УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра автоматики та комп'ютерного телекерування
рухом поїздів

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт

із дисципліни

«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ»

Харків 2024

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів 29 березня 2024 р., протокол № 07.

Методичні вказівки призначено для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх форм навчання.

Укладач

професор О. М. Ананьєва

Рецензент

доц. О. Є. Зінченко

ЗМІСТ

ВСТУП

З розвитком комп'ютерних технологій та програмного забезпечення моделювання стає більш доступним та ефективним інструментом для вирішення складних завдань у різних сферах, від науки і технологій до економіки та соціальних наук. Математичне моделювання дає змогу вирішувати реальні проблеми шляхом створення моделей, які відображають складні системи та процеси, досліджуючи їхню поведінку та взаємозв'язки.

Математичне моделювання допомагає зрозуміти наслідки різних варіантів дій та робити обґрунтовані рішення в умовах невизначеності та складності, є основою для розроблення нових технологій, продуктів і послуг, а також для вивчення їхнього впливу на суспільство та навколишнє середовище. Математичне моделювання об'єднує в собі елементи математики, фізики, інформатики, економіки та інших наук, сприяючи розвитку міждисциплінарних підходів до вирішення складних проблем.

Вивчення математичного моделювання допомагає формувати критичне мислення, аналітичні навички та здатність до розв'язання проблем, що є ключовими компетенціями для багатьох професій.

Методичні вказівки містять матеріали для організації самостійної та дистанційної роботи при вивченні дисципліни «Математичні методи та моделі виробничих процесів».

У методичних вказівках наведено короткі теоретичні відомості, завдання для індивідуальної самостійної роботи, які спрямовані на вдосконалення вмінь та навичок.

1 ОСНОВНІ ВИМОГИ ТА ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Науковою основою моделювання як методу пізнання і дослідження різних об'єктів і процесів є теорія схожості, в якій головним є поняття аналогії, тобто схожість об'єктів за деякими ознаками. Подібні об'єкти називаються аналогами. Аналогія між об'єктами може встановлюватися за якісними і (або) кількісними ознаками.

Поняття моделі

Модель – це реально наявна або абстрактна система, яка, замінюючи і відображаючи в пізнавальних процесах іншу систему – оригінал, перебуває з нею у відношенні схожості.

Моделлю називається подання об’єкта, системи чи поняття в деякій абстрактній формі, що є зручною для наукового дослідження. У загальному випадку модель має структуру, зображену на рисунку 1.1, де X – множина вхідних змінних системи, Y – множина вихідних змінних системи, P – множина параметрів, F – функція, функціонал, алгоритм або формальне представлення залежності змінних Y від змінних X.

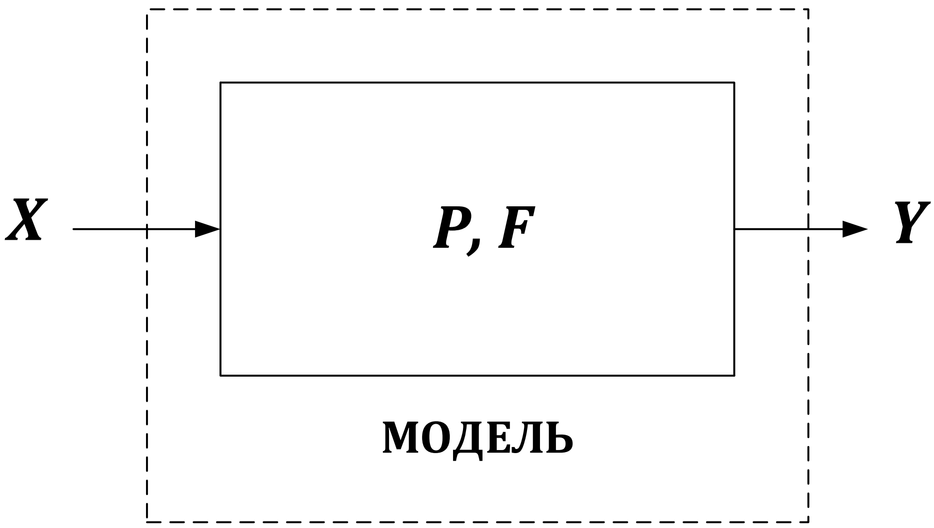


Рисунок 1.1 – Загальна структура моделі

Математична модель – це інформаційна модель, у якій залежності між властивостями об’єкта та його зв’язки з іншими об’єктами описуються математичними формулами, функціями, рівняннями, нерівностями тощо. Математичне моделювання можна застосовувати у випадку, коли властивості об’єкта чи явища підлягають описанню математичними формулами [1].

Класифікація моделей

Моделі взагалі можна класифікувати різними способами. На жаль, жоден з них не є повністю задовільним, хоча кожен служить визначеній меті. Зазначимо деякі типові групи моделей, які можуть бути покладені в основу системи класифікації:

- статичні (наприклад, поперечний розріз об'єкта) і динамічні (часові ряди);
- детерміністичні і стохастичні;
- дискретні і безперервні;
- натурні, аналогові і символічні.

Імітаційні моделі можна подати у вигляді безперервного спектра, що тягнеться від точних моделей або макетів реальних об'єктів до абсолютно абстрактних математичних моделей.

При моделюванні складної системи дослідник зазвичай змушений використовувати сукупність декількох моделей з числа різновидів, згаданих вище. Будь-яка система або підсистема може бути представлена різними способами, які значно відрізняються один від одного за складністю і деталізації. У більшості випадків у результаті системних досліджень з'являються кілька різних моделей однієї і тієї ж системи. Але зазвичай у міру того, як дослідник глибше аналізує і краще розуміє проблему, прості моделі замінюються все більш складними.

З точки зору вихідної змінної моделі поділяють на статичні – якщо вихідна змінна Y не змінюється з часом, та динамічні – якщо змінна Y змінюється з часом. Динамічні моделі поділяють на неперервні – якщо змінювання змінної Y є неперервним, та дискретні – якщо змінювання змінної Y трапляється в деякі особливі моменти часу, а в інші моменти часу залишається незмінним. Дискретні системи поділяють на детерміновані – якщо змінювання змінної Y в особливі моменти часу є цілком передбачуваними, та стохастичні – якщо змінювання змінної Y відомо з деякою ймовірністю.

З точки зору способу представлення залежності вихідних змінних моделі від вхідних її змінних розрізняють також алгебраїчні моделі, диференційні моделі, аналітичні моделі, імітаційні моделі і багато інших.

Наприклад, диференційна модель описується системою диференційних рівнянь. Імітаційна модель описується алгоритмом імітації.

Задачі моделювання (рисунок 1.2).

МОДЕЛЮВАННЯ	відомі X, P, F=>знайти Y
УПРАВЛІННЯ	відомі Y, P, F =>знайти X
ІДЕНТИФІКАЦІЯ	відомі X, Y, множина F=>знайти $f \epsilon F, P$
ОПТИМІЗАЦІЯ	відомі F, критерії К=>знайти P, X, Y
ПРОГНОЗУВАННЯ	відомі X_t Y_t, T=>знайти F, P, Y_{t+1}

Рисунок 1.2 – Задачі моделювання

Методи моделювання

Серед великої кількості методів моделювання, що існують, виділимо такі: аналітичне, математичне та імітаційне моделювання.

Моделювання аналітичне, якщо представлення залежності F вихідних змінних Y від вхідних її змінних X має аналітичний вигляд, тобто поданий у вигляді відомих аналітичних функцій. Нагадаємо, що функція називається аналітичною, якщо вона розкладається у ряд Тейлора.

Аналітичні функції диференційовані безліч разів і тому до них можуть застосовуватись методи математичного аналізу. Перевагою цього методу моделювання є можливість отримання залежності Y=f(X) в явному вигляді і застосування до неї методів класичного математичного аналізу. Якщо є можливість побудувати аналітичну модель системи, то завжди віддають перевагу цьому методу моделювання. Зауважимо, що відшукання залежності Y=f(X) може виявитись настільки складним, що досліднику доведеться застосовувати спеціальне програмне забезпечення, а для деяких систем доводиться відмовлятись від пошуку абстрактної залежності Y=f(X) і задовольнятись наближеним розв'язком, що знаходиться чисельними методами. Деякі системи настільки складні, що не дивлячись на те, що опис їх функціонування піддається опису аналітичними функціями, знаходження залежності Y=f(X) у явному вигляді виявляється неможливим.

Наприклад, усі задачі математичного програмування мають досить простий аналітичний опис, але розв'язок задачі може бути знайдений тільки в результаті виконання певної кількості кроків.

Іншими словами, відомий алгоритм відшукання точного розв'язку задачі, але сам розв'язок не може бути записаний в аналітичній формі. Такий метод моделювання називають математичним моделюванням.

Зауважимо, що алгоритм F відшукання точного розв'язку задачі може бути реалізований дослідником самостійно, за допомогою спеціального програмного забезпечення або за допомогою чисельних методів. Існують системи, опис яких не піддається опису аналітичними функціями, але процес функціонування їх може бути описаний алгоритмом імітації. Під імітацією розуміють відтворення за допомогою комп'ютерної програми процесу функціонування складної системи в часі. У результаті багатократних прогонів імітаційної моделі дослідник отримує інформацію про властивості реальної системи. Такий метод моделювання називають імітаційним моделюванням. Стисло визначення методів моделювання подані на рисунку 1.3.

Рисунок 1.3 – Методи моделювання

Вимоги до математичних моделей

Для кожної математичної моделі формулюється відповідна математична задача. Водночас відповідно до виду математичної моделі розрізняють такі базові типи математичних задач:

- розв'язання систем лінійних (лінеаризованих) рівнянь;
- нелінійних алгебраїчних рівнянь;

- апроксимація масиву даних або складної функції набором стандартних, більш простих функцій;

- розв’язання диференціальних рівнянь;

- інтегральних рівнянь;

- інші задачі.

Для розв’язання цих та інших задач застосовують чисельні методи – математичний інструментарій, за допомогою якого математична задача формулюється у вигляді, зручному для розв’язання на ЕОМ [2].

Розроблення моделі для аналізу досліджуваного виду діяльності вимагає творчого підходу. Крім того, щоб правильно зрозуміти сутність досліджуваної проблеми, необхідно зібрати і ретельно проаналізувати великий обсяг даних. Практичного значення модель набуває за умови, що її вивчення наявними засобами доступніше, ніж вивчення самого об'єкта. З усього сказаного випливають такі вимоги до моделі:

- універсальність;

- точність;

- адекватність (відповідність моделі своєму оригіналу, відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об’єкта, важливих для цілей певного дослідження;

- простота (відсутність другорядних факторів);

- цілеспрямованість (модель завжди будується з певною метою. Ця мета має вплив на те, які властивості об’єктивного явища вважаються істотними, а які – ні;

- повнота моделі полягає в тому, що вона має відображати всі істотні з точки зору мети моделювання властивості оригіналу;

- скінченність (модель відтворює лише скінченну кількість властивостей та відношень, і через це модель завжди є більш простою, ніж оригінал);

- економічність;

- обрахованість, тобто можливість ручного або за допомогою ПК дослідження якісних та кількісних закономірностей функціонування об’єкта (системи);
- модульність, тобто відповідність конструкції моделі структурними складовими об’єкта (системи);
- алгорітмізіруємість, тобто можливість розроблення відповідних алгоритму та програми, що реалізує математичну модель ПК;
- наочність, тобто зручність візуального сприйняття моделі;
- об'єктивність (відповідність наукових висновків реальним умовам);
- чутливість (здатність моделі реагувати на зміну параметрів);
- стійкість (малому збурюванню вихідних параметрів має відповідати мала зміна рішення задачі (моделі));
- універсальність (широта області застосування) [3, 4].

Задача моделювання полягає в тому, що для заданого об’єкта потрібно підібрати такий опис, який повною мірою відображав би оригінал з точки зору заданої мети моделювання.

Оскільки будь-яка модель простіша за оригінал, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, при якій модель за всіма характеристиками відповідає оригіналу.

Модель називається *ізоморфною* (однаковою за формою), якщо між нею і реальною системою існує повна поелементна відповідність, і *гомеоморфною*, якщо існує відповідність лише між найбільш значними складовими частинами об'єкта і моделі [5].

Процес моделювання

Процес моделювання складається з кількох етапів.

На першому етапі дослідник визначає мету та задачу моделювання.

На другому етапі, виходячи з мети та задачі моделювання, дослідник приступає до вербального опису системи. Опис набору змінних моделі разом із описом структури системи та формулюванням цілі та задачі дослідження складає концептуальну модель системи. Виходячи з концептуальної моделі системи та з огляду на вибір інструментальних засобів, дослідник робить вибір теоретичної бази, на основі якої буде побудована модель системи. Отже, обравши теоретичну базу моделювання, дослідник має описати систему, що розглядається, обраними елементами формального опису і визначити для них усі необхідні параметри. Формальне представлення системи має вигляд схеми, в якій указані зв'язки між елементами системи та зв'язки з зовнішнім середовищем і указані параметри елементів системи. У формальній моделі міститься також інформація, як будуть знайдені вихідні змінні моделі в результаті моделювання. Наприклад, якщо в якості теоретичної бази моделювання обрані засоби мереж масового обслуговування, то формальна модель представляється зображенням мережі масового обслуговування, що складена за умовою задачі, з указуванням числових значень вхідних змінних і параметрів, а також формули розрахунку вихідних змінних моделі, що являються ціллю моделювання.

На третьому етапі дослідник приступає до створення моделі. Спочатку виконується реалізація моделі за допомогою обраного програмного забезпечення. Потім виконується верифікація моделі, тобто перевірка алгоритму моделювання на відповідність задуму моделювання. Наприклад, змінюють значення вхідних змінних і спостерігають як модель реагує на таке змінювання. Якщо реакція моделі відповідає логіці її функціонування, то модель вважається правильною. Завершується створення моделі перевіркою адекватності моделі, що полягає у порівнянні значень вихідних змінних об'єкта, що моделюється, і моделі при однакових значеннях вхідних змінних. Очевидно, що таку перевірку можна здійснити тільки, якщо відомі деякі значення вхідних і вихідних змінних досліджуваного об'єкта.

Четвертий етап – це дослідження моделі. Результати моделювання стають корисними, якщо проведене змістовне дослідження моделі відповідно до цілі моделювання. Експерименти, що проводяться з моделлю, мають бути спочатку сплановані, потім – проведені, і наприкінці – статистично оброблені. Наприклад, якщо при дослідженні технологічного процесу обробки деталей була поставлена мета – виявлення місць накопичення деталей, то в результаті моделювання слід не тільки указати ці місця накопичення та обсяги накопичення, але й дослідити, які фактори впливають на зменшення накопичення деталей, і запропонувати заходи щодо зменшення обсягів накопичення деталей.

Аналіз результатів моделювання складається з оцінки точності результатів моделювання, оцінки стійкості результатів моделювання та оцінки чутливості результатів моделювання.

Формування висновків та пропозицій є завершальним етапом моделювання, на якому підводяться підсумки та висловлюються думки щодо напрямків подальшого дослідження об'єкта моделювання. Звісно, що процес моделювання може бути представлений етапами тільки у звіті про результати моделювання. У ході моделювання досліднику доводиться неодноразово повертатись до попередніх етапів і уточнювати постановку задачі, формальний опис моделі, алгоритм реалізації або план проведення експериментів, поступово наближаючись до мети. На рисунку 1.4 представлений процес моделювання з урахуванням можливих повернень до попередніх етапів моделювання.

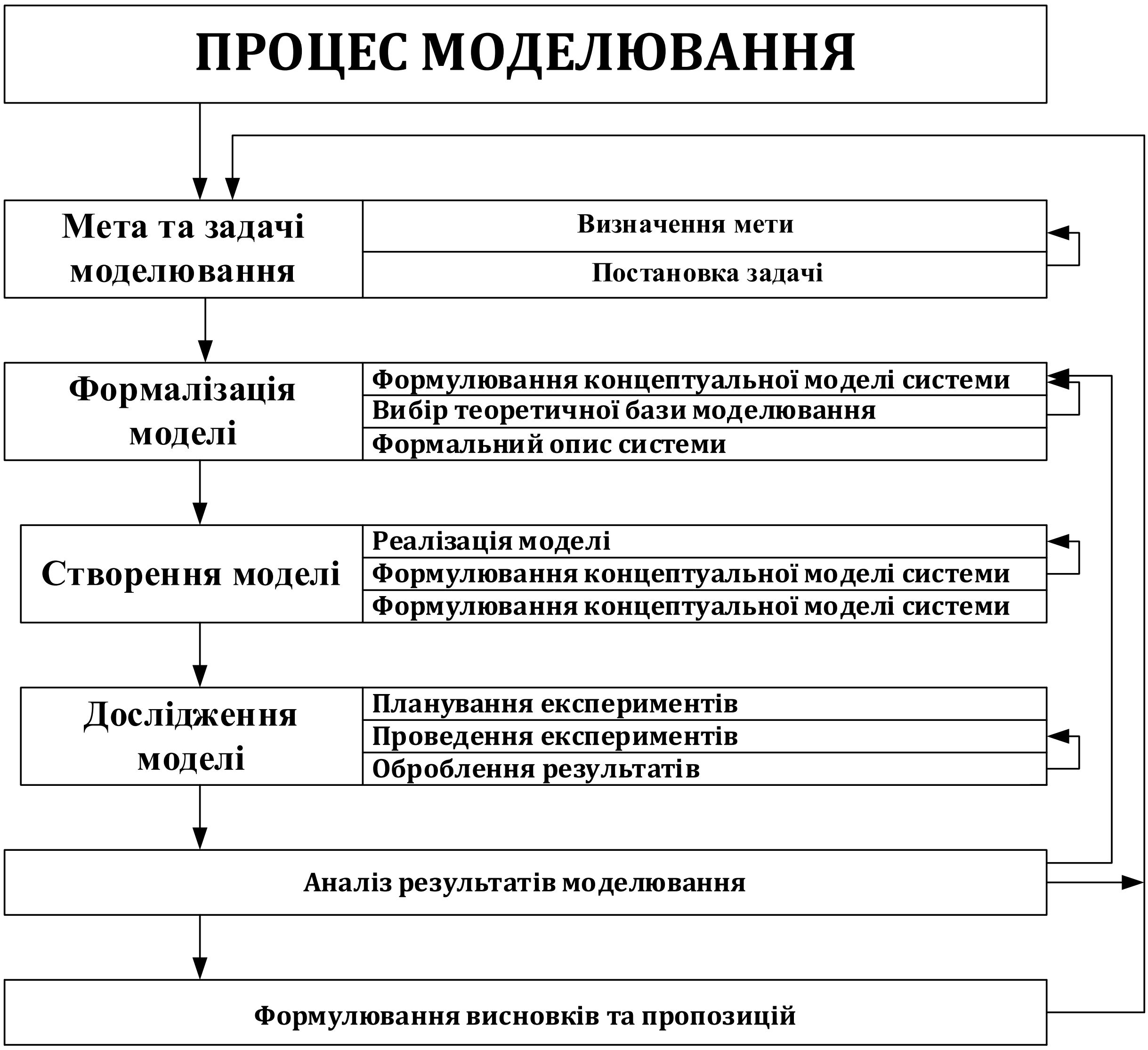


Рисунок 1.4 – Процес моделювання

Системний підхід до побудови моделей

Задачею системного аналізу являється формування опису системи, що відповідає меті дослідження системи.

Опис системи складається з опису:

1) набору вхідних змінних системи з указуванням їхніх основних характеристик;

2) набору вихідних змінних системи, визначення яких забезпечує досягнення цілі дослідження;

3) границь системи з указуванням того, що являється для системи її зовнішнім середовищем;

4) елементів системи з указуванням їхніх основних властивостей;

5) зв’язків між елементами системи.

Системний підхід до дослідження систем означає, що дослідник вивчає функціонування системи в цілому, не концентруючи свою увагу на окремих її частинах. Оснований системний підхід на визнанні факту, що навіть найліпше функціонування окремих підсистем та елементів системи не гарантує найліпшого функціонування всієї системи в цілому, оскільки завжди існує взаємодія між частинами системи.

Моделі, побудовані із застосуванням системного підходу, отримали назву системних моделей. Опис системи разом із указуванням цілі та задачі дослідження складає сутність концептуальної моделі системи. Назва «концептуальна» походить від латинського слова conceptio, що означає «сприйняття». Умовно можна виділити такі етапи створення концептуальної моделі системи:

- визначення цілі дослідження системи (орієнтація);
- вибір рівня деталізації системи (стратифікація);
- визначення елементів системи (деталізація);
- визначення впливу зовнішнього середовища (локалізація);
- визначення зв’язків між елементами системи та із зовнішнім середовищем (структуризація).

Формалізація процесів функціонування дискретних систем

Наступними прикладами є представлення процесу функціонування системи відомими формальними засобами, що надає досліднику можливість використати теоретичні та практичні здобутки науковців з дослідження систем. Нерідко саме на етапі формалізації системи з’ясовуються особливості функціонування системи, що досліджується, уточнюються значення параметрів, які характеризують алгоритм функціонування системи, набувають конкретного змісту складові елементи системи.

Найбільш формалізованим представленням є представлення у вигляді математичних формул. Менш формалізованим, але більш універсальним – представлення у вигляді схем, що відображають елементи системи та структурні взаємозв’язки між ними. Найбільш відомими і найбільш поширеними серед спеціалістів засобами формалізації процесів функціонування дискретних систем являються мережі масового обслуговування та мережі Петрі. Мережі масового обслуговування призначені для описування процесів оброблення, таких як виробничі процеси, бізнес-процеси, і представляють великий, але чітко обмежений клас систем. Мережі Петрі являються більш могутнім засобом формалізації дискретних процесів і описують системи із найскладнішими зв’язками, зокрема управляючими. Класифікація засобів формалізації процесів функціонування дискретних систем представлена на рисунку 1.5.

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ФНКЦІОНУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Формалізація процесів функціонування дискретних систем	**Мережі масового обслуговування**	**- розімкнені - замкнені - з блокуванням маршруту**
	Мережі Петрі	**- з часовими затримками - з конфліктними переходами - з багатоканальними переходами - з інформаційними зв’язками**

Рисунок 1.5 – Засоби формалізації функціонування дискретних систем

Алгоритми імітації процесів функціонування дискретних систем

Алгоритм, який відтворює функціонування системи за допомогою комп'ютерної програми, називається алгоритмом імітації. Побудова алгоритму імітації складається з побудови:

1) алгоритму просування модельного часу;

Існують три способи просування модельного часу:

- за принципом Δt;
- найближчої події;
- послідовного проведення об'єктів уздовж моделі.

Принцип Δt є найбільш універсальним, але частіше він використовується для моделювання неперервних динамічних систем, оскільки вимагає порівняно з іншими способами більших затрат комп'ютерного часу при тієї ж точності моделювання.

Принцип найближчої події

Дискретні системи, імітаційне моделювання яких розглядається, мають певну особливість: змінювання стану в таких системах відбувається тільки в деякі моменти часу, а в усі інші моменти часу система не змінюється. Змінювання стану моделі спричиняється виникненням певної події у системі. Процес функціонування системи розглядається як послідовність подій, що відбуваються в моделі. За принципом найближчої події модельний час просувається від моменту виникнення однієї події до моменту виникнення іншої, і після кожного просування часу реалізуються зміни стану моделі, відповідні до події, що виникла. Використання принципу найближчої події вимагає від дослідника побудови спеціальної процедури визначення моменту найближчої події, але за такої умови він отримує виграш у затратах комп'ютерного часу, оскільки пропускається моделювання системи у моменти часу, коли події не відбуваються.

Принцип послідовного проведення об'єктів уздовж моделі

За принципом послідовного проведення об'єктів уздовж моделі алгоритм просування часу не будується. Кожний об'єкт проводиться по моделі з моменту його надходження у модель до моменту виходу з моделі. Історія кожного проведення запам'ятовується так, що наступний об'єкт проводиться уздовж моделі з урахуванням історії попередніх проведень. Такий алгоритм імітації дає змогу моделювати систему тільки в моменти виникнення подій, не займаючись побудовою алгоритму просування модельного часу. Проте використовується він дуже рідко, оскільки часто призводить до складних заплутаних алгоритмів;

2) алгоритму просування стану моделі залежно від часу;

Процес функціонування імітаційної моделі може бути описаний з точки зору:

1) змінювання стану системи, що відбуваються в момент появи подій;

2) дій, які виконуються елементами системи;

3) процесу, який відбувається у системі.

Відповідно до означених способів опису функціонування моделі існують три способи просування стану моделі в часі:

- орієнтований на події;
- орієнтований на дії;
- процесно-орієнтований.

Спосіб, орієнтований на події

При підході, орієнтованому на події, дослідник визначає і описує події, які виникають у моделі. Імітація здійснюється виконанням упорядкованої у часі послідовності логічно взаємозв'язаних подій. Спосіб, орієнтований на події, при побудові алгоритмів імітації дискретних систем засобами універсальних мов програмування виявляється найефективнішим.

Спосіб, орієнтований на дії

При іншому підході, основаному на описуванні дій, що виникають у системі, дослідник визначає і описує дії елементів системи та умови початку і кінця кожної дії. Умови початку і кінця кожної дії перевіряються після чергового просування модельного часу. Якщо умова початку дії виконується, то виконується дія. Для того, щоб була виконана кожна дія, сканування умов здійснюється для всієї множини дій при кожному просуванні модельного часу. Цей підхід найбільш ефективний, коли тривалість дії залежить від того, наскільки стан всієї системи задовольняє задані умови. В інших випадках більш ефективним виявляється підхід, орієнтований на події. Взагалі, оскільки сканувати умови початку і кінця дій потрібно після кожного просування модельного часу і для кожної дії, спосіб побудови моделюючого алгоритму, орієнтований на дії, має обмежене застосування в імітації дискретних систем.

Спосіб, орієнтований на процес

При процесно-орієнтованому підході описують процес проходження об’єктів уздовж моделі, використовуючи кінцевий набір операторів. Послідовність операторів потім транслюється у відповідну послідовність подій і далі моделювання здійснюється як при підході, орієнтованому на події. Тому цей спосіб важко реалізувати самостійно, користуючись тільки універсальними мовами програмування. Використання його передбачає знання мов імітаційного моделювання;

3) алгоритму збирання інформації про поведінку моделі у процесі імітації;

Просування модельного часу та просування стану моделі залежно від часу становлять єдину задачу побудови алгоритму імітації. Якщо дослідник для реалізації алгоритму імітації використовує імітаційну мову моделювання, то моделюючий алгоритм закладений в самий засіб реалізації, і досліднику тільки корисно знати як він здійснюється, щоб не допустити помилки у застосуванні тієї або іншої імітаційної мови. Якщо ж дослідник використовує універсальну мову програмування, то задачу побудови моделюючого алгоритму йому потрібно вирішувати самостійно.

Контрольні питання

1 Що називається моделлю системи?

2 Які моделі Ви знаєте?

3 Які існують класифікації моделей?

4 Які існують способи побудови моделей?

5 Які моделі називають фізичними?

6 Які існують методи моделювання?

7 Що розуміють під терміном аналітичне моделювання? імітаційне? математичне?

8 Які переваги імітаційного моделювання систем?

9 Сформулюйте постановку задач: моделювання; оптимізації; ідентифікації; управління; прогнозування.

10 У чому полягає системний підхід до побудови моделі?

11 Які основні положення системного підходу?

12 Що розуміють під терміном «системна модель»?

13 З чого складається концептуальна модель системи?

14 Як створюється концептуальна модель системи?

15 Які є способи просування модельного часу?

16 Який із способів просування модельного часу є найприйнятнішим при імітації дискретних систем? Поясніть чому.

17 Які є способи просування стану моделі в часі?

2 ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{matrix}.$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, а запис $m \times n$ означає її розмір: m – кількість рядків матриці, n – кількість стовпців матриці. Якщо $m = n$, то матриця називається **квадратною**.

Дві матриці **рівні між собою**, якщо вони мають однаковий розмір і всі їхні відповідні елементи рівні між собою. Множина елементів $a_{11}\, a_{22}\, \dots\, a_{nn}$ квадратної матриці n – го порядку утворює головну діагональ, а множина елементів $a_{1n}\, a_{2(n-1)}\, \dots\, a_{n1}$ – побічну діагональ. Якщо $a_{ij} = a_{ji}$, то матриця називається **симетричною**.

Квадратну матрицю, в якої всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають **діагональною**.

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Якщо в діагональній матриці всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, то таку матрицю називають **одиничною** і позначають її буквою Е:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, в якої всі елементи дорівнюють нулю, називають **нульовою** або **нуль–матрицею**:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, що складається з одного стовпця $(m \times 1)$, називають **матрицею-стовпцем** або **вектором–стовпцем**; матрицю, що складається з одного рядка $(1 \times n)$ називають **матрицею–рядком** або **вектором–рядком**. Елементи вектора (вектора–стовпця або вектора–рядка) називають його **координатами**. Число координат вектора називають його **виміром**.

Квадратну матрицю називають **трикутною**, якщо всі її елементи a_{ij}, розміщені під головною діагоналлю $(i > j)$, або над головною діагоналлю $(i < j)$, дорівнюють нулю.

Сумою матриць одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = A + B;\ C = (c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на деяке число α , називається така матриця *C*, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці А на α, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Властивості додавання матриць та множення матриці на число:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (асоціативний закон додавання);

2) $A + B = B + A$ (комутативний закон);

3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутивний закон);

4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (дистрибутивний закон);

5) $A + 0 = A$.

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розміру $m\times n$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміру $n\times p$ називається така матриця $C=A\cdot B$ розміру $m\times p$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент якої можна знайти за формулою

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}.$$

Кожний елемент матриці *C* утворюється як сума добутків відповідних елементів i –го рядка матриці *A* на відповідні елементи j –го стовпця матриці *B*, тобто за схемою

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nj} & \vdots \end{pmatrix}.$$

У результаті множення дістанемо матрицю розміру $m\times p$.

Властивості множення матриць

Нехай λ – довільне число, *A*, *B*, *C* – довільні матриці, для яких визначені операції додавання та множення, записані в лівих частинах рівностей. Тоді визначені операції вказані в правих частинах, і справедливими є такі рівності:

1) $(AB)C=A(BC)$ (асоціативність множення матриць);

2) $(A+B)C=AC+BC$ (дистрибутивність множення);

3) $A(B+C)=AB+AC$ (дистрибутивність множення);

4) $\lambda(AB)=(\lambda A)B$.

З означення випливає, що в загальному випадку добуток матриць **некомутативний**: $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Матриці *A* та *B* називаються **переставними**, якщо $A\cdot B=B\cdot A$.

Переставними можуть бути тільки квадратні матриці однакової розмірності. Прикладом переставних матриць є діагональні матриці однакової розмірності.

Для довільної квадратної матриці A (n-порядку) визначений добуток $A \cdot A$ (матриці A на себе). Тому можна говорити про цілий невід'ємний степінь матриці, визначаючи послідовно

$$A^0 = E,\ A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A, \ldots, A^m = A^{m-1} \cdot A.$$

Для довільної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ **транспонованою матрицею** називається матриця $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, яка отримується з матриці A заміною рядків стовпцями, а стовпців рядками. Щоб з матриці A отримати матрицю A^T, потрібно перший рядок матриці A записати як перший стовпець матриці A^T, другий рядок матриці A записати як другий стовпець матриці A^T і т. д. Ця операція називається операцією **транспонування** матриці.

Властивості транспонування матриць

Нехай λ – довільне число, A, B – довільні матриці, для яких визначені операції додавання та множення, записані в лівих частинах рівностей. Тоді визначені операції вказані в правих частинах, і справедливими є такі рівності:

1) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

3) $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$;

4) $(A^T)^T = A$.

Матрицю A називають симетричною, якщо $A = A^T$, тобто якщо $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх i та j. Якщо $A = -A^T$, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$, то матрицю A називають **кососиметричною**. З означення випливає, що всі елементи головної діагоналі кососиметричної матриці дорівнюють нулю.

2.1 Визначники

Вираз $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ називають **визначником другого порядку**, складеним для квадратної матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Позначають визначник другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Визначником третього порядку, складеним для квадратної матриці, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число, що дорівнює алгебраїчній сумі

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Її позначають $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

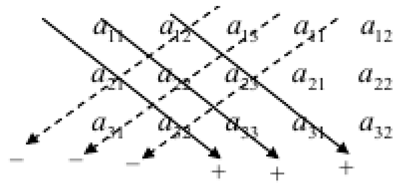
$$-a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Визначники третього порядку можна обчислювати за правилом, яке називається правилом трикутників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Визначники третього порядку можна обчислювати за правилом Саррюса. За цим правилом складають таблицю, для якої обчислюють визначник. Справа до неї дописують два перші стовпці. В основній таблиці проводять головну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що перетинають по три елементи. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома першими членами визначника. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводять побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні, на яких розміщено по три елементи. Добутки цих елементів беруть с протилежним знаком.



Такий самий результат матимемо й тоді, коли до основної таблиці допишемо знизу два перші рядки і виконаємо ті самі дії, що й у першому випадку.

Добутком двох визначників $|A| = |a_{ij}|_n$ і $|B| = |b_{ij}|_n$ називається третій визначник $|C| = |c_{ij}|_n$, елементи якого утворюються за допомогою однієї з чотирьох формул:

$$
\begin{aligned}
&1)\ c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{j1} + a_{i2} \cdot b_{j2} + \dots + a_{in} \cdot b_{jn};\\
&2)\ c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj};\\
&3)\ c_{ij} = a_{1i} \cdot b_{j1} + a_{2i} \cdot b_{j2} + \dots + a_{ni} \cdot b_{jn};\\
&4)\ c_{ij} = a_{1i} \cdot b_{1j} + a_{2i} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ni} \cdot b_{nj}.
\end{aligned}
$$

У випадку 1) елементи c_{ij} утворюються як сума добутків елементів i-го рядка визначника $|A|$ на відповідні елементи визначника $|B|$, тому говорять, що в цьому випадку добуток одержано множенням рядків 1-го визначника на рядки 2-го визначника.

У випадку 2) – шляхом множення рядків першого визначника на стовпці другого визначника.

У випадку 3) – шляхом множення стовпців 1-го визначника на рядки 2-го визначника.

У випадку 4) – шляхом множення стовпців 1-го визначника на стовпці другого визначника.

Визначником n**–го порядку матриці** $A = \left(a_{ij}\right)_n$ називається алгебраїчна сума усіх можливих $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів, взятих по одному і тільки по одному із кожного рядка і кожного стовпця матриці *A*; при цьому добуток береться зі знаком «+», якщо індекси його елементів утворюють парну підстановку і зі знаком «–», – якщо непарну.

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Визначником n**–го порядку матриці** $A=\left(a_{ij}\right)_n$ називається алгебраїчна сума усіх можливих $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці *A*; знак члена визначається множником $\left(-1\right)^s$, де *s* – число інверсій у подвійній перестановці (підстановці) індексів елементів цього члена.

У цьому випадку загальний член визначника має вигляд $T=\left(-1\right)^S a_{i_1k_1}\cdot a_{i_2k_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_nk_n}$, а визначник – $\Delta A=\sum\limits_{n!}\left(-1\right)^S a_{i_1k_1}\cdot a_{i_2k_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_nk_n}$.

Визначником n**–го порядку матриці** $A=\left(a_{ij}\right)_n$ називається алгебраїчна сума усіх можливих $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці *A*; знак члена визначається множником $\left(-1\right)^t$, де *t* – число інверсій у перестановці других індексів елементів цього члена, якщо він упорядкований за першими індексами.

Мінором $(n-1)$–го порядку M_{ij} матриці n –го порядку *A*, називається визначник матриці $(n-1)$–го порядку, утворений з матриці *A* викреслюванням i–го рядка та j–го стовпчика, тобто

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n}\\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} **елемента** a_{ij} матриці A n–го порядку називається мінор $(n-1)$–го порядку M_{ij} помножений на $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Обчислення визначників n–го порядку

1 Визначник, у якого всі елементи i–го рядка, крім a_{ij}, дорівнюють нулю, дорівнює добутку цього елемента a_{ij} на його алгебраїчне доповнення A_{ij}, тобто $\Delta=a_{ij}A_{ij}$.

2 Визначник n–го порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь–якого рядка на відповідні їм алгебраїчні доповнення (це виконується і для стовпців).

Тобто $\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$ (за рядками),

або $\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$ (за стовпцями).

Властивості визначників

1 Якщо у визначнику n–го порядку поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник поміняє знак на протилежний.

2 Якщо у визначнику є два однакові рядки (стовпці), то цей визначник дорівнює нулю.

3 Якщо у визначнику n–го порядку всі елементи одного з рядків помножити на число $m\neq 0$, то і величина визначника помножиться на це число.

4 Визначник, у якого відповідні елементи двох рядків пропорціональні, дорівнює нулю.

5 Якщо елементи p–го рядка визначника n–го порядку є сумами двох доданків

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b_{p1}+c_{p1} & b_{p2}+c_{p2} & \cdots & b_{pn}+c_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то цей визначник можна подати як суму двох визначників n–го порядку: $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, де Δ_1 і Δ_2 – визначники, утворені з Δ заміною елементів p–го рядка відповідно першими або другими доданками цих елементів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6 Якщо до елементів якогось рядка визначника n–го порядку додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне й те саме число, то величина визначника не зміниться.

Оскільки m може бути меншим за 0, то визначник не змінюється при відніманні одного рядка від іншого.

7 Визначник n–го порядку при транспонуванні матриці не змінює своєї величини.

$$A = (a_{ij})_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8 Якщо всі елементи якогось визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

9 Якщо у визначнику один із рядків буде лінійною комбінацією інших рядків, то визначник дорівнює нулю.

Для квадратичних матриць поряд з поняттям мінора вводиться поняття доповнюючого до нього мінора. Нехай дана квадратична матриця і її мінор M порядку k. Мінором M' **доповнюючим** до мінора M називається визначник матриці, одержаної із даної викреслюванням тих її k рядків і k стовпців, які входять в мінор M.

Мінори квадратичної матриці називаються також мінорами її визначника. **Алгебраїчним доповненням мінора** називається доповнюючий до нього мінор, взятий із знаком $(-1)^t$, де t – сума номерів тих рядків і стовпців даної матриці, які входять в мінор, що розглядають.

Теорема Лапласа

Визначник n–го порядку дорівнює сумі добутків всіх можливих мінорів k–го порядку $(1 \le k \le -1)$, які можна скласти із довільно вибраних k рядків і k стовпців, на алгебраїчні доповнення цих мінорів.

Метод рекурентних співвідношень

Цей метод полягає в тому, що визначник виражають, перетворюють і розкладають за елементами рядка або стовпця через визначники такого ж вигляду, але нижчого порядку. Одержану рівність називають **рекурентним співвідношенням**.

Далі обчислюють за загальним виглядом визначника стільки визначників нижчих порядків, скільки їх було у правій частині рекурентного співвідношення. Якщо необхідно одержати вираз для визначника будь-якого порядку n, то, обчислюючи із рекурентного співвідношення декілька визначників нижчого порядку, стараються замінити загальний вигляд шуканого виразу, а потім доводять справедливість цього виразу при будь-яких n за допомогою рекурентного співвідношення і методу математичної індукції.

Обернена матриця

Матрицею, **оберненою** до даної квадратної матриці A, називають матрицю A^{-1}, яка задовольняє співвідношення $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Квадратну матрицю A називають **неособливою** або **невиродженою**, якщо визначник цієї матриці $|A| \neq 0$. Якщо $|A| = 0$, то матрицю A називають **особливою** або **виродженою**.

Матриця $A = (a_{ij})$ називається **невиродженою**, якщо система її рядків лінійно незалежна, і виродженою, якщо між її рядками існує лінійна залежність.

Поняття оберненої матриці вводиться тільки для квадратних матриць, визначник яких відмінний від нуля.

Ранг матриці

В матриці A розмірності $m \times n$ мінор r–го порядку називається **базисним**, якщо він відмінний від нуля, а всі мінори $(r+1)$-го порядку рівні нулю або взагалі їх не існує.

Рангом матриці називається порядок базисного мінора. Позначення: $RangA$, $r(A)$.

Якщо у матриці всі мінори *k*–го порядку рівні нулю, то рівні нулю і мінори більш високого порядку.

Ранг матриці дорівнює найбільшому порядку відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Якщо квадратна матриця невироджена, то її ранг дорівнює її порядку.

Теорема (про ранг матриці)

Ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків матриці.

Максимальне число лінійно незалежних рядків матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпців: $r(A) = r(A^T)$.

Матричні рівняння

Матричні рівняння найпростішого виду з невідомою матрицею X записуються так:

$$A \cdot X = B,$$
$$X \cdot A = B,$$
$$A \cdot X \cdot C = B.$$

У рівняннях матриці A, B, C, X такої розмірності, що виконуються операції множення. Якщо матриці A і C невироджені, то розв'язки рівнянь можна записати так:

$$X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = B \cdot A^{-1}$$
$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

Системи лінійних рівнянь

У загальному випадку система лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = bm, \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі, які треба знайти;

a_{ij} – сталі числа $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$, їх називають **коефіцієнтами системи** (перший індекс коефіцієнта означає номер рівняння, в якому міститься цей коефіцієнт, а другий індекс – номер невідомого, при якому його записано);

$b_1, b_2, \ldots b_m$ – сталі числа, їх називають **вільними членами**.

Розв’язком системи називають будь-яку сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, яка при підстановці в систему замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ перетворює всі рівняння системи в тотожні.

Сумісною називають, якщо вона має принаймні один розв’язок, і несумісною, якщо вона не має розв’язків.

Якщо система має єдиний розв’язок, то її називають **визначеною**; якщо система має більш як один розв’язок, то її називають **невизначеною**.

Систему називають **однорідною**, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і **неоднорідною**, якщо принаймні один із вільних членів не дорівнює нулю. Однорідні системи завжди сумісні, оскільки мають розв’язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, який називають **очевидним** або **тривіальним**. Дві системи лінійних рівнянь називають **еквівалентними** або **рівносильними**, якщо вони сумісні й мають одні й ті самі розв’язки, або якщо вони **несумісні**.

При розв’язуванні системи лінійних рівнянь виконують елементарні перетворення над рівняннями системи, які не порушують систему:

1) множення обох частин рівняння на число відмінне від нуля;

2) додавання (віднімання) до одного рівняння іншого, помноженого на число відмінне від нуля;

3) переставляння рівнянь місцями (транспонування двох рівнянь);

4) викреслювання рівнянь виду: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$;

5) переставляння невідомих в системі рівнянь.

Формули Крамера

Якщо в системі лінійних рівнянь число невідомих дорівнює числу рівнянь і визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулами Крамера.

Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи n лінійних рівнянь з n невідомими, відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв’язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ – головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих;

Δ_j $(j = \overline{1,n})$. – визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Позначимо через A матрицю з коефіцієнтів при невідомих, через X – матрицю-стовпець з невідомих (вектор) і через B – матрицю-стовпець з вільних членів (вектор):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Урахувавши правило множення матриць і умову рівності матриць, систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ або $A \cdot X = B$.

Припустимо, що матриця A – неособлива $(|A| \neq 0)$, тоді існує обернена матриця A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини рівності на A^{-1}: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{1} \cdot B$. Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, то остаточно дістанемо $X = A^{-1} \cdot B$. Отже, матриця-стовпець з невідомих дорівнює добутку оберненої матриці A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів.

2.2 Завдання для самостійного опрацювання

1 Виконати дії над матрицями

$$2(A+B)(2B-A),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2 Знайти значення многочлена $f(x) = 2x^2 - x - 15$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3 При якому значенні α матриця $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & \alpha \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ буде виродженою?

4 Знайти матриці переставні з матрицею $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5 Для визначника $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ знайти:

1) мінори та алгебраїчні доповнення для елементів a_{i3}, a_{2j};

2) обчислити визначник: а) розклавши його за елементами i -го рядка; б) розклавши його за елементами j-го стовпчика; в) отримавши спочатку нулі в i -му рядку, $i=4$, $j=1$.

6 Знайти ранг матриці залежно від параметра γ: $\begin{pmatrix} \gamma & 6 & 5 \\ 4 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7 Двома способами знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

8 Розв’язати матричне рівняння

$$A^{-1}\cdot X\cdot A=B\ ,\ \ A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9 Розв’язати матричне рівняння

$$A\cdot X\cdot C=B,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10 Обчислити визначник $\Delta_n=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

11 Дослідити на сумісність, визначити загальний та два частинних розв'язки системи лінійних рівнянь, виконати перевірку

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

12 Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь, виконати перевірку

$$\begin{cases} 2x_1 - 12x_2 - 5x_3 - 8x_4 - x_5 = 0, \\ 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 10x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 17x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$

13 Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, виконати перевірку

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ -x + 3z = 8, \\ 3x - 2y + 5z = 14. \end{cases}$$

14 Розв‘язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, виконати перевірку

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

15 Розв‘язати систему лінійних рівнянь матричним способом та виконати перевірку

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

Контрольні питання

1 Поняття матриці.

2 Види матриць.

3 Додавання матриць.

4 Множення матриці на число.

5 Добуток матриць.

6 Властивості дій над матрицями.

7 Елементарні перетворення матриць.

8 Ранг матриці. Теорема про ранги еквівалентних матриць.

9 Властивості рангу матриці.

10 Обернена матриця.

11 Чи можна множити квадратну матрицю на неквадратну?

12 Чи може добуток двох неквадратних матриць бути квадратною матрицею?

13 Чи можна при множенні ненульових матриць одержати нульову матрицю?

14 Яке рівняння називається лінійним?

15 Що називається розв’язком лінійного рівняння?

16 Який вигляд має система лінійних рівнянь?

17 Що називається розв’язком системи лінійних рівнянь?

18 Що означає розв’язати систему лінійних рівнянь?

19 Яка система називається сумісною, несумісною?

20 Яка система називається визначеною, невизначеною?

21 Розв’язання систем лінійних рівнянь за правилом Крамера.

22 У чому полягає метод оберненої матриці розв’язку системи лінійних рівнянь?

3 ТЕОРІЯ ІГОР І КОМБІНАТОРНІ МЕТОДИ В ОПТИМІЗАЦІЇ УПРАВЛІНСЬКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Мета роботи: вивчення теорії ігор та комбінаторних методів і їх застосування для оптимізації управлінських рішень, ознайомлення з основними поняттями теорії ігор, а також здійснення практичного аналізу різноманітних управлінських ситуацій за допомогою комбінаторних методів. Після завершення роботи учасники будуть здатні застосовувати отримані знання для пошуку оптимальних стратегій управління в умовах обмежених ресурсів та конкурентного середовища, що сприятиме підвищенню ефективності прийняття управлінських рішень у різних галузях діяльності.

Короткі теоретичні відомості

Гра – це ідеалізована математична модель колективного поводження: декілька учасників впливають на ситуацію, причому їхні інтереси різні. Зіткнення протилежних інтересів породжує конфлікт, з якого потрібно знайти вихід, що найбільш влаштовує всіх учасників [1]. Сам термін «гра» застосовується для позначення сукупності правил і угод, якими керуються суб'єкти, поведінка яких визначається. Кожний такий суб'єкт k, де $k = \overline{1,K}$, або гравець, характеризується наявністю індивідуальної системи цільових настанов і стратегій $S_1, S_2, \ldots, S_{mk}$, тобто можливих варіантів дій у грі [2].

У теорії ігор рівновагою Неша називається сукупність стратегій або дій у грі з двома чи більше гравцями, згідно з якими кожен учасник реалізує оптимальну стратегію, передбачаючи дії суперників. Це така сукупність стратегій та виграшів, при якій жоден із учасників не може збільшити виграш, змінивши вибір стратегії в односторонньому порядку, коли інші учасники не змінюють свого вибору [5].

Теорія ігор – це сукупність математичних методів для аналізу й оцінки поводження в конфліктних ситуаціях, а також вибору оптимальної стратегії поводження. Вона широко використається в організації виробництва й економіці. Наприклад, господарська діяльність підприємств перебуває в тісному зв'язку з поводженням покупця відносно придбання товарів. Кожне підприємство приймає конкретне рішення щодо своєї діяльності, з огляду на поведінку покупців, на те як зміниться їхня чисельність, активність.

Ціль гри – розроблення таких пропозицій гравцям, щоб той, хто виграє, зумів виграти якнайбільше, а той, хто програє, програв би якнайменше. Ходом у грі назвемо вибір однієї з можливих дій і її здійснення. Стратегією гравця називається система правил, що однозначно визначають вибір поводження гравця на кожному ході залежно від ситуації, яка склалася в процесі гри. Кожна фіксована стратегія, яку може вибрати гравець, називається його чистою стратегією. Теорія гри дає вказівки гравцям про вибір стратегій, які забезпечать максимально можливий середній виграш [1].

Комбінаторика – розділ математики, присвячений розв'язанню задач вибору та розташування елементів деякої, зазвичай, скінченної множини відповідно до заданих правил. Кожне таке правило визначає спосіб побудови деякої конструкції із елементів вихідної множини, що зветься комбінаторною конфігурацією. Тому на меті комбінаторного аналізу стоїть дослідження комбінаторних конфігурацій, алгоритмів їхньої побудови, оптимізація таких алгоритмів, а також розв'язання задач переліку [3].

Комбінаторна оптимізація – розділ теорії оптимізації. Розглядає задачі оптимізації, множина розв'язків яких дискретна або може бути зведена до дискретної [4]. Як приклад використання комбінаторної оптимізації можна привести задачу комівояжера, що полягає у визначенні найбільш вигідного маршруту, що охоплює всі вказані міста хоча б один раз. У завданні вказуються критерії оптимальності маршруту (найкоротший, найбільш економний, загальний критерій і т. д.), а також відповідні матриці відстаней, вартостей тощо. Зазвичай передбачається, що кожне місто має бути відвідане лише один раз; у такому випадку розв’язок можна знайти серед гамільтонових циклів.

Задача комівояжера може бути використана для широкого спектру завдань, що передбачають проходження певного об’єкта через набір точок так, щоб завершення маршруту співпадало з початком.

Приклади задач, де цей метод може бути корисним, включають:

1 планування маршруту для кур’єра, який доставляє товари. Визначення оптимального шляху проходження кур’єром через точки доставлення товару;

2 організація маршруту для однієї машини, наприклад, для роботи на автостоянці та складі з запасами, а також проходження всіх точок з потребами, з поверненням машини наприкінці робочої зміни на початкову точку.

Один із прикладів використання розв'язку задачі комівояжера для 100 міст – це синтез петлевих та безпетлевих антенних вібраторів розміром 10x10 за допомогою мурашиного алгоритму оптимізації.

Контрольні питання

1 Що таке теорія ігор і які її основні поняття?

2 Що означає концепція рівноваги (рівновага Неша) в теорії ігор?

3 Які види стратегій можуть бути використані в теорії ігор?

4 Що таке задача комівояжера і які основні методи її розв’язання?

5 Наведіть приклади задач, де можуть бути застосовані комбінаторні методи.

6 У класі сидять n студентів і не розуміють один момент в лекції. Проблема в тому, що коли хтось спитає викладача, то він буде виглядати

дурнем, і тому всі мовчать. Вважається, що той хто питає, отримує виграш 6, а всі інші, хто дізнаються відповідь, отримують по 10. Якщо ніхто не питає, то всі отримують нуль. Яка стратегія найкраща для кожного гравця і яка ймовірність того, що питання не буде задане? Як ця ймовірність залежить від кількості?

7 Два гравці грають у гру «Вибір числа». Кожен гравець обирає ціле число від 1 до 10. Якщо сума обраних чисел парна, перший гравець виграє; якщо непарна – другий гравець. Які числа обрати кожному гравцеві для максимізації ймовірності перемоги? (Щоб максимізувати ймовірність перемоги, перший гравець повинен обрати парне число, а другий – непарне. Отже, оптимальними виборами будуть 2 і 3.)

8 Два виробники мобільних телефонів, Apple і Samsung, змагаються на ринку. Якщо обидва виробники встановлюють високі ціни, кожен з них отримує прибуток 100 млн доларів. Якщо один знижує ціну, а інший залишає високу ціну, перший отримує 150 млн, а другий – 50 млн. Якщо обидва виробники знижують ціни, кожен отримує 80 млн. Яка оптимальна стратегія для кожного виробника? (Оптимальна стратегія для кожного виробника – встановити високу ціну. Це так зване «домінуюче рішення», оскільки в обох випадках (якщо суперник встановлює високу або низьку ціну), це принесе більший прибуток).

9 Два гравці грають у гру «Розподіл виграшу». Перший гравець пропонує розподіл суми в 100 гривень між ними. Якщо другий гравець приймає пропозицію, гроші розподіляються відповідно до пропозиції. Якщо він відхиляє пропозицію, ніхто нічого не отримує. Якщо обидва гравці раціональні, яка буде оптимальна пропозиція першого гравця? (Оптимальна пропозиція для першого гравця – пропозиція, де він отримує найбільший можливий виграш, але при цьому другий гравець все ще має підстави прийняти пропозицію, оскільки йому обіцяють частку виграшу. Наприклад, пропозиція 90/10 або 80/20 може бути оптимальною, оскільки вона

пропонує першому гравцеві більший виграш, а другому – достатньо, щоб було вигідно прийняти пропозицію).

10 Два інтернет-магазини продають однаковий товар. Кожен магазин може встановити високу або низьку ціну на товар. Якщо обидва магазини встановлюють високу ціну, кожен отримує прибуток, але продажі знижуються. Якщо один магазин встановлює високу ціну, а інший – низьку, перший отримує більший прибуток, але менше продажів, а другий – менший прибуток, але більше продажів. Якщо обидва магазини встановлюють низьку ціну, вони мають велику кількість продажів, але менший прибуток. Яка оптимальна стратегія для кожного магазину? (Оптимальною стратегією для кожного магазину може бути встановлення низької ціни. Проте оскільки продажі та прибуток взаємопов'язані, тут не існує однозначної стратегії, яка б забезпечила найбільший прибуток для обох магазинів без урахування взаємодії інших. Отже, оптимальна стратегія може варіюватися залежно від конкретних обставин та стратегій конкурента).

4 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Системи лінійних рівнянь мають вигляд

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + ... + a_{3n} \cdot x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Умовні позначення:

a_{ij}, b – числа, які відомі,

x_j – невідомі числа.

Методи вирішення системи рівнянь за допомогою матриць будуть розглянуті у цьому розділі.

Використовуючи правило множення матриць ($A * X = B$), можемо розділити початкову систему лінійних рівнянь на три таких:

$$\text{A=}\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ B=}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ X=}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Поглянувши на вид матриці *A*, можна зробити висновок щодо наявності кількості варіантів розв'язання цієї системи. Якщо число стовпчиків системи n, тобто кількість її змінних, більше числа рядків m, тобто кількості рівнянь, то матриця буде мати назву недовизначеної. Це означає, що або система не буде мати рішень зовсім, або їх буде нескінченна множина. І навпаки, якщо m буде більше за n, то система буде мати назву перевизначеної. І внаслідок цього, вона зовсім не буде мати рішень.

Для вирішення системи лінійних рівнянь застосовують такі методи: метод Гауса, Крамера та матричний метод.

Метод Гауса

Першим методом, який буде розглянуто для вирішення системи лінійних рівнянь є метод Гауса.

Основою метода Гауса є ствердження, що обирається одне рівняння системи та замінюється новим рівнянням. Це нове рівняння отримується шляхом додавання до обох частин обраного рівняння обох частин нового рівняння, але помноженим на число, яке є єдиним для обох частин. Така заміна допоможе отримати систему, яка буде еквівалентна початковій системі. Тобто вона буде так само чи не мати зовсім рішень, чи мати такі ж самі рішення, як і початкова система.

Метод Гауса полягає у послідовному виключенні невідомих змінних з кожного рівняння системи. По-перше, виключимо змінну x_1 із усіх рівнянь, окрім одного. Візьмемо саме те рівняння, в якому x_1 не буде дорівнювати нулю. Наступним шагом змінимо друге рівняння. Для цього додаємо до обох його частин число, яке дорівнює $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$.У такий же спосіб змінюємо і третє рівняння, та додаємо $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$. Отже, змінна x_1 залишиться лише у одному з трьох рівнянь системи. І в результаті перетворення буде отримано нову систему. Ця система буде еквівалентна початковій.

Таку ж процедуру робимо з рівняннями нової системи, але виключаючи змінну x_2. В результаті отримуємо декілька еквівалентних систем.

Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} -4x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 18 \\ -8x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 30 \end{cases}.$$

Для вирішення системи перепишемо її у матричному вигляді. Далі вирішимо за методом Гауса

$$\left(\begin{array}{c|c} -4-8-4 & 4 \\ 6-2-6 & 18 \\ -8-6-8 & 30 \end{array}\right).$$

Першу строку поділимо на -4, що відповідає значенню із змінною x_1

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+2+1 & -1 \\ 6-2-6 & 18 \\ -8-6-8 & 30 \end{array}\right).$$

Із другої строки віднімемо першу строку, помножену на 6

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+2+1 & -1 \\ 0-14-12 & 24 \\ -8-6-8 & 30 \end{array}\right).$$

До третьої строки додаємо першу строку, помножену на 8

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+2+1 & -1 \\ +0-14-12 & 24 \\ +0-10+0 & 22 \end{array}\right).$$

Другу строку ділимо на -14

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+2+1 & -1 \\ +0+1+\frac{6}{7} & -\frac{12}{7} \\ +0-10+0 & 22 \end{array}\right).$$

Від першої строки віднімаємо другу строку, помножену на 2

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+0-\dfrac{5}{7} & -\dfrac{17}{7} \\ +0+1+\dfrac{6}{7} & -\dfrac{12}{7} \\ +0-10+0 & 22 \end{array}\right).$$

Від третьої строки віднімаємо другу строку, помножену на 10

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+0-\dfrac{5}{7} & -\dfrac{17}{7} \\ +0+1+\dfrac{6}{7} & -\dfrac{12}{7} \\ +0+0-\dfrac{60}{7} & \dfrac{274}{7} \end{array}\right).$$

Третю строку ділимо на $-\dfrac{60}{7}$

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+0-\dfrac{5}{7} & -\dfrac{17}{7} \\ +0+1+\dfrac{6}{7} & -\dfrac{12}{7} \\ +0+0+1 & -\dfrac{137}{30} \end{array}\right).$$

До першої строки додаємо третю строку, помножену на $\dfrac{5}{7}$

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+0+0 & -\dfrac{5}{6} \\ +0+1+\dfrac{6}{7} & -\dfrac{12}{7} \\ +0+0+1 & -\dfrac{137}{30} \end{array}\right).$$

Від другої строки віднімаємо третю строку, помножену на $\dfrac{6}{7}$

$$\left(\begin{array}{c|c} +1+0+0 & -\dfrac{5}{6} \\ +0+1+0 & \dfrac{11}{5} \\ +0+0+1 & -\dfrac{137}{30} \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{6} \\ x_2 = \dfrac{11}{5} \\ x_3 = -\dfrac{137}{30} \end{cases}.$$

Зробимо перевірку

$$\begin{cases} -4*(-\dfrac{5}{6})-8*\dfrac{11}{5}-4*(-\dfrac{137}{30})=\dfrac{10}{3}-\dfrac{88}{5}-\dfrac{274}{15}=\dfrac{50-264+274}{15}=\dfrac{60}{15}=4 \\ 6*(-\dfrac{5}{6})-2*\dfrac{11}{5}-6*(-\dfrac{137}{30})=-5-\dfrac{22}{5}-\dfrac{411}{15}=\dfrac{-75-66+411}{15}=\dfrac{270}{15}=18 \\ -8*(-\dfrac{5}{6})-6*\dfrac{11}{5}-8*(-\dfrac{137}{30})=\dfrac{20}{3}-\dfrac{198}{5}-\dfrac{548}{15}=\dfrac{100-198+548}{15}=\dfrac{450}{15}=30 \end{cases}.$$

Метод Крамера

Розв’язання системи лінійних рівнянь за методом Крамера передбачає використання визначників матриці. Вони займають перші позиції в подібних операціях при наявності *n* рівнянь з *n* невідомими.

Система лінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + ... + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + ... + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + ... + a_{3n}\cdot x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + a_{n3}\cdot x_3 + ... + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}.$$

Головний визначник системи має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ...+a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ...+a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ...+a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ...+a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$X_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1,..n.,$ Δ_j – визначник n-го порядку. Він відрізняється від Δ стовпчиком J, який замінено стовпчиком, який складається із вільних членів $i = 1,..,n.$

Метод Крамера можливо використати за умови, що $\Delta \neq 0$. При цьому система буде мати лише єдине рішення.

Якщо $\Delta = 0$, та якщо є хоча б один визначник Δ_j, та $\Delta_j \neq 0$, то система не має жодного рішення.

Якщо $\Delta = 0$ та $\Delta_j = 0, j = 1,..n$, то хоча б одне рівняння системи буде лінійною комбінацією інших рівнянь. Тобто воно може бути видалено із системи. І залишиться система з n невідомими і (n-1) рівнянь. Треба знайти із визначників в його лівій частині визначник (n-1) порядку (визначник (n-1) не має дорівнювати нулю). Береться система із головним визначником. А стовпчик, в якому доданки, які включають в себе змінну x_k та коефіцієнти, при яких доданки не включені до цього визначника, переносяться до правої частини.

У процесі розв’язання нової системи за методом Крамера результат буде залежати від x_k. Якщо серед визначників (n-1) порядку також не буде значень, які дорівнюють нулю, то можна прибрати наступне рівняння. Повторюємо ту ж операцію для визначника (n-2) порядку, який також не буде дорівнювати нулю.

Приклад розв’язання системи лінійних рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} -4x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 18 \\ -8x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 30 \end{cases}.$$

Використовуючи формулу для розрахування визначника матриці 3х3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & -8 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & -6 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot(-2)\cdot(-8) + (-8)\cdot(-6)\cdot(-8) + (-4)\cdot 6\cdot(-6) - (-4)\cdot(-2)\cdot(-8) - (-4)\cdot(-6)\cdot(-6) -$$

$$-(-8)\cdot 6\cdot(-8) = -64 - 384 + 144 + 64 + 144 - 384 = -480;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 18 & -2 & -6 \\ 30 & -6 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= (4)\cdot(-2)\cdot(-8) + (-8)\cdot(-6)\cdot 30 + (-4)\cdot 18\cdot(-6) - (-4)\cdot(-2)\cdot 30 - 4\cdot(-6)\cdot(-6) - (-8)\cdot 18\cdot(-8) =$$

$$= 64 + 1440 + 432 - 240 - 144 - 1152 = 400;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 6 & 18 & -6 \\ -8 & 30 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot 18\cdot(-8) + 4\cdot(-6)\cdot(-8) + (-4)\cdot 6\cdot 30 - (-4)\cdot 18\cdot(-8) - (-4)\cdot(-6)\cdot 30 - 4\cdot 6\cdot(-8) =$$

$$= 576 + 192 - 720 - 576 - 720 + 192 = -1056;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 6 & -2 & 18 \\ -8 & -6 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot(-2)\cdot 30 + (-8)\cdot 18\cdot(-8) + 4\cdot 6\cdot(-6) - (-4)\cdot(-2)\cdot(-8) - (-4)\cdot 18\cdot(-6) - (-8)\cdot 6\cdot 30 =$$

$$= 240 + 1152 - 144 - 64 - 432 + 1440 = 2192;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{400}{-480} = -\frac{5}{6};$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1056}{-480} = \frac{11}{5};$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2192}{-480} = -\frac{137}{30}.$$

Матричний метод

Для розв’язання системи лінійних рівнянь матричним методом потрібно побудувати матрицю, обернену до початкової матриці, отриманої при розділі системи рівнянь на три матриці.

Наприклад, якщо є деяка система, яка має вигляд $A \cdot X = B$. A – квадратна матриця. Для розв’язання цього виразу потрібно розрахувати матрицю (стовпчик) X. Зробити це можна саме завдяки наявності матриці, оберненої до первинної. У випадку, коли детермінант A не дорівнює нулю, то можна знайти A^{-1}, і це буде означати, що $X = A^{-1}B$ має рішення.

Для побудови оберненої матриці потрібно виконати такі кроки:

- виконати заміну всіх елементів матриці a_{ij} на мінори, відповідні до елементів a_{ij};
- на другому етапі потрібно провести транспонування отриманої матриці;
- на третьому етапі потрібно транспоновану матрицю помножити на визначник початкової матриці ($\frac{1}{\Delta}$).

Приклад розв’язання системи лінійних рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} -4x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 18 \\ -8x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 30 \end{cases},$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & -6 & -8 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$A \cdot X = B$, відповідно $X = A^{-1}B$.

Знайдемо обернену матрицю методом алгебраїчних доповнень.

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -8 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & -6 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot(-2)\cdot(-8) + (-8)\cdot(-6)\cdot(-8) + (-4)\cdot 6\cdot(-6) - (-4)\cdot(-2)\cdot(-8) - (-4)\cdot(-6)\cdot(-6) -$$
$$-(-8)\cdot 6\cdot(-8) = -64 - 384 + 144 + 64 + 144 - 384 = -480,$$

Визначник матриці А не дорівнює нулю. Отже, обернена матриця A^{-1} існує.

Знайдемо мінор M_{11} та алгебраїчне доповнення A_{11}.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-8) - (-6)\cdot(-6) = 16 - 36 = -20;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -20.$$

Знайдемо мінор M_{12} та алгебраїчне доповнення A_{12}.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -8 & -8 \end{vmatrix} = 6\cdot(-8) - (-8)\cdot(-6) = -48 - 48 = -96;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 96.$$

Знайдемо мінор M_{13} та алгебраїчне доповнення A_{13}.

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = 6\cdot(-6) - (-8)\cdot(-2) = -36 - 16 = -52;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -52.$$

Знайдемо мінор M_{21} та алгебраїчне доповнення A_{21}.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = (-8)\cdot(-8) - (-6)\cdot(-4) = 64 - 24 = 40\,;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -40\,.$$

Знайдемо мінор M_{22} та алгебраїчне доповнення A_{22}.

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -8 & -8 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-8) - (-8)\cdot(-4) = 32 - 32 = 0\,;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 0\,.$$

Знайдемо мінор M_{23} та алгебраїчне доповнення A_{23}.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-6) - (-8)\cdot(-8) = 24 - 64 = -40\,;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 40\,.$$

Знайдемо мінор M_{31} та алгебраїчне доповнення A_{31}.

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = (-8)\cdot(-6) - (-2)\cdot(-4) = 48 - 8 = 40\,;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 40\,.$$

Знайдемо мінор M_{32} та алгебраїчне доповнення A_{32}.

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-6) - 6\cdot(-4) = 24 + 24 = 48\,;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -48\,.$$

Знайдемо мінор M_{33} та алгебраїчне доповнення A_{33}.

$$M_{33} = \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-2) - 6\cdot(-8) = 8 + 48 = 56\,;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 56\,.$$

Наступним кроком розрахуємо союзну матрицю

$$C^{*} = \begin{pmatrix} -20 & 96 & -52 \\ -40 & 0 & 40 \\ 40 & -48 & 56 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо союзну матрицю

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} -20 & -40 & 40 \\ -96 & 0 & -48 \\ -52 & -40 & 56 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{C^{*T}}{\det F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{13}{120} & -\frac{1}{12} & -\frac{7}{60} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо рішення

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{13}{120} & -\frac{1}{12} & -\frac{7}{60} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 18 + (-\frac{1}{12})\cdot 30 \\ (-\frac{1}{5})\cdot 4 + 0\cdot 18 + \frac{1}{10}\cdot 30 \\ \frac{13}{120}\cdot 4 + (-\frac{1}{12})\cdot 18 + (-\frac{7}{60})\cdot 30 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \\ -\frac{4}{5} + 0 + 3 \\ \frac{13}{30} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{5} \\ -\frac{137}{30} \end{pmatrix};
$$

$$
\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{6} \\ x_2 = \frac{11}{5} \\ x_3 = -\frac{137}{30} \end{cases}.
$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Ажогін В. В., Згуровський М. З. Моделювання на цифрових, аналогових та гібридних ЕОМ. Київ : Вища школа, 2019. 279 с.

2 Балтовський О. О., Форос Г. В, Сіфоров О. І. Основи математичного моделювання / за заг. ред. О. А. Балтовського. Одеса : Одеський держ. ун-т внутр. справ, 2023. 125 с.

3 Вовк Р. В., Загарій Г. І., Тихонов В. А. Математичні методи і моделі: комп’ютерне моделювання: підручник. Харків : УкрДАЗТ, 2012. 185 с.

4 Воронков О. О. Оптимізаційні методи і моделі : конспект лекцій (для студ. заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки 6.030504 – Економіка підприємства). Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 110 с.

5 Гамаюн І. П., Чередніченко О. Ю. Моделювання систем : навч. посіб. для студ. спеціальностей 6.050103 «Програмна інженерія», 6.050101 «Комп’ютерні науки». Харків : Факт, 2015. 228 с.

6 Гусев А. В., Гусев С. В. Математичне моделювання в техніці. Київ : Юрайт, 2023. 352 с.

7 Кветний Р. Н., Богач І. В., Софіна О. Ю., Шушура О. М. Комп’ютерне моделювання систем та процесів. Ч. 1. URL : https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa/2kvetnyj_komp'yuterne_modelyuvannya_system_procesiv/t1/11..htm.

8 Лебедєв О. М. Моделювання у науково-технічних дослідженнях. Київ : Вища школа, 2019. 224 с.

9 Лебідь Р. Д. Математичні методи моделювання систем : навч. посіб. Київ : КМУЦА, 2020. 158 с.

10 Моржов В. І. Математичне моделювання систем та процесів. Лабораторний практикум. Київ : НАУ, 2018. 46 с.

11 Стеценко І. В. Моделювання систем : навч. посіб. Черкаси : ЧДТУ, 2010. 399 с.

12 Bondarenko K. and Dolya G. Mathematical models and approaches in simulation of RRS-based laser sensor system. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series Mathematical modelling*. *Information technology. Automated control systems*. 2022. Vol. 56. Pp. 6-20.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт

із дисципліни

«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ»

Відповідальний за випуск Ананьєва О. М.

Підписано до друку 24.04.2024 р.
Умовн. друк. арк. 3,5. Тираж . Замовлення № .
Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.