Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Харківський національний університет радіоелектроніки

ШУВАЛОВА ЮЛІЯ СЕРГІЇВНА

УДК 517.968+517.956

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ТА ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИН

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків - 2012

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Українській державній академії залізничного транспорту Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Наукові керівники: доктор фізико-математичних наук,
професор **Чудінович Ігор Юрійович**;

доктор технічних наук, професор
Стрельнікова Олена Олександрівна,
Інститут проблем машинобудування
імені А.М. Підгорного НАН України,
провідний науковий співробітник.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Гандель Юрій Володимирович,
Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна, професор кафедри
математичної фізики та обчислювальної математики,

доктор фізико-математичних наук, професор
Савула Ярема Григорович,
Львівський національний університет
імені І.Франка, декан факультету
прикладної математики та інформатики.

Захист відбудеться "10" квітня 2012 року о 13 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради **К.64.052.07** у Харківському національному університеті радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, просп. Леніна 14.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, просп. Леніна 14.

Автореферат розісланий "7" березня 2012 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради І.В. Гребеннік

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена вивченню розв'язності систем нестаціонарних граничних рівнянь у початково-крайових задачах теорії пружності, що виникають при використанні методів теорії потенціалу для розв'язання задач динаміки тонких пружних пластин.

Тонкі пружні пластини знаходять широке застосування у різних галузях. З числа найбільш відомих прикладів можна навести сталеві та залізобетонні плити, тонкостінні конструкції, що застосовуються у літако- та суднобудівництві. Останнім часом стрімко розвивається будівництво великих структур, які плавають: платформи для зберігання вантажів, аеропорти тощо. Враховуючи великий розмір таких споруд, неможливо моделювати їх як жорсткі, і найпростішою моделлю виявляється тонка пружна пластина. Отже розробка методів розрахунку напружень, що виникають при деформації пружних пластин, є дуже важливою. Крайові задачі теорії пружних пластин є математичною моделлю поведінки тонких пружних пластин, тому розв'язання цих задач має теоретичний інтерес та прикладне значення. Серед головних методів чисельного розв'язання стаціонарних та нестаціонарних крайових задач пружних пластин важливе місце займає метод граничних рівнянь. Перевагою цього методу є зниження на одиницю геометричної вимірності задачі. Також використання теорії потенціалів дозволяє точно задовольнити рівняння коливань тонкої пружної пластини та дає змогу одноманітно розглядати задачу для внутрішньої та зовнішньої (нескінченної) області.

Граничні рівняння в нестаціонарних випадках суттєво відрізняються від стаціонарних, тому формальне перенесення відомих методів є неможливим. Крім того, у динамічних задачах зведення вихідної задачі до граничних рівнянь за допомогою методів теорії потенціалу не обґрунтовано, оскільки досі не має не тільки доведення збіжності наближених розв'язків до точних, але й доведення розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь. Поява часу як незалежної змінної призводить до граничних операторів, що не є нормально розв'язковими, оскільки їх області значень незамкнені в деяких природних просторах, тому для динамічних задач неможливо використовувати альтернативу Фредгольма. Отже виникає потреба у подальшому розвитку теорії потенціалів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана згідно з держбюджетними темами (№ДР 0106U004121, №ДР 0109U001182) на кафедрі вищої математики УкрДАЗТ. Частина результатів дисертаційної роботи була використана в звітах за вищевказаними НДР у розділах, що стосуються використання інтегро-диференціальних рівнянь до аналізу динамічної поведінки окремих елементів механічних систем на залізницях.

Мета і задачі дослідження. *Метою* даної роботи є доведення однозначної розв'язності різноманітних систем граничних рівнянь, що виникають при зображенні розв'язків основних типів задач динаміки тонких пружних пластин в рамках моделі Кірхгофа двома видами запізнілих поверхневих пружних потенціалів, чисельний експеримент на основі отриманих теоретичних результатів. Для досягнення цієї мети необхідно вирішити такі задачі:

– доведення однозначної розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь двох основних задач динаміки тонких пружних пластин;

– доведення однозначної розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь, що виникають у контактних задачах та у задачах зі змішаними крайовими умовами;

– доведення однозначної розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь у задачах динаміки тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами;

– одержання чисельних результатів для конкретних видів основних задач.

Об'єктом дослідження є процеси коливань тонких пружних пластин.

Предметом дослідження є нестаціонарні граничні рівняння у задачах динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі були використані варіаційні методи для формулювання коректних постановок початково-крайових задач. Розглянуті в роботі нестаціонарні граничні рівняння отримані за допомогою методів теорії потенціалу. Методами функціонального аналізу, а саме методом переходу до перетворень Лапласа за змінною часу у вихідних початково-крайових задачах та відповідних системах граничних рівнянь одержані системи псевдодиференціальних рівнянь, що вивчаються. Дослідження властивостей граничних операторів, які породжені аналогами пружних потенціалів простого та подвійного шарів, проводиться за допомогою методів теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. Методи теорії функцій комплексної змінної застосовуються для доведення голоморфності відображень, що здійснюються граничними операторами, відносно параметру перетворень Лапласа. При чисельному розв'язанні систем граничних інтегральних рівнянь було використано метод дискретних особливостей.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі здобуті такі нові наукові результати:

1. Вперше побудовано неперервну математичну модель динаміки пружної пластини в рамках моделі Кірхгофа, що заснована на використанні граничних інтегральних рівнянь, за допомогою яких можливо знаходити розв’язок у будь-який момент часу в будь-якій точці пластини.
2. Вперше доведено теореми існування та єдності розв'язку в однопараметричних шкалах просторів соболевського типу граничних рівнянь динаміки тонких пружних пластин, що містять оцінки гладкості розв'язку за змінною часу, для задач динаміки тонких пружних пластин із різними граничними умовами. Показано, що поверхневі потенціали з густинами, які є розв'язками вказаних систем граничних рівнянь, задовольняють відповідні початково-крайові задачі теорії тонких пружних пластин.
3. Удосконалено дискретну модель динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа на базі методу дискретних особливостей та метод чисельного розрахунку для випадку граничних інтегральних рівнянь, які містять просторову та часову змінні.

4. Вперше на основі одержаних теоретичних результатів побудовано чисельний розв’язок нестаціонарних граничних рівнянь задач динаміки тонких пружних пластин.

Практичне значення одержаних результатів. У дисертації проведені теоретичні дослідження, які були використані для побудови збіжних чисельних методів розв'язання систем граничних рівнянь для основних типів задач теорії тонких пружних пластин, що розглянуті в роботі, а отже, й вихідних початково-крайових задач, що є важливими в механіці, аерокосмічній та суднобудівній техніці тощо, при моделюванні процесів коливань та визначенні динамічних характеристик відповідальних конструктивних елементів.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, отримані в дисертації, належать авторові й опубліковані в роботах [1-17]. У співавторстві виконані роботи [1,5,8], у яких внесок дисертанта полягає в доведенні теорем існування та єдиності розв’язків систем граничних рівнянь, що виникають в основних задачах динаміки тонких пружних пластин, отримані оцінки гладкості розв’язків цих задач за змінною часу. У роботі [5] здобувачем виведено явний вигляд граничних інтегральних рівнянь для квадратної пластини та отримано чисельні результати.

Апробація результатів дисертації. Результати, викладені в дисертації, доповідалися та обговорювалися на міжнародних конференціях та симпозіумах: VIII Міжнародний симпозіум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (1999 р., Харків і Крим), VIII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (2000 р., Київ), Міжнародна конференція «Диференціальні і інтегральні рівняння» (2000 р., Одеса), Міжнародна конференція "Теория функций и математическая физика", присвячена 100-річчю Н.І. Ахієзера (2001 р., Харків), IX Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (2002 р., Львів), математичний симпозіум "First Karazin Scientific Readings" (2004 р., Харків), XIII Міжнародний симпозіум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (2007 р., Херсон), XIV Міжнародний симпозіум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (2009 р., Херсон), Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ-2009 (2009 р., Херсон), XVII Міжнародна науково-технічна конференція "Прикладные задачи математики и механики" (2009 р., Севастополь), XV Міжнародний симпозіум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (2011 р., Херсон). Крім того, результати досліджень доповідалися на науково-практичних конференціях Української державної академії залізничного транспорту та міжнародному семінарі "Чисельне моделювання методами дискретних особливостей в математичній фізиці" (керівник – проф. Гандель Ю.В.).

Публікації. Основні наукові результати дисертації опубліковано в 17 працях. З них 8 статей у наукових журналах (серед них 6 у фахових виданнях), 9 матеріалів міжнародних та всеукраїнських конференцій та симпозіумів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів і списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації – 171 стор., містить 14 рисунків. Список використаних джерел на 20 сторінках нараховує 162 найменування.

Подяки. Автор щиро вдячний доктору фізико-математичних наук Чудіновичу Ігорю Юрійовичу за допомогу та цінні поради щодо роботи над дисертацією.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність та необхідність виконаної роботи, сформульовано мету дослідження та визначено методи досягнення цієї мети, наведено основні наукові результати, що одержані автором, та галузі їхнього можливого застосування.

Розділ 1 "Огляд літератури та вибір напрямків дослідження" дисертації присвячено огляду наукової літератури за темою дослідження. Розглянуто існуючі методи розв'язку крайових задач теорії пружності, а саме метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод граничних інтегральних рівнянь. Визначені основні математичні проблеми теорії тонких пружних пластин, обрано напрямок дослідження.

Значний внесок у формування методів сучасної теорії пружності зробили О.Є. Андрейків, О.О. Бобильов, Д.В.Гриліцький, О.М.Гузь, О.П.Дацишин, А.П.Дзюба, С.О. Калоєров, О.С. Космодаміанський, В.В. Михаськів, С.Г. Міхлин, В.І. Моссаковський, І.С. Муха, В.К. Опанасович, Г.Я. Попов, В.Г. Попов, М.П. Саврук, Я.Г. Савула, Г.Т. Сулім, Ф. Сьярле, Х. Хан. Різноманітні підходи до розв'язання рівнянь математичної фізики для областей складної геометрії розвинуті у працях В.М. Колодяжного, С.В. Колосової, О.М. Литвина, К.В. Максименко-Шейко, В.А. Рвачова, Я.Г. Савули, А.П. Слесаренка, І.Г. Суворової, Т.І. Шейко, Л.Й. Шклярова та інших.

Усі розрахунки в задачах математичної фізики ґрунтуються на припущенні існування розв'язку в даних системах рівнянь при відомих співвідношеннях між значеннями відомих величин. Інтегральні рівняння в багатьох випадках є досить зручним апаратом для доведення теорем існування. Важливу роль у розвитку теорії потенціалів у початково-крайових задачах математичної фізики відіграли праці вітчизняних та зарубіжних учених, таких як Н.О. Вірченко, Г.С. Кіт, О.Ф. Кощій, В.Д. Купрадзе, О.О. Ладиженська, Н.І. Мусхелішвілі, В.В. Михаськів, В.Ф. Півень, М.В. Хай, Р.С. Хапко, І.Ю. Чудінович, К. Бребия, К. Констанда та інші. Різноманітні методи розв'язання сингулярних та гіперсингулярних рівнянь запропоновано в роботах С.М. Білоцерковського, Ю.П. Вірченко, Ю.В. Ганделя, В.О. Дорошенка, О.І. Желаннікова, А.І. Каландія, Б.Я. Кантора, І.К. Ліфанова, О.О. Стрельникової, О.В. Сетухі, А.Г. Угодчикова, Л.А. Фільштинського, Н.М. Хуторянського, Д.І. Чернія та інших.

У **Розділі 2** "Основні задачі динаміки тонких пружних пластин" автором будується математичний апарат, що є основою дослідження усіх типів задач, які розглядаються в роботі: вводяться однопараметричні шкали функціональних просторів соболєвського типу, визначаються аналоги операторів типу Пуанкаре-Стєклова та доводиться теорема про їх властивості, на основі фундаментального розв'язку рівняння коливань тонкої пластини будуються об’ємні та початкові потенціали та доводиться, що однорідні початкові умови та відсутність зовнішніх навантажень не обмежують загальності задачі.

Нехай тонка пружна пластина товщини h займає об’єм $\bar{\Omega}\times\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$, де Ω — деяка область в R^2 із замкненою границею Γ класу C^2. Використовуючи стандартні гіпотези Кірхгофа та припускаючи, що зовнішні сили, прикладені до пластини, нормальні до площини OX_1X_2, для вектора зсуву точки (x,x_3) пластини, маємо вираз $(-x_3\partial_1 u(x,t),-x_3\partial_2 u(x,t),u(x,t))$, де $u(x,t)$ – зсув точки $x=(x_1,x_2)$ серединної площини пластини в напрямку, перпендикулярному цій площині в недеформованому стані, $t\in\mathrm{R}_+=(0,\infty)$, $\partial_i=\partial/\partial x_i, i=1,2$. Перша та друга задачі динаміки тонких пружних пластин полягають у знаходженні функції зсуву $u(x,t)$, яка при відсутності зовнішніх навантажень задовольняє однорідне рівняння коливань та початкові умови

$$\partial_t^2 u(x,t)+D\Delta^2 u(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\Omega\times\mathrm{R}_+, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\partial_t u(x,0)=0,\qquad x\in\Omega, \tag{2}$$

де $\partial_t=\partial/\partial t$, $D=\frac{\widehat{D}}{\rho h}$, ρ – густина пластини, $\widehat{D}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – її циліндрична жорсткість, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлена пластина, $0<\nu<1/2$.

На межі виконуються умови в першій основній задачі I:

$$u(x,t)=f_1(x,t),\qquad \partial_n u(x,t)=f_2(x,t),\qquad (x,t)\in\Sigma^+=\Gamma\times\mathrm{R}_+,$$

в другій основній задачі II:

$$Qu(x,t)=g_1(x,t),\qquad -Mu(x,t)=g_2(x,t),\qquad (x,t)\in\Sigma^+,$$

де ∂_n- похідна за зовнішньою нормаллю $n(x)=(n_1(x),n_2(x))$ до контуру Γ, операції узагальненої сили, що перерізає, та моменту, що згинає, відповідно

$$Qu=-D\Big(\partial_n\Delta u+(1-\nu)\partial_\tau\Big[n_1n_2(\partial_2^2u-\partial_1^2u)+(n_1^2-n_2^2)\partial_1\partial_2 u\Big]\Big),$$

$$Mu=-D\Big(\Delta u+(1-\nu)\Big[2n_1n_2\partial_1\partial_2 u-n_2^2\partial_1^2 u-n_1^2\partial_2^2 u\Big]\Big),$$

де ∂_τ – похідна в напрямку дотичного до Γ орта τ, отриманого з n поворотом на кут $\pi/2$ проти годинникової стрілки.

Далі паралельно розглядаються внутрішні I^+ II^+ та зовнішні I^- II^- задачі в областях $\Omega^+ = \Omega$ і $\Omega^- = \mathrm{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$ відповідно; також далі буде використано позначення $G^\pm = \Omega^\pm \times \mathrm{R}_+$, $G = \Omega \times \mathrm{R}_+$.

Зауважимо, що розгляд однорідного рівняння коливань (1) та однорідних початкових умов (2) не обмежує загальності задачі. Для цього випадку автором побудовано об'ємний та початкові потенціали, за допомогою яких наявні неоднорідності можна перенести до крайових умов.

На основі стандартних просторів С.Л. Соболєва у підрозділі 2.2 введено однопараметричні шкали просторів соболєвського типу. Побудова функціональних просторів використовує перетворення Лапласа L за змінною часу t. Наведемо визначення деяких просторів, що є необхідними для формулювання основних результатів. Нехай $\kappa > 0$ і $C_\kappa = \{p \in C : \operatorname{Re} p > \kappa\}$. Введемо простори $\mathrm{H}_{L;m,k,\kappa}(\Omega)$ та $\mathrm{H}_{L;m,k,\kappa}(\Gamma)$ функцій $U(p) = u(x,p), x \in \Omega$, $F(p) = f(x,p), x \in \Gamma$ відповідно, які відображають C_κ у стандартні простори Соболєва $\mathrm{H}_m(\Omega), \mathrm{H}_m(\Gamma)$ та мають скінченні норми, що визначаються формулами

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{m,k,\kappa;\Omega} &= \sup_{\sigma>\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|p|)^{2k} \|u\|^2_{m,p;\Omega}\, d\tau, \\
\|u\|^2_{m,k,\kappa;\Gamma} &= \sup_{\sigma>\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|p|)^{2k} \|u\|^2_{m,p;\Gamma}\, d\tau,
\end{aligned} \qquad p = \sigma + i\tau.$$

Простори $\mathrm{H}_{r;m,k,\kappa}(G) = \{u(x,t) = L^{-1}u(x,p),\ u(x,p) \in \mathrm{H}_{L;m,k,\kappa}(\Omega) : \|u\|_{m,k,\kappa;G} = \|Lu\|_{m,k,\kappa;\Omega}\}$,
$\mathrm{H}_{r;m,k,\kappa}(\Sigma^+) = \{f(x,t) = L^{-1}f(x,p),\ f(x,p) \in \mathrm{H}_{L;m,k,\kappa}(\Gamma) : \|f\|_{m,k,\kappa;\Sigma^+} = \|Lf\|_{m,k,\kappa;\Gamma}\}$
визначені для $k, m \in \mathrm{R}$, $\kappa > 0$.

Позначимо через $\vec{\gamma}^\pm u(x,t) = \{u; \partial_n u\}$ оператори слідів, що при $m > 3/2, k \in \mathrm{R}$ неперервно відображають простори $\mathrm{H}_{r;m,k,\kappa}(G^\pm)$ на $\mathrm{H}_{r;m-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \times \mathrm{H}_{r;m-3/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$.

Розв'язком задач $\mathrm{I}^\pm$ назвемо функцію $u(x,t) \in \mathrm{H}_{r;2,0,\kappa}(G^\pm)$, таку, що $\vec{\gamma}^\pm u = \vec{f} = \{f_1, f_2\}$, та що задовольняє варіаційне рівняння

$$\int_{G^\pm} -\partial_t u \overline{\partial_t v} + D\left(\partial_1^2 u \overline{\partial_1^2 v} + \partial_2^2 u \overline{\partial_2^2 v} + \nu\left(\partial_1^2 u \overline{\partial_2^2 v} + \partial_2^2 u \overline{\partial_1^2 v}\right) + 2(1-\nu)\partial_1\partial_2 u \overline{\partial_1\partial_2 v}\right) dxdt = 0$$

для будь-якої фінітної функції $v(x,t)$, що нескінченно диференціюється, із носієм $\operatorname{supp} v \in \Omega^{\pm} \times \overline{\mathrm{R}_{+}}$.

Розв'язком задач $\mathrm{II}^{\pm}$ назвемо функцію $u(x,t) \in \mathrm{H}_{r;2,0,\kappa}(G^{\pm})$, що задовольняє варіаційне рівняння

$$\int\limits_{G^{\pm}} -\partial_t u \overline{\partial_t v} + D\Big(\partial_1^2 u \overline{\partial_1^2 v} + \partial_2^2 u \overline{\partial_2^2 v} + \nu\Big(\partial_1^2 u \overline{\partial_2^2 v} + \partial_2^2 u \overline{\partial_1^2 v}\Big) +$$

$$+ 2\big(1-\nu\big)\partial_1\partial_2 u \overline{\partial_1\partial_2 v}\Big)dxdt = \pm\int\limits_0^{\infty}\left\langle \vec{g}, \vec{\gamma}^{\pm} v\right\rangle_{0,\Gamma} dt$$

для будь-якої фінітної функції $v(x,t) \in C^{\infty}\left(\overline{G^{\pm}}\right)$ з компактним носієм, $\vec{g} = \{g_1, g_2\}$.

Перетворення Лапласа функції зсуву за змінною часу задовольняє задачі з параметром

$$\mathrm{I}_p^{\pm} \begin{cases} p^2 u(x,p) + D\Delta^2 u(x,p) = 0, & x \in \Omega^{\pm}, \\ u(x,p) = f_1(x,p), \ \ \partial_n u(x,p) = f_2(x,p), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

$$\mathrm{II}_p^{\pm} \begin{cases} p^2 u(x,p) + D\Delta^2 u(x,p) = 0, & x \in \Omega^{\pm}, \\ Qu(x,p) = g_1(x,p), \ \ Mu(x,p) = g_2(x,p), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Розв'язність цих систем доводиться стандартними операторними методами.

Фундаментальний розв'язок рівняння коливань тонкої пластини $\Phi(x,t)$ задовольняє рівняння

$$\partial_t^2 \Phi(x,t) + D\Delta^2 \Phi(x,t) = \delta(x,t); \qquad \Phi(x,t) = 0, \ \ t < 0,$$

отже явний вигляд фундаментального розв'язку: $\Phi(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{D}} \operatorname{si}\left(\dfrac{|x|^2}{4\sqrt{Dt}}\right)$, де $\operatorname{si}(z) = -\int\limits_z^{\infty} \dfrac{\sin\mu}{\mu} d\mu$ – інтегральний синус, $\theta(t)$ – характеристична функція півосі $\big(0,\infty\big)$, $\delta(x,t)$ — функція Дірака.

У **Розділі 3** "Нестаціонарні граничні рівняння в основних задачах" автором будуються динамічні аналоги пружних потенціалів простого та подвійного шарів, вивчаються їхні властивості. Розглядаються системи граничних псевдодиференціальних рівнянь, що виникають при застосуванні до задач динаміки тонких пружних пластин методів теорії потенціалів.

Динамічні аналоги операторів простого та подвійного шарів з двокомпонентними густинами $\vec{\alpha}(x,t)=\{\alpha_1(x,t),\alpha_2(x,t)\}$, $\vec{\beta}(x,t)=\{\beta_1(x,t),\beta_2(x,t)\}$ визначеними на $\Sigma=\Gamma\times\mathbf{R}$, введемо такими формулами:

$$\left(V\vec{\alpha}\right)(x,t)=\int_{\Sigma}\left\{\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\alpha_1(y,\tau)+\partial_{n,y}\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\alpha_2(y,\tau)\right\}ds_y d\tau,$$
$$\left(W\vec{\beta}\right)(x,t)=\int_{\Sigma}\left\{Q_y\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\beta_1(y,\tau)-M_y\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\beta_2(y,\tau)\right\}ds_y d\tau,$$

де $\partial_{n,y}, Q_y, M_y$ – операції нормальної похідної, узагальненої сили, що перерізає, та моменту, що згинає, відповідно, які діють за змінною y.

Очевидно, принаймні для гладких на Σ фінітних густин, що обидва потенціали задовольняють у $\mathrm{R}^2\setminus\Gamma$ однорідне рівняння коливань пластини. Якщо ж густини дорівнюють нулю при $t<0$, тоді обидва потенціали задовольняють нульові початкові умови. Потенціал простого шару та його перші похідні неперервні при переході точки через граничну поверхню. Формули стрибків для потенціалів простого та подвійного шарів мають вид

$$\left(W\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t)=\mp\frac{1}{2}\beta_1(x,t)+\left(W\vec{\beta}\right)^{0}(x,t),\quad \left(\partial_n W\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t)=\mp\frac{1}{2}\beta_2(x,t)+\left(\partial_n W\vec{\beta}\right)^{0}(x,t),$$
$$\left(QV\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t)=\pm\frac{1}{2}\alpha_1(x,t)+\left(QV\vec{\alpha}\right)^{0}(x,t),\quad \left(-MV\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t)=\pm\frac{1}{2}\alpha_2(x,t)+\left(-MV\vec{\alpha}\right)^{0}(x,t),$$

де верхній індекс "0" позначає пряме значення відповідного інтеграла, $(x,t)\in\Sigma$.

Розв'язки задач $\mathrm{I}^{\pm}$ та $\mathrm{II}^{\pm}$ подаються потенціалами простого та подвійного шарів $u(x,t)=\left(V\vec{\alpha}\right)(x,t)$ або $u(x,t)=\left(W\vec{\beta}\right)(x,t)$, $(x,t)\in G^{\pm}$, наприклад,

$$\mathrm{I}_W^{\pm}:\begin{cases}\left(W\vec{\alpha}\right)(x,t)=f_1(x,t),\\ \partial_{\mathrm{n}}\left(W\vec{\alpha}\right)(x,t)=f_2(x,t),\end{cases}(x,t)\in\Sigma^{+},\qquad \mathrm{II}_V^{\pm}:\begin{cases}\left(QV\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t)=g_1(x,t),\\ \left(-MV\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t)=g_2(x,t),\end{cases}(x,t)\in\Sigma^{+}.$$

Доведення розв'язності цих систем автор здійснює за допомогою переходу до перетворень Лапласа за змінною часу t, що приводить до стаціонарних систем з параметром $\vec{\gamma}^{\pm}V_p\vec{\alpha}=\vec{f}$.

<u>Теорема 1.</u> Для будь - яких елементів $\vec{f}\in \mathrm{H}_{r;3/2,k,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right)\times \mathrm{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right)$, $\vec{g}\in \mathrm{H}_{r;-3/2,k,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right)\times \mathrm{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right)$, $k\in\mathrm{R},\kappa>0$ системи граничних рівнянь $\mathrm{I}_W^{\pm}$, $\mathrm{II}_V^{\pm}$ мають єдиний розв'язок. Розв'язкові оператори цих систем здійснюють неперервні відображення просторів:

$$\mathrm{I}_W^{\pm}:\mathrm{H}_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma^+)\times\mathrm{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)\Rightarrow\mathrm{H}_{r;3/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+)\times\mathrm{H}_{r;1/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+),$$
$$\mathrm{II}_V^{\pm}:\mathrm{H}_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma^+)\times\mathrm{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)\Rightarrow\mathrm{H}_{r;-3/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+)\times\mathrm{H}_{r;-1/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+).$$

Таким чином, розв’язавши системи граничних рівнянь, ми однозначно знаходимо густини $\vec{\alpha}$ та $\vec{\beta}$ для кожної задачі та за ними будуємо потенціали, що є розв’язками вихідних задач.

<u>Теорема 2.</u> Для будь - яких елементів $\vec{f}\in\mathrm{H}_{r;3/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)\times\mathrm{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)$, $\vec{g}\in\mathrm{H}_{r;-3/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)\times\mathrm{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)$, $k\ge 1,\kappa>0$ потенціали $\left(V\vec{\alpha}\right)\left(x,t\right)$, $\left(W\vec{\beta}\right)\left(x,t\right)$ з густинами $\vec{\alpha}(x,t)$ та $\vec{\beta}(x,t)$, що є розв’язками систем граничних рівнянь, дають розв’язок $u(x,t)\in\mathrm{H}_{r;2,k-1,\kappa}(\mathrm{R}^2\times\mathrm{R}_+)$ задач $\mathrm{I}^{\pm}$, $\mathrm{II}^{\pm}$.

Розділ 4 "Контактні задачі, задачі зі змішаними крайовими умовами. Тонкі пружні пластини, що послаблені тріщинами" містить дослідження математичних моделей у вигляді різних граничних систем, що виникають у контактних задачах динаміки тонких пружних пластин, задачах зі змішаними крайовими умовами та в задачах для тонкої пружної необмеженої пластини з тріщиною. У межах задачі динаміки кусково-однорідних пластин розглядаються дві тонкі пластини з товщиною h_1 та h_2, та різними пружними характеристиками, що займають внутрішній $\Omega^+\times\left[-\frac{h_1}{2},\frac{h_1}{2}\right]$ та зовнішній $\Omega^-\times\left[-\frac{h_2}{2},\frac{h_2}{2}\right]$ об’єми. Функція $u(x,t)=\left\{u_1(x,t),u_2(x,t)\right\}$ є розв’язком змішаної задачі

$$\begin{aligned}
&\rho_1 h_1\partial_t^2 u_1(x,t)+\widehat{D}_1\Delta^2 u_1(x,t)=\widehat{q}_1(x,t),\ \ (x,t)\in G^+,\\
&\rho_2 h_2\partial_t^2 u_2(x,t)+\widehat{D}_2\Delta^2 u_2(x,t)=\widehat{q}_2(x,t),\ \ (x,t)\in G^-,\\
&u(x,0)=\partial_t u(x,0)=0,\ \ x\in\mathrm{R}^2,\\
&u_1(x,t)=u_2(x,t),\ \ \partial_n u_1(x,t)=\partial_n u_2(x,t),\\
&\widehat{Q}_1 u_1(x,t)=\widehat{Q}_2 u_2(x,t),\ \ \widehat{M}_1 u_1(x,t)=\widehat{M}_2 u_2(x,t),\ \ (x,t)\in\Sigma^+,
\end{aligned}$$

де $\widehat{Q}_i u_i=\rho_i h_i Q_i u_i$, $\widehat{M}_i u_i=\rho_i h_i M_i u_i$, $i=1,2$. Стосовно контактної задачі, нижнім індексом 1 позначено всі величини, що мають відношення до внутрішньої області, 2 – до зовнішньої.

Варіаційну постановку цієї задачі наведено в <u>підрозділі 4.1</u>. У ньому за допомогою об’ємного потенціалу неоднорідність рівняння коливань зводиться до неоднорідності крайових умов. Розв’язки задачі з однорідними рівняннями коливань подаються різними парами поверхневих потенціалів

$(\widehat{V}_i\vec{\alpha}_i)(x,t)=\dfrac{(V_i\vec{\alpha}_i)(x,t)}{\rho_i h_i}$, $(\widehat{W}_i\vec{\beta}_i)(x,t)=(W_i\vec{\beta}_i)(x,t)$, $i=1,2$, наприклад, якщо $u(x,t)=\left\{\left(\widehat{V}_1\vec{\alpha}_1\right)(x,t),\left(\widehat{V}_2\vec{\alpha}_2\right)(x,t)\right\}$, тоді система граничних рівнянь має вид

$$\begin{aligned}&\left(\widehat{V}_1\vec{\alpha}_1\right)(x,t)=\left(\widehat{V}_2\vec{\alpha}_2\right)(x,t)+f_1(x,t), \qquad \widehat{Q}_1\left(\widehat{V}_1\vec{\alpha}_1\right)^+(x,t)=\widehat{Q}_2\left(\widehat{V}_2\vec{\alpha}_2\right)^-(x,t)+g_1(x,t),\\ &\partial_n\left(\widehat{V}_1\vec{\alpha}_1\right)(x,t)=\partial_n\left(\widehat{V}_2\vec{\alpha}_2\right)(x,t)+f_2(x,t), \quad \widehat{M}_1\left(\widehat{V}_1\vec{\alpha}_1\right)^+(x,t)=\widehat{M}_2\left(\widehat{V}_2\vec{\alpha}_2\right)^-(x,t)-g_2(x,t),\\ &\qquad\qquad (x,t)\in\Sigma.\end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 3. Для будь - яких елементів $\vec{f}\in \mathrm{H}_{r;3/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)\times \mathrm{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)$, $\vec{g}\in \mathrm{H}_{r;-3/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)\times \mathrm{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)$ $k\in\mathrm{R},\kappa>0$ система граничних рівнянь (3) має єдиний розв'язок. Розв'язкові оператори системи обмежені в зазначених нижче просторах та мають щільні області значень

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_{r;3/2,k+1,\kappa}(\Sigma^+)\times \mathrm{H}_{r;1/2,k+1,\kappa}(\Sigma^+)\times \mathrm{H}_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma^+)\times \mathrm{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)\Rightarrow\\ &\qquad \mathrm{H}_{r;-3/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+)\times \mathrm{H}_{r;-1/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+)\times \mathrm{H}_{r;-3/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+)\times \mathrm{H}_{r;-1/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+).\end{aligned}$$

Аналогічні теореми одержані автором для інших зображень розв'язків контактної задачі.

У задачах $S^\pm$ зі змішаними крайовими умовами розглядається границя Γ, що поділена на дві зв'язні частини ненульової міри Γ_1 та Γ_2.Функція зсуву в областях $G^\pm$ задовольняє рівняння коливань (1), початкові умови (2) та граничні умови

$$\begin{cases}u(x,t)=f_1(x,t),\\ \partial_n u(x,t)=f_2(x,t),\end{cases} (x,t)\in\Sigma_1^+=\Gamma_1\times\mathrm{R}_+;\begin{cases}Qu(x,t)=g_1(x,t),\\ (-Mu)(x,t)=g_2(x,t),\end{cases} (x,t)\in\Sigma_2^+=\Gamma_2\times\mathrm{R}_+.$$

Розв'язки задач зі змішаними крайовими умовами можна подати, наприклад, сумою $(V\vec{\alpha})(x,t)+(W\vec{\beta})(x,t)$, де густини $\vec{\alpha}$ та $\vec{\beta}$ зосереджені відповідно на Σ_2^+ та Σ_1^+. Таке подання приводить до системи граничних рівнянь

$$S^\pm:\begin{cases}\pi_1\left(\left(\vec{V}\vec{\alpha}\right)(x,t)+\left(\vec{W}\vec{\beta}\right)^\pm(x,t)\right)=\vec{f}(x,t),\\ \pi_2\vec{N}^\pm\left(\left(\vec{V}\vec{\alpha}\right)(x,t)+\left(\vec{W}\vec{\beta}\right)^\pm(x,t)\right)=\vec{g}(x,t),\end{cases} \quad (x,t)\in\Sigma^+, \tag{4}$$

де $\pi_i, i=1,2$ є операторами звуження, що неперервно відображають пару просторів $\mathrm{H}_{\mathrm{r;m-}1/2,\mathrm{k},\kappa}(\Sigma^+)\times \mathrm{H}_{\mathrm{r;m-}3/2,\mathrm{k},\kappa}(\Sigma^+)$ на $\mathrm{H}_{\mathrm{r;m-}1/2,\mathrm{k},\kappa}(\Sigma_i^+)\times \mathrm{H}_{\mathrm{r;m-}3/2,\mathrm{k},\kappa}(\Sigma_i^+)$, $i=1,2$. За схемою, наведеною у попередніх розділах, на основі просторів $\mathrm{H}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma_i)$ та $\overset{o}{\mathrm{H}}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma_i)$ вводяться простори $\mathrm{H}_{\mathrm{r;m,k},\kappa}(\Sigma_i^+)$ та $\overset{o}{\mathrm{H}}_{\mathrm{r;m,k},\kappa}(\Sigma_i^+)$. Простір $\overset{o}{\mathrm{H}}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma_i)$, $m\in\mathrm{R}$ є підпростором $\mathrm{H}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma)$, що складається з елементів $u(x,p)\in\mathrm{H}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma)$, які дорівнюють нулю на $\Gamma/\overline{\Gamma_i}$, $i=1,2$, а простір $\mathrm{H}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma_i)$ є простором функцій, що задані на Γ_i, допускають подовження до елементів простору $\mathrm{H}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma)$ та мають скінченну норму $\|v\|_{m,p;\Gamma_i}=\inf\limits_{w\in\mathrm{H}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma):\pi_i v=w}\|w\|_{m,p;\Gamma}$.

<u>Теорема 4.</u> Для будь - яких елементів $\vec f\in \mathrm{H}_{r;3/2,k,\kappa}\left(\Sigma_1{}^+\right)\times \mathrm{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma_1{}^+\right)$, $\vec g\in \mathrm{H}_{r;-3/2,k,\kappa}\left(\Sigma_2{}^+\right)\times \mathrm{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma_2{}^+\right)$, $k\in\mathrm{R},\kappa>0$ оператори, що розв'язують системи граничних рівнянь $S^{\pm}$ (4), здійснюють неперервні відображення

$$\mathrm{H}_{r;\frac{3}{2},k,\kappa}(\Sigma_1^+)\times \mathrm{H}_{r;\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma_1^+)\times \mathrm{H}_{r;-\frac{3}{2},k+1,\kappa}(\Sigma_2^+)\times \mathrm{H}_{r;-\frac{1}{2},k+1,\kappa}(\Sigma_2^+)\Rightarrow$$
$$\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;-\frac{3}{2},k-3,\kappa}(\Sigma_2^+)\times \overset{o}{\mathrm{H}}_{r;-\frac{1}{2},k-3,\kappa}(\Sigma_2^+)\times \overset{o}{\mathrm{H}}_{r;\frac{3}{2},k-2,\kappa}(\Sigma_1^+)\times \overset{o}{\mathrm{H}}_{r;\frac{1}{2},k-2,\kappa}(\Sigma_1^+).$$

Розв'язок задачі зі змішаними крайовими умовами можна подати також у вигляді потенціалів простого або подвійного шарів з густинами, що визначені на всій границі. Теореми розв'язності отримані автором для всіх систем граничних рівнянь, які виникають у цих випадках.

У <u>підрозділі 4.5</u> автором вводяться необхідні функціональні простори, що відповідають задачі з тріщиною, наводиться формулювання задачі. Нехай Γ_0 є зв'язною частиною замкненої кривої Γ класу C^2. Будемо розрізняти боки кривої Γ_0, називаючи їх берегами розрізу та позначати індексами "+" або "–" граничні значення функції на берегах розрізу. У задачах з тріщиною виконуються початкові умови (2) в області $\breve\Omega=\mathrm{R}^2\setminus\overline{\Gamma_0}$, а в $\breve G=\breve\Omega\times\mathrm{R}_+$ функція зсуву задовольняє рівняння коливань (1). Розглядається два типи граничних умов:

$$T:\quad \begin{array}{ll} u^+(x,t)=f_1{}^+(x,t), & u^-(x,t)=f_1{}^-(x,t),\\ \partial_n u^+(x,t)=f_2{}^+(x,t), & \partial_n u^-(x,t)=f_2{}^-(x,t),\end{array}\quad (x,t)\in\Sigma_0^+;$$

$$TT:\quad \begin{array}{ll} (Qu)^+(x,t)=g_1{}^+(x,t), & (Qu)^-(x,t)=g_1{}^-(x,t),\\ (-Mu)^+(x,t)=g_2{}^+(x,t), & (-Mu)^-(x,t)=g_2{}^-(x,t),\end{array}\quad (x,t)\in\Sigma_0^+.$$

Простір для області з розрізом $\mathrm{H}_2(\breve{\Omega})=\left\{u=\{u_1,u_2\}:u_1\in\mathrm{H}_2(\Omega^+),u_2\in\mathrm{H}_2(\Omega^-),\pi_1\vec{\gamma}^+u_1=\pi_1\vec{\gamma}^-u_2\right\}$ має норму $\|u\|^2_{2;\Omega}=\|u_1\|^2_{2;\Omega^+}+\|u_2\|^2_{2;\Omega^-}$, де π_1 є оператором звуження з Γ на частину границі $\Gamma_1=\Gamma\setminus\overline{\Gamma_0}$. На розрізі Γ_0 вводяться простори $\overset{o}{\mathrm{H}}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma_0)$, $\mathrm{H}_{\mathrm{m,p}}(\Gamma_0)$, так само, як і відповідні простори на Γ_i у попередньому підрозділі. Розв'язки задач T та TT подаються сумою поверхневих потенціалів, що приводить до систем:

$$T:\begin{array}{l}\left(W\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t)+\left(V\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t)=f_1^{\pm}(x,t),\\ \left(\partial_nW\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t)+\left(\partial_nV\vec{\alpha}\right)(x,t)=f_2^{\pm}(x,t),\end{array}\quad (x,t)\in\Sigma_0^+,$$

$$TT:\begin{array}{l}\left(QW\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t)+\left(QV\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t)=g_1^{\pm}(x,t),\\ \left(-MW\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t)+\left(-MV\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t)=g_2^{\pm}(x,t),\end{array}\quad (x,t)\in\Sigma_0^+.$$

__**Теорема 5.**__ Системи граничних рівнянь T та TT однозначно розв'язні для будь-яких елементів

$$\left\{\vec{f}^+,\vec{f}^+-\vec{f}^-\right\}\in\mathrm{H}_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathrm{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)=\mathrm{H}_f,$$

$$\left\{\vec{g}^+-\vec{g}^-,\vec{g}^-\right\}\in\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathrm{H}_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathrm{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)=\mathrm{H}_g$$

при $k\in R,\kappa>0$. Розв'язкові оператори цих систем здійснюють неперервні відображення

$$T:\mathrm{H}_f\Rightarrow\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;-3/2,k-1,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;-1/2,k-1,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+),$$

$$TT:\quad\mathrm{H}_g\Rightarrow\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;3/2,k-1,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\overset{o}{\mathrm{H}}_{r;1/2,k-1,\kappa}(\Sigma_0^+).$$

Розділ 5 «Чисельний експеримент» містить одержання явного вигляду граничних інтегральних рівнянь $\mathrm{I}_W^{\pm}$, $\mathrm{II}_V^{\pm}$ для прямокутної пластини та їх чисельне розв'язання. Для точок $x=(x_1,x_2)$ серединної поверхні пластини отримано залежність зсуву від часу (коефіцієнт Пуассона $\nu=0{,}3$, густина матеріалу $\rho=7800$ кг/м^3, $E=2{,}1\cdot10^5$ МПа, розміри пластини 1x1x0,05(м)). Автором розглядалася пластина з жорстко закріпленими краями I_W^+ (рис.1) та з вільними краями II_V^+ (рис.2). На рисунках 3 та 4 зображено форму серединної площини пластини в різні моменти часу під рівномірним навантаженням у вигляді гладкого імпульсу $q(x,t)=\begin{cases} q_0 \sin^2 0{,}1\pi t, t<10 \\ 0 \qquad\quad ,t\geq 10 \end{cases}$.

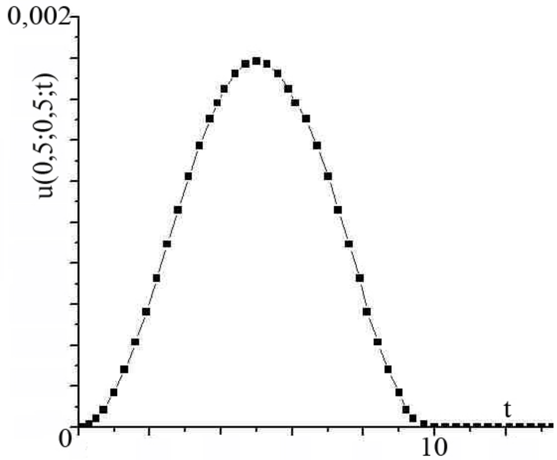

Рис. 1. Зсув при навантаженні $q(x,t)=\begin{cases} q_0 \sin^2 0{,}1\pi t, & t<10 \\ 0, & t\geq 10 \end{cases}$.

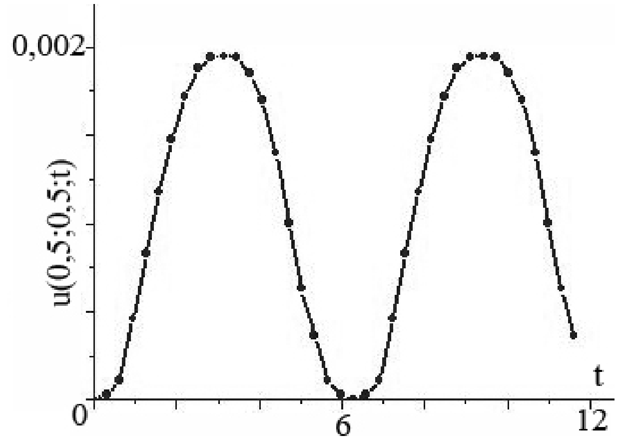

Рис. 2. Зсув при навантаженні $q(x,t)=q_0 \sin t$.

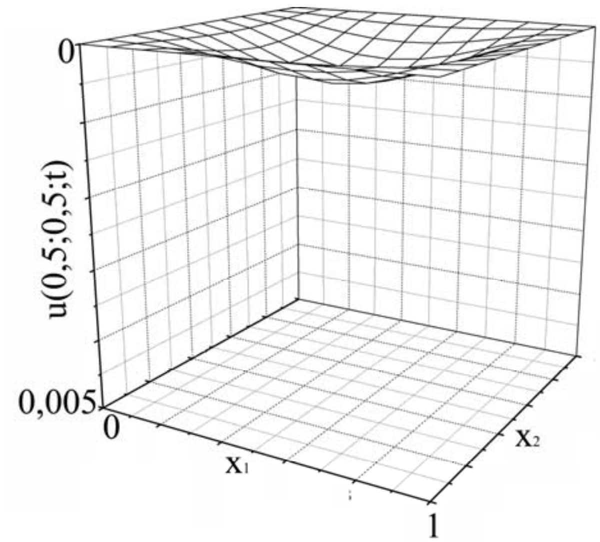

Рис. 3. Форма серединної площини пластини $t=2c$.

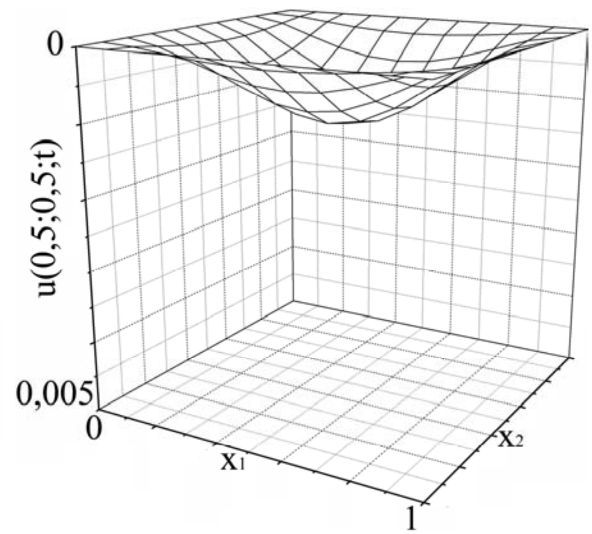

Рис. 4. Форма серединної площини пластини $t=4c$.

Для дослідження збіжності методу дискретних особливостей у задачі I_W^+ при навантаженні у вигляді гладкого імпульсу змінювалась сітка за просторовою змінною (рис.5).

Здійснено порівняння результатів для задачі I_W^+ при навантаженні у вигляді гладкого імпульсу. Розв’язок, одержаний автором за допомогою методу потенціалів, зображено лінією з крапками; розв’язок, одержаний у роботі* – суцільною лінією (рис.6). Відносна похибка обчислень становить $\delta=0{,}047$.

* Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек/ Сметанкина Н.В. - Харьков: Міськдрук, 2011.- 376 с.

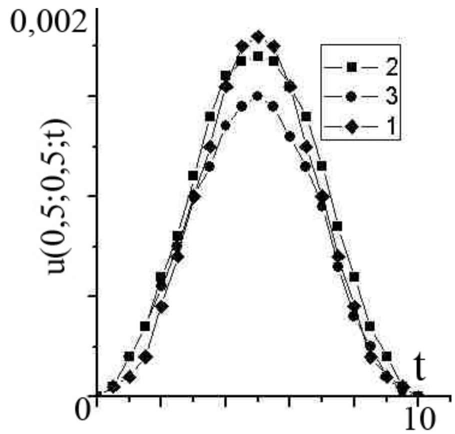

Рис. 5. Зсув у центрі пластини при різному кроці просторової змінної. $1.\Delta x = 1/15$, $2.\Delta x = 1/12$, $3.\Delta x = 1/8$.

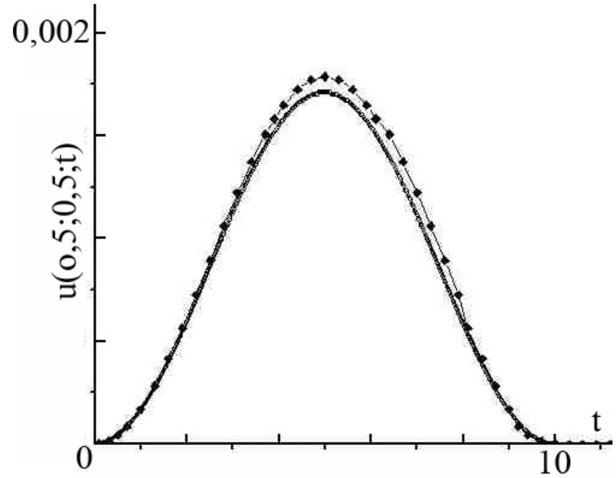

Рис. 6. Порівняння результатів для першої основної задачі.

ВИСНОВКИ

У дисертації наведено теоретичне узагальнення та нове вирішення наукової задачі, що з'являється при розв'язанні граничних рівнянь отриманих при застосуванні методів теорії потенціалу до задач динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа.

1. У роботі проведено аналіз існуючих математичних моделей процесів коливань тонких пружних пластин. З'ясовано, що нестаціонарний випадок суттєво відрізняється від стаціонарного. Це робить неможливим формальне перенесення результатів, що отримані у стаціонарних задачах. Відмінності, що пов'язані з появою змінної часу, впливають на збіжність та стійкість алгоритмів чисельного розв'язання граничних рівнянь. У динамічних задачах зведення вихідної задачі до граничних рівнянь за допомогою методів теорії потенціалу не було обґрунтовано. Частина вищевказаних проблем вирішена у даній дисертаційній роботі.

2. Побудовано нову математичну модель динаміки тонких пружних пластин, яка ґрунтується на зображенні розв'язків поверхневими потенціалами двох типів. Теорія поверхневих потенціалів дозволяє визначати невідомі компоненти напружено-деформованого стану у будь-якій внутрішній точці як деяку функцію від навантаження та граничних умов задачі. По суті, вдається знизити на одиницю вимірність співвідношень задачі, яка розглядається, що дозволяє при обчислювальному розрахунку виконувати дискретизацію не всієї області, а тільки її межі. Зведення задач математичної теорії пружності до інтегральних або інтегродиференціальних рівнянь за допомогою методів теорії потенціалу забезпечує можливість вивчення крайових задач в найбільш загальних постановках. Вдалось застосовувати єдину схему дослідження для однозв'язних та багатозв'язних областей, при цьому збережено загальність дослідження усіх сформульованих задач.

3. Вперше доведена однозначна розв'язність чотирьох типів систем граничних рівнянь, що виникають при зображенні розв'язків двох основних

задач динаміки тонких пружних пластин потенціалами простого та подвійного шарів. Показано, що поверхневі потенціали з густинами, що є розв'язками вказаних систем граничних рівнянь, задовольняють відповідним задачам з крайовими умовами першого та другого типу.

4. Побудовані математичні моделі динаміки кусково-однорідної пластини та пластин зі змішаними крайовими умовами. Вперше доведена однозначна розв'язність систем граничних рівнянь, які виникають при зображенні розв'язку відповідних задач різними комбінаціями поверхневих потенціалів простого та подвійного шарів. Показано, що такі комбінації з густинами, що задовольняють відповідні системи псевдодиференціальних граничних рівнянь, є розв'язками змішаної та контактної задач динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа.

5. Побудована математична модель динаміки тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами, та вперше доведені теореми про однозначну розв'язність відповідних систем нестаціонарних граничних рівнянь. Ці системи отримані шляхом зображення розв'язків початково-крайових задач сумою потенціалів простого та подвійного шарів. Показано, що сума вказаних поверхневих потенціалів із знайденими густинами, задовольняє початково-крайову задачу тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами.

6. Вперше на основі теоретичних результатів, одержаних у дисертації, побудовано збіжний метод наближеного розв'язання нестаціонарних систем граничних інтегральних рівнянь, а тому й вихідних задач. Проведено чисельний експеримент. Здійснено порівняння з результатами інших авторів, що свідчить про достовірність методу.

7. Отримані результати є подальшим кроком у розвитку методу потенціалів для нестаціонарних крайових задач та можуть бути використанні при наближеному розв'язуванні різноманітних систем нестаціонарних граничних рівнянь. Доведені теореми можуть бути використані для подальшої розробки загальної теорії початково-крайових задач.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Chudinovich I.Yu. Boundary Equations in basic Dynanic Problems for Thin Elastic Plates / Chudinovich I.Yu., Gassan Yu.S. // Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика і механіка".–2000. –№ 475. –С.250-258.
2. Гассан Ю.С. Граничні рівняння в задачах динаміки тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами / Гассан Ю.С. // Вісник Київського університету, серія "Фізико-математичні науки".–2000. –Вип.3. –С.105–114.
3. Гассан Ю.С. Граничные уравнения в задачах динамики кусочно-однородных пластин / Гассан Ю.С. // Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика і механіка".–2002.–№ 542. –С.19–28.

4. Гассан Ю.С. Граничные уравнения в задачах динамики тонких упругих пластин со смешанными краевыми условиями / Гассан Ю.С. // Математическая физика, анализ, геометрия. –2002. –Т.9. –№3. –С.436-445.
5. Shuvalova Yu.S. Method of Integral Equations for Structure in the Form of Thin Elastic Plates / Shuvalova Yu.S., Strelnikova E.A. // УСиМ. –2011. – №1. – С.57–62.
6. Шувалова Ю.С. Численное исследование сходимости метода дискретных особенностей в задачах динамики тонких упругих пластин / Шувалова Ю.С. // Вісник Харківського національного університету. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». –2009. –Вип. 11, №847.– С.345-349.
7. Гассан Ю.С. Граничные уравнения в двух основных задачах динамики тонких упругих пластин / Гассан Ю.С. // Труды VIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». –Харьков-Коктебель,1999. –С.20-23.
8. Гассан Ю.С. Граничные уравнения в задачах динамики кусочно-однородных пластин / Гассан Ю.С., Чудинович И.Ю. // Матеріали VIII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука. (11-14 травня 2000 р. Київ). –Київ, 2000. –С.57.
9. Гассан Ю.С. Граничные уравнения в задачах динамики тонких упругих пластин со смешанными краевыми условиями / Гассан Ю.С. //Международная конференция "Теория функций и математическая физика", посвященная 100-летию Н.И. Ахиезера. Тезисы докладов. –Харьков, 2001. –С.31-32.
10. Гассан Ю.С. Граничні рівняння в задачах динаміки тонких пружних пластин / Гассан Ю.С. // Дев'ята всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". Тези доповідей. –Львів, 2002. –С.28–29.
11. Shuvalova Yu.S. Potential Method in Dynamic Problems for Thin Elastic Plates / Shuvalova Yu.S. // First Karazin Scientific Readings dedicated to the bicentenary of the Karazin Kharkov National University. Mathematical Symposium: Book of abstract. –Kharkov, 2004. – P.40.
12. Шувалова Ю.С. Сведение второй основной задачи динамики тонких упругих пластин к системе граничных интегральных уравнений / Шувалова Ю.С. // Труды XIII Международного симпозиума.-Харьков-Херсон «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики».– Харьков-Херсон, 2007. – С. 335-338.
13. Шувалова Ю.С. Численное исследование сходимости метода дискретных особенностей в задачах динамики тонких упругих пластин / Шувалова Ю.С. // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». –Харьков-Херсон, 2009. –Ч.2. – С.450–454.
14. Шувалова Ю.С. Получение системы граничных интегральных уравнений для задачи динамики тонких упругих пластин, ослабленных трещинами /

Шувалова Ю.С. // Труды XVII международной научно-технической конференции «Прикладные задачи математики и механики». – Севастополь, 2009. – С.47–51.
15. Шувалова Ю.С. Метод интегральных уравнений для структур в форме тонких упругих пластин с отверстием / Шувалова Ю.С. // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011). –Харьков-Херсон, 2011. – С.419-422.
16. Шувалова Ю.С. Моделирование динамики тонких упругих пластин методами граничных интегральных уравнений / Шувалова Ю.С. // Вестник национального технического университета «ХПИ». –2008. –№47. –С.173–178.
17. Шувалова Ю.С. Моделирование динамики тонкой упругой пластины с квадратным отверстием методами граничных интегральных уравнений / Шувалова Ю.С. //Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – №2(35). – С.475-480.

АНОТАЦІЯ

Шувалова Ю.С. Розв'язність та чисельна реалізація систем граничних інтегральних рівнянь у задачах коливань тонких пружних пластин. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 ─ математичне моделювання та обчислювальні методи. ─ Харківський національний університет радіоелектроніки, м.Харків, 2012 р.

У роботі побудовані математичні моделі для декількох типів задач динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа, а саме для першої та другої основних задач динаміки тонких пружних пластин, контактної задачі, задачі зі змішаними крайовими умовами та задачі динаміки тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами. Підхід до розв'язання всіх цих задач ґрунтується на зображенні їхніх розв'язків поверхневими потенціалами простого та подвійного шарів, що будуються на основі фундаментального розв'язку рівняння коливань тонкої пружної пластини. Використання методів теорії потенціалу зводить вихідні задачі до різноманітних систем граничних рівнянь відносно невідомих густин потенціалів. Дослідження розв'язності отриманих систем граничних рівнянь проводиться за допомогою переходу до перетворень Лапласа за змінною часу у цих системах, а також у вихідних задачах. Таким чином, використовуючи результати про розв'язність еліптичних задач з параметром, а також вивчивши властивості відповідних операторів Пуанкаре-Стєклова, повертаючись у простір оригіналів, вдається довести теореми про однозначну розв'язність вихідних систем граничних рівнянь у однопараметричних шкалах просторів соболєвського типу. Системи граничних інтегральних рівнянь чисельно розв'язуються з використанням кусково-сталої апроксимації.

Ключові слова: математична модель, тонкі пружні пластини, нестаціонарні системи граничних рівнянь, фундаментальний розв’язок, запізнілі пружні потенціали, метод дискретних особливостей.

АННОТАЦИЯ

Шувалова Ю.С. Разрешимость и численная реализация систем граничных интегральных уравнений в задачах колебаний тонких упругих пластин. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-технических наук по специальности 01.05.02 ─ математическое моделирование и вычислительные методы. ─ Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков, 2012 р.

В работе построены математические модели для нескольких типов задач динамики тонких упругих пластин в рамках модели Кирхгофа, а именно для первой и второй основных задач динамики тонких упругих пластин, контактной задачи, задачи со смешанными краевыми условиями и задачи динамики тонких упругих пластин, ослабленных трещинами. Подход к решению всех этих задач основан на представлении их решений поверхностными потенциалами простого и двойного слоя, которые построены на основе фундаментального решения уравнения колебаний тонкой упругой пластины. Использование методов теории потенциала приводит исходные задачи к разнообразным системам граничных уравнений относительно неизвестных плотностей потенциалов. Доказательство разрешимости полученных систем граничных уравнений проводится с помощью перехода к преобразованиям Лапласа по переменной времени в этих системах, а также в исходных задачах. Таким образом, используя результаты про разрешимость эллиптических задач с параметром, а также изучив свойства соответствующих граничных операторов Пуанкаре-Стеклова, возвращаясь в пространство оригиналов, удаётся доказать теоремы про однозначную разрешимость исходных систем граничных уравнений в однопараметрических шкалах пространств соболевского типа. Системы граничных интегральных уравнений численно решаются с использованием кусочно-постоянной аппроксимации.

Ключевые слова: математическая модель, тонкие упругие пластины, нестационарные системы граничных уравнений, фундаментальное решение, запаздывающие упругие потенциалы, метод дискретных особенностей.

ABSTRACT

Shuvalova Yu.S. Solvability and Numerical Implementation of Boundary Integral Equations in Vibration Problems for Thin Elastic Plates.- Manuscript.

The thesis for the scientific degree of the Candidate of Physics and Mathematics Science by specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. Kharkov National University of Radio Electronics, Kharkov, 2012.

The thesis deals with mathematical models for different types of dynamic problems for thin elastic plates in Kirchhoff models. Namely, the first and second basic initial-boundary-value problems, the contact problem, problems with mixed boundary conditions and problems for thin elastic cracked plate are under considerations. Its purpose is to prove the results about unique solvability of boundary equation systems appearing at solution of corresponding mixed initial-boundary-value problems by the potential theory methods. The potential theory allows finding the unknown quantities on domain boundary without any calculations in the whole domain and also makes possible to study uniformity internal and external problems.

It is well known fact that the potential theory methods play an impotent role both in studying static and quasistatic problems of elasticity and in solving them numerically. However, their advantages are presented in a good light in the elliptic case. They cannot be directly used in the case of hyperbolic (essentially nonstationary) equations, because the representations of solutions of corresponding problems by the surface potentials lead to the pseudodifferential equations with the time retarded argument. In this case the corresponding boundary operators are not normally solvable and, hence, it makes impossible to use so powerful instrument as Fredholm alternative.

In the thesis the solutions of both basic dynamic problems for thin elastic plate are represented by the surface potentials of single and double layers. These surface potentials are built on the base of fundamental solution of equation of thin elastic plate vibrations. The representation by surface potentials leads to boundary system with respect to unknown densities of potential. To prove the unique solvability of these boundary systems, the Laplace transformation for time variable is used in the boundary systems and also in corresponding initial problems. The results about solvability of elliptic problems with parameter are used and the boundary operator properties arising in stationary systems with parameter due to transformation are investigated. Application operators of type Poincare-Steklov for solving the considered problems made it possible to prove the bijectivity of boundary operators in some functional spaces. The studying dependence of the boundary operators on the Laplace transformation parameter, bijectivity and holomorphic ones in right-hand half-plane of the complex plane, after returning to the original space allowed to prove the theorems about solvability of the initial boundary equation systems in one-parameter scale of functional spaces of Sobolev type.

The solution of the dynamic problem for non-homogeneous elastic plate is represented by different combinations of elastic surface potentials. And the theorem about solvability of this problem in one-parameter scale of functional spaces of Sobolev type is proved. Also, the analogous theorems are proved for elastic plate with mixed boundary conditions. In this case the solutions are represented by sums of single and double layer potentials with densities concentrated on the different parts of domain boundary, also the solution representation by the surface potentials by itself is considered. The proving method is based on scheme used in previous section.

Analogous results are obtained for the dynamic problems for thin elastic cracked plate. The solutions of these problems are represented by sums of single and double layer potentials. The boundary equation systems are obtained in these problems accounting jump formulas.

Results obtained in the dissertation create the base for constructing advanced convergent numerical methods. The system of boundary integral equations are solved numerically using piecewise constant approximation.

Key words: mathematical model, thin elastic plate, non-stationary system of boundary equations, fundamental solution, elastic retarded potentials, discrete singularity method.

Підписано до друку 1.03.2012 р. Формат 60х90 1/16.
Папір офсетний. Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman.
Умовн. друк. акр. 0,9. Наклад 100 прим. Зам. № 030372

Надруковано у СПДФО Ізрайлев Є.М.
Свідоцтво № 24800170000040432 від 21.03.2001р.
61002, м.Харків, вул. Фрунзе, 16