

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

**Кафедра автоматичного та комп'ютерного телекерування
рухом поїздів**

**ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

Лабораторний практикум

Частина 2

**ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗА ШВИДКОДІЄЮ
СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

Харків – 2019

Практикум розглянуто і рекомендовано до друку на

засіданні кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів 12 вересня 2018 р., протокол № 1.

Практикум містить завдання та матеріали для підготовки та виконання двох лабораторних робіт з дисципліни «Теорія оптимальних систем автоматичного керування». До кожної з робіт додані стислі відомості з теорії. Виконання всіх робіт здійснюється на ПК за допомогою пакетів Control System та Simulink програмної оболонки Matlab.

Призначено для студентів магістратури денної та заочної форм навчання, а також слухачів ІППК за спеціальністю «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

Укладачі:

проф. В. Ш. Хісматулін,
доценти О. В. Нейчев,
О. М. Прогонний, О. О. Сосунов

Рецензент

доц. В. Ф. Кустов

ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Лабораторний практикум

Частина 2

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗА ШВИДКОДІЄЮ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Відповідальний за випуск Хісматулін В. Ш.

Редактор Еткало О. О.

Підписано до друку 25.10.18 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,0. Тираж 35. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

1 Дослідження оптимального за швидкістю керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.....	4
2 Дослідження оптимального за швидкістю керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.....	23
Список літератури.....	41
Додаток А. Форми функціонала якості.....	42
Додаток Б. Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна.....	44
Додаток В. Керованість об'єкта та критерії керованості.....	50

1 ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЗА ШВИДКОДІЄЮ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМ СТАЦІОНАРНИМ ОБ'ЄКТОМ 1

Мета роботи

1 Засвоїти постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування об'єктом.

2 Ознайомитися з методикою синтезу керування об'єктом, оптимального за швидкодією, на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

3 Дослідити процеси у системі при керуванні, що є оптимальним за швидкодією, та надати рекомендації для практичного застосування.

1.1 Програма роботи

1.1.1 Синтез та аналітичне дослідження оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом 1.

1.1.2 Експериментальне дослідження фазових траєкторій лінійного стаціонарного об'єкта 1 при керуванні, що є оптимальним за швидкодією.

1.2 Підготовка до роботи

1.2.1 За рекомендованою літературою [1-5] та конспектом лекцій у позааудиторний час ознайомитися з метою та вивчити:

- програму і вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування; формулювання принципу максимуму Л. С. Понтрягіна; умови, достатні для існування оптимального керування; постановку та розв'язання задачі синтезу оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

1.2.2 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

1.2.3 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

1.3 Короткі відомості з теорії

1.3.1 Коротка характеристика задачі оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих задач, при вирішенні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань потребують мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають на меті досягнення найбільшої точності відтворення заданого діяння. Крім того, ставиться завдання мінімальної витрати енергії для досягнення поставленої мети. Нерідкі випадки, коли необхідно задовольнити цілу низку суперечливих вимог. Усі такі завдання ставляться до класу задач оптимального керування.

Загальним для таких систем є вимога створення такої сукупності керуючих діянь, за яких досягається екстремальне значення деякого показника якості. *Система автоматичного керування (САК), що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називається оптимальною в тому ж сенсі* (наприклад, за швидкістю, за точністю та ін.).

Правило, за допомогою якого обирається екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається критерієм оптимальності цієї системи.

До складу задачі синтезу оптимального керування входять такі вихідні дані:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) інформація про зовнішні діяння;
- 3) інформація про мету керування;
- 4) інформація про показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) інформація про обмеження, що накладаються на величини діянь і на об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування при накладених обмеженнях і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Завдання цього класу належать до варіаційних задач оптимального керування. Застосування методів теорії варіаційного числення потребує цілком певної математичної

формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

1.3.2 Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом

Математична модель об'єкта керування задається за допомогою системи диференціальних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним та стаціонарним, система диференціальних рівнянь стану записується у такій векторно-матричній формі:

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1.1)$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$ – n -вимірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ – k -вимірний вектор керування;

\mathbf{A} – $n \times n$ постійна матриця стану;

\mathbf{B} – $n \times k$ постійна матриця керування.

Мета керування формулюється як переведення об'єкта з деякого початкового стану $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ у кінцевий стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$. Початковий та кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача з закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями). Моменти початку та закінчення керування також можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування).

Показник якості керування J подається як функціонал – величина, числове значення якої залежить від вибору вектору керування $\mathbf{u}(t)$, вектора стану $\mathbf{z}(t)$ та часу керування (додаток А):

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (1.2)$$

де $\Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k]$ – показник якості у кінці керування;

$L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа, або лагранжیان).

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)} \quad (1.3)$$

Обмеження накладаються у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об'єкта. Вони задаються у вигляді умов належності векторів $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ до деяких множин

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t. \quad (1.4)$$

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовуються методи теорії варіаційного числення. Один із методів оснований на принципі максимуму Л. С. Понтрягіна [1-5]. Він надає умови, що накладаються на оптимальне керування (додаток Б). Ці умови є необхідними, але загалом не є достатніми. Однак, якщо відомо, по-перше, що об'єкт є керованим (додаток В) і, по-друге, що отриманий у відповідності до принципу максимуму вектор керуючих діянь є єдино-можливий вектор, який реалізує мету керування, тоді він і буде вектором оптимального керування.

1.4 Вказівки до виконання роботи

1.4.1 Синтез та аналітичне дослідження оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом 1

Постановка задачі

Динаміка об'єкта керування описується диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (рисунок 1.1)

$$y''(t) = K_a u(t), \quad (1.5)$$

де $y(t)$ – вихідна величина;

$u(t)$ – керуюче діяння;

K_a – коефіцієнт підсилення.

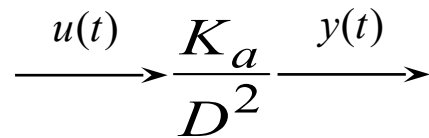


Рисунок 1.1 – Схема математичної моделі
об'єкта керування

Максимальна величина керуючого діяння $u(t)$ обмежена значенням u_{\max}

$$|u(t)| \leq u_{\max}. \quad (1.6)$$

Метою керування є переведення об'єкта із заданого початкового стану $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ у кінцевий стан $y(t_k) = 0$, $y'(t_k) = 0$, де $t_0 = 0$ – фіксований момент початку, а t_k – нефіксований момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімальний час керування $T = t_k - t_0$:

$$J = t_k - t_0 = T \rightarrow \min_{u \in u_t}, \quad (1.7)$$

де u_t – множина припустимих керувань.

Знайти та проаналізувати закон оптимального керування.

Математична формалізація задачі

Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = y'(t). \quad (1.8)$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$, $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k) = 0$, $z_2(t_k) = 0$.

Система диференціальних рівнянь стану має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= K_a u(t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Звідси нескладно встановити, що матриця стану \mathbf{A} та матриця керування \mathbf{B} матричного рівняння стану (1.1) дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ K_a \end{vmatrix}.$$

Показник якості керування (1.2) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), u(t), t] dt = \int_{t_0}^{t_k} 1 \cdot dt = t_k - t_0, \quad (1.10)$$

де $L[\mathbf{z}(t), u(t), t] = 1$ – функція Лагранжа варіаційної задачі.

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J = t_k - t_0 \rightarrow \min_{u \in u_t} \quad (1.11)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування із закріпленими кінцями при нефіксованому часі закінчення керування (додаток Б).

Перевірка керованості об'єкта та вибір методу розв'язання

З метою аналізу керованості об'єкта розглянемо матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{AB} і $\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{vmatrix}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ K_a \end{vmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ K_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_a \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & K_a \\ K_a & 0 \end{vmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -K_a^2 \neq 0. \quad (1.12)$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта. Таким чином, для заданого об'єкта принцип максимуму надає необхідні і достатні умови оптимальності.

Синтез закону оптимального керування

Щоб скористатися принципом максимуму, запишемо гамільтоніан та канонічну систему диференціальних рівнянь задачі.

Гамільтоніан варіаційної задачі (додаток Б):

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)] = -1 + \psi_1(t) \cdot z_2(t) + \psi_2(t) \cdot K_a \cdot u(t), \quad (1.13)$$

де $\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t)]^T$ – вектор спряжених змінних.

Канонічна система диференціальних рівнянь (додаток Б):

$$\begin{aligned}
z_1'(t) &= z_2(t); \\
z_2'(t) &= K_a u(t); \\
\psi_1'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)]}{\partial z_1} = 0; \\
\psi_2'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)]}{\partial z_2} = -\psi_1(t).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Позначимо $z_1^*(t)$, $z_2^*(t)$, $\psi_1^*(t)$ і $\psi_2^*(t)$ функції, що задовольняють канонічну систему рівнянь при $u(t) = u^*(t)$, а також початкові і граничні умови. Тоді

$$H[\mathbf{z}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), u(t)] = -1 + \psi_1^*(t) z_2^*(t) + K_a \psi_2^*(t) u(t). \tag{1.15}$$

Звідси випливає, що максимальне значення гамільтоніана досягається лише у тому випадку, коли керування обирається таким чином:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) > 0; \\ -u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) < 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Якщо скористатися функцією перемикування sgn

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

знайдений закон оптимального керування можна записати так:

$$u^*(t) = u_{\max} \text{sgn}(\psi_2^*(t)). \tag{1.18}$$

Аналіз закону керування, оптимального за швидкістю

Для проведення аналізу знайдемо розв'язок канонічної системи (1.14) для спряжених змінних:

$$\begin{aligned} \psi_1^*(t) &= C_1; \\ \psi_2^*(t) &= -C_1 t + C_2, \end{aligned} \quad (1.19)$$

де C_1 і C_2 – деякі константи.

Константи C_1 і C_2 не можуть одночасно дорівнювати нулю. Згідно з третьою умовою принципу максимуму для задачі із закріпленими кінцями при нефіксованому часі закінчення керування (таблиця Б.1)

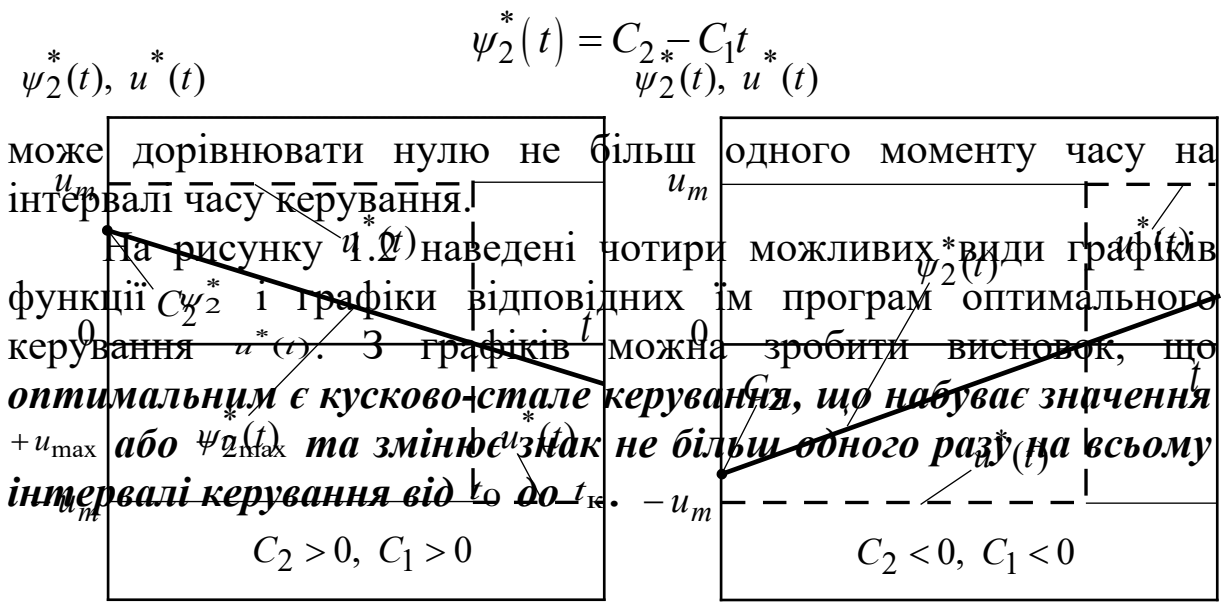
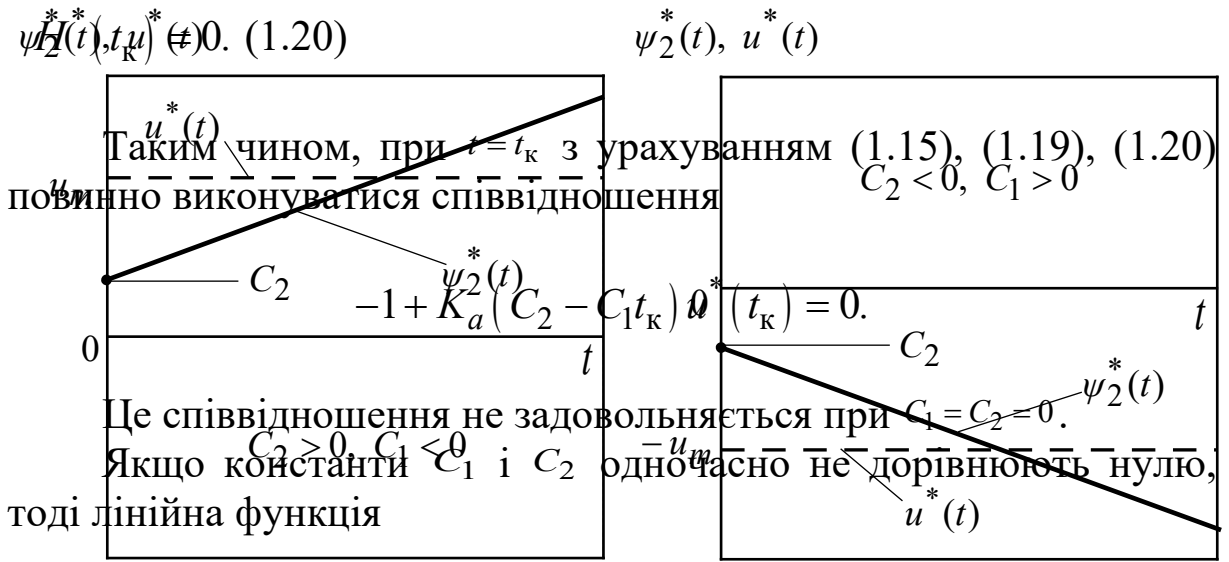


Рисунок 1.2 – Чотири можливих види графіків функцій та відповідних їм програм оптимального керування

Синтез оптимальної системи керування

Щоб за відомою програмою оптимального керування (1.16) здійснити синтез оптимальної системи керування, скористаємось диференціальними рівняннями стану об'єкта (1.9), для координат якого відомі початкові і граничні умови.

Визначимо характер руху об'єкта на інтервалі часу, коли $u(t) = u_{\max}$. На цьому інтервалі рух об'єкта описується системою рівнянь

$$z_1'(t) = z_2(t);$$

$$z_2'(t) = K_a u_{\max}.$$

Розв'язок цієї системи має такий вигляд:

$$z_2^2 = 2K_a u_{\max} z_1 + \left(\zeta_2^2 - 2K_a u_{\max} \zeta_1 \right), \quad (1.21)$$

де ζ_1, ζ_2 – координати стану об'єкта в момент початку руху об'єкта при $u(t) = u_{\max}$.

Аналогічно знаходимо фазові траєкторії об'єкта при керуванні $u(t) = -u_{\max}$

$$z_2^2 = -2K_a u_{\max} z_1 + \left(\zeta_2^2 + 2K_a u_{\max} \zeta_1 \right), \quad (1.22)$$

де ζ_1, ζ_2 – координати стану об'єкта в момент початку руху об'єкта при $u(t) = -u_{\max}$.

Рівняння (1.21) і (1.22) визначають на фазовій площині два сімейства парабол (рисунок 1.3). Параболи першого сімейства зображені суцільними лініями, а параболи другого – пунктирними. Параболи, що належать одному сімейству, відрізняються значеннями початкових координат стану ζ_1, ζ_2 та ζ_1, ζ_2 відповідно.

На фазових траєкторіях стрілками вказані напрямки руху точки: при $z_2 = y' > 0$ точка рухається по траєкторії так, що величина $z_1 = y$ збільшується; навпаки. Якщо $z_2 = y' < 0$, тоді рух точки здійснюється у бік зменшення значень $z_1 = y$.

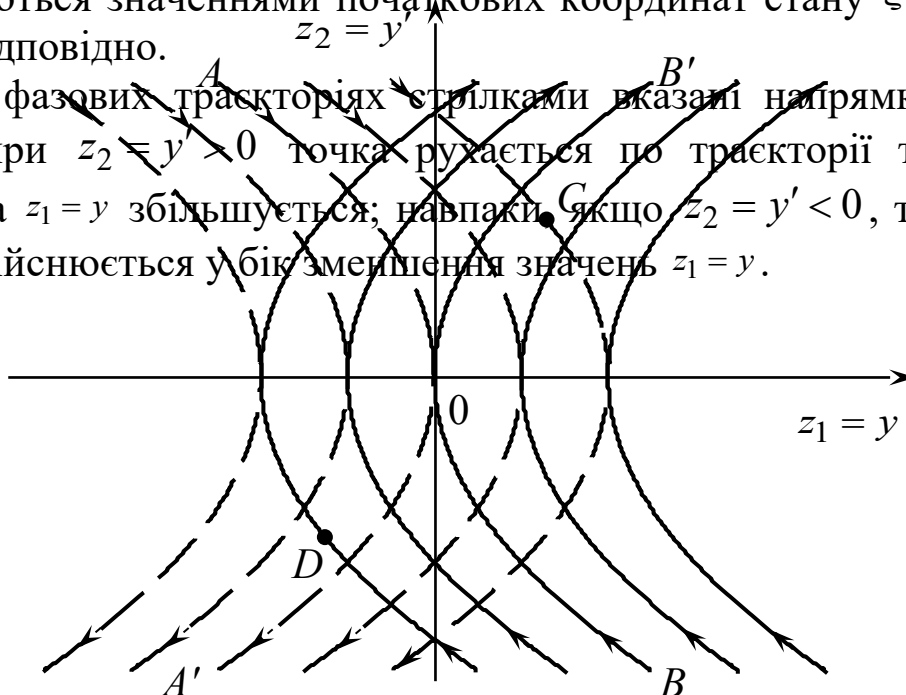


Рисунок 1.3 – Два сімейства фазових траєкторій об'єкта, що відповідають керуванню (суцільна лінія) та керуванню (пунктирна лінія)

Розгляд фазового портрета руху об'єкта керування дає змогу зробити висновок:

1) кожне сімейство парабол містить тільки одну гілку фазової траєкторії, рухаючись уздовж якої точка може прийти до початку координат ($z_1 = z_2 = 0$), що відповідає меті керування: при $u(t) = -u_{\max}$ до реалізації мети керування приводить рух уздовж дуги $A0$ параболи $A0A'$ сімейства (1.22); при $u(t) = u_{\max}$ – рух уздовж дуги $B0$ параболи $B0B'$ сімейства (1.21);

2) якщо початковий стан об'єкта керування такий, що точка не лежить на лінії $A0B$ (точка C або D на рисунку 1.3), тоді для реалізації руху об'єкта до початку координат за мінімальний час необхідно так обрати знак керуючого діяння, щоб з вихідного положення $z_1(t_0) = z_{10}$, $z_2(t_0) = z_{20}$ точка рухалась до лінії $A0B$:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху лежить нижче лінії } A0B; \\ -u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху лежить вище лінії } A0B. \end{cases} \quad (1.23)$$

3) коли внаслідок прикладення керуючого діяння об'єкт перейде до такого стану, що точка буде на лінії $A0B$, необхідно змінити знак керуючого діяння на протилежний, щоб подальший рух точки здійснювався вздовж відповідної гілки лінії $A0B$ до початку координат (мети керування).

Таким чином, лінія $A0B$ – це *лінія перемикання знака керуючого діяння*. За допомогою цієї лінії всю фазову площину можна поділити на дві множини точок, кожній з якої відповідає певний знак керуючого діяння.

Знайдемо рівняння лінії $A0B$. З рівнянь (1.21) і (1.22) отримуємо, що рівняння парабол $B0B'$ і $A0A'$ відповідно мають такий вигляд:

$$z_2^2 = 2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \geq 0; \quad z_2^2 = -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \leq 0.$$

Таким чином, точки дуги $0B$ задовольняють рівняння

$$z_2 = -\sqrt{2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \geq 0,$$

а точки дуги $A0$ – рівняння

$$z_2 = \sqrt{-2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \leq 0.$$

Можна отримати і єдине рівняння для всієї лінії перемикання $A0B$. Для цього відмітимо, що для точок дуги $0B$

$$|z_2| = \sqrt{2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \geq 0,$$

і внаслідок цього

$$= -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \geq 0. \quad (1.24)$$

Аналогічно, для точок дуги $A0$ також справедливо

$$|z_2| = \sqrt{-2K_a u_{\max} z_1}, \quad z_1 \leq 0,$$

і внаслідок цього

$$z_2 |z_2| = -2K_a u_{\max} z_1, \quad z_1 \leq 0. \quad (1.25)$$

Ураховуючи (1.24) і (1.25), отримуємо загальне рівняння для всіх точок лінії перемикання $A0B$

$$z_2|z_2| = -2K_a u_{\max} z_1, \quad -\infty < z_1 < \infty. \quad (1.26)$$

Введемо позначення

$$\sigma(z_1, z_2) = z_2|z_2| + 2K_a u_{\max} z_1. \quad (1.27)$$

Звідси рівняння лінії перемикання

$$\sigma(z_1, z_2) = 0. \quad (1.28)$$

З рівнянь (1.27), (1.28) випливає, що $\sigma(z_1, z_2) > 0$ для всіх точок фазової площини, що лежать вище лінії перемикання, і $\sigma(z_1, z_2) < 0$ для всіх точок фазової площини, що лежать нижче лінії перемикання. Використовуючи вказану властивість функції $\sigma(z_1, z_2)$, яку можна назвати розв'язувальною, знайдений закон оптимального керування (1.23) можна подати в такому вигляді:

$$u^*(z_1, z_2) = -u_{\max} \operatorname{sgn}(\sigma(z_1, z_2)). \quad (1.29)$$

Функція $\operatorname{sgn}(\sigma)$ не визначена при $\sigma = 0$, тому рівняння (1.29) установлює керуюче діяння тільки для станів, яким відповідають точки фазової площини, що не належать лінії перемикання.

З погляду технічної реалізації вказане зауваження несуттєве – усі реальні перемикачі мають хоч і малі, але скінченні зони нечутливості.

Структура оптимальної за швидкодією системи керування наведена на рисунку 1.4.

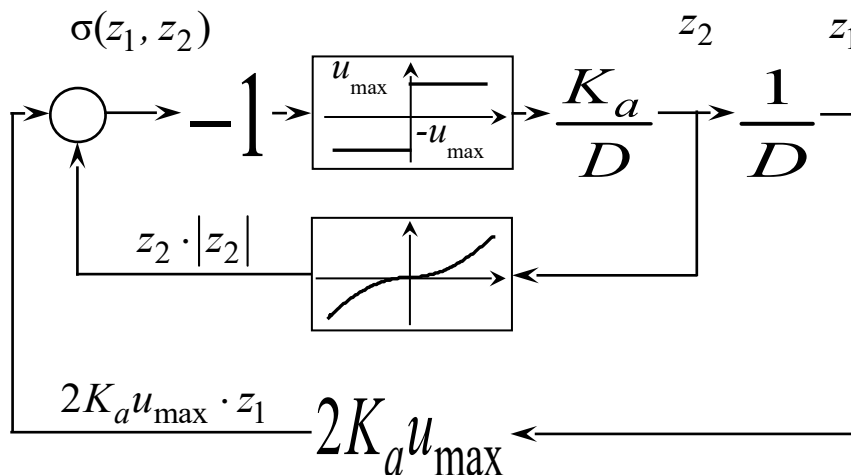


Рисунок 1.4 – Алгоритмічна структура оптимальної за швидкодією системи керування

Таким чином, при практичній реалізації оптимальної за швидкодією системи керування об'єктом 1 будуть потрібні два нелінійних блоки – один буде реалізовувати функцію $z_2|z_2|$, а другий – функцію ідеального реле.

Побудова та аналіз фазових траєкторій

Вважаючи, що $K_a u_{\max} = 1$, побудуємо за допомогою пакета Matlab два сімейства фазових траєкторій, що відповідають керуванню $u(t) = u_{\max}$ і $u(t) = -u_{\max}$ та зображені на рисунку 1.3. Для цього набрати у командному рядку такі команди:

```

z2 = -5:0.01:5;
d = 10;
z1_1 = z2.^2 - 20;
z1_2 = z1_1 + d;
z1_3 = z1_2 + d;
z1_4 = z1_3 + d;
z1_5 = z1_4 + d;

z1_1_ = -z2.^2 - 20;
z1_2_ = z1_1_ + d;
z1_3_ = z1_2_ + d;
z1_4_ = z1_3_ + d;
z1_5_ = z1_4_ + d;
plot(z1_1, z2, z1_2, z2, z1_3, z2, z1_4, z2, z1_5, z2,
z1_1_, z2, z1_2_, z2, z1_3_, z2, z1_4_, z2, z1_5_, z2);grid;

```

Занести графіки цих сімейств до звіту, вказати напрямок руху точок уздовж фазових траєкторій та окремо позначити лінію перемикання керування.

1.4.2 Експериментальне дослідження фазових траєкторій лінійного стаціонарного об'єкта 1 при керуванні, що є оптимальним за швидкодією

Дослідження проводиться за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає у реєстрації фазової траєкторії оптимального керування; координат стану та їх похідних $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t)$, $z_2'(t) = y''(t)$; оптимального керування $u(t)$, розв'язувальної функції $\sigma(z_1, z_2)$ та фіксації моменту часу завершення керування (досягнення мети керування).

Відкрити файл **Sv_opt_ker_2_int**. Схема проведення експерименту в пакеті Simulink зображена на рисунку 1.5. Вона складається з моделі САК (**Integrator**, **Integrator1**), блоків розрахунку розв'язувальної функції $\sigma(z_1, z_2)$ (**Fcn**, **Gain**, **Add**), блоків формування оптимального керування (**Sign**, **Unary Minus**, **Relay**), блоків завершення керування після досягнення мети керування (**Switch**, **Constant**), графопобудовника (**XY Graph**) та двох віртуальних осцилографів – двоканального і триканального (**Scope1**, **Scope**).

На верхньому екрані двоканального осцилографа спостерігається розв'язувальна функція $\sigma(z_1, z_2)$, на нижньому – оптимальне керування $u(t)$.

На верхньому екрані триканального осцилографа спостерігається похідна координати стану $z_2'(t) = y''(t)$ (прискорення об'єкта), на середньому – координата стану $z_2(t) = y'(t)$ (швидкість об'єкта), на нижньому – координата стану $z_1(t) = y(t)$ (координата об'єкта).

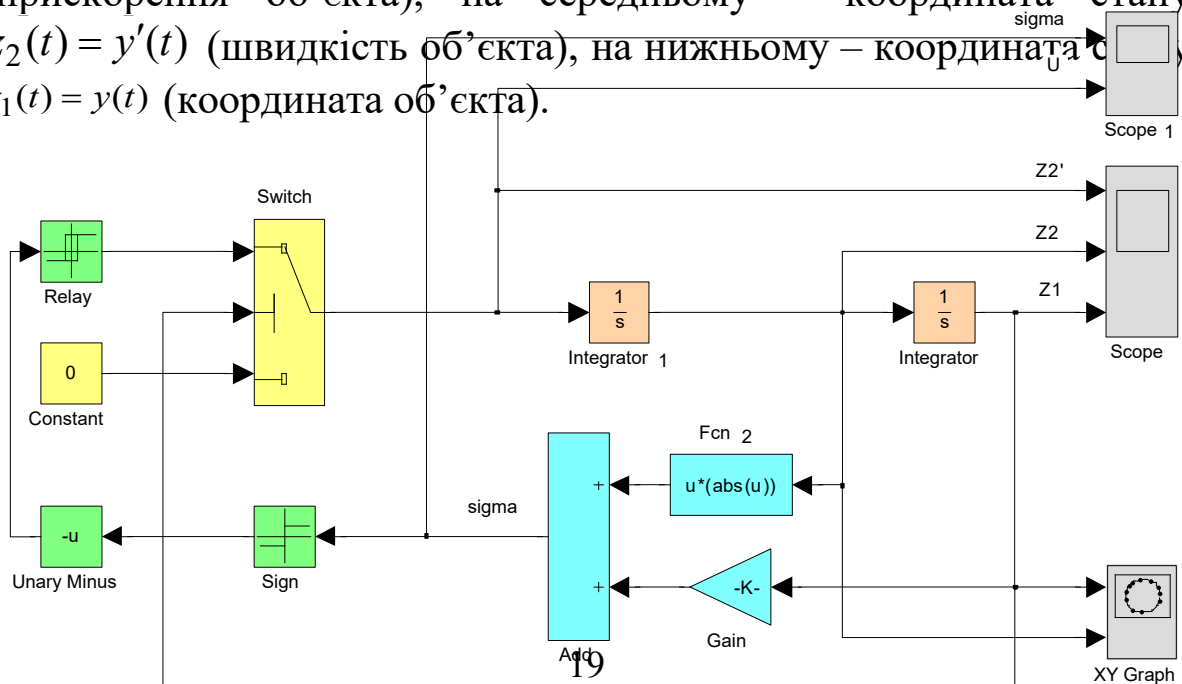


Рисунок 1.5 – Схема проведення експерименту

Для спостереження фазової траєкторії оптимального керування використовується графопобудовник **XY Graph**.

Для підвищення точності моделювання у вікні Simulink натиснути кнопку **Simulation**, відкрити вікно **Configuration Parameters** та встановити відносну точність **Relative Tolerance** рівною $1e^{-6}$.

У командному рядку Matlab ввести команду

umax = 1;

Установити початкові умови z_{20} , z_{10} для інтеграторів **Integrator1**, **Integrator** рівними 0 та 6 відповідно. Ці блоки відкриваються подвійним натисканням лівою кнопкою миші на відповідний інтегратор. Початкові умови встановлюються у рядку **Initial Condition**.

Провести дослідження оптимального за швидкодією керування заданим об'єктом натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів. У разі потреби для зручності спостереження величин на екранах осцилографів натиснути кнопку «**Бінокль**» (**Autoscale**).

Провести спостереження фазової траєкторії оптимального керування. Зіставити момент часу зміни знака керуючого діяння $u(t)$ у відповідному вікні осцилографа з виходом фазової траєкторії на лінію перемикання знака керування $\sigma(z_1, z_2) = 0$ у вікні графопобудовника.

Зіставити кількість змін знака керуючого діяння $u(t)$ з порядком заданого об'єкта.

Момент завершення керування фіксується, коли керування $u(t)$ (завдяки перемикачу **Switch**) буде дорівнювати нулю. Занести

тривалість інтервалу часу керування T у другий рядок таблиці 1.1.

Провести аналогічні дослідження для максимальної величини керуючого діяння $u_{\max} = 2, 3, 4, 5$, задаючи її величину у командному рядку Matlab. У кожному дослідженні величину інтервалу часу керування T занести у другий рядок таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

u_{\max}	1	2	3	4	5
Час керування T , с					

Побудувати графік $T = T(u_{\max})$ експериментальної залежності величини інтервалу часу керування T від максимальної величини керуючого діяння u_{\max} , занести його до звіту, зробити висновок.

1.5 Зміст звіту

1.5.1 Назва і мета роботи.

1.5.2 Рівняння «вхід-вихід» та схема математичної моделі досліджуваного об'єкта керування.

1.5.3 Хід та результати аналітичного дослідження: рівняння і графіки двох сімейств фазових траєкторій, що відповідають керуванню $u(t) = u_{\max}$ і $u(t) = -u_{\max}$, з напрямком руху точок вздовж траєкторій; рівняння та графік лінії перемикання знака керування.

1.5.4 Схема проведення експерименту.

1.5.5 Таблиці і графіки експериментальних залежностей.

1.5.6 Висновки за роботою.

Контрольні запитання

1 Поясніть поняття «оптимальне керування».

2 Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?

3 Поясніть поняття «показник якості».

4 Поясніть поняття «функціонал якості».

5 Які форми функціоналів якості застосовуються в загальній теорії оптимального керування?

6 Поясніть поняття «критерій оптимальності».

- 7 Які вихідні дані входять до складу задачі синтезу оптимального керування?
- 8 Поясніть поняття «вектор стану».
- 9 Що пов'язує між собою рівняння стану?
- 10 Який об'єкт називається керованим?
- 11 Поясніть поняття «критерій керованості».
- 12 Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?
- 13 Як пов'язані поняття стійкості об'єкта і керованості об'єкта?
- 14 Поясніть поняття «лагранжіан».
- 15 Поясніть поняття «гамільтоніан».
- 16 Поясніть поняття «канонічна система рівнянь».
- 17 Як пов'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?
- 18 Як пов'язані канонічна система рівнянь і лагранжіан?
- 19 Як знаходиться максимум функції за її аналітичним виразом?
- 20 Дайте формулювання принципу максимуму.
- 21 У чому полягає специфіка оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом?
- 22 У якому випадку принцип максимуму надає не тільки необхідні, але й достатні умови існування оптимального керування об'єктом?
- 23 Чому дорівнює кількість перемикачів керуючого діяння при оптимальному за швидкодією керуванні лінійним стаціонарним об'єктом другого порядку?
24. Кривими якого класу є частини фазових траєкторій об'єкта, що складається з двох інтеграторів, при оптимальному за швидкодією керуванні?
25. Як за відомими фазовими траєкторіями об'єкта другого порядку, що відповідають керуванню u_{max} та $-u_{max}$, знаходиться лінія перемикачів керуючого діяння?
26. У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

2 ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЗА ШВИДКОДІЄЮ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМ СТАЦІОНАРНИМ ОБ'ЄКТОМ 2

Мета роботи

1 Засвоїти постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування об'єктом.

2 Ознайомитися з методикою синтезу керування об'єктом, оптимального за швидкодією, на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

3 Дослідити процеси у системі при керуванні, оптимальному за швидкодією, і дати рекомендації для практичного застосування.

2.1 Програма роботи

2.2.1 Синтез та аналітичне дослідження оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом 2.

2.1.2 Експериментальне дослідження фазових траєкторій лінійного стаціонарного об'єкта 2 при керуванні, що є оптимальним за швидкодією.

2.2 Підготовка до роботи

2.2.1 За рекомендованою літературою [1-5] та конспектом лекцій у позааудиторний час ознайомитися з метою та вивчити:

- програму і вказівки щодо виконання роботи;
- теоретичні положення за темою роботи: постановку та математичну формалізацію задачі оптимального керування; формулювання принципу максимуму Л. С. Понтрягіна; умови, достатні для існування оптимального керування; постановку та розв'язання задачі синтезу оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом на підставі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна.

2.2.2 Підготувати бланк звіту з лабораторної роботи.

2.2.3 Підготувати відповіді на контрольні запитання.

2.3 Короткі відомості з теорії

2.3.1 Коротка характеристика задачі оптимального керування заданим об'єктом

Існує безліч практично важливих задач, при вирішенні яких необхідно здійснювати керування об'єктами з найбільшою ефективністю. Деякі з цих завдань потребують мінімального часу для досягнення необхідного результату. Інші мають на меті досягнення найбільшої точності відтворення заданого діяння. Крім того, ставиться завдання мінімальної витрати енергії для досягнення поставленої мети. Нерідкі випадки, коли необхідно задовольнити цілу низку суперечливих вимог. Усі такі завдання ставляться до класу задач оптимального керування.

Загальним для таких систем є вимога створення такої сукупності керуючих діянь, за яких досягається екстремальне значення деякого показника якості. ***САК, що реалізує в будь-якому сенсі оптимальне керування, називається оптимальною в тому ж сенсі*** (наприклад, за швидкодією, за точністю та ін.).

Правило, за допомогою якого обирається екстремальне значення показника якості в системі керування об'єктом, називається критерієм оптимальності цієї системи.

До складу ***задачі синтезу оптимального керування входять*** такі вихідні дані:

- 1) інформація про об'єкт керування;
- 2) інформація про зовнішні діяння;
- 3) інформація про мету керування;
- 4) інформація про показник якості та критерій оптимальності керування;
- 5) інформація про обмеження, що накладаються на величини діянь і на об'єкт керування.

На підставі зазначених вихідних даних необхідно знайти закон керування, який реалізує поставлену мету керування при накладених обмеженнях і забезпечує екстремальне значення заданого показника якості.

Завдання цього класу належать до варіаційних задач оптимального керування. Застосування методів теорії варіаційного числення потребує цілком певної математичної формалізації всіх вихідних даних і застосування специфічних методів розв'язання варіаційних задач.

2.3.2 Математична формалізація задачі оптимального керування лінійним стаціонарним об'єктом

Математична модель об'єкта керування задається за допомогою системи диференціальних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним та стаціонарним, система диференціальних рівнянь стану записується у такій векторно-матричній формі:

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$ – n -вимірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ – k -вимірний вектор керування;

\mathbf{A} – $n \times n$ постійна матриця стану;

\mathbf{B} – $n \times k$ постійна матриця керування.

Мета керування формулюється як переведення об'єкта з деякого початкового стану $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ у кінцевий стан $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$. Початковий та кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача із закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями). Моменти початку та закінчення керування також можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування).

Показник якості керування J подається як функціонал – величина, числове значення якої залежить від вибору вектора керування $\mathbf{u}(t)$, вектора стану $\mathbf{z}(t)$ та часу керування (додаток А):

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (2.2)$$

де $\Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k]$ – показник якості у кінці керування;

$L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа, або лагранжіан).

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)} \quad (2.3)$$

Обмеження накладаються у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об'єкта. Вони задаються у вигляді умов належності векторів $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ до деяких множин

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t. \quad (2.4)$$

Для розв'язання задачі синтезу оптимального керування застосовуються методи теорії варіаційного числення. Один з методів оснований на принципі максимуму Л. С. Понтрягина [1-5]. Він надає умови, що накладаються на оптимальне керування (додаток Б). Ці умови є необхідними, але загалом не є достатніми. Однак, якщо відомо, по-перше, що об'єкт є керованим (додаток В) і, по-друге, що отриманий у відповідності до принципу максимуму вектор керуючих діянь є єдино можливий вектор, який реалізує мету керування, тоді він і буде вектором оптимального керування.

2.4 Вказівки щодо виконання роботи

2.4.1 Синтез та аналітичне дослідження оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом 2

Постановка задачі

Рух досліджуваного об'єкта керування описується рівнянням «вхід-вихід» (рисунок 2.1)

$$T_M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = K_v u(t), \quad (2.5)$$

де K_v – коефіцієнт підсилення, 1/с;

T_M – постійна часу, с.

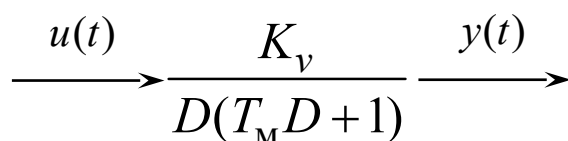


Рисунок 2.1 – Схема математичної моделі об'єкта керування

Максимальна величина керуючого діяння $u(t)$ обмежена значенням u_{\max}

$$|u(t)| \leq u_{\max}. \quad (2.6)$$

Метою керування є переведення об'єкта із заданого початкового стану $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ у кінцевий стан $y(t_k) = 0$, $y'(t_k) = 0$, де $t_0 = 0$ – фіксований момент початку, а t_k – нефіксований момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімальний час керування $T = t_k - t_0$:

$$J = t_k - t_0 = T \rightarrow \min_{u \in u_t}, \quad (2.7)$$

де u_t – множина припустимих керувань.

Знайти та проаналізувати закон оптимального керування.

Математична формалізація задачі

Оберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= y(t); \\ z_2(t) &= y'(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0) = z_{10} = y_0$, $z_2(t_0) = z_{20} = y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k) = 0$, $z_2(t_k) = 0$.

Система диференціальних рівнянь стану має такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= -\frac{1}{T_M} z_2 + \frac{1}{T_M} K_V u(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Звідси нескладно встановити, що матриця стану \mathbf{A} та матриця керування \mathbf{B} матричного рівняння стану (2.1) дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{T_M} \end{vmatrix}.$$

Показник якості керування (2.2) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), u(t), t] dt = \int_{t_0}^{t_k} 1 \cdot dt = t_k - t_0, \quad (2.10)$$

де $L[\mathbf{z}(t), u(t), t] = 1$ – функція Лагранжа варіаційної задачі.

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$J = t_k - t_0 \rightarrow \min_{u \in u_t}. \quad (2.11)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування із закріпленими кінцями при нефіксованому часі закінчення керування (додаток Б).

Перевірка керованості об'єкта та вибір методу розв'язання

З метою аналізу керованості об'єкта розглянемо матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ і $\mathbf{M} = |\mathbf{B} \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{T_M} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{T_M} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{K_v}{T_M} \\ -\frac{K_v}{T_M^2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{K_v}{T_M} \\ \frac{K_v}{T_M} & -\frac{K_v}{T_M^2} \end{vmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{M}) = -\frac{K_v^2}{T_M^2} \neq 0. \quad (2.12)$$

Заданий об'єкт є керованим, тому що ранг матриці \mathbf{M} дорівнює порядку об'єкта. Таким чином, для заданого об'єкта принцип максимуму надає необхідні і достатні умови оптимальності.

Синтез закону оптимального керування

Щоб скористатися принципом максимуму, запишемо гамільтоніан та канонічну систему диференціальних рівнянь задачі.

Гамільтоніан варіаційної задачі (додаток Б):

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)] = -1 + \psi_1(t) z_2(t) + \psi_2(t) \cdot \left(-\frac{1}{T_M} z_2(t) + \frac{K_v}{T_M} u(t) \right), \quad (2.13)$$

де $\boldsymbol{\psi}(t) = |\psi_1(t), \psi_2(t)|^T$ – вектор спряжених змінних.

Канонічна система диференціальних рівнянь (додаток Б):

$$\begin{aligned}
z_1'(t) &= F_1[\mathbf{z}(t), u(t)] = z_2(t); \\
z_2'(t) &= F_2[\mathbf{z}(t), u(t)] = -\frac{1}{T_M} z_2(t) + \frac{K_v}{T_M} u(t); \\
\psi_1'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)]}{\partial z_1} = 0; \\
\psi_2'(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), u(t)]}{\partial z_2} = -\psi_1(t) + \frac{1}{T_M} \psi_2(t).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Позначимо $z_1^*(t)$, $z_2^*(t)$, $\psi_1^*(t)$ і $\psi_2^*(t)$ функції, що задовольняють канонічну систему рівнянь при $u(t) = u^*(t)$, а також початковим і граничними умовами. Тоді

$$\begin{aligned}
H[\mathbf{z}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), u(t)] &= -1 + \psi_1^*(t) z_2^*(t) + \\
&+ \psi_2^*(t) \cdot \left(-\frac{1}{T_M} z_2^*(t) + \frac{K_v}{T_M} u(t) \right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Звідси випливає, що максимальне значення гамільтоніана досягається лише у тому випадку, коли керування обирається:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) > 0; \\ -u_{\max} & \text{на інтервалах часу, де } \psi_2^*(t) < 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Якщо скористатися функцією перемикування sgn

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

знайдений закон оптимального керування можна записати так:

$$u^*(t) = u_{\max} \text{sgn}(\psi_2^*(t)). \tag{2.18}$$

Аналіз закону керування, оптимального за швидкістю

Для проведення аналізу знайдемо розв'язок канонічної системи (2.14) для спряжених змінних:

$$\begin{aligned}\psi_1^*(t) &= C_1; \\ \psi_2^*(t) &= -C_1 t + C_2 \exp\left(\frac{t}{T_M}\right),\end{aligned}\quad (2.19)$$

де C_1 і C_2 – деякі константи.

Константи C_1 і C_2 не можуть одночасно дорівнювати нулю. Згідно з третьою умовою принципу максимуму для задачі із закріпленими кінцями при нефіксованому часі закінчення керування (таблиця Б.1)

$$H^*(t_k) = 0. \quad (2.20)$$

Таким чином, при $t = t_k$ з урахуванням (2.15), (2.19), (2.20) повинно виконуватися співвідношення

$$-1 + \frac{K_v}{T_M} \left(-C_1 t + C_2 \exp\left(\frac{t}{T_M}\right) \right) u^*(t_k) = 0.$$

Це співвідношення не задовольняється при $C_1 = C_2 = 0$.

Якщо константи C_1 і C_2 одночасно не дорівнюють нулю, тоді монотонна функція

$$\psi_2^*(t) = -C_1 t + C_2 \exp\left(\frac{t}{T_M}\right)$$

може дорівнювати нулю не більш одного моменту часу на інтервалі часу керування, що ще раз свідчить про нормальність задачі оптимального керування заданим об'єктом.

На рисунку 2.2 наведені чотири можливих види графіків функції ψ_2^* і графіки відповідних їм програм оптимального керування $u^*(t)$. З графіків випливає, що **оптимальним є**

кусово-стале керування, що набуває значення $+u_{\max}$ або $-u_{\max}$ та змінює знак не більш одного разу на всьому інтервалі керування від t_0 до t_K .

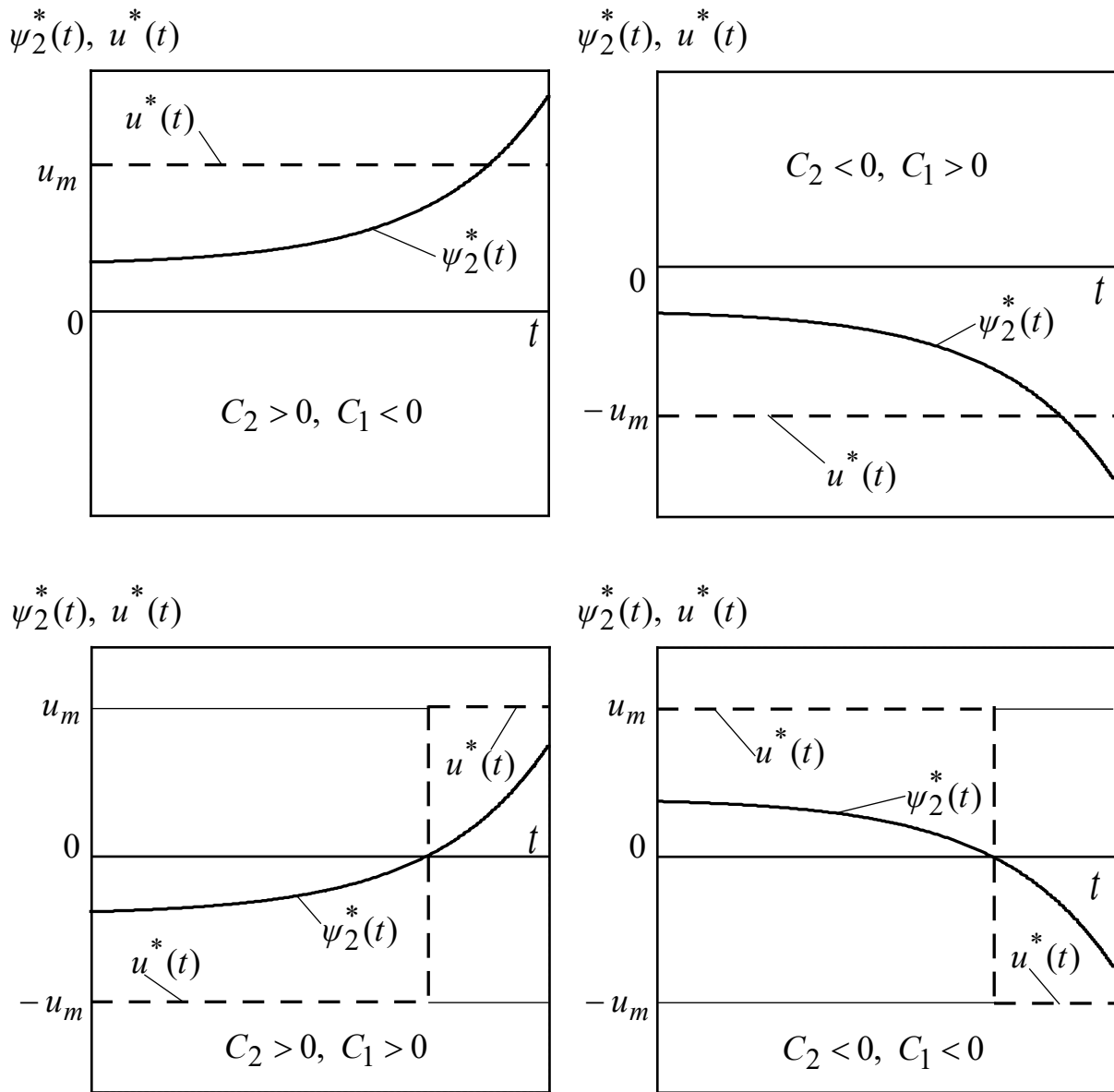


Рисунок 2.2 – Чотири можливих види графіків функцій та відповідних їм програм оптимального керування

Синтез оптимальної системи керування

Щоб за відомою програмою оптимального керування (2.18) здійснити синтез оптимальної системи керування, скористаємось

диференціальними рівняннями стану об'єкта (2.9), для координат якого відомі початкові і граничні умови.

Визначимо характер руху об'єкта на інтервалі часу, коли $u(t) = u_{\max}$. На цьому інтервалі рух об'єкта описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t); \\ z_2'(t) &= -\frac{1}{T_M} z_2(t) + \frac{K_v}{T_M} u(t). \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи має такий вигляд

$$z_1 = -TK_v u_{\max} \left(\ln |z_2 - K_v u_{\max}| - \ln |\xi_2 - K_v u_{\max}| \right) - (2.21) \\ -Tz_2 + T\xi_2 + \xi_1,$$

де ξ_1, ξ_2 – координати стану об'єкта в момент початку руху об'єкта при $u(t) = u_{\max}$.

Аналогічно знаходимо фазові траєкторії об'єкта при керуванні $u(t) = -u_{\max}$:

$$z_1 = TK_v u_{\max} \left(\ln |z_2 + K_v u_{\max}| - \ln |\zeta_2 + K_v u_{\max}| \right) - (2.22) \\ -Tz_2 + T\zeta_2 + \zeta_1,$$

де ζ_1, ζ_2 – координати стану об'єкта в момент початку руху об'єкта при $u(t) = -u_{\max}$.

Рівняння (2.21) і (2.22) визначають на фазовій площині два сімейства кривих (рисунок 2.3). Криві першого сімейства зображені суцільними лініями, а криві другого – пунктирними. Криві, що належать одному сімейству, різняться значеннями початкових координат стану ξ_1, ξ_2 та ζ_1, ζ_2 відповідно.

На фазових траєкторіях стрілками вказані напрямки руху точки: при $z_2 = y' > 0$ точка рухається по траєкторії так, що

величина $z_1 = y$ збільшується; навпаки, якщо $z_2 = y' < 0$, тоді рух точки здійснюється у бік зменшення значень $z_1 = y$.

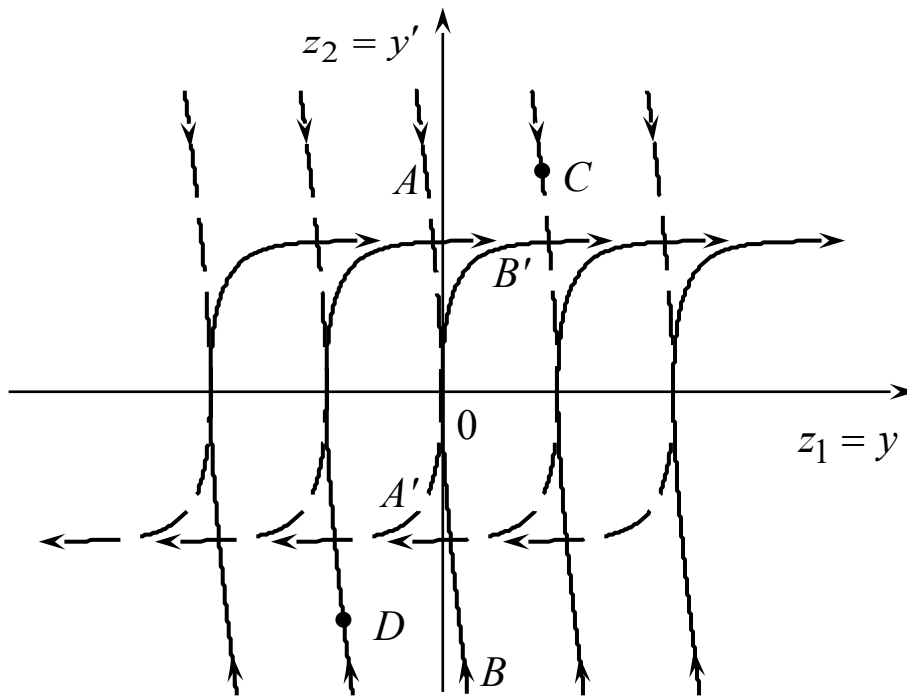


Рисунок 2.3 – Два сімейства фазових траєкторій об'єкта, що відповідають керуванню (суцільна лінія) та керуванню (пунктирна лінія)

Розгляд фазового портрета руху об'єкта керування дає змогу зробити висновок:

1) кожне сімейство кривих містить тільки одну гілку фазової траєкторії, рухаючись уздовж якої точка може прийти до початку координат ($z_1 = z_2 = 0$), що відповідає меті керування: при $u(t) = -u_{\max}$ до реалізації мети керування приводить рух уздовж дуги $A0$ кривої $A0A'$ сімейства (2.22); при $u(t) = u_{\max}$ – рух уздовж дуги $B0$ кривої $B0B'$ сімейства (2.21);

2) якщо початковий стан об'єкта керування такий, що точка не лежить на лінії $A0B$ (точка C або D на рисунку 2.3), тоді для реалізації руху об'єкта до мети керування (початку координат) за мінімальний час необхідно так обрати знак керуючого діяння, щоб з вихідного положення $z_1(t_0) = z_{10}$, $z_2(t_0) = z_{20}$ точка рухалась до лінії $A0B$:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху лежить нижче лінії } AOB, \\ -u_{\max}, & \text{якщо точка початку руху лежить вище лінії } AOB. \end{cases} \quad (2.23)$$

3) коли внаслідок прикладення керуючого діяння об'єкт перейде до такого стану, що точка буде на лінії AOB , необхідно змінити знак керуючого діяння на протилежний для того, щоб подальший рух точки здійснювався вздовж відповідної гілки лінії AOB до початку координат (мети керування).

Таким чином, лінія AOB – це **лінія перемикавання знака керуючого діяння**. За допомогою цієї лінії всю фазову площину можна поділити на дві множини точок, кожній з якої відповідає певний знак керуючого діяння.

Знайдемо рівняння лінії перемикавання AOB . З рівнянь (2.21) і (2.22) отримуємо, що рівняння кривих BOB' і AOA' відповідно мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} z_1 &= -Tz_2 - TK_v u_{\max} \ln|z_2 - K_v u_{\max}| + TK_v u_{\max} \ln|K_v u_{\max}|, & z_2 \leq 0; \\ z_1 &= -Tz_2 + TK_v u_{\max} \ln|z_2 + K_v u_{\max}| - TK_v u_{\max} \ln|K_v u_{\max}|, & z_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Отримуємо також і загальне рівняння для всіх точок лінії перемикавання AOB :

$$z_1 = -Tz_2 + TK_v u_{\max} \operatorname{sgn}(z_2) \ln\left(1 + \frac{|z_2|}{K_v u_{\max}}\right) \quad (2.24)$$

Після цього легко можна отримати рівняння $\sigma(z_1, z_2) = 0$ для лінії перемикавання:

$$\sigma(z_1, z_2) = z_1 + Tz_2 - TK_v u_{\max} \operatorname{sgn}(z_2) \ln\left(1 + \frac{|z_2|}{K_v u_{\max}}\right) = 0. \quad (2.25)$$

З рівнянь (2.21), (2.22) випливає, що $\sigma(z_1, z_2) > 0$ для всіх точок фазової площини, що лежать вище лінії перемикавання, і $\sigma(z_1, z_2) < 0$ для всіх точок фазової площини, що лежать нижче лінії перемикавання. Використовуючи вказану властивість функції

$\sigma(z_1, z_2)$, яку можна назвати розв'язувальною, знайдений закон оптимального керування (2.18) можна подати у такому вигляді:

$$u^*(z_1, z_2) = -u_{\max} \operatorname{sgn}(\sigma(z_1, z_2)). \quad (2.26)$$

Функція $\operatorname{sgn}(\sigma)$ не визначена при $\sigma = 0$, тому рівняння (2.26) установлює керуюче діяння тільки для станів, яким відповідають точки фазової площини, що не належать лінії перемикання.

З погляду технічної реалізації вказане зауваження несуттєве – усі реальні перемикачі мають хоч і малі, але скінченні зони нечутливості.

Структура оптимальної за швидкодією системи керування наведена на рисунку 2.4.

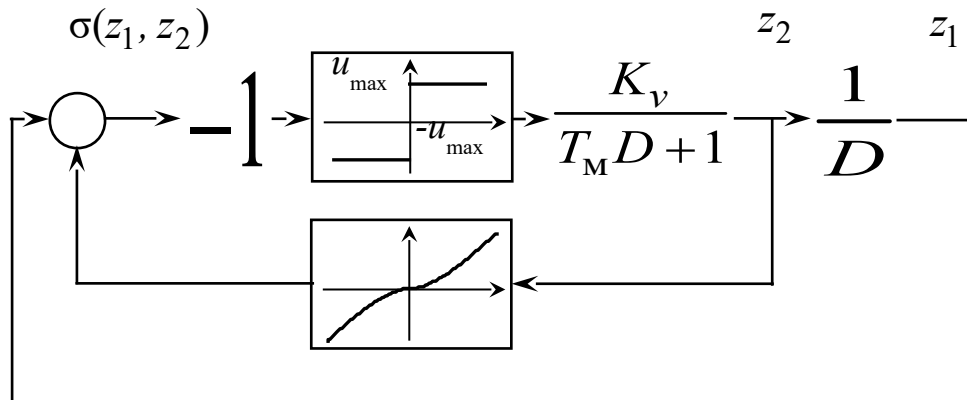


Рисунок 2.4 – Алгоритмічна структура оптимальної за швидкодією системи керування

Побудова та аналіз фазових траєкторій

Вважаючи, що $T_M = K_v u_{\max} = 1$, побудувати за допомогою пакета Matlab два сімейства фазових траєкторій, що відповідають керуванню $u(t) = u_{\max}$ і $u(t) = -u_{\max}$ та зображені на рисунку 2.3. Для цього набрати у командному рядку такі команди:

```

z2 = -2:0.001:0.999;
d = 4;
z1_1 = -z2 - log(abs(z2 - 1)) - 8;
z1_2 = z1_1 + d;
z1_3 = z1_2 + d;

```

```

z1_4 = z1_3 + d;
z1_5 = z1_4 + d;
z2_1 = -0.999:0.001:2;
z1_1_ = -z2_1 + log(abs(z2_1 + 1)) + d;
z1_2_ = z1_1_ + d;
z1_3_ = z1_2_ + d;
z1_4_ = z1_3_ + d;
z1_5_ = z1_4_ + d;
plot(z1_1, z2, z1_2, z2, z1_3, z2, z1_4, z2, z1_5, z2,
z1_1_, z2_1, z1_2_, z2_1, z1_3_, z2_1, z1_4_, z2_1,
z1_5_, z2_1);grid;

```

Занести графіки цих сімейств до звіту, вказати напрямок руху точок уздовж фазових траєкторій та окремо позначити лінію перемикання керування.

2.4.2 Експериментальне дослідження фазових траєкторій лінійного стаціонарного об'єкта 2 при керуванні, що є оптимальним за швидкодією

Дослідження проводиться за допомогою пакета програм Simulink програмної оболонки Matlab. Експеримент полягає у реєстрації фазової траєкторії оптимального керування; координат стану та їх похідних $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t)$, $z_2'(t) = y''(t)$; оптимального керування $u(t)$, розв'язувальної функції $\sigma(z_1, z_2)$ та фіксації моменту часу завершення керування (досягнення мети керування).

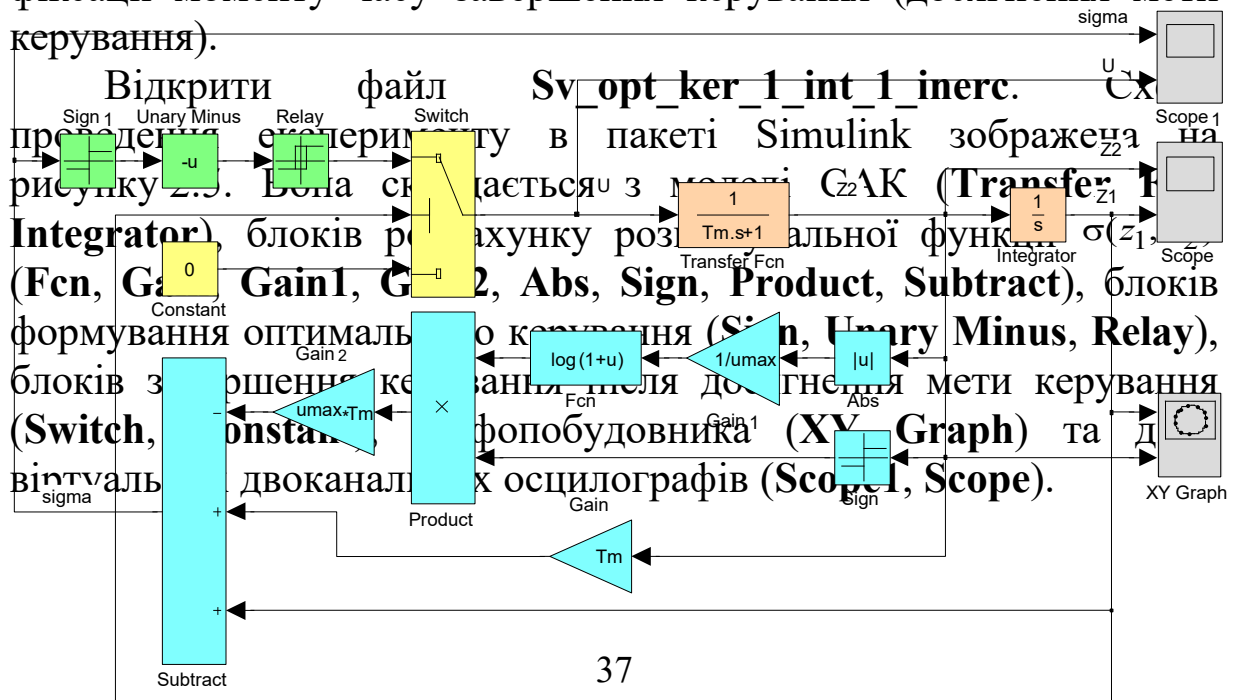


Рисунок 2.5 – Схема проведення експерименту

На верхньому екрані двоканального осцилографа **Scope1** спостерігається розв'язувальна функція $\sigma(z_1, z_2)$, на нижньому – оптимальне керування $u(t)$. На верхньому екрані двоканального осцилографа **Scope** спостерігається координата стану $z_2(t) = y'(t)$ (швидкість об'єкта), на нижньому – координата стану $z_1(t) = y(t)$ (координата об'єкта).

Для спостереження фазової траєкторії оптимального керування використовується графопобудовник **XY Graph**.

У командному рядку Matlab ввести команду

Tm = 0.5; umax = 1;

Установити початкову умову z_{10} для інтегратора **Integrator** рівною 6. Блок відкривається подвійним натисканням лівою кнопкою миші на ньому. Початкова умова встановлюється у рядку **Initial Condition**.

Провести дослідження оптимального за швидкодією керування заданим об'єктом натисканням кнопки ► (**Start**) на панелі інструментів. У разі потреби для зручності спостереженні величин на екранах осцилографів натиснути кнопку “**Бінокль**” (**Autoscale**).

Провести спостереження фазової траєкторії оптимального керування. Зіставити момент часу зміни знака керуючого діяння $u(t)$ у відповідному вікні осцилографа з виходом фазової траєкторії на лінію перемикавання знака керування $\sigma(z_1, z_2) = 0$ у вікні графопобудовника.

Зіставити кількість змін знака керуючого діяння $u(t)$ з порядком заданого об'єкта.

Момент завершення керування фіксується, коли керування $u(t)$ (завдяки перемикачу **Switch**) буде дорівнювати нулю. Занести тривалість інтервалу часу керування T у другий рядок таблиці 1.3.

Провести аналогічні дослідження для постійної часу $T_M = 0,75, 1, 1,25, 1,5$ с, задаючи її величину у командному рядку Matlab. У кожному дослідженні величину інтервалу часу керування T занести у другий рядок таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Постійна часу $T_M, \text{с}$	0,5	0,75	1	1,25	1,5
Час керування $T, \text{с}$					

Побудувати графік $T = T(T_M)$ експериментальної залежності величини інтервалу часу керування T від величини постійної часу T_M , занести його до звіту, зробити висновок.

2.5 Зміст звіту

2.5.1 Назва і мета роботи.

2.5.2 Рівняння «вхід-вихід» та схема математичної моделі досліджуваного об'єкта керування.

2.5.3 Хід та результати аналітичного дослідження: рівняння і графіки двох сімейств фазових траєкторій, що відповідають керуванню $u(t) = u_{\max}$ і $u(t) = -u_{\max}$, з напрямком руху точок уздовж траєкторій; рівняння та графік лінії перемикавання знака керування.

2.5.4 Схема проведення експерименту.

2.5.5 Таблиці і графіки експериментальних залежностей.

2.5.6 Висновки за роботою.

Контрольні запитання

- 1 Поясніть поняття «оптимальне керування».
- 2 Чим відрізняється оптимальна система автоматичного керування від інших систем свого класу?
- 3 Поясніть поняття «показник якості».
- 4 Поясніть поняття «функціонал якості».
- 5 Поясніть поняття «критерій оптимальності».
- 6 Які вихідні дані входять до складу задачі синтезу оптимального керування?
- 7 Поясніть поняття «вектор стану».
- 8 Що пов'язує між собою рівняння стану?
- 9 Який об'єкт називається керованим?
- 10 Як за рівнянням стану з'ясувати керованість об'єкта?
- 11 Поясніть поняття «лагранжіан».
- 12 Поясніть поняття «гамільтоніан».
- 13 Поясніть поняття «канонічна система рівнянь».
- 14 Як пов'язані канонічна система рівнянь і гамільтоніан?
- 15 Дайте формулювання принципу максимуму.
- 16 У чому полягає специфіка оптимального за швидкодією керування лінійним стаціонарним об'єктом?
- 17 У якому випадку принцип максимуму надає не тільки необхідні, але й достатні умови існування оптимального керування?
- 18 Чому дорівнює кількість перемикачів керуючого діяння при оптимальному за швидкодією керуванні лінійним стаціонарним об'єктом другого порядку?
- 19 Як за відомими фазовими траєкторіями об'єкта другого порядку, що відповідають керуванню u_{\max} та $-u_{\max}$, знаходиться лінія перемикачів знака керуючого діяння?
- 20 У чому полягає основне практичне значення теорії оптимального керування?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Александров, Є. Є. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами [Текст] / Є. Є. Александров,

Є. П. Козлов, Б. І. Кузнєцов. – Харків : НТУ «ХП», 2002. – Т. 1. Теорія автоматичного керування. – 490 с.

2 Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1969. – 384 с.

3 Болтянский, В. Г. Математические методы оптимального управления [Текст] / В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1966. – 308 с.

4 Лейтман, Дж. Введение в теорию оптимального управления [Текст] / Дж. Лейтман. – М. : Наука, 1968. – 192 с.

5 Хісматулін, В. Ш. Теорія автоматичного керування [Текст] : підруч. для вузів / В. Ш. Хісматулін, С. В. Панченко. – Харків : УкрДАЗТ, 2008. – Ч. І. Теорія лінійних неперервних систем автоматичного керування. – 239 с.

6 Гроп, Д. Методы идентификации систем [Текст] / Д. Гроп. – М. : Мир, 1979. – 302 с.

ДОДАТОК А

Форми функціонала якості

У варіаційних задачах оптимального керування вимога до якості керування математично виражається забезпеченням екстремуму деякого показника якості J , який є змінною величиною (функціоналом якості), числове значення якого залежить від вибору вектора керуючих діянь $\mathbf{u}(t)$. Функціонал якості може бути простим функціоналом вектора керуючих діянь

$$J = J[\mathbf{u}(t)],$$

але частіше він складним чином залежить від вектора керуючих діянь через усі змінні характеристики керованого процесу, які у свою чергу також залежать від вектора керуючих діянь

$$J = J[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t_k), t_k].$$

Залежність функціонала якості від $\mathbf{z}(t_k)$ буває тільки в задачах з незакріпленим правим кінцем, а залежність від t_k – при нефіксованому моменті завершення керування, тому що тільки у цих випадках величини $\mathbf{z}(t_k)$ і t_k є змінними, значення яких залежать від вектора керуючих діянь.

У різних задачах, залежно від їх конкретного змісту, функціонал якості обирається по-різному. У загальній теорії оптимального керування все різноманіття функціоналів якості, що зустрічаються в конкретних задачах, зводиться до трьох типів.

Функціонали першого типу, які мають назву *функціоналів Лагранжа*, надають інтегральну характеристику якості перехідного процесу і витрат на керування при переведенні об'єкта керування з початкового стану до кінцевого стану. Такий функціонал має вигляд

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (\text{A.1})$$

де підінтегральна функція L , що має назву функція Лагранжа, або лагранжіан, у кожній конкретній задачі обирається залежно від фізичного змісту задачі і вимог, що накладаються на якість керування.

Функціонали другого типу, які мають назву **функціоналів Майєра**, у задачах з незакріпленим правим кінцем характеризують якість результату керування

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k], \quad (\text{A.2})$$

причому безпосередня залежність від t_k буває тільки при нефіксованому моменті завершення керування. Функціонали цього типу також часто зустрічаються у багатьох задачах, що мають велике практичне значення.

У задачах з незакріпленим правим кінцем якість керування також може оцінюватися не тільки якістю досягнутого результату, але і якістю керування на всьому інтервалі керування від t_0 до t_k . У таких задачах якість керування виражається функціоналами третього типу, що мають назву **функціоналів Больца**:

$$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \quad (\text{A.3})$$

Функціонали третього типу є сумою функціоналів першого і другого типів.

У математичному відношенні функціонали всіх трьох типів еквівалентні, бо вони можуть бути перетворені один до другого заміною змінних. Однак для зручності розв'язування конкретних задач їх доцільно розглядати незалежно.

ДОДАТОК Б

Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна

При формулюванні принципу максимуму користуються спеціальними методами математичного опису об'єкта керування, системою допоміжних змінних (спряжених змінних) до вектора стану об'єкта та спеціальним видом функціонала якості – функцією Гамільтона (гамільтоніан).

Рух лінійного об'єкта керування описується *системою лінійних диференціальних рівнянь стану*

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{Б.1})$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}$ – n -вимірний вектор стану;

$\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ – k -вимірний вектор керування.

За системою (Б.1) складається *гамільтоніан* H

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t] = -L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] + \sum_{j=1}^n \psi_j(t) \cdot F_j[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (\text{Б.2})$$

де $L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$ – підінтегральна функція (лагранжіан) функціоналів якості (А.1), (А.3);

$\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)]^T$ – вектор *спряжених змінних*, що задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\psi'_i(t) = -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{Б.3})$$

Системи рівнянь (Б.1) та (Б.3) створюють так звану *канонічну систему рівнянь* варіаційної задачі

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] = \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \psi_i};$$

$$\psi'_i(t) = -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial z_i}; \quad (\text{Б.4})$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Поряд зі скалярною формою запису гамільтоніана (Б.2) і скалярною формою запису канонічної системи (Б.4) застосовуються і векторно-матричні форми запису

$$H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t] = -L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] +$$

$$+ \boldsymbol{\psi}^T(t) \cdot \mathbf{F}[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]; \quad (\text{Б.5})$$

$$\mathbf{z}'(t) = \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \boldsymbol{\psi}};$$

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \mathbf{z}}, \quad (\text{Б.6})$$

де $\mathbf{F}[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] = [F_1[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \dots, F_n[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]]^T$ – вектор правих частин диференціальних рівнянь стану (Б.1);

$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}$, $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}}$ – матриці-стовпці, що складені з частинних похідних гамільтоніана за координатами стану та спряженими змінними

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \left[\frac{\partial H}{\partial z_1}, \frac{\partial H}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial z_n} \right]^T,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}} = \left[\frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \frac{\partial H}{\partial \psi_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \psi_n} \right]^T. \quad (\text{Б.7})$$

Принцип максимуму. Для того, щоб керування $\mathbf{u}^*(t)$ було оптимальним, *необхідно*:

1) щоб існували ненульовий вектор допоміжних змінних $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ (вектор спряжених змінних) і траєкторія стану $\mathbf{z}^*(t)$, що задовольняють канонічну систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t]}{\partial \boldsymbol{\psi}}, \\ \psi'_i(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t]}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^*(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}^*(t)$ і граничних умовах, що наведені в таблиці Б.1;

2) щоб у будь-який момент часу на інтервалі керування гамільтоніан $H[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t]$, який розглядається як функція незалежної змінної \mathbf{u} , досягав при $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ свого максимального значення

$$H^*[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t] = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{u}_t} H[\mathbf{z}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t]; \quad (\text{Б.9})$$

3) щоб у кінцевий момент часу $t = t_k$ для гамільтоніана $H^*(t_k)$ було справедливе співвідношення (умови трансверсальності), що наведене в таблиці Б.1.

Таблиця Б.1 – Умови трансверсальності для гамільтоніана $H^*(t_k) = H^*[\mathbf{z}^*(t_k), \mathbf{u}^*(t_k), t_k]$

Тип задачі	Множина цілей керування	Вид функціонала якості	Граничні умови для канонічної системи рівнянь на лівому кінці	Граничні умови для канонічної системи рівнянь на правому кінці	Умови для H^* при $t = t_k$
1	2	3	4	5	6
1 Задача із закріпленими кінцями при фіксованому часі керування	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$, – $t_0, t_k, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_k$ – фіксовані величини	$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ – умов нема	$\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$, для $\Psi^*(t_k)$ – умов нема	УМОВ нема
2 Задача із закріпленими кінцями при нефіксованому часі керування	$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$ – $t_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_k$ – фіксовані величини, t_k – варійована величина	$J = \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]$	$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ – умов нема	$\mathbf{z}^*(t_k) = \mathbf{z}_k$, для $\Psi^*(t_k)$ – умов нема	$H^*(t_k) = 0$

Продовження таблиці Б.1

1	2	3	4	5	6
<p>3 Задача із незакріпленим (напіввільним) правим кінцем при фіксованому часі керування</p>	<p>$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) \in S_k$: $\eta_i[\mathbf{z}(t_k)] = 0$, $i = 1, 2, \dots, q < n$, \mathbf{z}_0, t_0, t_k – фіксовані величини</p>	$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	<p>$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ – умов нема</p>	$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k)]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)} + \mathbf{a}^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k)]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)},$ <p>$\mathbf{a}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ – довільний вектор, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ – умов нема</p>	<p>УМОВ НЕМА</p>
<p>4 Задача із незакріпленим (вільним) правим кінцем при фіксованому часі керування</p>	<p>$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, \mathbf{z}_0, t_0, t_k – фіксовані величини, $\mathbf{z}(t_k)$ – довільний вектор</p>	$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$	<p>$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ – умов нема</p>	$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)},$ <p>для $\mathbf{z}^*(t_k)$ – умов нема</p>	<p>УМОВ НЕМА</p>

Продовження таблиці Б.1

1	2	3	4	5	6
<p>5 Задача із незакріпленим (напіввільним) правим кінцем при нефіксованому часі керування</p>	<p>$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t_k) \in S_k$: $\eta_i[\mathbf{z}(t_k), t_k] = 0$, $i = 1, \dots, q < n + 1$, \mathbf{z}_0, t_0 – фіксовані величини, t_k – варійована величина</p>	<p>$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$</p>	<p>$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ – умов нема</p>	<p>$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)} + \frac{\partial \eta^T[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)}$, $\mathbf{\alpha}^T = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_q \}$ – довільний вектор, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ – умов нема</p>	<p>$H^*(t_k) = \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k} - \mathbf{\alpha}^T \frac{\partial \eta[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k}$</p>
<p>6 Задача із незакріпленим (вільним) правим кінцем при нефіксованому часі керування</p>	<p>$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, \mathbf{z}_0, t_0 – фіксовані величини, $\mathbf{z}(t_k)$ – довільний вектор, t_k – варійована величина</p>	<p>$J = \Phi[\mathbf{z}(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$</p>	<p>$\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{z}_0$, для $\Psi^*(t_0)$ – умов нема</p>	<p>$\Psi^*(t_k) = - \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial \mathbf{z}^*(t_k)}$, для $\mathbf{z}^*(t_k)$ – умов нема</p>	<p>$H^*(t_k) = \frac{\partial \Phi[\mathbf{z}^*(t_k), t_k]}{\partial t_k}$</p>

ДОДАТОК В

Керованість об'єкта та критерії керованості

Перед розв'язуванням варіаційних задач оптимального керування необхідно з'ясувати питання про принципову можливість реалізувати мету керування шляхом прикладення до об'єкта припустимих керуючих діянь. Відповідь на це питання дає поняття *керованості об'єкта*.

Стан об'єкта керування \mathbf{z}_0 , що описується системою диференціальних рівнянь

$$z'_i(t) = F_i[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad i = 1, \dots, n,$$

називається керованим відносно стану \mathbf{z}_k , якщо існує вектор припустимих керувань $\mathbf{u}(t)$, що переводить за конечний інтервал часу $t_k - t_0$ даний об'єкт із стану \mathbf{z}_0 до стану \mathbf{z}_k .

Об'єкт називається *керованим*, якщо будь-який його початковий стан \mathbf{z}_0 керований відносно будь-якого кінцевого стану \mathbf{z}_k .

Вектор керуючих діянь $\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), \dots, u_k(t)\}$ належить до класу припустимих, якщо всі функції $u_1(t), \dots, u_k(t)$ є кусково-неперервними на всьому інтервалі $t_0 < t < t_k$.

Зрозуміло, що розв'язок варіаційної задачі оптимального керування існує тільки у тому випадку, коли, принаймні, заданий початковий стан об'єкта керований відносно всіх кінцевих станів, що належать заданій множині мети керування. Тому необхідно мати критерій керованості, що дасть змогу відповісти на принципову можливість реалізувати мету керування.

Проблема керованості найбільш повно вирішена для лінійних стаціонарних об'єктів, стан яких визначається векторно-матричним рівнянням

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (\text{B.1})$$

Нижче без доведення наводяться критерії керованості таких об'єктів.

Розглянемо матрицю керованості \mathbf{M} , що будується з матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} рівняння стану (В.1),

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Матриця \mathbf{M} отримана внаслідок розширення рядків матриці \mathbf{B} шляхом послідовного дописування елементів відповідних рядків добутків матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B}$. Тому матриця \mathbf{M} має n рядків та $n \times k$ стовбців.

Критерій керованості. Лінійний стаціонарний об'єкт n -го порядку, що описується рівнянням стану

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

керований тоді і тільки тоді, коли матриця \mathbf{M} має ранг n .

Якщо рівняння стану (В.1) задане в канонічній формі (В.2) (або приведене до канонічної форми шляхом лінійного перетворення), у якій матриця стану \mathbf{A} діагональна

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{В.2})$$

тоді найбільш доцільно використовувати критерій Гільберта [6].

Критерій керованості Гільберта. Лінійний стаціонарний об'єкт n -го порядку, що описується рівнянням стану (В.1), керований тоді і тільки тоді, коли жодний рядок матриці \mathbf{B} не є нульовим (тобто у кожному рядку матриці \mathbf{B} є хоч один ненульовий елемент).

Визначимо, що критерій керованості не залежить від стійкості об'єкта. Тому об'єкт може бути керованим, навіть якщо він нестійкий при відсутності керування, оскільки керованість об'єкта пов'язана з потенційними можливостями керування.

