

Український державний університет залізничного транспорту

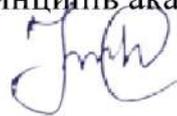
Кафедра управління експлуатаційною роботою

УДОСКОНАЛЕННЯ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПАСАЖИРІВ ШВИДКІСНИМИ І  
ЗВИЧАЙНИМИ ПОЇЗДАМИ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ  
МЕРЕЖ

Пояснювальна записка та розрахунки  
до кваліфікаційної роботи

УППШЗ.300.00.00.000 ПЗ

Розробив студент групи 221 –ОПУТ –Д23  
спеціальності 275/275.02 – Транспортні  
технології (на залізничному транспорті)  
(роботу виконано самостійно, відповідно до  
принципів академічної доброчесності)



Богдан ХЛБИШИН

Керівник: професор, докт. техн. наук  
Андрій ПРОХОРЧЕНКО

Рецензент: професор, докт. техн. наук  
Олександр ОГАР

2025

## АНОТАЦІЯ

Дана кваліфікаційна робота включає в себе 15 слайдів презентації, 72 аркуші пояснювальної записки формату А4, що включає 15 рисунків, 25 літературних джерел.

Ключові слова: ПЕРЕВЕЗЕННЯ ПАСАЖИРІВ, ШВИДКІСНИЙ ПОЇЗД, АНАЛІЗ СКЛАДНИХ МЕРЕЖ.

Об'єктом дослідження є процес перевезень пасажирів на залізничному транспорті України.

Метою дослідження є підвищення ефективності перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж з метою виявлення структурних закономірностей, що впливають на синхронізацію, надійність та ефективність пасажирських потоків. Це дозволить оптимізувати маршрути руху поїздів, зменшити час пересадок, підвищити стійкість до збоїв у роботі інфраструктури та забезпечити більш ефективне використання пасажирської залізничної мережі.

В межах даної кваліфікаційної магістерської роботи для удосконалення перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами застосовано процедуру дослідження просторово-структурних властивостей системи пасажирських перевезень України на основі методів аналізу складних мереж для вивчення її топологічних властивостей.

Вперше: для аналізу макропараметрів функціонування залізничної пасажирської мережі України побудовано та проведено дослідження графа пасажирських залізничних перевезень України на основі теорії складних мереж. Встановлено, що розподіл степенів вершин підпорядковується степеневому закону, що свідчить про належність мережі до безмасштабних структур із властивістю масштабної інваріантності. Удосконалено: для практичного використання застосованого аналізу макропоказників пасажирських перевезень розроблено вимоги до автоматизованої системи для стратегічного, тактичного та оперативного управління розвитком залізничної інфраструктури України в умовах структурних трансформацій і зовнішніх викликів.

## ABSTRACT

This qualification work includes 15 presentation slides, 72 sheets of explanatory notes in A4 format, including 15 drawings, 25 literary sources.

Keywords: PASSENGER TRANSPORTATION, HIGH-SPEED TRAIN, ANALYSIS OF COMPLEX NETWORKS.

The object of the study is the process of passenger transportation on the railway transport of Ukraine.

The purpose of the study is to increase the efficiency of passenger transportation by high-speed and conventional trains based on methods of analyzing complex networks in order to identify structural patterns that affect the synchronization, reliability and efficiency of passenger flows. This will allow optimizing train routes, reducing transfer times, increasing resilience to infrastructure failures and ensuring more efficient use of the passenger railway network.

Within the framework of this qualification master's thesis, in order to improve passenger transportation by high-speed and conventional trains, the procedure for studying the spatial-structural properties of the passenger transportation system of Ukraine based on the methods of analysis of complex networks for studying its topological properties was applied.

For the first time: to analyze the macro-parameters of the functioning of the railway passenger network of Ukraine, a study of the graph of passenger railway transportation of Ukraine based on the theory of complex networks was constructed and conducted. It was established that the distribution of degrees of vertices obeys a power law, which indicates that the network belongs to scale-free structures with the property of scale invariance. Improved: for the practical use of the applied analysis of macro-indicators of passenger transportation, requirements for an automated system for strategic, tactical and operational management of the development of the railway infrastructure of Ukraine in conditions of structural transformations and external challenges were developed.

# Український державний університет залізничного транспорту

Факультет управління процесами перевезень

Кафедра управління експлуатаційною роботою

Освітній рівень: магістр

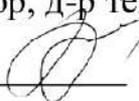
Спеціальність 275 Транспортні технології

275.02 Транспортні технології (на залізничному транспорті)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри,

професор, д-р техн. наук

\_\_\_\_\_  Бутько Т.В.

« 19 » березня \_\_\_\_\_ 2025 р.

## **ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ**

Хлібишину Богдану Юрійовичу

1 Тема роботи «Удосконалення перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж» керівник Прохорченко Андрій Володимирович, професор, доктор техн. наук затверджена розпорядженням по факультету управління процесами перевезень від від «24» лютого 2025 р. № 04/25.

2 Строк подання студентом роботи 15 червня 2025 року.

3 Вихідні дані до роботи: Техніко-експлуатаційні показники роботи залізничного транспорту України в цілому, технічна характеристика досліджуваного залізничного полігону, нормативна документація щодо розкладу руху пасажирських поїздів на залізницях України.

4 Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Вступ. 1 Аналіз швидкісних та високошвидкісних пасажирських перевезень. 2. Аналіз попередніх наукових розробок за темою дослідження. 3 Дослідження системи перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж. 4 Розробка вимог щодо структури системи підтримки прийняття рішень логістичних центрів залізничних вокзалів. 5 Економічна оцінка ефективності впровадження удосконаленої технології роботи залізничного вокзалу в умовах функціонування логістичного центру на залізничній мережі швидкісного і звичайного руху Висновки

5 Перелік графічного матеріалу: Динаміка доходів АТ УЗ за 2019-2023 роки, млрд. грн., Порівняння аналізу динаміки перевезення пасажирів за автомобільним та залізничним транспортом у період 2018-2023 рр, Кількість відправлених пасажирів за 2021-2023 рр, Візуалізація графа Р мережі швидкісних і звичайних пасажирських поїздів згідно зі Службовим розкладом, Діаграма 10 найкращих залізничних вокзалів із найбільшими значеннями степенів вершин відповідно вхідних (In-Degree) і вихідних (Out-Degree)

6 Консультанти окремих розділів

Розділ	Прізвище, ініціали, посада та науковий ступінь консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Оцінка економічної ефективності проектного рішення	Наталія ГРИЦЕНКО, доцент, к.е.н		

7. Дата видачі завдання: 20.03.2025.

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

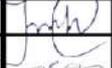
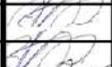
Назва етапів	Строк виконання етапів	Примітка
1 Аналіз швидкісних та високошвидкісних пасажирських перевезень	20.03.25	вик
2. Аналіз попередніх наукових розробок за темою дослідження	25.04.25	вик
3 Дослідження системи перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж	01.05.25	вик
4 Розробка вимог щодо структури системи підтримки прийняття рішень логістичних центрів залізничних вокзалів	12.05.25	вик
5 Економічна оцінка ефективності впровадження удосконаленої технології роботи залізничного вокзалу в умовах функціонування логістичного центру на залізничній мережі швидкісного і звичайного руху	05.06.25	вик
Висновки. Оформлення роботи.	15.06.25	вик

Студент  - Богдан ХЛІБИШИН

Керівник  Андрій ПРОХОРЧЕНКО

## Зміст

Вступ	8
1 Аналіз швидкісних та високошвидкісних пасажирських перевезень	11
1.1 Світовий досвід швидкісних та високошвидкісних перевезень	11
1.2 Аналіз залізничних пасажирських перевезень в Україні	15
2. Аналіз попередніх наукових розробок за темою дослідження	23
3 Дослідження системи перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж	38
4 Розробка вимог щодо структури системи підтримки прийняття рішень логістичних центрів залізничних вокзалів	51
4.1. Розробка системи підтримки прийняття рішень логістичних центрів залізничних вокзалів з використанням WEB технологій	51
4.2 Розробка схеми транзиту інформаційних потоків в пасажирських перевезеннях при організації структури бази даних в системі підтримки прийняття рішень	56
4.3. Програмна реалізація інтелектуальної системи підтримки прийняття рішень	57

					УППШЗ.200.00.00 ПЗ			
Змн.	Лист	№ докум.	Підпис	Дата	Удосконалення перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж	Літ.	Арк.	Аркушів
Розроб.		Товстопят В.		-				
Перевір.		Проخورченко					6	72
Реценз.						УкрДУЗТ		
Н. Контр.		Проخورченко						
Затверд.		Бутько						

5 Економічна оцінка ефективності впровадження удосконаленої технології роботи залізничного вокзалу в умовах функціонування логістичного центру на залізничній мережі швидкісного і звичайного руху	59
Висновки	67
Список використаних джерел	70

					УППШЗ. 200.00.00 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		7

## Вступ

У сучасних умовах реформування транспортної галузі України та підвищення вимог до ефективності пасажирських перевезень особливої актуальності набуває питання оптимізації роботи залізничного транспорту. Швидкісні та звичайні поїзди відіграють ключову роль у забезпеченні мобільності населення, проте існуюча інфраструктура часто не відповідає сучасним вимогам до надійності, швидкості та зручності сполучень. Це обумовлює необхідність пошуку нових підходів до аналізу та удосконалення системи пасажирських перевезень.

Методи аналізу складних мереж, які широко використовуються в дослідженнях транспортних, енергетичних і соціальних систем, дають змогу виявити критичні вузли, оцінити рівень зв'язності, ієрархію та наявність центрів тяжіння в мережі залізничного сполучення. Застосування цих методів у контексті пасажирських перевезень дозволяє виявити структурні недоліки, спрогнозувати вплив змін у графіку руху та складі поїздів, а також обґрунтовано планувати інтеграцію швидкісних маршрутів у наявну інфраструктуру.

Таким чином, удосконалення перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж є важливим напрямом наукових досліджень і практичного впровадження. Це дозволить підвищити якість транспортного обслуговування, скоротити час у дорозі, збалансувати навантаження на мережу та забезпечити стійкість пасажирських сполучень до зовнішніх впливів.

*Метою* дослідження є підвищення ефективності перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж з метою виявлення структурних закономірностей, що впливають на синхронізацію, надійність та ефективність пасажирських потоків. Це дозволить оптимізувати маршрути руху поїздів, зменшити час пересадок,

підвищити стійкість до збоїв у роботі інфраструктури та забезпечити більш ефективне використання пасажирської залізничної мережі.

*Основні завдання:*

- провести аналіз залізничних пасажирських перевезень в Україні;
- застосувати методи аналізу складних мереж для вивчення топологічних властивостей системи залізничних пасажирських перевезень;
- дослідити закономірності розподілу степенів вершин в залізничній пасажирській маршрутній мережі;
- виявити роль окремих станцій (вокзалів) мережі у формуванні маршрутної структури швидкісних та звичайних пасажирських поїздів та розробити рекомендації з оптимізації маршрутної структури;
- провести економічне обґрунтування від впровадження системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку залізничної пасажирської мережі України.

*Об'єктом дослідження* є процес перевезень пасажирів на залізничному транспорті України.

*Предметом дослідження* процедура дослідження просторово-структурних властивостей системи пасажирських перевезень України швидкісними та звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж.

*Елементи наукової новизни:* В магістерській кваліфікаційній роботі для удосконалення перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами застосовано процедуру дослідження просторово-структурних властивостей системи пасажирських перевезень України на основі методів аналізу складних мереж для вивчення її топологічних властивостей.

Вперше:

– для аналізу макропараметрів функціонування залізничної пасажирської мережі України побудовано та проведено дослідження графа пасажирських залізничних перевезень України за даними Службового розкладу руху швидкісних та звичайних поїздів на 2018-2019 рр., на основі

теорії складних мереж. Встановлено, що розподіл степенів вершин підпорядковується степеневому закону, що свідчить про належність мережі до безмасштабних структур із властивістю масштабної інваріантності. Це підтверджено статистично (коефіцієнт  $\alpha \approx 2.5$ , проведено тест KS-статистика, критерій R). У мережі спостерігається яскраво виражена централізованість, де невелика кількість станцій-хабів має високі значення степеня, посередництва та близькості, тоді як переважна більшість вузлів є слабозв'язаними або периферійними. Знайдено значення діаметра – 5 та ефективного діаметра – 4. Середня довжина найкоротшого шляху у найбільшій компоненті SCC (59 вокзалів) складає 2,5 кроки (пересадки). Визначено наявність асортативного змішування в мережі. Коефіцієнт кластеризації Воттса-Строгаца складає 0,333904, що є помірним. Це свідчить про наявність локальних кластерів чи регіональних підмереж, де станції формують більш щільні з'єднання. Це характерно для мереж з вираженою регіональною спеціалізацією.

Удосконалено:

для практичного використання застосованого аналізу макропоказників пасажирських перевезень розроблено вимоги до автоматизованої системи для стратегічного, тактичного та оперативного управління розвитком залізничної інфраструктури України в умовах структурних трансформацій і зовнішніх викликів.

Матеріали кваліфікаційної магістерської роботи опубліковані у фаховому виданні МОН України [1].

## Висновки

Аналіз динаміки перевезення пасажирів залізничним і автомобільним транспортом в Україні у період з 2018 по 2023 рік засвідчив загальну тенденцію до зниження обсягів пасажирських перевезень обома видами транспорту. Особливо суттєвим це зниження було в період 2020-2022 років, що збігається з глобальними карантинними обмеженнями, спричиненими пандемією COVID-19, а також із початком повномасштабної війни в Україні у 2022 році. За результатами дослідження встановлено, що кількість пасажирів, перевезених автомобільним транспортом (автобусами), зменшилася з 1907 млн осіб у 2018 році до 803 млн осіб у 2023 році. Це становить зниження на 57,9 відсотка. У найгірший період 2022 року цей показник сягнув лише 663 млн осіб. Аналогічно, залізничний транспорт продемонстрував зменшення обсягів перевезень з 158 млн осіб у 2018 році до 65 млн осіб у 2023 році, що відповідає скороченню на 58,9 відсотка. Мінімальний рівень 53 млн осіб зафіксовано у 2022 році. У 2023 році в обох видах транспорту спостерігається часткове відновлення обсягів перевезень порівняно з 2022 роком. Це свідчить про поступову адаптацію транспортної системи до нових умов та відновлення мобільності населення, хоча рівні перевезень залишаються значно нижчими, ніж у довоєнний період.

Аналіз динаміки доходів від пасажирських перевезень АТ «Укрзалізниця» у 2019-2023 роках свідчить про хронічну збитковість цього сегмента. Упродовж досліджуваного періоду частка доходів від пасажирських перевезень залишалася порівняно невеликою в загальній структурі, при цьому мала тенденцію до скорочення та нестабільності. Це підтверджується й тим, що за 2024 рік задекларовано збитки від пасажирських перевезень у розмірі 18,1 млрд грн, що демонструє системний характер фінансової нерентабельності даного виду діяльності. У 2019 році доходи від пасажирських перевезень становили 9,9 млрд грн, що було

найбільшим показником за аналізований період. Уже у 2020 році, під впливом пандемії COVID-19, вони зменшилися до 4,1 млрд грн. У 2023 році дохід від пасажирських перевезень зріс до 8,4 млрд грн. Однак навіть це зростання не дозволило вийти на докризовий рівень 2019 року. Крім того, при збереженні високих витрат на утримання рухомого складу та надання соціально орієнтованих послуг, цього доходу недостатньо для покриття витрат.

На основі застосування методу аналізу складних мереж для вивчення топологічних властивостей системи залізничних пасажирських перевезень проведено мережевий аналіз пасажирської залізничної системи України за графом мережі руху швидкісних та звичайних поїздів 2018-2019 рр. із використанням методів теорії складних мереж. Виявлено, що розподіл ступенів вершин підпорядковується степеневому закону, мережа характеризується високою централізованістю, асортативністю та коротким ефективним діаметром. Оцінено коефіцієнт кластеризації, транзитивність, центральність ступеня, посередництва та гармонійної близькості.

На основі дослідження закономірностей розподілу ступенів вершин в залізничній пасажирській маршрутній мережі доведена відповідність розподілів емпіричних ймовірностей загальних ступенів вершин графу степеневому розподілу. Результати показали, що значення показника степеневому розподілу ( $\alpha$ ) для загального ступеня центральності становить 2,502, що відповідає типовим значенням для безмасштабних мереж ( $2 < \alpha < 3$ ). Це підтверджує припущення про степеневий розподіл вершин. Отримане значення KS-статистики для загальних ступенів у степеневій моделі (power-law) становить 0,068, що демонструє гарну відповідність емпіричних даних степеневому розподілу. З урахуванням отриманих результатів та проведених тестів можна висунути гіпотезу про належність досліджуваної мережі швидкісних та звичайних пасажирських поїздів графу  $P$  до класу безмасштабних мереж. Це підкреслює існування окремих центральних вузлів, які мають вирішальний вплив на стабільність і робастність мережі, що

важливо враховувати під час планування та експлуатації залізничної пасажирської системи. На основі результатів запропоновано рекомендації щодо децентралізації маршрутів, посилення зв'язності периферійних залізничних вокзалів.

У результаті впровадження удосконаленої технології роботи залізничного вокзалу в умовах функціонування логістичного центру приріст прибутку залізничного вокзалу від запропонованої технології складе 8,6 %, коефіцієнт рентабельності становить 18,08 термін окупності – 0,06 року.

## Список використаних джерел

1. Дослідження системи перевезень пасажирів швидкісними і звичайними поїздами на основі методів аналізу складних мереж А. М. Киман, Д.Р.Хаченко, Г. О.Прохорченко, Б. Ю. Хлібишин, Е. Л. Акопян Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. 2025. № 212 С. 21-27.
2. Statistics Explained. Glossary: High-speed rail URL: [https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Glossary:High-speed\\_rail](https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Glossary:High-speed_rail) (дата звернення: 09 травня 2025 р.).
3. High-speed Rail EBSCO/URL: <https://www.ebsco.com/research-starters/applied-sciences/high-speed-rail#types-of-high-speed-systems> (дата звернення: 09 травня 2025 р.).
4. Rodrigue, J.-P. The Geography of Transport Systems. SIXTH EDITION. – New York: Routledge, 2024. – 402 с. – ISBN 9781032380407. – DOI: 10.4324/9781003343196.
5. Complex network model for railway timetable stability optimisation URL: <https://digital-library.theiet.org/doi/full/10.1> (дата звернення: 09 травня 2025 р.).
6. Моделювання залежного від розкладу поширення затримок на одноколіній залізничній лінії: підхід матричного перетворення.
7. Long-Term Passenger Flow Forecasting for Rail Transit Based on Complex Networks and Informer // PubMed. URL: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/39517791> (дата звернення: 15 травня 2025 р.).
8. Оптимізація мережі обслуговування поїздів з метою скорочення часу в дорозі URL: [https://www.researchgate.net/publication/294139557\\_Train\\_Service\\_Network\\_Optimization\\_in\\_View\\_of\\_Reducing\\_Travel\\_Time](https://www.researchgate.net/publication/294139557_Train_Service_Network_Optimization_in_View_of_Reducing_Travel_Time) (дата звернення: 15 травня 2025 р.).

9. Scheduling freight trains traveling on complex networks: [https://www.researchgate.net/publication/227427080\\_Scheduling\\_freight\\_trains\\_traveling\\_on\\_complex\\_networks](https://www.researchgate.net/publication/227427080_Scheduling_freight_trains_traveling_on_complex_networks) (дата звернення: 15 травня 2025 р.).

10. Маршрутизація та складання розкладу вантажних поїздів у пасажирській залізничній мережі: обчислювальна складність та поетапна евристика диспетчеризації.

11. Dong, T., Li, Y., Sun, K., Chen, J. Research on the Resilience of a Railway Network Based on a Complex Structure Analysis of Physical and Service Networks // *Applied Sciences*. – 2023. – Vol. 15, № 9. P 20-28.

12. Bhatia, U., Kumar, D., Kodra, E., Ganguly, A.R. Network Science Based Quantification of Resilience Demonstrated on the Indian Railways Network // *PLoS One*. – 2015. – Vol. 10, № 11. – DOI: 10.1371/journal.pone.0141890

13. Pagani, A., Mosquera, G., Alturki, A. та ін. Resilience or robustness: identifying topological vulnerabilities in rail networks // *R Soc Open Sci*. – 2019. – Vol. 6, № 2. – DOI: 10.1098/rsos.181301.

14. Pal, A.K., Ganguly, A.R. Topological Determinants of Resilience in Urban Rail Networks Facing Multi-Hazard Disruptions. URL: <https://arxiv.org/html/2407.06359v1> (дата звернення: 16 травня 2025 р.).

15. Xia, X., Li, H., Wang, K., Liu, Y. Analysis of the impact of high-speed rail on the spatio-temporal distribution of residential population and industrial structure // *Heliyon*. – 2023. – Vol. 9, № 10. – DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e21088.

16. Castillo, E., Gallego, I., Urena, J., Coronado, J.M. Timetabling optimization of a mixed double- and single-tracked railway network // *Applied Mathematical Modelling*. – 2011. – Vol. 35, № 2. – DOI: 10.1016/j.apm.2010.07.041.

17. Kumar, S.I., Shahbaz, K., Tyagi, M., Singh, S.P. Network-wide mixed-rail traffic scheduler: challenges and implementation aspects // *Transportation Research Procedia*. – 2025. – Vol. 82, № 2. – DOI: 10.1016/j.trpro.2024.12.193.

18. Borndörfer, R., Klug, T., Lamorgese, L., Mannino, C. Recent success stories on integrated optimization of railway systems // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. – 2017. – Vol. 74, № 2. – DOI: 10.1016/j.trc.2016.11.015.

19. Службовий розклад руху пасажирських поїздів, запроваджено з 09.12.2018 року / філія «Пасажирська компанія» АТ «Українська залізниця». Київ, 2018. 703 с.

20. Про затвердження Змін до Правил перевезення пасажирів, багажу, вантажобагажу та пошти залізничним транспортом України: Наказ Міністерства інфраструктури України від 01.12.2011 р. № 586, зареєстр. в Міністерстві юстиції України 16.12.2011 р. за № 1463/20201. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1463-11#Text> (дата звернення: 16 травня 2025).

21. Albert R. and Barabási A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*. 2002. 74 (1). P. 47–97. DOI: 10.1103/RevModPhys.74.47.

22. Prokhorchenko A. (2014). Investigation of scale-invariant property of organization system of train traffic volume based on the percolation theory. *Science and Transport Progress Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport*. Vol. 5 (53). P. 56-64. DOI:10.15802/stp2014/30471.

23. Marchiori M., Latora V. Harmony in the small-world. *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 87(19). P. 198701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.198701.

24. Wasserman S., Faust K., *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge University Press, New York, 1994.

25. Krnc M. & Škrekovski R. Group degree centrality and centralization in networks. *Mathematics*. 2020. Vol. 8(10). P. 1810. DOI:10.3390/math8101810.