Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Удодова Ольга Ігорівна

УДК 517.518.6

ГОЛОМОРФНІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ У РІЗНИХ МЕТРИКАХ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2004

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Фаворов Сергій Юрійович,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, завідувач кафедри теорії функцій та функціонального аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Заболоцький Микола Васильович,
Львівський національний університет імені І. Франка, завідувач кафедри математичного моделювання;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Бойко Сергій Сергійович,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, доцент кафедри математичного аналізу.

Провідна установа: **Інститут математики НАН України**, відділ комплексного аналізу й теорії потенціалу, Національна академія наук України, м. Київ.

Захист відбудеться “14” травня 2004 р. о 15^{30} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 при Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна за адресою: 61077, м. Харків, пл. Свободи 4, ауд. 6-48.

З дисертацією можна ознайомитися у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61077, м. Харків, пл. Свободи 4.

Автореферат розісланий “9” квітня 2004 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради ________________ Скорик В.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження з майже періодичних функцій беруть початок з роботи Ж.Л. Лагранжа (1778 р.), в якій було поставлено й вирішено в окремому випадку питання про наявність середнього руху в узагальненому тригонометричному поліномі. Але основи названої теорії були закладені в публікаціях Г. Бора у 1924-1944 рр. Подальший розвиток вона одержала в роботах А.С. Безиковича, Н.Н. Боголюбова, С. Бохнера, Г. Вейля, Н. Вінера, А.С. Кованька, М.Г. Крейна, Б.Я. Левіна, Б.М. Левітана, В.А. Марченка, Дж. фон Неймана, В.В. Степанова та ін. Зокрема В.В. Степанов, Г. Вейль, А.С. Безикович розглядали майже періодичні функції не в рівномірній метриці, як у Бора, а майже періодичні щодо тієї чи іншої інтегральної метрики.

Своє застосування майже періодичні функції знайшли в теорії диференціальних рівнянь як звичайних, так і в частинних похідних, у нескінченновимірних еволюційних рівняннях та теорії чисел; це стосується як функцій, майже періодичних щодо рівномірної метрики, так і майже періодичних функцій у різних інтегральних метриках.

Одночасно з теорією майже періодичних функцій на прямій Г. Бор та Б. Йессен розвивали теорію голоморфних майже періодичних функцій у смузі. Слід відзначити також фундаментальну роботу Б.Йессена й Г. Торнехава (1945 р.). Ці дослідження не дозволили розв’язати, як очікувалось, проблему Рімана про корені ζ-функції, але допомогли виявити ряд специфічних властивостей голоморфних майже періодичних функцій.

Вивчення голоморфних майже періодичних функцій було продовжено Б.Я. Левіним, М.Г. Крейном, М.Г. Любарським, а останнім часом і Г. Торнехавом, Л.І. Ронкіним, О.Ю. Рашковським, С.Ю. Фаворовим, В. В. Бритиком, Н.Д. Парфьоновою. Слід відзначити роботи Х. Бауермайстера, який, на відміну від своїх попередників, розглядав голоморфні функції у смузі, майже періодичні відносно метрики Безиковича. Його результати стали в нагоді при вивченні властивостей рядів Діріхле.

Дослідження голоморфних майже періодичних функцій багатьох змінних почалося наприкінці минулого століття в роботах Л.І. Ронкіна та його учнів Рашковського О.Ю. й Фаворова С.Ю. Але при цьому об’єктом уваги були тільки голоморфні майже періодичні функції в рівномірній метриці та розподіл їх нульових множин. Залежність же між спектром майже періодичних функцій багатьох змінних і можливістю їх обмеженого аналітичного продовження до сьогодні не розглядалися.

Тому представляється актуальним і природним подальше досліджувати голоморфні майже періодичні функції багатьох змінних і поширити основні факти теорії голоморфних майже періодичних функцій у смузі на голоморфні функції в трубчастій області, майже періодичні в різних метриках.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі теорії функцій та функціонального аналізу механіко-математичного факультету Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Вона є частиною держбюджетних науково-дослідних робіт “Функціональні простори й напівгрупи” 2-11-00 (номер державної реєстрації 0100U003348) та “Аналітичні й алгебраїчні методи дослідження функціональних просторів, напівгруп, імовірнісних законів” 2-11-03 (номер державної реєстрації 0103U004224). Дослідження були підтримані INTAS-проектом № 99-00089.

Мета й задачі дослідження. *Метою* дисертації є теоретичне обґрунтування та розробка певних напрямків теорії голоморфних майже періодичних функцій.

Об'єкт дослідження – майже періодичні функції.

Предметом дослідження являються властивості голоморфних функцій у трубчастій області (чи смузі), які майже періодичні щодо рівномірної метрики, метрики Степанова, Вейля та Безиковича в самій трубчастій області чи її частині.

Основні задачі дослідження такі:

– описати зв'язки між класами функцій, голоморфних у смузі й у трубчастій області й майже періодичних у рівномірній метриці, метриках Степанова, Вейля та Безиковича;

– поширити теорему Бора про те, що голоморфна обмежена функція в смузі, майже періодична на одній прямій, є майже періодичною у всій смузі, на метрики Степанова, Вейля, Безиковича й на функції голоморфні в трубчастій області;

– з'ясувати зв'язок між розташуванням спектра майже періодичних функцій багатьох змінних і можливістю їх аналітичного продовження в трубчасту область із конусом в основі;

– довести, що майже періодична функція в скінченновимірному просторі має обмежений спектр тоді і тільки тоді, коли вона продовжується до цілої функції багатьох змінних експоненціального типу.

Методами дослідження є методи комплексного та опуклого аналізу та теорії потенціалу.

Наукова новизна одержаних результатів:

– вперше описано зв'язки між класами голоморфних функцій у трубчастій області, що майже періодичні в рівномірній метриці, метриках Степанова, Вейля й Безиковича;

– вперше отримано багатовимірні аналоги теореми Бора про те, що голоморфна обмежена функція в смузі, майже періодична на одній прямій, є майже періодичною у всій смузі;

– вперше вивчено зв'язок між розташуванням спектра майже періодичних функцій багатьох змінних і можливістю їх аналітичного продовження в трубчасту область з конусом в основі;

– вперше описано майже періодичні функції багатьох змінних з обмеженим спектром як майже періодичні функції, що допускають продовження до цілих функцій експоненціального типу.

Практичне значення одержаних результатів. У дисертації проведено фундаментальні теоретичні дослідження, які можуть бути використані в теорії ζ-функції Рімана, теорії розподілу значень голоморфних функцій, у теорії динамічних систем, у теорії диференціальних рівнянь, а також в інших розділах сучасної математики.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач належить науковому керівнику С.Ю. Фаворову. Теорема з роботи [1] була доведена разом з науковим керівником; вона є окремим випадком теореми 3.2.1. дисертації, в роботі наводиться її інше доведення. З науковим керівником також доведено теореми 5 та 6 роботи [3] (теореми 4.3.1. та 4.3.2.). Інші результати дисертації одержано автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, викладених у дисертації, доповідались та обговорювались на: Міжнародній конференції в рамках INTAS-проекту (Львів, 6 - 9 жовтня 2000 року); Міжнародній конференції "Аналітичні методи аналізу і диференціальних рівнянь" (Мінськ, Бєларусь, 15-19 лютого 2001 року); Міжнародній науковій конференції з комплексного аналізу й теорії потенціалу (Київ, 7-12 серпня 2001 року); Міжнародній науковій конференції з теорії функцій і математичної фізики, присвяченої 100-річчю Н.І. Ахієзера (Харків, 13-17 серпня 2001 року); IX-ій Міжнародній науковій конференції ім. М.Ф. Кравчука (Київ, 16-20 травня 2002 року); Міжнародній конференції з комплексного аналізу й диференціальних рівнянь (Єреван, Вірменія, 17-21 вересня 2002 року); Міжнародній конференції "Функціональні простори. Диференціальні оператори. Проблеми математичної освіти" (Москва, 24-26 березня 2003 року); Міжнародній конференції "Математичний аналіз та економіка" (Суми, 1-4 квітня 2003 року); Міжнародній конференції з комплексного аналізу та його застосуванням (Львів, 26-29 травня 2003 року); Міжнародній конференції "Колмогоров і сучасна математика" (Москва, 16-21 червня 2003 року); Міжнародній XXII літній конференції з математичного аналізу (Санкт-Петербург, 15-20 серпня 2003 року); Харківському міському семінарі з теорії функцій (керівник семінару, доктор фіз.-мат. наук, професор А.П. Гришин).

Публікації. Результати дисертаційного дослідження знайшли відображення в 12 наукових публікаціях, в тому числі 4 статтях у фахових наукових виданнях та тезах виступів на 8 конференціях.

Структура й обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Повний обсяг роботи – 153 сторінки, у тому числі основного тексту 143 сторінки. У списку використаної літератури 93 назви.

Автор щиро дякує науковому керівнику Фаворову Сергію Юрійовичу за постановки задач і постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтована актуальність теми дисертації, сформульовані мета та задачі дослідження, викладено зв'язок роботи з науковими програмами, темами, розкрито загальну методику, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У **розділі 1** дисертації наводяться відомі раніше результати, що мають відношення до теми роботи та визначається напрямок дослідження.

У підрозділах **1.1.** і **1.2.** подаються результати про майже періодичні функції на прямій і в смузі, що належать в основному Г. Бору, а також описуються властивості голоморфних майже періодичних функцій у смузі.

Означення 1.2.1. *Неперервна функція* $f(z)$ *в замкненій смузі* $\Pi_{[\alpha,\beta]} = \{z = x + iy \in \mathbf{C} : \alpha \le y \le \beta\}$ *називається рівномірною майже періодичною функцією, якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *множина ε-майже періодів*

$$E_\varepsilon(f) = \left\{ \tau \in \mathbf{R} : \sup_{x+iy\in\Pi_{[\alpha,\beta]}} | f(x+iy) - f(x+iy+\tau) | < \varepsilon \right\}$$

відносно щільна, тобто для деякого $l=l(\varepsilon)$ *множина* $E_\varepsilon(f)$ *перетинається з будь-яким проміжком довжини* l.

Зокрема, при $\alpha=\beta=0$ одержуємо простір U рівномірних майже періодичних функцій на прямій.

Означення 1.2.2. *Неперервна функція* $f(z)$ *називається рівномірною майже періодичною функцією у відкритій смузі* $\Pi_{(a,b)} = \{z = x + iy \in \mathbf{C} : a < y < b\}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, *якщо звуження* $f(z)$ *на будь-яку замкнену смугу* $\Pi_{[\alpha,\beta]}$, $a < \alpha < \beta < b$ *є майже періодичною функцією в розумінні означення 1.2.1.*

Для майже періодичних функцій у смузі $\Pi_{(a,b)}$ можна визначити середнє значення

$$M_t\{f\} = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{X} f(x+iy+t)dt,$$

що існує рівномірно відносно $z \in \Pi_{[\alpha,\beta]}$, $a<\alpha<\beta<b$, і є неперервною функцією відносно $y \in (a,b)$.

Розглянемо ряд Фур'є $f(x+iy) \sim \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} a(\lambda)e^{i\lambda x}$, де $a(\lambda)=M_x\{f(x+iy)e^{-i\lambda x}\}$ для кожного $\lambda \in \mathbf{R}$ є неперервною функцією відносно y, і визначимо спектр $spf = \{\lambda \in \mathbf{R} : a(\lambda) \not\equiv 0\}$.

Оскільки спектр будь-якої майже періодичної функції не більший за злічений, то ряд Фур'є можна записати у вигляді $\sum_n a_n(y)e^{i\lambda_n x}$, де $a_n(y)$ – неперервні функції відносно $y \in (a,b)$.

Зазначимо, що майже періодичні функції у смузі можна визначити й іншим способом. Це випливає з такого результату.

Теорема 1.2.1. *Функція* $f(z)$ *є рівномірною майже періодичною в замкненій смузі* $\Pi_{[\alpha,\beta]}$ *тоді і тільки тоді, коли* $f(z)$ *можна рівномірно в* $\Pi_{[\alpha,\beta]}$ *апроксимувати сумами вигляду*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(y)e^{i\lambda_n x}, \qquad (1)$$

де $a_n(y)$ *– неперервні функції на* $[\alpha,\beta]$.

Аналогічно, функція f є майже періодичною функцією у відкритій смузі $\Pi_{(a,b)}$ тоді і тільки тоді, коли вона є рівномірною межею сум (1) у кожній замкненій смузі $\Pi_{[\alpha,\beta]}$, $a<\alpha<\beta<b$.

Для функцій на прямій замість рівномірної метрики $d^U(g,h)=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|g(x)-h(x)|$ в означенні майже періодичної функції можна розглядати метрику Степанова

$$d^{S^p}(g,h)=\sup_{x\in\mathbf{R}}\left(\int_0^1 |g(x+t)-h(x+t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1,$$

чи метрику Вейля

$$d^{W^p}(g,h)=\lim_{X\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left(\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X} |g(x+t)-h(x+t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1.$$

Замість неперервності функцій $g(x)$ і $h(x)$ тепер треба вимагати їх вимірності та локальної інтегрованості p-того степеня їх модуля. При цьому виходить простір S^p майже періодичних функцій за Степановим порядку p та простір W^p майже періодичних функцій за Вейлем порядку p. Для таких функцій існує середнє значення, можна визначити ряд Фур'є, спектр. Крім того, для них справедливим є і такий аналог теореми 1.2.1.

Теорема 1.1.9. *Функція* $f(x)$ *на* **R** *є* d*-майже періодична функція (*$d=d^{S^p}$ *чи* $d=d^{W^p}$ *) тоді і тільки тоді, коли* $f(x)$ *можна апроксимувати в метриці* d *сумами вигляду*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x},\ \lambda_n\in\mathbf{R},\ a_n\in\mathbf{C}. \qquad (2)$$

Природним у цьому випадку є таке означення.

Означення 1.1.3. *Функція* $f(x)$ *називається майже періодичною за Безиковичем на* **R** *порядку* $p\ge 1$*, якщо її можна апроксимувати на* **R** *скінченними експоненціальними сумами вигляду (2) в метриці Безиковича*

$$d^{B^p}(g,h)=\overline{\lim_{X\to\infty}}\left(\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X} |g(t)-h(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1.$$

Простір цих функцій позначимо B^p.

d^{B^p}-майже періодичні функції можна також ввести за допомогою поняття ε-майже періоду, але відповідне означення набагато складніше.

Неважко перевірити включення $S^{p'} \subset S^p$, $W^{p'} \subset W^p$, $B^{p'} \subset B^p$ при $p' > p \geq 1$ і $U \subset S^p \subset W^p \subset B^p$.

Зазначимо, що "точкою" простору S^p є не функція, а клас функцій, що збігаються майже всюди на **R**. У просторах W^p і B^p "точки" – класи еквівалентності – складаються з функцій, відповідна відстань між якими дорівнює нулю, при цьому вони можуть відрізнятися навіть на всій осі. Усі включення слід розуміти в тому значенні, що клас еквівалентності в більш "вузькому" просторі знаходиться в деякому класі еквівалентності більш "широкого" простору. Як показали Г. Бор і Е. Фолнер у 1945 р., усі включення тут строгі: у більш "широкому" просторі існують класи еквівалентності, що не містять жодної функції, а звідси, і жодного класу еквівалентності більш "вузького" простору.

Голоморфні майже періодичні функції у смузі в порівнянні з неперервними майже періодичними функціями мають деякі специфічні властивості.

Теорема 1.2.3. *Ряд Фур'є голоморфної майже періодичної функції f(z) можна записати як ряд Діріхле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n y} e^{i\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n z}, \qquad (3)$$

де $c_n \in \mathbf{C}$.

Заміна рівномірної метрики на метрику Степанова у означенні рівномірної майже періодичної функції не змінює класу голоморфних майже періодичних функцій.

Теорема 1.2.1. *Якщо голоморфна в смузі* $\Pi_{(a,b)}$ *функція f(z) має в будь-якій меншій смузі* $\Pi_{[\alpha,\beta]}$, $a < \alpha < \beta < b$ *для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *відносно щільну множину* $\left\{\tau : d^{S^p}_{[\alpha,\beta]}(f(z+\tau), f(z)) < \varepsilon\right\}$ *ε-майже періодів за Степановим, то f(z) – голоморфна майже періодична функція в розумінні означення 1.2.2.*

Для обмежених голоморфних функцій майже періодичність достатньо перевірити на одній прямій у смузі.

Теорема 1.2.6. *Нехай функція f(z) голоморфна в смузі* $\Pi_{(a,b)}$ *й обмежена в будь-якій смузі* $\Pi_{[\alpha,\beta]}$, $a < \alpha < \beta < b$. *Припустимо, що на прямій* $y=y_0$ $(a<y_0<b)$ *функція* $f(x+iy_0)$ *є рівномірною майже періодичною функцією. Тоді f(z) – рівномірна майже періодична функція в* $\Pi_{(a,b)}$.

У подальших варіантах цієї теореми майже періодичність відома тільки на межах смуги, а умова обмеженості в смузі відсутня.

Теорема 1.2.7. *Припустимо, що ряд* $\sum_n c_n e^{-\lambda_n y} e^{i\lambda_n x}$ *для* $y=a$ *і* $y=b$ *є рядом Фур'є рівномірних майже періодичних функцій* $f_a(x)$ *і* $f_b(x)$*. Тоді існує рівномірна майже періодична в смузі* $\Pi_{[a,b]}$ *і голоморфна в смузі* $\Pi_{(a,b)}$ *функція* $f(z)$ *з рядом Діріхле* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n z}$ *, яка співпадає з* $f_a(x)$ *і, відповідно, з* $f_b(x)$ *на межах смуги* $\Pi_{[a,b]}$.

Звернемося до теорем, у яких є обмеження на спектр.

Теорема 1.2.9. *Нехай ряд Діріхле (3) має від'ємні показники* λ_n*. Припустимо, що для деякого* $y=a$ *ряд (3) є рядом Фур'є рівномірної майже періодичної функції* $f_a(x)$*. Тоді існує рівномірна майже періодична в смузі* $\Pi_{(-\infty,a]}$ *і голоморфна в смузі* $\Pi_{(-\infty,a)}$ *функція, яка на прямій* $y=a$ *співпадає з функцією* $f_a(x)$*, має своїм рядом Діріхле ряд (3) і при* $y\to-\infty$ *прямує рівномірно по* $x\in\mathbf{R}$ *до нуля.*

Справедливою є і зворотна теорема.

Теорема 1.2.10. *Нехай голоморфна майже періодична в напівплощині* $\Pi_{(-\infty,a)}$ *функція* $f(z)$ *рівномірно обмежена в цій напівплощині. Тоді всі показники її ряду Діріхле недодатні.*

Корисна в застосуванні й така теорема.

Теорема 1.2.11. *Нехай функція* $f(x)\in U$ *має обмежений спектр. Тоді* $f(x)$ *продовжується до цілої рівномірної майже періодичної функції* $f(z)$ *в* $\mathbf{C}=\Pi_{(-\infty,+\infty)}$.

Ця теорема є справедливою і для випадку метрики Степанова.

Теорема 1.2.12. *Якщо спектр функції* $f(x)\in S^p$ *обмежений, то* $f(x)$ *продовжується до цілої рівномірної майже періодичної функції* $F(z)$ *експоненціального типу, причому відрізок* $\left[h_F\left(-\frac{\pi}{2}\right),h_F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$*, де* $h_F(\theta)$ *– індикатор Фрагмена-Ліндельофа для* F*, є мінімальним сегментом, що містить спектр функції* $f(x)$*. Навпаки, якщо майже періодична функція за Степановим* $f(x)$ *є цілою функцією експоненціального типу, то її спектр обмежений.*

У підрозділі **1.3.** подаються результати Х.Бауермайстера про голоморфні майже періодичні функції за Безиковичем в смузі.

Означення 1.3.1. *Голоморфна функція* $f(z)$ *в смузі* $\Pi_{(a,b)}$ *називається майже періодичною функцією за Безиковичем в* $\Pi_{(a,b)}$*, якщо для будь-якого* $\varepsilon>0$ *і будь-якої підсмуги* $\Pi_{[\alpha,\beta]}$, $a<\alpha<\beta<b$ *знайдеться голоморфна рівномірна майже періодична функція* $f_\varepsilon(z)$ *в* $\Pi_{[\alpha,\beta]}$ *така, що для будь-якого* $y_0\in[\alpha,\beta]$

$$d^{B^p}(f(x+iy_0), f_\varepsilon(x+iy_0))<\varepsilon.$$

Далі наводяться узагальнення теорем 1.2.3., 1.2.6. і 1.2.7. на голоморфні функції у смузі, що ростуть не швидше $e^{e^{k|z|}}$, $k<\frac{\pi}{b-a}$ з використанням метрики Безиковича замість рівномірної.

Відзначимо, що узагальнення теореми 1.2.6. на випадок метрики Безиковича при поліноміальному рості $f(z)$ належить А.С. Безиковичу.

У підрозділі **1.4.** подаються результати Л.І. Ронкіна про майже періодичні функції на трубчастій множині й голоморфні майже періодичні функції у трубчастій області простору $\mathbf{C}^m$.

Нехай E – множина у $\mathbf{R}^m$, $m \geq 1$. *Трубчастою множиною* з основою E називається множина вигляду

$$T_E = \left\{ z = x + iy \in \mathbf{C}^m : x \in \mathbf{R}^m, \, y \in E \right\} .$$

Зокрема, при m=1 трубчаста множина з основою $E=[\alpha,\beta]$ є смугою $\Pi_{[\alpha,\beta]}$.

Нехай K – компакт в $\mathbf{R}^m$. Для обмежених неперервних функцій f і g на T_K покладемо

$$d_K^U(f,g) = \sup_{z \in T_K} | f(z) - g(z) | . \qquad (4)$$

Означення 1.4.1. *Функція $f(z)$, неперервна на множині T_K, називається рівномірною майже періодичною на T_K, якщо для кожного $\varepsilon>0$ можна вказати таке $l=l(\varepsilon)$, що в кожному m-вимірному кубі в $\mathbf{R}^m$ зі стороною l знайдеться хоча б одне τ, котре є ε-майже періодом, тобто $d_K^U(f(z+\tau), f(z)) < \varepsilon$.*

Простір таких функцій будемо позначати через U_K, а самі функції назвемо d_K^U-майже періодичними.

Має місце й такий аналог теореми 1.1.5.

Теорема 1.4.5. *Нехай $f(z)$ – d_K^U-майже періодична функція. Тоді рівномірно по $z \in T_K$ існує межа*

$$M_t\left\{ f \right\} = \lim_{X \to \infty} \frac{1}{\left(2X\right)^m} \int\limits_{\|t\|<X} f(z+t)dt,$$

яка не залежить від $x \in \mathbf{R}^m$ і є неперервною функцією від $y \in K$.

Тут для $t = (t^1,...,t^m) \in \mathbf{R}^m$ позначено $\|t\| = \max\limits_j |t^j|$.

Далі, для $f \in U_K$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$ визначаються коефіцієнти Фур'є

$$a(\lambda) = M_x\left\{ f(x+iy)e^{-i\langle x,\lambda \rangle} \right\}, \ \langle x,\lambda \rangle \text{ – скалярний добуток в } \mathbf{C}^m,$$

що є неперервними функціями від $y \in K$. Спектр цієї функції $spf = \{\lambda \in \mathbf{R}^m : a(\lambda) \not\equiv 0\}$ не більший за злічений. Можна також визначити ряд Фур'є $f(z) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\langle x,\lambda_n \rangle}$, де $\lambda_n \in spf$, $a_n=a_n(y)$ – коефіцієнти Фур'є відносно λ_n, n=1,2,...

Справедливим є такий аналог теореми 1.2.1.

Теорема 1.4.8. *Функція* $f(z)\in U_K$ *тоді і тільки тоді, коли її можна апроксимувати в метриці* d_K^U *скінченними експоненціальними сумами вигляду* $\sum a_n(y)e^{i\langle x,\lambda_n\rangle}$, *де* $a_n(y)$ *– неперервні функції на K.*

Позначимо через HU_D простір функцій, голоморфних у трубчастій області T_D, D – опукла область у $\mathbf{R}^m$, таких, що їх звуження на будь-яку множину вигляду T_K, де K – компакт у D, є функцією з простору U_K.

Має місце й таке твердження.

Теорема 1.4.9. *Для* $f(z)\in HU_D$ *величина* $c_n(y)=a_n(y)e^{-\langle y,\lambda_n\rangle}$ *не залежить від y.*

У підрозділі **1.5.** наводяться необхідні поняття із опуклого аналізу й теорії субгармонійних і плюрисубгармонійних функцій.

У **розділі 2** "Майже періодичні функції на трубчастій області у різних метриках" досліджуються функції на трубчастій множині та в трубчастій області, майже періодичні у метриках Степанова, Вейля та Безиковича. У підрозділі **2.1.** вводяться та вивчаються функції на трубчастих множинах.

Для фіксованого $p\ge 1$ і трубчастої множини T_K, де K – компакт у $\mathbf{R}^m$, розглянемо комплекснозначні функції на T_K, що належать простору L^p на кожній множині вигляду $\left\{z=x+iy\in\mathbf{C}^m:|x|\le N, y=y_0\right\}$.

Для таких функцій покладемо

$$d_K^{S^p}(g,h)=\sup_{x+iy\in T_K}\left(\int_{\|t\|\le\frac{1}{2}}|g(x+t+iy)-h(x+t+iy)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\qquad (5)$$

$$d_K^{W^p}(g,h)=\overline{\lim_{X\to\infty}}\sup_{x+iy\in T_K}\left(\frac{1}{(2X)^m}\int_{\|t\|\le X}|g(x+t+iy)-h(x+t+iy)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\qquad (6)$$

$$d_K^{B^p}(g,h)=\overline{\lim_{X\to\infty}}\sup_{y\in K}\left(\frac{1}{(2X)^m}\int_{\|t\|\le X}|g(t+iy)-h(t+iy)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.\qquad (7)$$

Означення 2.1.1. *Функцію f(z),* $z=x+iy\in T_K$, *назвемо d-майже періодичною на* T_K *(d - одна з метрик (4) – (7)), якщо її можна апроксимувати в метриці d скінченними експоненціальними сумами* $P(z)=\sum_{k=1}^{N}a_k(y)e^{i\langle x,\lambda_k\rangle}$, *де* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *– скалярний добуток у* $\mathbf{R}^m$, $\lambda_k\in\mathbf{R}^m$, *а* $a_k(y)$ *– неперервні функції на K.*

Має місце й такий аналог теореми 1.4.5.

Теорема 2.1.1. *Для функції f(x+iy), що належить до одного з просторів* S_K^p, W_K^p, B_K^p, *існує середнє значення*

$$M_t\left\{f(x+t+iy)\right\} = \lim_{X\to\infty}\left(\frac{1}{2X}\right)^m \int\limits_{\|t\|\le X} f(x+t+iy)dt \ ,$$

що не залежить від $x\in\mathbf{R}^m$ *і є неперервною функцією відносно y. Крім того, для* $f\in S_K^p$ *чи* $f\in W_K^p$

$$\lim_{X\to\infty} d_K^U\left(\left(\frac{1}{2X}\right)^m \int\limits_{\|t\|<X} f(x+t+iy)dt, M_t\left\{f(x+t+iy)\right\}\right) = 0$$

і для $f\in B_K^p$

$$\lim_{X\to\infty} d_K^{B^p}\left(\left(\frac{1}{2X}\right)^m \int\limits_{\|t\|<X} f(x+t+iy)dt, M_t\left\{f(x+t+iy)\right\}\right) = 0 \ .$$

Таким чином, кожній функції $f\in S_K^p$, W_K^p чи B_K^p можна поставити у відповідність ряд Фур'є $\sum a(\lambda)e^{i\langle x,\lambda\rangle}$, причому $a(\lambda)$ є неперервні функції від y і спектр $spf=\{\lambda\in\mathbf{R}^m : a(\lambda)\not\equiv 0\}$ не більший за злічений.

У підрозділі **2.2.** вивчаються функції, голоморфні в трубчастій області T_D, де D – опукла область в $\mathbf{R}^m$.

Позначимо через HS_D^p (чи, відповідно, HW_D^p, HB_D^p) простір голоморфних функцій у T_D d_K - майже періодичних ($d=d^{S^p}$, $d=d^{W^p}$ і $d=d^{B^p}$) на кожній трубчастій множині вигляду T_K, де K – компакт в D.

Справедливим є таке узагальнення теореми 1.4.9.

Теорема 2.2.1. *Для голоморфної майже періодичної функції f(z) з будь-якого простору* HS_D^p, HW_D^p, HB_D^p *коефіцієнти Фур'є* $a(\lambda)$ *мають вигляд* $a(\lambda)=c(\lambda)e^{-\langle y,\lambda\rangle}$, *де* $c(\lambda)$ *– незалежні від y комплексні числа.*

Таким чином, для функцій із цих просторів ряд Фур'є перетворюється в ряд Діріхле

$$\sum c_n e^{i\langle z,\lambda_n\rangle},\ c_n\in\mathbf{C}. \qquad (8)$$

Простори HU_D, HS_D^p, HW_D^p і HB_D^p пов'язані між собою такими співвідношеннями.

Теорема 2.2.2 (аналог теореми 1.2.2.). *Простори* HU_D *і* HS_D^p *при кожному* $p\ge 1$ *співпадають.*

Теорема 2.2.3. *Простори* HW_D^p *співпадають при* $p\ge 1$.

Неважко переконатися у справедливості вкладень

$$HS_D^p\subset HW_D^p,\ HW_D^p\subset HB_D^p,\ HB_D^{p'}\subset HB_D^p \text{ при } p'>p\ge 1.$$

У підрозділі **2.3.** доводиться, що зазначені вкладення є істотно строгими.

Теорема 2.3.1. *Існує функція* $f \in HW^1_{(-\infty,\infty)}$ *така, що будь-яка функція* g*, еквівалентна* f *у просторі* $HW^1_{(-r,r)}$ *при деякому* $r>0$*, не належить до простору* $HS^1_{(-r,r)}$.

Теорема 2.3.2. *Існує функція* $f \in \bigcap\limits_{p\geq 1} HB^p_{(-\infty,\infty)}$ *така, що будь-яка функція* g*, еквівалентна* f *у будь-якому просторі* $HB^p_{(-r,r)}$ *при деяких* $r>0$ *і* $p \geq 1$*, не належить до простору* $HW^1_{(-r,r)}$.

Теорема 2.3.3. *Для будь-яких* $p' > p \geq 1$ *існує* $f \in HB^p_{(-\infty,\infty)}$ *така, що будь-яка функція* g*, еквівалентна* f *у просторі* $HB^p_{(-r,r)}$ *при деякому* $r>0$*, не належить до простору* $HB^{p'}_{(-r,r)}$.

У **розділі 3** "Голоморфні функції в трубчастій області, майже періодичні на її частині" доводяться багатовимірні аналоги теорем 1.2.6. і 1.2.7.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $f(z)$ *– голоморфна функція в трубчастій області* T_D *з опуклою основою* $D \subset \mathbf{R}^m$. *Якщо функція* $f(z)$ *обмежена щодо метрики* d *на* T_K *для кожного компакта* $K \subset D$ *і при цьому* $f(z)$ *–* d*-майже періодична функція на площині* $T_{\{y_0\}}$, $y_0 \in D$, *то* $f(z)$ *–* d*-майже періодична функція на* T_K *для кожного компакта* $K \subset D$.

Теорема 3.3.1. *Нехай* D *– обмежена опукла область у* $\mathbf{R}^m$, $f(z)$ *– голоморфна функція в околі трубчастої множини* $T_{\overline{D}}$ *й обмежена в метриці* $d_{\overline{D}}$. *Тоді якщо* $f(z)$ *–* d*-майже періодична на площині* $T_{\{0\}}$, $0 \in \partial D$, *то* $f(z)$ *–* d*-майже періодична на кожній множині* $T_{\beta\overline{D}}$ *для кожного* $\beta<1$.

Теорема 3.3.2. *Нехай* $f(z)$, $z = x+iy$ *– голоморфна функція в трубчастій області* T_D *з опуклою основою* $D \subset \mathbf{R}^m$. *Нехай* $|f(z)| \leq c_1 e^{e^{c_2|z|}}$ *на кожному компакті* $K \subset D$, c_1, c_2 *залежать від* K, *і нехай* $f(z)$ *обмежена в метриці* d *на* $T_{\{y\}}$ *для кожного* $y \in D$. *Тоді якщо* $f(z)$ *–* d*-майже періодична функція на площині* $T_{\{y_0\}}$, $y_0 \in D$, *то* $f(z)$ *–* d*-майже періодична функція на* T_K *для кожного компакта* $K \subset D$.

У наступних теоремах замість умови обмеженості в метриці d передбачається d-майже періодичність на скінченному наборі площин.

Теорема 3.3.3. *Нехай* $f(z)$ *– голоморфна функція в трубчастій області* T_D, $f(x+iy)$ *є* d*-майже періодичною функцією на площинах* $T_{\{y_j\}}$, $j = 1,\dots,N$, $y_j \in D$ *і нехай* $|f(z)| \leq c e^{e^{\rho|z|}}$ *на множині* $T_{conv\{y_1,\dots,y_N\}}$, *причому* $\rho < \dfrac{\pi}{\max\limits_{j,k} |y_j - y_k|}$. *Тоді* $f(z)$ *–* d*-майже періодична функція на множині* $T_{conv\{y_1,\dots,y_N\}}$.

Теорема 3.3.4. *Нехай наданий ряд Діріхле (3) і для кожного* $y=y_j$, $j=1,..,N$, *існують d-майже періодичні функції* $f_j(x)$, S^p ($d = d^U$ *чи* $d = d^{S^p}$) *з рядами Фур'є вигляду*

$$\sum c_n e^{-\langle y,\lambda_n\rangle} e^{i\langle x,\lambda_n\rangle}. \qquad (9)$$

Тоді на множині $T_{conv\{y_1,\dots,y_N\}}$ *існує d-майже періодична функція* $F(x+iy)$ *з рядом Фур'є (9).*

Теорема 3.3.5. *Нехай для кожної точки* $y \in E \subset \mathbf{R}^m$ *існує* d^{S^p}*-майже періодична функція* $f_y(x)$ *змінної* $x \in \mathbf{R}^m$ *з рядом Фур'є (9) і внутрішність D множини* $\overline{convE}$ *є не порожня. Тоді існує* $F(z) \in HU_D$, *із рядом Діріхле (3).*

У **розділі 4** "Голоморфні майже періодичні функції з обмеженням на спектр" поширюються на функції багатьох змінних теореми 1.2.9.-1.2.12. про зв'язок між поведінкою голоморфної майже періодичної функції та розташуванням її спектра.

Через Г позначимо опуклий замкнений конус у $\mathbf{R}^m$, а через Γ - *спряжений конус до* Г, тобто конус вигляду $\{t \in \mathbf{R}^m : \langle t, y\rangle \geq 0 \ \forall y \in \Gamma\}$. Через $\overset{\circ}{\Gamma}$ будемо позначати внутрішність конуса Г. Вкладення $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ означає, що перетин Г´ з одиничною сферою належить до $\overset{\circ}{\Gamma}$.

У підрозділі **4.1.** доводиться така теорема.

Теорема 4.1.1. *Нехай* $f(x)$ – d^U *-майже періодична функція в* $\mathbf{R^m}$ *із рядом Фур'є*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\langle x,\lambda_n\rangle}, \ \ a_n \in \mathbf{C}, \qquad (10)$$

причому всі показники λ_n *належать до замкненого опуклого конуса* $\Gamma \subset \mathbf{R}^m$. *Тоді* $f(x)$ *неперервно продовжується до* d_Γ^U *-майже періодичної функції* $F(z)$ *на трубчастій множині* T_Γ *з рядом Фур'є* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\langle y,\lambda_n\rangle} e^{i\langle x,\lambda_n\rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\langle z,\lambda_n\rangle}, a_n \in \mathbf{C}$. *Функція* $F(z)$ *голоморфна у внутрішності* T_Γ; *при цьому для будь-якого* $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ *рівномірно по* $x \in \mathbf{R}^m$

$$\lim_{|y|\to\infty,\ y\in\Gamma'} F(z) = a_0, \qquad (11)$$

де a_0 – *коефіцієнт Фур'є при показнику* $\lambda_0=0$ *(якщо* $0 \notin spf$, *то вважаємо* $a_0=0$*). Якщо* $spf \subset \overset{\circ}{\Gamma}$, *то (11) виконується рівномірно по* $z \in T_\Gamma$.

Доводиться й аналог цієї теореми для метрики d^{S^p}.

У наступному підрозділі подається теорема, обернена до попередньої.

Теорема 4.2.1. *Нехай* $f(x)$ – d^U*-майже періодична функція в* $\mathbf{R}^m$, $f(x)$ *неперервно продовжується до голоморфної у внутрішності* T_Γ *функції* $F(z)$. *Якщо* $F(z)$ *обмежена на будь-якій множині вигляду* $T_{\Gamma'}$, Γ' *– конус у* $\mathbf{R}^m$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, *то* $F(z) \in HU_{\overset{\circ}{\Gamma}}$ *і її спектр належить до* Γ.

Одержано й аналог цієї теореми для метрики d^{S^p}.

В останньому підрозділі дисертації теореми 1.2.11. і 1.2.12. поширюються на багатовимірні комплексні змінні.

Нехай $F(z)$ – ціла функція в $\mathbf{C}^m$ експоненціального типу, тобто $|f(z)| \le ce^{b|z|}$ при деяких $c<\infty$, $b<\infty$ та усіх $z \in \mathbf{C}^m$.

Означення 4.3.1. *P-індикатором функції* $F(z)$ *в* $\mathbf{C}^m$ *називається величина*

$$h_F(y) = \sup_{x\in\mathbf{R}^m} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \log|F(x+iry)|.$$

Теорема 4.3.1. *Нехай* $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^m$ *–* d*-майже періодична функція (*$d = d^U$ *чи* $d = d^{S^p}$*) із рядом Фур'є (10) і нехай* $|\lambda_n| \le C < \infty$ *для усіх* n. *Тоді* $f(x)$ *продовжується до цілої у* $\mathbf{C}^m$ *функції* $F(z)$ *експоненціального типу, що є рівномірною майже періодичною на будь-якій трубчастій множині в* $\mathbf{C}^m$ *з обмеженою основою;* $F(z)$ *має ряд Діріхле*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\langle z,\lambda_n\rangle}, \qquad (12)$$

а її P-індикатор $h_F(y)$ *пов'язаний з опорною функцією спектра* $H_{sp\,f}(\mu) := \sup_{t\in sp\,f}\langle t,\mu\rangle$ *рівністю* $h_F(y)=H_{spf}(-y)$.

Справедливим є і зворотне твердження.

Теорема 4.3.2. *Нехай* $F(z)$ *– ціла функція в* $\mathbf{C}^m$, $|F(z)| \le Ce^{b|z|}$, *при цьому* $F(x)$, $x \in \mathbf{R}^m$ *–* d*-майже періодична функція,* $d = d^U_{\{0\}}$ *чи* $d = d^{S^p}_{\{0\}}$, *із рядом Фур'є (10). Тоді* $F(z)$ *– рівномірна майже періодична функція на будь-якій трубчастій множині в* $\mathbf{C}^m$ *з обмеженою основою, має ряд Діріхле (12) та* $sp\,F \subset \{\lambda : |\lambda| \le b\}$.

ВИСНОВКИ

У дисертації одержано нові результати про майже періодичні в різних інтегральних метриках функції на трубчастій множині й у трубчастій області. Доведено існування середнього значення для таких функцій, причому у випадку метрик Степанова та Вейля воно існує рівномірно щодо зсуву. Для майже періодичних функцій у різних метриках побудовано ряди Фур'є, при цьому зазначено, що для голоморфних майже періодичних функцій у трубчастій області ряд Фур'є перетворюється в ряд Діріхле з постійними коефіцієнтами. Встановлено, що майже періодична функція апроксимується у відповідній метриці сумами Бохнера-Фейера свого ряду Фур'є. Доведено співпадання просторів голоморфних функцій, майже періодичних у метриці Степанова із простором голоморфних функцій, майже періодичних у рівномірній метриці, а також співпадання просторів голоморфних функцій, майже періодичних у метриках Вейля різних порядків. Наведено приклади голоморфних майже періодичних функцій, які пересвідчують, що простір голоморфних майже періодичних функцій у метриці Вейля істотно ширший за простір голоморфних майже періодичних функцій у метриці Степанова й істотно вужчий за простір голоморфних майже періодичних функцій у метриці Безиковича. Крім того, простори голоморфних майже періодичних функцій у метриках Безиковича різних порядків істотно різні.

Доведено, що з обмеженості голоморфної функції у трубчастій області в тій чи іншій метриці та майже періодичності (у тій же метриці) на одній дійсній гіперплощині в трубчастій області виходить майже періодичність у цій метриці у всій трубчастій області. Вказано на умови, за яких гіперплощина, де функція майже періодична, може належати до межі трубчастої області. Для функцій, що мають скінченний порядок зростання в трубчастій області, умову обмеженості у будь-якій меншій трубчастій області можна замінити на умову обмеженості на кожній дійсній гіперплощині. Для таких функцій тільки з майже періодичності на скінченній системі гіперплощин виходить майже періодичність на їх опуклій оболонці. Для випадку рівномірної метрики й метрики Степанова доведено, що якщо ряди Фур'є функцій, майже періодичних на системі дійсних гіперплощин, певним чином погоджені, то ці функції допускають майже періодичне продовження всередину опуклої оболонки цієї системи гіперплощин, і це продовження голоморфне у внутрішності опуклої оболонки.

Показано, що якщо спектр майже періодичної функції належить деякому конусу, то ця функція продовжується як голоморфна обмежена функція в трубчасту область із спряженим конусом в основі. Далі, якщо майже періодична функція в скінченновимірному просторі продовжується як голоморфна обмежена функція в трубчасту область із конусом в основі, то її спектр належить до спряженого конуса. Зазначено, що спектр рівномірної майже періодичної функції чи майже періодичної функції за Степановим обмежений тоді і тільки тоді, коли ця функція продовжується до цілої функції експоненціального типу, описано зв'язок її P-індикатора з опорною функцією спектра.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ АВТОРОМ РОБІТ ІЗ ТЕМИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Фаворов С., Удодова О. Аналітичні майже періодичні функції у метриці Безиковича // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 41-47.
2. Удодова О. Голоморфные почти периодические функции в трубчатой области // Вісник Харківського університету. Серія «Математика, прикладна математика і механіка» – 2001. – Вип. 51. – № 542. – С. 96-105.
3. Favorov S.Yu., Udodova O.I. Almost periodic functions in finite-dimensional space with the spectrum in a cone // Математична фізика, аналіз, геометрія. – 2002. – Вип. 9. – №. 3. – С. 465-477.
4. Удодова О. Голоморфные почти периодические функции в различных метриках // Вісник Харківського університету. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2003. – Вип. 52. – № 582. – С. 90-107.
5. Udodova O.I. Almost periodic in Besikovitch's sense analytic functions // Материалы Международной научной конференции “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений”. – Минск, Беларусь. – 2001. – С. 165.
6. Udodova O.I. Holomorphic Almost Periodic Functions in Various Metrics // Матеріали Міжнародної наукової конференції "Комплексний аналіз і теорія потенціалу" – Київ. – 2001. – С. 58-59.
7. Udodova O.I. Holomorphic Uniformly Almost Periodic Functions in a Tube Domain // Матеріали IX-ї Міжнародної наукової конференції ім. М.Ф. Кравчука. – Київ. – 2002. – С. 382.
8. Udodova O.I. Almost periodic functions with the bounded spectrum // Материалы Международной научной конференции ISAAC по комплексному анализу и дифференциальним уравнениям. – Ереван, Армения. – 2002. – С. 63-64.
9. Udodova O.I. Holomorphic almost periodic functions on a strip // Материалы Международной научной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования”. – Москва. – 2003. – С. 108.
10. Udodova O.I. Holomorphic Almost Periodic Functions in a Tube // Материалы Международной научной конференции “Математический анализ и экономика”. – Сумы. – 2003. – С. 53.
11. Удодова О.І. Деякі приклади голоморфних майже періодичних функцій // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Complex analysis and its applications”. – Львів. – 2003. – С. 73.
12. Udodova O.I. Almost periodic functions with the bounded spectrum // Материалы Международной научной конференции “Колмогоров и современная математика”. – Москва. – 2003. – С. 255 - 256.

АНОТАЦІЯ

Удодова О.І. Голоморфні майже періодичні функції у різних метриках. – Рукопис.
Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 - математичний аналіз. - Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, 2004.

У дисертації досліджено голоморфні функції у трубчастій області в багатовимірному комплексному просторі, майже періодичні у рівномірній метриці, метриці Степанова, Вейля чи Безиковича. Побудовано ряд Фур'є цих функцій і показано, що фактично він є рядом Діріхле з постійними коефіцієнтами. Доведено, що всі простори голоморфних майже періодичних функцій у метриці Степанова співпадають з простором голоморфних рівномірних майже періодичних функцій. Простори голоморфних майже періодичних функцій у метриці Вейля різних порядків співпадають. Досліджено також, що останній простір істотно ширший за простір голоморфних рівномірних майже періодичних функцій, та істотно вужчий за простір голоморфних майже періодичних функцій у метриці Безиковича. Встановлено, що обмежена голоморфна функція в трубчастій області, майже періодична на дійсній гіперплощині в цій області, є майже періодичною на всій області. Для майже періодичних функцій у рівномірній метриці чи метриці Степанова проведено зв'язок між спектром і обмеженим продовженням у трубчасту область з конусом в основі. Зокрема, спектр майже періодичної функції обмежений тоді і тільки тоді, коли функція продовжується до цілої функції експоненціального типу в багатовимірному комплексному просторі.

Ключові слова: голоморфні функції, майже періодичні функції, обмежений спектр, ряд Фур'є, ряд Діріхле.

АННОТАЦИЯ

Удодова О.И. Голоморфные почти периодические функции в различных метриках. – Рукопись.
Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, 2004.

Исследования по почти периодическим функциям начались в 1778 году с работы Ж.Л. Лагранжа, в которой был поставлен и решен в частном случае вопрос о существовании среднего движения у обобщенного тригонометрического полинома. Однако основы этой теории были заложены в работах Г. Бора 1924-1944 гг.

Основные приложения почти периодические функции нашли в теории дифференциальных уравнений как обычных, так и в частных производных, в бесконечномерных эволюционных уравнениях, в теории чисел. Это относится как к функциям, почти периодическим относительно

равномерной метрики, так и к почти периодическим функциям относительно различных интегральных метрик.

В диссертации получены новые результаты о почти периодических функциях в различных интегральных метриках на трубчатом множестве и в трубчатой области многомерного комплексного пространства. Доказано существование среднего значения у таких функций, причем в случае метрик Степанова и Вейля это среднее значение существует равномерно относительно сдвига. Для почти периодических функций в различных метриках построены ряды Фурье, при этом для голоморфных почти периодических функций в трубчатой области ряд Фурье превращается в многомерный ряд Дирихле с постоянными коэффициентами. Проверено, что почти периодическая функция аппроксимируется в соответствующей метрике суммами Бохнера-Фейера своего ряда Фурье. Доказано совпадение пространств голоморфных функций, почти периодических в метрике Степанова, с пространством голоморфных функций, почти периодических в равномерной метрике, а также совпадение пространств голоморфных функций, почти периодических в метриках Вейля различных порядков. Приведены примеры голоморфных почти периодических функций, показывающие, что пространство голоморфных почти периодических функций в метрике Вейля существенно шире пространства голоморфных почти периодических функций в метрике Степанова и существенно уже пространства голоморфных почти периодических функций в метрике Безиковича, а также то, что пространства голоморфных почти периодических функций в метриках Безиковича различных порядков существенно различны.

Доказано, что из ограниченности голоморфной функции внутри трубчатой области в той или иной метрике и почти периодичности (в той же метрике) на одной вещественной гиперплоскости внутри трубчатой области следует почти периодичность в этой метрике во всей трубчатой области. Указаны условия, при которых гиперплоскость, где функция почти периодична, может лежать на границе трубчатой области. Для функций, имеющих конечный порядок роста в трубчатой области, условие ограниченности внутри трубчатой области можно заменить на условие ограниченности на каждой вещественной гиперплоскости. Доказано, что для таких функций только из почти периодичности на конечной системе гиперплоскостей следует почти периодичность на их выпуклой оболочке. Для случая равномерной метрики и метрики Степанова, если ряды Фурье функций, почти периодических на системе вещественных гиперплоскостей, определенным образом согласованы, то эти функции допускают почти периодическое продолжение внутрь выпуклой оболочки этой системы гиперплоскостей, и это продолжение голоморфно во внутренности выпуклой оболочки.

Показано, что если спектр почти периодической функции лежит в некотором конусе, то эта функция продолжается как голоморфная ограниченная функция в трубчатую область с

сопряженным конусом в основании. Если почти периодическая функция в конечномерном пространстве продолжается как голоморфная ограниченная функция в трубчатую область с конусом в основании, то ее спектр лежит в сопряженном конусе. Указано, что спектр равномерной почти периодической функции или почти периодической функции по Степанову в конечномерном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда эта функция продолжается в многомерное комплексное пространство до целой функции экспоненциального типа, описана связь ее P-индикатора с опорной функцией выпуклой оболочки спектра.

Ключевые слова: голоморфные функции, почти периодические функции, ограниченный спектр, ряд Фурье, ряд Дирихле.

ABSTRACT

Udodova O.I. Holomorphic almost periodic functions in various metrics. – Manuscript.

Thesis for degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.01 - mathematical analysis. – B. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2004.

We investigate holomorphic functions on a tube domain in $\mathbf{C}^m$ that are almost periodic with respect to either uniform metric, or Stepanov's one, or Weyl's one, or Besicovitch's one. We construct Fourier series expansion of these functions and show that the Fourier series is actually Dirichlet series with constant coefficients. We prove that all the spaces of holomorphic almost periodic functions in Stepanov's sense coincide with the space of holomorphic uniformly almost periodic functions. The spaces of holomorphic almost periodic functions in the Weyl's sense coincide for various orders as well. We also prove that the latter space is essentially wider than the space of holomorphic uniformly almost periodic functions, and essentially narrower than the space of holomorphic almost periodic functions in the Besicovitch's sense. Then we show that if a bounded holomorphic function on a tube domain in $\mathbf{C}^m$ is almost periodic on an m-dimensional real plane in this domain, then it is almost periodic on the whole domain. As for almost periodic functions with respect to either the uniform metric, or Stepanov's one on $\mathbf{R}^m$, we investigate the connection between their spectrum and their bounded extending to a tube domain with a cone in a base. In particular, we prove that the spectrum of an almost periodic function is bounded if and only if the function extends to an entire function on $\mathbf{C}^m$ of the exponential type.

Key words: holomorphic functions, almost periodic functions, bounded spectrum, Fourier series, Dirichlet series.