

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

Ю.В. Куліш, О.В. Рибачук

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО
КЕРУВАННЯ**

Конспект лекцій

Частина 2

Харків - 2015

Куліш Ю.В., Рибачук О.В. Основи теорії оптимального керування: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – Ч.2. – 44 с.

Конспект лекцій призначений для магістрів спеціальності “Електричний транспорт” і може бути використаний студентами-магістрами інших загальнотехнічних спеціальностей.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 1 вересня 2014 р., протокол № 1.

Іл.3, бібліогр.: 7 назв.

Рецензент

проф. В.Д. Ходусов (ХНУ ім. В.Н. Каразіна)

Ю.В. Куліш, О.В. Рибачук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Частина 2

Відповідальний за випуск Рибачук О.В.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 16.10.14 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 0,75. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

Зміст

Лекція	4
5	
5.1 Задачі з рухомими межами.....	4
5.2 Задача Больця.....	12
5.3 Варіаційні задачі з нестрогими обмеженнями та рухомими межами.....	15
Лекція	20
6	
6.1 Задача оптимального керування.....	20
6.2 Принцип максимуму Понтрягіна.....	23
6.3 Функція Понтрягіна.....	26
Лекція 7. Проблема мінімізації енерговитрат на електротранспорті.....	31
...	
Лекція 8. Задача про м'яку посадку космічного апарата.....	39
Список	44
літератури	

ЛЕКЦІЯ 5

5.1 *Задачі з рухомими межами*

На попередніх лекціях вивчалися екстремуми функціоналів при фіксованих значеннях функцій на межах інтегрування. Але можливі випадки, коли значення функціонала (наприклад, в задачі на мінімум) набуває меншого значення при інших значеннях функцій та їхніх аргументів. Тобто виникає задача знаходження екстремуму функціонала при рухомих межах інтегрування. Розглянемо випадок, коли точки $M(x, y(x))$ на межах інтегрування рухаються по деяких лініях. Тоді в точках $M_0(x_0, y(x_0))$ та $M_1(x_1, y(x_1))$ на цих лініях (тобто для фіксованих меж інтегрування) виконується рівняння Ейлера. Якщо ми знайдемо екстремум функціонала при змінених значеннях функції $y(x)$ та її аргументів на межах інтегрування, то можна

вважати, що знайшли екстремум функціонала в новій задачі з фіксованими межами. Таким чином, розв'язки задач з рухомими межами повинні задовольняти рівнянням Ейлера, тобто повинні бути екстремаліями. Внаслідок того, що межі інтегрування в функціоналах можуть бути рухомими, повинні існувати деякі додаткові умови на екстремалі та функції координат на межах інтегрування. Розглянемо спочатку випадок функціонала $F(x, y, y')$, коли точки $M(x, y(x))$ на нижній та верхній межах інтегрування рухаються на заданих лініях (L_0 та L_1), які відповідають рівнянням (рисунок 5. 1)

$$g_0(x, y) = 0, \quad g_1(x, y) = 0. \quad (5.1)$$

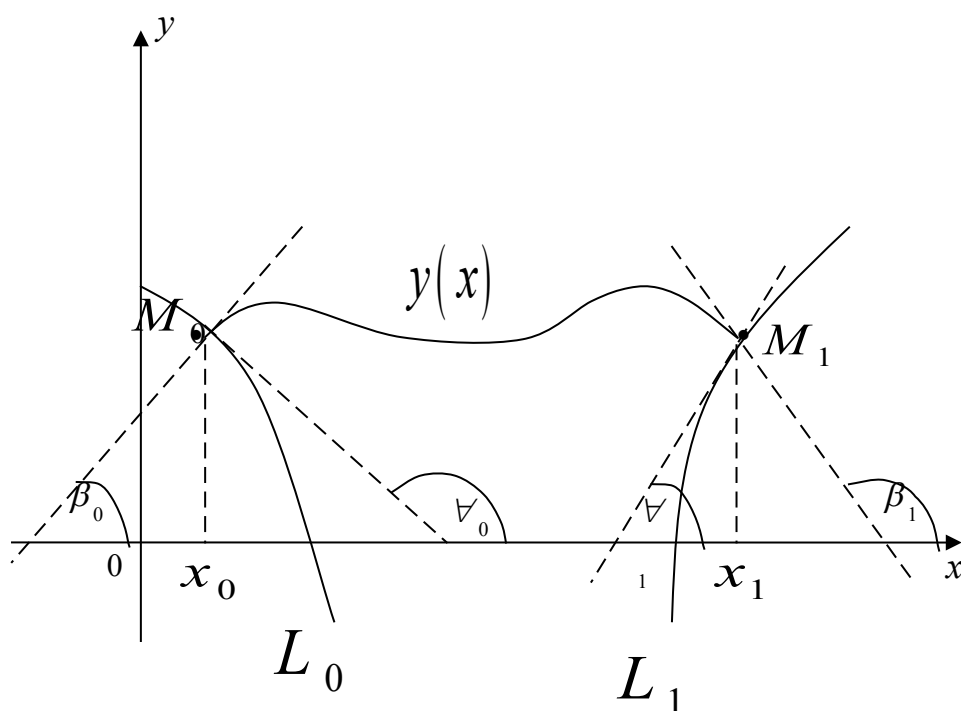


Рисунок 5.1

Для варіації функціонала $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ можна написати

$$\begin{aligned} [J(y)] &= \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \\ &+ F(x, y, y') \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - F(x, y, y') \Big|_{x=x_0} \delta x_0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Проінтегруємо доданок з $\delta y'$ в (5.2) частинами:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial F}{\partial y'} \quad du = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx \\ dv = \delta y' dx \quad v = \delta y(x) \end{array} \right| = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \\ - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x=x_1} - \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x=x_0} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Підставимо цей вираз в (5.2) і з урахуванням рівняння Ейлера (2.14) одержуємо

$$\begin{aligned} \delta J[y] &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x=x_1} - \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x=x_0} + \\ &+ F(x, y, y') \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - F(x, y, y') \Big|_{x=x_0} \delta x_0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Крім цього на межах інтегрування маємо з (5.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_0}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \frac{\partial g_0}{\partial y} \Big|_{x=x_0} \delta [y(x_0)] &= 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{x=x_1} \delta [y(x_1)] &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Відмітимо, що за геометричним сенсом похідної на лініях L_0 та L_1 для похідних можна написати

$$\varphi_0'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0 = - \frac{\frac{\partial g_0}{\partial x}}{\frac{\partial g_0}{\partial y}} \Big|_{x=x_0},$$

$$\varphi_1'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{\frac{\partial g_1}{\partial x}}{\frac{\partial g_1}{\partial y}} \Big|_{x=x_1},$$
(5.6)

Тепер розглянемо на верхній межі величини $y(x)$, $\delta y(x)$, x_1 та $x_1 + \delta x_1$ (рисунок 5.2)

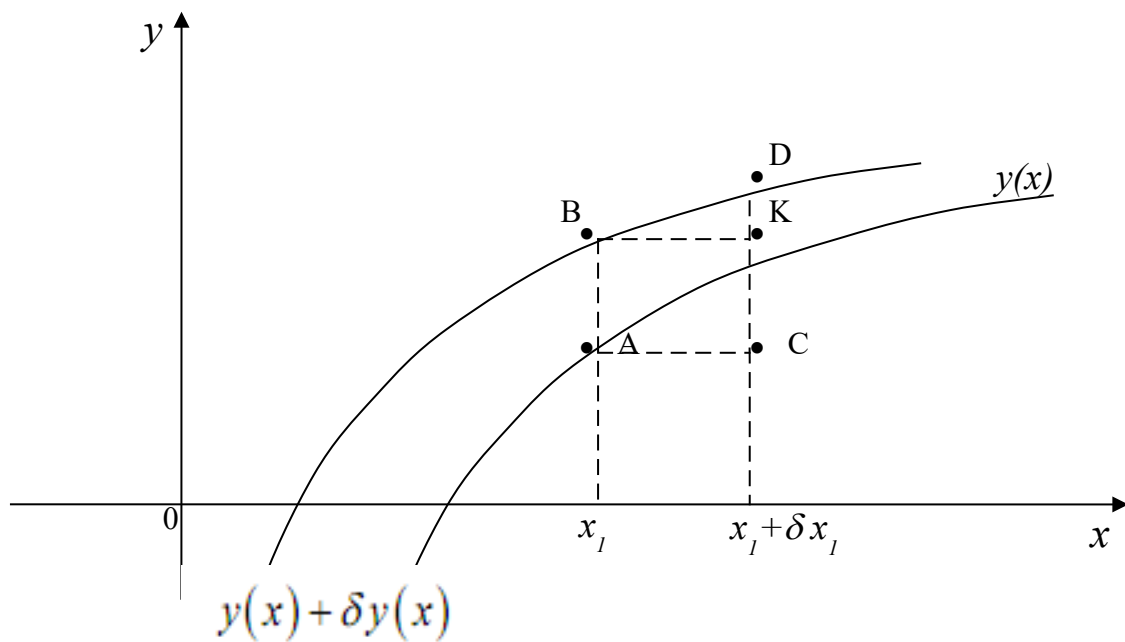


Рисунок 5.2

На цьому рисунку зображені величини y (5.4) та (5.5):

$$\begin{aligned}
AB &= \delta y|_{x=x_1}; & AC &= \delta x_1 \\
DK &= y'|_{x=x_1} \cdot AC = y'|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 \\
CD &= \delta \left[y(x_1) \right] = CK + DK = AB + DK = \delta y|_{x=x_1} + y'|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 \\
&= \delta y|_{x=x_1} + y'|_{x=x_1} \cdot \delta x_1
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Після підстановки цих величин в (5.5) знаходимо

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{x=x_1} \cdot \left[\delta y|_{x=x_1} + y'|_{x=x_1} \delta x_1 \right] = \\
&= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} + y' \frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{x=x_1} \right) \delta x_1 + \frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{x=x_1} \delta y|_{x=x_1} = 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Звідси маємо

$$\delta y|_{x=x_1} = - \frac{1}{\frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{x=x_1}} \cdot \left[\frac{\partial g_1}{\partial x} + y' \frac{\partial g_1}{\partial y} \right] \Big|_{x=x_1} \delta x_1. \tag{5.9}$$

В (5.9) $\delta y|_{x=x_1}$ виражене через δx_1 . Тепер (5.4) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
\delta J[y] &= \left[- \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{1}{\frac{\partial g_1}{\partial y}} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + y' \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) \Big|_{x=x_1} + F \right] \delta x_1 - \\
&- \left[- \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{1}{\frac{\partial g_0}{\partial y}} \left(\frac{\partial g_0}{\partial x} + y' \frac{\partial g_0}{\partial y} \right) \Big|_{x=x_0} + F \right] \delta x_0
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Внаслідок довільності δx_0 та δx_1 з урахуванням (5.6) знаходимо умови

$$\begin{aligned} \left[F + \frac{\partial F}{\partial y'} (\varphi_0'(x) - y'(x)) \right]_{x=x_0} &= 0 \\ \left[F + \frac{\partial F}{\partial y'} (\varphi_1'(x) - y'(x)) \right]_{x=x_1} &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

В (5.11) $\varphi_0'(x)$ та $\varphi_1'(x)$ являють собою похідні на межових лініях L_0 та L_1 відповідно (рисунок 5.1). При цьому, згідно з (5.6), $\varphi_0'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$ і $\varphi_1'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$. На рисунку 5.1 зображені також кути β_0 та β_1 - кути нахилу дотичних, проведених до графіка екстремалі $y(x)$ в точках x_0 та x_1 , відповідно ($\operatorname{tg} \beta_0 = y'(x_0)$, $\operatorname{tg} \beta_1 = y'(x_1)$).

Умови (5.11) називаються умовами трансверсальності (від transversal – поперечна, коса, похила, пересічна лінія).

Теорема 5.1. Якщо функція $\hat{y}(x)$ дає екстремум функціонала $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ в задачі з рухомими межами (5.1), то ця функція задовольняє рівнянню Ейлера (2.14) та умовам трансверсальності (5.11) на межах.

Для роз'яснення сенсу умов трансверсальності (5.11) розглянемо задачу Дідона з рухомою межею (рисунок 5.3).

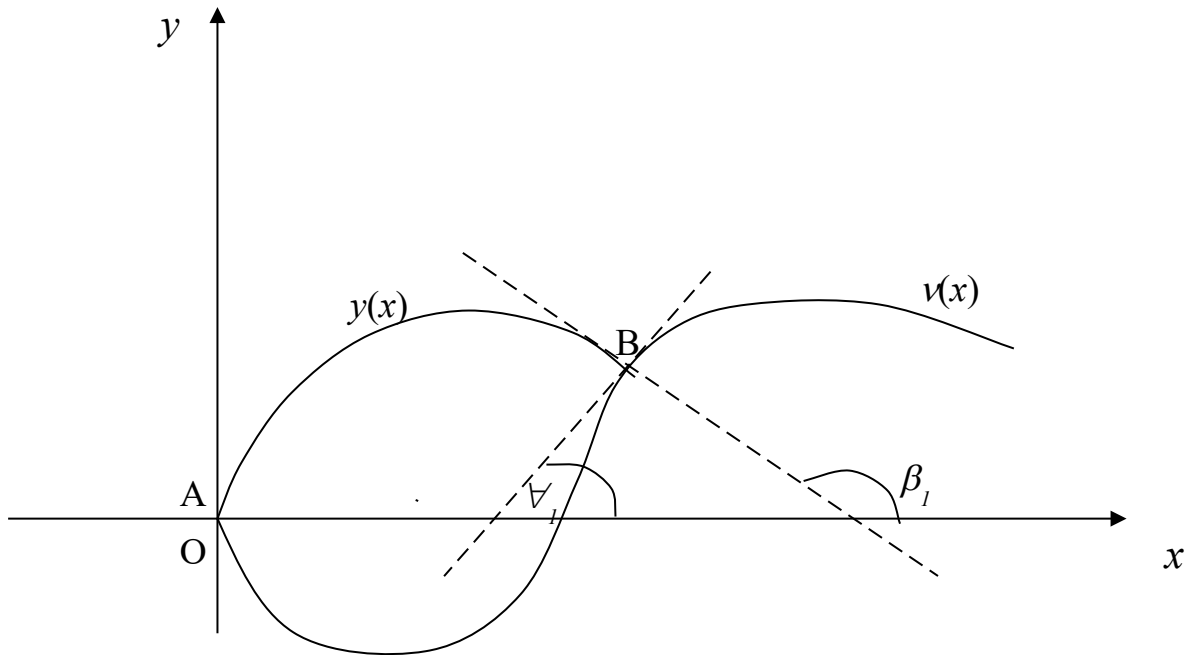


Рисунок 5.3

Функція $\varphi(x)$ відповідає береговій лінії, а $y(x)$ - шукана функція, яка дає екстремум функціонала

$$S = \int_{x_A}^{x_B} [y(x) - \varphi(x)] dx, \quad (5.12)$$

за умови, що

$$l_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = const, \quad (5.13)$$

причому $y(x_A) = \varphi(x_A) = y(x_0) = \varphi(x_0)$ та $y(x_B) = \varphi(x_B) = y(x_1) = \varphi(x_1)$. Для розв'язання задачі, як і в п. 4.1, складаємо функцію Лагранжа

$$L = y(x) - \varphi(x) + \lambda \sqrt{1 + [y'(x)]^2} . \quad (5.14)$$

Розв'язок рівняння Ейлера

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 ,$$

як і в прикладі 4.1 являє собою коло. Для використання умов трансверсальності знаходимо $\frac{\partial L}{\partial y'} = \lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}$. Тоді маємо (наприклад, в точці B . $x_B = x_1$) з (5.11)

$$F|_{x=x_1} + [\varphi'(x_1) - y'(x_1)] \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = y(x_1) - \varphi(x_1) + \lambda \sqrt{1 + [y'(x_1)]^2} + \\ + \lambda \frac{y'(x_1) [\varphi'(x_1) - y'(x_1)]}{\sqrt{1 + [y'(x_1)]^2}} = 0$$

Внаслідок перетинання екстремалі $y(x)$ та берегової лінії $y(x_1) = \varphi(x_1)$ і ми одержуємо

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} [1 + y'(x) \varphi'(x_1)] = 0 . \quad (5.15)$$

Ця умова виконується при довільних $y'(x_1)$ та $\lambda \neq 0$ при

$$1 + y'(x) \varphi'(x_1) = 0 . \quad (5.16)$$

Оскільки $y'(x_1)$ та $\varphi'(x_1)$ є кутові коефіцієнти екстремалі $y(x)$ та берегової лінії $\varphi(x)$, то згідно з умовою (5.16) дотичні до цих ліній в точці B повинні бути перпендикулярними (поперечними). Умова (5.16) являє собою звичайну умову перпендикулярності прямих в формі рівності добутку кутових коефіцієнтів прямих

-1 ($k_1 \cdot k_2 = -1$). Аналогічні умови можна одержати для рухомої межі в точці A .

Можна показати, що для інтегрантів вигляду $F(y, y') = f(y) \sqrt{1 + y'^2}$ умови трансверсальності (5.11) приводять до перпендикулярності дотичних до ліній $y(x)$ та $\varphi(x)$ в точках перетинів (наприклад, це відповідає $|\alpha_1 - \beta_1| = \frac{\pi}{2}$ на рисунку 5.3). Дійсно, оскільки $\frac{\partial F}{\partial y'} = f(y) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$, то в точці x_i ($x_i = x_0$ та x_1) умови трансверсальності мають вигляд

$$\begin{aligned} F(x_i) + \frac{\partial F}{\partial y'(x_i)} [\varphi'_i(x_i) - y'(x_i)] &= \sqrt{1 + [y'(x_i)]^2} f(y) + \\ + f(y) \frac{y'(x_i)}{\sqrt{1 + [y'(x_i)]^2}} [\varphi'_i(x_i) - y'(x_i)] &= \frac{f(y(x_i))}{\sqrt{1 + [y'(x_i)]^2}} \cdot \\ \cdot [1 + [y'(x_i)]^2] + y'(x_i) \varphi'_i(x_i) - [y'(x_i)]^2 &= 0, \end{aligned}$$

тобто $y'(x_i) \varphi'_i(x_i) = -1$.

Якщо рухомою є тільки одна межа, то умова трансверсальності буде одна (для відповідної межі). Якщо точка на межі може рухатись по вертикальній лінії (наприклад, $x = x_0$), то відповідна умова трансверсальності має вигляд

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (5.17)$$

5.2 Задача Больця

Нехай векторна функція $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ неперервна і має неперервні похідні на відрізку $[a, b]$ і $f(\vec{y}(x_0), \vec{y}(x_1))$ - функція неперервно диференційована за своїми

аргументами. Вважаємо, що значення аргументу a та b фіксовані, а значення функції в цих точках (тобто $y(a)$ та $y(b)$) не фіксовані. Задача знаходження екстремуму функціонала

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx + f(\bar{y}(a), \bar{y}(b)) \quad (5.18)$$

називається задачею Больця.

Теорема 5.2. Якщо векторна функція $\hat{y}(x)$ дає розв'язок задачі Больця, то ця функція задовольняє:

1) системі рівнянь Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.19)$$

2) умовам трансверсальності

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'_k(x)} - \frac{\partial f}{\partial y_k(x)} \right]_{x=x_0} = 0, \quad (5.20)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'_k(x)} + \frac{\partial f}{\partial y_k(x)} \right]_{x=x_1} = 0. \quad (5.21)$$

Приклад 5.1. Знайти екстремаль в задачі Больця

$$J[y] = \int_0^\pi [y'^2 + 4y^2 - 2y \sin x] dx + 3y^2(0) + 4y^2(\pi). \quad (5.22)$$

□ Складаємо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 8y - 2 \sin x, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'',$$

$$8y - 2 \sin x - 2y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 4y = \sin x$$

Ми одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду. Тоді $y_{\zeta i} = y_{\zeta i} + y_{\neq i}$. Розв'язок однорідного рівняння $y_{\zeta i}$ шукаємо у вигляді $y_{\zeta i} = e^{kx}$. Для k маємо характеристичне рівняння $k^2 - 4 = 0$, розв'язок якого $k_{1,2} = \pm 2$. Тоді $y_{\zeta i} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, де C_1 та C_2 - довільні сталі. Для частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y_{\neq i}$ маємо $y_{\neq i} = A \cos x + B \sin x$. Тоді $y'_{\neq i} = -A \sin x + B \cos x$, $y''_{\neq i} = -A \cos x - B \sin x$. Після підстановки функцій $y_{\neq i}$ та її похідних в неоднорідне рівняння знаходимо $-A \cos x - B \sin x - 4(A \cos x + B \sin x) = \sin x \Rightarrow -5A \cos x - 5B \sin x = \sin x$. Звідси випливає, що $A = 0$, $B = -1/5$. Таким чином, екстремалі мають вигляд

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} \sin x.$$

Для знаходження констант C_1 та C_2 , які дають розв'язок задачі Больця (5.22), використовуємо умови трансверсальності.

При $x_0 = 0$ маємо $y(0) = C_1 + C_2$ та $y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} \cos x$, $y'(0) = 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{5}$. Тоді умова трансверсальності (5.20)

дає рівняння для функції $z_0 = y(0)$ $z'_0 - 3z_0 = 0$, оскільки $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$,

а $\left. \frac{\partial f}{\partial y(x)} \right|_{x=x_0} = 6y_0$. Тоді

$z'_0 - 3z_0 = 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{5} - 3(C_1 + C_2) = -C_1 - 5C_2 - \frac{1}{5} = 0$. Ми знайшли одне рівняння знаходження сталих C_1 та C_2 .

При $x = \pi$ маємо $y(\pi) = C_1 e^{2\pi} + C_2 e^{-2\pi}$, $y'(\pi) = 2C_1 e^{2\pi} - 2C_2 e^{-2\pi} + \frac{1}{5}$. Тепер $\left[\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{x=\pi} = 0 = 2y'(\pi) + 8y(\pi) = 0$. Тобто $z'_1 + 4z_1 = 0$, де $z_1 = y(\pi)$. Підставляємо в це рівняння значення $y(\pi)$ та $y'(\pi)$ (

z_1 та z_1' , відповідно) і знаходимо друге рівняння для знаходження сталих C_1 та C_2 : $2C_1e^{2\pi} - 2C_2e^{-2\pi} + \frac{1}{5} + 4(C_1e^{2\pi} + C_2e^{-2\pi}) = 6C_1e^{2\pi} + 2C_2e^{-2\pi} + \frac{1}{5} = 0$. Таким чином, одержуємо систему лінійних рівнянь для знаходження сталих C_1 та C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + 5C_2 = -\frac{1}{5} \\ 6C_1e^{2\pi} + 2C_2e^{-2\pi} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд

$$C_1 = \frac{2e^{-2\pi} - 5}{10[15e^{2\pi} - e^{-2\pi}]}, \quad C_2 = \frac{1 - 6e^{2\pi}}{10[15e^{2\pi} - e^{-2\pi}]}.$$

В результаті знаходимо розв'язок задачі Больця (5.22):

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{10[15e^{2\pi} - e^{-2\pi}]} [(2e^{-2\pi} - 5)e^{2x} + (1 - 6e^{2\pi})e^{-2x}] - \frac{1}{5} \sin x. \quad (5.23)$$

Зауваження: при знаходженні системи лінійних алгебраїчних рівнянь для сталих C_1 та C_2 ми в умовах трансверсальності (5.20) та (5.21) виконували диференціювання $f(y(0), y(\pi))$ за величинами $y(0)$ та $y(\pi)$. Можливість такого диференціювання обумовлена тим, що тепер величини $y(0)$ та $y(\pi)$ є не сталі, а змінні.

5.3 Варіаційні задачі з нестрогими обмеженнями та рухомими межами

Розглянемо задачу про знаходження мінімуму функціонала

$$J[\vec{y}] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)\right) dx + \psi_0\left(x_0, \vec{y}(x_0); x_1, \vec{y}(x_1)\right), \quad (5.24)$$

$$a < x_0 < x_1 < b, \quad \vec{y}(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

При цьому функції $\vec{y}(x)$ задовольняють межовим (крайовим) умовам

$$\psi_j\left(x_0, \vec{y}(x_0); x_1, \vec{y}(x_1)\right) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (5.25)$$

та інтегральним зв'язкам

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_s(x, \vec{y}) dx \leq g_s, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (5.26)$$

На відміну від попередніх обмежень (зв'язків) функцій $\vec{y}(x)$ умови (5.25), (5.26) являють собою нестрогі нерівності.

Для розв'язання цієї задачі складаємо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0 F + \sum_{s=1}^l \lambda_s \varphi_s \quad (5.27)$$

і функцію

$$\Psi\left(x_0, \vec{y}(x_0); x_1, \vec{y}(x_1)\right) = \sum_{j=0}^k \mu_j \psi_j. \quad (5.28)$$

Якщо функції F та ψ_j неперервні та мають неперервні похідні за своїми аргументами, а векторна функція $\vec{y}(x)$ та числа x_0, x_1 дають мінімум функціонала (5.24) за умов (5.25), (5.26), то ця векторна функція повинна задовольняти умовам:

1) бути розв'язками (інтегралами) системи рівнянь Ейлера

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.29)$$

2) повинні існувати сталі $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ та $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ ($\lambda_0 = \mu_0$), не всі з яких дорівнюють нулю. При цьому повинні виконуватися:

а) умови трансверсальності за $y_i(x)$:

$$\left[\mu_0 \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \sum_{j=1}^k \mu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \right]_{x=x_0} = 0, \quad (5.30, \text{ а})$$

$$\left[\mu_0 \frac{\partial F}{\partial y'_i} + \sum_{j=1}^k \mu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \right]_{x=x_1} = 0; \quad (5.30, \text{ б})$$

б) умови трансверсальності за x :

$$\left[\mu_0 F - \sum_{j=1}^k \mu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_0} \right]_{x=x_0} = 0, \quad (5.31, \text{ а})$$

$$\left[\mu_0 F + \sum_{j=1}^k \mu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} \right]_{x=x_1} = 0; \quad (5.31, \text{ б})$$

3) правило узгодження знаків із співвідношеннями (5.25), (5.26):

а) якщо при деякому s (або j) стоїть знак $<$, то відповідне $\lambda_s \geq 0$ ($\mu_j \geq 0$); б) якщо при деякому s (або j) стоїть знак рівності, то відповідне λ_s (або μ_j) може мати довільний знак;

4) умови додаткової нежорсткості в стаціонарній точці

$$\lambda_s \left[\int_{x_0}^{x_1} \varphi_s(x) dx - g_s \right] = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (5.32, a)$$

$$\mu_j \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (5.32, б)$$

Відзначимо, що якщо одна з меж в (5.24) фіксована, то для цієї межі відповідні умови трансверсальності за $y(x)$ (5.31) та за x (5.31) не розглядаються. Окрім цього, якщо в межових умовах (5.25) та інтегральних зв'язках (5.26) стоять знаки рівності (обмеження строгі), то сталі μ_j та λ_s мають довільні знаки і умови додаткової нежорсткості не дають додаткової інформації.

Зауважимо, що даним методом можна розв'язувати і задачі знаходження максимумів функціонала (5.24). Для цього вводимо функцію $\tilde{F}(x, \vec{y}, \vec{y}') = -\bar{F}(x, \vec{y}, \vec{y}')$ і застосовуємо формули (5.27) – (5.32) для функції $\tilde{F}(x, \vec{y}, \vec{y}')$.

Приклад 5.2. Знайти припустимі екстремалі функціонала

$$J[y] = \int_0^{x_1} [y'(x)]^2 dx, \quad (5.33)$$

якщо $y(0) = 0$, та $(x_1 - 1)y^2(x_1) + 8 = 0$.

□ В даному прикладі на нижній межі значення функції фіксоване ($y(x_0) = y(0) = 0$). На верхній межі маємо строгі обмеження

$$\psi(x_1, y(x_1)) = (x_1 - 1)y^2(x_1) + 8 = 0. \quad (5.34)$$

Для розв'язання задачі складаємо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0 F = \lambda [y'(x)]^2.$$

Тоді $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = 2\lambda y'(x)$ і рівняння Ейлера (5.29) має вигляд $y''(x) = 0$. Загальний розв'язок цього рівняння є $y(x) = Cx + C_1$. З крайової умови $y(x_0) = y(0) = 0$ маємо $C_1 = 0$ та $y(x) = Cx$. Тепер використаємо умову трансверсальності за y (5.30, б):

$$\left[\mu_0 \frac{\partial F}{\partial y'} + \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial y(x_1)} \right]_{x=x_1} = \lambda \cdot 2y'(x_1) + \mu_1 \cdot 2(x_1 - 1)y(x_1) = 0.$$

Оскільки $y(x) = C_1 x$, то знаходимо $C[\lambda + \mu_1(x_1 - 1)x_1] = 0$. Вивчимо спочатку випадок $\lambda = \mu_0 = 0$. Оскільки неможливо, щоб $\lambda = \mu_1 = 0$, то $\lambda \neq 0$. Беремо $\lambda = 1$. Тому одержуємо рівняння

$$\mu_1(x_1 - x_1^2) = 1. \quad (5.35)$$

У нас дві невідомі величини x_1 та C . Тому для знаходження цих невідомих нам потрібне ще одне рівняння. Це рівняння знайдемо з умови трансверсальності за x (5.31, б). Оскільки

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = y^2(x_1) + 2(x_1 - 1)y(x_1)y'(x_1) = C^2[x_1^2 + 2(x_1^2 - x_1)], \text{ то з (5.31, б)}$$

впливає, що

$$C^2[1 + \mu_1(3x_1^2 - 2x_1)] = 0. \quad (5.36)$$

Це рівняння разом з (5.34) дає систему рівнянь відносно x_1 та μ_1 :

$$\begin{cases} \mu_1(x - x_1^2) = 1 \\ \mu_1(2x_1 - 3x_1^2) = 1 \end{cases}$$

З цієї системи маємо

$$x_1 - x_1^2 = 2x_1 - 3x_1^2 \Rightarrow x_1(2x_1 - 1) = 0.$$

Останнє рівняння має два розв'язки $x_1^{(1)} = 0$ та $x_1^{(2)} = \frac{1}{2}$. Перший розв'язок дає $J[y] = 0$ в (5.33). Але цей тривіальний розв'язок інтересу не являє. Тому беремо розв'язок $x_1 = \frac{1}{2}$. Йому відповідає $\mu_1 = 4$. Підставляємо знайдене значення x_1 в крайову умову: $\psi(x_1) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)C^2 \cdot \frac{1}{4} + 8 = 0$, $C^2 = 64$, $C = \pm 8$. Таким чином, припустимий екстремум функціонала (5.33) при заданій крайовій умові має вигляд $\hat{y}(x) = \pm 8x$, а стаціонарне значення функціонала дорівнює $J[y] = \int_0^{0.5} 8^2 dx = 32$.

ЛЕКЦІЯ 6

6.1 Задача оптимального керування

Розглянемо роботу деякого пристрою (системи, машини, агрегату, реактора). Припустимо, що стан цього пристрою описується в момент часу t сукупністю функцій $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, які утворюють векторну функцію $\vec{y}(t) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Будемо позначати цей стан як $S(t, \vec{y}(t))$. Функціями $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ можуть бути різні функції, а також похідні різного порядку. Наприклад, може бути $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y_1'(t) = y'(t)$, $y_3(t) = y_2'(t) = y''(t), \dots$. Функції $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ будемо називати фазовими координатами.

Стан пристрою може змінюватися з часом внаслідок природних процесів, а також внаслідок змін деяких параметрів (керувань), які змінює оператор (машиніст). Позначимо керування як $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$.

Припустимо, що зміна стану пристрою із часом описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, \vec{y}(t), \vec{u}(t)); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.1)$$

Припустимо також, що початковий та кінцевий стани задовольняють крайовим умовам

$$\varphi_j(x_0, \vec{y}(t_0); x_1, \vec{y}(t_1)) \leq 0; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (6.2)$$

а фазові координати $\vec{y}(t)$ та керування $\vec{u}(t)$ задовольняють ізопериметричним умовам

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_s(t, \vec{y}(t), \vec{u}(t)) dt \leq g_s, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (6.3)$$

Розглянемо випадок існування деякої величини, яка характеризує перехід з початкового стану $S_0 = S(t_0, \vec{y}(t_0))$ в кінцевий стан $S_1 = S(t_1, \vec{y}(t_1))$. Припустимо, що ця величина виражається інтегралом, тобто є функціоналом

$$J[\vec{y}, \vec{u}; t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \vec{y}(t), \vec{u}(t)) dt + \psi_0(t_0, \vec{y}(t_0); t_1, \vec{y}(t_1)). \quad (6.4)$$

Важливе значення має знаходження екстремального значення функціонала (6.4). Вивчимо умови, які дозволяють отримати мінімум функціонала (6.4).

Задача оптимального керування полягає у знаходженні керування $\vec{u}(t)^*$, яке дозволяє зробити перехід з початкового стану в кінцевий таким чином, щоб функціонал (6.4) мав екстремальне значення при тому, що поведінка пристрою

описується системою диференціальних рівнянь (6.1) при виконанні крайових умов (6.2) та інтегральних зв'язків (6.3).

Сукупність фазових координат, керувань та початкового і кінцевого моментів часу $(\vec{y}(t), \vec{u}(t), t_0, t_1)$ називають керувальним процесом в задачі оптимального керування (6.1) – (6.4), якщо вона задовольняє умовам:

а) керування $\vec{u}(t)$ є кусково - неперервна векторна функція на відрізку $[t_0, t_1]$;

б) вектор фазових координат $\vec{y}(t)$ неперервний на відрізку $[t_0, t_1]$;

в) фазові координати $y_i(t)$ на інтервалах неперервності керувань $\vec{u}(t)$ задовольняють системі диференціальних рівнянь (6.1).

Означення 6.1. Керівний процес $(\vec{y}(t), \vec{u}(t), t_0, t_1)$ називається припустимим, якщо він задовольняє умовам (6.2), (6.3) (крайовим і ізопериметричним).

Означення 6.2. Припустимий керівний процес $(\vec{y}(t)^*, \vec{u}(t)^*, t_0^*, t_1^*)$ називається оптимальним, якщо знайдеться число $\varepsilon > 0$ і для довільного припустимого керувального процесу $(\vec{y}(t), \vec{u}(t), t_0, t_1)$ в задачі на мінімум при $|t_0 - t_0^*| < \varepsilon, |t_1 - t_1^*| < \varepsilon,$

$$|\vec{y}(t) - \vec{y}(t)^*| < \varepsilon, |\vec{u}(t) - \vec{u}(t)^*| < \varepsilon, t_0^* \in [t_0, t_1], t_1^* \in [t_0, t_1]$$

виконується нерівність

$$J[\vec{y}(t), \vec{u}(t), t_0, t_1] \geq J[\vec{y}(t)^*, \vec{u}(t)^*, t_0^*, t_1^*].$$

Необхідні умови існування екстремуму функціонала (6.4) були одержані Л.С. Понтрягіним в 1953 р. і називаються принципом максимуму Понтрягіна. Введемо множники Лагранжа: вектори сталих $\vec{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $\vec{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k)$, ($\lambda_0 = \mu_0 \geq 0$) та вектор кусково – гладких на відрізьку $[t_0, t_1]$ функцій $\vec{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t))$. Тепер складаємо функцію Лагранжа

$$L\left(t, \vec{y}, \vec{y}', \vec{u}\right) = \lambda_0 F\left(t, \vec{y}, \vec{y}'\right) + \sum_{s=1}^l \lambda_s \varphi_s\left(t, \vec{y}, \vec{u}\right) + \sum_{i=1}^n w_i(t) \left[y_i' - f_i\left(t, \vec{y}, \vec{u}\right) \right], \quad (6.5)$$

$$\Psi\left(t_0, \vec{y}(t_0); t_1, \vec{y}(t_1)\right) = \sum_{j=0}^k \mu_j \psi_j$$

а також функціонал

$$I\left[\vec{y}(t), \vec{u}(t), t_0, t_1\right] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, \vec{y}, \vec{y}', \vec{u}\right) dt + \Psi\left(t_0, \vec{y}(t_0); t_1, \vec{y}(t_1)\right). \quad (6.6)$$

Відмітимо, що система диференціальних рівнянь (6.1) являє собою сукупність диференціальних зв'язків. Тому відповідно до викладеного у пункті 4.2 множники Лагранжа можуть бути функціями.

6.2 Принцип максимуму Понтрягіна

Теорема 6.1. Якщо $\left(\vec{y}(t)^*, \vec{u}(t)^*, t_0^*, t_1^*\right)$ - оптимальний процес для задачі (6.1) – (6.4), то знайдуться множники Лагранжа $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{w}(t)$ (не всі з яких дорівнюють нулю) такі, що для функціонала (6.6) виконуються умови:

- 1) рівняння Ейлера

$$\frac{dw_i}{dt} = -\sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial f_r}{\partial y_i} \right)^* w_r(t) + \lambda_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \right)^* + \sum_{s=1}^l \lambda_s \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} \right)^*, \quad i=1,2,\dots,n; (6.7)$$

2) трансверсальності за $y_i(t)$:

$$w_i(t_0^*) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_i(t_0)} \right)^* = 0; \quad (6.8, a)$$

$$w_i(t_1^*) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_i(t_1)} \right)^* = 0; \quad (6.8, б)$$

3) трансверсальність за t :

$$\left[L^*(t) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* \right]_{t=t_0} = 0; \quad (6.9, a)$$

$$\left[L^*(t) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* \right]_{t=t_1} = 0; \quad (6.9, б)$$

4) принцип максимуму (за \vec{u})

$$H = \sum_{i=1}^n w_i f_i^* - \lambda_0 F^* - \sum_{s=1}^l \lambda_s \varphi_s^* = \max_{\vec{u}} \left[\sum_{i=1}^n w_i f_i(t, \vec{y}^*, \vec{u}) - \lambda_0 F(t, \vec{y}^*, \vec{u}) - \sum_{s=1}^l \lambda_s \varphi_s(t, \vec{y}^*, \vec{u}) \right] \quad (6.10)$$

5) правило узгодження знаків із співвідношеннями (6.2), (6.3):

якщо при деякому j в (6.2) (або s в (6.3)) стоїть знак $<$, то відповідне число $\mu_j \geq 0$ ($\lambda_s \geq 0$), а при знаках рівності для відповідних j (або s) μ_j (або λ_s) може мати довільний знак;

б) умови додаткової нежорсткості:

$$\lambda_s \left(\int_{t_0^*}^{t_1^*} \varphi_s^*(t) dt - g_s \right) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (6.11)$$

$$\mu_j \psi_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Розглянемо умови (6.7) – (6.11) детальніше.

1 Для рівняння Ейлера знаходимо похідні функцій Лагранжа (6.5)

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{s=1}^l \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} - \sum_{r=1}^n w_r(t) \frac{\partial f_r}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial y_i'} = w_i.$$

Підстановка цих похідних в рівняння Ейлера $\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y_i'} = 0$

дозволяє одержати рівняння

$$\lambda_0 \frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{s=1}^l \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} - \sum_{r=1}^n w_r(t) \frac{\partial f_r}{\partial y_i} - w_i'(t) = 0.$$

Звідси одержуємо (6.7).

2 В (5.27) замінюємо F на функцію Лагранжа при $\mu_0 = 1$. З (6.5) маємо $\frac{\partial L}{\partial y_i'} = w_i(t)$. Тому, наприклад при $t = t_0$, з (5.30)

$$\text{одержуємо} \left[\frac{\partial L}{\partial y_i'} - \sum_{j=0}^k \mu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} = 0 \right] \Bigg|_{t=t_0^*} = \left[w_i(t_0^*) - \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right] \Bigg|_{t=t_0^*} = 0.$$

3 В (5.27) замінюємо F на функцію Лагранжа і аналогічно (6.8) одержуємо (6.9).

4 Нам необхідно знайти $\vec{y}(t)^*$ та $\vec{u}(t)^*$, які дають мінімум $I(\vec{y}, \vec{u}, t_0, t_1)$ (6.6). Розглянемо частину $L(t, \vec{y}, \vec{y}', \vec{u})$ (6.5), яка

залежить від $\vec{u}(t)$: $L = \left[\lambda_0 F + \sum_{s=1}^l \lambda_s \varphi_s - \sum_i w_i f_i \right] + \dots$; де точки відповідають доданкам в L , які не залежать від керувань. Частину $L(t, \vec{y}, \vec{y}', \vec{u})$ яка залежить від керувань, беруть з протилежним знаком і позначають через H . Внаслідок протилежності знаків необхідно шукати максимум величини

$$H\left(t, \vec{y}, \vec{y}', \vec{u}, \vec{w}\right) = \sum_{i=1}^n w_i f_i - \lambda_0 F - \sum_{s=1}^l \lambda_s \varphi_s. \quad (6.12)$$

5 Правила узгодження знаків в п. 6.2 та 5.3 збігаються.

6 Умови додаткової нежорсткості в п. 6.3 та 5.3 збігаються. В стаціонарній точці значення функціоналів J (6.4) та I (6.6) повинні збігатися. Це означає, що стаціонарній точці суми відповідні крайовим та ізопериметричним умовам повинні дорівнювати нулю, тобто повинно бути

$$\sum_{s=1}^l \lambda_s \left[\int_{t_0^*}^{t_1^*} \varphi_s^* dt - g_s \right] = 0$$

$$\sum_{j=1}^k \mu_j \psi_j^* = 0$$

Для кожного значення індексів j та s відповідний доданок дорівнює нулю або внаслідок рівності в (6.2) та (6.3) або внаслідок $\mu_j = 0$ та $\lambda_s = 0$ у випадку нерівності. Тобто, наприклад, якщо для деякого j $\psi_j^* = 0$, то відповідне μ_j може бути довільним, а якщо $\psi_j^* < 0$, то для цього j повинно бути $\mu_j = 0$.

6.3 Функція Понтрягіна

Функція H (6.12) називається функцією Понтрягіна. В стаціонарній точці функція Понтрягіна повинна мати максимум. Знайдемо похідні функції Понтрягіна за y_i та w_i :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y_i} \right) = \sum_{i=1}^n w_i(t) \frac{\partial f}{\partial y_i} - \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{s=1}^l \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} = -\frac{dw_i}{dt}.$$

Ми використали рівняння Ейлера (6.7). Для похідної за w_i маємо $\frac{\partial H}{\partial w_i} = f_i = y_i'$. Таким чином, одержуємо систему рівнянь

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = -w_i'(t), \quad \frac{\partial H}{\partial w_i} = y_i'. \quad (6.13)$$

Ці рівняння нагадують канонічні рівняння Гамільтона для гамільтоніана $H(q_i, p_i)$ (п. 3.5)

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -p_i', \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = q_i'. \quad (6.14)$$

Величини q_i та p_i в гамільтоніані $H(q_i, p_i)$ називаються узагальненими координатами та імпульсами, відповідно. Якщо вважати фазові координати y_i за узагальнені координати, а множники Лагранжа w_i за узагальнені імпульси, то функція Понтрягіна буде збігатися з гамільтоніаном. Тому інколи функцію Понтрягіна (6.12) називають гамільтоніаном.

Збіг рівнянь (6.13) та (6.14) за формою дозволяє для розв'язання задач оптимального керування використати добре відомі методи, розроблені для розв'язання різних фізичних задач (і перш за все механічних задач).

Зауважимо, що багато задач варіаційного числення можна розв'язувати методами теорії оптимального керування.

Приклад 6.1. Знайти оптимальний керувальний процес в задачі

$$\int_0^1 y_1 dt \rightarrow \min, \quad y_1' = y_2, \quad y_2' = u, \quad y_1(0) = 1, \quad (6.15)$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = -1, \quad -3 \leq u \leq 1$$

□ В цій задачі дві фазові координати, три крайових умови (тобто можна взяти $\psi_1 = y_1(0) - 1$, $\psi_2 = y_2(0)$, $\psi_3 = y_2(1) + 1$, $\psi_0 = 0$). Складаємо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0 y_1 + w_1 (y_1' - y_2) + w_2 (y_2' - u), \quad (6.16)$$

$$\Psi = \mu_1 [y_1(0) - 1] + \mu_2 y_2(0) + \mu_3 [y_2(1) + 1]$$

Для складання рівнянь Ейлера обчислюємо похідні

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \lambda_0, \quad \frac{\partial L}{\partial y_1'} = w_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = -w_1, \quad \frac{\partial L}{\partial y_2'} = w_2,$$

Тому рівняння Ейлера мають вигляд

$$w_1' = \lambda_0 \quad (6.17)$$

$$w_2' = -w_1$$

З умови трансверсальності за y (6.8) маємо

$$w_1(0) = \mu_1, \quad w_2(0) = \mu_2,$$

$$w_1(1) = 0, \quad w_2(1) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \Big|_{t=1} = -\mu_3 \quad (6.18)$$

Розглянемо спочатку випадок $\lambda_0 = 0$. Тоді з (6.17) одержуємо $w_1 = C$. Оскільки $w_1(1) = 0$, то $C = 0$. З рівняння Ейлера знаходимо $w_2(t) = C_2$. При цьому

$$H^* = \max_u w_2 y_2' = \max_u C_2 u = C_2 u^* . \quad (6.19)$$

Тому максимуму гамільтоніана H відповідають

$$y_2^* = \begin{cases} -3t, & C_2 < 0 \\ t, & C_2 > 0 \end{cases}$$

Згідно з крайовою умовою при $t_1 = 1$ повинно бути $y_2(1) = -1$. Це значення не може бути одержано при жодному C_2 . Тому $\lambda_0 \neq 0$.

Візьмемо $\lambda_0 = \mu_0 = 1$. Тоді $w_1' = \lambda_0 = 1$ і $w_1(t) = t + C_3$. Внаслідок (6.18) $w_1(t) = 0$ і ми одержуємо $w_1(t) = t - 1$. Для w_2 з (6.17) маємо $w_2(t) = -\frac{t^2}{2} + t + C_4 = -\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{1}{2} + C_4$. При $C_4 > 0$ $w_2(t) > 0$ і з

$$(6.19) \text{ впливає, що } H^* = \max \left(-\frac{(t+1)^2}{2} + \frac{1}{2} + C_4 \right) u = u_{\max} = u^* = 1.$$

Внаслідок (6.15) $y_2' = u^* = 1$ і $y_2(0) = 0$. Тому $y_2(t) = t$. При $t = 1$ одержуємо $y_2(1) = 1$ а згідно з (6.15) повинно бути $y_2(1) = -1$. Внаслідок цього C_4 не може бути додатним.

При $C_4 < -\frac{1}{2}$ $w_2(t) < 0$ і $u^* = -3$ та $y_2(t) = -3t$. Знову ми не можемо одержати $y_2(1) = -1$. Таким чином, повинно бути $-\frac{1}{2} < C_4 < 0$. Для таких C_4 маємо $w_2(0) = C_4 < 0$ і $w_2(1) = \frac{1}{2} + C_4 \geq 0$. Для u^* з $H^* = w_2 u^*$ одержуємо

$$u_2^*(t) = \begin{cases} -3, & 0 \leq t \leq \alpha \\ 1, & 1 - \alpha \leq t \leq 1, \end{cases}$$

де α - достатньо мале число. Оскільки $y_2' = u$, то з урахуванням крайових умов $y_2(0) = 0$ та $y_2(1) = -1$

$$y_2^*(t) = \begin{cases} -3t, & 0 \leq t \leq \alpha \\ t-2, & 1-\alpha \leq t < 1 \end{cases} \quad (6.20)$$

Функція $y_2(t)$ повинна бути неперервною на відрізку $[0,1]$. Знайдемо значення t_2 , для якого два вирази в (6.20) рівні між собою. Ми приходимо до рівняння $-3t_2 = t_2 - 2$, розв'язок якого є $t_2 = 0.5$. Таким чином, знаходимо функцію

$$y_2^*(t) = \begin{cases} -3t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t-2, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (6.21)$$

Тепер з умов $y_1' = y_2$ та $y_1(0) = 1$ отримуємо

$$y_1^*(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2}t^2 + 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{t^2}{2} - 2t + C_5, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Константу C_5 можна знайти з умови неперервності функції $y_1(t)$ в точці $t_2 = \frac{1}{2}$. Легко знайти $C_5 = \frac{3}{2}$. В результаті одержуємо

$$y_1^*(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2}t^2 + 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (6.22)$$

Тепер можна знайти оптимальні керування

$$u^*(t) = \begin{cases} -3, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \quad (6.23)$$

Бачимо, що оптимальне керування $u^*(t)$ змінюється в точці $t_2 = \frac{1}{2}$ стрибком від мінімального значення до максимального.

ЛЕКЦІЯ 7

Проблема мінімізації енерговитрат на електротранспорті

В лекції 1 була розглянута постановка проблеми мінімізації енерговитрат на електротранспорті. Тепер застосуємо методи теорії оптимального керування для розв'язання цієї проблеми. Припустимо, що рух даного поїзда не впливає на рух інших поїздів. Нам потрібно знайти мінімум функціонала (1. 1)

$$A_l = \int_{s_n}^{s_k} \frac{F}{\eta} ds, \quad (7.1)$$

де F - сила тяги двигунів. Коефіцієнт корисної дії η будемо вважати сталим.

При застосуванні методів теорії оптимального керування, згідно з [1], як незалежну змінну беремо величину s - місце знаходження поїзда. За фазові координати беремо швидкість $v(s)$ та її похідну $\frac{dv}{ds}$. Таким чином, у формулах, викладених у

лекції 6 замінюємо $x \rightarrow s$, $y \rightarrow v$, $y'(t) \rightarrow v'(s)$.

Нам потрібне диференціальне рівняння для $v(s)$. Для цього використаємо рівність $\frac{d}{dt} = v \frac{d}{ds}$ і переписуємо рівняння для швидкості (1. 5) (яке являє собою прискорення поїзда, знайдене з другого закону механіки Ньютона)

$$\frac{dv}{ds} = \varphi_1(s, v) = \frac{1}{v} [u_f f_m(v) - u_b b_m(v) - w(v) - g(s)], \quad (7.2)$$

де

$$f_m(v) = \frac{\xi F_{\max}(v)}{P+Q}, \quad b_m(v) = \frac{\xi B_{T,\max}(v)}{P+Q} \quad (7.3)$$

$$w(v) = \xi w_0(v), \quad g(s) = \xi w_s(s).$$

Рівняння (7.2) містить параметри керування $u_f = F / F_{\max}$ (пов'язане з тягою двигунів поїзда) та $u_b = B_T / B_{T,\max}$ (пов'язане з силою гальмування). Параметри u_f та u_b вибрані таким чином, що набувають значення на відрізку $[0, 1]$. В (7.3) $\xi = const$, P - вага локомотива в поїзді (або вага пустих вагонів в електропоїзді), Q - сумарна вага вагонів у поїзді (або вага завантаження в електропоїзді); $w_0(v)$ - питомий основний опір руху поїзда (для швидкісного електропоїзда являє собою квадратний тричлен за швидкістю); $w_g(s)$ - питомий опір, обумовлений ухилами та кривими ділянками колії; F_{\max} - максимальне значення тяги двигунів; $B_{T,\max}$ - максимальна сила гальмування.

Мінімізувати енерговитрати необхідно при незмінному часі T_{xn} проходження поїздом даного перегону. Тобто повинен бути сталим інтеграл

$$T_{xn} = \int_{s_n}^{s_k} \frac{ds}{v}. \quad (7.4)$$

Таким чином, ми маємо ізопериметричну задачу. Складаємо функцію Лагранжа

$$L_1 = \frac{F}{\eta} + \frac{\lambda_1}{v}. \quad (7.5)$$

Для сили тяги F можна написати $F = u_f F_{\max} = u_f f_m(v)(P + Q) / \xi\eta$. Якщо досягається екстремум функції Лагранжа (7.5), то цей екстремум буде також мати і функція $L_2 = \frac{P + Q}{\xi\eta} L_1$, оскільки множник $(P + Q) / \xi\eta$ є додатна стала. Тоді можна написати

$$L_2 = \varphi_0(v) = u_f f_m(v) + \frac{\lambda}{v}, \quad (7.6)$$

де $\lambda = \frac{\xi\eta\lambda_1}{P + Q}$. На основі формул (7.2), (7.4) – (7.6) можна скласти функцію Лагранжа відповідну функції (6.5)

$$L(s, v, v', \vec{u}) = \lambda_0 u_f f_m + \frac{\lambda}{v} + w_1(s) \left[\frac{dv}{ds} - \frac{1}{v} (u_f f_m(v) - u_b b_m(v) - w(v) - g(s)) \right] \quad (7.7)$$

У цій формулі λ_0 та λ є сталі, а множник Лагранжа $w_1(s)$ є функція, яка відповідає диференціальному зв'язку (7.2). Ми вивчаємо випадок фіксованих швидкостей на початку і в кінці перегону, тобто

$$v(s_n) = v_n, \quad v(s_k) = v_k. \quad (7.8)$$

Це відповідає фіксованим кінцям. В цьому випадку умови трансверсальності не використовуються. Відмітимо, що умови трансверсальності потрібно було б використовувати в деякій екстремальній ситуації у випадку відхилення швидкості від v_n або v_k .

Знайдемо функцію Понтрягіна (гамільтоніан) відповідну функції Лагранжа (7.7),

$$H = w_1(s) \varphi_1(s, v) - \lambda_0 u_f f_m(v) - \frac{\lambda}{v}. \quad (7.9)$$

Тепер змінимо позначення у цьому гамільтоніані відповідально до [1]

$$H = \psi_0 \varphi_0(v) + \psi_1(s) \varphi_1(s, v), \quad (7.10)$$

де $\psi_0 = -\lambda_0$ ($\psi_0 < 0$), $\psi_1(s) = w_1(s)$ - множник Лагранжа, відповідний диференціальному рівнянню (зв'язку) (7.2), $\varphi_0(s) = L_2$ та $\varphi_1(s, v) = \frac{dv}{ds}$ визначаються формулами (7.6) та (7.2) відповідно.

Для функції Понтрягіна справедливі рівняння (6.13), які називаються канонічними рівняннями. Перше з цих рівнянь для гамільтоніана (7.10) має вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{d\psi_1}{ds}, \quad \frac{d\psi_1}{ds} = -\psi_0 \frac{\partial \varphi_0(v)}{\partial v} - \psi_1(s) \frac{\partial \varphi_1(s, v)}{\partial v}. \quad (7.11)$$

Функція Понтрягіна $H(\psi_0, \psi_1, v, u_f, u_b)$ досягає максимуму при параметрах керувань u_f^* , u_b^* :

$$H(\psi_0, \psi_1, v, u_f^*, u_b^*) = \max_{\substack{0 \leq u_f \leq 1 \\ 0 \leq u_b \leq 1}} H(\psi_0, \psi_1, v, u_f, u_b). \quad (7.12)$$

Оскільки гамільтоніан (7.10) залежить від s явно (через функцію $g(s)$ відповідну питомому опору на ухилах та поворотах колії), то, згідно з п. 3.5, маємо

$$\frac{dH}{ds} = \frac{\partial H}{\partial s} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial s} = \psi_1(s) \frac{\partial \varphi_1(s, v)}{\partial s} = \psi_1(s) \frac{g'(s)}{v}. \quad (7.13)$$

Ми використали анти симетрію дужки Пуассона (3.29). Введемо змінну

$$p = -\frac{\psi_1(s)}{\psi_0 v}. \quad (7.14)$$

Тоді функцію Понтрягіна (7.10) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} H &= \psi_0 \left(u_f f_m(v) + \frac{\lambda}{v} \right) - p \psi_0 \left(u_f f_m(v) - u_b b_m(v) - w(v) - g(s) \right) = \\ &= -\psi_0 \left[u_f f_m(v) (p-1) - p \left(u_b b_m(v) + w(v) + g(s) \right) - \frac{\lambda}{v} \right] \end{aligned} \quad (7.15)$$

Можна знайти похідну P за S . Для цього використаємо (7.2) та (7.11). В результаті одержуємо диференціальне рівняння для P :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} &= -\frac{1}{\psi_0 v^2} \left[-\psi_0 v \left(u_m f_m'(v) - \frac{\lambda}{v^2} \right) + \right. \\ &\left. + \psi_0 v p \left(u_m f_m'(v) - u_b b_m'(v) - w'(v) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{v} \left[u_m f_m'(v) (1-p) + p \left(u_b b_m'(v) + w'(v) \right) - \frac{\lambda}{v^2} \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

Проаналізуємо режими руху поїзда. Відповідно до принципу максимуму Понтрягіна з (7.15) впливає, що максимум гамільтоніана може досягатися при значеннях керувань $u = 1$ (для додатних доданків), або при $u = 0$ (для від'ємних доданків) або може бути $u \in [0, 1]$ (для доданків пропорційних P). Розглянемо інтеграли та значення p : $p \in (-\infty, 0)$; $p = 0$; $p \in (0, 1)$; $p = 1$; $p \in (1, \infty)$. При цьому максимум гамільтоніана (7.15) досягається при керуваннях

$$\begin{aligned}
\text{а) } p \in (-\infty, 0) : u_f = 0, u_b = 1, & \quad (\text{МГ}) \\
\text{б) } p = 0 : u_f = 0, u_b \in [0, 1], & \quad (\text{СГ}) \\
\text{в) } p \in (0, 1) : u_f = 0, u_b = 0, & \quad (\text{В}) \\
\text{г) } p = 1 : u_f \in [0, 1], u_b = 0, & \quad (\text{С}) \\
\text{д) } p \in (1, \infty) : u_f = 1, u_b = 0. & \quad (\text{МТ})
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Режиму а) відповідає максимальне гальмування ($u_b = 1$) при вимкнених двигунах ($u_f = 0$). Це режим (МГ). Режим в) відповідає вимкненим двигунам ($u_f = 0$) та гальмам ($u_b = 0$). Тобто це режим вибігу – режиму руху по інерції. Це режим (В). Режим д) відповідає руху з максимальною тягою двигунів ($u_f = 1$) та вимкненими гальмами ($u_b = 0$). Це режим максимальної тяги (МТ).

В режимах б) та г) одне з керувань може мати довільне значення на відріжку $[0, 1]$.

В режимі г) $u_b = 0$, що відповідає вимкненим гальмам. Тоді з (7.16) можна одержати

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{v^3} [v^2 w'(v) - \lambda] . \tag{7.18}$$

Якщо цей режим існує на деякому інтервалі, то на ньому повинно бути $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ і

$$v^2 w'(v) = \lambda = \text{const} . \tag{7.19}$$

Вважається, що функція $w(v)$ відповідає питомому опору руху поїзда, являє собою квадратний тричлен за швидкістю з додатними коефіцієнтами. Тому функція $v^2 w'(v)$ монотонно зростає і рівняння (7.19) має один корінь v_0 . Це означає, що

режиму г) відповідає рух зі сталою швидкістю v_0 . При цьому значення сталої швидкості v_0 залежить від сили тяги двигунів. Значенням керування u_f на відрізку $[0, 1]$ відповідають різні значення швидкості v_0 . Це режим стабілізації (С).

В режимі б) при $p = 0$ та $u_f = 0$ похідна $\frac{\partial p}{\partial s} = -\lambda/v^2 < 0$.

Тому $P(s) \neq 0$ на деякому інтервалі. Таким чином, виникає перехід до режиму максимального гальмування (МГ). В цьому режимі гальмування дозволяє утримати швидкість в припустимих межах при спусках. Значення керування u_b на відрізку $[0, 1]$ відповідають утримуванню швидкості в припустимих межах на спусках з різним нахилом. Цей режим стабілізації гальмування (СГ).

Виникає питання про узгодження переходів між режимами руху поїзда з мінімізацією енерговитрат. Для пошуку відповіді на це питання використаємо неперервність функції $p(s)$. Дійсно, з (7.16) випливає, що ця функція повинна бути не тільки неперервною, а і диференційованою. Тому мінімізація енерговитрат неможлива при переходах з режимів з $p = 0$ до режимів з $p = 1$. Це означає, що недоцільно переходити з режиму стабілізації (С) до режиму стабілізації гальмуванням (СГ) і навпаки від (СГ) до (С). Аналогічно недоцільно з точки зору мінімізації енерговитрат переходити з режиму максимального гальмування (МГ) при $p < 0$ до режиму максимальної тяги (МТ) при $p > 1$ (та навпаки від МТ до МГ). Також не відповідають мінімізації енерговитрат переходи від (СГ) ($p = 0$) до (МТ) ($p > 1$) і від (МТ) до (СГ) та від (МГ) ($p < 0$) до (С) ($p = 1$) (і від (С) до (МГ)).

Розглянемо тепер режими руху електротягів та електротягів з рекуперацією, тобто коли зменшення швидкості (і кінетичної енергії) поїзда досягається виробництвом електроенергії. Ця електроенергія передається в контактну електромережу залізниці і може бути використана на інших ділянках залізниці в даний момент часу. Таким чином, на доданок до сили механічного гальмування (B_T) з'являється сила рекуперації R . З урахуванням

рекуперації витрати електроенергії можна написати узагальнення (7.1) у вигляді

$$A_l = \int_{s_n}^{s_k} \left(\frac{E}{\eta_T} - \eta_p R \right) ds, \quad (7.20)$$

де η_T та η_p - коефіцієнти корисної дії в режимах тяги двигунів та рекуперації, відповідно. Якщо позначити максимальну силу рекуперативного гальмування через R_{\max} , ввести величину $r_m = \xi R_{\max} / (P + Q)$ та відповідне керування $u_r = R / R_{\max}$ ($u_r \in [0, 1]$), то узагальнення диференціального рівняння (7.2) можна подати у вигляді

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{v} \left[u_f f_m(v) - u_r r_m(v) - u_b b_m(v) - w(v) - g(s) \right]. \quad (7.21)$$

При цьому замість (7.6) маємо

$$L_p = u_f f_m(v) - \eta_0 u_r r_m(v) + \frac{\lambda}{v}, \quad (7.22)$$

де $\eta_0 = \eta_p \eta_T$ - коефіцієнт, відповідний відносній кількості електроенергії, поверненої у електромережу.

Для гальмування можна написати узагальнення (7.15)

$$H_p = -\psi_0 \left[u_f f_m(v) (p-1) - (p-\eta_0) r_m(v) u_m - p (u_b b_m(v) + w(v) + g(s)) \right]. \quad (7.23)$$

З цього гамільтоніана видно, що на оптимальні режими руху електропоїзда може впливати величина коефіцієнта корисної дії η_0 .

При урахуванні рекуперації збільшується кількість режимів руху. Існують такі режими:

$$a) p \in (-\infty, 0), u_f = 0, u_r = u_b = 1, \quad (\text{МГ})$$

- б) $p = 0, u_f = 0, u_b \in [0,1], u_r = 1,$ (СГ)
 в) $p \in (0, \eta_0), u_f = 0, u_b = 0, u_r = 1,$ (РГ)
 г) $p = \eta_0, u_f = 0, u_b = 0, u_r \in [0,1],$ (СР)
 д) $p \in (\eta_0, 1), u_f = 0, u_b = 0, u_r = 0,$ (В)
 е) $p = 1, u_f \in [0,1], u_b = 0, u_r = 0,$ (С)
 ж) $p > 1, u_f = 1, u_b = 0, u_r = 0.$ (МТ)

Внаслідок рекуперативного гальмування, окрім режимів

а) максимального гальмування (МГ); б) стабілізації гальмуванням (СГ); д) вибігу (В); е) стабілізації (С); ж) максимальної тяги (МТ) існують також режими: в) рекуперативного гальмування (РГ) та г) стабілізації рекуперативним гальмуванням (СР).

З неперервності величини P знов можна знайти переходи між режимами руху, які не відповідають мінімізації енерговитрат. Такими переходами на додаток до неекономічних переходів без рекупераційного гальмування є переходи $МГ \rightleftharpoons СР, МГ \rightleftharpoons В, МГ \rightleftharpoons С, МГ \rightleftharpoons МТ, РГ \rightleftharpoons В, РГ \rightleftharpoons С, РГ \rightleftharpoons МТ. СР \rightleftharpoons С, СР \rightleftharpoons МТ, В \rightleftharpoons МТ.$

ЛЕКЦІЯ 8

Задача про м'яку посадку космічного апарата

При м'якій посадці космічного апарата, у випадку відсутності атмосфери поблизу поверхні небесного тіла, зниження швидкості апарата можливе тільки завдяки двигунам. Тому виникає проблема мінімізації витрат палива. Це особливо важливо у випадку необхідності наступного старту цього апарата з поверхні небесного тіла і досягнення ним певної швидкості. Відсутність сили тертя під час руху космічного апарату і зменшення швидкості можливе тільки внаслідок роботи двигуна, що потребує витрат палива. Тому для розв'язання задачі про мінімізації витрат палива під час м'якої посадки космічного

апарата доцільно застосовувати методи теорії оптимального керування. На перший погляд задача про м'яку посадку космічного апарата не має ніякого значення для наземного транспорту. Але можна розглядати розв'язані задачі про мінімізацію витрат палива при м'якій посадці як наближене розв'язання задачі про мінімізацію витрат палива під час спуску з гірки тепловоза або автомобіля при гальмуванні двигуном. Така ситуація може реалізовуватись під час спуску з обледенілої гірки або при відмові гальм. Окрім цього, розроблені математичні методи можна використати при розв'язанні задач мінімізації витрат палива під час руху електричного транспорту.

Розглянемо випадок посадки космічного апарата на небесне тіло (наприклад, Місяць) у вертикальному напрямку. Позначимо відстань від поверхні Місяця за $z(t)$, де t - час. Внаслідок роботи двигунів $m(t)$ - маса космічного апарата залежить від часу. На космічний апарат діють дві сили: сила тяжіння - $\gamma m(t)$ та сила тяги двигуна ku (додатну величину k можна вважати сталою, керування u набуває значення на відрізку $[0, 1]$).Dodatnu величину γ можна вважати сталою (за аналогією з величиною прискорення вільного падіння $g \approx 9.8$ м/с² поблизу Землі), хоча взагалі такі величини залежать від відстані до поверхні (або центру) небесного тіла. Вважаємо, що космічний апарат спочатку рухається тільки під дією сили тяжіння, тобто падає на поверхню вертикально. При цьому швидкість падіння космічного апарата зростає з часом. Під час падіння (а можливо, і всієї посадки) $z'(t) < 0$. В момент часу $t_0 = 0$ включається двигун. Час посадки позначимо через T ($0 \leq t \leq T$). На цьому відрізку часу (під час роботи двигуна) за другим законом механіки Ньютона можна написати

$$m(t) \frac{d^2 z}{dt^2} = ku - \gamma m(t). \quad (8.1)$$

Позначимо $m(0) = m_0$, $z(t) = z_1$, $z'(t) = z_1' = z_2$. Тоді рівняння (8.1) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} z_2' &= k \frac{u}{m} - \gamma, \\ m' &= -u, \quad z_0(0) = z_0 > 0, \quad z_2(0) = v_0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

М'яка посадка означає, що $z_1(T) = 0$, $z_2(T) = 0$.

Мінімізація витрат палива означає, що

$$m_0(t) - m(T) \rightarrow \min. \quad (8.3)$$

Формально маємо диференціальні зв'язки $\left(z_1' = z_2, z_2' = k \frac{u}{m} - \gamma, m' = -u \right)$ та рухомі межі $z_1(T)$ і $z_2(T)$. Складаємо функцію Лагранжа [2]

$$\begin{aligned} L &= \lambda_0 (m_0 - m(T)) + \\ &+ \left[p_1(t) (z_1' - z_2) + p_2(t) \left(z_2' - k \frac{u}{m} + \gamma \right) + p_3(t) (m' + u) \right] + \\ &+ \mu_1 z_1(T) + \mu_2 z_2(T). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Множники Лагранжа λ_0, μ_1, μ_2 - сталі, а p_1, p_2, p_3 - функції часу.

Необхідні умови існування екстремумів приводять до рівнянь:

1 Рівняння Ейлера для функції Лагранжа (8.4) мають вигляд

$$p_1' = 0, \quad p_1 + p_2' = 0, \quad p_3' = p_2 \frac{ku}{m^2} \quad (8.5)$$

2 Трансверсальність за z дає

$$p_1(T) = -\mu_1, \quad p_2(T) = -\mu_2, \quad p_3(T) = \lambda_0. \quad (8.6)$$

3 Оптимальність за u дозволяє отримати

$$\min_u \left(p_3 u - p_2 \frac{ku}{m(t)} \right) = p_2(t) u(t)^* - p_2(t) \frac{ku(t)^*}{m(t)} . \quad (8.7)$$

4 Трансверсальність за T виражається рівнянням

$$\begin{aligned} -\lambda_0 m'(T) + \mu_1 z'(T) + \mu_2 z_2'(T) &= 0 \\ \lambda_0 u(T)^* - p_2(t) \left(\frac{ku(T)^*}{m(T)} - \gamma \right) &= 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

З (8.5) випливає, що $p_1 = C_1$, $p_2(t) = -C_1 t + C_2$. Позначимо $\psi(t) = -p_3(t) + k p_2(t) / m(t)$. В термінах $\psi(t)$ рівняння (8.7) можна переписати у вигляді

$$\min_u \left(P_3(t) u - P_2(t) \frac{ku}{m} \right) = \max_u \psi(t) u = \begin{cases} 0, & \psi(t) < 0 \\ u_{\max}, & \psi(t) > 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

Для $\psi'(t)$ можна одержати з (8.5) $\psi'(t) = k C_1 / m(t)$. Окрім цього, з умови трансверсальності за T маємо

$$\psi(T) u^*(T) = p_2(T) \gamma . \quad (8.10)$$

При $C_1 = p_1 = 0$ $\psi = \psi_0 = const$. При $\psi_0 = 0$ з (8.11) випливає, що $p_2 = 0$. Тоді з (8.5) маємо, що $p_3 = 0$, а з (8.8) одержуємо, що $\lambda_0 = 0$. Тобто при $C_1 = 0$ всі множники Лагранжа дорівнюють нулю. Але це не можливо. Внаслідок цього $u(T) = 0$ або $u(T) = u_{\max}$. Якщо $C_1 \neq 0$, то похідна $\psi'(t)$ має сталий знак. Тому можливе одне переключення режимів роботи двигуна. Це означає, що спочатку двигун не вмикається, а в певний момент часу t^* потрібно ввімкнути двигун на повну потужність.

Рух апарату при $t \leq t^*$ визначається формулами вільного падіння

$$z_1 = z_0 + v_0 t - \gamma \frac{t^2}{2}, \quad z_2 = v_0 - \gamma t, \quad m(t)^* = m_0. \quad (8.11)$$

У фазовій площині (z_1, z_2) ці рівності визначають параболу. Рух апарата під час роботи двигуна визначається рівнянням (8.2) при $u(T) = u_{\max}$, $z_1(t^*) = \bar{z}_0$, $z_2(t^*) = \bar{v}_0$, $m(t^*) = m_0$.

Розв'язок відповідної задачі Коші при $t = t^* + \alpha$ має вигляд

$$z_1(t^* + \alpha) = \bar{z}_0 + \bar{v}_0 \alpha - \frac{1}{2} \gamma \alpha^2 + k \alpha + \frac{k m_0}{u_{\max}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha u_{\max}}{m_0} \right) \ln \left(1 - \frac{\alpha u_{\max}}{m_0} \right), \quad (8.12)$$

$$z_2(t^* + \alpha) = \bar{v}_0^* - \alpha \gamma - k \ln \left(1 - \frac{\alpha u_{\max}}{m_0} \right), \quad (8.13)$$

$$m = m_0 - \alpha u_{\max}$$

Множина точок (\bar{z}_0, \bar{v}_0) з яких можна прийти в початок координат $(z(T) = 0, v(T) = 0)$ після вимкнення параметра часу α з умов $z(\alpha) = z_1(\alpha) = 0$, $v(\alpha) = z_2(\alpha) = 0$ дає рівняння. Розв'язок цього рівняння з найменшим α якраз і дає розв'язок задачі про мінімізацію витрат палива при м'якій посадці космічного апарата. Якщо такого розв'язку не існує, то м'яка посадка апарата неможлива.

Список літератури

- 1 Микропроцессорные системы автоведения электроподвижного состава / Под ред. Л.А. Баранова. – М.: Транспорт, 1990. – 272 с.
- 2 Сборник задач по математике для вузов в 4 ч. Ч. III. Специальные курсы / Под общей ред. А.В. Ефимова, А.Б. Демидовича, В.А. Болгова. – М.: Наука, 1984. - 608 с.
- 3 Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Спец. курсы. – СПб : Лань, 2002. – 640 с. – [ISBN 5-8114-0395-X](#).
- 4 Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979. - 430 с.
- 5 Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 168 с.
- 6 Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: МГУ, 1989. – 204 с.
- 7 Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. - 408 с.

