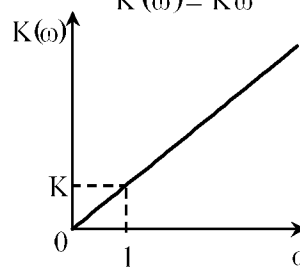
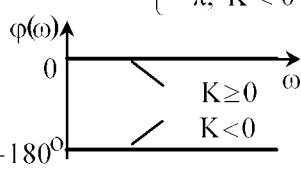
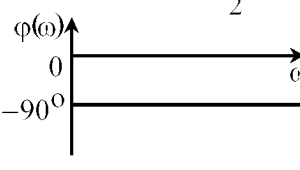
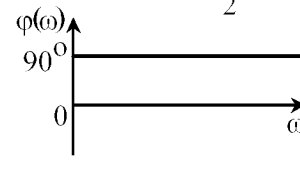
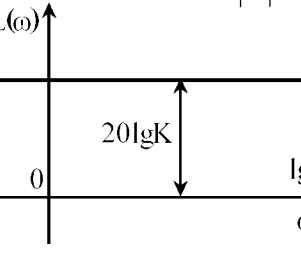
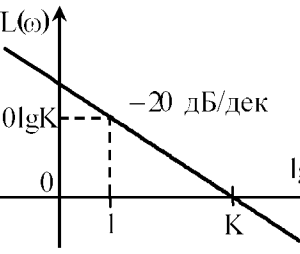
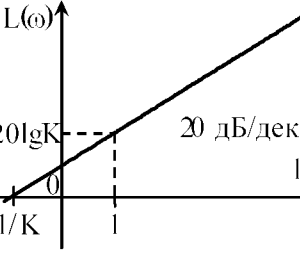
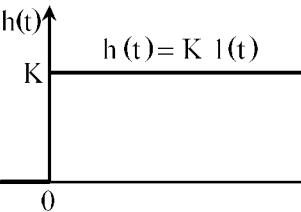
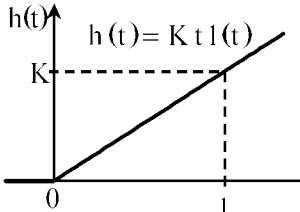
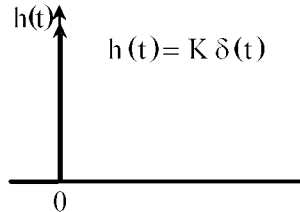
Назва	Оригінал	Зображення
Лінійність	$c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$	$c_1X_1(p) + c_2X_2(p)$
Диференціювання оригіналу	$x'(t)$	$pX(p) - x(0)$
Інтегрування оригіналу	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p}X(p)$
Запізнювання оригіналу	$x(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-\tau p}X(p)$
Згортка оригіналів	$\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau$	$X_1(p)X_2(p)$
Кінцеве значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$
Початкове значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$

### Таблиця перетворень Лапласа

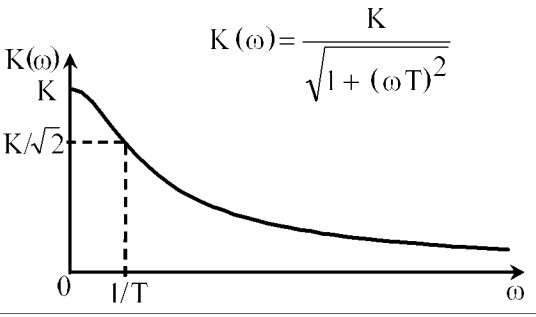
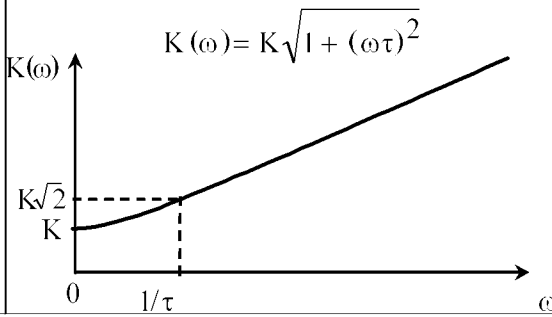
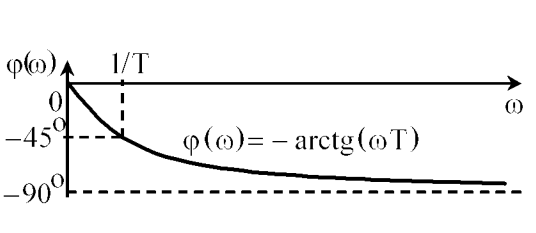
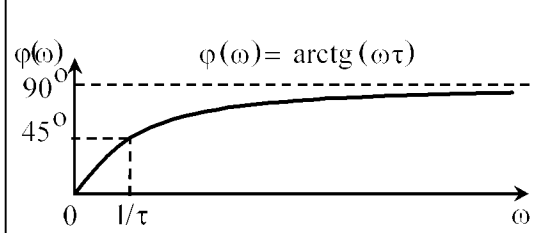
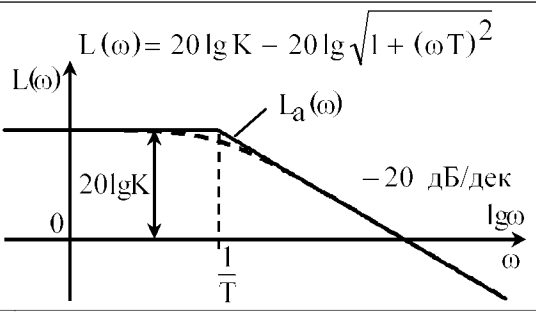
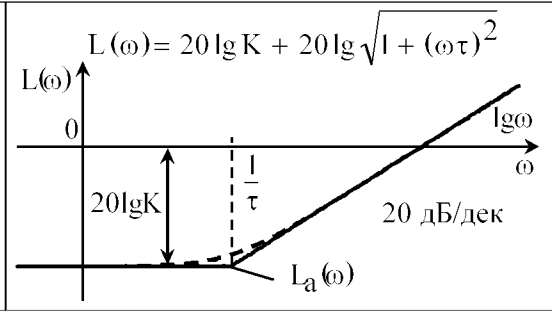
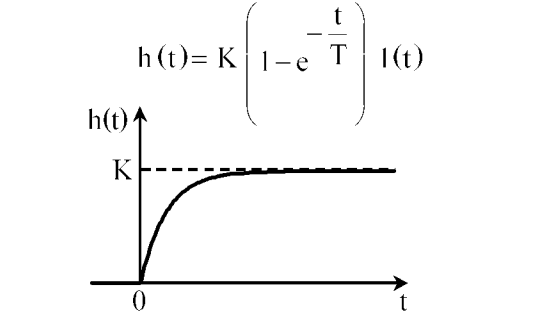
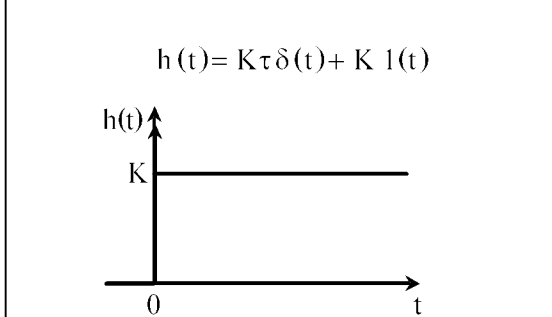
$x(t)$	$X(p)$	$x(t)$	$X(p)$
$\delta(t)$	1	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

## Додаток В

### Характеристики елементарних ланок

Елементарна ланка		
підсилювальна	інтегруюча	диференціююча
Передаточна функція		
$K(p) = K$	$K(p) = \frac{K}{p}$	$K(p) = Kp$
Амплітудно-частотна характеристика		
$K(\omega) =  K $ 	$K(\omega) = \frac{K}{\omega}$ 	$K(\omega) = K\omega$ 
Фазочастотна характеристика		
$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & K \geq 0, \\ -\pi, & K < 0 \end{cases}$ 	$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ 	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$ 
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика		
$L(\omega) = 20 \lg  K $ 	$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$ 	$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \omega$ 
Перехідна характеристика		
$h(t) = K 1(t)$ 	$h(t) = K t 1(t)$ 	$h(t) = K \delta(t)$ 

## Продовження додатка В

Елементарна ланка	
інерційна (аперіодична)	форсуюча
Передаточна функція	
$K(p) = \frac{K}{Tp + 1}$	$K(p) = K(\tau p + 1)$
Амплітудно - частотна характеристика	
$K(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$ 	$K(\omega) = K\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$ 
Фазочастотна характеристика	
$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega T)$ 	$\varphi(\omega) = \arctg(\omega\tau)$ 
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика	
$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2}$ 	$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$ 
Перехідна характеристика	
$h(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) I(t)$ 	$h(t) = K\tau \delta(t) + K I(t)$ 

## Закінчення додатка В

Елементарна ланка	
коливальна	форсуюча 2-го порядку
Передаточна функція	
$K(p) = \frac{K}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}$	$K(p) = K(\tau_0^2 p^2 + 2\eta\tau_0 p + 1)$
Амплітудно - частотна характеристика	
$K(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - (\omega T_0)^2)^2 + (2\xi T_0 \omega)^2}}$	$K(\omega) = K\sqrt{(1 - (\omega\tau_0)^2)^2 + (2\eta\tau_0\omega)^2}$
Фазочастотна характеристика	
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика	
$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{(1 - (\omega T_0)^2)^2 + (2\xi T_0 \omega)^2}$	$L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\sqrt{(1 - (\omega\tau_0)^2)^2 + (2\eta\tau_0\omega)^2}$
Перехідна характеристика	
$h(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T_0} t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_B t + \theta) \right] 1(t)$ <p>де <math>\theta = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = \arcsin \sqrt{1 - \xi^2}</math></p>	

**Додаток Г**  
**Бланк для побудови**  
**логарифмічних частотних характеристик**

