ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА

Думіна Ольга Олександрівна

УДК 517.968+517.956

# МЕТОДИ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛІВ У ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ТЕРМОПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ

01.01.03 - математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків - 2004

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Чудінович Ігор Юрійович,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
професор кафедри математичної фізики та обчислювальної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Котляров Володимир Петрович,
Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б.І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
завідувач відділом математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Колосов Анатолій Іванович,
Харківська державна академія міського господарства Міністерства освіти і науки України,
завідувач кафедри вищої математики.

Провідна установа: Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України,
відділ математичної фізики (м. Львів).

Захист відбудеться “____” травня 2004 р. о ______ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К64.051.11 Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61077, м. Харків, пл. Свободи 4, ауд. 6-48.

З дисертацією можна ознайомитись у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою:
61077, м. Харків, пл. Свободи 4.

Автореферат розісланий “_____” квітня 2004 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Скорик В.О.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертація присвячена вивченню розв'язності систем нестаціонарних граничних рівнянь у динамічних задачах зв'язаної термопружності, які виникають при використанні методів теорії потенціалів для розв'язання основних задач динаміки анізотропних термопружних середовищ.

Термопружність описує широке коло явищ, вона є узагальненням класичної теорії пружності та теорії теплопровідності. У теоремах і методах термопружності містяться як окремі випадки теореми і методи теорії теплопровідності та класичної теорії пружності. Розв'язки, що отримані в рамках термопружності, якісно відрізняються від розв'язків класичної теорії пружності або теплопровідності. Наприклад, пружні хвилі в рамках термопружної трактовки згасають та розсіюються, тоді як в рамках динамічної пружності одержуються тільки незгасаючі хвилі. Основне значення термопружність набуває, коли головною метою стає дослідження пружної дисипації.

Дослідження нестаціонарних задач зв'язаної термопружності пов'язано з істотними математичними труднощами, які настільки великі, що досі не знайдено в замкненій формі жодного розв'язку. Тому на перший план виходять чисельні методи. Одним з головних методів чисельного розв'язання крайових задач як статики, так і динаміки термопружних тіл є зведення вихідної задачі до граничних рівнянь за допомогою методів теорії потенціалів. Однак, на відміну від задач статики, у випадку нестаціонарних задач термопружності досі відсутнє не тільки обґрунтування збіжності наближених розв'язків до точних, але й доведення розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь. Між тим, граничні рівняння в нестаціонарних випадках цілою низкою властивостей істотно відрізняються від аналогічних стаціонарних, причому ці властивості впливають на збіжність та стійкість алгоритмів їх чисельного розв'язання. Поява часу як незалежної змінної приводить до граничних операторів, які не є нормально розв'язними, тому що їх області значень незамкнені в деяких природних функціональних просторах. Як наслідок, зникає можливість використання такого могутнього інструменту як альтернатива Фредгольма.

**Актуальність теми.** Математична модель, що описує динаміку взаємодії механічного та теплового полів в пружних матеріалах, має значну практичну цінність і використовується в багатьох застосуваннях, таких як механіка, енергетика, розробка електронних приладів тощо. Основою для побудови наближених розв'язків задач статики або динаміки термопружних середовищ можуть служити різні варіанти методів сіток та скінченних елементів. Разом з цим існує альтернативна методика побудови наближених розв'язків, яка пов'язана з використанням теорії потенціалів. Ця методика має щонайменше дві істотні переваги порівняно з методами типу сіточних та скінченних елементів. По-перше, використання теорії потенціалів дозволяє точно задовольнити рівняння рівноваги або коливань тіла. По-друге, задача зводиться до розв'язання систем граничних інтегральних рівнянь на граничній поверхні, що знижує на одиницю геометричну вимірність задачі та дає змогу єдиним чином розглядати внутрішні та зовнішні задачі.

Схема методу граничних рівнянь носить загальний характер і може бути застосована до будь-яких лінійних диференціальних рівнянь, фундаментальні розв'язки яких відомі. Проте донедавна в більшості випадків цей метод застосовувався для аналізу стаціонарних та квазістаціонарних явищ, тому що при вивченні істотно нестаціонарних процесів виникають додаткові труднощі, пов'язані з появою часу як незалежної змінної.

На теперішній час побудову теорії потенціалів для загальних еліптичних крайових задач та параболічних початково-крайових задач можна вважати практично здійсненою. Однак методи, що добре зарекомендували себе в еліптичному випадку, не можуть бути безпосередньо застосовані в гіперболічних (істотно нестаціонарних) задачах, а також у задачах теорії термопружності, які не підпадають під стандартну класифікацію. Тому виникає потреба в подальшому розвитку методів теорії потенціалів.

Використаний у дисертації підхід до розв'язування задач динаміки термопружних середовищ ґрунтується на поданні розв'язків поставлених задач у вигляді поверхневих запізнюючихся потенціалів простого та подвійного шарів, побудованих на основі матриці фундаментальних розв'язків системи рівнянь термопружності. Розвиток цього підходу в дисертації дозволив довести однозначну розв'язність отриманих систем граничних рівнянь в однопараметричних просторах соболєвського типу. Таким чином, тема та зміст дисертації є актуальними.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Проведена робота виконана на кафедрі математичної фізики та обчислювальної математики механіко-математичного факультету Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна і нерозривно пов’язана з науковим напрямком кафедри «Якісна теорія еволюційних рівнянь з частинними похідними”. Дисертація є складовою частиною держбюджетної НДР "Якісні методи дослідження початково-крайових задач математичної фізики" (номер держреєстрації 0100U003363), в якій автор брав участь в якості виконавця.

**Мета і задачі дослідження.** *Об'єктом дослідження* в даній роботі є термопружність. *Предметом дослідження* є нестаціонарні граничні рівняння в задачах динаміки термопружних середовищ. *Метою* даної дисертаційної роботи є доведення однозначної розв'язності систем граничних псевдодиференціальних рівнянь, які виникають при поданні розв'язків вихідних задач термопружності різними комбінаціями запізнюючихся поверхневих потенціалів простого та подвійного шарів.

*Методи дослідження.* Для формулювання коректної постановки початково-крайових задач використані варіаційні методи. Нестаціонарні граничні рівняння, які розглядаються в роботі, отримані за допомогою методів теорії потенціалів. Для вивчення одержаних систем псевдодиференціальних рівнянь використаний метод переходу до перетворень Лапласа за змінною часу у вихідних початково-крайових задачах та відповідних системах граничних рівнянь. Дослідження властивостей граничних операторів, породжених динамічними аналогами термопружних потенціалів простого та подвійного шарів проводиться за допомогою методів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. При доведенні голоморфності відображень, що здійснюються граничними операторами, відносно параметру перетворення Лапласа застосовуються методи теорії функцій комплексної змінної.

Для досягнення мети даної дисертаційної роботи необхідно розв'язати такі *задачі*:

- ✓ доведення однозначної розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь на замкнених поверхнях;
- ✓ доведення однозначної розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь у задачах зі змішаними крайовими умовами;
- ✓ доведення однозначної розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь на многовидах з краєм;
- ✓ доведення однозначної розв'язності нестаціонарних граничних рівнянь у динамічній контактній задачі.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Впродовж виконання роботи одержані такі нові результати:

1. Вперше доведена однозначна розв'язність чотирьох типів систем граничних рівнянь, що виникають при поданні розв'язків двох основних задач динаміки термопружних середовищ термопружними потенціалами простого та подвійного шарів. Показано, що поверхневі потенціали з густинами, які є розв'язками вказаних систем граничних рівнянь, задовольняють відповідні змішані задачі для систем рівнянь теорії термопружності з крайовими умовами першого або другого роду.
2. Вперше доведені теореми про однозначну розв'язність в однопараметричних шкалах просторів соболєвського типу систем парних граничних рівнянь, які виникають внаслідок подання поверхневими запізнілими потенціалами розв'язків задач динаміки термопружних середовищ зі змішаними крайовими умовами. Показано, що поверхневі потенціали з густинами, що є розв'язками цих систем парних граничних рівнянь, задовольняють відповідні змішані задачі термопружності.
3. Вперше доведена однозначна розв'язність систем граничних рівнянь у задачах нестаціонарної дифракції термопружних хвиль на відокремленому розрізі, які отримані шляхом подання розв'язку відповідної початково-крайової задачі сумою термопружних потенціалів простого та подвійного шарів. Показано, що сума вказаних потенціалів із знайденими густинами задовольняє змішану задачу динаміки термопружних середовищ, що містять розрізи.
4. Вперше доведені теореми про однозначну розв'язність систем нестаціонарних граничних рівнянь, які виникають в контактній задачі динаміки термопружних середовищ при поданні розв'язків цієї задачі різними комбінаціями термопружних потенціалів простого та подвійного шарів. Показано, що такі комбінації потенціалів з густинами, що є розв'язками відповідних систем псевдодиференціальних граничних рівнянь, задовольняють змішану задачу для системи рівнянь термопружності з контактними крайовими умовами.

**Практичне значення одержаних результатів.** У дисертації проведені фундаментальні теоретичні дослідження, але результати, одержані в роботі, можуть служити основою для побудови збіжних чисельних методів розв'язання розглянутих систем граничних рівнянь для основних типів початково-крайових задач, а отже і вихідних задач термопружності, що актуально в галузях механіки, енергетики, напівпровідниковій техніці тощо.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати дисертації одержані автором самостійно.

**Апробація результатів дисертації.** Викладені в дисертації результати були подані і обговорені на міжнародних конференціях та симпозіумах: VIII Міжнародний симпозіум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (1999 р., Харків – Крим), VIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука (2000 р., Київ), X Міжнародний симпозіум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (2001 р., Херсон), Міжнародна конференція "Теория функций и математическая физика", присвячена 100-річчю Н.І. Ахієзера (2001 р., Харків), IX всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (2002 р., Львів). Крім того, результати досліджень доповідались на науково-практичних конференціях Української державної академії залізничного транспорту.

**Публікації.** Основні наукові результати дисертації опубліковані в 4 статтях у фахових наукових журналах, що входять до переліку ВАК України, додатково висвітлені в 1 статті, 5 доповідях на міжнародних та всеукраїнських конференціях та симпозіумах.

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертація складається з вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації – 125 стор., з них основного тексту – 111 стор. Список використаних джерел на 14 стор. нараховує 114 найменувань.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **Вступі** викладається актуальність і обґрунтовується необхідність виконання роботи, її зв'язок з науковими програмами, визначена мета досліджень, сформульовані необхідні для досягнення поставленої мети задачі та методи їх розв'язання, наведено нові результати та галузі їхнього можливого застосування.

В **Розділі 1** проведено огляд наукової літератури за темою досліджень, визначені основні проблеми теорії термопружності та результати, що вже отримані в цій галузі математичної фізики. Розглянуті існуючі методи дослідження різних аспектів задач теорії термопружності, такі як варіаційні та функціональні методи, методи інтегральних перетворень, узагальнені ряди Фур'є, методи теорії потенціалів та граничних інтегральних рівнянь, основні наближені та чисельні методи, та обрано напрямок дослідження.

В **Розділі 2** "Теореми існування розв'язків нестаціонарних граничних рівнянь на замкнених поверхнях" вивченні нестаціонарні граничні рівняння, що виникають при розв'язанні двох основних задач динаміки термопружних середовищ за допомогою поверхневих потенціалів. Будується математичний апарат, що полягає в основу дослідження поставлених у дисертації задач: визначаються однопараметричні шкали функціональних просторів соболєвського типу, досліджуються аналоги операторів Пуанкаре-Стєклова, будуються термопружні потенціали простого та подвійного шарів.

Введемо позначення. Нехай $\Gamma$ – замкнена поверхня класу $C^2$, яка поділяє простір $\mathbf{R}^3$ на області $\Omega^+$ (внутрішню) та $\Omega^-$ (зовнішню). Зміщення точки $x=(x_1,x_2,x_3)$ в момент часу $t$ позначимо через $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$. Через $\theta(x,t)$ позначимо різницю між поточною та початковою $T_0>0$ температурами середовища. Нехай область $\Omega^+$ або $\Omega^-$ зайнята однорідним пружним середовищем з коефіцієнтами пружності $a_{ijkl}$, $i,j,k,l=1,2,3$. Через $\beta_{ij}$, $i,j=1,2,3$ позначимо коефіцієнти симетричного тензору теплових напружень. За відсутністю об'ємних сил та зовнішніх джерел тепла поле зміщень та температури $U=(u,\theta)$ в області $G^+=\Omega^+\times\mathbf{R}_+$ або $G^-=\Omega^-\times\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$ задовольняє однорідній системі диференціальних рівнянь термопружності

$$\begin{cases}\rho\partial_t^2 u_i-\partial_j\left(a_{ijkl}\partial_l u_k\right)+\partial_j\left(\beta_{ij}\theta\right)=0, & i=1,2,3,\\ c_\varepsilon\partial_t\theta-\partial_k\left(\lambda_{kj}\partial_j\theta\right)+\beta_{kj}T_0\partial_j\partial_t u_k=0,\end{cases}\quad (x,t)\in G^\pm, \tag{1}$$

де $\rho$ – постійна густина середовища, $c_\varepsilon>0$ – постійна питома теплоємність середовища, $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^3$ – компоненти позитивно визначеного симетричного тензору, $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,2,3$; однорідним початковим умовам:

$$u(x,0)=\partial_t u(x,0)=\theta(x,0)=0,\quad x\in\Omega^\pm, \tag{2}$$

та крайовим умовам типу Діріхлє

$$U^\pm(x,t)=F(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma^+=S\times\mathbf{R}_+ \tag{3}$$

для першої задачі $\mathrm{I}^\pm$ або типу Неймана

$$(TU)^\pm(x,t)=G(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma^+, \tag{4}$$

де $(TU)_i=\begin{cases}\left(a_{ijkl}\partial_k u_l-\beta_{ij}\theta\right)n_j(x), & i=1,2,3;\\ \left(\lambda_{lj}\partial_j\theta\right)n_l(x), & i=4,\end{cases}$ для другої задачі $\mathrm{II}^\pm$. Тут і далі використовується правило сумування за латинськими індексами від 1 до 3, що повторюються, верхні індекси "+" та "–" позначають граничні значення відповідних полів при $(x,t)\to\Sigma^+$ з $G^+$ та $G^-$ відповідно, $F(x,t)$, $G(x,t)$ – задані на $\Sigma^+$ чотирикомпонентні векторні поля. Узагальнені постановки задач подаються після введення необхідних функціональних просторів.

Функціональні простори будуються на основі стандартних просторів Соболєва за допомогою перетворення Лапласа за часом. Приведемо позначення деяких функціональних просторів, необхідних при формулюванні основних результатів роботи. Для будь-яких $p\in\mathbf{C}$ введемо простори $H_{1,p}(\mathbf{R}^3)$, що збігаються як множини зі стандартними просторами Соболєва $H_1(\mathbf{R}^3)$, з нормами їх елементів, визначеними формулами

$$\|u\|_{1,p}^2 = \int_{\mathbf{R}^3} \left(1+|\xi|^2+|p|^2\right)|\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

де $\tilde{u}(\xi)$ — узагальнене перетворення Фур'є $u(x)$. Простори $H_1(\Omega^\pm)$ і $H_{1,p}(\Omega^\pm)$ складаються із звужень на $\Omega^\pm$ елементів просторів $H_1(\mathbf{R}^3)$ і $H_{1,p}(\mathbf{R}^3)$ відповідно, з нормами

$$\|u\|_{1,\Omega^\pm} = \inf_{v\in H_1(\mathbf{R}^3), v|_{\Omega^\pm}=u} \|v\|_1, \quad \|u\|_{1,p;\Omega^\pm} = \inf_{v\in H_{1,p}(\mathbf{R}^3), v|_{\Omega^\pm}=u} \|v\|_{1,p},$$

де $\|v\|_1$ — норма у просторі $H_1(\mathbf{R}^3)$. Введемо простори $\mathbf{H}_{1,p}(\Omega^\pm) = H_{1,p}(\Omega^\pm)\times H_1(\Omega^\pm)$, елементами яких є чотирьохкомпонентні вектор-функції $U=(u,\theta)$, перші три компоненти яких $u$ належать просторам $H_{1,p}(\Omega^\pm)$, а четверта компонента $\theta$ — просторам $H_1(\Omega^\pm)$. Норми елементів цих просторів вводяться рівністю $\|U\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 = \|u\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 + \|\theta\|_{1,\Omega^\pm}^2$. Сліди на $S$ елементів $U\in\mathbf{H}_{1,p}(\Omega^\pm)$ утворюють простори $\mathbf{H}_{1/2,p}(S)$ з нормами

$$\|u\|_{1/2,p;S} = \inf_{v\in\mathbf{H}_{1,p}(\Omega^\pm), \gamma^\pm v=u} \|v\|_{1,p;\Omega^\pm},$$

де $\gamma^\pm$ – оператори слідів, що неперервно рівномірно по $p\in\mathbf{C}$ відображають $\mathbf{H}_{1,p}(\Omega^\pm)$ на $\mathbf{H}_{1/2,p}(S)$. Позначимо через $\mathbf{H}_{-1/2,p}(S)$ подвійний до $\mathbf{H}_{1/2,p}(S)$ простір відносно скалярного добутку в $\left[L^2(S)\right]^4$.

Нарешті, простори $\mathbf{H}_{r;1,k,\kappa}(G^\pm)$ і $\mathbf{H}_{r;m,k,\kappa}(\Sigma^+)$, $m=\pm 1/2$, $k\in\mathbf{R}$, $\kappa>0$ складаються з вектор-функцій змінних $(x,t)$ та будуються на основі визначених просторів з параметром $p\in\mathbf{C}$. Так, наприклад, простори $\mathbf{H}_{r;1,k,\kappa}(G^\pm)$, $k\in\mathbf{R}$, $\kappa>0$ складаються з чотрьохкомпонентних вектор-функцій $U(x,t)$, $(x,t)\in G^\pm$, таких що 1) перетворення Лапласа $U(x,p)$ голоморфно відображає $\mathbf{C}_\kappa = \{p=\sigma+i\tau : \sigma>\kappa\}$ у стандартні простори Соболєва $H_1(\Omega^\pm) = \left[W_1^2(\Omega^\pm)\right]^4$; 2) справедлива нерівність $\sup\limits_{\sigma>\kappa}\int_{\mathbf{R}} (1+|p|)^{2k}\|U(x,p)\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 d\tau < \infty$, $p=\sigma+i\tau$, ліва частина якої визначає квадрат норми елементу $U(x,p)\in\mathbf{H}_{r;1,k,\kappa}(G^\pm)$.

За визначенням, розв'язками задач $\mathrm{I}^\pm$ є елементи $U=(u,\theta)\in\mathbf{H}_{r;1,0,\kappa}(G^\pm)$, що задовольняють умову $\gamma^\pm U = F$ (де для неперервних операторів слідів $\gamma^\pm : \mathbf{H}_{r;1,k,\kappa}(G^\pm)\to\mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$ залишено позначення $\gamma^\pm$) та варіаційному рівнянню

$$\int_{G^\pm} \left(-\rho\partial_t u_i \partial_t v_i + a_{ijkl}\partial_l u_k \partial_j v_i + \beta_{ij}\partial_j\theta v_i - c_\varepsilon \theta\partial_t\eta + \lambda_{kj}\partial_j\theta\partial_k\eta - \beta_{kj}T_0\partial_t u_k\partial_j\eta\right)dxdt = 0$$

для будь-яких нескінченно диференційованих вектор-функцій $V(x,t)=(v(x,t),\eta(x,t))$ з компактними носіями $\operatorname{supp} V\subset\Omega^\pm\times\overline{\mathbf{R}_+}$. Розв'язками задач $\mathrm{II}^\pm$ назвемо вектор-функції $U\in\mathbf{H}_{r;1,0,\kappa}(G^\pm)$, які задовольняють варіаційному рівнянню

$$\int_{G^{\pm}} \left(-\rho\partial_t u_i \partial_t v_i + a_{ijkl}\partial_l u_k \partial_j v_i + \beta_{ij}\partial_j \theta v_i - c_\varepsilon \theta \partial_t \eta + \lambda_{kj}\partial_j \theta \partial_k \eta - \beta_{kj} T_0 \partial_t u_k \partial_j \eta\right) dxdt =$$

$$= \pm \int_{\Sigma^+} (G_i v_i + G_4 \eta) ds dt$$

для будь-якої нескінченно диференційованої вектор-функції $V$ з компактним носієм $\operatorname{supp} V \subset \overline{\Omega^{\pm} \times \mathbf{R}_+}$.

Нехай $\Phi(x,t)$ – матриця розміру $4\times4$ фундаментальних розв'язків для системи рівнянь термопружності, які дорівнюють нулю при $t<0$. Введемо термопружні потенціали простого та подвійного шарів з чотирьохкомпонентними густинами $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$, що задані на $\Sigma = \Gamma \times \mathbf{R}$, відповідно формулами

$$(V\alpha)(x,t) = \int_{\Sigma} \Phi(x-y,t-\tau)\alpha(y,\tau) ds_y d\tau,$$

$$(W\beta)(x,t) = \int_{\Sigma} T(x-y,t-\tau)\beta(y,\tau) ds_y d\tau,$$

де $T(x-y,t-\tau) = \left[\tilde{T}_y \Phi^T(x-y,t-\tau)\right]^T$, "T" – знак транспонування матриці, $\tilde{T}_y$ – гранична диференціальна операція $\left(\tilde{T}V\right)_i = \begin{cases} \left(a_{ijkl}\partial_k v_l + T_0 \beta_{ij}\partial_t \eta\right) n_j(x), & i=1,2,3, \\ \left(\lambda_{kj}\partial_k \eta\right) n_j(x), & i=4, \end{cases}$ що діє за змінною $y$. Обидва потенціали, що найменш для гладких густин, задовольняють всюди крім поверхні $\Gamma$ однорідним рівнянням термопружності, а якщо густини дорівнюють нулю при $t<0$, то і нульовим початковим умовам. На граничній поверхні $\Sigma^+$ для них справедливі такі формули стрибків:

$$(V\alpha)^+(x,t) = (V\alpha)^-(x,t), \qquad (W\beta)^{\pm}(x,t) = \mp\frac{1}{2}\beta(x,t) + (W\beta)^0(x,t),$$

$$(TV\alpha)^{\pm}(x,t) = \pm\frac{1}{2}\alpha(x,t) + (TV\alpha)^0(x,t), \qquad (TW\beta)^+(x,t) = (TW\beta)^-(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma,$$

де $(W\beta)^0(x,t)$, $(TV\alpha)^0(x,t)$ – прямі значення відповідних інтегралів.

Подаючи розв'язки задач $\mathrm{I}^{\pm}$, $\mathrm{II}^{\pm}$ потенціалами простого та подвійного шарів, $U(x,t) = (V\alpha)(x,t)$ або $U(x,t) = (W\beta)(x,t)$, $(x,t)\in G^{\pm}$, отримуємо відповідні системи граничних рівнянь відносно невідомих густин $\alpha(x,t)$ та $\beta(x,t)$, $(x,t)\in\Sigma^+$:

$$V\alpha = F, \qquad W^{\pm}\beta = F, \tag{5}$$

$$(TV)^{\pm}\alpha = G, \qquad TW\beta = G. \tag{6}$$

При дослідженні розв'язності систем (5), (6) використовується перехід до перетворень Лапласа за часом у вихідних задачах та граничних рівняннях. При цьому задачі $\mathrm{I}^{\pm}$, $\mathrm{II}^{\pm}$ зводяться до систем рівнянь еліптичного типу з параметром:

$$\begin{cases} \rho p^2 u_i - \partial_j\left(a_{ijkl}\partial_l u_k\right) + \partial_j\left(\beta_{ij}\theta\right) = 0, & i=1,2,3, \\ c_\varepsilon p\theta - \partial_k\left(\lambda_{kj}\partial_j\theta\right) + \beta_{kj}T_0 p\partial_j u_k = 0, \end{cases} \quad x\in\Omega^{\pm},$$

з граничними умовами $U^{\pm}(x,p) = F(x,p)$, $x\in S$, для задач $\mathrm{I}_p^{\pm}$ або $(TU)^{\pm}(x,p) = G(x,p)$, $x\in S$, для задач $\mathrm{II}_p^{\pm}$. Однозначна розв'язність таких задач при кожному $p \in \mathbf{C}_\kappa$ доводиться стандартними методами. На розв'язках задач $\mathrm{I}_p^\pm$ визначається пара граничних операторів типу Пуанкаре-Стєклова $\mathbf{N}_p^\pm$, які діють на елементи $F = \left(\gamma^\pm U\right) \in \mathbf{H}_{1/2,p}(S)$ за формулою $\left(\mathbf{N}_p^\pm F\right)(x,p) = (TU)^\pm(x,p)$. Вивчення властивостей цих операторів дозволяє довести бієктивність відображень $\mathbf{N}_p^\pm : \mathbf{H}_{1/2,p}(S) \mapsto \mathbf{H}_{-1/2,p}(S)$ для кожного $p \in \mathbf{C}_\kappa$. Перехід до перетворень Лапласа в граничних рівняннях приводить до відповідних систем граничних рівнянь, які в операторній формі можна записати так:

$$\left(\mathbf{V}_p \alpha\right)(x,p) = F(x,p), \qquad \left(\mathbf{W}_p^\pm \beta\right)(x,p) = F(x,p),$$

$$\left(\mathbf{K}_p^\pm \alpha\right)(x,p) = G(x,p), \qquad \left(\mathbf{F}_p \beta\right)(x,p) = G(x,p),$$

де $\mathbf{K}_p^\pm = \mathbf{N}_p^\pm \mathbf{V}_p$, $\mathbf{F}_p = \mathbf{N}_p^\pm \mathbf{W}_p^\pm$ . Бієктивність нових граничних операторів $\mathbf{V}_p$, $\mathbf{W}_p^\pm$ , $\mathbf{K}_p^\pm$, $\mathbf{F}_p$ доводиться за допомогою операторів $\mathbf{N}_p^\pm$ , причому виявляється, що $\mathbf{V}_p^{-1} = \mathbf{N}_p^+ - \mathbf{N}_p^-$, $\left(\mathbf{W}_p^\pm\right)^{-1} = \left(\mathbf{N}_p^\mp\right)^{-1}\left(\mathbf{N}_p^+ - \mathbf{N}_p^-\right)$. Після вивчення залежності операторів $\mathbf{V}_p$, $\mathbf{W}_p^\pm$ , $\mathbf{K}_p^\pm$, $\mathbf{F}_p$ від параметру перетворення Лапласа та повертання у простори оригіналів, були доведені наступні теореми.

<u>Теорема 1.</u> Для будь-яких вектор-функцій $F \in \mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)$, $G \in \mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$, системи граничних рівнянь (5), (6) однозначно розв'язні. Розв'язуючі оператори цих систем при будь-яких $k \in \mathbf{R}$ і $\kappa > 0$ здійснюють неперервні відображення:

$$\mathbf{V}_p^{-1} : \mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right) \mapsto \mathbf{H}_{r;-1/2,k-2,\kappa}\left(\Sigma^+\right), \quad \left(\mathbf{W}_p^\pm\right)^{-1} : \mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right) \mapsto \mathbf{H}_{r;1/2,k-3,\kappa}\left(\Sigma^+\right),$$

$$\left(\mathbf{K}_p^\pm\right)^{-1} : \mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right) \mapsto \mathbf{H}_{r;-1/2,k-3,\kappa}\left(\Sigma^+\right), \qquad \mathbf{F}_p^{-1} : \mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right) \mapsto \mathbf{H}_{r;1/2,k-1,\kappa}\left(\Sigma^+\right).$$

<u>Теорема 2.</u> Нехай $F(x,t) \in \mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^+\right)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$; $\alpha(x,t)$ та $\beta(x,t)$ – розв'язки систем граничних рівнянь (5). Тоді вектор-функції $U(x,t) = (V\alpha)(x,t)$ або $U(x,t) = (W\beta)(x,t)$ є елементами просторів $\mathbf{H}_{r;1,k-1,\kappa}\left(G^\pm\right)$ і при $k \geq 1$ дають розв'язок задачі $\mathrm{I}^\pm$.

Аналогічне твердження справедливо для задачі $\mathrm{II}^\pm$.

В **Розділі 3** "Нестаціонарні граничні рівняння в задачах зі змішаними крайовими умовами" розглядаються різні типи граничних рівнянь, що виникають при розв'язанні початково-крайових задач динаміки термопружних середовищ зі змішаними крайовими умовами за допомогою поверхневих потенціалів. На основі властивостей граничних операторів, які отримані у попередніх розділах, доводяться теореми про однозначну розв'язність усіх розглянутих типів граничних рівнянь в однопараметричній шкалі соболєвських просторів. Нехай гранична поверхня $S$ поділена замкненим контуром $\Gamma \subset S$ на дві зв'язні компоненти $S_i$, $i = 1,2$. Задачі $\mathrm{M}^\pm$, що розглядаються в цьому розділі, полягають в знаходженні вектор-функцій $U(x,t)$, які задовольняють системі диференціальних рівнянь (1) в $G^+$ або $G^-$, однорідним початковим умовам (2) та граничним умовам:

$$U^{\pm}(x,t)=F(x,t),\ (x,t)\in\Sigma_1^+,\quad (TU)^{\pm}(x,t)=G(x,t),\ (x,t)\in\Sigma_2^+,$$

де $\Sigma_i^+=S_i\times\mathbf{R}_+$, $i=1,2$. Розв'язки цих задач подані сумою потенціалів простого та подвійного шарів $U(x,t)=(V\alpha)(x,t)+(W\beta)(x,t)$ з густинами $\alpha$ і $\beta$, що зосереджені відповідно на $\Sigma_1^+$ та $\Sigma_2^+$, або, навпаки, на $\Sigma_2^+$ та $\Sigma_1^+$. Ці подання приводять до систем парних граничних рівнянь

$$\begin{cases}(W\beta)^{\pm}(x,t)+(V\alpha)(x,t)=F(x,t), & (x,t)\in\Sigma_1^+,\\ (TW\beta)(x,t)+(TV\alpha)^{\pm}(x,t)=G(x,t), & (x,t)\in\Sigma_2^+,\end{cases}\tag{7}$$

які в операторній формі можна записати $\mathbf{M}_{V,W}^{\pm}\{\alpha,\beta\}=\{F,G\}$ в першому випадку та $\mathbf{M}_{W,V}^{\pm}\{\beta,\alpha\}=\{F,G\}$ в другому випадку. Функціональні простори на частинах граничної поверхні $\Sigma_i^+$ вводяться як у попередньому розділі на основі підпростору $\mathbf{H}_{m,p}^0(S_i)\subset\mathbf{H}_{m,p}(S)$, $m=\pm 1/2$, $i=1,2$, який складається з елементів, що дорівнюють нулю на $\overline{S\setminus S_i}$, та простору $\mathbf{H}_{m,p}(S_i)$, елементи якого допускають подовження до елементів простору $\mathbf{H}_{m,p}(S)$, з нормою $\|v\|_{m;S_i}=\inf\limits_{w|_{S_i}=v}\|w\|_{m;S}$. Після вивчення граничних операторів еліптичних задач з параметром, що виникають при переході до перетворень Лапласа в вихідних задачах $\mathrm{M}^{\pm}$ та граничних рівняннях (7), та повернення в простори оригіналів, доведені наступні твердження.

Теорема 3. Системи парних граничних рівнянь однозначно розв'язні для будь-яких $F\in\mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+)$, $G\in\mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+)$, $k\in\mathbf{R}$, $\kappa>0$, розв'язуючі оператори при будь-яких $k\in\mathbf{R}$, $\kappa>0$ здійснюють неперервні відображення:

$$\left(\mathbf{M}_{V,W}^{\pm}\right)^{-1}:\mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+)\times\mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+)\mapsto\mathbf{H}_{r;-1/2,k-2,\kappa}^0(\Sigma_1^+)\times\mathbf{H}_{r;1/2,k-1,\kappa}^0(\Sigma_2^+),$$

$$\left(\mathbf{M}_{W,V}^{\pm}\right)^{-1}:\mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+)\times\mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+)\mapsto\mathbf{H}_{r;1/2,k-3,\kappa}^0(\Sigma_1^+)\times\mathbf{H}_{r;-1/2,k-4,\kappa}^0(\Sigma_2^+).$$

Розв'язки задач $\mathrm{M}^{\pm}$ мають скінченну енергію, якщо $F\in\mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+)$, $G\in\mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+)$, $k\geq 1$.

Аналогічні результати доведені для систем граничних рівнянь, що виникають при поданні розв'язків задач $\mathrm{M}^{\pm}$ потенціалами лише простого або подвійного шарів.

**Розділ 4** "Нестаціонарні граничні рівняння на многовидах з краєм" присвячено задачам динаміки термопружних середовищ у необмежених областях, що містять розрізи. Нехай $S_0$ – зв'язна частина замкненої поверхні $S$ класу $C^2$. Будемо розрізняти сторони поверхні $S_0$, називаючи їх берегами розрізу, та позначати індексами "+" та "–" граничні значення функцій на берегах розрізу. Задачі $\mathrm{I}_0$, $\mathrm{II}_0$ полягають в знаходженні вектор-функцій $U(x,t)$, які задовольняють системі рівнянь (1) в області $G=\left(\mathbf{R}^3\setminus\overline{S_0}\right)\times\mathbf{R}_+$, початковим умовам (2) та таким граничним умовам:

$$\mathrm{I}_0:\quad U^+(x,t)=F^+(x,t),\quad U^-(x,t)=F^-(x,t);$$

$$\mathrm{II}_0:\quad (TU)^+(x,t)=G^+(x,t),\quad (TU)^-(x,t)=G^-(x,t),\qquad (x,t)\in\Sigma_0^+=S_0\times\mathbf{R}_+.$$

Розв'язки цих задач розшукуються у вигляді суми поверхневих потенціалів простого та подвійного шарів, густини яких зосереджені на $\Sigma_0^+$: $U(x,t)=(V\alpha)(x,t)+(W\beta)(x,t)$. Отримані при такому поданні граничні рівняння з урахуванням формул стрибків запишемо у вигляді:

$$\mathrm{I}_0: \quad \begin{cases} \beta(x,t) = -\delta F(x,t), \\ (V\alpha)^+(x,t)+(W\beta)^+(x,t)=F^+(x,t), \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathrm{II}_0: \quad \begin{cases} \alpha(x,t) = \delta G(x,t), \\ (TV\alpha)^-(x,t)+(TW\beta)^-(x,t)=G^-(x,t), \end{cases} \qquad (x,t)\in\Sigma_0^+, \tag{9}$$

де $\delta F = F^+ - F^-$, $\delta G = G^+ - G^-$. Функціональні простори $\mathbf{H}^0_{m,p}(S_0)$ та $\mathbf{H}_{m,p}(S_0)$ вводяться так саме, як відповідні простори на $S_i$ у попередньому розділі. За допомогою методів, що викладені в попередніх розділах, доведена така теорема:

<u>Теорема 4.</u> Системи граничних рівнянь (8), (9) однозначно розв'язні для будь-яких $\{F^+,\delta F\}\in\mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathbf{H}^0_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)$, $\{\delta G, G^-\}\in\mathbf{H}^0_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)$, $k\in\mathbf{R}$, $\kappa>0$, розв'язуючі оператори при будь-яких $k\in\mathbf{R}$, $\kappa>0$ здійснюють неперервні відображення:

$$\{F^+,\delta F\}\in\mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathbf{H}^0_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\mapsto\{\alpha,\beta\}\in\mathbf{H}^0_{r;-1/2,k-2,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathbf{H}^0_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+),$$

$$\{\delta G,G^-\}\in\mathbf{H}^0_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\mapsto\{\alpha,\beta\}\in\mathbf{H}^0_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_0^+)\times\mathbf{H}^0_{r;1/2,k-1,\kappa}(\Sigma_0^+).$$

Вектор-функція $U(x,t)=(V\alpha)(x,t)+(W\beta)(x,t)$ зі знайденими густинами $\alpha$ та $\beta$ є узагальненим розв’язком задач $\mathrm{I}_0$, $\mathrm{II}_0$, якщо $\{F^+,\delta F\}$, $\{\delta G, G^-\}$ є елементами вказаних вище просторів, $k\ge 1$.

В **розділі 5** “Граничні рівняння у контактній задачі динаміки термопружних середовищ” розглядається основна контактна задача динаміки термопружних середовищ. Нехай області $\Omega^+$ та $\Omega^-$ зайняті термопружними середовищами з різними тепловими та пружними константами. Розв’язком контактної задачі C є пара вектор-функцій $\{U^{(1)},U^{(2)}\}$, які задовольняють однорідним системам рівнянь термопружності з відповідними коефіцієнтами в областях $G^+$ та $G^-$, однорідним початковим умовам та контактним граничним умовам:

$$\begin{cases} U^{(1)}(x,t)=U^{(2)}(x,t)+F(x,t); \\ \left(T^1U^{(1)}\right)(x,t)=\left(T^2U^{(2)}\right)(x,t)+G(x,t), \end{cases} \qquad (x,t)\in\Sigma^+.$$

Розв’язки цієї задачі можна подавати різними комбінаціями потенціалів простого та подвійного шарів, які побудовані на основі фундаментальних розв’язків відповідних систем рівнянь. Наприклад, $U^{(1)}(x,t)=\left(V^1\alpha\right)(x,t)$, $U^{(2)}(x,t)=\left(W^2\beta\right)(x,t)$. Таке подання приводить до системи граничних рівнянь

$$\begin{cases} \left(V^1\alpha\right)(x,t)=\left(W^2\beta\right)(x,t)+F(x,t); \\ \left(T^1V^1\alpha\right)(x,t)=\left(T^2W^2\beta\right)(x,t)+G(x,t), \end{cases} \qquad (x,t)\in\Sigma^+, \tag{10}$$

для якої справедлива наступна теорема.

Теорема 5. Система граничних рівнянь (10) однозначно розв'язна для будь-яких $F \in \mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right)$, $G \in \mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$, розв'язуючий оператор при будь-яких $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$ здійснює неперервне відображення:

$$\{F, G\} \in \mathbf{H}_{r;1/2,k+2,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right) \times \mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right) \mapsto \{\alpha, \beta\} \in \mathbf{H}_{r;-1/2,k-3,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right) \times \mathbf{H}_{r;1/2,k-4,\kappa}\left(\Sigma^{+}\right).$$

Аналогічні результати отримані і для інших подань розв'язків контактної задачі.

У **Висновках** викладені основні наукові результати дисертаційної роботи та вказані можливі напрямки продовження досліджень.

## ВИСНОВКИ

У дисертації доведена однозначна розв'язність систем граничних рівнянь, які виникають при розв'язуванні методами теорії потенціалів основних типів задач істотно нестаціонарної теорії зв'язаної термопружності. Оскільки розв'язки для системи рівнянь термопружності розшукуються як в обмежених (внутрішніх), так і в необмежених (зовнішніх) областях, побудова математично коректної теорії поверхневих запізнюючихся потенціалів стає особливо актуальною, тому що дозволяє визначати невідомі величини на границі без обчислень в усій області і, таким чином, приводить до одноманітного розгляду внутрішніх та зовнішніх задач.

Незважаючи на те, що схема методу граничних рівнянь носить загальний характер і, по суті, може бути застосована до будь-яких лінійних диференціальних рівнянь, фундаментальні розв'язки яких відомі, донедавна в більшості випадків цей метод використовувався для аналізу стаціонарних та квазістаціонарних явищ. На теперішній час побудову теорії граничних інтегральних рівнянь для загальних еліптичних крайових задач та параболічних початково-крайових задач можна вважати практично завершеною. Методи теорії потенціалів знаходять широке застосування при розв'язанні крайових задач для рівнянь теорії пружності та термопружності у випадку, коли поля залежать від часу гармонічно. Однак, вони не можуть бути безпосередньо застосовані в гіперболічних (істотно нестаціонарних), а також змішаних, гіперболічно-параболічних задачах, тому що подання розв'язків цих задач поверхневими потенціалами приводять до псевдодиференціальних рівнянь із запізнілим за часом аргументом. У цьому випадку відповідні граничні оператори перестають бути нормально розв'язними і, як наслідок, зникає можливість використання такої потужної зброї як альтернатива Фредгольма.

Запропонований в дисертації підхід до розв'язування задач динаміки термопружних середовищ заснований на поданні розв'язків відповідних змішаних задач динамічними аналогами термопружних потенціалів простого та подвійного шарів, а також на переході до перетворень Лапласа за часом у вихідних задачах та відповідних системах граничних рівнянь. Це дає можливість при дослідженні отриманих таким чином крайових задач скористатися відомими результатами про розв'язність крайових задач еліптичного типу з параметром і, після вивчення відповідних операторів типу Пуанкаре-Стєклова та повернення у простори оригіналів, довести однозначну розв'язність вихідних систем граничних рівнянь в однопараметричних шкалах просторів соболєвського типу.

В дисертації одержані такі результати:

1. Доведена однозначна розв'язність чотирьох типів систем граничних рівнянь, що виникають при поданні розв'язків двох основних задач динаміки термопружних середовищ термопружними потенціалами простого та подвійного шарів. Показано, що поверхневі потенціали з густинами, які є розв'язками вказаних систем граничних рівнянь, задовольняють відповідні змішані задачи для систем рівнянь теорії термопружності з крайовими умовами першого або другого роду.
2. Доведені теореми про однозначну розв'язність в однопараметричних шкалах просторів соболєвського типу систем парних граничних рівнянь, які виникають внаслідок подання поверхневими запізнюючимися потенціалами розв'язків задач динаміки термопружних середовищ зі змішаними крайовими умовами. Показано, що поверхневі потенціали з густинами, що є розв'язками цих систем парних граничних рівнянь, задовольняють відповідні змішані задачи термопружності.
3. Доведена однозначна розв'язність систем граничних рівнянь в задачах нестаціонарної дифракції термопружних хвиль на відокремленому розрізі, які отримані шляхом подання розв'язку відповідної початково-крайової задачі сумою термопружних потенціалів простого та подвійного шарів. Показано, що сума вказаних потенціалів із знайденими густинами задовольняє змішану задачу динаміки термопружних середовищ, що містять розрізи.
4. Доведені теореми про однозначну розв'язність систем нестаціонарних граничних рівнянь, які виникають в контактній задачі динаміки термопружних середовищ при поданні розв'язків цієї задачі різними комбінаціями термопружних потенціалів простого та подвійного шарів.Показано, що такі комбінації потенціалів з густинами, що є розв'язками відповідних систем псевдодиференціальних граничних рівнянь, задовольняють змішану задачу для системи рівнянь термопружності з контактними крайовими умовами.

Дисертація носить теоретичний характер, але одержані в ній результати можуть служити основою для побудови збіжних методів наближеного розв'язування систем нестаціонарних граничних рівнянь, а значить, і вихідних задач.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ АВТОРОМ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Chudinovich I.Yu., Dumina O.A. Boundary equations in two main dynamic problems for thermoelastic media // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – № 475. – С. 230–240.
2. Думіна О.О. Граничні рівняння в задачах динаміки термопружних середовищ, що містять розрізи // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2000. – № 3. – С. 119–129.
3. Думина О.А. Граничные уравнения в задаче динамики термоупругих сред с краевыми условиями смешанного типа // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2002. – № 542.– С. 106–117.
4. Chudinovich I.Yu., Dumina O.A. Boundary equations in the contact dynamic problem for thermoelastic media // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. –Т. 9,

№ 3. – С. 427–435.

Результати дисертації додатково висвітлені у таких працях:

5. Думина О.А., Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в первой основной задаче динамики термоупругих сред // Вестник Международного Соломонова университета. Математические методы в кибернетике. – 2000. – № 4. – С 193–203.
6. Думина О.А. Нестационарные граничные уравнения в двух основных задачах динамики термоупругих сред // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики. Труды VIII междунар. симп. – Харьков. – 1999. – С. 31–33.
7. Думина О.А. Граничные уравнения в задачах динамики термоупругих сред, содержащих разрезы // Матеріали VIII-ої Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – Київ. – 2000. – С. 76.
8. Думина О.А., Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в задаче динамики термоупругих сред с краевыми условиями смешанного типа // Труды X Междунар. симп. "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (МДОЗМФ–2001). – Херсон. – 2001. – С. 124–127.
9. Думина О.А., Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в контактной задаче динамики термоупругих сред // Междунар. конф. "Теория функций и математическая физика", посвященная 100-летию Н.И. Ахиезера. Тезисы докладов. – Харьков. – 2001. – С. 17–18.
10. Думіна О.О. Граничні рівняння у задачах динаміки термопружних середовищ // Дев’ята всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. Тези доповідей. – Львів. – 2002. – С. 45–46.

## АНОТАЦІЯ

Думіна О.О. Методи теорії потенціалів у задачах динаміки термопружних середовищ. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, м. Харків, 2003 р.

Дисертація присвячена вивченню розв'язності систем нестаціонарних граничних рівнянь, які виникають при використанні методів теорії потенціалів для розв'язання основних задач динаміки анізотропних термопружних середовищ. Розв’язки початково-крайових задач для системи рівнянь зв’язаної термопружності подаються у вигляді поверхневих запізнілих потенціалів простого та подвійного шарів. Перехід точки на граничну поверхню в цих поданнях з урахуванням крайових умов задачі приводить до систем граничних рівнянь із запізнілим за часом аргументом відносно невідомих густин потенціалів. Вивчивши властивості отриманих за допомогою перетворення Лапласа еліптичних крайових задач з параметром та відповідних систем граничних рівнянь, а потім повернувшись до просторів оригіналів, доводиться однозначна розв'язність систем псевдодиференціальних граничних рівнянь в однопараметричних шкалах функціональних просторів соболєвського типу.

**Ключові слова:** зв’язана термопружність, поверхневі запізнілі потенціали, нестаціонарні граничні рівняння.

## АННОТАЦИЯ

Думина О.А. Методы теории потенциалов в задачах динамики термоупругих сред. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. – Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, г. Харьков, 2003 г.

Диссертация посвящена изучению разрешимости систем нестационарных граничных уравнений, возникающих при использовании методов теории потенциалов для решения различных задач динамики анизотропных теомоупругих сред. Решения начально-краевых задач для системы уравнений связанной термоупругости представляются в виде поверхностных запаздывающих потенциалов простого и двойного слоя. Переход точки на граничную поверхность в этих представлениях с учетом краевых условий задачи приводит к системам граничных уравнений с запаздывающим по времени аргументом относительно неизвестных плотностей потенциалов. Изучив свойства полученных с помощью преобразования Лапласа эллиптических краевых задач с параметром и соответствующих систем граничных уравнений, а затем вернувшись в пространства оригиналов, доказана однозначная разрешимость систем псевдодифференциальных граничных уравнений в однопараметрических шкалах функциональных пространств соболевского типа.

**Ключевые слова:** связанная термоупругость, поверхностные запаздывающие потенциалы, нестационарные граничные уравнения.

## SUMMARY

Dumina O.A. Potential theory methods in dynamic problems for thermoelastic media. – Manuscript.

Thesis for obtaining the candidate’s degree in physics and mathematics by speciality 01.01.03 – mathematical physics. – V.N. Karazine Kharkiv National University, Kharkiv, 2003.

The thesis deals with different types of the dynamic problems for anisotropic thermoelastic media. Its purpose is to prove the solvability of systems of boundary equations that appear when one solves the corresponding mixed problems for the coupled thermoelasticity system by the potential theory methods. The usage of boundary equation methods makes possible to find the unknown quantities on boundary surface without any calculations in the whole domain that reduces the number of calculations. Also, it leads to the uniformity in investigation of internal and external problems.

It is the well known fact that the potential theory methods play an important role both in studying static and quasistatic problems of thermoelasticity and in solving them numerically. However, be presented in a good light in elliptic case, they cannot be directly used in the case of thermoelastic system that contains of parabolic and hyperbolic (essentionally nonstationary) equations. The fact is that the representations of corresponding

problems by the surface potentials lead to the pseudodifferential equations with the time retarded argument. In that case the boundary operators are not normally solvable because their ranges are unclosed in some natural functional spaces. That makes it impossible to use so powerful instrument as Fredholm alternative.

In the thesis two main dynamic problems for thermoelastic media are investigated. When the volume forces and inner heat sources are absent the field of the displacements and the temperature of the point of the body satisfies homogeneous system of hyperbolic and parabolic type differential equations. The initial conditions are also supposed to be homogeneous. On the boundary surface the conditions of the Dirichlet or Neumann type are stated. The variational formulation of the problems are given in the corresponding functional spaces. Representations of the solutions to these problems by the surface potentials of the single and double layer lead to the systems of boundary equations with respect to unknown densities of potentials. They are the systems of pseudodifferential equations with the time retarded argument, that contain singular and hypersingular kernels. To prove their solvability, the Laplace transformation is used with respect to the time variable in original problems and boundary equations. This leads to the boundary value problems of elliptic type with the parameter and to boundary equations with respect to Laplace transformations of potential densities. Defined on solutions of obtained problems operators of Poincare-Steklov type make it possible to prove the bijectivity of boundary operators that correspond to boundary equations with a parameter in some function spaces. Dependence of the boundary operators on the Laplace transformation parameter is studied. From this and from the statement that these maps are holomorphic ones in the right-hand half-plane of the complex plane, after returning to the spaces of originals we deduce that the initial systems of boundary equations are uniquely solvable in one-parameter scales of function spaces of Sobolev type.

Analogous results are obtained for the dynamic problems for thermoelastic media with mixed boundary conditions. The solutions of these problems are represented by the sum of the surface potentials with densities concentrated on the parts of boundary surface, and also by the single and double layer potentials by itself.

The solutions of the problems of thermoelastic wave diffraction on unclosed surface are represented by the sum of single and double layer potentials. This representation accounting jump formulas leads to the boundary equation systems, that are proved to be uniquely solvable.

The unique solvability of the boundary equations that are obtained by representation of the solution of the contact problem for thermoelastic media by different combination of surface retarded potentials is proved due to the scheme used in the previous sections.

Obtained in the thesis results create the sound base for constructing corresponding convergent numerical methods.

**Key words:** coupled thermoelasticity, surface retarded potentials, transient boundary equations.