



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

В. І. Храбустовський, О. А. Осмаєв, О. В. Рибачук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Частина 2

Спеціальні розділи

Харків – 2025

УДК 517.91(075)

X 88

*Рекомендовано вченою радою Українського державного університету
залізничного транспорту як навчальний посібник
(витяг із протоколу № 6 від 1 липня 2025 р.)*

Рецензенти:

проф. Л. В. Фардигола (математичне відділення ФТІНТ
НАН України ім. Б. І. Веркіна),
доц. А. Г. Гах (ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

X 88 Храбустовський В. І., Осмаєв О. А., Рибачук О. В. Диференціальні
рівняння: Навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2025. – Ч. 2. –
306 с., рис. 47, табл. 3.

ISBN

У навчальному посібнику розглянуто вибрані спеціальні розділи теорії диференціальних рівнянь. Ці розділи містять поняття, теореми та методи, які часто застосовують у техніці, фізиці тощо. Усі поняття і факти проілюстровано чисельними прикладами, багато з них має прикладний характер. Навчальний посібник призначений насамперед для здобувачів вищої освіти факультету «Інформаційно-керуючі системи та технології», особливо для тих, які вивчають дисципліну «Диференціальні рівняння». Окремі розділи та окремі частини навчального посібника можуть бути використані здобувачами вищої освіти інших факультетів для вивчення розділу «Диференціальні рівняння» дисципліни «Вища математика».

УДК 517.91(075)

ISBN

© Український державний університет
залізничного транспорту, 2025.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
1. СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ.....	9
1.1. Загальні визначення та факти	9
1.2. Стійкість лінійних систем диференціальних рівнянь	12
1.2.1. Загальні визначення та факти	12
1.2.2. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами	12
1.2.3. Проблема Рауса-Гурвіца.....	14
1.2.4. Стійкість лінійних систем із майже сталими коефіцієнтами	22
1.2.5. Стійкість лінійних систем із періодичними коефіцієнтами та їхніх збурень	23
1.3. Стійкість розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь	29
1.3.1. Стійкість за першим наближенням. Загальна теорія	29
1.3.2. Автономні системи. Стійкість за першим наближенням їхніх положень рівноваги	31
1.3.2.1. Загальні визначення та факти	31
1.3.2.2. Лінеаризація. Стійкість положення рівноваги за першим наближенням	34
Запитання до розділу 1.....	40
Завдання до розділу 1.....	42
Відповіді до завдань розділу 1	43
2. РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ	44
2.1. Різниці	44
2.2. Загальні поняття	46
2.3. Лінійні різницеві рівняння	48
2.3.1. Лінійні різницеві рівняння першого порядку.....	48
2.3.2. Лінійні різницеві рівняння вищих порядків	51
2.3.2.1. Загальна теорія	51
2.3.2.2. Лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами.....	54

2.3.2.3. Лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною	64
2.4. Лінійні системи різницевих рівнянь.....	74
Запитання до розділу 2.....	84
Завдання до розділу 2.....	86
Відповіді до завдань розділу 2	87
3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ.....	88
3.1. Перетворення Лапласа	88
3.1.1. Визначення оригіналу та зображення. Формула обернення	88
3.1.2. Властивості перетворення Лапласа	94
3.1.3. Теореми множення	106
3.1.4. Теореми розкладання.....	109
3.2. Операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь і систем	110
3.3. Відгуки на спеціальні види впливу	132
3.3.1. Імпульсна функція. Визначення, властивості	133
3.3.1.1. Відгук на імпульсну функцію. Передавальна функція	137
3.3.1.2. Відгук на одиничний стрибок. Формула Дюамеля.....	144
3.3.1.3. Відгук на гармонічне збудження. Усталений режим	147
3.4. Операційний метод розрахунку електричних кіл.....	152
3.5. Операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними	156
3.6. Операційний метод розв'язання інтегральних рівнянь.....	158
3.7. Z-перетворення.....	161
3.7.1. Визначення дискретного оригіналу, дискретного перетворення Лапласа та z -перетворення	161
3.7.2. Властивості z -перетворення.....	164
3.8. Розв'язання лінійних різницевих рівнянь за допомогою z-перетворення	173
Запитання до розділу 3.....	179
Завдання до розділу 3.....	182

Відповіді до завдань розділу 3	184
4. КРАЙОВА ЗАДАЧА	185
4.1. Загальні визначення та факти	185
4.2. Розв’язання крайової задачі за допомогою функції Гріна	187
4.3. Самоспряжена крайова задача	189
4.4. Задача Штурма-Ліувілля	191
4.5. Розв’язання рівнянь математичної фізики методом відокремлення змінних	195
Запитання до розділу 4	200
Завдання до розділу 4	201
Відповіді до завдань розділу 4	202
5. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ	203
5.1. Приклади класичних задач, які сприяли зародженню варіаційного числення	203
5.2. Функціонал. Його максимум і мінімум	213
5.3. Найпростіша задача варіаційного числення	214
5.3.1. Постановка задачі	214
5.3.2. Перша та друга варіації	216
5.3.3. Перша необхідна умова екстремуму. Рівняння Ейлера	219
5.3.4. Перші інтеграли рівняння Ейлера	222
5.3.5. Деякі окремі випадки рівняння Ейлера	229
5.3.6. Друга необхідна умова екстремуму – умова Лежандра	233
5.3.7. Третя необхідна умова екстремуму – умова Якобі	235
5.3.8. Достатня умова екстремуму – умова Якобі	236
5.4. Узагальнення найпростішої задачі	239
5.4.1. Функціонали, які залежать від похідних вищого порядку	240
5.4.2. Функціонали, які залежать від кількох функцій (вектор-функцій)	242
5.4.3. Функціонали, які залежать від функцій кількох змінних	244

5.5. Умовний екстремум	247
5.5.1. Умовний екстремум з інтегральними зв'язками (ізопериметрична задача)	248
5.5.2. Умовний екстремум із скінченними або диференціальними зв'язками (задача Лагранжа).....	257
5.6. Задача з рухомими кінцями	262
5.7. Задача Больца	271
Запитання до розділу 5.....	276
Завдання до розділу 5.....	278
Відповіді до завдань розділу 5	279
6. Чисельне інтегрування диференціальних рівнянь.....	281
6.1. Метод Ейлера	281
6.2. Метод Рунге – Кутта	283
6.3. Метод Адамса.....	285
6.4. Правило Рунге	287
Запитання до розділу 6.....	288
Завдання до розділу 6.....	288
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....	289
Додатки.....	295
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	299

ВСТУП

Навчальний посібник є продовженням навчального посібника [39], у якому розглянуто в основному стандартні поняття і факти з теорії диференціальних рівнянь, які містяться в курсі дисципліни «Вища математика».

У цьому навчальному посібнику розглянуто вибрані спеціальні розділи теорії диференціальних рівнянь. Вони містять поняття, факти і методи, які часто застосовують для розрахунків електричних кіл, у теорії імпульсних систем, теорії автоматичного регулювання, механіці, фізиці тощо, а також для оптимізації тих або інших процесів.

У першому розділі подано ряд основних понять і фактів теорії стійкості за Ляпуновим.

У другому розділі розглянуто різницеві рівняння і системи та їхній зв'язок із диференціальними рівняннями. Основну увагу приділено лінійній теорії.

У третьому розділі розглянуто операційне числення та різноманітні його застосування, насамперед для розв'язання диференціальних рівнянь, z – перетворення та його застосування для розв'язання різницевих рівнянь.

У четвертому розділі розглянуто крайові задачі. Основну увагу приділено задачі Штурма-Ліувілля. Проілюстровано її зв'язок із методом Фур'є розв'язання задач математичної фізики.

У п'ятому розділі розглянуто класичні варіаційні задачі та деякі їх узагальнення.

У шостому розділі розглянуто найпростіші методи чисельного інтегрування диференціальних рівнянь.

Наповнення розділів наведено вище в докладному змісті.

Автори намагалися подати матеріал у тому самому стилі, що і в навчальному посібнику [39]. Тому формулювання деяких фактів загрублині,

доведення деяких тверджень є формальними або проведені на прикладах (зокрема, факти, пов'язані з імпульсною функцією, зв'язок між різницеви́ми та диференціальними рівняннями, властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля).

Поняття, теореми та методи проілюстровано чисельними прикладами, більшість із яких мають прикладний характер.

Для читання навчального посібника цілком достатньо знати основи теорії диференціальних рівнянь в обсязі навчального посібника [39] а також деякі факти теорії функцій комплексної змінної, які містяться в курсі дисципліни «Вища математика». Окремі розділи навчального посібника можна читати незалежно.

Для написання посібника були використані джерела [8, 18, 19, 23, 24, 26, 33-35, 38-41, 44-54, 56-58], а також відомі підручники А. Д. Мишкіса. Для глибшого вивчення матеріалу можуть бути використані джерела з бібліографічного списку.

У навчальному посібнику без пояснення використано скорочення:

ДР — диференціальне рівняння;

ЛДР — лінійне диференціальне рівняння;

ЛОДР — лінійне однорідне диференціальне рівняння;

ЛНДР — лінійне неоднорідне диференціальне рівняння;

СДР — система диференціальних рівнянь;

ЛСДР — лінійна система диференціальних рівнянь;

ЛОСДР — лінійна однорідна система диференціальних рівнянь;

ЛНСДР — лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь.

1. СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ

1.1. Загальні визначення та факти

Розглянемо систему ДР

$$y'_j(t) = f_j(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

на нескінченному проміжку часу $t_0 \leq t < \infty$.

Як у посібнику [39], запишемо систему (1.2) у векторній формі:

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)). \quad (1.2)$$

Нехай деякий розв'язок $\vec{y}(t)$ системи (1.2) описує хід деякого процесу. Стійкість ходу процесу має означати, що якщо через якісь причини початковий стан процесу $\vec{y}(0)$ незначно зміниться, то процес відбуватиметься приблизно в такий самий спосіб, якби збурення $\vec{y}(0)$ не відбулося.

Цих інтуїтивних міркувань недостатньо для того, щоб розв'язати задачу про стійкість реальних технічних систем. Загальне визначення стійкості розв'язку системи (1.2) дав О. М. Ляпунов.

Визначення 1.1. Розв'язок $\vec{y}_0(t)$ системи (1.2), який є визначеним на півосі $[t_0, \infty)$, називають **стійким**, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що будь-який розв'язок $\vec{y}(t)$ системи (1.2), який задовольняє умову $\|\vec{y}_0(t) - \vec{y}_0(t_0)\| < \delta$, є визначеним на півосі $[t_0, \infty)$ і задовольняє нерівність

$$\|\vec{y}(t) - \vec{y}_0(t)\| < \varepsilon, \quad t_0 \leq t < \infty. \quad (1.3)$$

Геометрично (у скалярному випадку) стійкість розв'язку $y_0(t)$ означає, що графік кожного розв'язку $y(t)$, який у момент $t = t_0$ виходить з δ -околу точки $y_0(t_0)$, має належати ε -трубці графіка розв'язку $y_0(t)$ на півосі $t_0 \leq t < \infty$ (рис. 1.1).

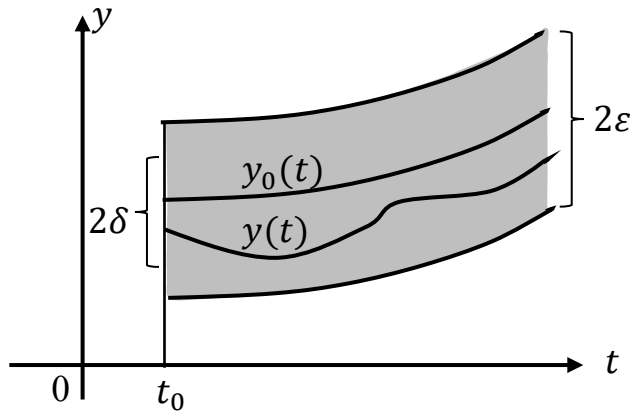


Рис. 1.1. Стійкість розв'язку $y_0(t)$

Зазначимо, що якщо розв'язок $\vec{y}_0(t)$ системи (1.2) є стійким, то він є єдиним розв'язком, який задовольняє початкову умову $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0(t_0)$ (чому?).

Якщо для розв'язку $\vec{y}_0(t)$ хоча б одна з умов із визначення стійкості не виконана, цей розв'язок називають **нестійким**.

Визначення 1.2. Розв'язок $\vec{y}_0(t)$ системи (1.2) називають **асимптотично стійким**, якщо він є стійким і якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{y}(t) - \vec{y}_0(t)\| = 0 \quad (1.4)$$

для кожного такого розв'язку $\vec{y}(t)$ системи (1.2), для якого норма $\|\vec{y}(t_0) - \vec{y}_0(t_0)\|$ є достатньо малою.

Питання про стійкість розв'язку $\vec{y}_0(t)$ системи (1.2) можна звести до питання стійкості нульового розв'язку.

Дійсно, нехай $\vec{y}_0(t)$ є розв'язком системи (1.2). Зробимо в системі (1.2) заміну $\vec{y}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}_0(t)$ і одержимо систему

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x} + \vec{y}_0) - \vec{f}(t, \vec{y}_0), \quad (1.5)$$

яка має нульовий розв'язок $\vec{x}(t) = 0$.

Твердження 1.1. Розв'язок $\vec{y}_0(t)$ системи (1.2) і розв'язок $\vec{x}(t) = 0$ системи (1.5) є стійкими (асимптотично стійкими) або нестійкими одночасно.

Приклад 1.1. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y' = y \cos x. \quad (1.6)$$

Загальний розв'язок ДР (1.6) дорівнює

$$y_3(x) = C e^{\sin x}.$$

Позначимо $y_0(x)$ нульовий розв'язок $y(x) = 0$.

Маємо

$$\|y_3(x) - y_0(x)\| = |C| e^{\sin x} \leq |C| e = e \|y_3(0) - y_0(0)\|. \quad (1.7)$$

Тому, якщо початкова умова $y(0)$ розв'язку $y(x)$ задовольняє умову

$$\|y(0) - y_0(0)\| < \delta = \frac{\varepsilon}{e},$$

то завдяки нерівності (1.7) розв'язок $y(x)$ задовольняє нерівність

$$\|y(x) - y_0(0)\| < \varepsilon.$$

Отже розв'язок $y_0(x) = 0$ є стійким. Він не є асимптотично стійким (чому?).

1.2. Стійкість лінійних систем диференціальних рівнянь

1.2.1. Загальні визначення та факти

Розглянемо ЛОСДР

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y}, \quad (1.8)$$

де матриця-функція є неперервною на півосі $[t_0, \infty)$.

Нехай $\vec{y}_0(x)$ є розв'язком системи (1.8). Оскільки заміна $\vec{y}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}_0(t)$ зводить систему (1.8) до тієї самої системи $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$, то всі розв'язки системи (1.8) одночасно є стійкими (асимптотично стійкими) або нестійкими. Тому залежно від того, який саме з цих випадків має місце, систему (1.8) називають відповідно стійкою (асимптотично стійкою) або нестійкою.

Теорема 1.1. Про стійкість лінійної системи. Для того щоб система (1.8) була стійкою (асимптотично стійкою), необхідно і достатньо, щоб були обмеженими на півосі $[t_0, \infty)$ (прямували до нуля, коли $t \rightarrow \infty$) усі елементи довільної фундаментальної матриці цієї системи.

1.2.2. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо ЛОСДР

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad (1.9)$$

де матриця A системи є сталою.

Теорема 1.2. Про стійкість лінійної системи зі сталими коефіцієнтами. 1. Система (1.9) є стійкою тоді і тільки тоді, коли дійсні частини всіх власних значень λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) матриці A є недодатними ($Re \lambda_j \leq 0$) і жорданові блоки, які відповідають власним значенням із нульовими дійсними частинами, складаються з одного елемента.

2. Система (1.9) є асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли дійсні частини всіх власних значень λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) матриці A є від'ємними ($Re \lambda_j < 0$), тобто коли всі власні значення лежать у лівій півплощині комплексної площини.

Приклад 1.2. Дослідити на стійкість систему

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \vec{y}. \quad (1.10)$$

Тут матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$. Власні значення є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.$$

Дійсні частини обох власних значень $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$ є від'ємними. Тому система (1.10) є асимптотично стійкою.

Приклад 1.3. Дослідити на стійкість систему

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}. \quad (1.11)$$

Тут матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$. Тому власні значення дорівнюють $\pm 2i$ і, отже, мають нульову дійсну частину.

Оскільки ці власні значення відмінні, то відповідні жорданові блоки складаються з одного елемента. Отже, система (1.11) є стійкою, але не асимптотично стійкою.

Приклад 1.4. Дослідити на стійкість систему

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 21 & 49 \\ -9 & -21 \end{pmatrix} \vec{y}. \quad (1.12)$$

Тут матриця $A = \begin{pmatrix} 21 & 49 \\ -9 & -21 \end{pmatrix}$. Характеристичне рівняння $\lambda = 0$. Отже, власні значення співпадають і дорівнюють 0.

Нульовому власному значенню відповідає жорданів блок другого порядку (оскільки в іншому разі матриця A була б нульовою). Отже, система (1.12) є нестійкою.

Приклад 1.5. Дослідити на стійкість систему

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}. \quad (1.13)$$

Тут матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$ має корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, дійсна частина другого є додатною. Тому система (1.13) є нестійкою.

1.2.3. Проблема Рауса-Гурвіца

У другій половині XIX сторіччя у зв'язку зі зростанням потужності парових та електричних машин усе частіше почала проявлятися схильність цих машин до нестійкої роботи і саморозгойдування. Тому з проєктуванням таких машин потрібно було гарантувати асимптотичну стійкість систем ДР (зазвичай нелінійних), які є математичними моделями роботи цих машин.

Як ми побачимо в подальшому, питання про асимптотичну стійкість розв'язків нелінійних систем у більшості випадків можна звести до питання про стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Останнє має місце, коли дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння матриці системи є від'ємними, тобто всі ці корені лежать у лівій півплощині комплексної площини $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Визначення 1.3. Многочлен $P(\lambda)$ називають **стійким**, якщо всі його корені лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Для многочленів першого та другого степеня дослідження на стійкість є тривіальним (дивитися приклади вище). У випадку, коли степінь многочлена є більшим ніж 2, це дослідження стає нетривіальним.

Максвелл поставив задачу про знаходження умов стійкості дійсних многочленів довільного степеня. Пізніше ця задача одержала назву «**Проблема Рауса-Гурвіца**». Різні варіанти розв'язання цієї проблеми одержали Ерміт, Раус, Гурвіц, Лъснар разом із Шипаром.

Теорема 1.3. Стодоли. (Необхідна ознака стійкості). Якщо многочлен

$$P_n(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_0 \quad (1.14)$$

є стійким, і $a_0 > 0$, то всі його коефіцієнти є додатними.

Приклад 1.6. Многочлен $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 1$ не є стійким, оскільки в нього коефіцієнт біля λ дорівнює 0.

Для многочленів першого та другого степеня умови теореми Стодоли є також і достатніми умовами стійкості (перевірте). Однак уже для многочленів третього степеня це твердження є хибним, як показує наступний приклад.

Приклад 1.7. Усі коефіцієнти многочлена $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30 = (\lambda + 3)(\lambda^2 - \lambda + 10)$ є додатними. Однак не всі його корені $\lambda = 1 \pm 3i$, $\lambda = -3$ лежать у лівій півплощині і, отже, він не є стійким.

Теорема 1.4. Ерміта. Кількість коренів многочлена $P_n(\lambda)$ (1.14) із дійсними коефіцієнтами, які лежать у лівій півплощині, дорівнює $\frac{n}{2} + \frac{\Delta\varphi}{\pi}$, якщо $P_n(i\omega) \neq 0$, $\omega \in [t_0, \infty)$. Тут $\Delta\varphi$ - це кут, на який повертається вектор $P_n(i\omega)$, коли ω змінюється від 0 до $+\infty$.

З теореми Ерміта випливає **критерій стійкості Ерміта – Михайлова**. Многочлен $P_n(\lambda)$ (1.14) із дійсними коефіцієнтами, у якого $P_n(i\omega) \neq 0$, $\omega \in [t_0, \infty)$, є стійким тоді і тільки тоді, коли вектор $P_n(i\omega)$ робить n чверть-обертів (тобто повертається на кут $\frac{\pi n}{2}$), коли ω змінюється від 0 до $+\infty$.

У технічній літературі цей критерій часто називають **критерієм Михайлова**, однак цей критерій знав ще Ерміт.

Теорема 1.5. Лъєнара-Шипара. Кількість коренів многочлена $P_n(\lambda)$ (1.14) парного або непарного степеня n із додатними коефіцієнтами, які лежать у правій півплощині, дорівнює подвоєній кількості змін знаків у послідовності чисел

$$1, D_1, D_3, \dots, D_{n-3}, D_{n-1}, \quad \text{коли } n \text{ є парним,} \quad (1.15)$$

$$1, D_2, D_4, \dots, D_{n-2}, D_n, \quad \text{коли } n \text{ є непарним.} \quad (1.16)$$

Тут

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \dots,$$

де $a_k = 0$, коли $k > n$.

Зазначимо, що теорему сформульовано за умови, що для парних (непарних) n всі визначники в послідовності (1.15), ((1.16)) є додатними.

З теореми Лъєнара – Шипара випливає наступний критерій стійкості.

Критерій стійкості Льєнара – Шипара.

Многочлен $P_n(\lambda)$ (1.14) із додатними коефіцієнтами є стійким тоді і тільки тоді, коли

$$D_{n-1} > 0, \quad D_{n-3} > 0, \quad \dots$$

Наслідок. Критерій стійкості многочлена третього степеня.

Многочлен $P_3(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ із додатними коефіцієнтами є стійким тоді і тільки тоді, коли

$$a_1a_2 > a_0a_3. \quad (1.17)$$

Так, у прикладі 1.7 умову (1.17) не виконано (як і має бути). Дійсно, у цьому прикладі $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 30, 4 = a_1a_2 < a_0a_3 = 30$.

Приклад 1.8. Дослідити на стійкість многочлен $P_4(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$. У разі нестійкості знайти кількість коренів многочлена, що лежать у правій півплощині.

Перше розв'язання. Умова теореми Стодоли виконана, але вона не є достатньою.

Застосуємо теорему 1.5 Льєнара – Шипара. Тут $n = 4$ парне, $n - 1 = 3$;

$$P_4(\lambda) = \underbrace{1}_{a_0} \cdot \lambda^4 + \underbrace{2}_{a_1} \cdot \lambda^3 + \underbrace{1}_{a_2} \cdot \lambda^2 + \underbrace{1}_{a_3} \cdot \lambda + \underbrace{1}_{a_4} \Rightarrow$$

$$D_1 = a_1 = 2 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Многочлен $P_4(\lambda)$ є нестійкий за критерієм Льєнара-Шипара.

Маємо одну зміну знака в ряді чисел $1, D_1, D_3$, тому, за теоремою 1.5 Льєнара – Шипара, два корені многочлена $P_4(\lambda)$ лежать у правій півплощині.

Друге розв’язання. Знайдемо кількість коренів у лівій півплощині за допомогою теореми 1.4 Ерміта. Маємо

$$\begin{aligned} P_4(i\omega) &= (i\omega)^4 + 2(i\omega)^3 + (i\omega)^2 + i\omega + 1 = \omega^4 - 2i\omega^3 - \omega^2 + i\omega + 1 = \\ &= \omega^4 - \omega^2 + 1 + i(-2\omega^3 + \omega) = u(\omega) + iv(\omega). \end{aligned}$$

Схематично будуємо на комплексній площині криву.

$$\begin{cases} u(\omega) = \omega^4 - \omega^2 + 1 \\ v(\omega) = -2\omega^3 + \omega \end{cases}, \quad 0 \leq \omega < +\infty.$$

Знайдемо точки її перетину з осями u та v . Оскільки $u(\omega) > 0$, то крива вісь v не перетинає. Далі

$$v(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = 0, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Одержані результати заносимо до табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Таблиця до прикладу 1.8

ω	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$
u	1	$\approx 0,75$
v	0	0

Виходячи з табл. 1.1 і враховуючи, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u} = \frac{-2\omega^3 + \omega}{\omega^4 - \omega^2 + 1} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0,$$

де φ – кут між віссю u і вектором $P_4(i\omega)$,
зображуємо на рис. 1.2 шукану криву.

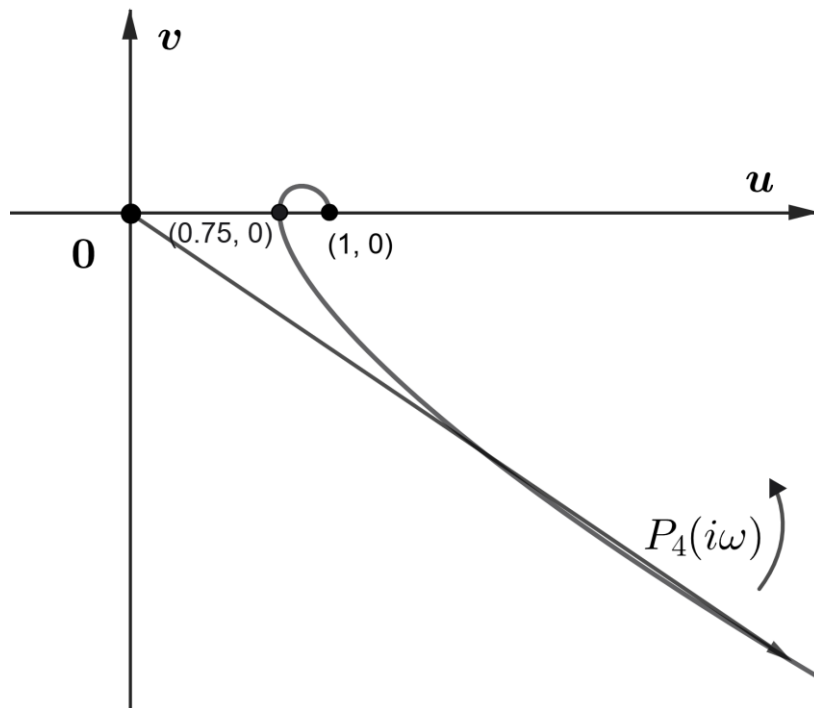


Рис. 1.2. Крива з прикладу 1.8

Оскільки зі зміною ω від 0 до $+\infty$ вектор $P_4(i\omega)$ повертається на нульовий кут, тобто шукана кількість коренів $P_4(\lambda)$, що лежать у лівій півплощині, дорівнює $\frac{n}{2} + \frac{\Delta\varphi}{\pi} = \frac{4}{2} + \frac{0}{\pi} = 2 \Rightarrow$ у правій півплощині лежать два корені. Многочлен $P_4(\lambda)$ є нестійким.

Приклад 1.9. Дослідити на стійкість многочлен $P_5(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 6\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda + 1$.

Перше розв'язання. Умова теореми Стодоли виконана, але вона не є достатньою.

Застосуємо критерій Лъєнара-Шипара. Тут $n = 5$ непарне, $n - 1 = 4$;

$$P_5(\lambda) = \underbrace{1}_{a_0} \cdot \lambda^5 + \underbrace{2}_{a_1} \cdot \lambda^4 + \underbrace{6}_{a_2} \cdot \lambda^3 + \underbrace{10}_{a_3} \cdot \lambda^2 + \underbrace{1}_{a_4} \cdot \lambda + \underbrace{1}_{a_5} \Rightarrow$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 > 0.$$

Многочлен $P_5(\lambda)$ є стійким за критерієм Лъєнара-Шипара.

Друге розв'язання. Доведемо стійкість за критерієм Ерміта – Михайлова. Маємо

$$P_5(i\omega) = (i\omega)^5 + 2(i\omega)^4 + 6(i\omega)^3 + 10(i\omega)^2 + i\omega + 1 =$$

$$= i\omega^5 + 2\omega^4 - 6i\omega^3 - 10\omega^2 + i\omega + 1 =$$

$$= 2\omega^4 - 10\omega^2 + 1 + i(\omega^5 - 6\omega^3 + \omega) = u(\omega) + iv(\omega).$$

Схематично будуюмо на комплексній площині криву.

$$\begin{cases} u(\omega) = 2\omega^4 - 10\omega^2 + 1 \\ v(\omega) = \omega^5 - 6\omega^3 + \omega \end{cases}, \quad 0 \leq \omega < +\infty.$$

Знайдемо точки її перетину з осями u та v :

$$u(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{92}}}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{10 + \sqrt{92}}}{2}.$$

$$v(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = 0, \quad \omega = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \quad \omega = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Одержані результати заносимо до табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Таблиця до прикладу 1.9

ω	0	$\frac{\sqrt{10 - \sqrt{92}}}{2}$ $\approx 0,32$	$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ $\approx 0,41$	$\frac{\sqrt{10 + \sqrt{92}}}{2}$ $\approx 2,21$	$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ $\approx 2,41$
u	1	0	$\approx -0,66$	0	$\approx 10,66$
v	0	$\approx 0,13$	0	$\approx -9,73$	0

Виходячи з табл. 1.2 і враховуючи, що

$$tg\varphi = \frac{v}{u} = \frac{\omega^5 - 6\omega^3 + \omega}{2\omega^4 - 10\omega^2 + 1} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2},$$

де φ – кут між віссю u і вектором $P_5(i\omega)$,

зображуємо на рис. 1.3 шукану криву.

Бачимо, що вектор $P_5(i\omega)$ повертається на кут $\frac{5\pi}{2}$ зі зміною ω від 0 до $+\infty$, тобто робить п'ять чверть-обертів. Оскільки $n = 5$, то многочлен $P_5(\lambda)$ є стійким за критерієм Ерміта – Михайлова.

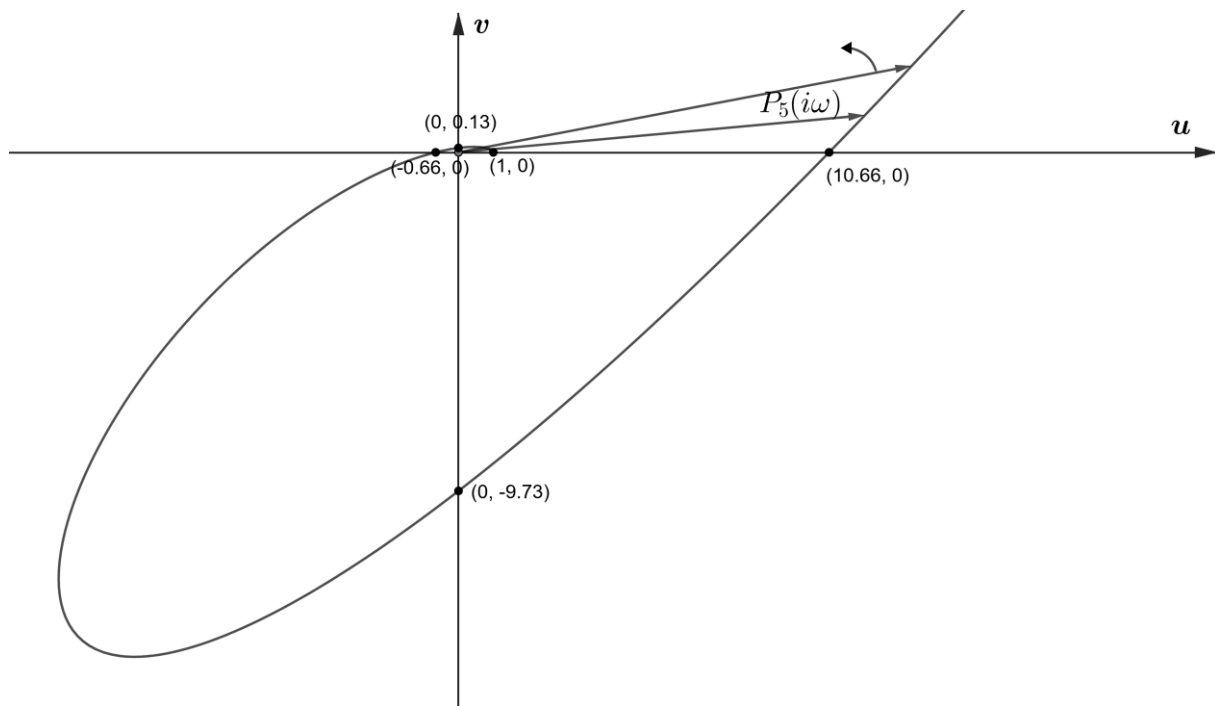


Рис. 1.3. Крива з прикладу 1.9

1.2.4. Стійкість лінійних систем із майже сталими коефіцієнтами

Наступна теорема показує, що якщо ЛОСДР зі сталими коефіцієнтами є стійкою або асимптотично стійкою, то за малих (у певному сенсі) збурень коефіцієнтів вона залишається стійкою або асимптотично стійкою.

Теорема 1.6. Про стійкість лінійної системи з майже сталими коефіцієнтами. Нехай система зі сталими коефіцієнтами

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

є стійкою (асимптотично стійкою) і матриця-функція $B(t)$ задовольняє умову

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty. \quad (1.18)$$

Тоді збурена система

$$\vec{y}' = (A + B(t))\vec{y}$$

є стійкою (асимптотично стійкою).

Ця теорема є наслідком відомої теореми Левінсона [47, гл. 3].

1.2.5. Стійкість лінійних систем із періодичними коефіцієнтами та їхніх збурень

Розглянемо ЛОСДР

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y}, \tag{1.19}$$

де матриця-функція є періодичною з періодом $T > 0$.

$$A(t + T) = A(t). \tag{1.20}$$

Позначимо $Y(t)$ таку фундаментальну матрицю системи (1.19), (1.20), що $Y(0) = \mathbb{I}$.

Оскільки $Y(t + T)$ також є фундаментальною матрицею цієї системи, то $Y(t + T) = Y(t)C$, де C є сталою матрицею. За умови, що $t = 0$, з цієї рівності випливає, що $C = Y(T)$.

Отже,

$$Y(t + T) = Y(t)Y(T). \tag{1.21}$$

Матрицю $Y(T)$ називають **матрицею монодромії** системи (1.19), (1.20), а її власні значення — **мультиплікаторами** цієї системи. Останню

назву пояснюють таким фактом. Нехай ρ є мультиплікатором, а $\vec{e}$ — відповідним власним вектором матриці монодромії: $Y(T)\vec{e} = \rho\vec{e}$. Тоді розв’язок $\vec{y}(t) = Y(t)\vec{e}$ системи (1.19), (1.20) задовольняє початкову умову $\vec{y}(0) = \vec{e}$ і має завдяки (1.21) таку властивість:

$$\vec{y}(t + T) = \rho\vec{y}(t).$$

Тобто зсув аргумента цього розв’язку на період є еквівалентним множенню його на відповідний мультиплікатор.

Теорема 1.7. Флоке. Фундаментальну матрицю $Y(t)$ системи (1.19), (1.20) можна подати в такому вигляді:

$$Y(t) = Z(t)e^{\Lambda t}, \quad (1.22)$$

де матриця-функція $Z(t) \in T$ — періодичною: $Z(t + T) = Z(t)$;

$$\Lambda = \frac{1}{T} \text{Ln} Y(T).$$

Доведення. Оскільки матриця $Y(t)$ є невідродженою, то матриця Λ існує. Позначимо

$$Z(t) = Y(t)e^{-\Lambda t} \quad (1.23)$$

і доведемо, що матриця-функція $Z(t) \in T$ — періодичною. Дійсно,

$$\begin{aligned} Z(t + T) &= Y(t + T)e^{-\Lambda(t+T)} \stackrel{(1.21)}{=} Y(t)Y(T)e^{-\Lambda T}e^{-\Lambda t} = \\ &= Y(t)e^{\Lambda T}e^{-\Lambda T}e^{-\Lambda t} = Y(t)e^{-\Lambda t} = Z(t). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Приклад 1.10. Розглянемо скалярне рівняння

$$y' = a(t)y, \quad a(t+T) = a(t). \quad (1.24)$$

Його розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$, дорівнює

$$y(t) = e^{\int_0^t a(x)dx},$$

і, отже, матриця монодромії (яка перетворюється у скаляр $y(T)$) і єдиний мультиплікатор ρ рівняння (1.24) дорівнюють

$$y(T) = e^{\int_0^T a(x)dx} = \rho.$$

Вигляд виразу (1.22) для розв'язку $y(t)$ є таким:

$$y(t) = Z(t)e^{\left(\frac{1}{T}\int_0^T a(x)dx\right)t}, \quad Z(t) = e^{\int_0^t a(x)dx - \left(\frac{1}{T}\int_0^T a(x)dx\right)t}.$$

Зазначимо, що в записі фундаментальної матриці у вигляді виразу (1.22) матриця Λ і матриця-функція $Z(t)$ є у загальному випадку комплексними.

Зазначимо також, що матриця Λ не є однозначно визначеною, оскільки матричний логарифм є багатозначним.

Наприклад, вираз (1.22) можна замінити таким:

$$Y(t) = Z(t)e^{-\frac{2\pi it}{T}}e^{\left(\Lambda + \frac{2\pi i\mathbb{I}}{T}\right)t},$$

у якому $Z(t)$ замінено на $Z(t)e^{-\frac{2\pi it}{T}}$, а Λ - на $\Lambda + \frac{2\pi i\mathbb{I}}{T}$.

Теорема 1.8. Про зведення системи з періодичними коефіцієнтами до системи зі сталими коефіцієнтами.

Заміна

$$\vec{y}(t) = Z(t)\vec{x}(t) \quad (1.25)$$

зводить систему (1.19), (1.20) до системи

$$\vec{x}' = \Lambda \vec{x}, \quad (1.26)$$

де $Z(t)$ і Λ – це матриці з виразу (1.22) для фундаментальної матриці $Y(t)$ у теоремі Флоке.

Доведення. Підставимо $\vec{y}(t)$ (1.25) у систему. Маємо

$$Z'x + Zx' = AZx,$$

звідки, ураховуючи формулу (1.23), одержуємо

$$(Y'e^{-\Lambda t} - Ye^{-\Lambda t}\Lambda)\vec{x} + Ye^{-\Lambda t}\vec{x}' = AYe^{-\Lambda t}\vec{x}. \quad (1.27)$$

Але $Y(t)$ є матричним розв'язком системи (1.19). Тому з рівності (1.27) випливає, що

$$-Ye^{-\Lambda t}\Lambda\vec{x} + Ye^{-\Lambda t}\vec{x}' = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(t)\vec{x}' = Z(t)\Lambda\vec{x}.$$

Звідки, ураховуючи, що $\det Z(t) \neq 0$, одержуємо систему (1.26). Теорему доведено.

Оскільки розв'язки систем (1.19), (1.25) пов'язані так:

$$\vec{y}(t) = Z(t)\vec{x}(t), \quad \vec{x}(t) = Z^{-1}(t)\vec{y}(t),$$

де $Z(t+1) = Z(t)$, $\det Z(t) \neq 0$,

то ці системи є одночасно або стійкими, або асимптотично стійкими, або нестійкими. Але власні значення λ_j матриці Λ і мультиплікатори ρ (власні значення матриці монодромії $Y(t)$ системи (1.19), (1.20)) пов'язані так:

$$\lambda_j = \frac{1}{T} (\ln |\rho_j| + i \operatorname{Arg} \rho_j),$$

а жорданові структури цих матриць є однаковими [49].

Тому внаслідок теореми 1.2 має місце наступна теорема.

Теорема 1.9. Про стійкість лінійної системи з періодичними коефіцієнтами. 1. Система (1.19), (1.20) є стійкою тоді і тільки тоді, коли модулі всіх її мультиплікаторів ρ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) є не більшими ніж одиниця ($|\rho_j| \leq 1$), і жорданові блоки, які відповідають мультиплікаторам з одиничним модулем, складаються з одного елемента.

2. Система (1.19), (1.20) є асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли модулі всіх її мультиплікаторів ρ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) є меншими ніж одиниця ($|\rho_j| < 1$), тобто коли всі мультиплікатори лежать усередині одиничного кола на комплексній площині.

Приклад 1.11 (продовження). Рівняння (1.24) є стійким (асимптотично стійким) тоді і тільки тоді, коли

$$\ln |\rho_j| = \int_0^1 a(x) dx \leq 0 \quad (< 0).$$

Для збурених періодичних систем має місце такий аналог теореми 1.6 про стійкість систем із майже сталими коефіцієнтами.

Теорема 1.10. Про стійкість збуреної лінійної системи з періодичними коефіцієнтами. Нехай система з періодичним коефіцієнтом

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y}, \quad A(t+T) = A(t)$$

є стійкою (асимптотично стійкою), а матриця-функція $B(t)$ задовольняє умову (1.18).

Тоді збурена система

$$\vec{y}' = (A(t) + B(t))\vec{y} \quad (1.28)$$

є стійкою (асимптотично стійкою).

Доведення. Заміна $\vec{y}(t) = Z(t)\vec{x}(t)$ (1.25) зводить систему (1.28) до системи (перевірте)

$$\vec{x}' = \Lambda\vec{x} + Z^{-1}(t)B(t)Z(t),$$

яка задовольняє умови теореми 1.6, оскільки норми $\|Z(t)\|$, $\|Z^{-1}(t)\|$ є обмеженими. Тому теорема 1.10 є наслідком теорем 1.6 і 1.9.

Приклад 1.12. Нехай 2×2 – матриця-функція $B(t)$ задовольняє умову (1.18). Тоді система

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -\sin^2 t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} \vec{y} + B(t)\vec{y}$$

є стійкою, за теоремою 1.10, оскільки мультиплікатори

$$\rho_1 = e^{-\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt} < 1, \quad \rho_2 = e^{\int_0^{2\pi} \cos t dt} = 1$$

відповідної незбуреної періодичної системи задовольняють умови пункту 1 теореми 1.9.

1.3. Стійкість розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь

1.3.1. Стійкість за першим наближенням. Загальна теорія

Розглянемо нелінійну систему вигляду

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{f}(t, \vec{y}), \quad t_0 \leq t < \infty, \quad (1.29)$$

де матриця A є сталою.

Нехай $\vec{f}(t, 0) = 0$, і, отже, система (1.29) має нульовий розв'язок $\vec{y}(t) \equiv 0$.

Систему $\vec{y}' = A\vec{y}$ називають **системою першого наближення** для системи (1.29). Теорема 1.6 дає повний розв'язок задачі про її стійкість.

О. М. Ляпунов довів, що якщо нелінійна частина $\vec{f}(t, \vec{y})$ системи (1.29) задовольняє певні умови, то з асимптотичної стійкості системи першого наближення випливає асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (1.29). Навпаки, якщо система (1.29) є нестійкою завдяки наявності в матриці A хоча б одного власного значення з додатною дійсною частиною, то і нульовий розв'язок системи (1.29) є нестійким.

Теорема 1.11. Ляпунова. Про стійкість за першим наближенням.

Нехай у системі (1.29) вектор-функція $\vec{f}(t, \vec{y})$ є неперервною на множині: $t_0 \leq t < \infty$, $\|\vec{y}\| \leq \rho$. Нехай $\vec{f}(t, \vec{y}) = o(\|\vec{y}\|)$ ¹ рівномірно по t . Тобто рівномірно по t

¹ З цієї умови випливає, що $y(t) = 0$ є розв'язком системи (1.29).

$$\frac{\vec{f}(t, \vec{y})}{\|\vec{y}\|} \rightarrow 0, \quad \text{коли } \|\vec{y}\| \rightarrow 0.$$

Тоді мають місце такі твердження: **1.** Якщо дійсні частини всіх власних значень λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) матриці A є від'ємними ($\operatorname{Re} \lambda_j < 0$), то нульовий розв'язок системи (1.29) є асимптотично стійким.

2. Якщо дійсна частина хоча б одного з власних значень матриці A є додатною, то нульовий розв'язок системи (1.29) є нестійким.

Приклад 1.13. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - y_2 + y_1^2 \sin(y_2 t)^2, \\ y_2' = 3y_1 - 5y_2 + y_2^4 \cos(y_1^2 t). \end{cases}$$

Тут

$$\vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2) \\ f_2(t, y_1, y_2) \end{pmatrix},$$

де

$$f_1(t, y_1, y_2) = y_1^2 \sin(y_2 t)^2, \quad f_2(t, y_1, y_2) = y_2^4 \cos(y_1^2 t).$$

Маємо

$$\begin{aligned} \|\vec{f}(t, \vec{y})\| &= \sqrt{f_1^2(t, y_1, y_2) + f_2^2(t, y_1, y_2)} \leq \\ &\leq \sqrt{y_1^4 + y_2^4} \leq y_1^2 + y_2^2, \quad \text{коли } \|\vec{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Тому

$$\frac{\|\vec{f}(t, \vec{y})\|}{\|\vec{y}\|} \leq \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow 0, \quad \text{коли } \|\vec{y}\| \rightarrow 0.$$

Тобто умова теореми 1.11 виконана.

У системі, яку розглядаємо, матриця A з теореми 1.11 дорівнює $A = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Її власні значення дорівнюють $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ і тому, за п. 2 теореми 1.11, нульовий розв'язок системи є нестійким.

1.3.2. Автономні системи. Стійкість за першим наближенням їхніх положень рівноваги

1.3.2.1. Загальні визначення та факти

Систему ДР називають **автономною** (або динамічною, або консервативною), якщо вона явно не містить незалежну змінну t . Будемо розглядати автономні системи, які мають вигляд

$$y'_k = f_k(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

або у векторній формі

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}). \quad (1.30)$$

Зазначимо, що будь-яку систему ДР можна звести до автономної системи. Наприклад, від неавтономної системи

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, y_2), \\ y'_2 = f_2(t, y_1, y_2), \end{cases}$$

можна перейти до автономної системи

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_3, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(y_3, y_1, y_2), \\ y_3' = 1, \end{cases}$$

якщо позначити $t = y_3$.

Вектор $\vec{a}$ називають **положенням рівноваги** системи (1.30), якщо $\vec{f}(a) = 0$.

Вочевидь, якщо $\vec{a}$ є положенням рівноваги системи (1.30), то $\vec{y}(t) = \vec{a}$ є її розв'язком.

Усі мають інтуїтивне уявлення про стійкість положення рівноваги.

Наприклад, розглянемо рух кульки на гірці (рис. 1.4).

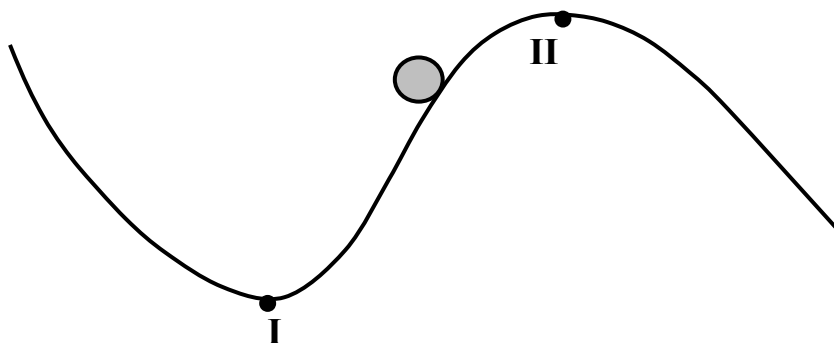


Рис. 1.4. Рух кульки на гірці

Тут є тільки дві точки спокою (положення рівноваги): дно впадини (точка I) і вершина гірки (точка II). Кожний скаже, що перше з них є стійким, а друге – ні. Дійсно, якщо кульку змістити з вершини гірки на скільки завгодно малу відстань, або штовхнути з вершини зі скільки завгодно малою швидкістю, то вона або буде коливатися у впадині, або скотиться «до

нескінченності». Якщо ж подібне вчинити з кулькою, яка знаходиться в положенні I, то вона буде коливатися біля цього положення рівноваги.

Але таких наочних уявлень про стійкість положення рівноваги зовсім недостатньо, щоб розв'язувати задачі про стійкість цих положень для реальних механічних систем.

Як вже було сказано в підрозд. 1.1, загальне визначення стійкості розв'язку системи ДР (і положення рівноваги, зокрема) дав О. М. Ляпунов.

Для зручності читача наведемо ці визначення у випадку розв'язку, який є положенням рівноваги автономної системи.

Визначення 1.4. Положення рівноваги $\vec{a}$ системи (1.30) називають **стійким**, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon)$, що будь-який розв'язок $\vec{y}(t)$ системи (1.30), початкове значення якого задовольняє умову $\|\vec{y}(t_0) - \vec{a}\| < \delta$, є визначеним на півосі $[t_0, \infty)$ і задовольняє нерівність

$$\|\vec{y}(t) - \vec{a}\| < \varepsilon, \quad t_0 \leq t < \infty.$$

Якщо для деякого ε таке δ не існує, то положення рівноваги $\vec{a}$ називають **нестійким**.

Визначення 1.5. Положення рівноваги $\vec{a}$ системи (1.30) називають **асимптотично стійким**, якщо воно є стійким і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{y}(t) - \vec{a}\| = 0$$

для кожного розв'язку $\vec{y}(t)$ системи (1.30), для якого норма $\|\vec{y}(t_0) - \vec{a}\|$ є достатньо малою.

Проілюструємо геометрично ці визначення у випадку одного ДР: стійкість положення рівноваги a на рис. 1.5; асимптотична стійкість на рис. 1.6.

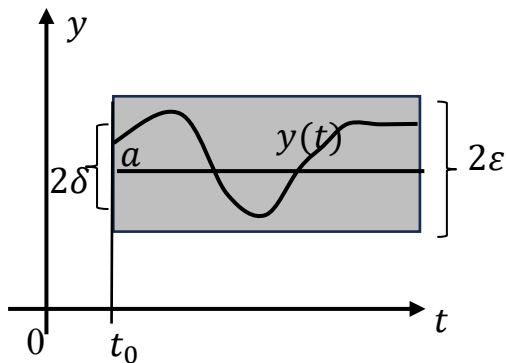


Рис. 1.5. Стійкість положення
рівноваги a

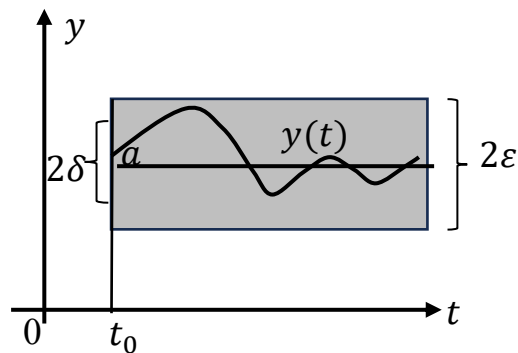


Рис. 1.6. Асимптотична стійкість
положення рівноваги a

1.3.2.2. Лінеаризація. Стійкість положення рівноваги за першим наближенням

Якщо числова функція $f(x)$ є диференційовна в точці a , то $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(|x - a|)$, коли $x \rightarrow a$.

Для вектор-функції

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

від вектор-функції $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ справедлива аналогічна формула із заміною a

на вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|), \quad \vec{x} \rightarrow \vec{a}. \quad (1.31)$$

Тут $\vec{f}'(\vec{a})$ - це $n \times n$ -матриця, яку називають матрицею Якобі. Її елемент із номером j, k дорівнює $\left. \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right|_{x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n}$.

Нехай вектор $\vec{a}$ є положенням рівноваги нелінійної автономної системи

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}). \quad (1.32)$$

За формулою (1.31), де $\vec{x} = \vec{y}$, маємо для $\vec{y}$, близьких до $\vec{a}$,

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}'(\vec{a})(\vec{y} - \vec{a}) + o(\|\vec{y} - \vec{a}\|). \quad (1.33)$$

Оскільки $\vec{f}(\vec{a}) = 0$, то, зробивши в рівності (1.33) заміну $\vec{y} = \vec{u} + \vec{a}$, одержимо

$$\vec{u}' = A\vec{u} + o(\|\vec{u}\|), \quad A = \vec{f}'(\vec{a}). \quad (1.34)$$

Лінійну систему $\vec{u}' = A\vec{u}$ називають **лінеаризованою** для системи (1.32), а перехід від системи (1.32) до цієї лінійної системи називають **лінеаризацією**.

Застосувавши до системи (1.34) теорему 1.11, одержуємо наступну теорему.

Теорема 1.12. Ляпунова. Про стійкість положення рівноваги за першим наближенням.

Нехай вектор $\vec{a}$ є положенням рівноваги системи (1.32), у якій вектор-функція $\vec{f}(\vec{y})$ є неперервно диференційовною, коли $\|\vec{y} - \vec{a}\| < \rho$.

Тоді мають місце такі твердження: **1.** Якщо дійсні частини всіх власних λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) матриці $A = \vec{f}'(\vec{a}) = \left\| \frac{\partial f_j(\vec{a})}{\partial y_k} \right\|_{j,k=1}^n$ є від'ємними ($\operatorname{Re} \lambda_j < 0$), то положення рівноваги $\vec{a}$ є асимптотично стійким.

2. Якщо дійсна частина хоча б одного з власних значень матриці $A = \vec{f}'(\vec{a})$ є додатною, то положення рівноваги $\vec{a}$ є нестійким.

Приклад 1.14. Знайти всі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} y_1' = \ln(y_2^2 - y_1), \\ y_2' = y_1 - y_2 - 1 \end{cases}$$

і дослідити їх на стійкість.

Тут

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{pmatrix},$$

де

$$f_1(y_1, y_2) = \ln(y_2^2 - y_1), \quad f_2(y_1, y_2) = y_1 - y_2 - 1.$$

Знайдемо положення рівноваги $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$:

$$\vec{f}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) \\ f_2(a_1, a_2) \end{pmatrix} = 0.$$

Тобто координати a_1, a_2 положення рівноваги $\vec{a}$ є розв'язками системи

$$\begin{cases} \ln(y_2^2 - y_1) = 0 \\ y_1 - y_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2^2 - y_1 = 1 \\ y_1 - y_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3, & y_2 = 2 \\ y_1 = 0, & y_2 = -1 \end{cases}.$$

Маємо два положення рівноваги:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця Якобі дорівнює

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{y_2^2 - y_1} & \frac{2y_2}{y_2^2 - y_1} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для першого положення рівноваги $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ матриця Якобі дорівнює

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^2 - 3} & \frac{2 \cdot 2}{2^2 - 3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Її характеристичний многочлен

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

є нестійким, за теоремою Стодоли, оскільки в нього є від'ємний коефіцієнт.

Тому положення рівноваги $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ є нестійким.

Для другого положення рівноваги $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ матриця Якобі дорівнює

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(-1)^2 - 0} & \frac{2 \cdot (-1)}{(-1)^2 - 0} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Усі коефіцієнти її характеристичного многочлена

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 3$$

є додатними. Для многочлена другого степеня ця умова є достатньою для його стійкості. Тому положення рівноваги $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ є асимптотично стійким.

Приклад 1.15. Знайти всі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \sin y_1 - \alpha y_2 - tgy_3, \\ y_3' = \ln(1 - y_1 + 2y_2) \end{cases}$$

і дослідити їх на стійкість.

Положення рівноваги знайдемо із системи

$$\begin{cases} y_2 = 0, \\ \sin y_1 - \alpha y_2 - tgy_3 = 0, \\ \ln(1 - y_1 + 2y_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0, \\ \sin y_1 - tgy_3 = 0, \\ 1 - y_1 + 2y_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0, \\ tgy_3 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тобто система має нескінченну кількість положень рівноваги.

Матриця Якобі дорівнює (перевірте)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos y_1 & -\alpha & -\frac{1}{\cos^2 y_3} \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{1 - y_1 + 2y_2} & \frac{2}{1 - y_1 + 2y_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для всіх положень рівноваги матриця Якобі дорівнює

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Її характеристичний многочлен дорівнює

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\alpha - \lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + 3\lambda + 1).$$

Отже, потрібно дослідити на стійкість многочлен

$$P_3(\lambda) = \underbrace{1}_{a_0} \cdot \lambda^3 + \underbrace{\alpha}_{a_1} \cdot \lambda^2 + \underbrace{3}_{a_2} \cdot \lambda + \underbrace{1}_{a_3}. \quad (1.35)$$

За теоремою Стодоли, для стійкості необхідно, щоб була виконана умова $\alpha > 0$.

Оскільки тут $n = 3$, то, за критерієм Лъєнара – Шипара, щоб многочлен $P_3(\lambda)$ (1.35) був стійким, необхідно і достатньо, щоб була виконана умова

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha - 1 > 0.$$

Тобто многочлен $P_3(\lambda)$ (1.35) є стійким за умови, що $\alpha > \frac{1}{3}$. Тому, коли $\alpha > \frac{1}{3}$, усі положення рівноваги є асимптотично стійкими.

Якщо $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, маємо одну зміну знака в ряді чисел $1, D_2$, і тому, за теоремою 1.5 Лъєнара – Шипара, два корені многочлена $P_3(\lambda)$ (1.35) лежать

у правій півплощині. Тож, якщо $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, усі положення рівноваги є нестійкими.

Нарешті, якщо $\alpha \leq 0$, то многочлен $P_3(\lambda)$ (1.35) не є стійким, за теоремою Стодоли.

Наостанок зазначимо, що якщо $\alpha = \frac{1}{3}$, то визначник $D_2 = 0$, тому критерій Льєнара – Шипара використати неможливо. Але якщо $\alpha = \frac{1}{3}$, то многочлен $P_3(\lambda)$ дорівнює

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda^2 + 3\lambda + 1 = \left(\lambda + \frac{1}{3}\right)(\lambda^2 + 3).$$

Тобто, якщо $\alpha = \frac{1}{3}$, то два його корені $\lambda = \pm i\sqrt{3}$ лежать на уявній осі, а один – у лівій півплощині, і висновок про стійкість положень рівноваги не можна зробити, використовуючи теорему 1.12.

ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь називають стійким?
2. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь називають нестійким?
3. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь називають асимптотично стійким?
4. Яку систему лінійних диференціальних рівнянь називають стійкою?
5. Яку систему лінійних диференціальних рівнянь називають нестійкою?
6. Яку систему лінійних диференціальних рівнянь називають асимптотично стійкою?

7. Сформулюйте теорему про стійкість лінійної системи диференціальних рівнянь.

8. Сформулюйте теорему про стійкість лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

9. Який многочлен називають стійким?

10. Сформулюйте проблему Рауса – Гурвіца.

11. Сформулюйте теорему Стодоли.

12. Сформулюйте теорему Ерміта.

13. Сформулюйте критерій стійкості Ерміта – Михайлова.

14. Сформулюйте теорему Лъєнара – Шипара.

15. Сформулюйте критерій стійкості Лъєнара – Шипара.

16. Сформулюйте теорему про стійкість лінійної системи диференціальних рівнянь із майже сталими коефіцієнтами.

17. Яку матрицю називають матрицею монодромії лінійної системи диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами? Що називають мультиплікаторами цієї системи?

18. Сформулюйте теорему Флоке.

19. Сформулюйте теорему про зведення системи диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами до системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

20. Сформулюйте теорему про стійкість лінійної системи диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами.

21. Сформулюйте теорему про стійкість лінійної збуреної системи диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами.

22. Сформулюйте теорему Ляпунова про стійкість за першим наближенням.

23. Яку систему лінійних диференціальних рівнянь називають автономною?

24. Що називають положенням рівноваги автономної системи?

25. Яке положення рівноваги автономної системи диференціальних рівнянь називають стійким?

26. Яке положення рівноваги автономної системи диференціальних рівнянь називають нестійким?

27. Яке положення рівноваги автономної системи диференціальних рівнянь називають асимптотично стійким?

28. Яку матрицю називають матрицею Якобі?

29. Яку систему називають лінеаризованою для автономної системи?

30. Сформулюйте теорему Ляпунова про стійкість положення рівноваги за першим наближенням.

ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

Завдання 1. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння $y' = yf(t)$ за умов:

$$1) f(t) = \frac{1}{2-t}; \quad 2) f(t) = \sin^2 t; \quad 3) f(t) = t \sin t.$$

Завдання 2. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - \ln(1 + y_2) + \sin y_1, \\ y_2' = e^{y_1} + \sin(y_1 + y_2) - \cos^2 y_2. \end{cases}$$

Завдання 3. Знайти положення рівноваги і дослідити їх на стійкість:

$$1) y' = \ln(y^2 - 3y + 3);$$

$$2) \begin{cases} y_1' = \frac{1}{4}(e^{y_1} - 1) - 9y_2 \\ y_2' = \frac{1}{5}y_1 - \sin y_2 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2 \cos y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 - y_2^3 e^{y_2} \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} y_1' = 7y_1 + 2 \sin y_2 \\ y_2' = e^{y_1} - 3y_2 - 1 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} y_1' = -\frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2} \sin 2y_2; \\ y_2' = -y_2 - 2y_1 \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} y_1' = \ln(4y_2 + e^{-3y_1}) \\ y_2' = 2y_2 - 1 + \sqrt[3]{1 - 6y_1} \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} y_1' = e^{y_1+2y_2} - \cos 3y_1; \\ y_2' = \sqrt{4 + 8y_1} - 2e^{y_2} \end{cases};$$

Завдання 4. Дослідити на стійкість многочлен. У разі нестійкості знайти кількість коренів многочлена, які лежать у правій напівплощині:

- 1) $\lambda^3 - 3\lambda + 1$;
- 2) $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2$;
- 3) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3$;
- 4) $\lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 1$;
- 5) $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 3$;
- 6) $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 4$;
- 7) $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 2$.

Завдання 5*. Довести, що многочлен $P_4(\lambda) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$ є стійким тоді і тільки тоді, коли $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_4 > 0$, $a_1a_2 > a_0a_3$, $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > a_1^2a_4$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 1

Завдання 1.

1) асимптотично стійкий; 2) стійкий; 3) нестійкий.

Завдання 2. Нестійкий.

Завдання 3.

1) $y = 1$ стійке, $y = 2$ нестійке;

2) стійке; 3) нестійке; 4) нестійке; 5) стійке; 6) стійке; 7) нестійке.

Завдання 4.

1) нестійкий. 2; 2) нестійкий. 2; 3) стійкий; 4) стійкий; 5) нестійкий. 2; 6) нестійкий. 2; 7) стійкий.

2. РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

Різницеві рівняння є дискретним аналогом диференціальних рівнянь. Їх використовують, зокрема, у теорії імпульсних систем [53], для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь (див. приклад 2.3), розрахунку електричних кіл (див. приклад 2.2) тощо.

2.1. Різниці

Нехай задані функція $f(x)$ і число h .

Вираз

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

називають **різницею першого порядку** функції $f(x)$, а вираз

$$\frac{1}{h} \Delta f(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

- **першою поділеною різницею**.

Оскільки

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Delta f(x),$$

то $f'(x) \approx \frac{1}{h} \Delta f(x) \Rightarrow df(x) \approx \Delta f(x)$, коли $|h| \ll 1$.

Вочевидь, $\Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \Delta f(x) + \beta \Delta g(x)$.

Різницею другого порядку називають різницю від різниці першого порядку:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = \\
&= (f(x+2h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x)) = \\
&= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Аналогічно визначають **другу поділену різницю**:

$$\frac{1}{h} \Delta \left(\frac{1}{h} \Delta f(x) \right) = \frac{1}{h^2} \Delta(\Delta f(x)) = \frac{1}{h^2} \Delta^2 f(x). \tag{2.2}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \Delta^2 f(x),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

то $f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \Delta^2 f(x) \Rightarrow \Delta^2 f(x) = d^2 f(x)$, коли $|h| \ll 1$.

Взагалі **різницею n -го порядку** називають різницю від різниці $n-1$ -го порядку:

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)). \tag{2.4}$$

Можна аналогічно (2.1) довести, що

$$\Delta^n f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j f(x+jh). \tag{2.5}$$

Аналогічно визначають **n** –ну поділену різницю:

$$\frac{1}{h} \Delta \left(\frac{1}{h^{n-1}} \Delta^{n-1} f(x) \right) = \frac{1}{h^n} \Delta^n f(x). \quad (2.6)$$

Можна аналогічно (2.3) довести, що

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \Delta^n f(x). \quad (2.7)$$

Тому

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{1}{h^n} \Delta^n f(x) \Rightarrow d^n f(x) \approx \Delta^n f(x), \text{ коли } |h| \ll 1.$$

2.2. Загальні поняття

Різницеvim рівнянням (РР) називають рівняння вигляду

$$F(x, y(x), \Delta y(x), \dots, \Delta^k y(x)) = 0, \quad (2.8)$$

де $y(x)$ – шукана функція.

Порядок РР (2.8) дорівнює k , якщо вираз (2.8) після заміни за формулою (2.5) різниць виразами через y буде містити як $y(x + kh)$, так і $y(x)$. Якщо ж це не виконано, то порядок РР (2.8) буде меншим ніж k .

Приклад 2.1. З'ясувати, який порядок має РР

$$2y(x) + 3\Delta y(x) - \Delta^3 y(x) = x. \quad (2.9)$$

Оскільки $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$, $\Delta^3 y(x) = y(x+3h) - 3y(x+2h) + 3y(x+h) - y(x)$, то РР (2.9) еквівалентне рівнянню

$$3y(x+2h) - y(x+3h) = x,$$

яке заміною $x+2h$ на x можна звести до РР

$$3y(x) - y(x+h) = x$$

першого порядку.

Функцію $y(x)$ називають **частинним розв'язком** або просто **розв'язком** РР (2.8), якщо з підстановкою її в РР (2.8) воно перетворюється в тотожність.

Далі вважаємо, що після перетворення різниць у рівнянні (2.8) виразами за формулою (2.5) РР (2.8) можна записати як

$$y(x+kh) = \Phi(x, y(x), y(x+h), \dots, y(x+(k-1)h)). \quad (2.10)$$

Загальним розв'язком (2.10) називають функцію $y(x, C_1, C_2, \dots, C_k)$, яка залежить від довільних періодичних функцій $C_j = C_j(x)$ ($j = 1, \dots, k$) періоду $|h|$, і таку, що за будь-яких C_j є розв'язком рівняння (2.10), і будь-який розв'язок рівняння (2.10) можна одержати з функції $y(x, C_1, C_2, \dots, C_k)$, вибираючи конкретні функції $C_j(x)$.

Якщо x набуває дискретної послідовності значень $x = x_0 + nh$, то k періодичних функцій у визначенні загального розв'язку перетворюються в k довільних сталих.

Далі вважаємо, що x набуває дискретного значення $x = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). (Випадок $x = nh$ можна звести до $x = n$ заміною $x = th$.)

Залежно від контексту функції $f, y, \dots$ від $x = n$ будемо позначати, як і раніше, $f(x), y(x), \dots$ так і $f(n), y(n), \dots$, або $f_n, y_n, \dots$.

2.3. Лінійні різницеві рівняння

2.3.1. Лінійні різницеві рівняння першого порядку

РР вигляду

$$\Delta y(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (2.11)$$

називають **лінійним різницеvim рівнянням першого порядку**.

Якщо його права частина $f(x) \equiv 0$, його називають **лінійним однорідним РР першого порядку**.

Якщо його права частина $f(x) \not\equiv 0$ - **лінійним неоднорідним РР першого порядку**.

Існує два методи його розв'язання, які є аналогами методу варіації довільної сталої та методу Бернуллі для лінійного ДР першого порядку. Розв'яжемо РР за допомогою аналога методу варіації довільної сталої.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного РР

$$\Delta y(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (2.12)$$

Оскільки $\Delta y(x) = y_{n+1} - y_n$, то рівняння (2.12) можна записати як

$$y_{n+1} = (1 - q_n)y_n. \quad (2.13)$$

Звідки знаходимо послідовно

$$y_1 = (1 - q_0)C, \quad \text{де } C = y_0,$$

$$y_2 = (1 - q_1)y_1 = (1 - q_1)(1 - q_0)C,$$

$$y_3 = (1 - q_2)y_2 = (1 - q_2)(1 - q_1)(1 - q_0)C,$$

...

$$y_n = (1 - q_{n-1})y_{n-1} = C \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_j). \quad (2.14)$$

Загальний розв'язок неоднорідного РР (2.11) шукаємо **методом варіації довільної сталої**, а саме в такому самому вигляді (2.14), але із заміною сталої C на невідому функцію C_n :

$$y_n = C_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_j). \quad (2.15)$$

Для знаходження C_n підставляємо вираз (2.15) у РР (2.11), яке записано як

$$y_{n+1} - y_n + q_n y_n = f_n.$$

Маємо

$$C_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 - q_j) - C_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_j) + q_n C_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_j) = f_n \Rightarrow$$

$$C_{n+1} (1 - q_n) - C_n + q_n C_n = \frac{f_n}{\prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_j)}. \quad (2.16)$$

Але ліва частина рівняння (2.16) дорівнює $(C_{n+1} - C_n)(1 - q_n)$, тому функція C_n задовольняє РР

$$C_{n+1} - C_n = \frac{f_n}{\prod_{j=0}^n (1-q_j)}.$$

Звідки знаходимо

$$C_n = (C_n - C_{n-1}) + (C_{n-1} - C_{n-2}) + \dots + (C_1 - C_0) + C_0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k}{\prod_{j=0}^k (1-q_j)} + C,$$

де C_0 позначили як C . Тому загальний розв'язок РР (2.11) дорівнює

$$\begin{aligned} y_{\text{ЗН}}(n) &= C_n \prod_{j=0}^{n-1} (1-q_j) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k}{\prod_{j=0}^k (1-q_j)} + C \right) \prod_{j=0}^{n-1} (1-q_j) = \\ &= C \prod_{j=0}^{n-1} (1-q_j) + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \prod_{j=k+1}^{n-1} (1-q_j), \end{aligned} \quad (2.17)$$

де $\prod_{j=n}^{n-1} = 1$.

Доводячи формулу (2.17), використовували те, що $1 - q_j \neq 0$. Але сама формула не містить дробів $\frac{1}{1-q_j}$.

Доведення формули (2.17) у загальному випадку можна провести аналогічно доведенню відповідної формули (2.67) для систем РР.

Зазначимо, що якщо коефіцієнт $q(x)$ є сталим: $q(x) = q$, то

$$y_{\text{ЗН}}(n) = C(1-q)^n + \sum_{k=1}^n f_{k-1} (1-q)^{n-k}.$$

Одержати формулу (2.17) за допомогою аналога методу Бернуллі пропонуємо читачу самостійно.

2.3.2. Лінійні різницеві рівняння вищих порядків

2.3.2.1. Загальна теорія

Лінійне різницеве рівняння (ЛРР) k – го порядку має вигляд

$$\Delta^k y(x) + q_{n-1}(x)\Delta^{k-1}y(x) + \dots + q_0(x)y(x) = f(x). \quad (2.18)$$

Якщо в ЛРР права частина $f(x) \equiv 0$, то ЛРР (2.18) називають **однорідним лінійним різницеvim рівнянням (ЛОРР)**. Якщо права частина $f(x) \not\equiv 0$, то ЛРР (2.18) називають **лінійним неоднорідним різницеvim рівнянням (ЛНРР)**.

Перетворимо в рівнянні (2.18) різниці за формулою (2.5) і зведемо РР (2.18) до вигляду

$$y(x+k) + p_{k-1}(x)y(x+k-1) + \dots + p_0(x)y(x) = f(x), \quad (2.19)$$

де $p_0(x) \not\equiv 0$ (нагадуємо, що $x = n$).

Навпаки, якщо використати формулу

$$y(x+p) = \sum_{j=0}^p C_p^j \Delta^j y(x),$$

то будь-яке рівняння, яке має вигляд (2.19), можна звести до вигляду (2.18).

Наведемо приклад виникнення ЛОРР у процесі аналізу функціонування електричного кола.

Приклад 2.2. Для знаходження струму $i(t) = \dot{q}(t)$, де $q(t)$ - заряд, в електричному колі (рис. 2.1)

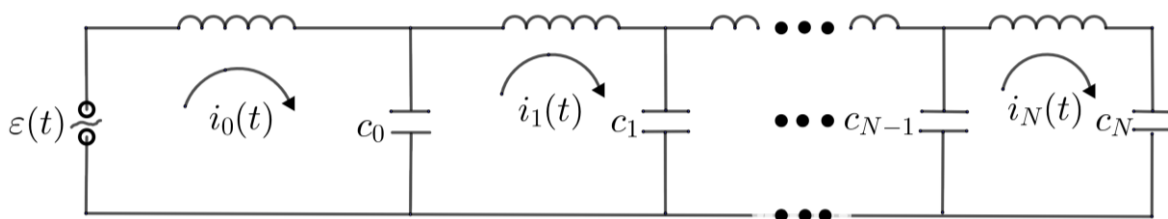


Рис. 2.1. Електричне коло з прикладу 2.2

потрібно знаходити певний розв'язок такої системи диференціальних рівнянь, яку можна вивести з правил Кірхгофа

$$\begin{cases} L_0 \ddot{q}_0(t) + \frac{1}{C_1} (q_0(t) - q_1(t)) = \varepsilon(t), \\ \vdots \\ L_n \ddot{q}_n(t) + \frac{1}{C_n} (q_n(t) - q_{n-1}(t)) + \frac{1}{C_{n+1}} (q_n(t) - q_{n+1}(t)) = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

де $n = 1, 2, \dots, N$; $q_{N+1}(t) = 0$.

Нехай генератор подає в перший контур напругу $\varepsilon(t) = E e^{i\omega t}$. Шукаємо розв'язки системи (2.20) у вигляді $q_j(t) = q_j e^{i\omega t}$, де q_j є сталими, $j = 0, \dots, N$.

Підставимо ці $q_j(t)$ в систему, скоротимо одержані вирази на $e^{i\omega t}$ і одержуємо ЛОРР

$$q_{n+1} + C_{n+1} \left(L_n \omega^2 - \frac{1}{C_n} - \frac{1}{C_{n+1}} \right) q_n + \frac{C_{n+1}}{C_n} q_{n-1} = 0,$$

де q_0, q_1 знаходять з умови

$$-L_1 \omega^2 q_0 + \frac{1}{C_1} (q_0 - q_1) = E.$$

Аналогом визначника Вронського для k функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ є визначник

$$C[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)] =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \dots & f_k(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \dots & f_k(x+k-1) \end{vmatrix},$$

який називають **визначником Косораті** [45].

Має місце **аналог формули Ліувілля – Остроградського** для k розв’язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ ЛОРР

$$y(x+k) + p_{k-1}(x)y(x+k-1) + \dots + p_0(x)y(x) = 0. \quad (2.21)$$

А саме [52]

$$C[y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)] = C[y_1(0), y_2(0), \dots, y_k(0)](-1)^{kx} \prod_{t=0}^{x-1} p_0(t).$$

(Нагадуємо, що $x = n$.)

Теорема 2.1. Про структуру загального розв’язку ЛОРР. Нехай $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ є такими k розв’язками ЛОРР k – го порядку, для яких визначник Косораті за $x = 0$ не дорівнює нулю:

$$C[y_1(0), y_2(0), \dots, y_k(0)] \neq 0.$$

Тоді загальний розв’язок цього ЛОРР дорівнює

$$y_{30}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_k y_k(x),$$

де $C_1, C_2, \dots, C_k$ є довільними сталими.

Теорема 2.2. Про структуру загального розв'язку ЛНРР. Загальний розв'язок ЛНРР дорівнює сумі загального розв'язку $y_{3.0.}(x)$ відповідного ЛОРР і частинного розв'язку $y_{ч.н.}(x)$ цього ЛНРР:

$$y_{3.н.}(x) = y_{3.0.}(x) + y_{ч.н.}(x). \quad (2.22)$$

2.3.2.2. Лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами

Спочатку розглянемо ЛОРР зі сталими коефіцієнтами

$$y(n+k) + p_{k-1}y(n+k-1) + \dots + p_0y(n) = 0, \quad (2.23)$$

де $p_0, \dots, p_{k-1}$ є сталими, $p_0 \neq 0$.

Будемо шукати розв'язки ЛОРР (2.23) у вигляді $y_n = \lambda^n$. Такий метод знаходження розв'язків є аналогічним методу Ейлера знаходження розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Підставимо $y_n = \lambda^n$ у вираз (2.23) і одержимо

$$\lambda^{n+k} + p_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots + p_0\lambda^n = 0.$$

Скорочуючи λ^n ($\neq 0$. Чому?), бачимо, що $y_n = \lambda^n$ є розв'язком ЛОРР (2.23), якщо λ коренем рівняння

$$\lambda^k + p_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + p_0 = 0, \quad (2.24)$$

яке називають **характеристичним**.

Можливі такі випадки.

1. Нехай усі корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ характеристичного рівняння є простими, тобто попарно відмінними.

Оскільки визначник Косораті для розв'язків $\lambda_1^x, \lambda_2^x, \dots, \lambda_k^x$ за $x = 0$ дорівнює

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \dots & \lambda_k^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_k^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0,$$

то, за теоремою 2.1, загальний розв'язок ЛОРР (2.23) дорівнює

$$y_{zo}(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n. \quad (2.25)$$

Якщо корені характеристичного рівняння є простими, але серед них є комплексні, то у формулі (2.25) константи є комплексними. Однак у багатьох випадках бажано мати відповідь у дійсній формі.

Якщо $\lambda = \rho e^{i\varphi}$ є комплексним розв'язком характеристичного рівняння (2.24), то $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\varphi}$ також є його розв'язком. З іншого боку, дійсна та уявна частини

$$\rho^n \cos n\varphi, \quad \rho^n \sin n\varphi \quad (2.26)$$

розв'язку λ^n рівняння (2.23) будуть його розв'язками. Тому в загальному розв'язку (2.25) пару комплексних розв'язків $\lambda^n, \bar{\lambda}^n$ можна замінити парою дійсних розв'язків (2.26).

2. Нехай серед коренів характеристичного рівняння є корінь λ кратності p . Тоді цьому кореню відповідає група розв'язків

$$\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{p-1}\lambda^n,$$

лінійна комбінація яких разом із лінійними комбінаціями аналогічних розв'язків, а також лінійною комбінацією показникових функцій утворюють загальний розв'язок ЛОРР (2.23).

Проілюструємо на прикладі застосування РР для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклад 2.3. Розв'язок задачі Коші

$$y'' - 4y = 0, \tag{2.27}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{2.28}$$

дорівнює $y = ch\ 2x$.

Одержимо наближені значення цього розв'язку за допомогою РР.

Для цього замінимо наближено в диференціальному рівнянні (2.27) похідну другого порядку другою поділеною різницею

$$\frac{1}{h^2} \Delta^2 y(x) = \frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2},$$

а похідну в початковій умові (2.28) – першою

$$\frac{1}{h} \Delta y(0) = \frac{y(h) - y(0)}{h},$$

вважаючи, що $0 < h \ll 1$. Тоді замість задачі Коші (2.27), (2.28) одержимо задачу

$$y(x+2h) - 2y(x+h) + (1 - 4h^2)y(x) = 0.$$

$$y(0) = 1, \quad y(h) - y(0) = 0.$$

Позначимо $y(nh) = y_n, n = 0, 1, 2, \dots$ і одержимо задачу для ЛОРР другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + (1 - 4h^2)y_n = 0. \quad (2.29)$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = y_0. \quad (2.30)$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 - 4h^2) = 0$$

має два відмінні корені

$$\lambda_1 = 1 + 2h, \quad \lambda_2 = 1 - 2h.$$

Тому загальний розв'язок РР (2.29) дорівнює

$$y_{3.0.}(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 (1 + 2h)^n + C_2 (1 - 2h)^n. \quad (2.31)$$

Розв'яжемо задачу (2.29), (2.30). Згідно з виразом (2.31) і умовами (2.30) маємо

$$C_1 + C_2 = y_{3.0.}(0) = 1,$$

$$2h(C_1 - C_2) = y_{3.0.}(0) - y_{3.0.}(h) = 0,$$

звідки $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. Отже, розв'язок задачі (2.29), (2.30) дорівнює

$$y_n = \frac{(1 + 2h)^n + (1 - 2h)^n}{2}.$$

Нехай нам потрібне наближене значення розв'язку задачі Коші (2.27), (2.28) за $x = a$. Виберемо крок $h = \frac{a}{n}$, тобто відрізок $[0, a]$ поділимо на n

частин довжиною h . Тоді $(1 \pm 2h)^n = \left[\left(1 \pm 2\frac{a}{n} \right)^{\pm \frac{n}{2a}} \right]^{\pm 2a} \approx e^{\pm 2a}$, коли $\frac{a}{n} \ll 1$.

Отже, $y_n \approx ch2a$, коли $n \gg 1, a = hn$.

Проілюструємо на прикладі метод обчислення певного класу визначників за допомогою РР.

Приклад 2.4. Обчислити визначник n – го порядку

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Застосовуючи теорему Лапласа до першого рядка, одержимо ЛОРР з початковими умовами

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}, \quad D_1 = 5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19. \quad (2.32)$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

має відмінні корені $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Тому загальний розв'язок РР (2.32) дорівнює

$$D_{30}(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 2^n + C_2 3^n. \quad (2.33)$$

Ураховуючи (2.33) і початкові умови (2.32), маємо

$$2C_1 + 3C_2 = D_1 = 5, \quad 4C_1 + 9C_2 = D_2 = 19, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = 5, \\ 4C_1 + 9C_2 = 19, \end{cases}$$

звідки $C_1 = -2$, $C_2 = 3$. Отже,

$$D_n = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}. \quad (2.34)$$

Перевірка. За формулою (2.34) маємо $D_3 = 3^4 - 2^4 = 81 - 16 = 65$.

Тепер обчислимо D_3 безпосередньо:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 19 - 3 \cdot 10 = 65.$$

Відповіді співпали.

Відповідь: $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Інші цікаві приклади обчислення визначників за допомогою РР можна знайти у книзі [45].

Приклад 2.5. Числа Фібоначчі. Числами Фібоначчі називають послідовність a_n , яка починається з нуля та одиниці і в якій кожний наступний член дорівнює сумі двох попередніх.

Треба знайти загальний член послідовності a_n .

Згідно з умовою, задача еквівалентна знаходженню розв'язку ЛОРР

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

з початковими умовами

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \quad (2.35)$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

має відмінні корені

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Тому загальний розв'язок дорівнює

$$a_{30}(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Сталі C_1, C_2 знаходимо з початкових умов (2.35):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a_0 = 0 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ (C_1 + C_2) + (C_1 - C_2)\sqrt{5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тому число Фібоначчі з номером n дорівнює

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Зазначимо, що оскільки $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то числа Фібоначчі зростають приблизно як члени геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Приклад 2.6. Знайти загальний розв'язок ЛОРР

$$y_{n+3} - 2y_{n+2} - 9y_{n+1} + 18y_n = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda + 18 = (\lambda + 3)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0,$$

має попарно відмінні корені

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Тому загальний розв'язок дорівнює

$$(y_n)_{\text{з.о.}} = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + C_3 \lambda_3^n = C_1 (-3)^n + C_2 2^n + C_3 3^n.$$

Приклад 2.7. Знайти загальний розв'язок ЛОРР

$$y_{n+2} - 9y_{n+1} + 14y_n = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0,$$

має відмінні корені

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 7.$$

Тому загальний розв'язок дорівнює

$$(y_n)_{\text{з.о.}} = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 2^n + C_2 7^n.$$

Приклад 2.8. Знайти загальний розв'язок ЛОРР

$$y_{n+2} + 10y_{n+1} + 25y_n = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0,$$

має двократний корінь $\lambda = -5$.

Тому загальний розв'язок дорівнює

$$(y_n)_{\text{з.о.}} = (C_1 + C_2 n) \lambda^n = (C_1 + C_2 n) (-5)^n.$$

Приклад 2.9. Знайти розв'язок ЛОРР

$$y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 0, \tag{2.36}$$

який задовольняє початкові умови

$$y_0 = 1, \quad y_1 = -1. \quad (2.37)$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

має пару комплексно спряжених коренів

$$\lambda = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Тому загальний розв'язок у дійсній формі дорівнює

$$(y_n)_{\text{з.о.}} = C_1 \cos\frac{2\pi}{3} + C_2 \sin\frac{2\pi}{3}.$$

Сталі C_1, C_2 знаходимо з початкових умов (2.37)

$$\begin{aligned} C_1 = y_0 = 1 \\ C_1 \cos\frac{2\pi}{3} + C_2 \sin\frac{2\pi}{3} = y_1 = -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 + C_2\sqrt{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тому

$$y_n = \cos \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi n}{3}. \quad (2.38)^2$$

Перевірка. За формулою (2.38),

$$y_2 = \cos \frac{4\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Тепер обчислимо y_2 безпосередньо, виходячи з рівняння (2.36) і початкових умов (2.37):

$$y_2 = -y_1 - y_0 = 1 - 1 = 0.$$

Відповіді співпали.

$$\text{Відповідь: } y_n = \cos \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi n}{3}.$$

2.3.2.3. Лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною

Розглянемо ЛНРР

$$y(n+k) + p_{k-1}y(n+k-1) + \dots + p_0y(n) = f(n) \quad (2.39)$$

зі сталими коефіцієнтами і правою частиною

$$f(n) = Q_k(n)\mu^n, \quad (2.40)$$

² Читач може перевірити, що вираз (2.38) для y_n можна спростити, а саме $y_n = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{(2n-1)\pi}{3}$.

де $Q_k(n)$ - многочлен від n степеня k ,

$$Q_k(n) = q_k n^k + q_{k-1} n^{k-1} + \dots + q_0, \quad (2.41)$$

де коефіцієнти q_j є сталими.

Праву частину (2.40), (2.41) будемо називати **спеціальною**.

Правило знаходження частинного розв'язку ЛНРР (2.39) зі спеціальною правою частиною є подібним до правила знаходження частинного розв'язку аналогічного диференціального рівняння. А саме частинний розв'язок ЛНРР (2.39), (2.40), (2.41) потрібно шукати у вигляді

$$y_{zo}(n) = n^r \hat{Q}_k(n) \mu^n, \quad (2.42)$$

де r дорівнює кількості коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють μ , а $\hat{Q}_k(n)$ є многочленом від n степеня k з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 2.10. Знайти розв'язок РР

$$y_{n+1} - 5y_n = 2^n, \quad (2.43)$$

який задовольняє початкову умову $y_0 = 3$.

Оскільки рівняння (2.43) є ЛНРР, то його загальний розв'язок, за теоремою 2.2, шукаємо за формулою

$$y_{zn}(n) = y_{zo}(n) + y_{чн}(n).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного РР. Характеристичне рівняння $\lambda - 5 = 0$ має корінь $\lambda = 5$. Тому загальний розв'язок дорівнює

$$y_{30}(n) = C\lambda^n = C5^n.$$

Права частина РР (2.43) $f(n) = 2^n = 1 \cdot 2^n = q_0\mu^n$ є спеціального вигляду (2.40), (2.41), де $\mu = 2$, $k = 0$.

Оскільки $\mu = 2$ не є коренем характеристичного многочлена, то у формулі (2.42) $r = 0$. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}}(n) = n^0 \hat{Q}_0(n) \mu^n = A2^n. \quad (2.44)$$

Для знаходження сталої A підставляємо $y_{\text{чн}}(n)$ (2.44) у РР (2.43).

Маємо

$$A2^{n+1} - 5A2^n = 2^n.$$

Після скорочення на 2^n одержимо $2A - 5A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$y_{\text{чн}}(n) = -\frac{1}{3}2^n \Rightarrow y_{\text{зн}}(n) = C5^n - \frac{1}{3}2^n.$$

Сталу C знаходимо з початкової умови

$$C - \frac{1}{3} = y_0 = 3 \Rightarrow C = \frac{10}{3} \Rightarrow$$

$$y_n = \frac{10}{3}5^n - \frac{1}{3}2^n. \quad (2.45)$$

Перевірка. За формулою (2.45),

$$y_1 = \frac{10}{3} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 2 = 16.$$

Тепер обчислимо y_1 безпосередньо, виходячи з рівняння (2.43) і початкової умови:

$$y_1 = 5y_0 + 2^0 = 5 \cdot 3 + 1 = 16.$$

Відповіді співпали.

$$\text{Відповідь: } y_n = \frac{10}{3} 5^n - \frac{1}{3} 2^n.$$

Приклад 2.11. Знайти розв'язок РР

$$y_{n+1} + 3y_n = 2(-3)^n \quad (2.46)$$

який задовольняє початкову умову $y_0 = 4$.

Оскільки рівняння (2.46) є ЛНРР, то його загальний розв'язок, за теоремою 2.2, шукаємо за формулою

$$y_{\text{зн}}(n) = y_{\text{зо}}(n) + y_{\text{чн}}(n).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного РР. Характеристичне рівняння $\lambda + 3 = 0$ має корінь $\lambda = -3$. Тому загальний розв'язок дорівнює

$$y_{\text{зо}}(n) = C\lambda^n = C(-3)^n.$$

Права частина РР (2.46) $f(n) = 2 \cdot (-3)^n = q_0 \mu^n$ є спеціального вигляду (2.40), (2.41), де $\mu = -3$, $k = 0$.

Оскільки $\mu = -3$ є коренем характеристичного рівняння, то у формулі (2.42) $r = 1$. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}}(n) = n^1 \hat{Q}_0(n) \mu^n = nA(-3)^n. \quad (2.47)$$

Для знаходження сталої A підставляємо $y_{\text{чн}}(n)$ (2.47) у РР (2.46).

Маємо

$$(n+1)A(-3)^{n+1} + 3nA(-3)^n = 2(-3)^n.$$

Після скорочення на $(-3)^n$ одержимо

$$-3A(n+1) + 3An = 2 \Rightarrow -3A = 2 \Rightarrow A = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$y_{\text{чн}}(n) = -\frac{2}{3}(-3)^n \Rightarrow$$

$$y_{\text{зн}}(n) = C(-3)^n - \frac{2}{3}n(-3)^n.$$

Сталу C знаходимо з початкової умови

$$C = y_0 = 4 \Rightarrow$$

$$y_n = 4(-3)^n - \frac{2}{3}n(-3)^n. \quad (2.48)$$

Перевірка. За формулою (2.48),

$$y_1 = 4 \cdot (-3) + 2 = -10.$$

Тепер обчислимо y_1 безпосередньо, виходячи з рівняння (2.46) і початкової умови:

$$y_1 = -3y_0 + 2 \cdot 1 \cdot (-3)^0 = -3 \cdot 4 + 2 = -10.$$

Відповіді співпали.

Відповідь: $y_n = 4(-3)^n - \frac{2}{3}n(-3)^n$.

Приклад 2.12. Знайти розв'язок РР

$$y_{n+2} + 5y_{n+1} + 4y_n = 3^n, \quad (2.49)$$

який задовольняє початкові умови

$$y_0 = 7, \quad y_1 = -1. \quad (2.50)$$

Оскільки рівняння (2.49) є ЛНРР, то його загальний розв'язок, за теоремою 2.2, шукаємо за формулою

$$y_{\text{зн}}(n) = y_{\text{зо}}(n) + y_{\text{чн}}(n).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного РР.

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

має відмінні корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$.

Тому загальний розв'язок дорівнює

$$y_{\text{зо}}(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1(-1)^n + C_2(-4)^n.$$

Права частина РР (2.49) $f(n) = 3^n = 1 \cdot 3^n = q_0 \mu^n$ є спеціального вигляду (2.40), (2.41), де $\mu = 3$, $k = 0$.

Оскільки $\mu = 3$ не є коренем характеристичного рівняння, то у формулі (2.42) $r = 0$. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}}(n) = n^0 \hat{Q}_0(n) \mu^n = A 3^n. \quad (2.51)$$

Для знаходження сталої A підставляємо $y_{\text{чн}}(n)$ (2.51) у РР (2.49).

Маємо

$$A 3^{n+2} + 5A 3^{n+1} + 4A 3^n = 3^n.$$

Після скорочення на 3^n одержимо

$$9A + 15A + 4A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{28} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{\text{чн}}(n) = \frac{1}{28} 3^n \quad \Rightarrow$$

$$y_{\text{зн}}(n) = C_1(-1)^n + C_2(-4)^n + \frac{1}{28} 3^n.$$

Сталі C_1 , C_2 знаходимо з початкових умов (2.50):

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + \frac{1}{28} &= y_0 = 7, \\ -C_1 - 4C_2 + \frac{3}{28} &= y_1 = -1, \end{aligned}$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = \frac{195}{28} \\ -C_1 - 4C_2 = -\frac{31}{28} \end{array} \right| + \quad \left| \cdot 4 \right. + ,$$

$$\text{звідки } -3C_2 = \frac{164}{28} = \frac{41}{7} \Rightarrow C_2 = -\frac{41}{21}, \quad 3C_1 = \frac{749}{28} \Rightarrow C_1 = \frac{749}{84} \Rightarrow$$

$$y_n = \frac{749}{84}(-1)^n - \frac{41}{21}(-4)^n + \frac{1}{28}3^n. \quad (2.52)$$

Перевірка. За формулою (2.52),

$$y_2 = \frac{749}{84}(-1)^2 - \frac{41}{21}(-4)^2 + \frac{1}{28}3^2 = \frac{749}{84} - \frac{656}{21} + \frac{9}{28} = \frac{1648}{84} = -22.$$

Тепер обчислимо y_2 безпосередньо, виходячи з РР (2.49) і початкових умов (2.50):

$$y_2 = -5y_1 - 4y_0 + 3^0 = -5 \cdot (-1) - 4 \cdot 7 + 1 = -22.$$

Відповіді співпали.

$$\text{Відповідь: } y_n = \frac{749}{84}(-1)^n - \frac{41}{21}(-4)^n + \frac{1}{28}3^n.$$

Приклад 2.13. Знайти розв'язок РР

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = (3n + 1)2^n, \quad (2.53)$$

який задовольняє початкові умови

$$y_0 = 1, \quad y_1 = -\frac{1}{4}. \quad (2.54)$$

Оскільки РР (2.53) є ЛНРР, то його загальний розв'язок, за теоремою 2.2, шукаємо за формулою

$$y_{\text{зн}}(n) = y_{\text{зо}}(n) + y_{\text{чн}}(n).$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

має двократний корінь $\lambda = 2$. Тому загальний розв'язок дорівнює

$$y_{\text{зо}}(n) = (C_1 + C_2 n)\lambda^n = (C_1 + C_2 n)2^n.$$

Права частина РР (2.53) $f(n) = (3n + 2)2^n = (q_1 n + q_0)\mu^n$ є спеціального вигляду (2.40), (2.41), де $\mu = 2$, $k = 1$.

Оскільки $\mu = 2$ є двократним коренем характеристичного рівняння, то у формулі (2.42) $r = 2$. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}}(n) = n^2 \hat{Q}_1(n)\mu^n = n^2(An + B)2^n. \quad (2.55)$$

Для знаходження сталих A та B підставляємо $y_{\text{чн}}(n)$ (2.55) у РР (2.53).

Маємо

$$\begin{aligned} (n+2)^2(A(n+2) + B)2^{n+2} - 4(n+1)^2(A(n+1) + B)2^{n+1} + \\ + 4n^2(An + B)2^n = (3n+1)2^n. \end{aligned}$$

Після скорочення на 2^n одержимо

$$\begin{aligned} 4(n+2)^2(A(n+2)+B) - 8(n+1)^2(A(n+1)+B) + 4n^2(An+B) = \\ = 3n+1, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} 4A(n+2)^3 + 4B(n+2)^2 - 8A(n+1)^3 - 8B(n+1)^2 + 4An^3 + 4Bn^2 = \\ = 3n+1. \end{aligned}$$

Розкривши дужки, одержимо

$$24An + 24A + 8B = 3n + 1,$$

звідки $24A = 3, \quad 24A + 8B = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{8} \Rightarrow 24 \cdot \frac{1}{8} + 8B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$y_{\text{чн}}(n) = n^2 \left(\frac{1}{8}n - \frac{1}{4} \right) 2^n \Rightarrow$$

$$y_{\text{зн}}(n) = (C_1 + C_2n)2^n + n^2 \left(\frac{1}{8}n - \frac{1}{4} \right) 2^n.$$

Сталі C_1 та C_2 знаходимо з початкових умов (2.54):

$$\begin{aligned} C_1 = y_0 = 1, \\ (C_1 + C_2)2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) 2 = y_1 = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

звідки

$$C_1 = 1 \Rightarrow (1 + C_2)2 = 0 \Rightarrow C_2 = -1 \Rightarrow$$

$$y_n = (1 - n)2^n + n^2 \left(\frac{1}{8}n - \frac{1}{4} \right) 2^n = \left(\frac{1}{8}n^3 - \frac{1}{4}n^2 - n + 1 \right) 2^n. \quad (2.56)$$

Перевірка. За формулою (2.56),

$$y_2 = \left(\frac{1}{8}2^3 - \frac{1}{4}2^2 - 2 + 1 \right) 2^2 = -4.$$

Тепер обчислимо y_2 безпосередньо, виходячи з РР (2.53) і початкових умов (2.54):

$$y_2 = 4y_1 - 4y_0 + (3 \cdot 0 + 1)2^0 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) - 4 \cdot 1 + 1 = -4.$$

Відповіді співпали.

$$\text{Відповідь: } y_n = \left(\frac{1}{8}n^3 - \frac{1}{4}n^2 - n + 1 \right) 2^n.$$

2.4. Лінійні системи різницьових рівнянь

Лінійна система різницьових рівнянь (ЛСРР) першого порядку в векторній формі має вигляд

$$\vec{y}(n+1) = A(n)\vec{y}(n) + \vec{f}(n), \quad (2.57)$$

де $A(n)$ — задана $t \times t$ матриця-функція;

$$\vec{f}(n) = (f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n))^T. \quad (2.58)$$

Вираз (2.58) — задана m — компонентна вектор-функція.

$$\vec{y}(n) = (y_1(n), y_2(n), \dots, y_m(n)). \quad (2.59)$$

Вираз (2.59) — невідома m — компонентна вектор-функція.

Якщо в системі (2.57) вектор-функція $\vec{f}(n) \equiv 0$, то цю систему називають **лінійною однорідною системою різницьових рівнянь (ЛОСРР)**.

Якщо в системі (2.57) вектор-функція $\vec{f}(n) \not\equiv 0$, то цю систему називають **лінійною неоднорідною системою різницьових рівнянь (ЛНСРР)**.

Зауваження. ЛНРР m -го порядку

$$u(n + m) + p_{m-1}(n)u(n + m - 1) + \dots + p_0(n)u(n) = f(n) \quad (2.60)$$

можна звести до системи вигляду (2.57).

Дійсно, якщо позначимо

$$y_1(n) = u(n), \quad y_2(n) = u(n + 1), \quad \dots, \quad y_m(n) = u(n + m - 1),$$

то одержимо систему

$$\begin{cases} y_1(n + 1) = y_2(n), \\ y_2(n + 1) = y_3(n), \\ \dots \\ y_{m-1}(n + 1) = y_m(n), \\ y_m(n + 1) = -p_{m-1}(n)y_m(n) - \dots - p_0(n)y_1(n) + f(n), \end{cases}$$

яка у векторній формі має вигляд (2.57)-(2.59), де

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0(n) & -p_1(n) & -p_2(n) & \cdots & -p_{m-2}(n) & -p_{m-1}(n) \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ f(n) \end{pmatrix}.$$

Теорія ЛСРР є аналогічною до теорії ЛРР.

А саме **загальний розв'язок ЛНСРР** (2.57) дорівнює сумі загального розв'язку $\vec{y}_{30}(n)$ відповідної ЛОСРР і частинного розв'язку $\vec{y}_{\text{чн}}(n)$ цієї ЛНСРР.

$$\vec{y}_{\text{зн}}(n) = \vec{y}_{30}(n) + \vec{y}_{\text{чн}}(n). \quad (2.61)$$

Загальний розв'язок ЛОСРР

$$\vec{y}(n+1) = A(n)\vec{y}(n) \quad (2.62)$$

дорівнює

$$\vec{y}_{30}(n) = Y(n)\vec{c}, \quad (2.63)$$

де

$$Y(n) = A(n-1)A(n-2) \dots A(0), \quad Y(0) = \mathbb{I}, \quad (2.64)$$

$\vec{c}$ — довільний сталий вектор.

Зокрема, якщо матриця-функція $A(n)$ є сталою: $A(n) = A$, то

$$\vec{y}_{30}(n) = A^n \vec{c}. \quad (2.65)$$

Загальний розв'язок ЛНСРР (2.57) можна знайти **методом варіації довільної сталої**, а саме у вигляді (2.63), але із заміною сталого вектора $\vec{c}$ на невідому вектор-функцію $\vec{c}(n)$:

$$\vec{y}_{3H}(n) = Y(n)\vec{c}(n). \quad (2.66)$$

Для знаходження $\vec{c}(n)$ підставляємо вираз (2.66) у ЛСРР (2.57). Маємо

$$Y(n+1)\vec{c}(n+1) = A(n)Y(n)\vec{c}(n) + \vec{f}(n) \Rightarrow$$

$$Y(n+1)\vec{c}(n) + Y(n+1)(\vec{c}(n+1) - \vec{c}(n)) = A(n)Y(n)\vec{c}(n) + \vec{f}(n).$$

Ураховуючи, що $Y(n+1) = A(n)Y(n)$, одержуємо

$$\vec{c}(n+1) - \vec{c}(n) = Y^{-1}(n+1)\vec{f}(n) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{c}(n) &= (\vec{c}(n) - \vec{c}(n-1)) + (\vec{c}(n-1) - \vec{c}(n-2)) + \dots + \\ &+ (\vec{c}(1) - \vec{c}(0)) + \vec{c}(0) = \sum_{j=1}^n Y^{-1}(j)\vec{f}(j-1) + \vec{c}, \end{aligned}$$

де $\vec{c}(0)$ позначили $\vec{c}$. Тому загальний розв'язок ЛНРР (2.57) дорівнює

$$\vec{y}_{3H}(n) = Y(n)\vec{c}(n) = \sum_{j=1}^n Y(n)Y^{-1}(j)\vec{f}(j-1) + Y(n)\vec{c}. \quad (2.67)$$

Але завдяки виразу (2.64) маємо

$$Y(n)Y^{-1}(j) = \begin{cases} \mathbb{I}, & j = n, \\ A(n-1) \cdot \dots \cdot A(j), & j < n. \end{cases}$$

Тому $\vec{y}_{3n}(n)$ (2.67) дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{y}_{3n}(n) = & A(n-1) \cdot \dots \cdot A(1)\vec{c} + A(n-1) \cdot \dots \cdot A(2)\vec{f}(1) + \\ & + A(n-1) \cdot \dots \cdot A(1)\vec{f}(1) + \dots + A(n-1)\vec{f}(n-2) + \vec{f}(n-1). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Для доведення формули (2.68) використовували невиродженість матриць $Y(j)$. Але сама формула не містить жодної оберненої матриці. Перший доданок у рівності (2.68) дорівнює $\vec{y}_{30}(n)$. Тому для доведення рівності (2.68) у загальному випадку треба з огляду на формулу (2.61) перевірити, що сума решти доданків є $\vec{y}_{чн}(n)$. Позначимо цю суму $\vec{x}(n)$. Маємо

$$\begin{aligned} \vec{x}(n+1) = & A(n) \cdot \dots \cdot A(1)\vec{f}(0) + A(n) \cdot \dots \cdot A(2)\vec{f}(1) + \dots + A(n)\vec{f}(n-1) + \\ & + \vec{f}(n) = A(n)\vec{x}(n) + \vec{f}(n). \end{aligned}$$

Тобто $\vec{x}(n)$ дійсно є частинним розв'язком системи, і, отже, формулу (2.68) доведено в загальному випадку.

Зазначимо, що якщо матриця-функція $A(n)$ є сталою: $A(n) = A$, то

$$\vec{y}_{3n}(n) = A^n \vec{c} + \sum_{j=1}^n A^{n-j} \vec{f}(j-1).$$

Якщо ж у системі (2.57) $A(n) = A$ вектор-функція $\vec{f}(n)$ є спеціальною, а саме

$$\vec{f}(n) = \mu^n \vec{f}, \quad (2.69)$$

де $\vec{f}$ є сталим вектором, а μ не є власним значенням матриці A , то $\vec{y}_{\text{чн}}(n)$ можна знайти за формулою (чому?)

$$\vec{y}_{\text{чн}}(n) = \mu^n (\mu - A)^{-1} \vec{f}. \quad (2.70)$$

Приклад 2.14. Знайти $\vec{y}(51)$, де $\vec{y}(n)$ є розв'язком системи

$$\vec{y}(n+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}(n),$$

який задовольняє початкову умову $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Оскільки

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то з огляду на формулу (2.65)

$$\vec{y}(51) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{51} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.15. Знайти розв'язок системи

$$\vec{y}(n+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \vec{y}(n),$$

який задовольняє початкову умову $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, які є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0,$$

дорівнюють $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 3$.

За правилом знаходження функції від матриці [39], маємо

$$A^n = \frac{A - \lambda_1 \mathbb{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1^n + \frac{A - \lambda_2 \mathbb{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^n = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} (-4)^n - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} 3^n \right].$$

Тому з огляду на формулу (2.65)

$$\vec{y}(n) = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3^n}{7} \begin{pmatrix} -7 \\ 42 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.16. Знайти $\vec{y}(50)$, де $\vec{y}(n)$ є розв'язком системи

$$\vec{y}(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \vec{y}(n),$$

який задовольняє початкову умову $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, які є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

співпадають і дорівнюють $\mu = 3$. Оскільки $A \neq \mu \mathbb{I}$, то матриця A має лише один власний вектор, і в цьому випадку, за правилом знаходження функції від матриці [39],

$$A^{50} = \mu^{50} \mathbb{I} + 50\mu^{49}(A - \mu \mathbb{I}) = 3^{49} \begin{pmatrix} -97 & 100 \\ -100 & 103 \end{pmatrix}.$$

Тому з огляду на формулу (2.65)

$$\vec{y}(50) = A^{50} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^{49} \begin{pmatrix} 100 \\ 103 \end{pmatrix}.$$

Наостанок розглянемо приклад системи РР вигляду

$$\vec{y}(n+1) = \vec{y}(n)A(n),$$

де $\vec{y}(n)$, на відміну від системи (2.62), є вектором-стовпчиком. Теорія таких систем є аналогічною теорії систем вигляду (2.62).

Приклад 2.17. Відомо, що для **марківського ланцюга з дискретним часом** і двома можливими станами вектор-рядок $\vec{p}(n) = (p_1(n), p_2(n))$ імовірностей знаходження системи в першому та другому станах задовольняє систему РР

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n)\mathbb{P},$$

де

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1$$

є матрицею переходу за один крок.

Оскільки власні значення матриці $\mathbb{P}$ дорівнюють $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = p + q - 1$, то, якщо $0 < p + q < 2$, аналогічно прикладу 2.15 знаходимо:

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0)\mathbb{P}^n,$$

де

$$\mathbb{P}^n = \frac{1 - ((p + q) - 1)^n}{2 - (p + q)} \mathbb{P} - (p + q - 1) \frac{1 - ((p + q) - 1)^n}{2 - (p + q)} \mathbb{I}, \quad (2.71)$$

$\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0))$ — початковий розподіл імовірностей.

Знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p}(n)$. Завдяки формулі (2.71) маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p}(n) &= \frac{\vec{p}(0)}{2 - (p + q)} \begin{pmatrix} 1 - q & 1 - p \\ 1 - q & 1 - p \end{pmatrix} = |p_1(0) + p_2(0) = 1| = \\ &= \frac{1}{2 - (p + q)} (1 - q, \quad 1 - p). \end{aligned}$$

Отже, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p}(n)$, який не залежить від початкового розподілу $\vec{p}(0)$. Цей факт називають **ергодичною теоремою**.

Приклад 2.18. Знайти $\vec{y}(101)$, де $\vec{y}$ є розв'язком системи

$$\vec{y}(n + 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}(n) + 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

який задовольняє початкову умову $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Спочатку знайдемо $\vec{y}_{30}(n)$ за формулою (2.65).

У системі (2.72)

$$A(n) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

тому

$$\vec{y}_{30}(n) = A^n \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^n \vec{c}.$$

У системі (2.72) вектор-функція $\vec{f}(n)$ має спеціальний вигляд (2.69):

$$\vec{f}(n) = \mu^n \vec{f} = 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де $\mu = 5$ не є власним значенням матриці A (перевірте).

Тому, за формулою (2.70), маємо

$$\begin{aligned} \vec{y}_{\text{чн}}(n) &= \mu^n (\mu \mathbb{I} - A)^{-1} \vec{f} = 5^n \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5^n}{24} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{5^n}{24} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5^n}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

За формулою (2.61),

$$\vec{y}_{\text{зн}}(n) = \vec{y}_{30}(n) + \vec{y}_{\text{чн}}(n) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^n \vec{c} + \frac{5^n}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сталий вектор $\vec{c}$ знаходимо з початкової умови:

$$\vec{c} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{y}(n) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{5^n}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки (див. приклад 2.14)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{101} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix},$$

то

$$\vec{y}(101) = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix} + \frac{5^{101}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Що називають різницями першого порядку, другого порядку і взагалі n -го порядку?
2. Що називають першою поділеною різницею, другою поділеною різницею і взагалі n -ю поділеною різницею?
3. Яке рівняння називають різницевим?
4. Як визначають порядок різницевого рівняння?
5. Який вигляд має лінійне різницеве рівняння першого порядку?
6. Як знаходять загальний розв'язок лінійного різницевого рівняння першого порядку за методом варіації довільної сталої?
7. Який вигляд має лінійне різницеве рівняння k -го порядку?
8. Яке лінійне різницеве рівняння називають однорідним?
9. Яке лінійне різницеве рівняння називають неоднорідним?
10. Який визначник називають визначником Косораті?

11. Який вигляд має аналог формули Ліувілля – Остроградського для лінійних однорідних різницевих рівнянь?
12. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного різницевого рівняння.
13. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного різницевого рівняння.
14. Як вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами?
15. Яку праву частину лінійного неоднорідного різницевого рівняння називають спеціальною?
16. Сформулюйте правило знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного різницевого рівняння зі спеціальною правою частиною.
17. Який вигляд має система лінійних різницевих рівнянь першого порядку?
18. Яку лінійну систему різницевих рівнянь першого порядку називають однорідною?
19. Яку лінійну систему різницевих рівнянь першого порядку називають неоднорідною?
20. Як звести лінійне різницеве рівняння до лінійної системи різницевих рівнянь першого порядку?
21. Чому дорівнює загальний розв'язок лінійної однорідної системи різницевих рівнянь першого порядку?
22. Чому дорівнює загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи різницевих рівнянь першого порядку?
23. Як знаходять загальний розв'язок лінійної системи різницевих рівнянь першого порядку за методом варіації довільної сталої?

ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

Завдання 1. Знайти розв'язок РР, який задовольняє початкові умови:

1) $y_{n+1} - 5y_n = 2 \cdot 5^n, y_0 = 3;$

2) $y_{n+2} - 3y_{n+1} - 10y_n = 0, y_0 = 3, y_1 = -1;$

3) $y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 0, y_0 = 1, y_1 = -1;$

4) $y_{n+2} - \sqrt{3}y_{n+1} + y_n = 0, y_0 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2};$

5) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2 \cdot 4^n, y_0 = -1, y_1 = 5;$

6) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3^n, y_0 = 2, y_1 = 4.$

Завдання 2. Знайти розв'язок системи РР, який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + 3^n, \\ y_{n+1} = -2x_n - 3^n, \end{cases} \quad x_0 = 3, \quad y_0 = 0.$$

Завдання 3. Обчислити визначник n – го порядку

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 2

Завдання 1.

$$\begin{aligned} & \text{1) } 3 \cdot 5^n + \frac{2}{5}n \cdot 5^n; \text{ 2) } \frac{1}{7}(5^{n+1} + 16(-2)^n); \text{ 3) } \cos \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi n}{3}; \\ & \text{4) } \frac{1}{2} \cos \frac{\pi n}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi n}{6}; \text{ 5) } 5 \cdot 3^n - 7 \cdot 2^n + 4^n; \text{ 6) } \left(1 - \frac{1}{2}n\right) 2^n + 3^n. \end{aligned}$$

Завдання 2.

$$x_n = (-1)^n + 2^n + 3^n, \quad y_n = 2(-1)^n - 2^n - 3^n.$$

Завдання 3.

$$5^{n+1} - 4^{n+1}.$$

3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Дійсно, їх (операторів) використання часто призводить до великих спрощень і позбавляє від необхідності проводити складні обчислення визначених інтегралів. Але при цьому чітка логіка справи не зрозуміла. Ну і що з того? Чи буду я відмовлятися від обіду тому, що не розумію повністю процес травлення? Ні, не буду, якщо я повністю задоволений результатом.
О. Хевісайд

Операційне числення дає змогу зводити розв'язання диференціальних, різницевих, інтегральних рівнянь і систем до розв'язання алгебраїчних рівнянь і систем, які називають операторними. Це числення наприкінці XIX сторіччя на евристичному рівні ввів англійський інженер-електрик Олівер Хевісайд для розрахунку електричних кіл. Чітке обґрунтування методу дали лише у 20-х роках минулого сторіччя англійські математики Бромвич і Карсон. Їхній підхід ґрунтується на застосуванні перетворення Лапласа. У навчальному посібнику операційне числення подано за схемою Бромвича та Карсона.

3.1. Перетворення Лапласа

3.1.1. Визначення оригіналу та зображення. Формула обернення

Визначення 3.1. Комплексно-значну функцію $f(t)$ дійсного аргументу називають **оригіналом**, якщо вона задовольняє три умови:

1. $f(t) = 0$, якщо $t < 0$.
2. Існують такі сталі M і σ_0 , що $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$, тобто оригінал не може зростати швидше за експоненту.

3. На будь-якому скінченному відрізку $f(t)$ може мати лише скінченну кількість розривів I роду, і $f(+0) = f(0)$.

Визначення 3.2. Перетворенням Лапласа або зображенням оригіналу $f(t)$ називають функцію

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3.1)$$

комплексної змінної $p = \sigma + i\tau$.

Коротко рівність (3.1) записують так:

$$F(p) \doteq f(t)$$

(знак $\doteq$ заміняє слово «відповідає»³) або $F(p) = L[f(t)]$.

Нижче оригінали будемо позначати маленькими літерами, а їхні зображення - відповідними великими літерами.

Інтеграл $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ збігається, коли p знаходиться в півплощині $Re\, p > \sigma_0$ (рис. 3.1). Більш того, справедлива теорема про існування оригіналу та зображення.

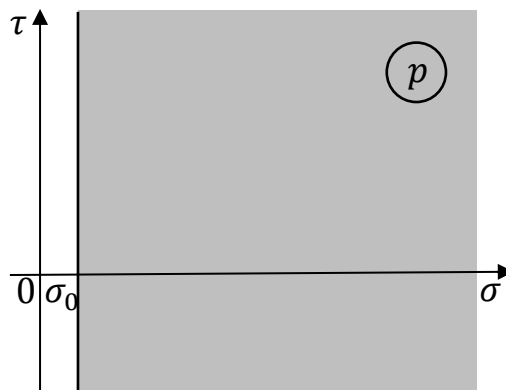


Рис. 3.1. Півплощина, у якій визначено зображення $F(p)$

³ Застосовують також інші позначення, наприклад $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Теорема 3.1. 1. Для будь-якого оригіналу $f(t)$ зображення $F(p)$ визначено в півплощині $Re\, p > \sigma_0$ і є в цій півплощині аналітичною функцією.

2. Навпаки, нехай функція $F(p)$ є аналітичною в півплощині $Re\, p > \sigma_0$ і прямує до нуля, коли $|p| \rightarrow \infty$, у будь-якій півплощині $Re\, p \geq \sigma > \sigma_0$ рівномірно відносно $arg\, p$, інтеграл

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

збігається абсолютно.

Тоді $F(p)$ є зображенням оригіналу

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \sigma > \sigma_0. \quad (3.2)$$

Формулу (3.2) називають **формулою обернення**.

Приклад 3.1. Функція $F(p) = \frac{1}{p-2}$, коли $Re\, p > 2 = \sigma_0$, задовольняє умови, за яких має місце формула обернення (3.2). Знайдемо за цією формулою відповідний оригінал $f(t)$.

Для цього розглянемо на комплексній p площині контури $L_{\pm} = [3 - i\tau_R; 3 + i\tau_R] \cup \Gamma_R^{\pm}$, де Γ_R^+ та Γ_R^- - частини кола $|z| = R$ у півплощинах $Re\, z > 3$ і $Re\, z < 3$ відповідно (рис. 3.2).

Нехай $t > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{3-i\tau_R}^{3+i\tau_R} e^{pt} \frac{1}{p-2} dp + \int_{\Gamma_R^-} e^{pt} \frac{1}{p-2} dp &= \int_{L_-} \frac{e^{pt}}{p-2} dp = \\ &= Res_{p=2} \frac{e^{pt}}{p-2} = e^{2t}. \end{aligned}$$

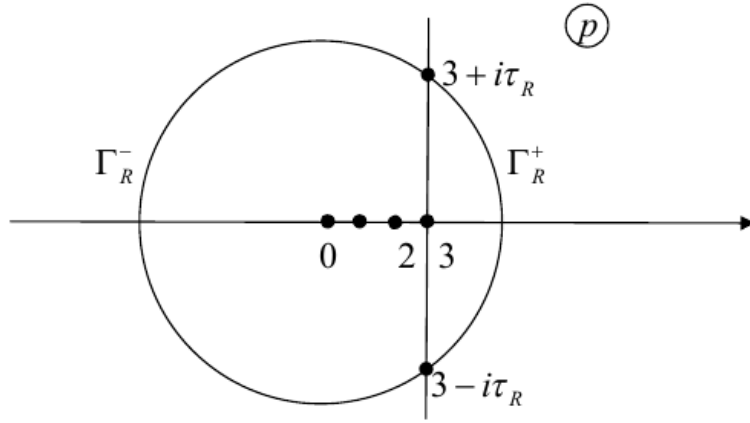


Рис. 3.2. Контури з прикладу 3.1

Але $\int_{\Gamma_R^-} \dots \rightarrow 0$, коли $R \rightarrow +\infty$ [58, глава 4, §2]. Тому

$$f(t) = \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{3-i\tau_R}^{3+i\tau_R} e^{pt} \frac{1}{p-2} dp = e^{2t}, t > 0.$$

Нехай $t < 0$. Аналогічно

$$\int_{3-i\tau_R}^{3+i\tau_R} e^{pt} \frac{1}{p-2} dp + \int_{\Gamma_R^+} e^{pt} \frac{1}{p-2} dp = \int_{L_+} \frac{e^{pt}}{p-2} dp = 0,$$

оскільки підінтегральна функція аналітична всередині контуру L_+ .

Оскільки $\int_{\Gamma_R^+} \dots \rightarrow 0$, коли $R \rightarrow +\infty$ [58, глава 4, §2], то

$$f(t) = \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{3-i\tau_R}^{3+i\tau_R} e^{pt} \frac{1}{p-2} dp = 0, t < 0.$$

Тому

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{2t}, & t > 0 \end{cases}$$

Нижче ми побачимо, що дійсно $f(t) \doteq \frac{1}{p-2}$ (формула (3.7)). Отже, на цьому прикладі ми перевірили формулу обернення (3.2).

Зазначимо, що знаходження оригіналу безпосередньо за формулою обернення (3.2) зазвичай є складною задачею. Тому, як буде показано нижче, у багатьох випадках оригінали можна знаходити, оминаючи цю формулу, використовуючи таблицю з дод. 1 і різні властивості перетворення Лапласа.

Визначення 3.3. Функцією Хевісайда або одиничним імпульсом називають функцію-оригінал (рис. 3.3)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

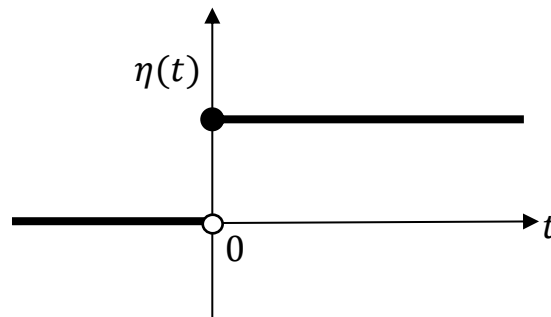


Рис. 3.3. Функція Хевісайда

Приклад 3.2. Знайти зображення функції Хевісайда.

Оскільки $|\eta(t)| \leq 1 \cdot e^{0 \cdot t}$, то $M = 1$, $\sigma_0 = 0$ і

$$\eta(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} \eta(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \left[\begin{matrix} p = \sigma + i\tau, \\ \sigma > 0 \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{e^{-(\sigma+i\tau)t}}{-p} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{-p} = \frac{1}{p},$$

оскільки $e^{-(\sigma+i\tau)t} = e^{-\sigma t}(\cos \tau t + i \sin \tau t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Отже,

$$\boxed{\eta(t) \doteq \frac{1}{p}.} \quad (3.4)$$

Далі під $f(t)$ розуміємо $f(t) \cdot \eta(t)$ (для дійсних оригіналів на рис. 3.4).

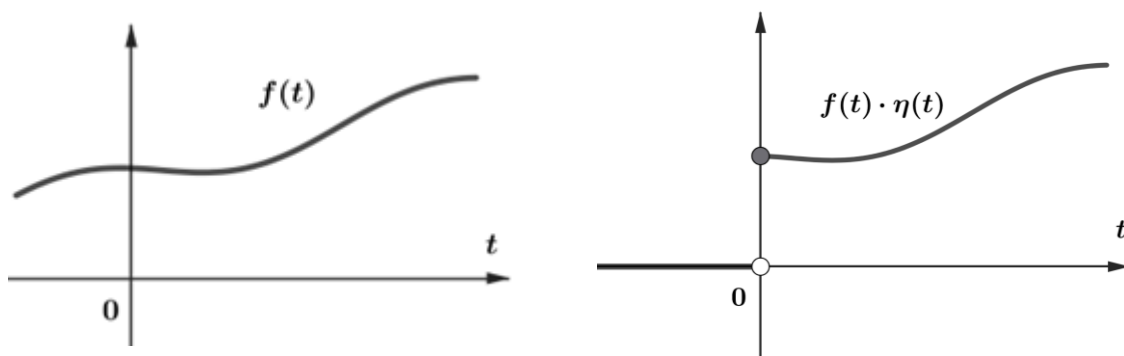


Рис. 3.4. Утворення оригіналу з функції $f(t)$

Наприклад, у формулі (3.4) замість $\eta(t)$, пишемо просто 1, тобто

$$\boxed{1 \doteq \frac{1}{p}.} \quad (3.5)$$

Замість $\eta(t) \sin t$ пишемо $\sin t$ і т. д.

Приклад 3.3. Знайти зображення періодичної функції $f(t)$ із періодом $T > 0$.

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt = \left| \begin{matrix} nT + \tau = t \\ d\tau = dt \end{matrix} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-pnT} e^{-p\tau} f(nT + \tau) d\tau = \\
&= \int_0^T e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-p\tau} f(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT}$ є збіжною геометричною прогресією зі знаменником $q = e^{-pT}$, $|q| = e^{-\operatorname{Re} p T} < 1$. Отже, маємо

$$\boxed{f(t+T) = f(t), T > 0 \Rightarrow f(t) \doteq \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-p\tau} f(\tau) d\tau.} \quad (3.6)$$

Приклад 3.4. Знайти зображення експоненти $e^{\alpha t}$

$$e^{\alpha t} \doteq \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \left. \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p} \right|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{\alpha-p} = \frac{1}{p-\alpha},$$

коли $\operatorname{Re} p > \alpha$.

$$\boxed{e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}.} \quad (3.7)$$

3.1.2. Властивості перетворення Лапласа

Лінійність

$$\boxed{af(t) + bg(t) \doteq aF(p) + bG(p)}.$$

Приклад 3.5. Знайти зображення тригонометричних і гіперболічних функцій $\sin \beta t$, $\cos \beta t$, $sh\beta t$, $ch\beta t$.

Для тригонометричного косинуса маємо

$$\begin{aligned}\cos \beta t &= \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - i\beta} + \frac{1}{p + i\beta} \right] = \frac{1}{2} \frac{p + i\beta + p - i\beta}{(p - i\beta)(p + i\beta)} \\ &= \frac{p}{p^2 + \beta^2},\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos \beta t \doteq \frac{p}{p^2 + \beta^2}}. \quad (3.8)$$

Аналогічно

$$\boxed{\sin \beta t \doteq \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}}. \quad (3.9)$$

Для гіперболічного косинуса маємо

$$ch\beta t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \beta} + \frac{1}{p + \beta} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p + \beta + p - \beta}{p^2 - \beta^2} = \frac{p}{p^2 - \beta^2},$$

$$\boxed{ch\beta t \doteq \frac{p}{p^2 - \beta^2}}. \quad (3.10)$$

Аналогічно

$$\boxed{sh\beta t \doteq \frac{\beta}{p^2 - \beta^2}}. \quad (3.11)$$

Теорема подібності (змiна масштабу)

Для будь-якої сталої $\alpha > 0$

$$\boxed{f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad F(\alpha p) \doteq \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right)}. \quad (3.12)$$

Доведення. Дійсно,

$$f(\alpha t) \doteq \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} \alpha t = s \\ dt = \frac{ds}{\alpha} \end{array} \right| = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(s) e^{-\frac{p}{\alpha} s} ds = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Другу з формул (3.12) пропонуємо довести самостійно.

Теорема запізнювання

«Увімкненню» оригіналу із **запізнюванням** (для дійсного оригіналу - рис. 3.5) відповідає множення зображення на $e^{-p\tau}$, тобто

$$\boxed{f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \tau > 0}. \quad (3.13)$$

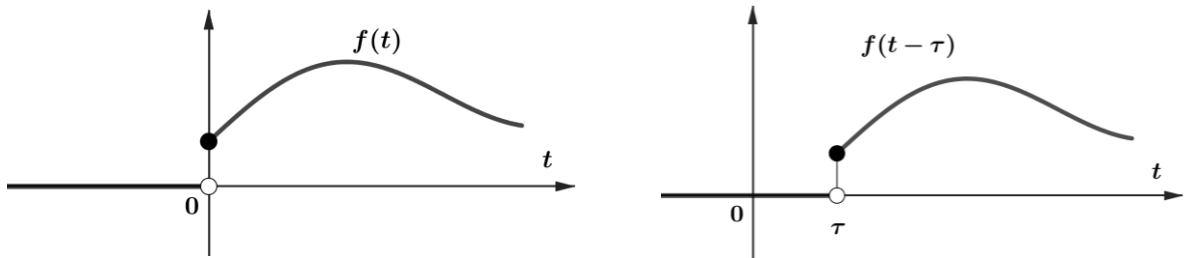


Рис. 3.5. «Увімкнення» оригіналу із запізнюванням

Доведення. Оскільки $f(t - \tau) = 0$, коли $t < \tau$, то

$$\begin{aligned} f(t - \tau) \doteq \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt &= \left| \begin{array}{l} t - \tau = z \\ dt = dz \end{array} \right| = \int_0^{\infty} f(z) e^{-p(z+\tau)} dz = \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(z) e^{-pz} dz = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

Цю теорему зручно, зокрема, застосовувати для знаходження зображень функцій, які на різних інтервалах задані різними аналітичними виразами.

Приклад 3.6. Знайти зображення оригіналу $g(t)$, який дорівнює періодичній послідовності прямокутних імпульсів (рис. 3.6).

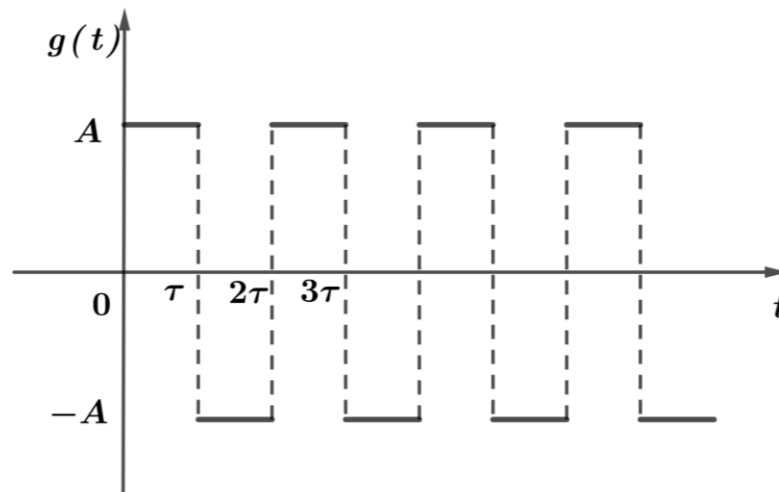


Рис. 3.6. Періодична послідовність прямокутних імпульсів із прикладу 3.6

Цей періодичний сигнал можна записати за допомогою функції Хевісайда так:

$$g(t) = A(\eta(t) - 2\eta(t - \tau) + 2\eta(t - 2\tau) - \dots).$$

Застосовуючи властивість лінійності, теорему запізнювання та формулу (3.4), маємо

$$g(t) \doteq A\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p\tau} + \frac{2}{p}e^{-p2\tau} - \dots\right) = \frac{A}{p}(1 - 2e^{-p\tau} + 2e^{-p2\tau} - \dots).$$

У дужках маємо суму одиниці та геометричної прогресії зі знаменником $q = -e^{-p\tau}$. Оскільки $|q| = |-e^{-p\tau}| < 1$, бо $\operatorname{Re} p > 0$, то

$$g(t) \doteq \frac{A}{p} \left(1 - 2 \frac{e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} \right) = \frac{A}{p} \left(\frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} \right) = \frac{A}{p} \cdot th \frac{p\tau}{2}. \quad (3.14)$$

Пропонуємо самостійно одержати цей результат, застосовуючи формулу (3.6) до періодичного прямокутного сигналу $g(t)$.

Теорема випередження

$$f(t + \alpha) \doteq e^{\alpha p} \left(F(p) - \int_0^{\alpha} f(t) e^{-pt} dt \right), \alpha > 0. \quad (3.15)$$

Доведення. Оскільки $f(t) = 0$, коли $t < 0$, то

$$\begin{aligned} f(t + \alpha) &\doteq \int_0^{\infty} f(t + \alpha) e^{-pt} dt = \left[\begin{matrix} t + \alpha = z \\ dt = dz \end{matrix} \right] = \int_{\alpha}^{\infty} f(z) e^{-p(z-\alpha)} dz = \\ &= e^{p\alpha} \left(\int_0^{\infty} f(z) e^{-pz} dz - \int_0^{\alpha} f(z) e^{-pz} dz \right) = e^{p\alpha} \left(F(p) - \int_0^{\alpha} f(z) e^{-pz} dz \right). \end{aligned}$$

Випередження дійсного оригіналу проілюстровано на рис. 3.7.

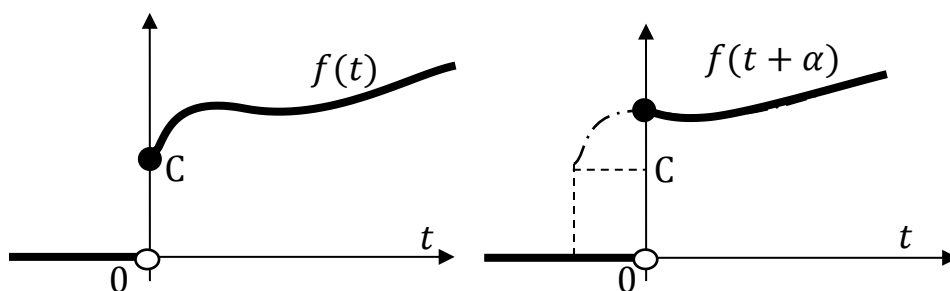


Рис. 3.7. Випередження дійсного оригіналу

Теорема зміщення зображення

Зміщенню зображення на α відповідає множення оригіналу на $e^{\alpha t}$, тобто

$$\boxed{e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha), \alpha \in \mathbb{C}.} \quad (3.16)$$

Доведення. Маємо

$$e^{\alpha t} f(t) \doteq \int_0^\infty e^{\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p - \alpha).$$

Ця теорема дає змогу за відомими зображеннями оригіналів знаходити зображення цих оригіналів, помножених на $e^{\alpha t}$.

Приклад 3.7.

$$\cos \beta t \doteq \frac{p}{p^2 + \beta^2} \Rightarrow \boxed{e^{\alpha t} \cos \beta t \doteq \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}}, \quad (3.17)$$

$$\sin \beta t \doteq \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \Rightarrow \boxed{e^{\alpha t} \sin \beta t \doteq \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}}. \quad (3.18)$$

Диференціювання оригіналу

Операції диференціювання оригіналу $f(t)$, якщо $f(0) = 0$, відповідає алгебраїчній операції множення відповідного зображення на p , тобто

$$f'(t) \doteq pF(p), \quad \text{якщо } f(0) = 0. \quad (3.19)$$

Точніше, якщо функція $f(t)$ і її похідні $f'(t)$, $\dots$, $f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad (3.20)$$

де $f^{(k)}(0) \stackrel{\text{def}}{=} f^{(k)}(+0)$.

Зокрема,

$$\boxed{f'(t) \doteq pF(p) - f(0)}, \quad (3.21)$$

$$\boxed{f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)}. \quad (3.22)$$

Доведення.

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} df(t) = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) d e^{-pt} =$$

$$= \left| \operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0 \Rightarrow |f(t) e^{-pt}| \leq M e^{(\sigma - \sigma_0)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \right| =$$

$$= -f(0) + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

Застосовуючи формулу (3.21) до $f'(t)$, отримаємо зображення другої похідної $f''(t) = (f'(t))' \doteq p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$ і т. д.

Приклад 3.8. З формули (3.8) для зображення $\cos \beta t$, одержати, використовуючи формулу (3.21), формулу (3.9) для зображення $\sin \beta t$.

Маємо

$$\begin{aligned} \sin \beta t &= -\frac{1}{\beta} (\cos \beta t)' \doteq -\frac{1}{\beta} \left(p \frac{p}{p^2 + \beta^2} - \cos \beta 0 \right) = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{p^2 - p^2 - \beta^2}{p^2 + \beta^2} \right) = \\ &= \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Диференціювання зображення або множення оригіналу на t

Диференціюванню зображення відповідає алгебраїчна операція множення оригіналу на $(-t)$, тобто

$$\boxed{t^n f(t) \rightleftharpoons (-1)^n F^{(n)}(p)}. \quad (3.23)$$

Доведення. Формально маємо

$$\begin{aligned} (F(p))' &= \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right)' = \int_0^\infty f(t) (-te^{-pt}) dt = \\ &= \int_0^\infty (-tf(t)) e^{-pt} dt \rightleftharpoons -tf(t) \end{aligned}$$

і т. д.

Приклад 3.9. Знайти зображення степеневої функції $t^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Оскільки $1 \rightleftharpoons \frac{1}{p}$, то

$$t^n = t^n \cdot 1 \rightleftharpoons (-1)^n \left(\frac{1}{p} \right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

$$\boxed{t^n \rightleftharpoons \frac{n!}{p^{n+1}}}. \quad (3.24)$$

Далі пропонуємо читачеві, використовуючи формули (3.7), (3.8), (3.9), самостійно отримати такі зображення:

$$\boxed{t^n e^{\alpha t} \rightleftharpoons \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}}. \quad (3.25)$$

$$\boxed{t \cos \beta t \doteq \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}} \quad (3.26)$$

$$\boxed{t \sin \beta t \doteq \frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}} \quad (3.27)$$

Зазначимо, що формулу (3.25) можна також отримати з виразу (3.24), застосовуючи теорему зміщення до оригіналу $f(t) = t^n$.

Інтегрування оригіналу

Інтегруванню оригіналу відповідає алгебраїчна операція ділення відповідного зображення на p , а саме

$$\boxed{\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}} \quad (3.28)$$

Доведення. Дійсно, оскільки функція $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ разом із $f(t)$ є оригіналами і $g(0) = \int_0^0 f(\tau) d\tau = 0$, то, за правилом диференціювання оригіналу (3.19), маємо

$$f(t) = \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)' = g'(t) \doteq pG(p) = F(p) \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Приклад 3.10. Знайти оригінал за зображенням $\frac{1}{p(p^2+1)}$.

Спочатку розглянемо дріб $\frac{1}{p^2+1}$. За формулою (3.18), маємо $F(p) = \frac{1}{p^2+1} \doteq \sin t = f(t)$. Застосуємо правило інтегрування оригіналу (3.28):

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p(p^2 + 1)} \doteq \int_0^t \underbrace{\sin \tau}_{f(\tau)} d\tau = -\cos \tau \Big|_0^t = -\cos t + 1.$$

Приклад 3.11. Знайти зображення оригіналу $h(t)$, який дорівнює періодичній послідовності трикутних імпульсів (рис. 3.8).

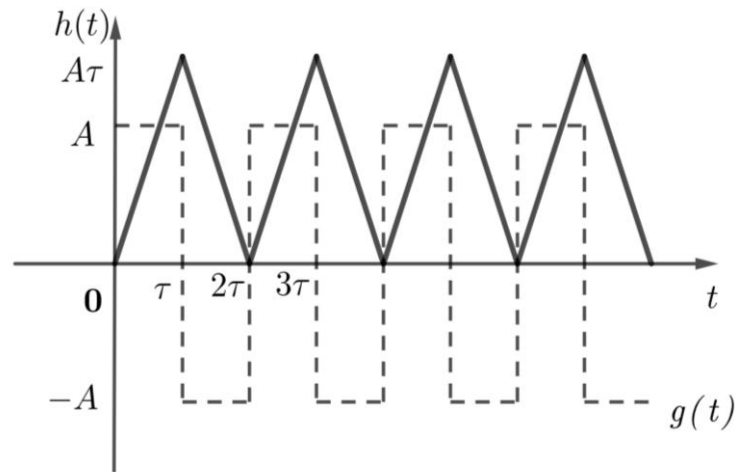


Рис. 3.8. Періодична послідовність трикутних імпульсів із прикладу 3.11

Цей періодичний імпульс можна записати за допомогою інтеграла

$$h(t) = \int_0^t g(z) dz,$$

де $g(t)$ оригінал, зображений на рис. 3.6.

За формулами (3.14), (3.28), маємо

$$h(t) \doteq \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} = \frac{A}{p^2} \cdot th \frac{p\tau}{2}. \quad (3.29)$$

Пропонуємо самостійно одержати результат (3.29), застосовуючи формулу (3.6) до періодичного оригіналу $h(t)$.

Інтегрування зображення

Інтегруванню зображення відповідає алгебраїчна операція ділення відповідного оригіналу на t . Точніше, нехай $f(t) \doteq F(p)$, $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналом, інтеграл $\int_p^\infty F(z)dz$ збігається, тоді

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z)dz, \quad (3.30)$$

де шлях інтегрування лежить у півплощині $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Доведення. Позначимо $\Phi(p)$ зображення оригіналу $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \Phi(p).$$

Застосуємо до цього співвідношення формулу (3.23):

$$f(t) = t \frac{f(t)}{t} \doteq -(\Phi(p))' \Rightarrow \Phi(p) = - \int F(p)dp.$$

Оскільки $\Phi(\infty) = 0$, то $\frac{f(t)}{t} \doteq - \int_\infty^p F(z)dz = \int_p^\infty F(z) dz$.

Приклад 3.12. Знайти зображення інтегрального синуса $Si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Маємо

$$\sin t \doteq \frac{1}{1+p^2} \Rightarrow \frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dz}{1+z^2} = \arctg z|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p = \operatorname{arcctg} p.$$

Тому, за властивістю інтегрування оригіналу, $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$.

$$\boxed{Si(t) \doteq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}}.$$

Граничні співвідношення

Наступні співвідношення пов'язують «початкові» і «кінцеві» значення оригіналів і зображень.

1. Нехай $f(t), f'(t)$ є оригіналами, тоді

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0). \quad (3.31)$$

Дійсно, із формули (3.21), урахувавши, що оригінал прямує до нуля, коли $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$, маємо $f'(t) \doteq pF(p) - f(0) \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} 0$. Отже, $pF(p) \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} f(0)$.

2. Нехай $f(t), f'(t)$ є оригіналами, та існує $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, тоді

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)}. \quad (3.32)$$

Доведення. Перейдемо до границі, коли $p \rightarrow 0, |\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0$, у співвідношенні $\int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$. Маємо

$$\int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0) \Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \underbrace{\int_0^\infty f'(t) dt}_{f(\infty) - f(0)} = f(\infty).$$

З формули (3.32) випливає, що

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} d\tau = \int_0^{\infty} F(p) dp. \quad (3.33)$$

Дійсно, застосуємо до формули інтегрування зображення (3.30)

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} F(z) dz \quad \text{формулу інтегрування оригіналу} \quad (3.28)$$

$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \int_p^{\infty} F(z) dz$. Далі застосуємо формулу (3.32):

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \int_p^{\infty} F(z) dz = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \Rightarrow \int_0^{\infty} F(p) dp = \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Приклад 3.13. Обчислити інтеграл Діріхле $\int_0^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Застосуємо формулу (3.33): $\int_0^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \frac{1}{p^2+1} dp = \arctg p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 3.14. Використовуючи формулу (3.33), самостійно обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau}{\tau} d\tau$. (Відповідь: $\text{arcctg} \frac{\alpha}{\beta}$.)

3.1.3. Теорема множення

Ці теореми, як буде показано нижче, відіграють важливу роль, застосовуючи перетворення Лапласа для розв'язання диференціальних рівнянь.

Визначення 3.4. Згортою оригіналів $f(t)$ та $g(t)$ називають функцію

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad (3.34)$$

яку позначають так: $f * g$.

Згортка підпорядкована переставному закону $f * g = g * f$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau &= \left| \begin{matrix} z = t - \tau \\ dz = -d\tau \end{matrix} \right| = \\ &= \int_t^0 f(z)g(t - z)(-dz) = \int_0^t g(t - z)f(z)dz. \end{aligned}$$

Отже,

$$f * g = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t - \tau)f(\tau)d\tau = g * f.$$

Теорема 3.2. Бореля про множення зображень (про зображення згортки).

Нехай $f \doteq F; g \doteq G$, тоді

$$f * g \doteq F \cdot G, \quad (3.35)$$

тобто зображення згортки дорівнює добутку відповідних зображень.

Доведення. Зображення згортки $f * g$ дорівнює $\int_0^\infty e^{-pt}(f * g) dt$.

Це повторний інтеграл. Область інтегрування відповідного подвійного інтеграла $D = \{0 \leq t < \infty, 0 \leq \tau \leq t\}$ (рис. 3.9).

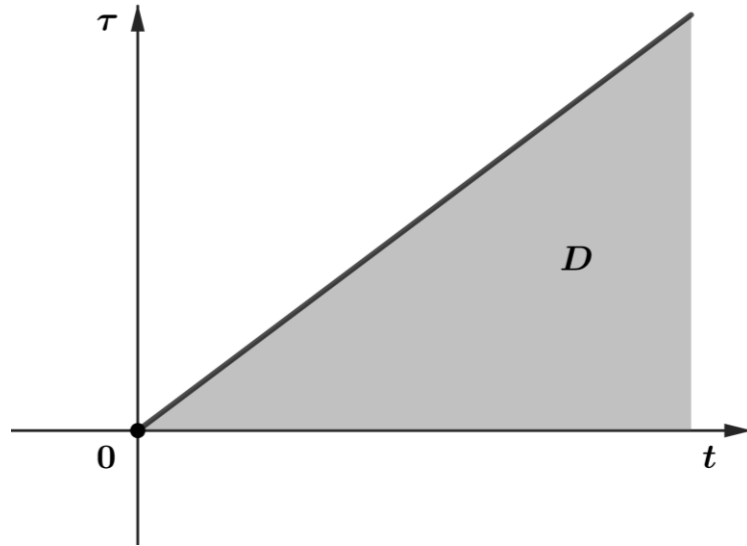


Рис. 3.9. Область інтегрування з доведення теореми 3.2

Цей подвійний інтеграл збігається абсолютно, тому можна змінити порядок інтегрування:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) dt &= \int_0^{\infty} g(\tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt \right) d\tau = \\
 &= \left| \begin{matrix} t - \tau = u \\ dt = du \end{matrix} \right| = \int_0^{\infty} g(\tau) \left(\int_0^{\infty} e^{-(u+\tau)t} f(u) du \right) d\tau = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-ut} f(u) du \int_0^{\infty} e^{-\tau t} g(\tau) d\tau = F(t) \cdot G(t).
 \end{aligned}$$

У застосуваннях корисним є наслідок теореми Бореля стосовно знаходження оригіналу добутку $pF(p)G(p)$.

Теорема 3.3. Формула Дюамеля. Якщо $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, $g(t) \rightleftharpoons G(p)$, то

$$pF(p)G(p) \rightleftharpoons f(0)g(t) + f' * g = g(0)f(t) + g' * f. \quad (3.36)$$

Дійсно, із формул (3.21), (3.35) і внаслідок симетрії згортки маємо

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &= f(0)G(p) + \underbrace{(pF(p) - f(0))}_{\mathcal{F}\{f'(t)\}} \cdot G(p) \doteq f(0)g(t) + f' * g = \\ &= g(0)f(t) + g' * f. \end{aligned}$$

3.1.4. Теорема розкладання

Перша теорема розкладання

Нехай функція $F(p)$ аналітична в околі ∞ і $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, тобто існує таке $R > 0$, що ряд Лорана функції $F(p)$ має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},$$

якщо $|p| > R$.

Тоді $F(p)$ є зображенням оригіналу

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Друга теорема розкладання

Нехай зображення $F(p)$ має лише скінченну кількість особливих точок $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тоді

$$F(p) \doteq f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} e^{pt} F(p).$$

Зокрема, якщо $F(p)$ дорівнює правильному раціональному дробу $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, у якому всі корені $p_1, p_2, \dots, p_n$ знаменника $Q(p)$ попарно відмінні, то

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_k e^{p_k t} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}. \quad (3.37)$$

Наостанок зазначимо, що в дод. 1 можна знайти зображення більшості оригіналів, які зустрічаються на практиці.

3.2. Операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь і систем

Операційним методом називають метод розв'язання ЛДР за допомогою перетворення Лапласа. Він дає змогу звести ЛДР зі сталими коефіцієнтами до розв'язання алгебраїчного рівняння, яке називають **операторним**. Щоб розв'язати задачу Коші

$$l[y] = p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_0 y = f(t),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

застосуємо до обох частин ЛДР перетворення Лапласа. Ураховуючи початкові умови, для зображення $Y(p)$ розв'язку $y(t)$ одержуємо алгебраїчне операторне рівняння. Розв'язавши його, знайдемо $Y(p)$. Далі, використовуючи властивості перетворення Лапласа, теореми про розкладання і таблицю зображень і оригіналів (дод. 1), знаходимо відповідний оригінал-розв'язок $y(t)$.

Також ми будемо використовувати такий факт. Нехай правильний раціональний дріб має вигляд $\frac{P(p)}{(p-a)^n Q(p)}$, де $Q(a) \neq 0$, отже,

$$\frac{P(p)}{(p-a)^n Q(p)} = \frac{A_1}{(p-a)^n} + \frac{A_2}{(p-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{p-a} + \text{найпростіші}$$

дроби, які відповідають кореням многочлена $Q(p)$. Тоді

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{P(p)}{Q(p)} \right)^{(k-1)} \Big|_{p=a}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.38)$$

Зокрема, якщо дріб дорівнює ($Q(a) \neq 0$), то

$$\frac{P(p)}{(p-a)Q(p)} = \frac{A}{p-a} + \dots, \text{ то } A = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad (3.39)$$

а якщо дорівнює ($Q(a) = 0$), то

$$\frac{P(p)}{(p-a)^2 Q(p)} = \frac{A}{(p-a)^2} + \frac{B}{p-a} + \dots, \text{ то } A = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad B = \left(\frac{P(p)}{Q(p)} \right)' \Big|_{p=a}. \quad (3.40)$$

Розглянемо цю схему на прикладах.

Приклад 3.15. Розв'язати задачу Коші

$$y' + 5y = 3e^{-2t}, \quad y(0) = 4. \quad (3.41)$$

Нехай

$$y(t) \doteq Y(p).$$

Тоді, за формулою (3.21), диференціюємо оригінал:

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 4.$$

Оскільки, за формулою (3.7),

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha},$$

то $e^{-2t} \doteq \frac{1}{p + 2}.$

Застосуємо до обох частин ДР (3.41) перетворення Лапласа і одержимо операторне рівняння

$$pY(p) - 4 + 5Y(p) = \frac{3}{p + 2}.$$

Розв'яжемо його та знайдемо зображення $Y(p)$ розв'язку задачі Коші:

$$Y(p) = \frac{4}{p + 5} + \frac{3}{(p + 5)(p + 2)}. \quad (3.42)$$

Знайдемо зображення кожного з цих доданків:

$$\frac{4}{p + 5} \doteq 4e^{-5t}. \quad (3.43)$$

Другий доданок розкладемо на найпростіші дробі:

$$\frac{1}{(p + 5)(p + 2)} = \frac{A}{p + 5} + \frac{B}{p + 2},$$

коефіцієнти яких знайдемо за формулою (3.39):

$$A = \frac{1}{p+2} \Big|_{p=-5} = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{p+5} \Big|_{p=-2} = \frac{1}{3}.$$

Тому

$$\frac{3}{(p+5)(p+2)} \doteq -e^{-5t} + e^{-2t}. \quad (3.44)$$

Отже, ураховуючи формули (3.42)-(3.44), маємо

$$Y(p) \doteq 4e^{-5t} - e^{-5t} + e^{-2t} = 3e^{-5t} + e^{-2t} = y(t).$$

Відповідь: $y(t) = 3e^{-5t} + e^{-2t}$.

Приклад 3.16. Розв'язати задачу Коші

$$y' - 2y = 5e^{2t}, \quad y(0) = -3. \quad (3.45)$$

Аналогічно попередньому прикладу маємо

$$y(t) \doteq Y(p), \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) + 3.$$

$$e^{2t} \doteq \frac{1}{p-2}.$$

Тому операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.45), є таким:

$$pY(p) + 3 - 2Y(p) = \frac{5}{p-2},$$

звідки

$$Y(p) = -\frac{3}{p-2} + \frac{5}{(p-2)^2}.$$

Першому доданку відповідає оригінал $-3e^{2t}$.

За формулою (3.25),

$$\frac{5}{(p-2)^2} \doteq 5te^{2t}.$$

Тому

$$Y(p) \doteq -3e^{2t} + 5te^{2t} = y(t).$$

Відповідь: $y(t) = -3e^{2t} + 5te^{2t}$.

Приклад 3.17. Розв'язати задачу Коші

$$y' + 4y = 3 \cos 2t, \quad y(0) = -5. \quad (3.46)$$

Маємо

$$y(t) \doteq Y(p), \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) + 5.$$

Крім того, за формулою (3.8),

$$\cos 2t \doteq \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Тому операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.46), є таким:

$$pY(p) + 5 + 4Y(p) = \frac{3p}{p^2 + 4},$$

звідки

$$Y(p) = -\frac{5}{p+4} + \frac{3p}{(p+4)(p^2+4)}.$$

Першому доданку відповідає оригінал $-5e^{-4t}$. Для знаходження оригіналу, який відповідає другому доданку, розкладемо цей доданок на найпростіші дроби:

$$\frac{3p}{(p+4)(p^2+4)} = \frac{A}{p+4} + \frac{Bp+C}{p^2+4}. \quad (3.47)$$

Коефіцієнт A знайдемо за формулою (3.39):

$$A = \left. \frac{3p}{p^2+4} \right|_{p=-4} = -\frac{12}{20} = -\frac{6}{10}.$$

Коефіцієнти B, C знайдемо методом невизначених коефіцієнтів. Прирівнюючи чисельники в правій і лівій частинах рівності (3.47), після приведення в правій частині до спільного знаменника, маємо

$$3p = A(p^2+4) + (Bp+C)(p+4) = (A+B)p^2 + (4B+C)p + 4A+4C.$$

Звідси

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 4B + C = 3, \\ 4A + 4C = 0. \end{cases}$$

Але ми вже знайшли, що $A = -\frac{6}{10}$. Тому $B = \frac{6}{10}$, $C = \frac{6}{10}$.

Отже, використовуючи формули (3.8), (3.9), маємо

$$\begin{aligned} \frac{3p}{(p+4)(p^2+4)} &= -\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{p+4} + \frac{6}{10} \cdot \frac{p+1}{p^2+4} = \\ &= -\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{p+4} + \frac{6}{10} \cdot \frac{p}{p^2+4} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{p^2+4} \doteq \\ &\doteq -\frac{6}{10} e^{-4t} + \frac{6}{10} \cos 2t + \frac{3}{10} \sin 2t. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} Y(p) &\doteq -5e^{-4t} - \frac{6}{10} e^{-4t} + \frac{6}{10} \cos 2t + \frac{3}{10} \sin 2t = \\ &= -\frac{56}{10} e^{-4t} + \frac{6}{10} \cos 2t + \frac{3}{10} \sin 2t = y(t). \end{aligned}$$

Відповідь: $y(t) = -\frac{56}{10} e^{-4t} + \frac{6}{10} \cos 2t + \frac{3}{10} \sin 2t$.

Приклад 3.18. Розв'язати задачу Коші

$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad (3.48)$$

де $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$ (рис. 3.10).

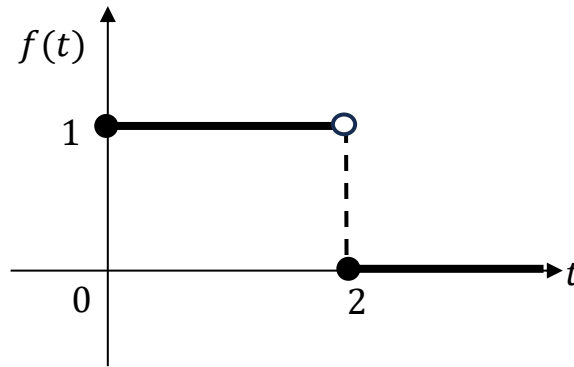


Рис. 3.10. Функція $f(t)$ із прикладу 3.18

Маємо

$$y(t) \doteq Y(p), \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p).$$

Запишемо праву частину $f(t)$ (3.48) за допомогою функції Хевісайда $\eta(t)$:

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t - 2).$$

Тому, за теоремою запізнювання,

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p}.$$

Отже, операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.48), є таким:

$$pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p},$$

звідки

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{e^{-2p}}{p(p+1)}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \doteq 1 - e^{-t},$$

то знову, за теоремою запізнювання,

$$\frac{e^{-2p}}{p(p+1)} \doteq \eta(t-2)(1 - e^{-(t-2)}).$$

Тому

$$Y(p) \doteq 1 - e^{-t} + \eta(t-2)(1 - e^{-(t-2)}) = y(t).$$

Відповідь: $y(t) = 1 - e^{-t} + \eta(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$.

Приклад 3.19. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^{-5t}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 7. \quad (3.49)$$

Нехай

$$y(t) \doteq Y(p),$$

тоді, за формулами (3.21), (3.22), диференціюємо оригінал:

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) + 1,$$

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + p - 7.$$

Крім того,

$$e^{-5t} \doteq \frac{1}{p+5}.$$

Тому операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.49), є таким:

$$p^2 Y(p) + p - 7 - 5(pY(p) + 1) + 6Y(p) = \frac{4}{p+5},$$

звідки

$$(p^2 - 5p + 6)Y(p) = -p + 12 + \frac{4}{p+5} = \frac{-p^2 + 7p + 64}{p+5}.$$

Тому

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-p^2 + 7p + 64}{(p^2 - 5p + 6)(p+5)} = \frac{-p^2 + 7p + 64}{(p-2)(p-3)(p+5)} = \\ &= \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+5}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти A, B, C знайдемо за формулою (3.39):

$$A = \frac{-p^2 + 7p + 64}{(p-3)(p+5)} \Big|_{p=2} = -\frac{74}{7},$$

$$B = \frac{-p^2 + 7p + 64}{(p-2)(p+5)} \Big|_{p=3} = \frac{19}{2},$$

$$C = \frac{-p^2 + 7p + 64}{(p-2)(p-3)} \Big|_{p=-5} = \frac{1}{14}.$$

Тому

$$\begin{aligned} Y(p) &= -\frac{74}{7} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{19}{2} \cdot \frac{1}{p-3} + \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{p+5} \doteq \\ &\doteq -\frac{74}{7} e^{2t} + \frac{19}{2} e^{3t} + \frac{1}{14} e^{-5t} = y(t). \end{aligned}$$

Відповідь: $y(t) = -\frac{74}{7} e^{2t} + \frac{19}{2} e^{3t} + \frac{1}{14} e^{-5t}.$

Приклад 3.20. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 16y = 5e^{3t}, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \quad (3.50)$$

Маємо

$$y(t) \doteq Y(p),$$

$$y''(t) \doteq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) + 2p - 1,$$

$$e^{3t} \doteq \frac{1}{p-3}.$$

Тому операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.50), є таким:

$$p^2 Y(p) + 2p - 1 + 16Y(p) = \frac{5}{p-3},$$

звідки

$$(p^2 + 16)Y(p) = -2p + 1 + \frac{5}{p-3} = \frac{-2p^2 + 7p + 2}{p-3}.$$

Тому

$$Y(p) = \frac{-2p^2 + 7p + 2}{(p-3)(p^2 + 16)} = \frac{A}{p-3} + \frac{Bp + C}{p^2 + 16}. \quad (3.51)$$

Коефіцієнт A знайдемо за формулою (3.39):

$$A = \left. \frac{-2p^2 + 7p + 2}{p^2 + 16} \right|_{p=3} = \frac{1}{5}.$$

Коефіцієнти B, C знайдемо методом невизначених коефіцієнтів.

Прирівнюючи чисельники в правій і лівій частинах рівності (3.51), після приведення в правій частині до спільного знаменника, маємо

$$\begin{aligned} -2p^2 + 7p + 2 &= A(p^2 + 16) + (Bp + C)(p - 3) = \\ &= (A + B)p^2 + (-3B + C)p + 16A - 3C, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{cases} A + B = -2, \\ -3B + C = 7, \\ 16A - 3C = 2. \end{cases}$$

Але ми вже знайшли, що $A = \frac{1}{5}$. Тому

$$B = -2 - A = -2 - \frac{1}{5} = -\frac{11}{5}, \quad C = 7 + 3B = 7 - \frac{33}{5} = \frac{2}{5}.$$

Отже, використовуючи формули (3.8), (3.9), маємо

$$\begin{aligned}
 Y(p) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-3} + \frac{-\frac{11}{5}p + \frac{2}{5}}{p^2 + 16} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-3} - \frac{11}{5} \cdot \frac{p}{p^2 + 16} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{p^2 + 16} \doteq \\
 &\doteq \frac{1}{5} e^{3t} - \frac{11}{5} \cos 4t + \frac{1}{10} \sin 4t = y(t).
 \end{aligned}$$

Відповідь: $y(t) = \frac{1}{5} e^{3t} - \frac{11}{5} \cos 4t + \frac{1}{10} \sin 4t$.

Приклад 3.21. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 6y' + 9y = 5e^{2t}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -6. \quad (3.52)$$

Маємо

$$y(t) \doteq Y(p),$$

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 4,$$

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 4p + 6,$$

$$e^{2t} \doteq \frac{1}{p-2}.$$

Тому операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.52), є таким:

$$p^2Y(p) - 4p + 6 + 6(pY(p) - 4) + 9Y(p) = \frac{5}{p-2},$$

звідки

$$(p^2 + 6p + 9)Y(p) = 4p + 18 + \frac{5}{p-2} = \frac{4p^2 + 10p - 31}{p-2}.$$

Тому

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{4p^2 + 10p - 31}{(p-2)(p^2 + 6p + 9)} = \frac{4p^2 + 10p - 31}{(p-2)(p+3)^2} = \\ &= \frac{A}{p-2} + \frac{B}{(p+3)^2} + \frac{C}{p+3}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт A знайдемо за формулою (3.39), а коефіцієнти B , C за формулою (3.40):

$$A = \left. \frac{4p^2 + 10p - 31}{(p+3)^2} \right|_{p=2} = \frac{1}{5},$$

$$B = \left. \frac{4p^2 + 10p - 31}{p-2} \right|_{p=-3} = 5,$$

$$C = \left(\frac{4p^2 + 10p - 31}{p-2} \right)' \Big|_{p=-3} = \frac{4p^2 - 16p + 11}{(p-2)^2} \Big|_{p=-3} = \frac{19}{5}.$$

Отже, використовуючи формулу (3.25), маємо

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-2} + 5 \frac{1}{(p+3)^2} + \frac{19}{5} \cdot \frac{1}{p+3} \doteq \\ &\doteq \frac{1}{5} e^{2t} + 5te^{-3t} + \frac{19}{5} e^{-3t} = y(t). \end{aligned}$$

Відповідь: $y(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + 5te^{-3t} + \frac{19}{5}e^{-3t}$.

Приклад 3.22. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = 7 \sin 2t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5. \quad (3.53)$$

Маємо

$$y(t) \doteq Y(p),$$

$$y''(t) \doteq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 3p - 5,$$

$$\sin 2t \doteq \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Тому операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.53), є таким:

$$p^2 Y(p) - 3p - 5 + 4Y(p) = \frac{14}{p^2 + 4},$$

звідки

$$(p^2 + 4)Y(p) = 3p + 5 + \frac{14}{p^2 + 4}.$$

Тому

$$Y(p) = \frac{3p}{p^2 + 4} + \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{14}{(p^2 + 4)^2}.$$

Використовуючи формули (3.8), (3.9), знаходимо оригінали, які відповідають першим двом доданкам:

$$\frac{3p}{p^2 + 4} = 3 \cdot \frac{p}{p^2 + 4} \doteq 3 \cos 2t,$$

$$\frac{5}{p^2 + 4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 4} \doteq \frac{5}{2} \sin 2t.$$

Для знаходження оригіналу, який відповідає третьому доданку, використовуємо теорему Бореля:

$$\begin{aligned} \frac{14}{(p^2 + 4)^2} &= \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 4} \cdot \frac{2}{p^2 + 4} \doteq \frac{7}{2} \sin 2t * \sin 2t = \\ &= \frac{7}{2} \int_0^t \sin 2(t - \tau) \sin 2\tau \, d\tau = \\ &= \frac{7}{2} \int_0^t (\sin 2t \cos 2\tau - \cos 2t \sin 2\tau) \sin 2\tau \, d\tau = \\ &= \frac{7}{2} \left[\frac{\sin 2t}{2} \int_0^t \sin 2\tau \, d(\sin 2\tau) - \cos 2t \int_0^t \frac{1 - \cos 4\tau}{2} d\tau \right] = \\ &= \frac{7}{2} \left[\frac{\sin 2t}{4} \sin^2 2t - \frac{\cos 2t}{2} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{7}{2} \left[\frac{\sin 2t}{4} \left(\frac{1 - \cos 4t}{2} \right) - \frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{\cos 2t \sin 4t}{8} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{7}{2} \left[\frac{\sin 2t}{8} - \frac{1}{8} (\sin 2t \cos 4t - \cos 2t \sin 4t) - \frac{1}{2} t \cos 2t \right] = \\
&= \frac{7}{2} \left(\frac{\sin 2t}{4} - \frac{1}{2} t \cos 2t \right) = \frac{7}{8} (\sin 2t - 2t \cos 2t).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
Y(p) &\doteq 3 \cos 2t + \frac{5}{2} \sin 2t + \frac{7}{8} (\sin 2t - 2t \cos 2t) = \\
&= 3 \cos 2t + \frac{27}{8} \sin 2t - \frac{7}{4} t \cos 2t = y(t).
\end{aligned}$$

Відповідь: $y(t) = 3 \cos 2t + \frac{27}{8} \sin 2t - \frac{7}{4} t \cos 2t$.

Розв'язують системи ЛДР операційним методом за аналогічною схемою.

Приклад 3.23. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x' = x - y, & x(0) = 3, \\ y' = 3x + 5y, & y(0) = -1. \end{cases} \quad (3.54)$$

Маємо

$$x(t) \doteq X(p), \quad x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 3,$$

$$y(t) \doteq Y(p), \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) + 1.$$

Тому **операторна система**, яка відповідає задачі (3.54), є такою:

$$\begin{cases} pX(p) - 3 = X(p) - Y(p), \\ pY(p) + 1 = 3X(p) + 5Y(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-p)X(p) - Y(p) = -3, \\ 3X(p) + (5-p)Y(p) = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо операторну систему за формулами Крамера. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-p & -1 \\ 3 & 5-p \end{vmatrix} = (1-p)(5-p) + 3 = p^2 - 6p + 8 = (p-2)(p-4),$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 5-p \end{vmatrix} = -15 + 3p + 1 = 3p - 14,$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 1-p & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - p + 9 = 10 - p.$$

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{3p - 14}{(p-2)(p-4)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p-4} =$$

$$= \left| A = \frac{3p-14}{p-4} \right|_{p=2} = 4, \quad B = \frac{3p-14}{p-2} \Big|_{p=4} = -1 \Big| =$$

$$= \frac{4}{p-2} - \frac{1}{p-4} \doteq 4e^{2t} - e^{4t} = x(t).$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{10-p}{(p-2)(p-4)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p-4} =$$

$$= \left| A = \frac{10-p}{p-4} \right|_{p=2} = -4, \quad B = \frac{10-p}{p-2} \Big|_{p=4} = 3 \Big| =$$

$$= \frac{-4}{p-2} + \frac{3}{p-4} \doteq -4e^{2t} + 3e^{4t} = y(t).$$

Відповідь: $x(t) = 4e^{2t} - e^{4t}$, $y(t) = -4e^{2t} + 3e^{4t}$.

Приклад 3.24. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x' = x + 2y, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + y + 1, & y(0) = 5. \end{cases}$$

Застосуємо для обох частин системи перетворення Лапласа.
Ураховуючи, що

$$\begin{aligned} x(t) &\doteq X(p); \\ y(t) &\doteq Y(p); \\ x'(t) &\doteq pX(p) - x(0) = pX(p); \\ y'(t) &\doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 5; \\ 1 &\doteq \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

для зображень $X(p), Y(p)$ розв'язків $x(t), y(t)$ одержуємо операторну систему

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 2Y(p), \\ pY(p) - 5 = 2X(p) + Y(p) + \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Розв'яжемо її за формулами Крамера:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = 0, \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = 5 + \frac{1}{p}. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3; \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 + \frac{1}{p} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{10p+2}{p};$$

$$\begin{aligned}
 X(p) &= \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{10p + 2}{p(p^2 - 2p - 3)} = \frac{10p + 2}{p(p - 3)(p + 1)} = \frac{-\frac{2}{3}}{p} + \frac{\frac{8}{3}}{p - 3} + \frac{-2}{p + 1} \doteq \\
 &\doteq -\frac{2}{3} + \frac{8}{3}e^{3t} - 2e^{-t}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $x(t) = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3}e^{3t} - 2e^{-t}$; $y(t)$ пропонуємо читачеві знайти самостійно.

Приклад 3.25. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x' + y = e^t, & x(0) = 3, \\ x + y' = e^{-t}, & y(0) = -4. \end{cases} \quad (3.55)$$

Маємо

$$x(t) \doteq X(p), \quad x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 3, \quad e^t \doteq \frac{1}{p - 1},$$

$$y(t) \doteq Y(p), \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) + 4, \quad e^{-t} \doteq \frac{1}{p + 1}.$$

Тому операторна система, яка відповідає задачі (3.55), є такою:

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} pX(p) - 3 + Y(p) = \frac{1}{p - 1}, \\ X(p) + pY(p) + 4 = \frac{1}{p + 1}. \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} pX(p) + Y(p) = 3 + \frac{1}{p - 1} = \frac{3p - 2}{p - 1}, \\ X(p) + pY(p) = -4 + \frac{1}{p + 1} = \frac{-4p - 3}{p + 1}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язуємо операторну систему за формулами Крамера. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{3p-2}{p-1} & 1 \\ -4p-3 & p \end{vmatrix} = \frac{3p^2-2p}{p-1} + \frac{4p+3}{p+1} = \frac{3p^3+5p^2-3p-3}{p^2-1},$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3p^3+5p^2-3p-3}{(p^2-1)^2} =$$

$$= 3 \frac{p^3}{(p^2-1)^2} + 5 \frac{p^2}{(p^2-1)^2} - \frac{3}{2} \frac{2p}{(p^2-1)^2} - 3 \frac{1}{(p^2-1)^2} \doteq$$

$$\doteq \left| \begin{array}{l} \text{За формулами} \\ 21, 20, 17, 19 \\ \text{із додатку 1} \end{array} \right| \doteq$$

$$\doteq 3 \left(ch t + \frac{t}{2} sh t \right) + \frac{5}{2} (sh t + t ch t) - \frac{3}{2} tsht - \frac{3}{2} (tch t - sh t) =$$

$$= 3ch t + 4sh t + t ch t = x(t).$$

$y(t)$ пропонуємо читачеві знайти самостійно.

Приклади (3.23) – (3.25) показують, що, розв'язуючи операційним методом задачі Коші для системи двох ЛДР, можна знайти тільки одну невідому функцію. Тоді як, розв'язуючи цю задачу класичним методом, знайти одну невідому функцію, не знаходячи іншу, було б неможливо.

Зазначимо, що операційний метод можна застосовувати для розв'язання СЛДР зі сталими коефіцієнтами, які мають векторну форму.

Дійсно, нехай потрібно розв'язати задачу Коші

$$\vec{y}'(t) = A \vec{y}(t) + \vec{f}(t), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0. \quad (3.56)$$

Застосуємо до обох частин системи (3.56) перетворення Лапласа і з урахуванням початкової умови одержимо **векторне операторне рівняння**

$$p \vec{Y}(p) - \vec{y}_0 = A \vec{Y}(p) + \vec{F}(p), \quad (3.57)$$

де $\vec{Y}(p) \doteq \vec{y}(t)$, $\vec{F}(p) \doteq \vec{f}(t)$.

З рівняння (3.57) знаходимо зображення $\vec{Y}(p)$ розв'язку $\vec{y}(t)$ задачі (3.56):

$$\vec{Y}(p) = -(A - p\mathbb{I})^{-1} (\vec{y}_0 + \vec{F}(p)). \quad (3.58)$$

Приклад 3.26. Розв'язати задачу Коші

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 5e^{-t} \\ -4e^{4t} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

$$\text{Тут } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - p\mathbb{I})^{-1} = \frac{1}{p^2 - 5p + 6} \begin{pmatrix} 4 - p & 1 \\ -2 & 1 - p \end{pmatrix}.$$

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{-t} \\ -4e^{4t} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \frac{5}{p+1} \\ -\frac{4}{p-4} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}_0 + \vec{F}(p) = \begin{pmatrix} \frac{5}{p+1} \\ \frac{7p-32}{p-4} \end{pmatrix}.$$

Тому, за формулою (3.58),

$$\begin{aligned}
 \vec{Y}(p) &= -\frac{1}{p^2 - 5p + 6} \begin{pmatrix} 4-p & 1 \\ -2 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{p+1} \\ \frac{7p-32}{p-4} \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{1}{p^2 - 5p + 6} \begin{pmatrix} \frac{20-5p}{p+1} + \frac{7p-32}{p-4} \\ -\frac{10}{p+1} + \frac{(1-p)(7p-32)}{p-4} \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{1}{(p-2)(p-3)(p+1)(p-4)} \begin{pmatrix} 2p^2 + 15p - 112 \\ -7p^3 + 32p^2 - 3p + 8 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{p-2} \begin{pmatrix} \frac{74}{6} \\ -\frac{74}{6} \end{pmatrix} + \frac{1}{p-3} \begin{pmatrix} -\frac{49}{4} \\ \frac{98}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{p+1} \begin{pmatrix} -\frac{125}{60} \\ \frac{50}{60} \end{pmatrix} + \frac{1}{p-4} \begin{pmatrix} \frac{20}{10} \\ -\frac{60}{10} \end{pmatrix} \doteq \\
 &\doteq e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{37}{3} \\ -\frac{37}{3} \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} -\frac{49}{4} \\ \frac{49}{2} \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{25}{12} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{y}(t).
 \end{aligned}$$

3.3. Відгуки на спеціальні види впливу

Часто праву частину $f(t)$ диференціального рівняння

$$l[y] = p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_0 y = f(t)$$

можна трактувати як зовнішній вплив на систему, яку спостерігають і для якої характерні коефіцієнти $p_n, p_{n-1}, \dots, p_0$.

Розв'язок $y(t)$ ДР – це відгук системи на цей вплив (рис. 3.11).



Рис. 3.11. Відгук системи на зовнішній вплив

Наприклад, електричному колу на рис. 3.12 відповідає ДР $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \varepsilon$, де $q = q(t)$ - заряд, струм $i(t) = \dot{q}(t)$.

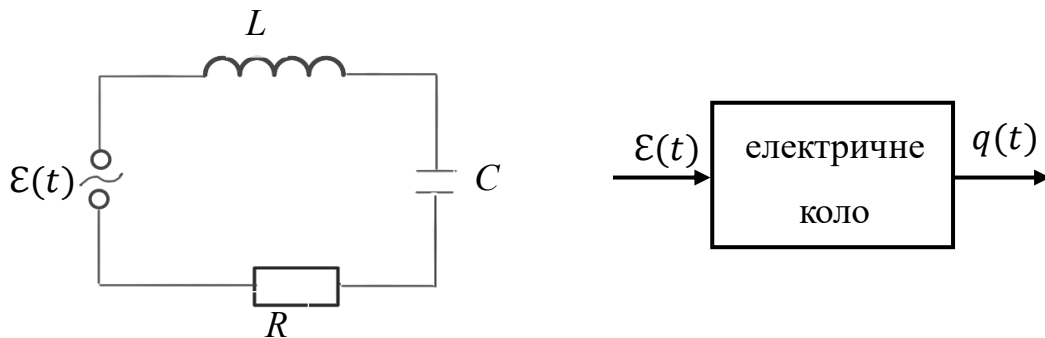


Рис. 3.12. Відгук системи на зовнішній вплив у випадку електричного кола

3.3.1. Імпульсна функція. Визначення, властивості

Імпульсною функцією або δ – функцією Дірака називають функцію $\delta(t)$, яка дорівнює границі функції $\delta_\tau(t)$:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t), \quad (3.60)$$

де функцію (оригінал) $\delta_\tau(t)$ визначають так (рис. 3.13):

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\tau}, & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t. \end{cases} \quad (3.61)$$

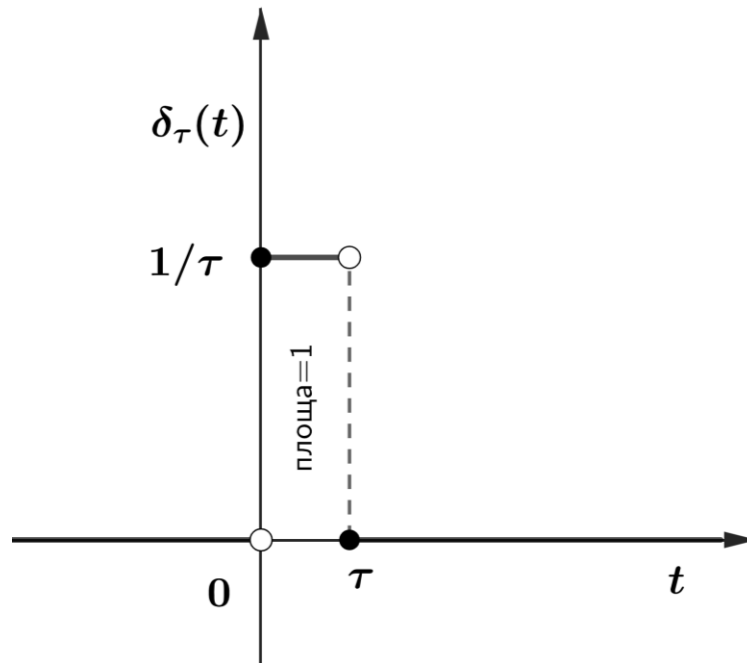


Рис. 3.13. Функція $\delta_\tau(t)$

Імпульсна функція не є звичайною функцією, оскільки вона має такі властивості:

$$1) \quad \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases}$$

Ця властивість безпосередньо впливає з формул (3.60), (3.61). Тобто $\delta(t)$ дорівнює нулю всюди, крім точки $t = 0$, де вони дорівнюють нескінченності.

$$2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Ця властивість впливає, з того що $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\tau(t) dt$, де інтеграл під знаком границі дорівнює 1.

Наведемо подальші властивості δ – функції (з формальними обґрунтуваннями).

$$3) \quad \delta(t) = \eta'(t), \text{ де } \eta(t) - \text{функція Хевісайда.}$$

Дійсно,

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\eta(t) - \eta(t - \tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\eta(t + (-\tau)) - \eta(t)}{-\tau} = \eta'(t).$$

4)

$$\boxed{\delta(t) \doteq 1} \quad (3.62)$$

Дійсно,

$$L[\delta(t)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} L[\delta_\tau(t)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-pt} dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{-p\tau} - 1}{-p\tau} = 1.$$

5) $f(t) * \delta(t) = f(t).$

За теоремою Бореля,

$$f(t) * \delta(t) \doteq F(p) \cdot 1 = F(p) \doteq f(t).$$

Властивість 5 можна також вивести, виходячи із визначення δ — функції.

Спочатку маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \delta(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \delta_\tau(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(t) dt = g(0), \quad (3.63)$$

оскільки, за теоремою про середнє значення, $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(t) dt = g(c)$, де $0 < c < \tau$ і, отже, $g(c) \rightarrow g(0)$, коли $\tau \rightarrow 0$.

А тепер із рівності (3.63) випливає, що

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = |f(t - \tau) = g_t(\tau)| = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(\tau) \delta(\tau) d\tau = g_t(0) = f(t). \end{aligned}$$

Приклад. 3.27. Знайти зображення нескінченної лінійної комбінації імпульсних функцій

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t - n).$$

Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t - n) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-pn}. \quad (3.64)$$

Дійсно,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t - n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t - n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-np}.^4$$

Зокрема, зображення оригіналу $\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n)$ (рис. 3.14), «складеного» з імпульсів $\delta(t - n)$, за формулою (3.64), дорівнює $\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} = \frac{1}{1 - e^{-p}}$. Пропонуємо також отримати цей результат самостійно за формулою (3.6).

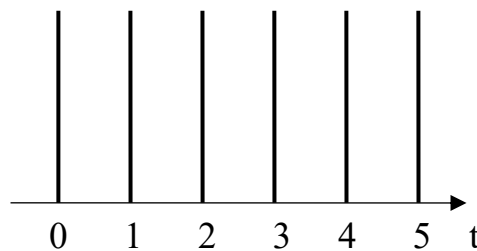


Рис. 3.14. До прикладу 3.27

⁴ $\int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t - n) dt = |t - n| = n - \tau = \int_{-\infty}^{2n} e^{-p(2n-\tau)} \delta(n - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(2n-\tau)} \delta(n - \tau) d\tau = e^{-pn}$, за властивістю 5 імпульсної функції.

3.3.1.1. Відгук на імпульсну функцію. Передавальна функція

Нехай $l(y)$ – лінійна диференціальна операція n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$l[y] = p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_0 y.$$

Розв'язок $z(t)$ задачі Коші

$$l[z] = \delta(t), \quad z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n)}(0) = 0 \quad (3.65)$$

називають **імпульсною характеристикою**, а її зображення $Z(p)$ - **передавальною функцією**.

Знайдемо передавальну функцію $Z(p)$.

Нехай $z(t) \doteq Z(p)$. Оскільки $z(t)$ задовольняє нульові початкові умови, то, за формулою (3.20),

$$z'(t) \doteq pZ(p), \quad z''(t) \doteq p^2 Z(p), \quad \dots, \quad z^{(n)}(t) \doteq p^n Z(p).$$

Тому з урахування формули (3.62) операторне рівняння для передавальної функції $Z(p)$ має вигляд

$$D(p)Z(p) = 1. \quad (3.66)$$

Тут $D(p)$ є характеристичним многочленом, який відповідає ДР (3.65):

$$D(p) = p_n p^n + p_{n-1} p^{n-1} + \dots + p_0.$$

З виразу (3.66) одержуємо, що передавальна функція $Z(p)$ дорівнює

$$Z(p) = \frac{1}{D(p)}. \quad (3.67)$$

Зазначимо, що з формули (3.67) випливає, що $z(t)$ дорівнює розв'язку ЛОДР $l[y] = 0$, який задовольняє початкові умови

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = \frac{1}{p_n}.$$

Знайдемо тепер за допомогою імпульсної характеристики відгук системи на довільний вплив $f(t)$ за нульових початкових умов, тобто знайдемо розв'язок задачі Коші:

$$l[y] = f(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (3.68)$$

У цьому випадку операторне рівняння для зображення $Y(p) \doteq y(t)$ є таким:

$$D(p)Y(p) = F(p),$$

де $F(p) \doteq f(t)$, звідки

$$Y(p) = \frac{1}{D(p)}F(p) = Z(p)F(p). \quad (3.69)$$

Отже, за нульових початкових умов зображення відгуку одержують множенням зображення впливу на передавальну функцію.

За теоремою Бореля, з рівності (3.69) випливає

$$y(t) = f(t) * z(t) = z(t) * f(t). \quad (3.70)$$

Формула (3.70) дає змогу знаходити розв'язок задачі Коші (3.68), не знаходячи зображення правої частини $f(t)$ ДР.

Приклад 3.28. Розв'язати задачу Коші

$$y' - 5y = 3e^{5t}, \quad y(0) = 0.$$

Передавальна функція $Z(p) = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{p-5} \doteq e^{5t} = z(t)$ – імпульсна характеристика, $f(t) = 3e^{5t}$. Тому, за формулою (3.70),

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) * f(t) = \int_0^t z(t-\tau)f(\tau)d\tau = \\ &= 3 \int_0^t e^{5(t-\tau)}e^{5\tau}d\tau = 3e^{5t} \int_0^t d\tau = 3te^{5t}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y(t) = 3te^{5t}$.

Приклад 3.29. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 7y' + 12y = 5e^{2t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Передавальна функція

$$Z(p) = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{p^2+7p+12} = \frac{1}{(p+3)(p+4)} = \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p+4} \doteq e^{-3t} - e^{-4t} = z(t)$$

– імпульсна характеристика, $f(t) = 5e^{2t}$. Тому, за формулою (3.70),

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) * f(t) = \int_0^t z(t-\tau)f(\tau)d\tau = 5 \int_0^t (e^{-3(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)})e^{2\tau}d\tau = \\ &= 5e^{-3t} \int_0^t e^{5\tau}d\tau - 5e^{-4t} \int_0^t e^{6\tau}d\tau = \end{aligned}$$

$$= 5e^{-3t} \left(\frac{1}{5} (e^{5t} - 1) \right) - 5e^{-4t} \left(\frac{1}{6} (e^{6t} - 1) \right) = -e^{-3t} + \frac{5}{6} e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{2t}.$$

Відповідь: $y(t) = -e^{-3t} + \frac{5}{6} e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{2t}$.

Приклад 3.30. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 16y = 7e^{3t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Передавальна функція $Z(p) = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{p^2+16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{p^2+16} \doteq \frac{1}{4} \sin 4t = z(t)$

– імпульсна характеристика, $f(t) = 7e^{3t}$. Тому, за формулою (3.70),

$$y(t) = z(t) * f(t) = \int_0^t z(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{4} \sin 4(t-\tau) 7e^{3\tau} d\tau =$$

$$= \frac{7}{4} \int_0^t (\sin 4t \cos 4\tau - \cos 4t \sin 4\tau) e^{3\tau} d\tau =$$

$$= \frac{7}{4} \sin 4t \int_0^t e^{3\tau} \cos 4\tau d\tau - \frac{7}{4} \cos 4t \int_0^t e^{3\tau} \sin 4\tau d\tau =$$

$$= \left| \int e^{\alpha\tau} \cos \beta \tau d\tau = \frac{e^{\alpha\tau}(\beta \sin \beta\tau + \alpha \cos \beta\tau)}{\alpha^2 + \beta^2} + C \right| =$$

$$\left| \int e^{\alpha\tau} \sin \beta \tau d\tau = \frac{e^{\alpha\tau}(\alpha \sin \beta\tau - \beta \cos \beta\tau)}{\alpha^2 + \beta^2} + C \right| =$$

$$= \frac{7}{4} \sin 4t \left(\frac{e^{3\tau}(4 \sin 4\tau + 3 \cos 4\tau)}{3^2 + 4^2} \Big|_0^t \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{7}{4} \cos 4t \left(\frac{e^{3\tau} (3 \sin 4\tau - 4 \cos 4\tau)}{3^2 + 4^2} \Big|_0^t \right) = \\
& = \frac{7}{100} \sin 4t (e^{3t} (4 \sin 4t + 3 \cos 4t) - 3) - \\
& - \frac{7}{100} \cos 4t (e^{3t} (3 \sin 4t - 4 \cos 4t) + 4) = \\
& = -\frac{21}{100} \sin 4t - \frac{28}{100} \cos 4t + \frac{7}{100} e^{3t} (4(\sin^2 4t + \cos^2 4t) + \\
& + 3 \sin 4t \cos 4t - 3 \cos 4t \sin 4t) = -\frac{21}{100} \sin 4t - \frac{28}{100} \cos 4t + \frac{28}{100} e^{3t}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $y(t) = -\frac{21}{100} \sin 4t - \frac{28}{100} \cos 4t + \frac{28}{100} e^{3t}$.

Приклад 3.31. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - y = \frac{1}{cht}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Передавальна функція

$$Z(p) = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{p^2 - 1} \doteq sh t = z(t) - \text{імпульсна характеристика.}$$

Тому

$$y(t) = z(t) * f(t) = \int_0^t z(t - \tau) f(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t sh(t-\tau) \frac{1}{ch\tau} d\tau = \int_0^t \frac{shtch\tau - chtsh\tau}{ch\tau} d\tau = tsht - cht \ln(cht).$$

Відповідь: $y(t) = tsht - cht \ln(cht)$.

Зазначимо, що розв'язок задачі Коші

$$l[y] = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \quad (3.71)$$

з ненульовими початковими умовами можна також знаходити, не знаходячи зображення правої частини ДР. А саме спочатку потрібно знайти розв'язок $y_0(t)$ задачі Коші з тими самими початковими умовами, але для відповідного однорідного ДР. Розв'язок задачі Коші (3.71) дорівнює сумі розв'язку $y_0(t)$ і розв'язку $y(t)$ (3.70).

Приклад 3.32. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{e^{3t}}{9 + e^{2t}}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (3.72)$$

Спочатку знаходимо розв'язок задачі Коші:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' - 3y &= 0, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.73), є таким (перевірте):

$$p^2 Y(p) - 2p - 2(pY(p) - 2) - 3Y(p) = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned}
 Y(p) &= \frac{2p-4}{p^2-2p-3} = \frac{2p-4}{(p-3)(p+1)} = \frac{1/2}{p-3} + \frac{3/2}{p+1} \doteq \\
 &\doteq \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{-t} = y(t).
 \end{aligned}
 \tag{3.74}$$

Далі знаходимо розв'язок задачі Коші:

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{e^{3t}}{9+e^{2t}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{3.75}$$

Передавальна функція

$$\begin{aligned}
 Z(p) &= \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{p^2-2p-3} = \frac{1}{(p-3)(p+1)} = \frac{1/4}{p-3} - \frac{1/4}{p+1} \doteq \\
 &\doteq \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}) = z(t).
 \end{aligned}$$

За формулою (3.70), розв'язок задачі (3.75) дорівнює

$$\begin{aligned}
 y(t) &= z(t) * f(t) = \frac{1}{4} \int_0^t (e^{3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)}) \frac{e^{3\tau}}{9+e^{2\tau}} d\tau = \\
 &= \frac{1}{4} \left[e^{3t} \int_0^t \frac{d\tau}{9+e^{2\tau}} - e^{-t} \int_0^t \frac{e^{4\tau}}{9+e^{2\tau}} d\tau \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.76}$$

Але (перевірте)

$$\int \frac{d\tau}{9+e^{2\tau}} = \frac{1}{9} \left[\tau - \frac{1}{2} \ln(e^{2\tau} + 9) \right] + C,$$

$$\int \frac{e^{4\tau} d\tau}{9 + e^{2\tau}} = \frac{1}{2} [e^{2\tau} - 9 \ln(e^{2\tau} + 9)] + C.$$

Тому розв'язок задачі (3.75) дорівнює

$$y(t) = \frac{1}{36} e^{3t} \left(t - \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2t} + 9}{10} \right) - \frac{1}{8} e^{-t} \left(e^{2t} - 1 - 9 \ln \frac{e^{2t} + 9}{10} \right). \quad (3.77)$$

Розв'язок задачі (3.72) дорівнює сумі розв'язків (3.74) і (3.77).

3.3.1.2. Відгук на одиничний стрибок. Формула Дюамеля

Розв'язок задачі Коші

$$l[z_1] = \eta(t), \quad z_1(0) = z_1'(0) = \dots = z_1^{(n-1)}(0) = 0, \quad (3.78)$$

де $\eta(t)$ – функція Хевісайда,

називають **перехідною характеристикою**.

Оскільки $z_1(t)$ задовольняє нульові початкові умови, то операторне рівняння, яке відповідає задачі (3.78), має вигляд

$$D(p)Z_1(p) = \frac{1}{p}, \quad (3.79)$$

оскільки $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$. З формули (3.79) одержуємо, що зображення $Z_1(p)$ перехідної характеристики дорівнює

$$Z_1(p) = \frac{1}{pD(p)}. \quad (3.80)$$

З формули (3.80) випливає, що

$$z_1'(t) \doteq pZ_1(p) = \frac{1}{D(p)} = Z(p) \doteq z(t).$$

Отже, імпульсна $z(t)$ і перехідна характеристики $z_1(t)$ пов'язані так:

$$z_1'(t) = z(t).$$

Знайдемо тепер за допомогою перехідною характеристики відгук системи на довільний вплив $f(t)$ за нульових початкових умов, тобто знайдемо розв'язок задачі Коші:

$$l[y] = f(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (3.81)$$

У цьому випадку операторне рівняння для зображення $Y(p) \doteq y(t)$ є таким:

$$D(p)Y(p) = F(p),$$

де $F(p) \doteq f(t)$,

звідки

$$Y(p) = \frac{1}{D(p)} F(p) = p \frac{1}{pD(p)} F(p) = pZ_1(p)F(p). \quad (3.82)$$

Тому, використовуючи теорему 3.3, одержуємо з формули (3.82) формулу для розв'язку задачі (3.81)

$$y(t) = z_1'(t) * f(t) = z_1(t)f(0) + z_1(t) * f'(t),$$

яку називають **формулою Дюамеля**.

Приклад 3.33. Розв'язати задачу Коші

$$y' - y = \frac{1}{e^t + 3}, \quad y(0) = 0.$$

Знаходимо перехідну характеристику $z_1(t)$. За формулою (3.80), маємо

$$z_1(t) \doteq Z_1(p) = \frac{1}{pD(p)} = \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \doteq e^t - 1.$$

Отже, $z_1(t) = e^t - 1$. Оскільки $f'(t) = \left(\frac{1}{e^t+3}\right)' = -\frac{e^t}{(e^t+3)^2}$, то, за формулою Дюамеля,

$$\begin{aligned} y(t) &= z_1(t)f(0) + \int_0^t z_1(t-\tau)f'(\tau)d\tau = (e^t - 1) \cdot \frac{1}{4} + \\ &+ \int_0^t (e^{t-\tau} - 1) \left(-\frac{e^\tau}{(e^\tau + 3)^2}\right) d\tau = \frac{e^t - 1}{4} - e^t \int_0^t \frac{d\tau}{(e^\tau + 3)^2} + \int_0^t \frac{e^\tau d\tau}{(e^\tau + 3)^2}. \end{aligned}$$

Але (перевірте)

$$\int_0^t \frac{d\tau}{(e^\tau + 3)^2} = \frac{1}{9}t - \frac{1}{12} - \frac{1}{9} \ln \frac{e^t + 3}{4} + \frac{1}{3(e^t + 3)},$$

$$\int_0^t \frac{e^\tau d\tau}{(e^\tau + 3)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{e^t + 3}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{e^t - 1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{e^t + 3} - e^t \left(\frac{1}{9}t - \frac{1}{12} - \frac{1}{9} \ln \frac{e^t + 3}{4} + \frac{1}{3(e^t + 3)} \right) = \\ &= \frac{1}{3}(e^t - 1) - \frac{1}{9}te^t + \frac{1}{9}e^t \ln \frac{e^t + 3}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y(t) = \frac{1}{3}(e^t - 1) - \frac{1}{9}te^t + \frac{1}{9}e^t \ln \frac{e^t + 3}{4}.$

3.3.1.3. Відгук на гармонічне збудження. Усталений режим

Розглянемо ЛНДР

$$l[y] = f(t) \tag{3.83}$$

n – го порядку зі сталими коефіцієнтами. Нехай характеристичний многочлен відповідного однорідного ДР є стійким, тобто в усіх його коренів λ_j , ($j = 1, 2, \dots, n$) дійсні частини є від'ємними: $Re \lambda_j < 0$.

Тому будь-який розв'язок однорідного ДР прямує до нуля з експоненціальною швидкістю, коли $t \rightarrow +\infty$.

Дійсно, якщо, наприклад, усі корені λ_j є попарно відмінними, то будь-який розв'язок однорідного ДР дорівнює деякій лінійній комбінації його розв'язків $e^{\lambda_j t}$.

Але модуль кожного з цих розв'язків дорівнює $|e^{\lambda_j t}| = e^{-Re \lambda_j t}$ і тому прямує до нуля з експоненціальною швидкістю, коли $t \rightarrow +\infty$.

Нехай тепер права частина ДР (3.83) є гармонічною, тобто

$$f(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}, \tag{3.84}$$

або

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.85)$$

або

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.86)$$

Будь-який розв'язок неоднорідного ДР (3.83) дорівнює сумі його частинного розв'язку $y_{\text{чн}}(t)$ і якогось розв'язку відповідного однорідного ДР, який з експоненціальною швидкістю прямує до нуля, коли $t \rightarrow +\infty$.

Знайдемо $y_{\text{чн}}(t)$ у випадку, коли права частина $f(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$. Шукаємо його у вигляді

$$y_{\text{чн}}(t) = Ke^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (3.87)$$

Для знаходження сталої K підставимо $y_{\text{чн}}(x)$ (3.87) у ДР (3.83), (3.84) і одержимо

$$D(i\omega)Ke^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Скорочуючи на $e^{i(\omega t + \varphi)}$, одержимо

$$K = \frac{1}{D(i\omega)}A = Z(i\omega)A,$$

де $Z(p)$ – передавальна функція.

Тому

$$y_{\text{чн}}(t) = Z(i\omega)Ae^{i(\omega t + \varphi)} = |Z(i\omega)|Ae^{i(\omega t + \varphi + \text{Arg } Z(i\omega))}. \quad (3.88)$$

Якщо права частина $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, то, вочевидь,

$$y_{\text{чн}}(t) = \operatorname{Re} Z(i\omega) A e^{i(\omega t + \varphi)} = |Z(i\omega)| A \cos(\omega t + \varphi + \operatorname{Arg} Z(i\omega)). \quad (3.89)$$

І нарешті, якщо права частина $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, то

$$y_{\text{чн}}(t) = \operatorname{Im} Z(i\omega) A e^{i(\omega t + \varphi)} = |Z(i\omega)| A \sin(\omega t + \varphi + \operatorname{Arg} Z(i\omega)). \quad (3.90)$$

Висновок. Нехай характеристичний многочлен $D(\lambda)$ ЛОДР $l[y] = 0$ зі сталими коефіцієнтами є стійким. Тоді, коли $t \rightarrow +\infty$, будь-який розв'язок ЛНДР $l[y] = f(t)$ з гармонічною правою частиною $f(t)$ або (3.84), або (3.85), або (3.86) наближається з експоненціальною швидкістю до його розв'язку або (3.88), або (3.89), або (3.90) відповідно, який одержують із правої частини $f(t)$ множенням її на $|Z(i\omega)|$ і збільшенням її фази на $\operatorname{Arg} Z(i\omega)$. Цей розв'язок називають **усталеним режимом**, а функцію $Z(i\omega)$, яка дорівнює передавальній функції $Z(p)$, коли $p = i\omega$, - **частотною характеристикою**.

Приклад 3.34. Для рівняння

$$6y^{IV} + 12y''' + 19y'' + 13y' + 6y = 100e^{i(1,5t+1)}$$

потрібно:

1) перевірити, що у відповідного однорідного ДР характеристичний многочлен стійкий;

2) знайти усталений режим.

Розв'язання

1. Перевіримо стійкість характеристичного многочлена

$$D(\lambda) = P_4(\lambda) = 6\lambda^4 + 12\lambda^3 + 19\lambda^2 + 13\lambda + 6$$

за критерієм Ерміта – Михайлова. Маємо

$$P_4(i\omega) = 6\omega^4 - i12\omega^3 - 19\omega^2 + i13\omega + 6 =$$

$$= 6\omega^4 - 19\omega^2 + 6 + i(13\omega - 12\omega^3) = u(\omega) + iv(\omega).$$

Схематично будуємо на комплексній площині криву

$$\begin{cases} u = 6\omega^4 - 19\omega^2 + 6, \\ v = 13\omega - 12\omega^3 \end{cases}, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

Знайдемо точки її перетину з осями u та v :

$$u(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{19 - \sqrt{217}}{12}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{19 + \sqrt{217}}{12}}.$$

$$v(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{13}{12}}.$$

Одержані результати заносимо до табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Таблиця до прикладу 3.34

ω	0	$\sqrt{\frac{19 - \sqrt{217}}{12}} \approx 0,60$	$\sqrt{\frac{13}{12}} \approx 1,04$	$\sqrt{\frac{19 + \sqrt{217}}{12}} \approx 1,68$
u	6	0	$\approx -7,54$	0
v	0	$\approx 5,21$	0	$\approx -35,04$

Виходячи з табл. 3.1 і враховуючи, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v(\omega)}{u(\omega)} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0,$$

де φ – кут між віссю u та вектором $P_4(i\omega)$,
зображуємо на рис. 3.15 шукану криву.

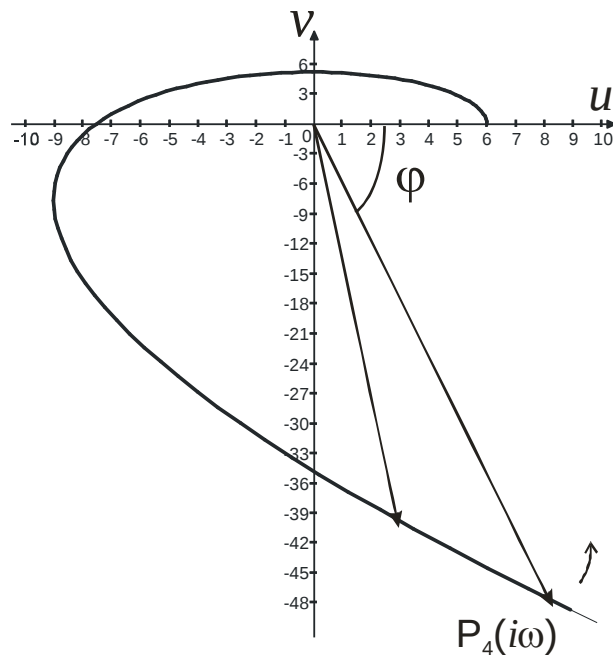


Рис. 3.15. Крива з прикладу 3.34

Бачимо, що вектор $P_4(i\omega)$ повертається на кут $\frac{4\pi}{2}$ зі зміною ω від 0 до $+\infty$, тобто робить чотири чверть-обертів. Оскільки $n = 4$, то многочлен $P_4(\lambda)$ є стійким, за критерієм Ерміта – Михайлова;

2. Знайдемо частотну характеристику:

$$Z(i\omega) = \frac{1}{D(i\omega)} = \frac{e^{-i\operatorname{Arg} D(i\omega)}}{|D(i\omega)|}.$$

У цьому прикладі $\omega = 1,5$,

$$\begin{aligned} D(i\omega) = D(i1,5) &= 6 \cdot 1,5^4 - i12 \cdot 1,5^3 - 19 \cdot 1,5^2 + i13 \cdot 1,5 + 6 = \\ &= -6,375 - 21i. \end{aligned}$$

Тому
$$Z(i1,5) = \frac{1}{\sqrt{(-6,375)^2 + (-21)^2}} e^{-i(\pi + \arctan \frac{21}{6,375})} \approx 0,0456 e^{-i4,42},$$

отже, ustalений режим дорівнює

$$\begin{aligned} |Z(i1,5)| \cdot 100 e^{i(1,5t+1+\arg Z(i1,5))} &\approx 0,0456 \cdot 100 e^{i(1,5t+1-4,42)} = \\ &= 4,56 e^{i(1,5t-3,42)}. \end{aligned}$$

3.4. Операційний метод розрахунку електричних кіл

Нехай $i(t)$ – струм, а $u(t)$ – напруга в електричному колі. Для основних його елементів мають місце такі співвідношення:

- для опору R – $u_R(t) = Ri(t)$;
- індуктивності L – $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$;
- ємності C – $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u_C(0)$.

Звідси, вважаючи, що $i(t)$ і $u(t)$ є оригіналами, для їхніх зображень $I(p)$ і $U(p)$ маємо

$$U_R(p) = RI(p),$$

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0),$$

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{1}{p} u_C(0).$$

Тому має місце **операторна форма закону Ома**

$$U(p) = \mathcal{Z}(p)I(p), \quad (3.91)$$

де $\mathcal{Z}(p)$ – операторний опір ділянки кола (не плутати з передавальною функцією $Z(p)$).

Для ділянок з опором R , індуктивністю L , ємністю C операторний опір за нульових початкових умов дорівнює відповідно

$$\mathcal{Z}_R(p) = R, \quad \mathcal{Z}_L(p) = pL, \quad \mathcal{Z}_C(p) = \frac{1}{pC}.$$

Формула (3.91) показує, що за нульових початкових умов передавальна функція та операторний опір $\mathcal{Z}(p)$ кола вигляду, як на рис. 3.12, пов'язані так:

$$Z(p) = \frac{1}{\mathcal{Z}(p)}.$$

Приклад 3.35. Знайти струм $i(t)$ у RL – колі, який виникає, якщо увімкнути ЕРС $\varepsilon(t) = E \sin \omega t$.

Оскільки початкові умови нульові та

$$\varepsilon(t) = E \sin \omega t \doteq \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2},$$

то операторне рівняння для $I(p)$ є таким:

$$RI(p) + pLI(p) = \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Замість знаходження з цього рівняння операторного струму $I(p)$ із наступним знаходженням відповідного оригіналу $i(t)$, знайдемо імпульсну характеристику $z(t)$ кола. Відповідне операторне рівняння для її зображення $Z(p)$ (передавальної функції) має вигляд

$$RZ(p) + pLZ(p) = 1,$$

звідки

$$Z(p) = \frac{1}{R + pL} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \doteq \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = z(t).$$

Тому

$$i(t) = z(t) * \varepsilon(t) = \frac{E}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \sin \omega \tau d\tau = \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} \sin \omega \tau d\tau,$$

звідки, використовуючи другий із наведених у прикладі (3.30) невизначених інтегралів, маємо

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left[\frac{e^{\frac{R}{L}\tau} \left(\frac{R}{L} \sin \omega \tau - \omega \cos \omega \tau \right)}{\left(\frac{R}{L} \right)^2 + \omega^2} \right]_0^t = \\ &= \frac{EL}{R^2 + (L\omega)^2} e^{-\frac{R}{L}t} \left[e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + \omega \right]. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$i(t) = \frac{EL}{R^2 + (L\omega)^2} \left(\omega e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right).$$

Приклад 3.36. Знайти струм $i(t)$ в RC – колі, який виникає, якщо увімкнути ЕРС $\varepsilon(t) = Ete^{-\frac{t}{CR}}$.

Розв’язання

1. За допомогою імпульсної характеристики $z(t)$.

Операторне рівняння для передавальної функції $Z(p)$ є таким:

$$RZ(p) + \frac{1}{pC}Z(p) = 1,$$

звідки

$$Z(p) = \frac{1}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2C} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \doteq \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2C} e^{-\frac{t}{RC}} = z(t).$$

Оскільки початкові умови нульові, то

$$\begin{aligned} i(t) = z(t) * \varepsilon(t) &= \frac{E}{R} \int_0^t \delta(t - \tau) \tau e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau - \frac{E}{R^2C} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \tau e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = \\ &= \frac{E}{R} t e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{E}{R^2C} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

2. За допомогою перехідної характеристики $z_1(t)$.

Операторне рівняння для зображення $Z_1(P)$ перехідної характеристики

$$RZ_1(p) + \frac{1}{pC}Z_1(p) = \frac{1}{p},$$

звідки

$$Z_1(p) = \frac{1}{R + \frac{1}{pC}} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \doteq \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = z_1(t) = z'(t).$$

Оскільки початкові умови нульові і $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon'(t) = E e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - \frac{t}{RC}\right)$,
то, за формулою Дюамеля,

$$\begin{aligned} i(t) &= \varepsilon'(t) * z_1(t) = \frac{E}{R} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \left(1 - \frac{t-\tau}{RC}\right) e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = \\ &= \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \left(\int_0^t d\tau - \frac{t}{RC} \int_0^t d\tau + \frac{1}{RC} \int_0^t \tau d\tau \right) = \\ &= \frac{E}{R} t e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{E}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Відповіді співпали.

$$\text{Відповідь: } i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \left(t - \frac{1}{RC} \cdot \frac{t^2}{2} \right).$$

3.5. Операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними

Застосування операційного методу для інтегрування лінійних ДР із частинними похідними проілюструємо на прикладі.

Приклад 3.37. Розрахунок довгої лінії.

До лівого кінця $x = 0$ нескінченної ізолюваної електричної лінії без втрат у момент $t = 0$ підключено ЕРС $\varepsilon(t)$. Знайти величину напруги $u(x, t)$ через час t від початкового моменту, якщо в момент підключення напруга та сила струму в лінії дорівнюють нулю.

Розв'язання

Задачу можна звести до знаходження розв'язку лінійного диференціального рівняння з частинними похідними [56]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{де } a = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (3.92)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

і крайову умову

$$u(0, t) = \varepsilon(t).$$

Перейдемо до операторного рівняння відносно аргумента t . Ураховуючи початкові умови, маємо

$$u(x, t) \doteq U(x, p),$$

$$u''_{tt}(x, t) \doteq p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - u'_t(x, 0) = p^2 U(x, p).$$

Операторне рівняння для $U(x, p)$ є звичайним ДР

$$p^2 U = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} \quad (3.93)$$

із крайовою умовою

$$U(0, p) = E(p), \text{ де } E(p) \doteq \varepsilon(t).$$

Загальний розв'язок рівняння (3.93) дорівнює

$$U(x, p) = C_1(p)e^{-\frac{px}{a}} + C_2(p)e^{\frac{px}{a}}.$$

Із фізичних міркувань випливає, що розв'язок $U(x, p)$ має бути обмеженим, коли $x \rightarrow +\infty$, і тому $C_2(p) = 0$. З крайової умови маємо $C_1(p) = U(0, p) = E(p)$.

Отже, $U(x, p) = E(p)e^{-\frac{px}{a}}$. За теоремою запізнювання знаходимо оригінал (напругу):

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{a} = x\sqrt{LC}, \\ \varepsilon(t - x\sqrt{LC}), & t \geq x\sqrt{LC}. \end{cases}$$

3.6. Операційний метод розв'язання інтегральних рівнянь

Застосування операційного методу для розв'язання інтегральних рівнянь проілюструємо на прикладі рівнянь вигляду

$$\int_0^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (3.94)$$

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad (3.95)$$

де $x(t)$ - невідома функція-оригінал;

$f(t), g(t)$ - задані функції-оригінали.

Розглянемо спочатку рівняння (3.95). Використовуючи теорему Бореля, маємо операторне рівняння

$$X(p) = F(p) + X(p) \cdot G(p),$$

розв'язком якого є

$$X(p) = \frac{F(p)}{1 - G(p)} = F(p) + \frac{G(p)}{1 - G(p)} F(p). \quad (3.96)$$

Можна показати, що функція $Q(p) = \frac{G(p)}{1 - G(p)}$ є зображенням деякого оригіналу $q(t)$. За теоремою Бореля, для рівняння (3.95) маємо

$$x(t) = f(t) + q(t) * f(t).$$

Розглянемо тепер рівняння (3.94). Операторне рівняння для (3.94) має вигляд

$$X(p)G(p) = F(p) \Rightarrow X(p) = \frac{F(p)}{G(p)}.$$

Але, на відміну від попереднього випадку, дріб $\frac{F(p)}{G(p)}$ не завжди є зображенням, оскільки він може не прямувати до нуля, коли $p \rightarrow \infty$ у будь-якій півплощині $Re\, p \geq \sigma > \sigma_0$ рівномірно відносно $arg\, p$.

Приклад 3.38. Розв'язати інтегральне рівняння

$$sht = \int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau)d\tau.$$

Складемо операторне рівняння, використовуючи теорему Бореля. Оскільки $x(t) \doteq X(p)$, $sht \doteq \frac{1}{p^2-1}$, $\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}$, то маємо $\frac{1}{p^2-1} = \frac{p}{p^2+1} \cdot X(p)$.

Тому

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p^2 + 1}{p(p-1)(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \doteq \\ &\doteq -1 + e^t + e^{-t} = -1 + 2cht. \end{aligned}$$

Відповідь: $x(t) = -1 + 2cht$.

Приклад 3.39. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau.$$

Складемо операторне рівняння, використовуючи теорему Бореля. Оскільки $x(t) \doteq X(p)$, $\cos 3t \doteq \frac{p}{p^2+9}$, $e^{-t} \doteq \frac{1}{p+1}$, то маємо $X(p) = \frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{p+1}X(p)$.

$$\text{Звідси } X(p) = \frac{p+1}{p^2+9} = \frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{p^2+9} \doteq \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t.$$

Відповідь: $x(t) = \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$.

Приклад 3.40. Знайти оригінал $x(t)$, якщо

$$t^4 = \int_0^t (2t^3 - 3t^2\tau + \tau^3)x(\tau)d\tau.$$

Перепишемо рівняння так:

$$t^4 = \int_0^t 3\tau(t-\tau)^2 x(\tau) d\tau + \int_0^t 2(t-\tau)^3 x(\tau) d\tau.$$

Складемо операторне рівняння, використовуючи теорему Бореля та формулу диференціювання зображення. Оскільки $x(t) \doteq X(p)$,

$tx(t) \doteq -X'(p)$, $t^2 \doteq \frac{2!}{p^3}$, $t^3 \doteq \frac{3!}{p^4}$; $t^4 \doteq \frac{4!}{p^5}$, то маємо ЛДР першого порядку

$$\frac{4!}{p^5} = -3 \cdot \frac{2!}{p^3} \cdot X'(p) + 2 \cdot \frac{3!}{p^4} X(p) \Rightarrow X'(p) - \frac{2}{p} X(p) = -\frac{4}{p^2}.$$

Його загальний розв'язок $X(p) = Cp^2 + \frac{4}{3p}$. Оскільки $x(t)$ є оригіналом, то його зображення $X(p) \rightarrow 0$, коли $p \rightarrow \infty$, тому $C = 0$. Отже,

$$X(p) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{p} \doteq \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $x(t) = \frac{4}{3}$.

3.7. Z-перетворення

3.7.1. Визначення дискретного оригіналу, дискретного перетворення Лапласа та z-перетворення

Визначення 3.5. Комплексно-значну функцію $f(n) = f_n$ цілочисельного аргумента $n \in Z$ називають **решітчастою**.

Визначення 3.6. Решітчасту функцію $f(n) = f_n$ називають **дискретним оригіналом**, якщо вона задовольняє дві умови:

1. $f(n) = 0$, якщо $n = -1, -2, -3, \dots$.
2. Існують такі сталі M і σ_0 , що $|f(n)| \leq Me^{\sigma_0 n}$.

Визначення 3.7. Дискретним перетворенням Лапласа або зображенням дискретного оригіналу $f(n) = f_n$ називають функцію

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn} \quad (3.97)$$

комплексної змінної $p = \sigma + i\tau$.

Коротко рівність (3.97) записують так:

$$F(p) \doteq f_n.$$

Зазначимо, що згідно з формулою (3.64) дискретне перетворення Лапласа (3.97) співпадає зі звичайним перетворенням Лапласа (3.1) оригіналу $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n)$, який складається з нескінченної лінійної комбінації імпульсних функцій.

Зробимо у формулі (3.97) заміну $e^p = z$ і одержимо функцію

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n}. \quad (3.98)$$

Визначення 3.8. Функцію $F(z)$ (3.98) називають **z-перетворенням** дискретного оригіналу $f_n = f(n)$. Коротко рівність (3.98) будемо позначати як

$$F(z) \doteq f_n.$$

Приклад 3.41. Знайти z-перетворення дискретного оригіналу

$$f_n = 1 = \{1, 1, 1, \dots\}. \quad (3.99)$$

Дискретний оригінал (3.99) називають **дискретною функцією Хевісайда** і позначають η_n .

$$\eta_n \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Отже,

$$\boxed{\eta_n = 1 \doteq \frac{z}{z - 1}}. \quad (3.100)$$

Приклад 3.42. Знайти z-перетворення дискретного оригіналу $f_n = (-1)^n = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$.

$$(-1)^n \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{z}{z + 1}.$$

Отже,

$$\boxed{(-1)^n \doteq \frac{z}{z + 1}}. \quad (3.101)$$

Приклад 3.43. Знайти z-перетворення дискретного оригіналу $f_n = a^n$.

$$a^n \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}.$$

Отже,

$$\boxed{a^n \doteq \frac{z}{z - a}}. \quad (3.102)$$

Зокрема, для $a = e^\alpha$ маємо

$$\boxed{e^{\alpha n} \doteq \frac{z}{z - e^\alpha}} \quad (3.103)$$

Зазначимо, що формули (3.100) і (3.101) є наслідком (3.102).

Z-перетворення (3.98) дискретного оригіналу f_n є аналітичною функцією в деякому околі $|z| > R$ нескінченно віддаленої точки. Тому формула (3.98) є розкладанням у ряд Лорана функції $F(z)$ у цьому околі. Отже, для відновлення дискретного оригіналу f_n потрібно якось розкласти z-перетворення $F(z)$ у ряд Лорана: $F(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$. Тоді $f_n = c_n$.

Приклад 3.44. Знайти дискретний оригінал f_n , який відповідає z - перетворенню $F(z) = \frac{1}{z+a}, |z| > R = |a|$.

$$F(z) = \frac{1}{z+a} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{z}} \right) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 - \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \dots \right).$$

Тому $f_n = \{0, 1, -a, a^2, -a^3, \dots\}$.

3.7.2. Властивості z-перетворення

Лінійність

$$\boxed{af_n + bg_n \doteq aF(z) + bG(z)}.$$

Приклад 3.45. Знайти z-перетворення $\sin \beta n, \cos \beta n, sh \beta n, ch \beta n$.

Для $f_n = \cos \beta n$ маємо, за формулою (3.103),

$$\begin{aligned}\cos \beta n &= \frac{e^{i\beta n} + e^{-i\beta n}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{i\beta}} + \frac{z}{z - e^{-i\beta}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z(2z - e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} \right) = \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos \beta n \doteq \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}}. \quad (3.104)$$

Аналогічно

$$\boxed{\sin \beta n \doteq \frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}}. \quad (3.105)$$

$$\boxed{ch\beta n \doteq \frac{z(z - ch\beta)}{z^2 - 2z ch\beta + 1}}. \quad (3.106)$$

$$\boxed{sh\beta n \doteq \frac{zsh\beta}{z^2 - 2zch\beta + 1}}. \quad (3.107)$$

Теорема запізнювання

$$\boxed{f_{n-k} \doteq \frac{F(z)}{z^k}}. \quad (3.108)$$

Приклад 3.46. Знайти z-перетворення дискретного оригіналу $f_n = \eta_{n-1}$ (рис. 3.16). Застосовуючи теорему запізнювання за умови, що $k = 1$, і формулу (3.108), маємо

$$\{0, 1, 1, \dots\} = \eta_{n-1} \doteq z^{-1} \frac{z}{z-1}, n \geq 1.$$

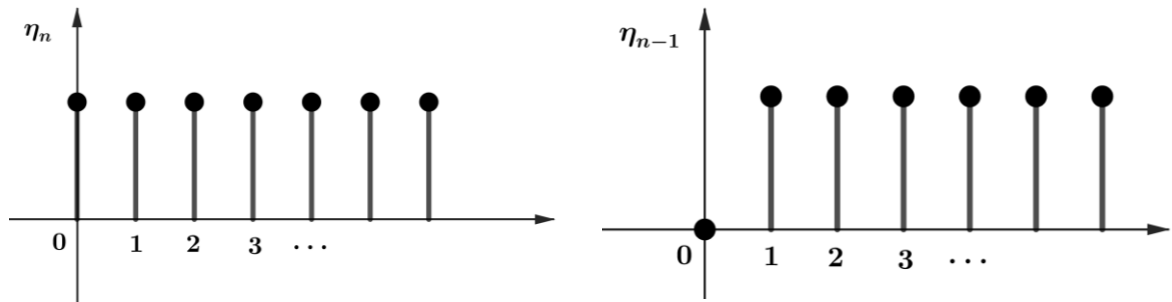


Рис. 3.16. Оригінал η_{n-1}

Отже,

$$\boxed{\{0, 1, 1, \dots\} \doteq \frac{1}{z-1}}. \quad (3.109)$$

Теорема випередження

$$f_{n+k} \doteq z^k \left(F(z) - \sum_{j=0}^{k-1} z^{-j} f_j \right). \quad (3.110)$$

Випередження дискретного оригіналу проілюстровано на рис. 3.17 для $k = 2$.

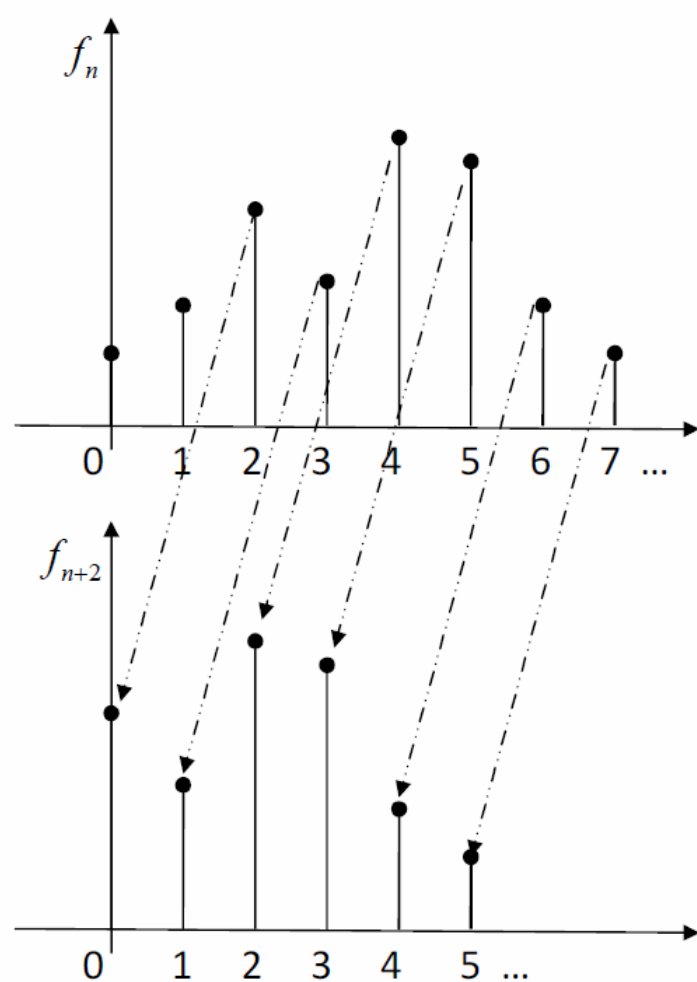


Рис. 3.17. Випередження дискретного оригіналу

Приклад 3.47. Знайти z -перетворення дискретного оригіналу $f_n = \sin \beta (n + 1)$.

Застосовуючи теорему випередження за умови, що $k = 1$, і формулу (3.105), маємо

$$\sin \beta (n + 1) \rightleftharpoons z \left(\frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} - 0 \right) = \frac{z^2 \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}.$$

Аналогом для z -перетворення теореми зміщення зображення для звичайного перетворення Лапласа є така формула:

$$\boxed{a^n f_n \doteq F\left(\frac{z}{a}\right)}, \quad (3.111)$$

яку називають **правилом згасання**[48].

Ця формула дає змогу за відомими z – перетвореннями дискретних оригіналів знаходити z перетвореннями цих оригіналів, помножених на a^n .

Приклад 3.48.

$$\cos \beta n \doteq \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} \Rightarrow \boxed{a^n \cos \beta n \doteq \frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2za \cos \beta + a^2}}, \quad (3.112)$$

$$\sin \beta n \doteq \frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} \Rightarrow \boxed{a^n \sin \beta n \doteq \frac{za \sin \beta}{z^2 - 2za \cos \beta + a^2}}. \quad (3.113)$$

Диференціювання z -перетворення або множення дискретного оригіналу на n

Диференціюванню z -перетворення з подальшим множенням на $(-z)$ відповідає алгебраїчна операція множення дискретного оригіналу на n , тобто

$$\boxed{nf_n \doteq -zF'(z)}. \quad (3.114)$$

Приклад 3.49. Знайти z -перетворення дискретних оригіналів n , n^2 .

Використовуючи формулу (3.100), маємо

$$n = n \cdot 1 \doteq -z \left(\frac{z}{z-1} \right)' = -z \frac{(z-1) - z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Отже,

$$\boxed{n \doteq \frac{z}{(z-1)^2}} \quad (3.115)$$

$$n^2 = n \cdot n \doteq -z \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = -z \frac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Отже,

$$\boxed{n^2 \doteq \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}} \quad (3.116)$$

Далі пропонуємо читачеві, використовуючи формули (3.102), (3.104), (3.105), самостійно отримати такі формули:

$$\boxed{na^n \doteq \frac{az}{(z-a)^2}} \quad (3.117)$$

$$\boxed{n^2 a^n \doteq \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}} \quad (3.118)$$

$$\boxed{n \cos \beta n \doteq \frac{(z^3 + z) \cos \beta - 2z^2}{(z^2 - 2z \cos \beta + 1)^2}} \quad (3.119)$$

$$\boxed{n \sin \beta n \doteq \frac{(z^3 - z) \sin \beta}{(z^2 - 2z \cos \beta + 1)^2}} \quad (3.120)$$

Зазначимо, що формули (3.117) і (3.118) можна також отримати з (3.102), застосовуючи правило затухання (3.111) до дискретних оригіналів $f(t) = n$ і $f(t) = n^2$ відповідно.

Інтегрування z-перетворення або ділення дискретного оригінала на n

Інтегруванню z-перетворення, поділеному на z, відповідає алгебраїчна операція ділення відповідного дискретного оригіналу на n. Точніше, нехай $f_0 = 0, f_n \doteq F(z)$, тоді

$$\left\{0, \frac{f_1}{1}, \frac{f_2}{2}, \dots\right\} \doteq \int_z^\infty \frac{F(z)}{z} dz. \quad (3.121)$$

Приклад 3.50. Знайти z-перетворення

$$f_n = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} = \frac{\eta_{n-1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

З формули (3.109), використовуючи (3.121), маємо

$$\{0, 1, 1, 1, \dots\} \doteq \frac{1}{z-1} \Rightarrow \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \doteq \int_z^\infty \frac{dz}{z(z-1)} = \ln \frac{z-1}{z} \Big|_z^\infty = \ln \frac{z}{z-1}.$$

Граничні співвідношення

Наступні твердження цього розділу є аналогом граничних співвідношень для звичайного перетворення Лапласа. Оскільки $F(z)$ є аналітичною функцією в околі нескінченно віддаленої точки, то з формули (3.98) випливає, що

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f_0, \quad (3.122)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(F(z) - f_0) = f_1,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (z^2(F(z) - f_0) - f_1 z) = f_2.$$

І взагалі має місце формула

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (z^{n-1}(F(z) - f_0) - z^{n-2}f_1 - \dots - zf_{n-2}) = f_{n-1}.$$

За допомогою цієї формули можна послідовно знаходити $f_0, f_1, f_2, \dots$.

Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, то

$$\lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1)F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

За допомогою цієї формули можна знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ за z -перетворенням, але тільки в тому випадку, коли можна стверджувати, що граничне значення існує, хоча й залишається невідомим.

Зазначимо, що з існування $\lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1)F(z)$ не випливає існування $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Дійсно, $f_n = (-1)^n \doteq \frac{z}{z+1}$. Тому $\lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1)F(z) = 0$, але $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ не існує.

Теорема множення

Визначення 3.9. Згорткою дискретних оригіналів f_n і g_n називають послідовність

$$\sum_{k=0}^n f_{n-k} g_k,$$

яку коротко позначають так: $f_n * g_n$.

Згортка підпорядкована переставному закону $f_n * g_n = g_n * f_n$.

Теорема 3.4. Про множення z -перетворень (про z -перетворення згортки).

Нехай $f_n \doteq F(z)$; $g_n \doteq G(z)$, тоді

$$f_n * g_n \doteq F(z) \cdot G(z), \quad (3.123)$$

тобто z -перетворення згортки дорівнює добутку відповідних z -перетворень.

Приклад 3.51. Знайти оригінал, який відповідає z -перетворенню

$$F(z) = \frac{z}{(z-e^\alpha)(z-e^\beta)}.$$

За формулами (3.103) і (3.108), $\frac{z}{z-e^\alpha} \doteq e^{\alpha n}$ і $\frac{1}{z-e^\beta} \doteq e^{\beta(n-1)}$.

Отже, за формулою (3.123),

$$\begin{aligned} F(z) &\doteq \sum_{k=0}^n e^{\alpha(n-k)} e^{\beta(k-1)} = e^{\alpha n - \beta} \sum_{k=0}^n e^{(\beta-\alpha)k} = \\ &= e^{\alpha n - \beta} \frac{e^{(\beta-\alpha)(n+1)} - e^{(\beta-\alpha)}}{e^{(\beta-\alpha)} - 1}. \end{aligned}$$

Теорема розкладання

Аналогом другої теореми розкладання для звичайного перетворення Лапласа є таке твердження.

Нехай z -перетворення $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ є правильним раціональним дробом (отже, за формулою (3.122), $f_0 = F(\infty) = 0$), і нехай усі корені $z_1, z_2, \dots, z_m$ знаменника $Q(z)$ є попарно відмінні.

Тоді

$$f_n = \sum_{k=1}^m z_k^{n-1} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}.$$

Якщо степені чисельника та знаменника є рівними, то виділяємо цілу частину, яка дорівнює $F(\infty) = f_0$ і приходимо до попереднього випадку.

Наостанок зазначимо, що в дод. 2 можна знайти z – перетворень більшості дискретних оригіналів, які зустрічають на практиці.

3.8. Розв'язання лінійних різницевих рівнянь за допомогою z-перетворення

Лінійні різницеві рівняння (розд. 2) можна розв'язувати за допомогою z-перетворення методом, аналогічним операційному.

Нехай потрібно знайти розв'язок y_n ЛРР зі сталими коефіцієнтами, який задовольняє початкові умови.

Застосуємо до обох частин ЛРР z – перетворення. Ураховуючи початкові умови, для зображення $Y(z)$ розв'язку y_n одержуємо алгебраїчне операторне рівняння. Розв'язавши його, знайдемо $Y(z)$. Далі, використовуючи властивості z - перетворення, теорему про розкладання та таблицю z – перетворень і дискретних оригіналів (дод. 2), знаходимо відповідний оригінал-розв'язок y_n .

Приклад 3.52. Знайти розв'язок ЛОРР

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = (-2)^n,$$

який задовольняє початкові умови

$$y_0 = 4, \quad y_1 = 5.$$

Застосуємо до обох частин різницевого рівняння z-перетворення. Ураховуючи, що, за теоремою випередження (3.110),

$$y_n \rightleftharpoons Y(z),$$

$$y_{n+1} \rightleftharpoons zY(z) - zy_0 = zY(z) - 4z,$$

$$y_{n+2} \doteq z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 = z^2 Y(z) - 4z^2 - 5z,$$

а, за формулою (3.102),

$$(-2)^n \doteq \frac{z}{z+2},$$

одержуємо операторне рівняння

$$z^2 Y(z) - 4z^2 - 5z - 4(zY(z) - 4z) + 3Y(z) = \frac{z}{z+2},$$

$$Y(z)(z^2 - 4z + 3) = 4z^2 + 5z - 16z + \frac{z}{z+2}.$$

Розв'яжемо його та знайдемо z-перетворення розв'язку y_n :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{4z^2 - 11z}{z^2 - 4z + 3} + \frac{z}{(z+2)(z^2 - 4z + 3)} = \\ &= z \left(\frac{4z - 11}{(z-1)(z-3)} + \frac{1}{(z-1)(z-3)(z+2)} \right) = z \frac{4z^2 - 3z - 21}{(z-1)(z-3)(z+2)} = \\ &= \frac{10}{3} \cdot \frac{z}{(z-1)} + \frac{3}{5} \cdot \frac{z}{(z-3)} + \frac{1}{15} \cdot \frac{z}{(z+2)}. \end{aligned}$$

Знайдемо дискретні оригінали, які відповідають кожному з доданків.
Використовуємо формулу (3.102):

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{z}{(z-1)} \doteq \frac{10}{3} \cdot 1^n, \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{z}{(z-3)} \doteq \frac{3}{5} \cdot 3^n, \quad \frac{1}{15} \cdot \frac{z}{(z+2)} \doteq \frac{1}{15} \cdot (-2)^n.$$

$$\text{Відповідь: } y_n = \frac{10}{3} \cdot 1^n + \frac{3}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{15} \cdot (-2)^n.$$

Приклад 3.53. Знайти розв'язок ЛНРР

$$2y_{n+2} - 5y_{n+1} + 2y_n = \cos \frac{\pi}{3} n,$$

який задовольняє початкові умови

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0.$$

Застосуємо до обох частин різницевого рівняння z-перетворення. Ураховуючи, що, за теоремою випередження (3.110),

$$y_n \doteq Y(z),$$

$$y_{n+1} \doteq zY(z) - zy_0 = zY(z),$$

$$y_{n+2} \doteq z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2Y(z),$$

а, за формулою (3.104),

$$\cos \frac{\pi}{3} n \doteq \frac{z(z - 0,5)}{z^2 - z + 1},$$

одержуємо операторне рівняння

$$2z^2Y(z) - 5zY(z) + 2Y(z) = \frac{z(z - 0,5)}{z^2 - z + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z)(2z^2 - 5z + 2) = \frac{z(z - 0,5)}{z^2 - z + 1}.$$

Розв'яжемо його та знайдемо z-перетворення розв'язку y_n :

$$Y(z) = \frac{z(z - 0,5)}{(z^2 - z + 1)(2z^2 - 5z + 2)} = \frac{z}{2(z^2 - z + 1)(z - 2)} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z - 0,5}{z^2 - z + 1}.$$

Знайдемо дискретні оригінали, які відповідають кожному з доданків.
Використовуємо формули (3.102), (3.104) і теорему запізнення (3.108):

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z - 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z - 2} \doteq \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1},$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{-z + 0,5}{(z^2 - z + 1)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z(z - 0,5)}{(z^2 - z + 1)} \doteq -\frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} (n - 1).$$

$$\text{Відповідь: } y_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3} (n - 1).$$

Приклад 3.54. Знайти розв'язок ЛНРР

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n,$$

який задовольняє початкові умови

$$y_0 = 0, y_1 = 0.$$

Застосуємо до обох частин різницевого рівняння z-перетворення.
Ураховуючи, що

$$y_n \doteq Y(z),$$

$$y_{n+1} \doteq zY(z) - zy_0 = zY(z),$$

$$y_{n+2} \doteq z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2Y(z), \quad 2^n \doteq \frac{z}{z-2},$$

одержуємо операторне рівняння

$$z^2Y(z) - 4zY(z) + 4Y(z) = \frac{z}{z-2} \Rightarrow Y(z)(z^2 - 4z + 4) = \frac{z}{z-2}.$$

Розв'яжемо його, знайдемо z-перетворення розв'язку, а потім розв'язок. Використовуємо за умови, що $k = 2$, відповідність 14 з дод. 2:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{(z-2)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^2 z}{(z-2)^3} \doteq \frac{1}{4} \cdot C_n^2 2^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{2!} 2^n = \\ &= \frac{1}{8} n^2 2^n - \frac{1}{8} n 2^n. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } y_n = -\frac{1}{8} \cdot n 2^n + \frac{1}{8} \cdot n^2 2^n.$$

Приклад 3.55. Знайти розв'язок ЛОСРР, який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} x_{n+2} + 2y_n = 0, \\ 2x_n - y_{n+2} = 0, \end{cases} \quad x_0 = y_0 = y_1 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Застосуємо до обох частин системи z-перетворення. Ураховуючи, що

$$y_n \doteq Y(z), \quad x_n \doteq X(z),$$

$$y_{n+2} \doteq z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2Y(z),$$

$$x_{n+2} \doteq z^2X(z) - z^2x_0 - zx_1 = z^2X(z) - z,$$

одержуємо для z -перетворень $X(z), Y(z)$ алгебраїчну систему, яку називають **операторною**

$$\begin{cases} z^2 X(z) - z + 2Y(z) = 0, \\ -2X(z) + z^2 Y(z) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 X(z) + 2Y(z) = z \\ -2X(z) + z^2 Y(z) = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо її за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z^2 & 2 \\ -2 & z^2 \end{vmatrix} = z^4 + 4, \quad \Delta_X = \begin{vmatrix} z & 2 \\ 0 & z^2 \end{vmatrix} = z^3.$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{z^3}{z^4 + 4} = z \left(\frac{Az + B}{z^2 - 2z + 2} + \frac{Cz + D}{z^2 + 2z + 2} \right) = \\ &= \frac{z}{4} \left(\frac{z}{z^2 - 2z + 2} - \frac{z}{z^2 + 2z + 2} \right). \end{aligned}$$

Знайдемо оригінали, які відповідають кожному з доданків у дужках.

Використовуємо формулу (3.113) за умови, що $a = \sqrt{2}$ і $\beta = \frac{\pi}{4}$ або $\beta = \frac{3\pi}{4}$:

$$\frac{z \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}z + (\sqrt{2})^2} = \frac{z\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2} \doteq (\sqrt{2})^n \sin \frac{\pi}{4} n,$$

$$\frac{z \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}z + (\sqrt{2})^2} = \frac{z\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4}}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{3\pi}{4} + (\sqrt{2})^2} \doteq (\sqrt{2})^n \sin \frac{3\pi}{4} n.$$

Отже,

$$\frac{z^2}{z^4 + 4} \doteq (\sqrt{2})^n \left(\sin \frac{\pi}{4} n - \sin \frac{3\pi}{4} n \right).$$

Тому, за теоремою випередження (3.110),

$$\begin{aligned} X &= \frac{z}{4} \cdot \frac{z^2}{z^4 + 4} \doteq \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{4} (n+1) - \sin \frac{3\pi}{4} (n+1) \right) = \\ &= (\sqrt{2})^{n-1} \sin \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi(n-1)}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x_n = (\sqrt{2})^{n-1} \sin \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi(n-1)}{4}$, y_n пропонуємо читачеві знайти самостійно.

ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Дайте визначення оригіналу.
2. Дайте визначення зображенню або перетворенню Лапласа оригіналу.
3. Який вигляд має формула обернення?
4. Який оригінал називають функцією Хевісайда, або одиничним імпульсом? Чому дорівнює його зображення?
5. Чому дорівнює зображення експоненти?
6. У чому полягає властивість лінійності перетворення Лапласа?
7. Чому дорівнюють зображення тригонометричних і гіперболічних функцій?
8. Сформулюйте теорему подібності.
9. Сформулюйте теорему запізнювання.
10. Сформулюйте теорему випередження.
11. Сформулюйте теорему зміщення зображення. Наведіть приклади її застосування.

12. Що відбувається із зображенням у разі диференціювання оригіналу?
13. Що відбувається із оригіналом у разі диференціювання зображення? Чому дорівнює зображення степеневі функції?
14. Що відбувається із зображенням у разі інтегрування оригіналу?
15. Що відбувається з оригіналом у разі інтегрування зображення?
16. У чому полягають граничні співвідношення між оригіналом і зображенням?
17. Що називають згорткою оригіналів?
18. Сформулюйте теорему Бореля.
19. Напишіть формулу Дюамеля.
20. Сформулюйте першу теорему розкладання.
21. Сформулюйте другу теорему розкладання.
22. У чому полягає операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь і систем?
23. Яке рівняння називають операторним?
24. Яку систему називають операторною?
25. Яке рівняння називають векторним операторним?
26. Яку функцію називають імпульсною функцією (δ – функцією Дірака)?
27. Чому дорівнює зображення імпульсної функції?
28. Сформулюйте властивості імпульсної функції.
29. Що називають імпульсною характеристикою та передавальною функцією?
30. Як за допомогою імпульсної характеристики знайти відгук на довільний вплив?
31. Що називають перехідною характеристикою?
32. Напишіть формулу Дюамеля для розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з нульовими початковими умовами.

33. Що називають усталеним режимом? Чому він дорівнює?
34. Що називають частотною характеристикою?
35. Який вигляд має операторна форма закону Ома?
36. У чому полягає операційний метод розв'язання початково-крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними?
37. У чому полягає операційний метод розв'язання інтегральних рівнянь?
38. Дайте визначення решітчастій функції.
39. Дайте визначення дискретному оригіналу.
40. Дайте визначення дискретному перетворенню Лапласа.
41. Дайте визначення z – перетворенню.
42. Який дискретний оригінал називають дискретною функцією Хевісайда? Чому дорівнює його z – перетворення?
43. Чому дорівнює z – перетворення дискретного оригіналу a^n ?
44. У чому полягає властивість лінійності z – перетворення?
45. Чому дорівнюють z – перетворення дискретних оригіналів $\cos \beta n$, $\sin \beta n$, $\operatorname{ch} \beta n$, $\operatorname{sh} \beta n$?
46. Сформулюйте теорему запізнювання для дискретного оригіналу.
47. Сформулюйте теорему випередження для дискретного оригіналу.
48. Сформулюйте правило згортки. Наведіть приклади його застосування.
49. Що відбувається з дискретним оригіналом у разі диференціювання його z – перетворення?
50. Чому дорівнюють z – перетворення дискретних оригіналів n , n^2 ?
51. Що відбувається з дискретним оригіналом у разі інтегрування його z – перетворення?
52. У чому полягають граничні співвідношення між дискретним оригіналом і z – перетворенням?
53. Що називають згортою дискретних оригіналів?

54. Сформулюйте теорему про множення z – перетворень.
55. Сформулюйте теорему розкладання для z – перетворення.
56. У чому полягає метод розв’язання лінійних різницьових рівнянь і систем за допомогою z – перетворення?

ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

Завдання 1. Знайти зображення:

- | | |
|-----------------------|---|
| 1) $\eta(t-2)(t-2)$; | 4) $ch\ t \sin t$; |
| 2) $t^3 + 1$; | 5) $t^2 e^{-t}$; |
| 3) $\cos^2 t$; | 6) $\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau d\tau$. |

Завдання 2. Знайти оригінал:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1) $\frac{p}{p^2+5p+6}$; | 4) $\frac{1}{p^3+2p^2+p}$; |
| 2) $\frac{1}{p^2+2p+5}$; | 5) $\frac{p}{(p^2+4)^2}$. |
| 3) $\frac{1}{(p+3)^2}$; | |

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші:

- 1) $y' - 5y = 4e^{2t}, y(0) = 3$;
- 2) $y' + 3y = 5e^{-3t}, y(0) = 1$;
- 3) $y'' + y = 4e^t, y(0) = 4, y'(0) = -3$;
- 4) $y'' - 2y' = 2e^t, y(1) = -1, y'(1) = 0$;
- 5) $y' - y = \frac{1}{e^t+3}, y(0) = 0$;
- 6) $y'' - y = \frac{1}{e^t+1}, y(0) = 0, y'(0) = 0$;
- 7) $y'' - y' = \frac{1}{e^t+1}, y(0) = 0, y'(0) = 0$;

$$8) y'' + y = \frac{1}{2 + \cos t}, y(0) = 0, y'(0) = 0;$$

$$9) y'' + y = e^{-t^2}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Завдання 4. Знайти струм у RL – колі, який виникає, якщо увімкнути ЕРС $\varepsilon(t) = e^{\mu t}$.

Завдання 5. Розв'язати інтегральні рівняння:

$$1) y(t) = \sin t + \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau) d\tau;$$

$$2) y(t) = e^t + \int_0^t \sin(t - \tau) y(\tau) d\tau;$$

$$3) y(t) = \sin t - \int_0^t \operatorname{sh}(t - \tau) y(\tau) d\tau;$$

$$4) y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 y(\tau) d\tau;$$

$$5) y(t) = e^{2t} + \int_0^t (t - \tau) e^{t-\tau} y(\tau) d\tau.$$

Завдання 6*. Знайти розв'язок

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + u = \cos t,$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = x, \quad u'_t(0, x) = 0.$$

Завдання 7. За допомогою z – перетворення знайти розв'язок РР, який задовольняє початкові умови:

$$1) y_{n+1} - 5y_n = 2^n, y_0 = 3;$$

$$2) y_{n+1} + 3y_n = 2(-3)^n, y_0 = 4;$$

$$3) y_{n+2} + 5y_{n+1} + 4y_n = 3^n, y_0 = 7, y_1 = 1;$$

$$4) y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = (3n + 1)2^n, y_0 = 1, y_1 = -\frac{1}{4}.$$

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 3

Завдання 1.

$$1) \frac{e^{-2p}}{p^2}; 2) \frac{6+p^3}{p^4}; 3) \frac{3p^2+4}{2p(p^2+4)}; 4) \frac{p^2+2}{p^2+4}; 5) \frac{2}{(p+1)^3}; 6) \frac{2}{p^2(p^2+4)}.$$

Завдання 2.

$$1) 3e^{-3t} - 2e^{-2t}; 2) \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t; 3) te^{-3t}; 4) 1 - e^{-t} - te^{-t};$$
$$5) \frac{1}{4}t \sin 4t.$$

Завдання 3.

$$1) \frac{13}{3}e^{5t} - \frac{4}{3}e^{2t}; 2) (1 + 5t)e^{-3t}; 3) 2 \cos t - 5 \sin t + 2e^t; 4) y =$$
$$= e^{2t-1} - 2e^t + e - 1; 5) \frac{1}{3}(e^t - 1) - \frac{t}{9}e^t + \frac{1}{9}e^t \ln \frac{e^t+3}{t}; 6) \frac{1}{2}(e^t - 1 -$$
$$te^t) + sht \ln \frac{1+e^t}{2e^t}; 7) e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1) \ln(e^t + 1);$$
$$8) \sin t \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{tg \frac{t}{2}}{\sqrt{3}} \right) \right) + \cos t \ln \frac{2+\cos t}{3}; 9) \int_0^t e^{-(t-\tau)^2} \sin \tau d\tau.$$

Завдання 4.

$$\frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R/L}{\mu + \frac{R}{L}} \left(e^{\mu t} - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right).$$

Завдання 5.

$$1) \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t; 2) 2e^t - t - 11; 3) 2 \sin t - t; 4) \frac{1}{3}e^t - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6} \right);$$
$$5) \frac{1}{4}e^{2t}(2t + 3) + \frac{1}{4}.$$

Завдання 6*. $x \cos t + t \sin t$.

Завдання 7.

$$1) \frac{10}{3}5^n - \frac{1}{3}2^n; 2) 4(-3)^n - \frac{2}{3}n(-3)^n; 3) \frac{749}{84}(-1)^n - \frac{41}{21}(-4)^n + \frac{1}{28}3^n;$$
$$4) y_n = \left(\frac{1}{8}n^3 - \frac{1}{4}n^2 - n + 1 \right) 2^n.$$

4. КРАЙОВА ЗАДАЧА

4.1. Загальні визначення та факти

Задача Коші для ДР n -го порядку полягає в знаходженні такого його розв'язку, який у заданій точці задовольняє задані n початкові умови.

Крайова задача для ДР n -го порядку полягає в знаходженні такого його розв'язку, який задовольняє n , так звані, крайові умови, що накладені на нього та його похідні на кінцях проміжку, на якому розглядають ДР.

Зазначимо, що у випадку, коли розв'язок задачі Коші існує на всьому проміжку і є єдиним, розв'язок крайової задачі на цьому проміжку може не існувати або бути неєдиним (теорема 4.2).

Далі розглядаємо крайову задачу, яку формулюють так.

Знайти розв'язок ДР

$$l[y] = p_2(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = f(x), \quad (4.1)$$

($p_2(x) \neq 0$), який задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \gamma_2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $|\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0, j = 1, 2$.

Якщо $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то **крайові умови (4.2) називають однорідними**, а якщо $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$ - **неоднорідними**.

Якщо в задачі (4.1), (4.2) і ДР (4.1), і крайові умови (4.2) є однорідними, то таку **крайову задачу називають однорідною**. В іншому разі - **неоднорідною**.

Зазначимо, що однорідна задача має нульовий розв'язок $y(x) = 0$.

Якщо однорідна крайова задача має ненульовий розв'язок, то він є єдиним із точністю до множника.

Зазначимо також, що задачу з неоднорідними крайовими умовами можна перетворити в задачу з однорідними крайовими умовами.

Наприклад, якщо крайові умови мають вигляд

$$y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2, \quad (4.3)$$

то, зробивші в задачі (4.1), (4.2) заміну,

$$y(x) = z(x) + u(x),$$

де функція

$$u(x) = \frac{x-a}{b-a}(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1$$

задовольняє крайові умови (4.3), одержимо крайову задачу з однорідними крайовими умовами $z(a) = z(b) = 0$.

Тому далі розглядаємо задачу

$$l[y] = f(x), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2. Розв'язання крайової задачі за допомогою функції Гріна

Функцією Гріна задачі (4.4), (4.5) називають функцію $G(x, t)$, яка визначена на множині $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ і за кожного фіксованого t має такі властивості (як функція від x):

- 1) Коли $x \neq t$, вона задовольняє однорідне рівняння $l[y] = 0$.
- 2) Коли $x = a$ і $x = b$, вона задовольняє крайові умови (4.5).
- 3) У точці $x = t$ вона неперервна, а її похідна має стрибок, який дорівнює $\frac{1}{p_2(t)}$:

$$G(t + 0, t) = G(t - 0, t), \quad (4.6)$$

$$G'_x(t + 0, t) - G'_x(t - 0, t) = \frac{1}{p_2(t)}. \quad (4.7)$$

Теорема 4.1. Нехай однорідна крайова задача

$$l[y] = 0,$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

має лише нульовий розв'язок. Тоді функція Гріна $G(x, t)$ задачі (4.4), (4.5) існує, а задача (4.4), (4.5) має єдиний розв'язок, який дорівнює

$$y(t) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt.$$

Приклад 4.1. Знайти розв'язок крайової задачі

$$y'' + y = 1, \quad (4.8)$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (4.9)$$

Знайдемо два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ відповідного однорідного ДР $y'' + y = 0$, які задовольняють першу та другу крайову умову відповідно. Маємо (поясніть чому?)

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = \cos x.$$

Оскільки $y_1(x) \neq y_2(x)$, то однорідна крайова задача, яка відповідає задачі (4.8), (4.9), не має ненульових розв'язків. Тому функція Гріна існує, і її можна шукати у вигляді

$$G(x, t) = \begin{cases} Ay_1(x) = A \sin x, & 0 \leq x \leq t, \\ By_2(x) = B \cos x, & t \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

де коефіцієнти A та B є функціями від t і визначені з умов (4.6), (4.7), які має задовольняти функція Гріна, тобто

$$By_2(t) = Ay_1(t), \quad By_2'(t) - Ay_1'(t) = \frac{1}{p_2(t)} = 1$$

або

$$\begin{cases} B \cos t - A \sin t = 0, \\ -B \sin t - A \cos t = 1. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } A = -\cos t, B = -\sin t \quad \Rightarrow$$

$$G(x, t) = \begin{cases} -\sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t, \\ -\cos x \sin t, & t \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, t) f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, t) dt = \\
&= - \int_0^x \cos x \sin t dt - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t dt = \\
&= \cos x (\cos t|_0^x) - \sin x \left(\sin t|_x^{\frac{\pi}{2}} \right) = 1 - \cos x - \sin x.
\end{aligned}$$

4.3. Самоспряжена крайова задача

Самоспряжена крайова задача полягає в знаходженні розв'язку ДР

$$l[y] = (p(x)y')' + q(x)y = h(x), \quad (4.10)$$

($p(x) \neq 0$), який задовольняє крайові умови

$$y(a) \cos \alpha - p(a)y'(a) \sin \alpha = 0, \quad (4.11)$$

$$y(b) \cos \beta - p(b)y'(b) \sin \beta = 0. \quad (4.12)$$

Якщо диференціальний вираз $l[y]$ має вигляд (4.10), то цей вираз називають **симетричним**. Крайові умови (4.11), (4.12) називають **самоспряженими**.

Покажемо, як ДР (4.1) можна звести до ДР (4.10).

Спочатку поділимо ДР (4.1) на старший коефіцієнт $p_2(x) \neq 0$ і одержимо ДР

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x), \quad (4.13)$$

де

$$P(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \quad Q(x) = \frac{p_0(x)}{p_2(x)}, \quad g(x) = \frac{f(x)}{p_2(x)}.$$

Але рівняння (4.13) еквівалентне рівнянню (4.10) (перевірте), у якому

$$p(x) = e^{\int_a^x P(x)dx}, \quad q(x) = Q(x)p(x), \quad h(x) = g(x)p(x).$$

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови існування розв'язку самоспряженої крайової задачі.

Теорема 4.2. Задача (4.10) — (4.12) має розв'язок $y(x)$ тоді і лише тоді, коли права частина $h(x)$ ДР (4.10) задачі ортогональна до ненульового розв'язку $y_0(x)$ відповідної однорідної задачі, тобто

$$\int_a^b y_0(x) h(x) dx = 0. \quad (4.14)$$

Зазначимо, що якщо задача (4.10)-(4.12) має розв'язок $y(x)$, то будь-який розв'язок цієї задачі має форму $Cy_0(x) + y(x)$.

Приклад 4.2. Розв'язати задачу

$$y'' + y = \cos x, \quad (4.15)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (4.16)$$

Відповідна однорідна задача має розв'язки $y_0(x) = C \sin x$. Тому неоднорідна задача має розв'язок лише тоді, якщо права частина $h(x) = \cos x$ ДР (4.15) ортогональна до $y_0(x)$. Маємо

$$\int_0^{\pi} y_0(x) h(x) dt = C \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0,$$

тобто умова ортогональності (4.14) виконана.

Знайдемо розв'язки задачі (4.15), (4.16).

Загальний розв'язок ДР (4.15) дорівнює (чому?)

$$y_{zo}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x.$$

Бачимо, що крайові умови (4.16) задовольняє умова $C_1 = 0$.

Тому розв'язок задачі (4.15), (4.16) дорівнює

$$y(x) = C \sin x + \frac{x}{2} \sin x.$$

4.4. Задача Штурма-Ліувілля

Однорідна самоспряжена крайова задача

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda\rho(x))y = 0, \quad (4.17)$$

$$y(a) \cos \alpha - p(a)y'(a) \sin \alpha = 0, \quad (4.18)$$

$$y(b) \cos \beta - p(b)y'(b) \sin \beta = 0, \quad (4.19)$$

де

$$p(x) > 0;$$

$$\rho(x) > 0;$$

λ — параметр,

називають крайовою задачею Штурма-Ліувілля.

Ця задача за будь-яких λ має нульовий розв'язок. Ті λ , за яких задача Штурма - Ліувілля має ненульовий розв'язок, називають **власними значеннями** цієї задачі, а відповідні розв'язки — **власними функціями**.

Теорема 4.3. Існує необмежена послідовність дійсних чисел

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

така, що:

- 1) число λ є власним значенням задачі (4.17)-(4.19) тоді і лише тоді, коли $\lambda = \lambda_n$ для деякого n ;
- 2) власна функція $y_n(x)$, яка відповідає власному значенню λ_n , має точно $n - 1$ нулів на інтервалі (a, b) ;
- 3) якщо $m \neq n$, то власні функції $y_m(x)$ і $y_n(x)$ є ортогональними, тобто

$$\int_a^b \rho(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0; \quad (4.20)$$

- 4) нехай функція $f(x)$ є кусково-гладкою на відрізку $[a, b]$. Утворимо її ряд Фур'є за власними функціями $y_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad (4.21)$$

де коефіцієнти Фур'є c_n дорівнюють

$$c_n = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) y_n(x) dx}{\int_a^b \rho(x) y_n^2(x) dx}. \quad (4.22)$$

Тоді цей ряд (4.21) збігається в кожній точці інтервалу (a, b) і його сума дорівнює $f(x)$ у точках неперервності і $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ у точках розриву.

Якщо функція $f(x)$ є двічі неперервно диференційовною на відрізку $[a, b]$ і задовольняє крайові умови вигляду (4.18), (4.19), то ряд (4.21) збігається на відрізку $[a, b]$ абсолютно та рівномірно, і його сума дорівнює $f(x)$ [35, с. 329];

5) має місце рівність Парсеваля

$$\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (4.23)$$

якщо $\int_a^b \rho(x) y_n^2(x) dx = 1$.

Доведемо цю теорему на прикладі задачі

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (4.24)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (4.25)$$

Спочатку доведемо, що власні значення цієї задачі можуть бути лише додатними.

Нехай λ_n є власними значеннями, а $y_n(x)$ - відповідною власною функцією. Отже,

$$-y_n'' = \lambda y_n, \quad (4.26)$$

$$y_n(0) = y_n(\pi) = 0. \quad (4.27)$$

Помножимо рівність (4.26) на $y_n(x)$ і проінтегруємо. Маємо

$$-\int_0^{\pi} y_n''(x)y_n(x) dx = \lambda_n \int_0^{\pi} y_n^2(x) dx. \quad (4.28)$$

Проінтегруємо частинами в лівій частині рівності (4.28). Маємо

$$-y_n'(x)y_n(x)|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (y_n'(x))^2 dx = \lambda_n \int_0^{\pi} y_n^2(x) dx.$$

Оскільки позаінтегральний член дорівнює нулю завдяки крайовим умовам (4.27), то

$$\int_0^{\pi} (y_n'(x))^2 dx = \lambda_n \int_0^{\pi} y_n^2(x) dx,$$

звідки $\lambda_n > 0$ (чому?).

Знайдемо власні значення. Якщо $\lambda > 0$, то розв'язок ДР (4.24), який задовольняє крайову умову на кінці $a = 0$, дорівнює (чому?)

$$y(x) = \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Число λ буде власним значенням, якщо цей розв'язок задовольняє крайову умову на правому кінці $b = \pi$

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = y(b) = 0,$$

звідки $\sqrt{\lambda} \pi = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$. Отже, власні значення утворюють необмежену послідовність $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$.

Власна функція $y(x) = \sin nx$ має точно $n - 1$ нулів на інтервалі $(a, b) = (0, \pi)$.

Ряд Фур'є (4.21) є рядом Фур'є функції $f(x)$ за синусами

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx, \quad (4.29)$$

де коефіцієнти Фур'є (4.22) мають добре відомі значення

$$c_n = \frac{\int_0^{\pi} f(x) y_n(x) dx}{\int_0^{\pi} y_n^2(x) dx} = \frac{\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx}{\int_0^{\pi} \sin^2 x dx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx. \quad (4.30)$$

Ряд Фур'є (4.29), (4.30) для кусково-гладкої функції $f(x)$ збігається за теоремою Жордана-Діріхле, і має місце рівність Парсеваля для тригонометричних рядів, яка в нашому випадку співпадає з рівністю (4.23).

Отже, на прикладі ми довели всі твердження теореми.

У наступному пункті проілюструємо, як задача Штурма-Ліувілля виникає з розв'язанням рівнянь математичної фізики.

4.5. Розв'язання рівнянь математичної фізики методом відокремлення змінних

Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) є одним із найбільш розповсюджених методів розв'язання рівнянь математичної фізики.

Схему застосування цього методу проілюструємо на прикладі рівняння коливань неоднорідної струни, яка закріплена на кінцях.

Задача. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (4.31)$$

($p(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) \geq 0$), який задовольняє крайові умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (4.32)$$

і початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (4.33)$$

Частинні розв'язки ДР (4.31) будемо шукати у вигляді добутку

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (4.34)$$

де $X(x)$ - функція лише змінної x ⁵;

$T(t)$ - функція лише змінної t .

Підставивши $u(x, t)$ (4.34) у ДР (4.31), маємо

$$\left[(p(x)X'(x))' - q(x)X(x) \right] T(t) = \rho(x)X(x)T''(t).$$

Поділивши рівність на $\rho(x)X(x)T(t)$, одержимо

$$\frac{(p(x)X'(x))' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (4.35)$$

⁵ Розв'язок такого вигляду називають стоячою хвилею, якщо за різних t його розглядати як функцію від x , а її нулі (вузли) і точки екстремуму (пучності) не рухаються, коли t змінюється.

Аби функція $u(x, t)$ (4.34) була розв'язком, рівність (4.35) має бути виконана за будь-яких значень незалежних змінних x і t .

Фіксуємо одну з цих змінних і змінюючи іншу, бачимо, що обидві частини рівності (4.35) є сталими, тобто дорівнюють константі, яку далі зручно позначити $-\lambda$:

$$\frac{(p(x)X'(x))' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda. \quad (4.36)$$

Із рівності (4.36) випливає два звичайних ДР для функцій $X(x)$ і $T(t)$ відповідно:

$$(p(x)X')' - (q(x) - \lambda\rho(x))X = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \quad (4.37)$$

$$T''(t) + \lambda T = 0, \quad T(t) \not\equiv 0. \quad (4.38)$$

Із граничних умов випливає, що

$$X(0)T(t) = u(0, t) = 0,$$

$$X(l)T(t) = u(l, t) = 0,$$

звідки функція $X(x)$ має задовольняти крайові умови $X(0) = X(l) = 0$ (оскільки в іншому разі $T(t) \equiv 0 \Rightarrow u(x, t) \equiv 0$, а ми шукаємо ненульовий розв'язок).

Отже, для знаходження $X(x)$ виникає задача Штурма-Ліувілля

$$(p(x)X')' + (-q(x) + \lambda\rho(x))X = 0, \quad (4.39)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (4.40)$$

Аналогічно до задачі (4.24), (4.25) можна довести, що власні значення λ_n задачі (4.39), (4.40) є додатними.

Отже, у рівності (4.36) стала λ може дорівнювати лише власному значенню λ_n задачі (4.39), (4.40), а функція $X(x)$ є відповідною власною функцією:

$$X(x) = X_n(x).$$

Оскільки $\lambda_n > 0$, то відповідна функція $T(t)$, яка є розв'язком ДР (4.38), коли $\lambda = \lambda_n$, дорівнює

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t.$$

Отже, ми одержали нескінченну кількість частинних розв'язків вигляду (4.34) рівняння (4.31):

$$u_n(x, t) = X_n(x) (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t),$$

які задовольняють крайові умови (4.32).

Сконструємо з цих частинних розв'язків розв'язок, який задовольняє, крім крайових умов (4.32), ще й початкові умови (4.33).

Оскільки рівняння (4.31) є лінійним та однорідним, то сума частинних розв'язків

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) \quad (4.41)$$

також є його розв'язком.

Щоб розв'язок (4.41) задовольняв ще і початкові умови, мають бути виконані рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x) = u'_t(x, 0) = \psi(x).$$

Тобто A_n та $B_n \sqrt{\lambda_n}$ мають дорівнювати коефіцієнтам Фур'є в розкладанні функцій відповідно $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ у ряди Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (4.39), (4.40). Формули для цих коефіцієнтів наведені в теоремі 4.3.

Приклад 4.3. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.42)$$

який задовольняє крайові умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \quad (4.43)$$

і початкові умови

$$u(x, 0) = x \sin x, \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (4.44)$$

Для задачі (4.42)-(4.44) відповідна задача Штурма-Ліувілля має вигляд

$$-X'' = \lambda X, \quad (4.45)$$

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \quad (4.46)$$

Як показано на прикладі задачі (4.24), (4.25), власні значення задачі (4.45), (4.46) дорівнюють $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$, а власні функції - $X_n(x) = \sin n x$.

Тому, оскільки $\psi(x) = u'_t(x, 0) = 0$, розв'язок задачі (4.42)-(4.44) дорівнює

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) A_n \cos n t,$$

де коефіцієнти A_n дорівнюють коефіцієнтам Фур'є в розкладанні функції $\varphi(x) = u(x, 0) = x \sin x$, $0 < x < \pi$ у ряд Фур'є за синусами:

$$x \sin x = \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2 - 1)^2} \sin 2 k x.$$

Відповідь:

$$u(x, t) = \frac{\pi}{2} \sin x \cos t - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2 - 1)^2} \sin 2 k x \cos 2 k t.$$

Наостанок зазначимо, що за методом Фур'є можна також розв'язувати початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності, а також крайові задачі для рівняння Лапласа в простих областях (прямокутник, круг, циліндр, куля).

ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

1. У чому полягає крайова крайова задача для диференціального рівняння n -го порядку? Навести приклад крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку.

2. Які крайові умови називають однорідними (неоднорідними)?

3. Які крайові задачі називають однорідними (неоднорідними)?
4. Дайте визначення функції Гріна.
5. Наведіть умови, за яких функція Гріна існує, а крайова задача має єдиний розв'язок. Чому він дорівнює?
6. Який вигляд має самоспряжена крайова задача?
7. Наведіть необхідні і достатні умови існування розв'язку самоспряженої крайової задачі.
8. Який вигляд має задача Штурма-Ліувілля?
9. Що називають власними значеннями і власними функціями задачі Штурма-Ліувілля?
10. Наведіть властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.
11. Проілюструйте метод Фур'є розв'язання задач математичної фізики на прикладі рівняння коливань неоднорідної струни, яка закріплена на кінцях.

ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

Завдання 1. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі

$$y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Завдання 2. Знайти розв'язок крайової задачі:

- 1) $y'' - y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -1;$
- 2) $y'' + y' = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 0;$
- 3) $y'' - y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(1) - y(1) = 2;$
- 4) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
- 5) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

Завдання 3. Знайти власні значення і власні функції задачі Штурма-Ліувілля:

$$1) -y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0;$$

$$2) -y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Завдання 4. Знайти розв'язок рівняння

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

який задовольняє крайові умови

$$u'_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$$

і початкові умови

$$u(x, 0) = \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad u'_t(x, 0) = 0.$$

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 4

Завдання 1.

$$G = (t - 1)x, \quad (0 \leq x \leq t), \quad G = t(x - 1), \quad (t \leq x \leq 1).$$

Завдання 2.

$$1) \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - 2x; \quad 2) x + e^{-x} - e^{-1}; \quad 3) e^x - 2; \quad 4) 1 - \sin x - \cos x; \quad 5) \emptyset.$$

Завдання 3.

$$1) \quad \lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}, y_k = \cos \frac{k\pi x}{l}, k = 0, 1, 2, \dots; \quad 2) \quad \lambda_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, y_k = \sin \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, k = 1, 2, 3, \dots.$$

$$\text{Завдання 4. } u(x, t) = \frac{1}{9} \cos \frac{3x}{2} \cos 3t.$$

5. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Цей розділ математики присвячено знаходженню екстремумів числових функцій від однієї або кількох функцій.

5.1. Приклади класичних задач, які сприяли зародженню варіаційного числення

Приклад 5.1. Задача про брахістохрону. У 1696 році І. Бернуллі сформулював таку задачу. У вертикальній площині задані дві точки A та B . Знайти шлях AMB , яким тіло M , рухаючись під дією сили тяжіння, пройде з точки A в точку B за найкоротший час⁶. Цю криву називають брахістохроною (рис. 5.1).

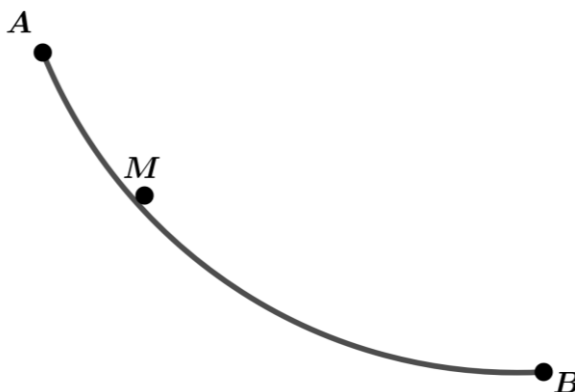


Рис. 5.1. Задача про брахістохрону

Розв'язання задачі про брахістохрону запропонували сам І. Бернуллі, а також Лейбніц і анонімний автор (Ньютон, як вважав І. Бернуллі). Роком народження варіаційного числення вважають 1696 рік – рік брахістохрони.

⁶ Подібну задачу обмірковував ще Галілей. Він довів, що рухаючись по хорді тіло прийде в кінцеву точку пізніше, ніж рухаючись по дузі кола, яка стягує цю хорду.

Формалізуємо задачу про брахістохрону. Уведемо на площині систему координат (x, y) , як на рис. 5.2. Нехай точка A співпадає з початком координат.

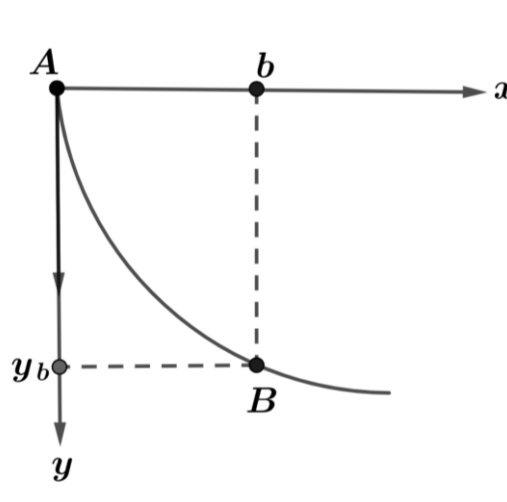


Рис. 5.2. Формалізація задачі про брахістохрону

Нехай функція $y = y(x)$ задає рівняння шляху, який з'єднує точки A та B . За законом збереження енергії знаходимо швидкість тіла маси m , яке рухається цим шляхом:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Тому час dt , за який пройдено шлях $dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$, дорівнює

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx}{\sqrt{2gy(x)}}.$$

Звідси впливає така формалізація задачі про брахістохрону:

$$J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = y_b. \quad (5.1)$$

Це так звана **задача з закріпленими кінцями**.

Якщо умову закінчення шляху в точці B замінити умовою його закінчення на прямій $x = b$, виникає **задача з одним вільним кінцем**:

$$J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad (5.2)$$

у якій крайову умову $y(b) = y_b$ замінює так звана умова трансверсальності, за якою оптимальний шлях має підходити до прямої $x = b$ під прямим кутом (приклад 5.35).

Приклад 5.2. Класична ізопериметрична задача. Задача Дідони.

Ще в давній Греції знали розв'язок задачі, яка сучасними термінами сформульована так.

Серед замкнених кривих на площині, які мають задану довжину, знайти криву, яка охоплює найбільшу площу.

Серед замкнених поверхонь у просторі, які мають задану площу, знайти поверхню, яка охоплює максимальний об'єм.

Розв'язок ізопериметричної задачі дає так звана **ізопериметрична нерівність**.

Якщо крива довжини L обмежує фігуру на площині, площа якої дорівнює S , то

$$L^2 \geq 4\pi S, \quad (5.3)$$

де рівність має місце тоді і тільки тоді, коли крива є колом.

Якщо поверхня площі S обмежує тіло у просторі, об'єм якого дорівнює V , то

$$S^3 \geq 36\pi V^2,$$

де рівність має місце тоді і тільки тоді, коли поверхня є сферою.

За легендою, фінікійська царівна Дідона і з нею невеликий загін мешканців міста Тір, рятуючись від переслідувань тирана-брата Дідони, рушили на захід уздовж узбережжя Середземного моря. Вибравши на північно-африканському узбережжі зручне місце (теперішня Туниська затока), Дідона вирішила заснувати тут поселення. Але місцеві мешканці були проти. Усе ж таки Дідона умовила їхнього ватажка Ярба, і він необережно погодився поступитися клаптиком землі, «який можна охопити шкірою бика».

Дідона розрізала шкуру бика на тоненькі смужки потім зв'язала їх у довгий ремінь і охопила ним значну територію, на якій приблизно в 825 році (або 814 році) до нашої ери заснувала місто Карфаген. Природно, Дідона бажала мати вихід до моря. Задачу, яка при цьому виникає, на відміну від ізопериметричної, називають задачею Дідони.

Перша задача Дідони. Серед усіх кривих довжини L , яка лежить у напівплощині, що обмежена прямою l , і кінці яких $A, B \in l$, знайти таку, яка разом із відрізком AB обмежує максимальну площу.

Розв'яжемо задачу, використовуючи ізопериметричну нерівність (5.3).

Нехай ACB є довільною можливою кривою довжини L , яка разом із відрізком AB охоплює площу S . Віддзеркалимо її відносно l і одержимо замкнену криву (рис. 5.3) довжиною $2L$, яка обмежує площу $2S$. За ізопериметричною нерівністю (5.3),

$$(2L)^2 \geq 4\pi 2S \Rightarrow S \leq L^2/2\pi.$$

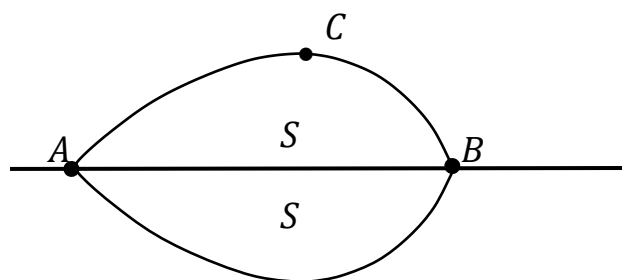


Рис. 5.3. Перша задача Дідони

Отже, максимальне значення площі може бути лише $L^2/2\pi$ і є таким, коли ACB є напівколом, що спирається на діаметр AB . Розв'язок є єдиним із точністю до зсуву вздовж l .

Друга задача Дідони відрізняється від першої задачі лише тим, що в ній, на відміну від першої, кінці $A, B \in l$ кривої є заданими.

Природно вважати за аналогією з першою задачею, що розв'язком є частина кола, для якого AB є хордою. Доповнимо цю частину до повного кола. Нехай ACB - довільна дуга довжини L (рис. 5.4).

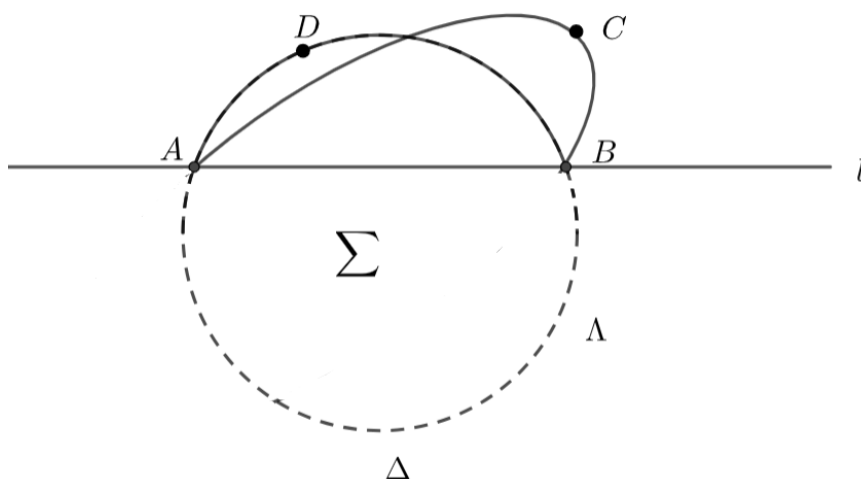


Рис. 5.4. Друга задача Дідони

Замкнена крива $ACB\Delta$ має довжини $L + \Lambda$ і обмежує площу $S + \Sigma$. За ізопериметричною нерівністю (5.3),

$$4\pi(S + \Sigma) \leq (L + \Lambda)^2 \Rightarrow S \leq \frac{1}{4\pi}(L + \Lambda)^2 - \Sigma.$$

Рівності, а отже, і максимальної площі досягають, коли $ACB\Delta$ є колом, тобто дуга ACB співпадає ADB .

Зазначимо, що коло залишається відповіддю в разі, якщо берегова лінія мало відрізняється від прямої (рис.5.5).

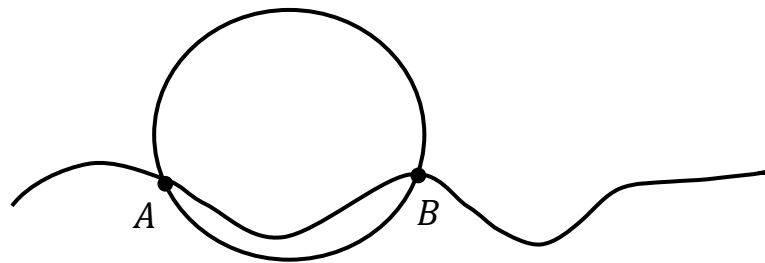


Рис. 5.5. Варіант задачі Дідони, коли берегова лінія мало відрізняється від прямої

Або коли в місті є канал, як на рис. 5.6.

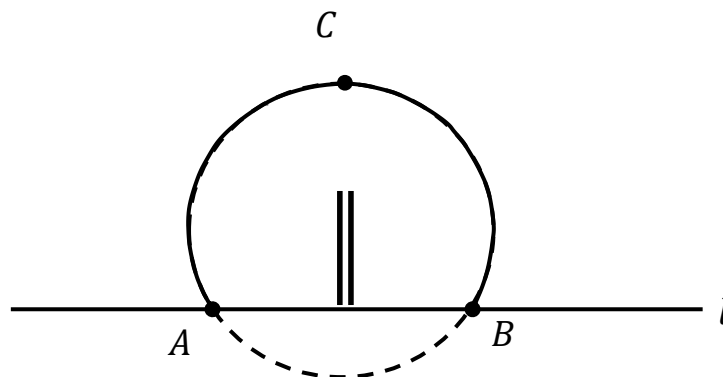


Рис. 5.6. Варіант задачі Дідони з каналом

Формалізуємо розглянуті задачі.

Ізопериметрична задача на площині. Нехай замкнена крива має довжину L і параметричне рівняння $x = x(t), y = y(t)$, де параметром є довжина дуги l , яку відраховують уздовж кривої від якоїсь її точки. Тому $\dot{x}^2(l) + \dot{y}^2(l) = 1$ (чому?), і оскільки крива замкнена, то $x(0) = x(L)$, $y(0) = y(L)$.

Ураховуючи формулу для площі фігури, яка обмежена кривою, що задана параметрично [12], одержуємо формалізацію ізопериметричної задачі на площині

$$S = \int_0^L x \dot{y} dl \rightarrow \max, \quad x(0) = x(L), \quad y(0) = y(L) \quad (5.4)$$
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1.$$

Задача Дідони. Виберемо осі координат, як на рис. 5.7.

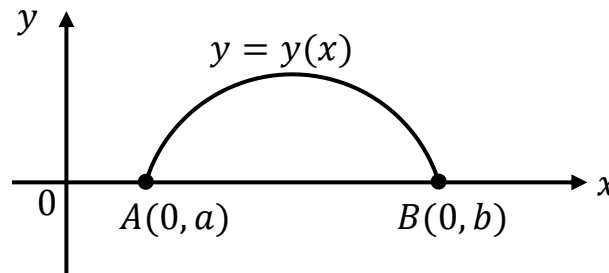


Рис. 5.7. Формалізація другої задачі Дідони

Тоді формалізація другої задачі Дідони буде такою:

$$S = \int_a^b y(x) dx \rightarrow \max, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (5.5)$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = L,$$

а першої задачі

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx \rightarrow \max, \quad y(x_1) = y(x_2) = 0, \quad (5.6)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = L,$$

де, на відміну від другої задачі, координати x_1, x_2 кінців кривої на осі Ox невідомі.

Приклад 5.3. Задача про поверхню обертання, яка має найменшу площу. Знайти криву з заданими кінцями A, B , з обертанням якої навколо осі Ox утвориться поверхня, що має найменшу площу (рис. 5.8).

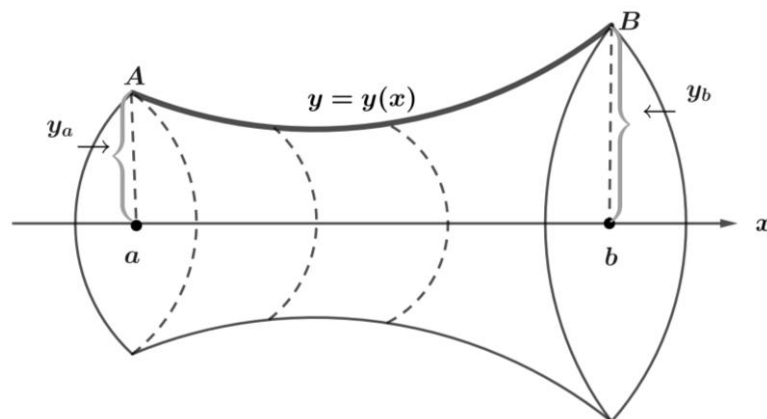


Рис. 5.8. Задача про поверхню обертання, яка має найменшу площу

Формалізуємо задачу. Нехай крива AB є графіком функції $y = y(x), a \leq x \leq b$. Ураховуючи формулу для площі поверхні обертання [12], одержуємо формалізацію задачі про поверхню обертання, яка має найменшу площу

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \rightarrow \min, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (5.7)$$

Приклад 5.4. Задача про геодезичні лінії. Задана поверхня, яка має рівняння $\varphi(x, y, z) = 0$. Потрібно серед усіх ліній на цій поверхні, які з'єднують дві задані точки A, B (рис. 5.9.), знайти ту, що має найменшу довжину.

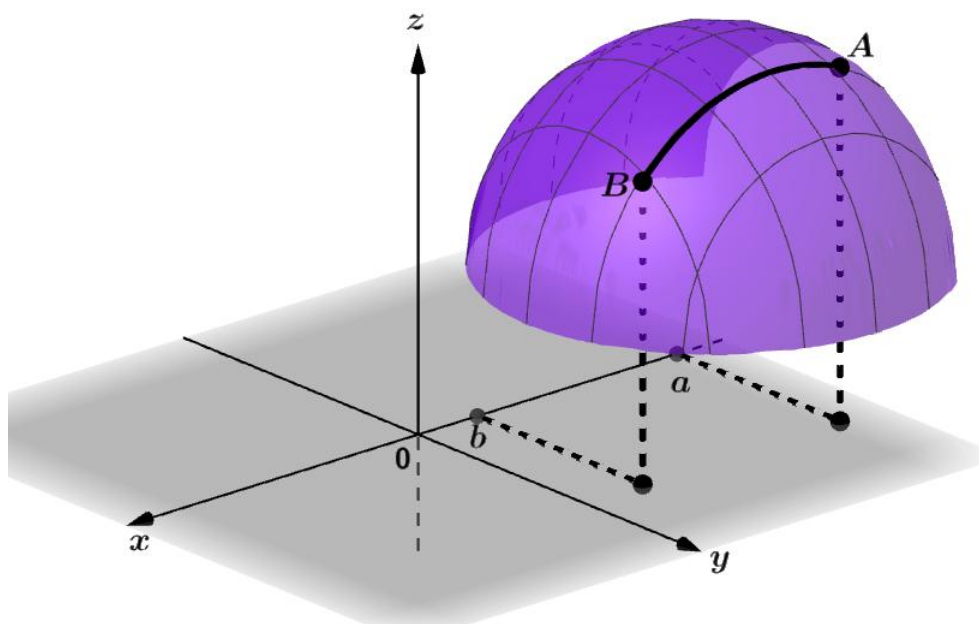


Рис. 5.9. Задача про геодезичні лінії

Такі найкоротші лінії називають геодезичними. Формалізуємо задачу. Ураховуючи формулу для диференціала дуги кривої

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + y'^2 + z'^2)dx^2,$$

одержуємо формалізацію задачі про геодезичні лінії

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \rightarrow \min, \quad (5.8)$$

де функції $y(x)$, $z(x)$ пов'язані умовою $\varphi(x, y, z) = 0$, $a = x_A$, $b = x_B$. Ця задача була розв'язана в 1697 році І. Бернуллі. Загальний метод розв'язання подібних задач запропонували Ейлер і Лагранж.

Приклад 5.5. Задача про найменшу площу поверхні, яка натягнута на замкнений контур. Серед усіх поверхонь, які натягнуті на заданий контур l у просторі, знайти таку поверхню, що має найменшу площу.

Формалізуємо задачу. Позначимо D область, яка обмежена проекцією на площину xOy контуру l . Нехай шукана поверхня має рівняння $z = z(x, y)$ (рис. 5.10).

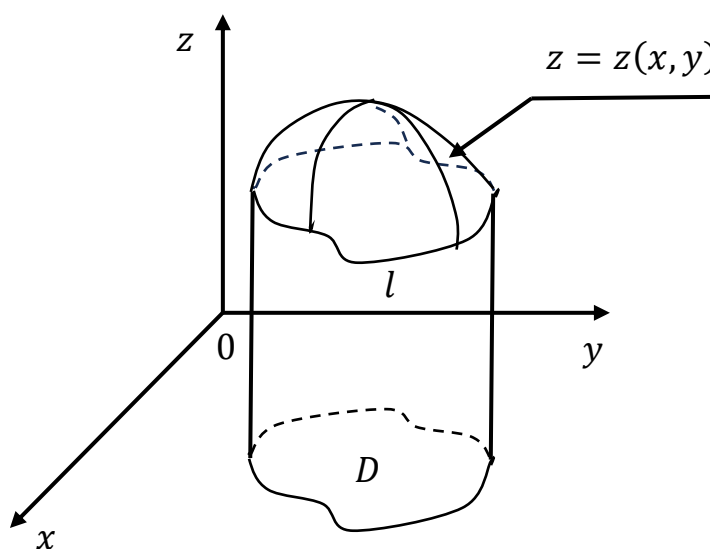


Рис. 5.10. Задача про найменшу площу поверхні, яка натягнута на замкнений контур

Ураховуючи формулу для площі поверхні [12], одержуємо формалізацію задачі

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \rightarrow \min, \quad (5.9)$$

$z(x, y)|_{(x, y) \in \partial D}$ дорівнює аплікаті відповідної точки на контурі l .

5.2. Функціонал. Його максимум і мінімум

У задачах, які були розглянуті в підрозд. 5.1, потрібно було шукати екстремуми числових функцій від функцій однієї або кількох змінних, а також кількох функцій.

Визначення 5.1. Нехай задана множина M функцій $y = y(x)$ і кожній функції $y \in M$ поставлено у відповідність число $J[y]$. Тоді кажуть, що на множині M задано **функціонал** $J[y]$.

Аналогічно визначають функціонали від функцій кількох змінних або кількох функцій.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 5.6. Нехай M є множиною неперервно диференційовних функцій на $[a, b]$. Тоді довжина графіка функції $y = y(x) \in M$ є функціоналом

$$l[y] = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Приклад 5.7. Нехай M є множиною функцій, в область визначення яких входить точка x_0 . Значення функцій у цій точці утворюють функціонал

$$J[y] = y(x_0).$$

Приклад 5.8. Обчислити функціонал $J[y] = \int_0^1 y'^2 dx$ за умов $y = x$,
 $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$.

$$J[x] = \int_0^1 dx = x|_0^1 = 1.$$

$$J[x^2] = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$$J[\sqrt[3]{x^2}] = \int_0^1 \frac{4}{9} x^{-2/3} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{x^{1/3}}{1/3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Визначення 5.2. Кажуть, що функція $y_0(x) \in M$ доставляє **мінімум** (максимум) функціоналу $J[y]$, $y \in M$, якщо для всіх функцій $y(x) \in M$, які є достатньо близькими до $y_0(x)$, виконана умова

$$J[y_0] < J[y] \quad (J[y_0] > J[y]).$$

Визначення близькості функцій залежить від виду функціонала і множини M .

5.3. Найпростіша задача варіаційного числення

5.3.1. Постановка задачі

Нехай функція $F(x, y, z)$ має неперевними всі похідні другого порядку. Потрібно знайти мінімум (максимум) функціонала

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (5.10)$$

серед неперервно диференційовних на відрізку $[a, b]$ функцій $y(x)$, які задовольняють крайові умови

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad (5.11)$$

тобто графіки яких з'єднують точки (a, y_a) , (b, y_b) (рис. 5.11).

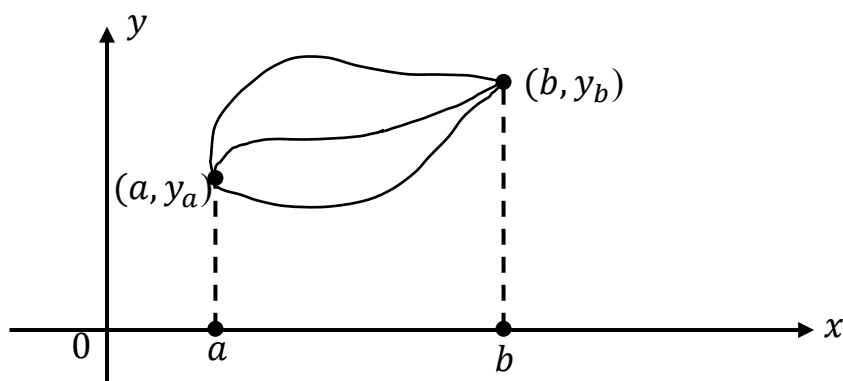


Рис. 5.11. Найпростіша задача варіаційного числення

Формальний запис задачі є таким:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \min(\max), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (5.12)$$

Множина неперервно диференційовних на відрізку $[a, b]$ функцій, на яких визначено функціонал (5.12), позначають $C^1[a, b]$. Мірою близькості двох функцій $y_1(x)$, $y_2(x) \in C^1[a, b]$ є величина

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} \{|y_1(x) - y_2(x)| + |y_1'(x) - y_2'(x)|\}.$$

5.3.2. Перша та друга варіації

Відомо, що приріст достатньо гладкої функції $y(x)$ можна записати як

$$y(x + \Delta x) - y(x) = dy(x) + \frac{1}{2}d^2y(x) + o((\Delta x)^2), \quad (5.13)$$

де $dy(x) = y'(x)\Delta x$, та $d^2y(x) = d(dy(x)) = y''(x)(\Delta x)^2$ – це відповідно перший і другий диференціали функції $y(x)$.

Зазначимо, що вирази для цих диференціалів можна одержати так.

Зафіксуємо x і Δx і розглянемо функцію $f(\alpha) = y(x + \alpha\Delta x)$. Тоді

$$dy(x) = f'(\alpha)|_{\alpha=0}, \quad d^2y(x) = f''(\alpha)|_{\alpha=0}. \quad (5.14)$$

З формули (5.13) виводять необхідні та достатні умови екстремуму функції $y(x)$.

Необхідні умови.

Нехай $x = x_0$ є точкою екстремуму функції $y(x)$. Тоді $dy(x_0) = 0$, і якщо x_0 є точкою мінімуму (максимуму), то $d^2y(x_0) \geq 0$ ($d^2y(x_0) \leq 0$).

Достатні умови. Нехай $dy(x_0) = 0$ і $d^2y(x_0) > 0$ ($d^2y(x_0) < 0$). Тоді $x = x_0$ є точкою мінімуму (максимуму) функції $y(x)$.

Далі в цьому підрозділі ми визначимо для функціонала (5.10) аналоги першого та другого диференціалів, а також введемо для цього функціонала аналог формули (5.13), із якої в подальших пунктах введемо необхідні і достатні умови його екстремуму.

Нехай функція $F(x, y, z)$ є неперервно диференційовною достатню кількість разів.

Зафіксуємо функцію $y(x) \in C^1[a, b]$ і її приріст $h(x) \in C^1[a, b]$ і побудуємо, використовуючи функціонал $J[y]$ (5.10), функцію $\Phi(\alpha) = J[y + \alpha h]$.

За формулою Тейлора, для цієї функції маємо

$$\Phi(\alpha) = \Phi(0) + \Phi'(\alpha)|_{\alpha=0} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \Phi''(\alpha)|_{\alpha=0} \cdot \alpha^2 + \dots \quad (5.15)$$

Вирази $\delta J = \Phi'(\alpha)|_{\alpha=0}$ та $\delta^2 J = \Phi''(\alpha)|_{\alpha=0}$ називають відповідно **першою та другою варіацією** (першим і другим диференціалом) функціонала $J[y]$ (5.10). Узагалі варіація порядку n дорівнює $\delta^n J = \Phi^{(n)}(\alpha)|_{\alpha=0}$.

Легко побачити, що $\delta^n J = o(\|h\|^{n-1})$. Тому з формули (5.15) за умови, що $\alpha = 1$, випливає формула для приросту функціоналу $J[y]$ (5.10), яка є аналогом (5.13),

$$J[y + h] - J[y] = \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J + o(\|h\|^2). \quad (5.16)$$

Зазначимо, що варіації є функціоналами від функцій $h(x)$. Ці функціонали залежать від функції $y(x)$.

Обчислимо першу та другу варіації для функціонала $J[y]$ (5.10).

Оскільки

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b [F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')] dx,$$

то диференціюючи під знаком інтеграла, маємо

$$\Phi'(\alpha) = \int_a^b [F'_y(x, y + \alpha h, y' + \alpha h') h + F'_{y'}(x, y + \alpha h, y' + \alpha h') h'] dx,$$

$$\begin{aligned}\Phi''(\alpha) = & \int_a^b [F''_{y'y'}(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')h'^2 + \\ & + 2F''_{yy'}(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')hh' + F''_{yy}(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')h^2]dx,\end{aligned}$$

звідки одержуємо

$$\delta J = \Phi'(0) = \int_a^b [F'_y(x, y, y')h + F'_{y'}(x, y, y')h']dx, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}\delta^2 J = \Phi''(0) = & \int_a^b [F''_{y'y'}(x, y, y')h'^2 + 2F''_{yy'}(x, y, y')hh' + \\ & + F''_{yy}(x, y, y')h^2]dx.\end{aligned} \quad (5.18)$$

Досліджуючи в подальших пунктах функціонал $J[y]$ (5.10) на екстремум, ми будемо використовувати наступну теорему.

Теорема 5.1. Нехай у функціоналі $J[y]$ (5.10) функції $y = y(x)$ задовольняють крайові умови (5.11), а його варіації розглянуто на функціях $h(x)$, які задовольняють умови $y(a) = y(b) = 0$.

Тоді, якщо функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12), то для варіацій функціонала $J[y]$ (5.10), які відповідають цій функції,

$$\delta J = 0, \quad \delta^2 J \geq 0, \quad (\delta^2 J \leq 0). \quad (5.19)$$

Якщо ж для варіацій функціонала $J[y]$ (5.10), які відповідають функції $y = y_0(x)$,

$$\delta J = 0, \quad \delta^2 J > 0, \quad (\delta^2 J < 0), \quad (5.20)$$

то ця функція є розв'язком задачі (5.12).

Доведення. Нехай функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12). Тоді $\alpha = 0$ є точкою мінімуму (максимуму) відповідної функції $\Phi(\alpha)$ і тому виконано умови (5.19).

Нехай виконано умови (5.20). Тоді, виходячи з формули (5.16), функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12).

5.3.3. Перша необхідна умова екстремуму. Рівняння Ейлера

За теоремою 5.1 і формулою (5.17), якщо функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12), то

$$\int_a^b [F'_y(x, y_0, y_0')h + F'_{y'}(x, y_0, y_0')h']dx = 0, \quad (5.21)$$

$$\forall h = h(x) \in C^1[a, b], \quad h(a) = h(b) = 0.$$

Щоб з'ясувати звідси, яке рівняння має задовольняти функція $y = y_0(x)$, проінтегруємо частинами другий член у підінтегральному виразі.

$$\int_a^b F'_{y'}(x, y_0, y_0')h' dx = F'_{y'}(x, y_0, y_0') h(x) \Big|_a^b - \quad (5.22)$$

$$- \int_a^b [F'_{y'}(x, y_0, y_0')] h(x) dx = - \int_a^b [F'_{y'}(x, y_0, y_0')] h(x) dx,$$

оскільки позаінтегральний член у формулі (5.22) дорівнює нулю. Підставимо (5.22) у вираз (5.21) і одержимо

$$\int_a^b \{F'_y(x, y_0, y_0') - [F'_{y'}(x, y_0, y_0')]'\} h dx = 0$$

для будь-якої функції $h = h(x) \in C^1[a, b]$, такої, що $h(a) = h(b) = 0$.

Звідси можна зробити висновок (як показано, наприклад, у підручнику [23]), що вираз у фігурних дужках дорівнює нулю тотожно. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 5.2. Якщо функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12), то вона задовольняє ДР

$$F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') = 0. \quad (5.23)$$

Це ДР називають **рівнянням Ейлера**, а його розв'язки (інтегральні криві) - **екстремалами функціонала (5.10)**. Застосувавши формулу для похідної складеної функції, запишемо рівняння (5.23) у вигляді

$$F'_y(x, y, y') - F''_{xy'}(x, y, y') - F''_{yy'}(x, y, y')y' - F''_{y'y'}(x, y, y')y'' = 0, \quad (5.24)$$

звідки бачимо, що рівняння Ейлера є ДР другого порядку. (Винятком є випадок, коли $F''_{y'y'} \equiv 0$. Цей випадок далі не розглянуто.)

Зауваження. Незважаючи на те, що у функціоналі (5.10) функції $y = y(x) \in C^1[a, d]$, можна довести [51], що в кожній точці екстремалі, у якій $F''_{y'y'} \neq 0$, екстремаль має неперервну другу похідну. Тому для таких екстремалей перехід від виразу (5.23) до (5.24) є можливим.

Оскільки рівняння Ейлера є ДР другого порядку, то його загальний розв'язок містить дві константи, які знаходять виходячи з крайових умов (5.11).

Приклад 5.9. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx \rightarrow extr, y(0) = y(1) = 0.$$

Тут $F(x, y, y') = y'^2 + xy \Rightarrow F'_y = x, F'_{y'} = 2y'$. ДР Ейлера має вигляд

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = x - 2y'' = 0.$$

Тому екстремалі дорівнюють $y(x) = \frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2$. Використовуючи крайові умови, знаходимо сталі C_1, C_2 :

$$C_2 = y(0) = 0, \quad \frac{1}{12} + C_1 + C_2 = y(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{12}, \quad C_2 = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{1}{12}(x^3 - x).$$

Приклад 5.10. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$J[y] = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx \rightarrow extr, y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$\text{Тут } F(x, y, y') = 4y \cos x + y'^2 - y^2 \Rightarrow F'_y = 4 \cos x - 2y, \quad F'_{y'} = 2y'.$$

ДР Ейлера має вигляд

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 4 \cos x - 2y - 2y'' = 0.$$

Маємо ЛНДР

$$y'' + y = 2 \cos x.$$

Використовуючи правила з посібника [39], знаходимо його загальний розв'язок (екстремалі функціонала):

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x.$$

Використовуючи крайові умови, знаходимо сталі: $C_1 = y(0) = 0$,
 $-C_1 = y(\pi) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, константа C_2 є довільною.

Відповідь: $y = (C + x) \sin x$.

5.3.4. Перші інтеграли рівняння Ейлера

Розглянемо два важливих випадки, коли рівняння Ейлера має перший інтеграл, тобто є звідним до ДР першого порядку.

1. Нехай функція F у функціоналі (5.10) не залежить від x , тобто $F = F(y, y')$.

Тоді в ДР (5.24) другий доданок відсутній, тому після множення на y' це ДР можна записати як

$$\frac{d}{dx} [F(y, y') - y' F'_{y'}(y, y')] = 0.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[F - y'F_{y'}] &= F_y'y' + F_{y'}y'' - y''F_{y'} - F_{yy'}y'^2 - F_{y'y'}y'y'' = \\ &= y'(F_y' - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'').\end{aligned}$$

Отже, рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C_1, \quad (5.25)$$

який називають **інтегралом енергії**.

2. Нехай функція F у функціоналі (5.10) не залежить від y , тобто $F = F(x, y')$. Тоді в рівнянні Ейлера $F_y' = 0$. Тому вона набуває вигляду $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$ і, отже, має перший інтеграл

$$F_{y'}(x, y') = C_1, \quad (5.26)$$

який називають **інтегралом імпульсу**.

Зазначимо, що ДР (5.26) може бути проінтегровано або розв'язанням відносно y' та інтегруванням, або методом параметризації [35].

Приклад 5.11. Розв'язання задачі про брахістохрону (приклад 5.1, задача (5.1)).

У цій задачі $F = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = F(y, y')$ не залежить від x . Тому рівняння Ейлера має перший інтеграл (5.25). Оскільки

$$F_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

то, використовуючи цей інтеграл, маємо

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \Rightarrow$$

$$y(1+y'^2) = C_1. \quad (5.27)$$

ДР (5.27) можна звести до ДР з відокремлюваними змінними, однак зручніше виразити x та y через параметр t_1 , зробивши заміну

$$y' = ctg t_1 \Rightarrow y = \frac{C_1}{1+ctg^2 t_1} = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t_1);$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = C_1(1 - \cos 2t_1)dt_1 \Rightarrow x = \frac{C_1}{2}(2t_1 - \sin 2t_1) + C_2.$$

Оскільки екстремаль проходить через початок координат, то $C_2 = 0$. Позначимо $2t_1 = t$ і одержимо **циклоїду**

$$x = \frac{C_1}{2}(t - \sin t), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t),$$

яка утворена з коченням круга з радіусом $R = \frac{C_1}{2}$ по осі Ox (рис. 5.12).

Радіус циклоїди обчислюють, виходячи з умови її проходження через задану точку B . Зазначимо, що в разі, коли $b > \pi y_b$, траєкторія руху частково розташована нижче, ніж кінцева точка B (рис. 5.13).

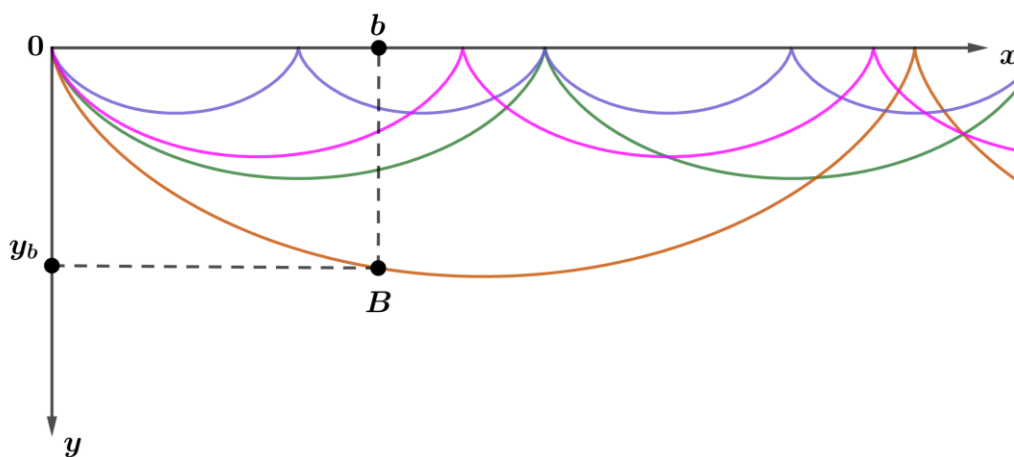


Рис. 5.12. Розв'язок задачі про брахістохрону

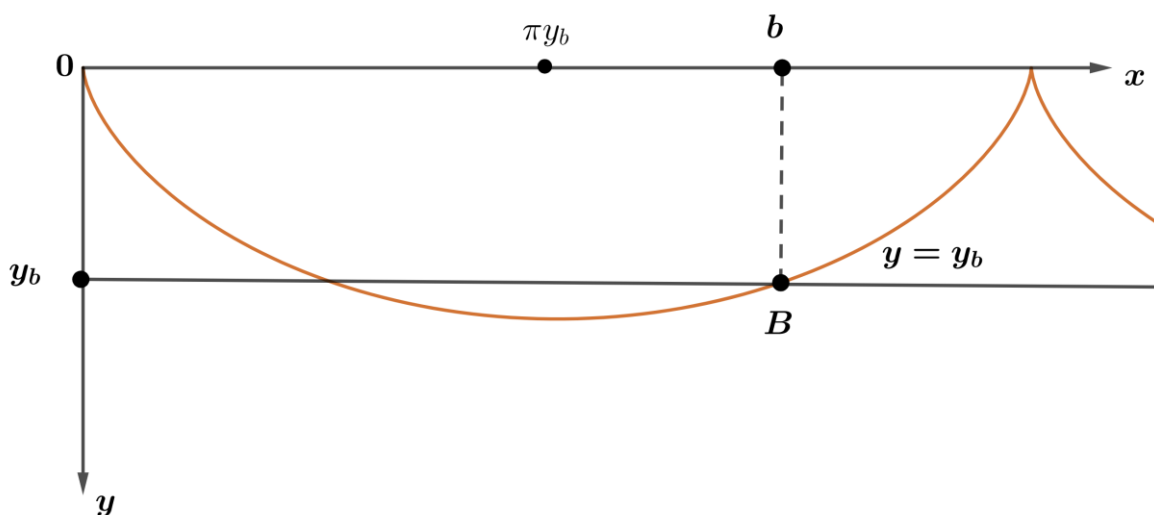


Рис. 5.13. Випадок, коли траєкторія руху частково розташована нижче, ніж кінцева точка B

Приклад 5.12. Розв'язання задачі про найменшу поверхню обертання (приклад 5.3, задача (5.7)).

У цій задачі $F = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} = F(y, y')$ не залежить від x . Тому рівняння Ейлера має перший інтеграл (5.25). Оскільки $F_{y'} = 2\pi \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$, то, використовуючи цей інтеграл, маємо

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Далі аналогічно попередньому прикладу зручніше виразити x та y через параметр t , зробивши заміну $y' = \operatorname{sh} t \Rightarrow y = C_1 \operatorname{ch} t$;
 $x = \frac{dy}{y'} = C_1 dt \Rightarrow x = C_1 t + C_2$. Одержали параметричне рівняння екстремалі

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = C_1 \operatorname{ch} t,$$

звідки $y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x-C_2}{C_1}$. Константи C_1 і C_2 обчислюють виходячи з умови, що крива проходить через задані точки A та B . Крива, яка дає найменшу площу поверхні обертання, є ланцюговою лінією, а відповідну поверхню називають **катеноїдом**.

Приклад 5.13. Геодезичні лінії на сфері (приклад 5.4).

Квадрат диференціала дуги кривої на сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, рівняння якої у сферичних координатах є таким:

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= \cos \theta, \end{aligned}$$

дорівнює (перевірте)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 = (1 + \sin^2 \theta \varphi'^2) d\theta^2,$$

де φ' - похідна від φ по θ .

Тому геодезичні лінії на сфері є екстремальними для функціонала

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2} d\theta.$$

Тут $F = \sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2} = F(\theta, \varphi')$ не залежить від φ . Тому рівняння Ейлера має перший інтеграл (5.26). Оскільки $F_{\varphi'} = \frac{\sin^2 \theta \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2}}$, то, використовуючи цей інтеграл, маємо

$$\frac{\sin^2 \theta \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} = C_1. \quad (5.28)$$

За умови, що $C_1 = 0$, маємо розв'язок $\varphi = C$. Тобто геодезичними будуть усі меридіани сфери, тобто всі великі кола, які проходять через полюси сфери, де $\theta = 0$ і $\theta = \pi$. Оскільки полюси можна вибрати довільно, то всі великі кола сфери будуть геодезичними. Доведемо, що нові геодезичні лінії не з'являються, коли $C_1 \neq 0$.

Нехай $C_1 \neq 0$. Тоді з формули (5.28) виводимо, що

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{C_1}{\sqrt{\sin^4 \theta - C_1^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{C_1}{\sqrt{1 - \frac{C_1^2}{\sin^2 \theta}}} \\ &= -(d \operatorname{ctg} \theta) \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2 - C_1^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}} = - \frac{d \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{\frac{1 - C_1^2}{C_1^2} - \operatorname{ctg}^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Проінтегруємо одержану рівність і, позначаючи $\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}$ знову C_1 , одержимо

$$\varphi = \arccos C_1 \operatorname{ctg} \theta + C_2 \Rightarrow \frac{\cos(\varphi - C_2)}{C_1} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\cos C_2}{C_1} \cos \varphi \sin \theta + \frac{\sin C_2}{C_1} \sin \varphi \sin \theta.$$

Повертаючись від сферичних координат до декартових, одержимо $z = \alpha x + \beta y$. Отже, і в цьому випадку геодезичними виявилися великі кола, які утворені перетинанням сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ з площинами $z = \alpha x + \beta y$ (рис. 5.14).

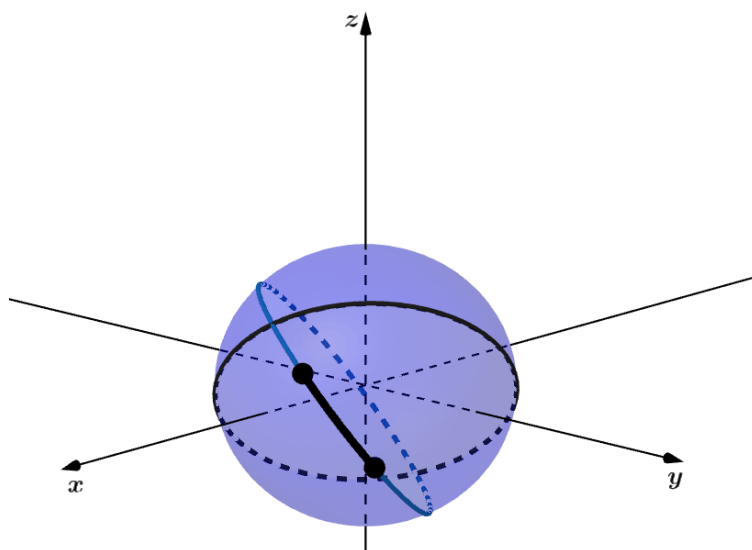


Рис. 5.14. Геодезичні лінії на сфері

Приклад 5.14. Знайти екстремалі для функціонала

$$J[y] = \int_a^b \frac{y}{y'^2} dx.$$

Тут $F = \frac{y}{y'^2} = F(y, y')$ не залежить від x . Тому ДР Ейлера має перший інтеграл (5.25) Оскільки $F'_{y'} = -\frac{2y}{y'^3}$, то, використовуючи цей інтеграл, маємо

$$\begin{aligned} \frac{y}{y'^2} + y' \cdot \frac{2y}{y'^3} = C_1 &\Rightarrow \frac{y}{y'^2} = C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = C_1 x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\sqrt{y} = C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Отже, екстремалі дорівнюють $y = (C_1 x + C_2)^2$.

Приклад 5.15. Знайти екстремалі для функціонала

$$J[y] = \int_a^b y'(1 + x^2 y') dx.$$

Тут $F = y'(1 + x^2 y') = F(x, y')$ не залежить від y . Тому ДР Ейлера має інтеграл (5.26). Оскільки $F'_{y'} = 1 + 2x^2 y'$, то, використовуючи цей інтеграл, маємо

$$1 + 2x^2 y' = C_1 \Rightarrow y' = \frac{C_1}{x^2}.$$

Отже, екстремалі дорівнюють $y = \frac{C_1}{x} + C_2$.

5.3.5. Деякі окремі випадки рівняння Ейлера

1) Функція F залежить лише від y' , тобто $F = F(y')$. Рівняння Ейлера має вигляд $F''_{y'} y'' = 0$, оскільки $F'_y \equiv 0$. Його загальний розв'язок $y = C_1 x + C_2$ (чому?). Отже, у цьому випадку екстремалами є прямі.

2) Функція F не залежить від y' , тобто $F = F(x, y)$. Рівняння Ейлера має вигляд $F'_y(x, y) = 0$, оскільки $F'_{y'} \equiv 0$. Рівняння $F'_y(x, y) = 0$ не є

диференціальним. Його розв'язок не містить довільних констант і тому може задовольняти крайові умови (5.11) лише у виключних випадках.

3) Функція F лінійно залежить від y' , тобто $F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$. Рівняння Ейлера має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} N(x, y) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} y' = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Рівняння (5.29) не є диференціальним. Його розв'язок, як і в попередньому випадку, може задовольняти крайові умови (5.11) лише у виключних випадках.

Якщо ж $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, то вираз $Mdx + Ndy$ є диференціалом, і тому значення інтеграла

$$J[y] = \int_a^b \left(M + N \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_a^b Mdx + Ndy$$

залежать лише від координат початку та кінця кривої $y = y(x)$ і, отже, є сталим. Варіаційна задача втрачає сенс.

Приклад 5.16. Знайти криву на площині, яка з'єднує дві задані точки $A(a, y_a)$ і $B(b, y_b)$ і має мінімальну довжину.

Оскільки диференціал дуги кривої $y = y(x)$ дорівнює $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$, то маємо задачу

$$L = J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \min, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Тут $F = \sqrt{1 + y'^2} = F(y')$ залежить лише від y' . Тому відповіддю є пряма, яка проходить через дві задані точки:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}$$

або

$$y = \frac{y_b - y_a}{b - a}(x - a) + y_a.$$

Приклад 5.17. Геодезичні лінії на круговому циліндрі.

Квадрат диференціала дуги на круговому циліндрі $x^2 + y^2 = 1$, рівняння якого в циліндричних координатах є таким:

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, \\ y &= \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

дорівнює (перевірте)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + dz^2 = (1 + z'^2)d\varphi^2,$$

де z' - похідна z за φ .

Тому геодезичні лінії на круговому циліндрі є екстремалами функціонала

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + z'^2} d\varphi.$$

Тут $F = F(z')$ залежить лише від z' . Тому аналогічно попередньому прикладу маємо

$$z = C_1\varphi + C_2.$$

Тобто геодезичними є гвинтові лінії (рис. 5.15)

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, \\ y &= \sin \varphi, \\ z &= C_1\varphi + C_2. \end{aligned}$$

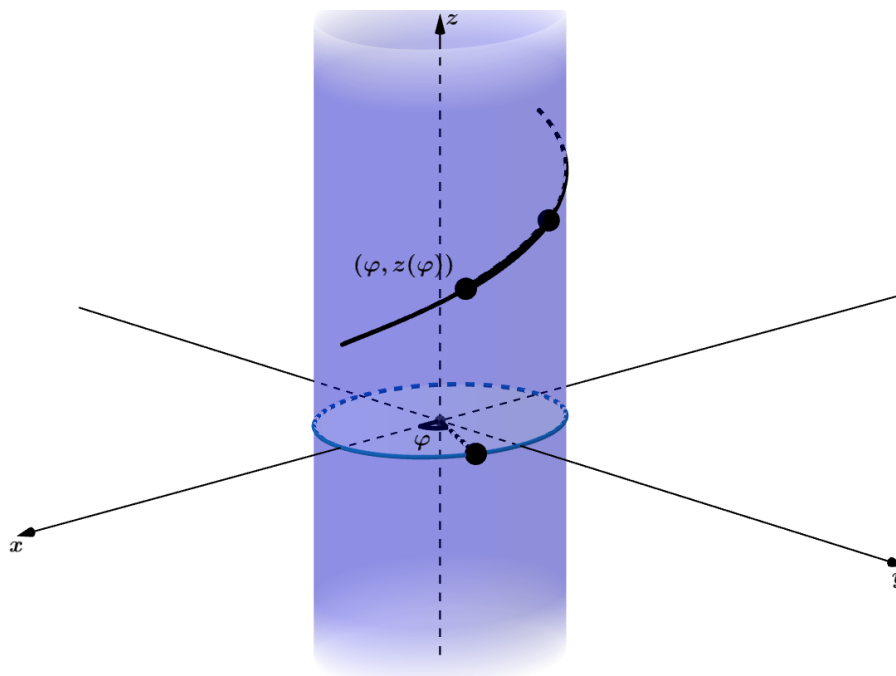


Рис. 5.15. Геодезичні лінії на круговому циліндрі

Приклад 5.18. Знайти екстремалі для функціонала

$$J[y] = \int_a^b (3x^2y^2 + 2x^3yy')dx. \quad (5.30)$$

Тут $F = 3x^2y^2 + 2x^3yy' = M + Ny'$ лінійно залежить від y' . Оскільки

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(2x^3y)}{\partial x} = 6x^2y,$$

то підінтегральний вираз у функціоналі (5.30) є повним диференціалом, і тому задача на екстремум для функціонала (5.30) не має сенсу.

5.3.6. Друга необхідна умова екстремуму – умова Лежандра

Нехай екстремаль $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12). Тоді, за теоремою 5.1, друга варіація $\delta^2 J$ (5.18), яка відповідає y_0 , має бути у випадку мінімуму недодатною:

$$\delta^2 J \geq 0, \quad (5.31)$$

а у випадку максимуму невід'ємною:

$$\delta^2 J \leq 0. \quad (5.32)$$

Виведемо з нерівностей (5.31), (5.32) умови, які будуть зручними для перевірки. Для цього проінтегруємо частинами другий доданок у виразі (5.18) для другої варіації:

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b F''_{yy'} hh' dx &= \int_a^b F''_{yy'} dh^2 = F''_{yy'} h^2 \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} F''_{yy'} \right) h^2 dx = \\ &= - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} F''_{yy'} \right) h^2 dx, \end{aligned}$$

оскільки $h(a) = h(b) = 0$. Тому

$$\delta^2 J = \int_a^b (P(x)h'^2 + Q(x)h^2)dx, \quad (5.33)$$

де

$$\begin{aligned} P(x) &= F''_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)), \\ Q(x) &= F''_{yy}(x, y_0(x), y'_0(x)) - \frac{d}{dx} F''_{yy'}(x, y_0(x), y'_0(x)). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Теорема 5.3. Необхідна умова Лежандра.

Нехай функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12). Тоді у випадку мінімуму має бути виконана умова

$$F''_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) \geq 0, \quad a \leq x \leq b,$$

а у випадку максимуму – умова

$$F''_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) \leq 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Доведення. Нехай функція $y = y_0(x)$ доставляє, наприклад, мінімум функціоналу (5.10), але $F''_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) < 0$, коли $a < x_0 - \beta < x < x_0 + \beta < b$. Розглянемо функцію

$$\eta(x) = \begin{cases} \alpha \frac{\sin^2 \pi(x - x_0)}{\varepsilon}, & |x - x_0| \leq \varepsilon < \beta, \\ 0, & |x - x_0| > \varepsilon. \end{cases} \quad (5.35)$$

Виберемо ε достатньо малим. Тоді залишаємо читачеві перевірити, що:

- 1) для $h = \eta$ друга варіація $\delta^2 J$ (5.33) буде < 0 ;

2) з вибраним ε величину $\|\eta\|$ можна зробити за рахунок α , скільки завгодно малою. Це протирічить тому, що y_0 доставляє мінімум.

Зауваження. Нехай функція $y = y_0(x)$ є екстремаллю для функціонала (5.10), яка задовольняє крайові умови (5.11). Тоді, якщо $F''_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x))$ змінює знак, коли $a \leq x \leq b$, функція $y = y_0(x)$ доставляє функціоналу $J[y]$ (5.10) мінімакс.

Доведіть це твердження самостійно, використовуючи функції типу (5.35).

5.3.7. Третя необхідна умова екстремуму – умова Якобі

Нехай функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12).

Позначимо у функціоналі (5.33) $h = y$. Тоді рівняння Ейлера для нього буде

$$-(Py')' + Qy = 0. \quad (5.36)$$

Його називають **рівнянням Якобі** для початкового функціонала (5.10), яке відповідає $y_0(x)$. У теорії диференціальних рівнянь ДР вигляду (5.36) називають ДР Штурма-Ліувілля.

Розглянемо розв'язок $y(x)$ рівняння Якобі, який задовольняє початкові умови $y(a) = 0, y'(a) = 1$. Перший нуль $a_1 > a$ розв'язку $y(x)$ називають точкою, яка спряжена з точкою a .

Теорема 5.4. Необхідна умова Якобі. Нехай функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12). Тоді на інтервалі (a, b) немає точки, яка спряжена з точкою a .

Зауваження. Нехай функція $y = y_0(x)$ є екстремаллю функціонала (5.10), яка задовольняє початкові умови (5.11). Тоді, якщо на інтервалі (a, b) є точка, яка спряжена з точкою a , функція $y = y_0(x)$ доставляє функціоналу $J[y]$ (5.10) мінімакс.

5.3.8. Достатня умова екстремуму – умова Якобі

Теорема 5.5. Нехай функція $y = y_0(x)$ є екстремаллю функціонала (5.10), яка задовольняє початкові умови (5.11).

Нехай для неї виконана **посилена умова Лежандра**

$$F''_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) > 0 \quad (F''_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) < 0), \quad a \leq x \leq b.$$

Нехай для рівняння Якобі (5.36), (5.34), яке відповідає $y_0(x)$, виконана **посилена умова Якобі**: на відрізку $[a, b]$ немає точок, спряжених із точки a .

Тоді функція $y = y_0(x)$ реалізує мінімум (максимум) для задачі (5.12).

Доведення. За умовою, не дорівнює нулю на проміжку $a < x \leq b$ розв'язок $y(x)$ рівняння Якобі, який задовольняє початкові умови $y(a) = 0, y'(a) = 1$. Оскільки розв'язки цього рівняння залежать від початкових умов неперервно [35], то не дорівнює нулю на відрізку $a \leq x \leq b$ розв'язок $y_\varepsilon(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови $y(a) = \varepsilon, y(b) = 1$, де число ε є достатньо малим. Тому функція $u(x) = -\frac{Py'_\varepsilon}{y_\varepsilon}$ визначена на відрізку $[a, b]$.

Ця функція задовольняє ДР Ріккати

$$u^2 = P(Q + u'). \quad (5.37)$$

Дійсно, підставимо $u(x)$ у ДР (5.37) і одержимо

$$\frac{1}{P} \left(-\frac{Py'_\varepsilon}{y_\varepsilon} \right)^2 = Q - \frac{(Py'_\varepsilon)' y_\varepsilon - Py_\varepsilon'^2}{y_\varepsilon^2} \Rightarrow 0 = Q - \frac{(Py'_\varepsilon)'}{y_\varepsilon}.$$

Але остання рівність є справедливою, оскільки $y_\varepsilon(x)$ є розв'язком рівняння Якобі (5.36).

Тепер за допомогою функції $u(x)$ доведемо, що $\delta^2 J > 0$ ($\delta^2 J < 0$). Для цього додамо до інтеграла (5.33) нульовий (оскільки $h(a) = h(b) = 0$) доданок

$$\int_a^b (2h'hu + u'h^2)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}(h^2u)dx = 0$$

і одержимо

$$\delta^2 J = \int_a^b (Ph'^2 + 2uh'h + (Q + u')h^2)dx = \int_a^b P\left(h' + \frac{u}{P}h\right)^2 dx, \quad (5.38)$$

де друга рівність є наслідком виразу (5.37) і умови $P \neq 0$.

Зазначимо, що $h' + \frac{u}{P}h \neq 0$, коли $h \neq 0$, оскільки в іншому разі h є розв'язком ЛОДР першого порядку, який задовольняє початкову умову $h(a) = 0$ і тому дорівнює нулю, за теоремою єдиності розв'язку задачі Коші.

Отже, оскільки $P > 0$ ($P < 0$), а $h' + \frac{u}{P}h \neq 0$, коли $h \neq 0$, то, за формулою (5.38), $\delta^2 J > 0$, ($\delta^2 J < 0$), коли $h \neq 0$, і тому, за теоремою 5.1, $y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.12). Теорему доведено.

Приклад 5.19. Розв'язати задачу

$$\int_0^b (x^2 y - y'^2) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0, y(b) = c.$$

$$\text{Тут } F = x^2 y - y'^2 \Rightarrow F'_y = x^2, \quad F'_{y'} = -2y'.$$

ДР Ейлера має вигляд

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = x^2 + 2y'' = 0.$$

Тому екстремалі дорівнюють

$$y = -\frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2.$$

Існує єдина екстремаль

$$y = \frac{b^3 x - x^4}{24} + \frac{c}{b} x, \quad (5.39)$$

яка задовольняє задані крайові умови.

Оскільки $P = F''_{y'y'} = -2 < 0$, то посилена умова Лежандра виконана.

Оскільки $Q = F''_{yy} + F''_{yy'} = 0$, то рівняння Якобі має вигляд

$$-(Py')' + Qy = 2y'' = 0.$$

Його розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, дорівнює $y = x$. Він не має нулів на $(0, \infty)$. Тому функція (5.39) реалізує максимум у задачі $\forall b > 0, c$.

Зауваження. Рівняння Ейлера та Якобі співпадають і мають вигляд формули (5.36) для функціонала вигляду

$$J[y] = \int_a^b (P(x)y'^2 + Q(x)y^2) dx.$$

Доведіть зауваження самостійно.

Приклад 5.20. Розглянемо задачу

$$J[y] = \int_a^b (Py'^2 + Qy^2)dx \rightarrow \min, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (5.40)$$

де $P > 0$, Q є сталими. За останнім зауваженням, рівняння Ейлера та Якобі для функціонала (5.40) мають вигляд

$$-Py'' + Qy = 0. \quad (5.41)$$

Тому функція $y = 0$ є екстремаллю. Якщо $Q \geq 0$, то ця функція реалізує мінімум (чому?).

Нехай $Q < 0$. Тоді розв'язок рівняння Якобі (5.41), який задовольняє початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = 1$, дорівнює (чому?)

$$y(x) = \frac{\left(\sin \sqrt{\frac{|Q|}{P}}(x - a) \right)}{\sqrt{\frac{|Q|}{P}}}.$$

Його перший нуль $a_1 > a$ (точка, яка спряжена з точкою a) дорівнює $a_1 = a + \sqrt{\frac{P}{|Q|}} \cdot \pi$. Тому, за теоремою 5.5, якщо $b - a < \sqrt{\frac{P}{|Q|}}$ ($b - a > \sqrt{\frac{P}{|Q|}}$), $y = 0$ є (не є) розв'язком задачі (5.40).

5.4. Узагальнення найпростішої задачі

Далі стисло розглянемо різні узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення. Ці узагальнення розглядаємо для найпростіших

ситуацій і обмежуємося лише необхідними умовами екстремуму. При цьому локальні властивості функцій, за яких справедливі теореми, не формулюємо.

5.4.1. Функціонали, які залежать від похідних вищого порядку

Розглянемо задачу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx \rightarrow extr, \quad (5.42)$$

$$J[y] = y(a) = y_a, \quad y'(a) = y'_a, \quad y(b) = y_b, \quad y'(b) = y'_b.$$

Теорема 5.6. Якщо функція $y(x)$ є розв'язком задачі (5.42), то вона задовольняє ДР

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} = 0.$$

Його називають **рівнянням Ейлера-Пуассона**. Це ДР четвертого порядку, і тому його загальний розв'язок залежить від чотирьох довільних сталих, яких у принципі достатньо, щоб задовільнити чотири крайові умови.

Функціонали з похідними порядку $n > 2$ розглядають аналогічно. Рівняння Ейлера-Пуассона має для них порядок $2n$.

Приклад 5.21. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2) dx \rightarrow extr,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$\text{Тут } F = y''^2 - y^2 \Rightarrow F'_y = -2y, \quad F'_{y'} = 0, \quad F'_{y''} = 2y''.$$

ДР Ейлера-Пуассона має вигляд

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} = -2y + 2y^{(4)} = 0.$$

Маємо ЛОДР

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Використовуючи правила з посібника [39], знаходимо його загальний розв'язок:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Використовуючи крайові умови, маємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = y(0) = 1, \\ C_1 - C_2 + C_4 = y'(0) = 0, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_3 = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ C_1 - C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 = 0, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_3 = 0. \end{cases}$$

Додамо четверте рівняння до першого, а також від третього віднімемо друге і одержимо систему

$$\begin{cases} C_1 (1 + e^{\frac{\pi}{2}}) + C_2 (1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) = 0, \\ C_1 (-1 + e^{\frac{\pi}{2}}) + C_2 (1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) = 0, \end{cases}$$

з якої одержимо $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow C_3 = 1, C_4 = 0$. Отже, екстремум може бути реалізований лише на функції $y = \cos x$.

5.4.2. Функціонали, які залежать від кількох функцій (вектор-функцій)

Розглянемо задачу

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx \rightarrow extr, \quad (5.43)$$

$$y_1(a) = y_a^{(1)}, \quad y_1(b) = y_b^{(1)}, \quad y_2(a) = y_a^{(2)}, \quad y_2(b) = y_b^{(2)}.$$

Теорема 5.7. Якщо пара функцій $y_1(x), y_2(x)$ є розв'язком задачі (5.43), то вона є розв'язком системи диференціальних рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \frac{d}{dx} F'_{y_1'} = 0, \\ F'_{y_2} - \frac{d}{dx} F'_{y_2'} = 0. \end{cases}$$

Приклад 5.22. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b (y_1'^2 + 2y_1 y_2 + y_2'^2) dx \rightarrow extr,$$

$$y_1(0) = 0, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y_2(0) = 0, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$\text{Тут } F = y_1'^2 + 2y_1y_2 + y_2'^2 \Rightarrow F'_{y_1} = 2y_2, \quad F'_{y_1'} = 2y_1', \quad F'_{y_2} = 2y_1, \\ F'_{y_2'} = 2y_2'.$$

Система ДР Ейлера має вигляд

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \frac{d}{dx}F'_{y_1'} = 2y_2 - 2y_1'' = 0, \\ F'_{y_2} - \frac{d}{dx}F'_{y_2'} = 2y_1 - 2y_2'' = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} y_1'' - y_2 = 0, \\ y_2'' - y_1 = 0. \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння два рази, а потім підставимо в нього y_2'' з другого рівняння і одержимо для y_1 ЛОДР

$$y_1^{(IV)} - y_1 = 0.$$

Його загальний розв'язок дорівнює (дивитися попередній приклад)

$$y_1(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

звідки

$$y_2 = y_1'' = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Використовуючи крайові умови, маємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = y_1(0) = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = y_2(0) = 0, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 = y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_4 = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 = 1, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_4 = -1. \end{cases}$$

звідки аналогічно попередньому прикладу одержимо, що $C_1 = C_2 = C_3 = 0 \Rightarrow C_4 = 1$. Отже, екстремум може бути реалізований лише на парі функцій $y_1 = \sin x$, $y_2 = -\sin x$.

Зазначимо, що, якщо ввести вектор-функцію $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, задачу (5.43) можна записати у векторній формі

$$J[\vec{y}] = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx \rightarrow extr,$$

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_a, \quad \vec{y}(b) = \vec{y}_b.$$

Такий векторний запис є зручним, оскільки він не залежить від кількості функцій, від яких залежить функціонал.

5.4.3. Функціонали, які залежать від функцій кількох змінних

Нехай на площині xOy задана область D . Позначимо ∂D її межу і розглянемо задачу

$$J[z] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy \rightarrow extr, \quad (5.44)$$

де значення функції $z = z(x, y)$ на межі області D задані, тобто

$$z(x, y)|_{(z,y) \in \partial D} = f(x, y). \quad (5.45)$$

Позначимо для зручності запису $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Теорема 5.8. Якщо функція $z = z(x, y)$ є розв'язком задачі (5.44), (5.45), то вона задовольняє ДР

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = 0.$$

Це ДР називають **рівнянням Ейлера-Остроградського**.

Приклад 5.23. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J[z] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

який називають **інтегралом Діріхле**.

$$\text{Тут } F = p^2 + q^2 \Rightarrow F'_z = 0, \frac{\partial F}{\partial p} = 2p, \frac{\partial F}{\partial q} = 2q.$$

ДР Ейлера-Остроградського має вигляд

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = -2 \frac{\partial p}{\partial x} - 2 \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Отже, функція $z = z(x, y)$ задовольняє **рівняння Лапласа**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

або коротко

$$\Delta z = 0.$$

Приклад 5.24. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J[z] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy.$$

$$\text{Тут } F = p^2 + q^2 + 2zf \Rightarrow F'_z = 2f, F'_p = 2p, F'_q = 2q.$$

ДР Ейлера-Остроградського має вигляд

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = 2f - 2 \frac{\partial p}{\partial x} - 2 \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Отже, функція $z = z(x, y)$ задовольняє **рівняння Пуассона**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y),$$

або коротко

$$\Delta z = f(x, y).$$

Приклад 5.25. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала (5.9) у задачі про найменшу площу поверхні, яка натягнута на замкнений контур (приклад 5.5). У цій задачі

$$F = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \Rightarrow F'_z = 0, F'_p = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, F'_q = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

ДР Ейлера-Остроградського має вигляд

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0,$$

або (перевірте)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0.$$

5.5. Умовний екстремум

Нагадаємо постановку та метод розв'язання задачі на умовний екстремум для функцій.

Необхідно знайти екстремум функції $f(x, y)$ за умови, що змінні x та y пов'язані співвідношенням $g(x, y) = 0$. Отже, маємо задачу

$$f(x, y) \rightarrow \text{extr}, \tag{5.46}$$

$$g(x, y) = 0.$$

Щоб знайти розв'язок задачі (5.46), складаємо **функцію Лагранжа**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

яка залежить від x , y і додаткової змінної λ , яку називають **множником Лагранжа**. Після цього точки умовного екстремуму шукають як точки безумовного екстремуму функції Лагранжа, а саме з умов

$$\frac{\partial L}{\partial x} = f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0.$$

Далі розглянемо аналогічні задачі для функціоналів. Методи їх розв'язання є розвитком вже розглянутих.

5.5.1. Умовний екстремум з інтегральними зв'язками (ізопериметрична задача)

Задано два функціонали

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad K[y] = \int_a^b G(x, y, y') dx.$$

Необхідно знайти екстремуми функціонала $J[y]$ за умови, що функції $y(x)$, які задовольняють крайові умови $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, змінюються не довільним чином, а підпорядковані **інтегральному зв'язку** $K[y] = g$, де число g задано. Задачі такого типу називають **ізопериметричними**.

Отже, маємо задачу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow extr, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad (5.47)$$

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y') dx = g. \quad (5.48)$$

Щоб знайти розв'язок задачі (5.47), (5.48), складаємо **функцію Лагранжа** цієї задачі

$$L(x, y, \lambda) = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y'), \quad (5.49)$$

яка залежить від x , y і додаткової змінної λ .

Теорема 5.9. Нехай функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.47), (5.48), але не є екстремаллю функціонала $K[y]$. Тоді існує таке число λ (**множник Лагранжа**), за якого ця функція є екстремаллю функціонала $\int_a^b (F + \lambda G) dx$, тобто вона задовольняє ДР Ейлера для функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$ (5.49):

$$L'_y(x, y, \lambda) - \frac{d}{dx} L'_{y'}(x, y, \lambda) = 0. \quad (5.50)$$

Приклад 5.26. Розв'язання другої задачі Дідони (приклад 5.2, задача (5.5)).

У цій задачі $F = y$, $G = \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow$ функція Лагранжа дорівнює

$$L = F + \lambda G = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} = L(y, y', \lambda)$$

і не залежить від x . Тому рівняння Ейлера-Лагранжа (5.50) має перший інтеграл (5.25). Оскільки $L'_{y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$, то, використовуючи цей інтеграл, маємо

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \Rightarrow$$

$$y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda = C_1 \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}}{y - C_1} \Rightarrow \frac{(y - C_1) dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}} = dx.$$

Інтегруючи, одержимо

$$-\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2} + C_2 = x \Rightarrow$$

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2. \quad (5.51)$$

Отже, екстремальями є кола, радіус яких дорівнює $|\lambda|$. Сталі C_1 , C_2 , λ визначені крайовими умовами та зв'язком у задачі (5.5). Отже, з усіх дуг кіл, які зображені на рис. 5.16, треба вибрати ту, яка має задану довжину L .

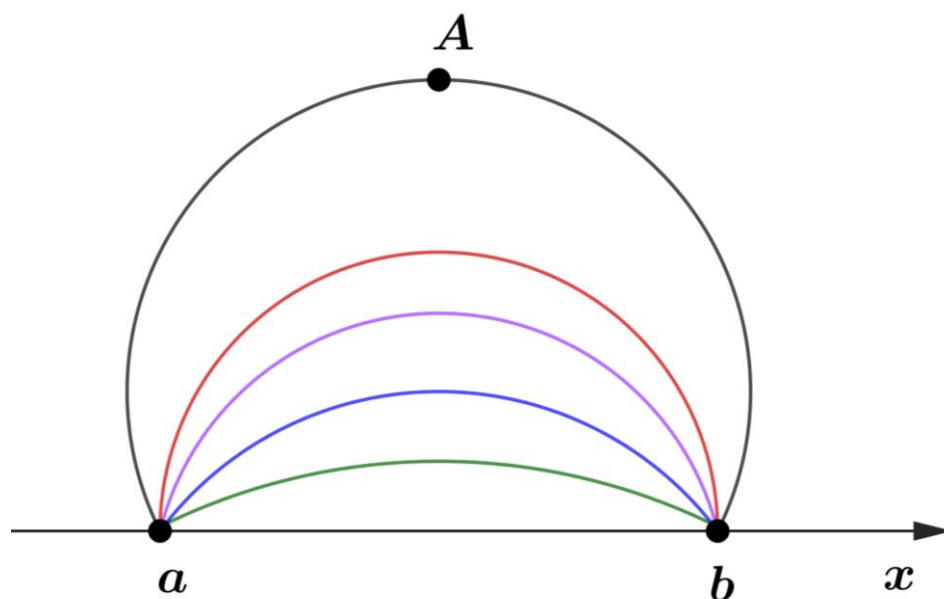


Рис. 5.16. Розв'язання другої задачі Дідони

Зазначимо, що на дузі типу aAb y не є однозначною функцією від x , хоча на цій однозначності ґрунтовано висновок (5.51). Це протиріччя можна усунути, якщо, наприклад, шукати рівняння екстремалі в параметричній формі (приклад 5.33).

Приклад 5.27. Ланцюгова лінія. Знайти форму, якої набуває однорідний ланцюг довжини l (відповідну криву називають ланцюговою лінією), закріплений за кінці.

Із фізичних міркувань випливає, що задача зведена до знаходження такого положення ланцюга, за якого його центр мас має максимально низьке положення.

Нехай кінці ланцюга мають координати (a, y_a) , (b, y_b) .

Ордината центра ваги лінії $y = y(x)$ дорівнює [12]

$$\frac{1}{l} \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Отже, маємо задачу

$$\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \min, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad (5.52)$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

У цій задачі $F = y\sqrt{1 + y'^2}$, $G = \sqrt{1 + y'^2}$. Функція Лагранжа дорівнює

$$L = F + \lambda G = y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2} = (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}.$$

Зробивши заміну $y + \lambda = z$, бачимо, що функція L має такий самий вигляд, як підінтегральна функція F у задачі (5.7) про поверхню обертання, яка має найменшу площу. Використовуючи розв'язок цієї задачі (приклад 5.12), одержимо екстремалі задачі (5.52)

$$y = C_1 ch \frac{x-C_2}{C_1} - \lambda.$$

Довільні сталі та множник λ визначають із початкових умов та інтегрального зв'язку.

Інший розв'язок задачі про форму ланцюга можна знайти, наприклад, у посібнику [39].

Приклад 5.28. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$\int_0^{\pi} y \sin x dx \rightarrow extr, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi,$$

$$\int_0^{\pi} y'^2 dx = \frac{3\pi}{2}.$$

Тут $F = y \sin x$, $G = y'^2 \Rightarrow$ функція Лагранжа дорівнює

$$L = F + \lambda G = y \sin x + \lambda y'^2.$$

ДР Ейлера для функції Лагранжа має вигляд

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} = \sin x - 2\lambda y'' = 0.$$

Маємо

$$2\lambda y'' = \sin x \Rightarrow 2\lambda y = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Використовуючи крайові умови, одержимо

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$y(\pi) = \pi \Rightarrow 2\lambda\pi = C_1\pi \Rightarrow 2\lambda = C_1.$$

Отже, $y = -\frac{1}{C_1}\sin x + x$.

Сталу C_1 знаходимо, використовуючи інтегральний зв'язок

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2} &= \int_0^{\pi} y'^2 dx = \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{C_1}\cos x + 1\right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{C_1^2} \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{2}{C_1} \int_0^{\pi} \cos x dx + \int_0^{\pi} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \\ \int_0^{\pi} \cos 2x dx = 0, \int_0^{\pi} \cos x dx = 0 \end{array} \right| = \frac{1}{C_1^2} \frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow C_1^2 = 1. \end{aligned}$$

Відповідь $y = x \pm \sin x$.

Теорема 5.9 показує, що задача знаходження «умовних» екстремалей функціонала $J[y]$ зведена до знаходження «безумовних» екстремалей функціонала

$$J[y] + \lambda K[y] = \int_a^b L(x, y, y', \lambda) dx. \quad (5.53)$$

Оскільки з множенням L на число екстремалі функціонала (5.53) не зміняться, то функцію L можна записати як

$$L = \lambda_1 F + \lambda_2 G, \quad (5.54)$$

де множники λ_1, λ_2 є константами. У вираз (5.54) підінтегральні функції F і G входять симетрично.

Тому (за винятком $\lambda_1 = 0$ або $\lambda_2 = 0$) сімейство екстремалей буде тим самим, якщо ми будемо шукати екстремум функціонала $J[y]$ за умови, що функціонал $K[y]$ зберігає задане стале значення, або, навпаки, будемо шукати екстремум функціонала $K[y]$ за умови, що функціонал $J[y]$ зберігає задане стале значення. У цьому полягає **принцип взаємності**.

Наприклад, коло є одночасно розв'язком класичної ізопериметричної задачі (приклад 5.2) і взаємної до неї задачі: знайти лінію найменшої довжини, яка обмежує фігуру, площа якої задана.

Зазначимо, що в ізопериметричній задачі кількість інтегральних обмежень може бути будь-якою. Тобто замість однієї умови (5.48) може бути m умов

$$\int_a^b G_k(x, y, y') dx = g_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

У цьому випадку екстремалі є розв'язками рівняння Ейлера для функції Лагранжа

$$L(x, y, y', \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = F(x, y, y') + \sum_{k=1}^m \lambda_k G_k(x, y, y').$$

Приклад 5.29. Екстремальні властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

Розглянемо крайову задачу Штурма-Ліувілля (розд. 4)

$$l[y] = -(P(x)y')' + Q(x)y' = \lambda y, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (5.55)$$

де $P(x) > 0, a \leq x \leq b$.

Позначимо її власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, а відповідні власні функції — $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$.

Можна довести, що:

1) $\lambda_1 = J[y_1]$ дорівнює найменшому значенню функціонала $J[y]$ в задачі

$$J[y] = \int_a^b (P(x)y'^2 + Q(x)y^2)dx \rightarrow \min, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (5.56)$$

$$K[y] = \int_a^b y^2 dx = 1;$$

2) якщо $n > 1$, то $\lambda_n = J[y_n]$ дорівнює найменшому значенню функціонала $J[y]$ в задачі

$$J[y] = \int_a^b (P(x)y'^2 + Q(x)y^2)dx \rightarrow \min, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (5.57)$$

$$K_j[y] = \int_a^b y y_j dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad K_n[y] = \int_a^b y^2 dx = 1.$$

Щодо доведення цих тверджень, то обмежимося лише перевіркою того факту, що екстремалі задачі (5.56), (5.57) є власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (5.55). Розглянемо, наприклад, задачу (5.57) за умови, що $n = 2$. Тут $F = Py'^2 + Qy^2$, $G_1 = yy_1$, $G_2 = y^2$, функція Лагранжа дорівнює

$$L = F + \mu_1 G_1 + \mu_2 G_2 = Py'^2 + Qy^2 + \mu_1 yy_1 + \mu_2 y^2.$$

Рівняння Ейлера – Лагранжа має вигляд

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} = 2Qy + \mu_1 y_1 + 2\mu_2 y - 2(Py')' = 0.$$

Перепозначимо $\frac{1}{2}\mu_1$ і μ_2 через $-\mu_1$ та $-\mu_2$ відповідно і одержимо

$$l[y] = -(Py')' + Qy = \mu_1 y_1 + \mu_2 y. \quad (5.58)$$

Помножимо ДР (5.58) на y_1 та проінтегруємо:

$$\int_a^b l[y] y_1 dx = \mu_1 \int_a^b y_1^2 dx + \mu_2 \int_a^b y y_1 dx. \quad (5.59)$$

Другий доданок у правій частині рівняння (5.59) дорівнює $\mu_2 K_1[y] = 0$. Завдяки крайовим умовам $\int_a^b l[y]y_1 dx = \int_a^b y l[y_1] dx = \lambda_1 K_1[y] = 0$, оскільки $l[y_1] = \lambda y_1$. Ураховуючи все це, одержимо, що $\mu_1 = 0$, і, отже, екстремаль y є власною функцією задачі (5.57), коли $n = 2$.

Задачі (5.56) і (5.57) за умови, що $n > 2$ (з урахуванням того, що $\int_a^b y_j y_k dx = 0$, $j \neq k$), розглядають аналогічно.

5.5.2. Умовний екстремум із скінченними або диференціальними зв'язками (задача Лагранжа)

Розглянемо задачу на екстремум

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b F(x, y_1, y_1', y_2, y_2') dx \rightarrow \text{extr} \quad (5.60)$$

для функціонала від двох функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, які задовольняють крайові умови

$$y_1(a) = y_a^{(1)}, \quad y_1(b) = y_b^{(1)}, \quad y_2(a) = y_a^{(2)}, \quad y_2(b) = y_b^{(2)} \quad (5.61)$$

і на які накладено **скінченний (або голономний) зв'язок**

$$G(x, y_1, y_2) = g(x), \quad (5.62)$$

де функція $g(x)$ задана.

Теорема 5.10. Нехай пара функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$ є розв'язком задачі (5.60)—(5.62) на умовний екстремум, і G'_{y_1} та G'_{y_2} не дорівнюють нулю одночасно в жодній точці $(x, y_1(x), y_2(x))$. Тоді існує така функція $\lambda(x)$ —

функціональний множник Лагранжа, за якого ця пара функцій є екстремаллю функціонала

$$\int_a^b (F + \lambda(x)G)dx,$$

тобто вона є розв'язком системи диференціальних рівнянь Ейлера для функції Лагранжа $L = F + \lambda(x)G$

$$\begin{cases} L'_{y_1} - \frac{d}{dx} L'_{y'_1} = 0, \\ L'_{y_2} - \frac{d}{dx} L'_{y'_2} = 0. \end{cases}$$

Приклад 5.30. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2) dx \rightarrow extr, \quad (5.63)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad (5.64)$$

$$y_1 - y_2 - 2\sin x = 0. \quad (5.65)$$

Це задача на умовний екстремум зі скінченним зв'язком.

Тут $F = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2$, $G = y_1 - y_2 - 2 \sin x \Rightarrow$ функція Лагранжа дорівнює

$$L = F + \lambda(x)G = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \lambda(x)(y_1 - y_2 - 2 \sin x).$$

Для неї система ДР Ейлера має вигляд

$$\begin{cases} L'_{y_1} - \frac{d}{dx} L'_{y'_1} = 2y_1 + \lambda(x) + \frac{d}{dx} 2y'_1 = 0, \\ L'_{y_2} - \frac{d}{dx} L'_{y'_2} = 2y_2 - \lambda(x) + \frac{d}{dx} 2y'_2 = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} y_1 + y_1'' = -\frac{\lambda(x)}{2}, \\ y_2 + y_2'' = \frac{\lambda(x)}{2}. \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 + (y_1 - y_2)'' = -\lambda(x).$$

Використовуючи зв'язок (5.65), одержуємо, що $\lambda(x) = 0$, звідки (чому?)

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad y_2 = C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Ураховуючи крайові умови (5.64), маємо

$$y_1 = \cos x + \sin x, \quad y_2 = \cos x - \sin x.$$

Приклад 5.31. Знайти систему ДР Ейлера для знаходження геодезичних ліній на заданій поверхні (приклад 5.4).

Це задача на умовний екстремум зі скінченним зв'язком. У ній $y = y(x)$, $z = z(x)$, $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, $G = \varphi(x, y, z) \Rightarrow$ функція Лагранжа дорівнює

$$L = F + \lambda(x)G = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\varphi(x, y, z).$$

Для неї система ДР Ейлера має вигляд (перевірте)

$$\begin{cases} \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \\ \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0. \end{cases}$$

Зауваження. Теорема 5.10 залишається справедливою, якщо на функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ накладено **диференціальний (неголономний) зв'язок**

$$G(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = g(x). \quad (5.66)$$

Задачу на екстремум зі скінченними або диференціальними зв'язками називають **задачею Лагранжа**.

Приклад 5.32. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2) dx \rightarrow \text{extr}, \quad (5.67)$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1, \quad (5.68)$$

$$y_1' + y_2' - 4x = 0. \quad (5.69)$$

Це задача на умовний екстремум із диференціальним зв'язком.

Тут $F = y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2$, $G = y_1' + y_2' - 4x \Rightarrow$ функція Лагранжа дорівнює

$$L = F + \lambda(x)G = y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2 + \lambda(x)(y_1' + y_2' - 4x).$$

Для неї система ДР Ейлера має вигляд

$$\begin{cases} L'_{y_1} - \frac{d}{dx} L'_{y'_1} = 2y_2 - \frac{d}{dx} (2y'_1 + \lambda(x)) = 0, \\ L'_{y_2} - \frac{d}{dx} L'_{y'_2} = 2y_1 - \frac{d}{dx} (2y'_2 + \lambda(x)) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} y_2 - y''_1 = \frac{\lambda'}{2}, \\ y_1 - y''_2 = \frac{\lambda'}{2}, \end{cases} \Rightarrow (y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)'' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Урахуємо зв'язок (5.69) та одержимо систему

$$\begin{cases} y_2 + y_1 = 2x^2 + C_3, \\ y_2 - y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \end{cases}$$

звідки

$$y_2 = x^2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3,$$

$$y_1 = x^2 - C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_3.$$

Ураховуючи крайові умови (5.68), маємо

$$y_1 = x^2 + \cos x + \sin x, \quad y_2 = x^2 - \cos x - \sin x.$$

Приклад 5.33. Розв'язання класичної ізопериметричної задачі (приклад 5.2, задача (5.4)).

Це задача на умовний екстремум із диференціальним зв'язком. У ній $x = x(l)$, $y = y(l)$, $F = x\dot{y}$, $G = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \Rightarrow$ функція Лагранжа дорівнює

$$L = F + \lambda(l)G = x\dot{y} + \lambda(l)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Для неї система ДР Ейлера має вигляд (перевірте)

$$\begin{cases} \dot{y} - \frac{d}{dl} 2\lambda(l)\dot{x} = 0, \\ -\frac{d}{dl} (x + 2\lambda(l)\dot{y}) = 0. \end{cases}$$

Інтегруючи за l , маємо

$$y - 2\lambda\dot{x} = C_2, \quad x + 2\lambda\dot{y} = C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{y - C_2}{x - C_1} = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}} \Rightarrow (x - C_1)\dot{x} + (y - C_2)\dot{y} = 0 \Rightarrow$$

$$d((x - C_1)^2 + (y - C_2)^2) = 0 \Rightarrow (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3.$$

Отже, екстремаліями є кола $R = \frac{L}{2\pi}$.

5.6. Задача з рухомими кінцями

На відміну від задач, які були розглянуті раніше, де кінці екстремалей були закріплені, у задачах із рухомими кінцями кінці екстремалей не зафіксовані.

Найпростішу задачу варіаційного числення з **рухомими кінцями** формують так.

Потрібно знайти функцію $y = y(x)$ і точки x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), для яких функціонал

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr} \quad (5.70)$$

досягає екстремуму за умов

$$y(x_1) = f_1(x_1), \quad y(x_2) = f_2(x_2), \quad (5.71)$$

де $f_1(x), f_2(x)$ — задані функції.

Геометричний зміст задачі (5.70), (5.71) є таким. На площині задані дві криві $\gamma_1: y = f_1(x)$, $\gamma_2: y = f_2(x)$. Треба знайти криву γ , яка з'єднує ці криві, кінці якої рухаються по цих кривих, і доставляє екстремум функціоналу (5.70) (рис. 5.17)

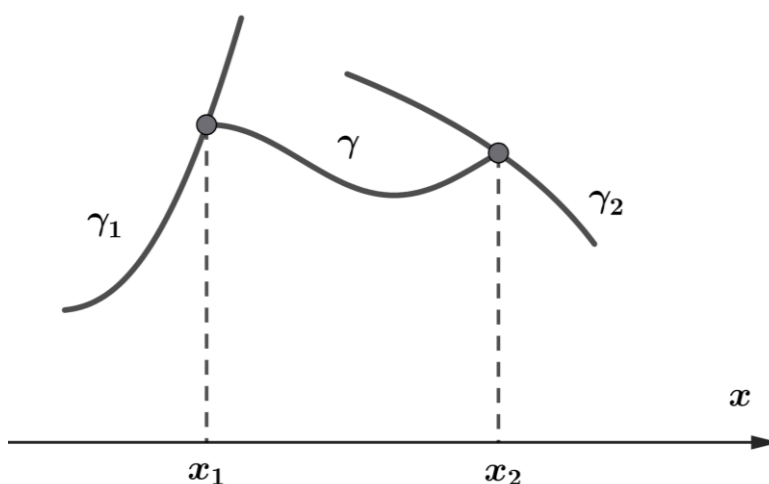


Рис. 5.17. Задача з рухомими кінцями

Теорема 5.11. Нехай функція $y = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.70), (5.71). Тоді вона задовольняє рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

та умови трансверсальності

$$F(x_1, y_0(x_1), y'_0(x_1)) = (y'_0(x_1) - f'_1(x_1)) F'_{y'}(x_1, y_0(x_1), y'_0(x_1)), \quad (5.72)$$

$$F(x_2, y_0(x_2), y'_0(x_2)) = (y'_0(x_2) - f'_2(x_2)) F'_{y'}(x_2, y_0(x_2), y'_0(x_2)). \quad (5.73)$$

Зазначимо, що, якщо криві γ_j ($j = 1, 2$) задані неявно рівняннями $\varphi_j(x, y) = 0$, $(\varphi_j)'_x^2 + (\varphi_j)'_y^2 > 0$, умови трансверсальності мають вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{F(x_j, y_0(x_j), y'_0(x_j)) - y'_0(x_j) F'_{y'}(x_j, y_0(x_j), y'_0(x_j))}{(\varphi_j(x_j))'_x} = \\ & = \frac{F'_{y'}(x_j, y_0(x_j), y'_0(x_j))}{(\varphi_j(x_j))'_y}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Зокрема, якщо крива γ_j є прямою $x = x_j$, то, за формулою (5.74), відповідна умова трансверсальності буде

$$F'_{y'}(x_j, y_0(x_j), y'_0(x_j)) = 0. \quad (5.75)$$

Приклад 5.34. Записати умови трансверсальності (5.72), (5.73) для випадку, коли у функціоналі (5.70) підінтегральний вираз дорівнює

$$F = g(x, y)\sqrt{1 + y'^2}. \quad (5.76)$$

У випадку (5.76) умови трансверсальності (5.72), (5.73) мають вигляд

$$F + (f' - y')F'_{y'} = g\sqrt{1 + y'^2} + (f' - y')g \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{g(1 + f'y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0,$$

звідки $g(1 + f'y') = 0$. Тому, якщо $g \neq 0$ на відповідному кінці, на цьому кінці

$$f'y' = -1. \quad (5.77)$$

Отже, у випадку (5.76) умова трансверсальності зведена до умови ортогональності кривої γ до кривої, по якій рухається відповідний кінець кривої γ .

Приклад 5.35. Задача про брахістохрону з рухомим кінцем.

У задачі про брахістохрону (приклад 5.1) знайти траєкторію найшвидшого спуску, якщо умову закінчення шляху в точці $B(b, y_b)$ замінити умовою закінчення шляху на прямій $x = b$.

За прикладом 5.11, екстремалі є циклоїдами

$$x = C(t - \sin t), \quad y = C(1 - \cos t).$$

У цьому прикладі $F'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$ (приклад 5.11). Тому $y'(b) = 0$, за формулою (5.75), тобто правий кінець шляху має бути ортогональним до

прямої $x = b$. Тобто точка перетину циклоїди з прямою є вершиною циклоїди (рис. 5.18), звідки $\pi C = b$.

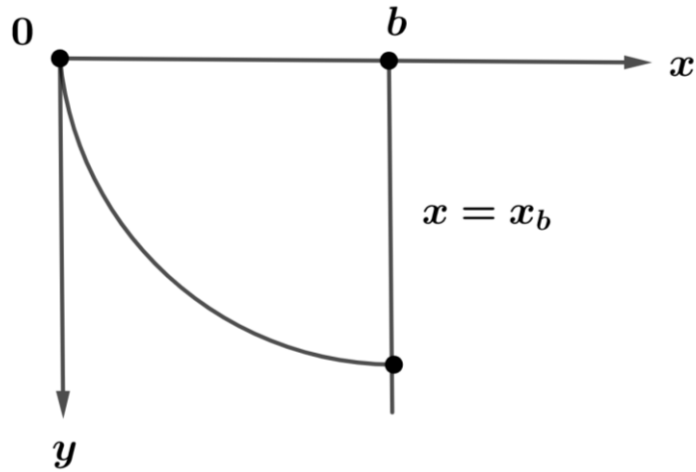


Рис. 5.18. Задача про брахістохрону з рухомим кінцем

Отже, у цьому випадку крива найшвидшого спуску є циклоїдою

$$x = \frac{b}{\pi}(t - \sin t), \quad y = \frac{b}{\pi}(1 - \cos t).$$

Приклад 5.36. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$\int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = x_2 - 5.$$

Це задача з одним (правим) рухомим кінцем.

Тут $F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} = F(y, y')$ не залежить від x . Тому рівняння Ейлера має

перший інтеграл (5.25). Оскільки $F'_{y'} = \frac{1}{y} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, то, використовуючи цей інтеграл, маємо

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{1}{y} \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \Rightarrow$$

$$y\sqrt{1+y'^2} = C_1.$$

Аналогічно прикладам 5.11, 5.12 виразимо x та y через параметр, зробивши заміну:

$$y' = \operatorname{tg} t \Rightarrow y = C_1 \cos t; \quad dx = \frac{dy}{y'} = -C_1 \cos t \, dt \Rightarrow$$

$$x = -C_1 \sin t + C_2.$$

Одержали параметричне рівняння екстремалі

$$x = -C_1 \sin t + C_2, \quad y = C_1 \cos t.$$

Це рівняння кола $(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2$ із центром на осі OX . Оскільки екстремаль проходить через точку $(0,0)$, то $C_2 = C_1$.

Оскільки F має вигляд (5.76), то умова трансверсальності на правому кінці означає, що коло має бути ортогональним до прямої $y = x - 5$, і, отже, діаметр кола має бути розташований на цій прямій. Тому $C_2 = 5$. Отже, $(x - 5)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\sqrt{10x - x^2}$, $x_2 = 5\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (рис. 5.19).

Приклад 5.37. Визначити відстань між параболою $y = x^2 + 4x + 7$ і прямою $y = 3x - 1$.

Маємо задачу з двома рухомими кінцями

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} \, dx \rightarrow \min, \quad y(x_1) = x_1^2 + 4x_1 + 7, \quad y(x_2) = 3x_2 - 1.$$

$$\text{Тут } F = \sqrt{1+y'^2} = F(y') \Rightarrow y = C_1 x + C_2.$$

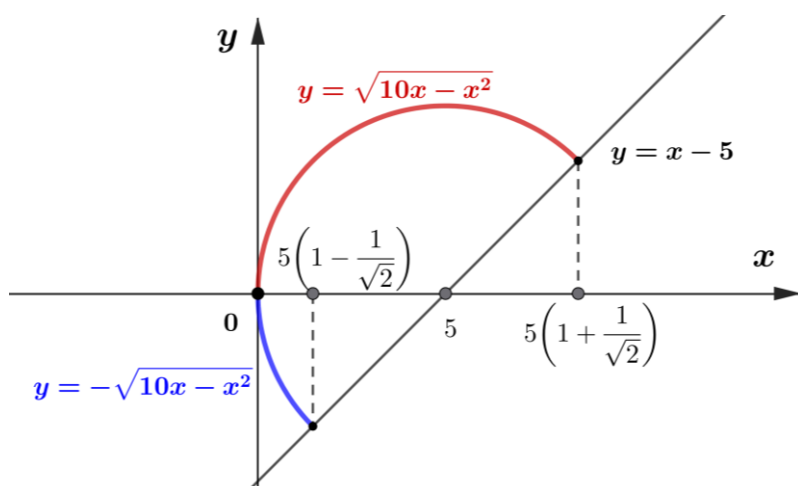


Рис. 5.19. Екстремалі з прикладу 5.36

Оскільки $f_1 = x_1^2 + 4x_1 + 7$, $f_2 = 3x_2 - 1$ та F має вигляд (5.76), то завдяки формулі (5.77) умови трансверсальності мають вигляд

$$f'_1(x_1)y'(x_1) = (2x_1 + 4)C_1 = -1, \quad f'_2(x_2)y'(x_2) = 3C_1 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow f_1(x_1) = 5\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$5\frac{1}{4} = -\frac{1}{3}x_1 + C_2 = \frac{1}{6} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{61}{12} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{61}{12}.$$

Знайдемо x_2 з системи

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x_2 + \frac{61}{12}, \\ y = 3x_2 - 1, \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{73}{40}.$$

Відстань дорівнює

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{73}{40}} \sqrt{1 + \frac{1}{9}} dx = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{93}{40} = \frac{31}{4\sqrt{10}}.$$

Перевірка. Відстань від точки $(x_1, f(x_1)) = \left(-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}\right)$ до прямої $y = 3x - 1$ дорівнює

$$d = \frac{\left|3\left(-\frac{1}{2}\right) - 5\frac{1}{4} - 1\right|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{\frac{31}{4}}{\sqrt{10}} = \frac{31}{4\sqrt{10}} \approx 2.45.$$

Відповідь: $\frac{31}{4\sqrt{10}}$ (геометричне тлумачення розв'язку подано на рис. 5.20).

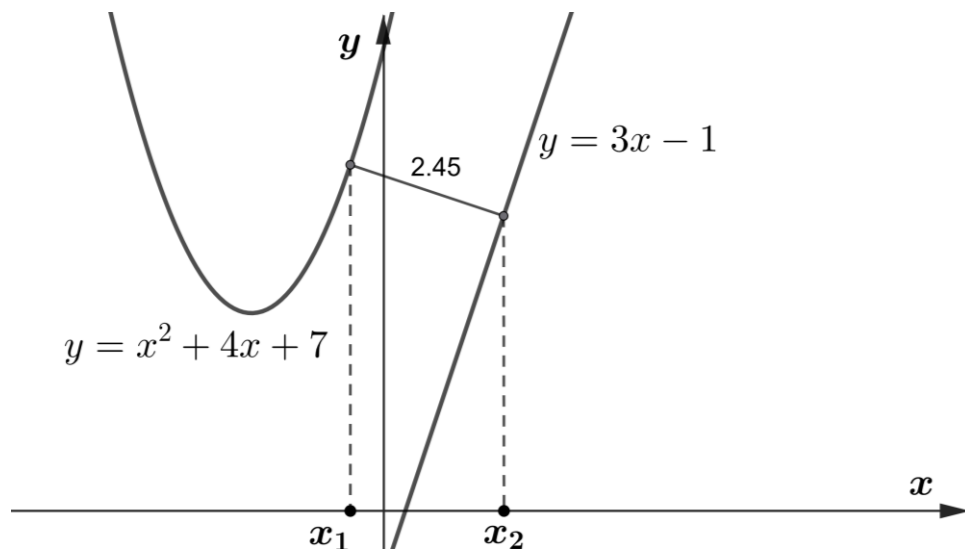


Рис. 5.20. Відстань між параболою і прямою

Приклад 5.38. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$\int_0^{x_2} y'^2 dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = \frac{2}{1 - x_2}.$$

Це задача з одним (правим) рухомим кінцем.

Тут $F = y'^2 = F(y') \Rightarrow y = C_1x + C_2$. Оскільки $y(0) = 0$, то $y = Cx$.
Оскільки $f_2 = \frac{2}{1-x_2}$, то умова трансверсальності (5.73) на правому кінці має вигляд

$$F + (f_2' - y')F_{y'}|_{x=x_2} = C^2 + \left(\frac{2}{(1-x_2)^2} - C\right)2C = 0.$$

Оскільки $C \neq 0$ (чому?), то $C = \frac{4}{(1-x_2)^2}$. З іншого боку, оскільки $Cx_2 = \frac{2}{1-x_2}$, то

$$C = \frac{2}{x_2(1-x_2)} \Rightarrow \frac{4}{(1-x_2)^2} = \frac{2}{x_2(1-x_2)} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 9.$$

Відповідь: $x_2 = \frac{1}{3}$, $y = 9x$.

Зазначимо, що необхідні умови екстремуму для найпростішої задачі з рухомими кінцями розповсюджені на задачі з рухомими кінцями та інтегральними або іншими зв'язками, якщо ці умови застосовувати для функціоналів від відповідної функції Лагранжа.

Приклад 5.39. Розв'язання першої задачі Дідони (приклад 5.2, задача (5.6)).

Це задача з рухомими кінцями та інтегральним зв'язком. Як і в другій задачі Дідони, екстремалями є кола.

З'ясуємо, який вигляд мають умови трансверсальності в узагальненій задачі Дідони, коли кінці x_1, x_2 ремня знаходяться на березі, рівняння якого є $y = f(x)$ (рис. 5.21).

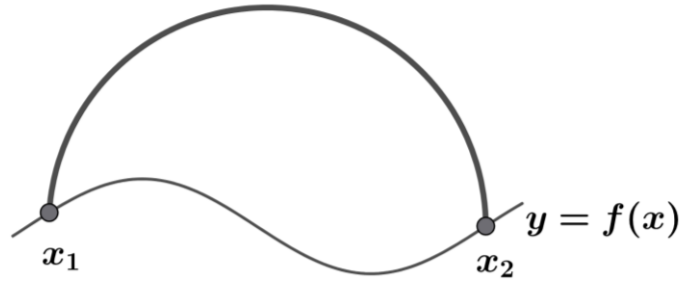


Рис. 5.21. Узагальнена задача Дідони

Тоді відповідна функція Лагранжа має вигляд (чому?)

$$L = y - f + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

і умови трансверсальності для неї мають вигляд

$$\begin{aligned} L + (f' - y')L'_{y'} \Big|_{x=x_j} &= y - f + \lambda \sqrt{1 + y'^2} + (f' - y') \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_j} = \\ &= \frac{(y - f)\sqrt{1 + y'^2} + \lambda + \lambda f' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_j} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Але } y(x_j) = f(x_j) \Rightarrow f' y' = -1.$$

Отже, умова трансверсальності зведена до умови ортогональності кінців екстремалі до графіка $y = f(x)$, а розв'язком першої задачі Дідони є напівколо, яке спирається на берег $y = 0$.

5.7. Задача Больца

Нехай задана функція $f(u, v)$ двох змінних.

Розглянемо задачу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx + f(y(a), y(b)) \rightarrow \text{extr.} \quad (5.78)$$

Теорема 5.12. Нехай функція $y_0 = y_0(x)$ є розв'язком задачі (5.78). Тоді вона задовольняє рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

та умови трансверсальності

$$\begin{aligned} F'_{y'}(a, y(a), y'(a)) &= \frac{\partial f(y(a), y(b))}{\partial y(a)}, \\ F'_{y'}(b, y(b), y'(b)) &= -\frac{\partial f(y(a), y(b))}{\partial y(b)}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Приклад 5.40. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$\int_0^\pi (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi) \rightarrow \text{extr.}$$

Тут $F = y'^2 + y^2 - 4y \sin x$. ДР Ейлера має вигляд

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 2y - 4 \sin x - 2y'' = 0.$$

Маємо ЛНДР

$$y'' - y = -2 \sin x.$$

Використовуючи правила з посібника [39], знаходимо його загальний розв'язок

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sin x.$$

Оскільки $f(y(a), y(b)) = 2y^2(a) + 2y(b) - y^2(b)$, то умови трансверсальності (5.79) мають вигляд:

- на лівому кінці $a = 0$:

$$\begin{aligned} \left[F'_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(a)} \right] \Big|_{x=a} &= [2y' - 4y] \Big|_{x=0} = \\ &= [2C_1 e^x - 2C_2 e^{-x} + 2 \cos x - 4(C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sin x)] \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -C_1 - 3C_2 + 1 = 0; \end{aligned}$$

- правому кінці $b = \pi$:

$$\begin{aligned} \left[F'_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y(b)} \right] \Big|_{x=b} &= [2y' + 2 - 2y] \Big|_{x=\pi} = \\ &= [2C_1 e^x - 2C_2 e^{-x} + 2 \cos x + 2 - 2(C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sin x)] \Big|_{x=\pi} = 0 \\ &\Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: $y = e^x + \sin x$.

Приклад 5.41. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$\int_0^1 e^{x+1} (y'^2 + 2y^2) dx + 2y(1)(y(0) + 1) \rightarrow \text{extr.}$$

Тут $F = e^{x+1}(y'^2 + 2y^2)$. ДР Ейлера має вигляд

$$e^{x+1}4y - \frac{d}{dx}e^{x+1}2y' = e^{x+1}4y - e^{x+1}2y' - e^{x+1}2y'' = 0.$$

Маємо ЛОДР

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Його загальний розв'язок дорівнює

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Оскільки $f(y(a), y(b)) = 2y(b)(y(a) + 1)$, то умови трансверсальності (5.79) мають вигляд:

- на лівому кінці $a = 0$:

$$\begin{aligned} \left[F'_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(a)} \right] \Big|_{x=a} &= [2e^{x+1}y' - 2y(1)]|_{x=0} = \\ &= [2e^{x+1}(-2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x) - 2(C_1 e^{-2} + C_2 e^1)]|_{x=0} = 0 \\ \Rightarrow (-4e - 2e^{-2})C_1 &= 0 \Rightarrow C_1 = 0; \end{aligned}$$

- правому кінці $b = 1$:

$$\begin{aligned} \left[F'_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y(b)} \right] \Big|_{x=b} &= [2e^{x+1}y' + 2(y(0) + 1)]|_{x=1} = \\ &= [2e^{x+1}(-2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x) + 2(C_1 + C_2 + 1)]|_{x=1} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2C_1 + (2e^3 + 2)C_2 + 2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{-1}{e^3 + 1}.$$

Відповідь: $y = \frac{-e^x}{e^3 + 1}.$

Приклад 5.42. Знайти екстремалі, які можуть бути розв'язками задачі

$$\int_0^1 (y'^2 + y^2) dx - 2sh1y(1) \rightarrow extr.$$

Тут $F = y'^2 + y^2$. Екстремалі мають вигляд (перевірте)

$$y = C_1 chx + C_2 shx.$$

Оскільки $f(y(a), y(b)) = -2sh1y(b)$, то умови трансверсальності (5.79) мають вигляд:

- на лівому кінці $a = 0$:

$$F'_{y'}|_{x=a} = 2y'|_{x=a} = 2(C_1 shx + C_2 chx)|_{x=0} = 2C_2 = 0,$$

оскільки $\frac{\partial f}{\partial y(a)} = 0$;

- правому кінці $b = 1$:

$$\begin{aligned} \left[F'_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y(b)} \right] \Big|_{x=b} &= [2y' - 2sh1]|_{x=b} = \\ &= [2C_1 shx - 2sh1]|_{x=1} = 2C_1 sh1 - 2sh1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: $y = chx$.

ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 5

1. У чому полягає задача про брахістохрону? Який формальний вигляд вона має?
2. У чому полягає ізопериметрична задача? Який формальний вигляд вона має?
3. У чому полягають перша та друга задачі Дідони? Який формальний вигляд вони мають?
4. У чому полягає задача про найменшу поверхню обертання? Який формальний вигляд вона має?
5. У чому полягає задача про геодезичні лінії? Який формальний вигляд вона має?
6. У чому полягає задача про натягнуту на заданий контур поверхню, яка має найменшу площу? Який формальний вигляд вона має?
7. Дайте визначення функціоналу.
8. Дайте визначення максимуму та мінімуму функціонала.
9. Сформулюйте найпростішу задачу варіаційного числення.
10. Що собою являє множина функцій $C^1[a, b]$?
11. Дайте визначення першій та другій варіаціям.
12. Сформулюйте необхідні і достатні умови екстремуму функціонала в термінах першої та другої варіації.
13. Сформулюйте першу необхідну умову екстремуму функціонала. Який вигляд має диференціальне рівняння Ейлера?
14. Який вигляд має інтеграл енергії?
15. Який вигляд має інтеграл імпульсу?
16. Що являють собою екстремалі задачі про брахістохрону?
17. Що являють собою геодезичні лінії на сфері?
18. Що являють собою геодезичні лінії на циліндрі?

19. Сформулюйте необхідну умову Лежандра екстремуму функціонала.
20. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням Якобі?
21. Сформулюйте необхідну умову Якобі екстремуму функціонала.
22. Сформулюйте достатню умову Якобі екстремуму функціонала.
23. Для якого функціонала рівняння Ейлера і Якобі співпадають?
24. Який вигляд має диференціальне рівняння Ейлера – Пуассона? Зі знаходженням екстремумів яких функціоналів воно виникає?
25. Зі знаходженням екстремумів яких функціоналів виникає система диференціальних рівнянь Ейлера?
26. Який вигляд має диференціальне рівняння Ейлера – Остроградського? Зі знаходженням екстремумів яких функціоналів воно виникає?
27. У чому полягає задача з інтегральними зв'язками (ізопериметрична задача)?
28. Чому дорівнює функція Лагранжа ізопериметричної задачі? Як знаходять екстремалі цієї задачі?
29. Що являють собою екстремалі в задачах Дідони?
30. У чому полягає принцип взаємності?
31. Сформулюйте екстремальні властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма – Ліувілля.
32. У чому полягає задача на екстремум функціонала із скінченними зв'язками або диференціальними зв'язками (задача Лагранжа)? Як знаходять її екстремалі?
33. Сформулюйте найпростішу задачу варіаційного числення з рухомими кінцями. Як знаходять її екстремалі?
34. У чому полягає задача Больца? Як знаходять її екстремалі?

ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 5

Завдання 1. Знайти екстремалі функціонала:

- 1) $\int_a^b (y^2 + y'^2 + 2y \sin x) dx$; 6) $\int_a^b (16y^2 - y''^2 + x^2) dx$;
- 2) $\int_a^b \sqrt{y(1 + y'^2)} dx$; 7) $\int_a^b (y_1'^2 + y_2'^2 + 8y_1 y_2) dx$;
- 3) $\int_a^b (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx$; 8) $\int_a^b (y_1'^2 + y_2'^2 + y_1' y_2') dx$;
- 4) $\int_a^b (xy' + y'^2) dx$; 9) $\int_a^b (28y_1 y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2) dx$.
- 5) $\int_a^b \frac{1+y^2}{y'^2} dx$;

Завдання 2. Знайти екстремалі задачі:

- 1) $\int_0^1 (e^{-5x}(-4y^2 + y'^2) + 2ye^{2x}) dx \rightarrow extr, y(0) = \frac{1}{18}, y(1) =$
 $= 2(e - e^4) + \frac{e^7}{18}$;
- 2) $\int_0^1 (1 + y''^2) dx \rightarrow extr, y(0) = 0, y'(0) = 1, y(1) = 1, y'(1) = 1$.

Завдання 3. Записати рівняння Ейлера – Остроградського для функціонала

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

Завдання 4. Знайти екстремалі задачі:

- 1) $\int_0^1 (121y^2 + y'^2) dx \rightarrow extr, y(0) = y(1) = 0$,
- $\int_0^1 ye^{-x} dx = \frac{1}{24} \left[\frac{e^{-1} - e^{-11}}{e^{11} - e^{-11}} \left(\frac{e^{10}}{10} + \frac{e^{-12}}{12} - \frac{11}{60} \right) + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-12}}{12} - \frac{5}{12} \right]$;
- 2) $\int_0^{12} y'^2 dx \rightarrow extr, y(0) = y'(l) = 0, \int_0^{12} y^2 dx = 1$;

- 3) $\int_0^1 (-2y_1^2 + y_1'^2 - 2y_2'^2) dx \rightarrow extr, y_1(0) = y_1(1) = 0,$
 $y_2(0) = -\frac{11}{4 \sin 2}, y_2(1) = \frac{11}{2} (1 - \operatorname{ctg} 2), y_1 - y_2' + 11x = 0;$
- 4) $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow min, y(x_1) = x_1^2 + 5, y(x_2) = 2x_2 - 11;$
- 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2) dx, y(0) = 1;$
- 6) $\int_0^{x_2} y'^2 dx, y(0) = 0, y(x_2) = -x_2 - 1;$
- 7) $\int_0^{\pi} (y'^2 + 4y^2 - 2y \sin x) dx + 3y^2(0) + 4y^2(\pi) \rightarrow extr.$

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 5

Завдання 1.

- 1) $C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x;$
- 2) $\frac{1}{4} \frac{(C_1 x + C_2)^2}{C_1} + \frac{1}{C_1};$
- 3) $C_1 \sin(4x + C_2);$
- 4) $-\frac{1}{4} x^2 + C_1 x + C_2;$
- 5) $\operatorname{ch}(C_1 x + C_2);$
- 6) $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x;$
- 7) $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x, y_2 =$
 $= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - C_3 \cos 2x - C_4 \sin 2x;$
- 8) $y_1 = C_1 x + C_2, y_2 = C_3 x + C_4;$
- 9) $y_1 = (C_1 x + C_2) \cos x + (C_3 x + C_4) \sin x, y_2 = 2y + y''.$

Завдання 2.

- 1) $2e^x - 2e^{4x} + \frac{1}{18} e^{7x};$
- 2) $y = x.$

Завдання 3.

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

Завдання 4.

$$1) \frac{1}{24} \left[\frac{e^{-1} - e^{-11}}{e^{11} - e^{-11}} (e^{11x} - e^{-11x}) \right] + e^{11x} - e^{-x};$$

$$2) y_n = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\pi x}{12} \left(n + \frac{1}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$3) y_1 = \frac{11}{2} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 2} - x \right), y_2 = \frac{11}{4} \left(x^2 - \frac{\cos 2x}{\sin 2} \right);$$

$$4) y = -\frac{x}{2} + \frac{13}{2}, x_1 = 1, x_2 = 7;$$

$$5) \cos x + \sin x;$$

$$6) y = -2x, x_2 = 1;$$

$$7) \frac{1}{10(15e^{2\pi} - e^{-2\pi})} [(2e^{-2\pi} - 5)e^{2x} + (1 - 6e^{2\pi})e^{-2x}] - \frac{1}{5} \sin x.$$

6. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Добре відомо, що зазвичай ДР не інтегрують у квадратурах. Але для практичних цілей часто не потрібно знати аналітичний вигляд розв'язку ДР, а достатньо мати таблицю його наближених значень. Складання такої таблиці називають чисельним інтегруванням ДР. У цьому розділі розглянемо деякі найпростіші методи чисельного інтегрування ДР першого порядку. Їх легко узагальнити на системи ДР першого порядку, до яких зазвичай можна звести ДР і системи ДР вищих порядків.

Із появою пакетів прикладних програм для ЕОМ ці методи значно втратили свою актуальність. (Програми, які стосуються ДР, ґрунтовані на узагальненнях цих методів.)

Тим не менш ці методи використовують і зараз для оперативних або оціночних інженерних розрахунків.

Нехай потрібно скласти таблицю наближених значень розв'язку задачі Коші

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (6.1)$$

на відрізку $[x_0, X]$.

Розбиваємо відрізок $[x_0, X]$ точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ на малі проміжки довжини $h = \frac{X-x_0}{n}$. Позначимо y_k наближені значення розв'язку $y(x)$ задачі (6.1) у точках x_k : $y(x_k) \approx y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, де $x_n = X$.

6.1. Метод Ейлера

Для знаходження наближених значень $y(x_k)$ методом Ейлера замінюємо похідну $y'(x)$ у ДР (6.1) поділеною різницею і одержимо

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = f(x, y) \Rightarrow \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = f(x, y). \quad (6.2)$$

Якщо в рівнянні (6.2) взяти $x = x_k$, $\Delta x = h$ і замінити $y(x_k)$ на y_k , то одержимо різницеве рівняння

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad (6.3)$$

звідки, виходячи з початкової умови $y_0 = y(x_0)$, знаходимо послідовно

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) (\approx y(x_1)) ,$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) (\approx y(x_2)) ,$$

...

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) (\approx y(X)) .$$

Геометрично (рис. 6.1) метод Ейлера полягає в заміні інтегральної кривої, яка проходить через $P_0(x_0, y_0)$ ламаною $P_0P_1P_2 \dots P_n$ із вершинами $P_k(x_k, y_k)$, яку називають **ламаною Ейлера**. З формули (6.3) випливає, що кутовий коефіцієнт ланки P_kP_{k+1} цієї ламаної дорівнює $\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k} = f(x_k, y_k)$ – кутовому коефіцієнту дотичної до тієї інтегральної кривої, яка проходить через точку P_k .

Головним недоліком методу Ейлера є його мала точність. А саме з заміною інтегральної кривої ламаною Ейлера виникає похибка порядку h . Значно більш точним є інший метод.

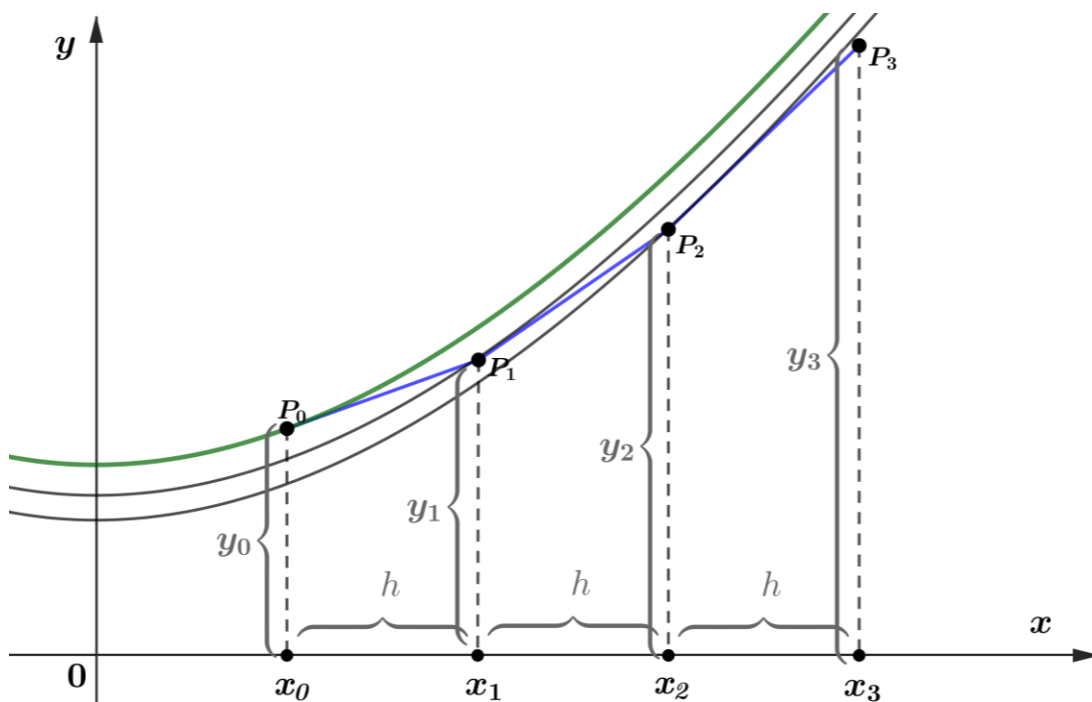


Рис. 6.1. Метод Ейлера

6.2. Метод Рунге – Кутта

Наближені значення $y_k \approx y(x_k)$ розв'язку задачі Коші (6.1) обчислюємо послідовно за формулою

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \{q_1(k) + 2q_2(k) + 2q_3(k) + q_4(k)\}, \quad (6.4)$$

де

$$q_1(k) = hf(x_k, y_k),$$

$$q_2(k) = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_1(k)}{2}\right),$$

$$q_3(k) = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_2(k)}{2}\right),$$

$$q_4(k) = hf(x_k + h, y_k + q_3(k)),$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad x_n = X, \quad h = \frac{X - x_0}{n}.$$

Геометрично метод Рунге – Кутта полягає в заміні інтегральної кривої ламаною, яка її апроксимує краще, ніж ламана Ейлера.

Пояснимо конструювання апроксимуючої ламаної для спрощеного варіанта методу Рунге – Кутта:

$$y_{k+1} = y_k + q_2(k),$$

який одержують із формули (6.4) через заміну в ній $q_1(k), q_3(k), q_4(k)$ на $q_2(k)$.

Її будують так (рис. 6.2):

1) виходячи з початкової точки $P_0(x_0, y_0)$, будуємо першу ланку P_0P_1 ламаної Ейлера;

2) знаходимо її середину $Q_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{q_1(0)}{2}\right)$;

3) знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної до тієї інтегральної кривої, яка проходить через точку Q_1 . Він дорівнює $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{q_1(0)}{2}\right)$;

4) проводимо через початкову точку P_0 пряму з цим кутовим коефіцієнтом. Відрізок P_0P_1' цієї прямої і є першою ланкою шуканої ламаної.

Далі, виходячи з точки $P_1'(x_1, y_1)$, будуємо аналогічно другу ланку і т. д.

З рис. 6.2 бачимо, що навіть спрощений варіант методу Рунге – Кутта краще, ніж метод Ейлера, враховує поведінку інтегральної кривої.

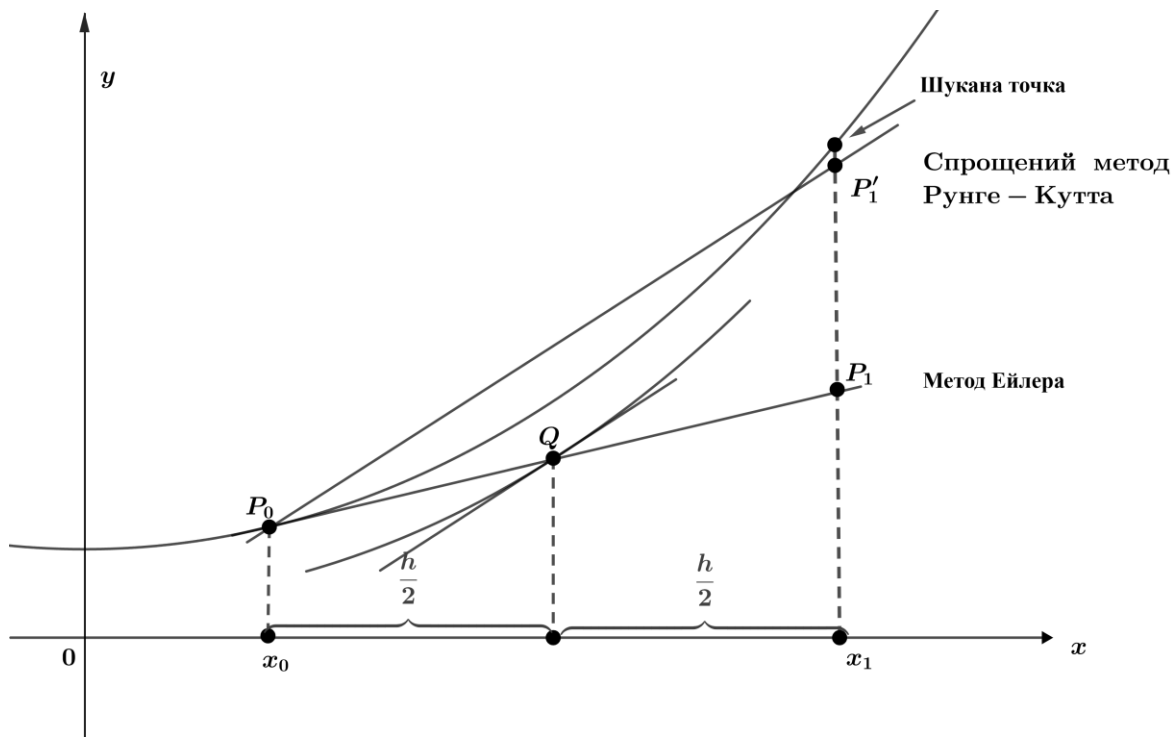


Рис. 6.2. Спрощений метод Рунге – Кутта

Похибка, яка виникає з заміною інтегральної кривої ламаною, що відповідає методу Рунге – Кутта, має порядок h^4 . Наступний метод є більш простим, але і дуже точним.

6.3. Метод Адамса

Знайдемо за допомогою якогось методу (наприклад степеневих рядів, або методом Ейлера, або методом Рунге – Кутта) наближене значення $y_1 \approx y(x_1)$ розв'язку $y(x)$ задачі Коші в точці $x_1 = x_0 + h$. А потім наступні наближені значення $y_k \approx y(x_k)$ послідовно знаходимо за формулою

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1}, \quad (6.5)$$

де $q_k = hf(x_k, y_k)$, $\Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1}$, $x_{k+1} = x_k + h$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $x_n = X$, $h = \frac{X-x_0}{n}$.

Пояснимо, як виникає формула (6.5).

Проінтегруємо від x_k до x_{k+1} обидві частини рівняння (6.1) та одержимо

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx. \quad (6.6)$$

Замінімо у формулі (6.6) $y(x_k)$, $y(x_{k+1})$ на y_k , y_{k+1} , а $f(x, y)$ на інтерполяційний многочлен $P(x)$, який у точках x_{k-1} , x_k дорівнює відповідно $f(x_{k-1}, y_{k-1})$, $f(x_k, y_k)$, і одержимо наближену рівність

$$y_{k+1} \approx y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x) dx. \quad (6.7)$$

Але

$$P(x) = f(x_k, y_k) + \frac{x - x_k}{h} [f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})]$$

і, отже,

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x) dx &= \left| \begin{array}{ll} \frac{x - x_k}{h} = t, & dx = h dt \\ x = x_k, & t = 0 \\ x = x_{k+1}, & t = 1 \end{array} \right| = \\ &= h \int_0^1 \{f(x_k, y_k) + t[f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})]\} dt = \\ &= hf(x_k, y_k) + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})] = q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Підставимо (6.8) у формулу (6.7) і одержимо формулу (6.5).

Зі знаходженням наближених значень розв'язку задачі Коші (6.1) методом Адамса похибка має порядок h^2 .

Зазначимо, що розв'язок задачі Коші (6.1) з наближенням до якоїсь точки проміжку $(x_0, X]$ може прямувати до нескінченності, однак усі наближені значення розв'язку, знайдені одним із чисельних методів, будуть залишатися скінченними.

Тому, якщо за чисельного інтегрування ДР з'явиться значне зростання абсолютних величин наближених значень, то потрібно в ДР (6.1) зробити заміну $y = \frac{1}{z}$. Тоді, якщо за чисельного інтегрування одержаного ДР з'являються два сусідніх наближених значення різних знаків, то це буде означати, що між відповідними значеннями x є точка, у якій розв'язок задачі Коші (6.1) дорівнює нескінченності.

Зазначимо також, що за чисельного інтегрування потрібно бути впевненим, що задача Коші (6.1) має єдиний розв'язок. Інакше буде незрозуміло, наближені значення якого з розв'язків дає чисельний метод.

6.4. Правило Рунге

Точні оцінки похибок методів Ейлера, Рунге – Кутта, Адамса одержати дуже важко. Для грубої оцінки похибки використовують таке **правило Рунге**.

Нехай $y_1^h, y_2^h, \dots$ – наближені значення розв'язку з кроком обчислення h , які одержані одним із розглянутих методів. Щоб оцінити похибку від заміни точних значень цими наближеними, потрібно знайти за тим самим методом наближені значення $y_1^{2h}, y_2^{2h}, \dots$ розв'язку з кроком обчислення $2h$.

Тоді вважають, що похибка

$$\frac{\max_k |y_{2k}^h - y_k^{2h}|}{2^N - 1},$$

де $N = 1, 2, 4$ для методів Ейлера, Адамса, Рунге – Кутта відповідно.

ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 6

1. У чому полягає метод Ейлера чисельного інтегрування диференціального рівняння? Який геометричний зміст він має?
2. У чому полягає метод Рунге – Кутта чисельного інтегрування диференціального рівняння? Який геометричний зміст має його спрощений варіант?
3. У чому полягає метод Адамса чисельного інтегрування диференціального рівняння?
4. Сформулюйте правило Рунге оцінювання похибки чисельного методу.

ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 6

Знайти за правилом Рунге похибку чисельного розрахунку методом Ейлера з кроком $h = 0.05$ розв'язку задачі Коші $y' = \frac{1}{2}xy, y(0) = 1$ на відрізка $[0, 1]$.

Відповідь: 0,0179.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Математика в технічному університеті: підручник: у 4 т. / за ред. О. І. Клесова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ: Вид. дім «Кондор», 2025. Т. 4. 328 с.
2. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навч. посіб.: у 2 т. / В. А. Андруник, В. А. Висоцька, В. В. Пасічник та ін.; за ред. В. В. Пасічника. Львів: «Новий Світ – 2000», 2018. Т. 2. 536 с.
3. Вища математика: Збірник задач. Ч. 2. Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики / П. П. Овчинников, П. С. Кропив'янський, С. П. Полушкін та ін. Київ: Техніка, 2004. 376 с.
4. Гаєва К. А., Супрун О. М. Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення. Збірник задач. Київ: НАУ, 2003. 192 с.
5. Гаращенко Ф. Г., Матвієнко В. Т., Харченко І. І. Диференціальні рівняння для інформатиків: підручник. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. 351 с.
6. Гаращенко Ф. Г., Харченко І. І. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2004. 162 с.
7. Гой Т. П., Копач М. І., Федак І. В. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь: навч. посіб. Івано-Франківськ: Вид.-дизайн. відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського НУ ім. Василя Стефаника, 2010. 148 с.
8. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння: навч. посіб. Івано-Франківськ: Сімик, 2012. 356 с.
9. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. Диференціальні рівняння. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 470 с.

10. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. Київ: Техніка, 1997. 285 с.
11. Диференціальні рівняння: навч. посіб. / П. І. Каленюк, Ю. К. Рудавський, Р. М. Тацій та ін. Львів: Вид-во «Львівська політехніка», 2014. 380 с.
12. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закл. Київ: А.С.К., 2006. 648 с.
13. Дюкарев Ю. М., Літвінова О. Г. Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення: навч. посіб. Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2010. 138 с.
14. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи: навч. посіб. Харків: Вид-во ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.
15. Збірник задач з диференціальних рівнянь. навч. посіб. / П. І. Каленюк, П. П. Костробій, З. М. Нитребич та ін. Львів: Вид-во «Львівська політехніка», 2016. 236 с.
16. Капустян О. В., Касьянов П. О., Позур С. В. Збірник задач підвищеної складності з курсу «Диференціальні рівняння» / за ред. М. О. Перестюка. Київ: ВПЦ «Київський університет». 2011. 79 с.
17. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. Київ: Либідь, 2004. 408 с.
18. Куліш Ю. В., Рибачук О. В. Основи теорії оптимального керування: конспект лекцій. Харків: УкрДАЗТ, 2014. Ч. 1. 66 с.
19. Куліш Ю. В., Рибачук О. В. Основи теорії оптимального керування: конспект лекцій. Харків: УкрДУЗТ, 2015. Ч. 2. 44 с.
20. Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф. Диференціальні рівняння: підручник. Київ: Вища школа, 1981. 504 с.
21. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи: підручник. Київ: Либідь, 1996. 288 с.

22. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення: навч. посіб. Київ: Вид. дім «Слово», 2013. 296 с.
23. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі: підручник. Київ: Либідь, 1994. 328 с.
24. Моклячук М. П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. 255 с.
25. Овчинников П. П., Яремчук Ф. Г., Михайленко В. М. Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 2. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ: Техніка, 2004. 792 с.
26. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика: підручник. Київ: Либідь, 1996. 440 с.
27. Перстюк М. О., Маринець М. М. Теорія рівнянь математичної фізики: підручник. Київ: Либідь, 2006. 424 с.
28. Перстюк М. О., Маринець В. В., Рого В. Л. Збірник задач з математичної фізики: навч. посіб. Вид. 2-ге, випр. і доп. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. 252 с.
29. Перстюк М. О., Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь: навч. посіб. Київ: ТВіМС, 2004. 224 с.
30. Перстюк М. О., Станжицький О. М., Капустян О. В., Ловейкін Ю. В. Варіаційне числення та методи оптимізації. Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2010. 212 с.
31. Піх С. С., Попель О. М., Ровенчак А. А., Тальянський І. І. Методи математичної фізики. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2011. 404 с.
32. Піх С. С., Ровенчак А. А., Криницький Ю. С. 1001 задача з математичної фізики. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2006. 328 с.

33. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ: Вища школа, 1994. 454 с.
34. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах: навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.
35. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: підручник. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
36. Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. Збірник задач: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського; Вид-во «Політехніка», 2024. 189 с.
37. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика у прикладах та задачах: навч. посіб.: у 3 ч. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Харків: ХНУРЕ, 2002. 596 с.
38. Фардигіла Л. В. Курс звичайних диференціальних рівнянь: навч. посіб. Київ: Наукова думка, 2023. 312 с.
39. Храбустовський В. І., Осмаєв О. А., Рибачук О. В. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Харків: УкрДУЗТ, 2024. Ч. 1. 197 с.
40. Храбустовський В. І., Шувалова Ю. С. Спеціальні розділи: конспект лекцій. Ч. 1. Лінійні оператори, стійкість, перехідні процеси. Харків: УкрДАЗТ, 2010. 44 с.
41. Храбустовський В. І., Шувалова Ю. С. Спеціальні розділи: конспект лекцій. Ч. 3. Операційне числення та його застосування: Харків: УкрДУЗТ, 2020. 58 с.
42. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. Київ: Техніка, 2003. 368 с.
43. Akhiezer N. I. The Calculus of Variations. New York, USA: Harwood Academic Publishers, 1988. 280 p.
44. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. Optimal Control. Part of the book series: Contemporary Soviet mathematics. New York, USA:

Springer Science, Business Media New York, Plenum Publishing Corporation, 1987. 309 p.

45. Bellman R. Introduction to Matrix Analysis: Classics in Applied Mathematics, Series Number 19. Second Edition. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. 430 p.

46. Bellman R. Stability theory of differential equations: International Series in Pure and Applied Mathematics. New York, Toronto, USA: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. 166 p.

47. Daleckii Ju. L. and Krein M. G. Stability of solutions of differential equations in Banach space. Translations of Mathematical Monographs. Providence, Rhode Island, USA: American Mathematical Society, 1974. Vol. 43. 386 p.

48. Doetsch G. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation: 3rd. ed. München: Oldenbourg, 1967. 256 s.

49. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices. New York, USA: Chelsea Publishing Company. 1959. Vol. 1. 370 p.

50. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices. New York, USA: Chelsea Publishing Company, 1959. Vol. 2. 275 p.

51. Gelfand I. M., Fomin S. V. Calculus of variations. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1963. 242 p.

52. Gel'fond A. O. Calculus of Finite Differences. Series: International monographs on advanced mathematics and physics. Delhi, India: Hindustan Publishing corporation, 1971. 451 p.

53. Halanay A., Wexler D. Teoria Calitativă a sistemelor cu impulsuri. București, Republicii Socialiste România: Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1968. 312 p.

54. Hartman P. Ordinary Differential Equations: Second Edition. Philadelphia: SIAM, 2002. 612 p.

55. Kamke E Differentialgleichungen, Bd.1, Gewöhnliche Differentialgleichungen: Teubner Verlag; 10. Aufl., 1977. 670 p.

56. Koshlyakov N. S., Smirnov M. M. and Gliner E. B. Differential equations of mathematical physics. Amsterdam, Netherlands: North - Holland Publications Co., 1964. 701 p.

57. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Equations of Mathematical Physics. Series: Dover Books on Physics. New York, USA: Dover Publications, Inc., 1990. 800 p.

58. Volkovyskii L. I., Lunts G. L. and Aramanovich I. G. A Collection of Problems on Complex Analysis. Series: Dover Books on Mathematics. New York, Toronto, USA: Dover Publications, Inc., 1991. 448 p.

Відповідності між оригіналами та їхніми зображеннями

Номер з/п	Оригінал	Зображення
1	2	3
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\frac{1}{p}$
3	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
6	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
7	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
8	$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
9	$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
10	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$
11	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$
12	$t \sin \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}$
13	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$

1	2	3
14	$\frac{1}{2\beta} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$	$\frac{\beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
15	$\frac{1}{2\beta} (\sin \beta t + \beta t \cos \beta t)$	$\frac{p^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
16	$\cos \beta t - \frac{\beta t}{2} \sin \beta t$	$\frac{p^3}{(p^2 + \beta^2)^2}$
17	$t \operatorname{sh} \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 - \beta^2)^2}$
18	$t \operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
19	$\frac{1}{2\beta} (\beta t \operatorname{ch} \beta t - \operatorname{sh} \beta t)$	$\frac{\beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
20	$\frac{1}{2\beta} (\operatorname{sh} \beta t + \beta t \operatorname{ch} \beta t)$	$\frac{p^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
21	$\operatorname{ch} \beta t + \frac{\beta t}{2} \operatorname{sh} \beta t$	$\frac{p^3}{(p^2 - \beta^2)^2}$
22	$\sin^2 \beta t$	$\frac{2\beta^2}{p(p^2 + 4\beta^2)}$
23	$\cos^2 \beta t$	$\frac{p^2 + 2\beta^2}{p(p^2 + 4\beta^2)}$
24	$\operatorname{sh}^2 \beta t$	$\frac{2\beta^2}{p(p^2 - 4\beta^2)}$
25	$\operatorname{ch}^2 \beta t$	$\frac{p^2 - 2\beta^2}{p(p^2 - 4\beta^2)}$

Відповідності між дискретними оригіналами та їхніми z-перетвореннями

Номер з/п	Дискретний оригінал	z-перетворення
1	2	3
1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	a^n	$\frac{z}{z-a}$
3	$\sin \beta n$	$\frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}$
4	$\cos \beta n$	$\frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}$
5	$sh\beta n$	$\frac{zsh\beta}{z^2 - 2zch\beta + 1}$
6	$ch\beta n$	$\frac{z(z - ch\beta)}{z^2 - 2zch\beta + 1}$
7	$a^n \cos \beta n$	$\frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2za \cos \beta + a^2}$
8	$a^n \sin \beta n$	$\frac{za \sin \beta}{z^2 - 2za \cos \beta + a^2}$
9	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
10	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
11	n^3	$\frac{z}{(z-1)^4} (z^2 + 4z + 1)$
12	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
13	$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$

1	2	3
14	$C_n^k a^n$	$\frac{a^k z}{(z - a)^{k+1}}$
15	$n \cos \beta n$	$\frac{(z^3 + z) \cos \beta - 2z^2}{(z^2 - 2z \cos \beta + 1)^2}$
16	$n \sin \beta n$	$\frac{(z^3 - z) \sin \beta}{(z^2 - 2z \cos \beta + 1)^2}$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Автономна система 31

Аналог формули Ліувілля – Остроградського для різницевого
рівняння 53

Асимптотично стійкий розв'язок

В

Варіація функціонала

– – перша 217

– – друга 217

Визначник Косораті 53

Власні значення задачі Штурма – Ліувілля 192

Власні функції задачі Штурма – Ліувілля 192

Г

Граничні співвідношення 105, 170

Д

δ -функція 133

Дискретний оригінал 161

Дискретне перетворення Лапласа 162

Дискретна функція Хевісайда 163

Достатня умова екстремуму – умова Якобі 236

Е

Екстремаль 220

З

Задача

- Больца 271
- Дідони 206, 207
- ізопериметрична 205, 209, 248
- із рухомими кінцями 263
- Лагранжа 260
- про брахістохрону 203
- про геодезичні лінії 211
- про поверхню обертання, яка має найменшу площу 210
- про найменшу площу поверхні, яка натягнута на замкнений

контур 212

Згортка 106, 171

Зв'язок

- диференціальний (неголономний) 260
- інтегральний 248
- скінчений (голономний) 257

Зображення 89, 162

z -перетворення 162

І

Ізопериметрична нерівність 205

Інтеграл

- Діріхле 106, 245
- енергії 223
- імпульсу 223

К

Катеноїд 226

Крайова задача 185

— — однорідна 185

— — неоднорідна 185

— — самоспряжена 189

— — Штурма – Ліувілля 191

Крайові умови

— — однорідні 185

— — неоднорідні 185

— — самоспряжені 189

Критерій стійкості

— — Ерміта – Михайлова 16

— — Лъєнара - Шипара 16

— — многочлена третього степеня 17

Л

Ламана Ейлера 282

Ланцюгова лінія 251

Лінеаризація 35

Лінійна система

— — асимптотично стійка 12

— — лінеаризована 35

— — нестійка 12

— — різницевих рівнянь 74

— — — — однорідна 75

— — — — неоднорідна 75

— — стійка 12

М

Максимум функціонала 214

Марківський ланцюг із дискретним часом 81

Матриця

- монодромії 23
- переходу за один крок 81

Метод

- Адамса 285
- варіації довільної сталої 49, 77
- відокремлення змінних (Фур'є) 195

Ейлера 281

- операційний розв'язання
- – – диференціальних рівнянь 110, 156
- – – інтегральних рівнянь 158
- – розрахунку електричних кіл 152
- Рунге - Кутта 283

Мінімум функціонала 214

Многочлен

- стійкий 15

Множник Лагранжа 248, 249

- – функціональний 258

Мультиплікатор 23

Н

Найпростіша задача варіаційного числення 214

Необхідна умова екстремуму функціонала

- – – перша 219
- – – друга – Лежандра 233
- – – третя – Якобі 235

Нестійкий розв'язок 10

О

Операторна

– система 126, 178

Операторне

– рівняння 110, 173

– – векторне 131

Операторна форма закону Ома 153

Оригінал 88

П

Перетворення Лапласа 89

Поділена різниця

– перша 44

– друга 45

– n – на 46

Положення рівноваги 32

– асимптотично стійке 33

– нестійке 33

– стійке 33

Порядок різницевого рівняння 46

Початковий розподіл імовірностей 82

Правило

– затухання 168

– Рунге 287

Принцип взаємності 254

Проблема Рауса - Гурвіца 14

Р

Рівняння

– Ейлера 220

– Ейлера - Остроградського 245

– Ейлера - Пуассона 240

– Лапласа 245

– Пуассона 246

– характеристичне 54

– Якобі 235

Різницеве рівняння 46

– – лінійне

– – – першого порядку 48

– – – k - го порядку 51

– – – однорідне 48, 51

– – – – зі сталими коефіцієнтами 54

– – – – неоднорідне 48, 51

– – – – зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною 64

Різниця

– першого порядку 44

– другого порядку 44

– n –го порядку 45

Розв'язок різницевого рівняння

– – – частинний 47

– – – загальний 47

С

Симетричний диференціальний вираз 189

Система

– першого наближення 29

– диференціальних рівнянь Ейлера 242

Стійкий розв'язок 9

Т

Теорема

- Бореля 107
- випередження 98, 166
- ергодична 82
- Ерміта 16
- запізнювання 96, 165
- зміщення зображення 99
- Льенара – Шипара 16
- Ляпунова. Про стійкість за першим наближенням 29
- Ляпунова. Про стійкість положення рівноваги за першим наближенням 35
- множення 171
- подібності 95
- про зведення системи з періодичними коефіцієнтами до системи зі сталими коефіцієнтами 26
- про стійкість
 - – – збуреної лінійної системи з періодичними коефіцієнтами 28
 - – – лінійної системи 12
 - – – – із майже сталими коефіцієнтами 22
 - – – – із періодичними коефіцієнтами 27
 - – – – зі сталими коефіцієнтами 13
- про структуру загального розв'язку
 - – – – лінійного однорідного різницевого рівняння 53
 - – – – лінійного неоднорідного різницевого рівняння 54
- розкладання 109, 172
- Стодоли 15
- Флоке 24

У

Умови трансверсальності 264, 272

Усталений режим 149

Ф

Формула

– Дюамеля 108, 146

– обернення 90

Функціонал 213

Функція

– Грина 187

– імпульсна 133

– Лагранжа 247, 249, 258

– передавальна 137

– решітчаста 161

– Хевісайда 92

Х

Характеристика

– імпульсна 137

– перехідна 144

– частотна 149

Ц

Циклоїда 224

Ч

Числа Фібоначчі 59

Навчальний посібник

Храбустовський Володимир Іванович,

Осмаєв Олег Аданійович,

Рибачук Олена Василівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина 2

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Відповідальний за випуск Храбустовський В. І.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 23.06.2025 р.

Умовн. друк. арк. 17,75. Тираж . Замовлення № .

Видавець і виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Феєрбаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.