

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ  
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

**Кафедра обчислювальної техніки та систем управління**

**В. С. Меркулов, С. Є. Бантюков, І. Г. Бізюк**

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ЕОМ**

*Конспект лекцій*

**Частина 2**

**Харків – 2019**

Меркулов В. С., Бантюков С. Є, Бізюк І. Г. Математичні моделі на ЕОМ: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2019. – Ч. 2. – 54 с.

Конспект лекцій розроблено у відповідності з робочою програмою дисципліни «Математичні моделі на ЕОМ» спеціальності «Залізничний транспорт».

Метою лекцій є здобуття необхідних знань з математичного моделювання технічних систем і використання отриманих теоретичних засад при проектуванні та дослідженні стану рухомого складу.

Рекомендується для студентів спеціальності «Залізничний транспорт» усіх форм навчання.

Іл. 30, бібліогр.: 12 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри обчислювальної техніки та систем управління 26 лютого 2018 р., протокол № 7.

Рецензент

проф. І. Е. Мартинов

В. С. Меркулов, С. Є. Бантюков, І. Г. Бізюк

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ЕОМ

*Конспект лекцій*

Частина 2

Відповідальний за випуск Меркулов В. С.

Редактор Ібрагімова Н. В.

---

Підписано до друку 03.04.18 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 4,5. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

## ЗМІСТ

5 ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.....	4
5.1 Поняття визначеного інтеграла та способи його обчислення.....	4
5.2 Методи прямокутників.....	6
5.3 Метод трапецій.....	9
5.4 Метод Сімпсона.....	10
5.5 Похибки методів.....	12
Приклад 1.....	13
Контрольні запитання.....	14
6 МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРОЦЕСІВ. ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	15
6.1 Диференціальні рівняння, їх типи та форми запису.....	15
6.2 Методи розв'язання ЗДР.....	19
6.3 Числове розв'язання задачі Коші.....	20
6.4 Метод Ейлера.....	21
6.5 Метод Рунге-Кутта.....	25
6.6 Вибір кроку інтегрування і контроль за точністю обчислень.....	27
Приклад 2.....	27
Контрольні запитання.....	29
7 ОСНОВИ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	30
7.1 Оптимізація. Основні визначення.....	30
7.2 Класифікація задач оптимізації.....	32
7.3 Метод «Золотого перерізу».....	39
7.4 Метод випадкового пошуку Монте-Карло.....	42
7.5 Методи багатовимірного пошуку.....	44
Приклад 3.....	49
Контрольні запитання.....	52
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	53

## 5 ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

### 5.1 Поняття визначеного інтеграла та способи його обчислення

Визначений інтеграл має різноманітні застосування в галузі математики, механіки, фізики, астрономії, техніки та інших сферах людської діяльності. За його допомогою можна обчислити роботу змінної сили, шлях руху матеріальної точки за проміжок часу, тиск рідини на вертикальну пластину, статичні моменти і координати центра ваги кривої та фігури на площині та ін.

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

З геометрії  $I = \int_a^b f(x) dx$  – площа, обмежена по вертикалі кривою  $y = f(x)$  та віссю  $OX$ , а по горизонталі – напівпрямими, що проходять через точки  $a$  та  $b$  паралельно осі  $OY$  (рисунок 5.1).



Якщо для підінтегральної функції  $f(x)$  знайдена первісна  $F(x)$ , то інтеграл можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (5.1)$$

Проте на практиці часто неможливо використовувати формулу (5.1), якщо:

- первісна функції  $f(x)$  не виражається в кінцевому вигляді через елементарні функції. Це стосується, наприклад, інтегралів

$$\int_a^b e^{-x^2} dx, \quad \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int_a^b \sqrt{1+x^5} dx;$$

- аналітичний вираз первісної функції  $f(x)$  є настільки складним, що застосування цієї формули стає важким;
- аналітичний вираз підінтегральної функції  $f(x)$  невідомий, а її значення задаються таблицею або графіком.

У цих випадках використовують методи числового інтегрування, які передбачають заміну  $f(x)$  деякою апроксимуючою функцією  $\varphi(x)$ .

Такою функцією є кусковий поліном 
$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$
.

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + R \quad (5.2)$$

$$R = \int_a^b r(x) dx$$

Тоді  $\int_a^b r(x) dx$  — апіорна похибка методу на інтервалі інтегрування, де  $r(x)$  — апіорна похибка методу на окремому кроці інтегрування.

Використовувані на практиці числові методи обчислення визначеного інтеграла називаються *квадратурними* [2]. Їх можна згрупувати залежно від способу апроксимації підінтегральної функції:

- *подання підінтегральної функції у вигляді степеневого ряду Тейлора.* Це дозволяє звести обчислення інтеграла від складної функції до інтегрування багаточлена, що являє собою перші кілька членів ряду;
- *апроксимація підінтегральної функції сплайнами,* що являють собою кусковий поліном. Методи розрізняються за типом обраних сплайнів;
- *застосування методів Монте-Карло,* у яких вузли вибираються за допомогою датчика випадкових чисел. Отримане значення інтеграла носить імовірнісний характер;
- *поліноміальна апроксимація функції, на якій базуються методи Ньютона-Котеса.* Вони відрізняються ступенем полінома, який використовується. Від цього залежить кількість вузлів, у яких необхідно обчислити функцію  $f(x)$ . Після заміни

функції поліномом значення визначеного інтеграла обчислюється як сума площин елементарних фігур, що обмежені віссю  $OX$  та кривою  $y = \phi(x)$ . Якщо використовують поліноми нульового порядку, маємо формули прямокутників, першого порядку — формулу трапецій, другого порядку — формулу Сімпсона (парабол).

## 5.2 Методи прямокутників

Найпростішими методами числового інтегрування є методи прямокутників. Інтервал розбиваємо на однакові елементарні відрізки. На кожному з них підінтегральна функція замінюється поліномом нульового степеня (константою). У цілому крива підінтегральної функції замінюється ламаною, що складається з відрізків, які паралельні осі абсцис з наступним визначенням суми площин отриманих елементарних прямокутників.

Подібна заміна є неоднозначною, тому що константу можна вибрати рівною значенню підінтегральної функції в будь-якій точці підінтервалу. Залежно від цього методи прямокутників поділяються на методи *лівих*, *правих* і *середніх* прямокутників (рисунок 5.2).



Рисунок 5.2 — Геометрична інтерпретація методів прямокутників

Позначимо  $y_i = f(x_i)$ ,  $h_i = \Delta x_i$ .

Площа елементарного прямокутника розраховується за формулою

$$S_i = y_i \cdot h_i.$$

Для методу *лівих прямокутників* (рисунок 5.2) проводимо відрізок, паралельний осі  $OX$ , починаючи з лівої границі  $x_i$ ,  $i=0,1,\dots,n-1$  елементарних відрізків.

Для цього випадку одержуємо формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \dots + h_n y_{n-1} .$$

Якщо  $h_i = h = const$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) , \quad (5.3)$$

де  $y_i$  — значення  $f(x_i)$  на початку кожного  $i$ -го відрізка ( $i=0,1,\dots,n-1$ );

$n$  — кількість відрізків інтегрування;

$a, b$  — нижня та верхня границі відрізків, на які розділено інтервал інтегрування  $h=\Delta x$ .

Для методу *правих прямокутників* проводимо відрізок, паралельний осі  $OX$ , починаючи з правої границі  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  елементарних відрізків.

Для цього випадку одержуємо формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n .$$

Якщо  $h_i = h = const$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_1 + \dots + y_n) \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i) . \quad (5.4)$$

Широко розповсюдженим і більш точним є метод прямокутників, що використовує значення функції в середніх точках елементарних відрізків – метод *середніх прямокутників*.

$$\int_a^b f(x) dx \approx h_i \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right) .$$

При числовому інтегруванні з постійним кроком  $h_i = h = const$ ,

$x_i, i=0, 1, \dots, n-1$  формула набуває вигляду

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) . \quad (5.5)$$

Схема алгоритму методів прямокутників наведена на рисунку 5.3.

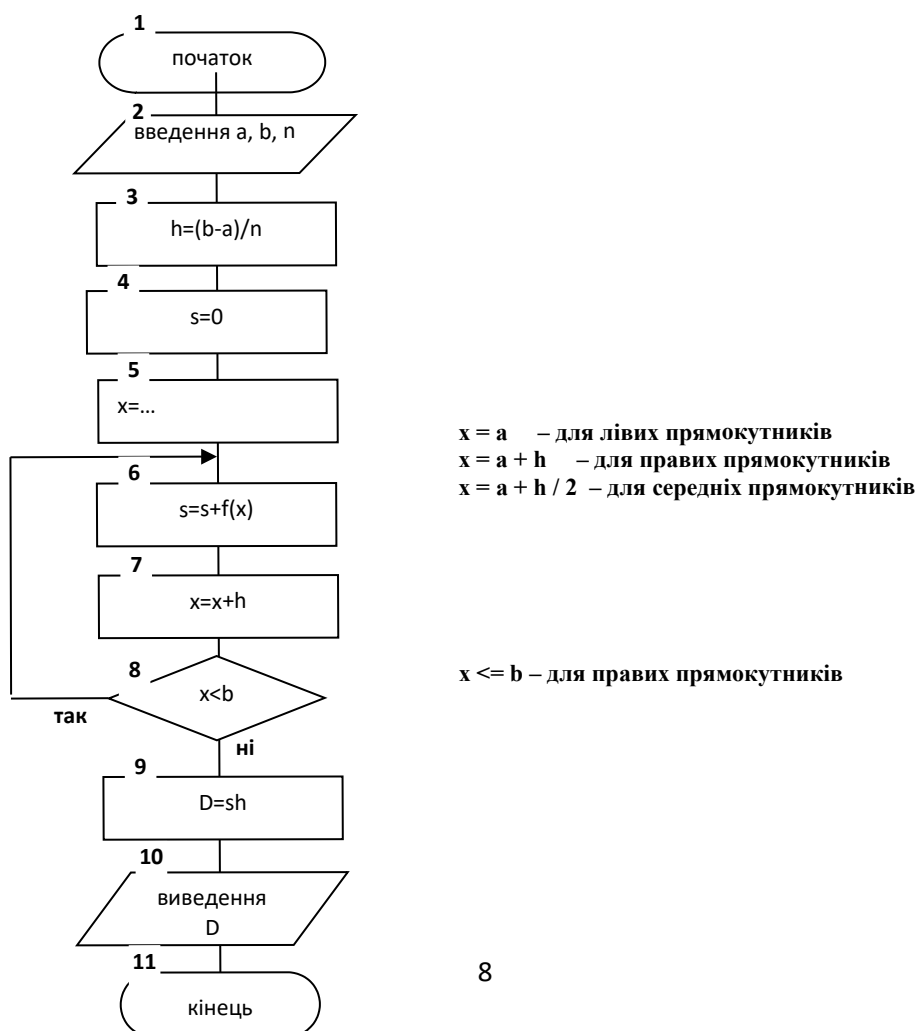




Рисунок 5.3 — Узагальнена схема алгоритмів методів прямокутників

### 5.3 Метод трапецій

Метод трапецій використовує лінійну апроксимацію, тобто графік функції  $y=f(x)$  подається у вигляді ламаної, що з'єднує точки  $(x_i, y_i)$  та  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

У цьому випадку площа всієї фігури (криволінійної трапеції) складається з площин елементарних прямокутних трапецій (рисунок 5.4). Площина кожної такої трапеції дорівнює добутку напівсуми основ на висоту:

$$S_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} h \quad \text{якщо } i=0,1,\dots,n-1.$$

Складаючи всі ці вирази, одержуємо формулу трапецій для числового інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \dots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} h + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h$$

$$S = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}.$$

Якщо  $h_i = h = \text{const}$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (y_i)) = \frac{h}{2} (y_0 + y_n + 2S) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b) + 2S) \quad (5.6)$$

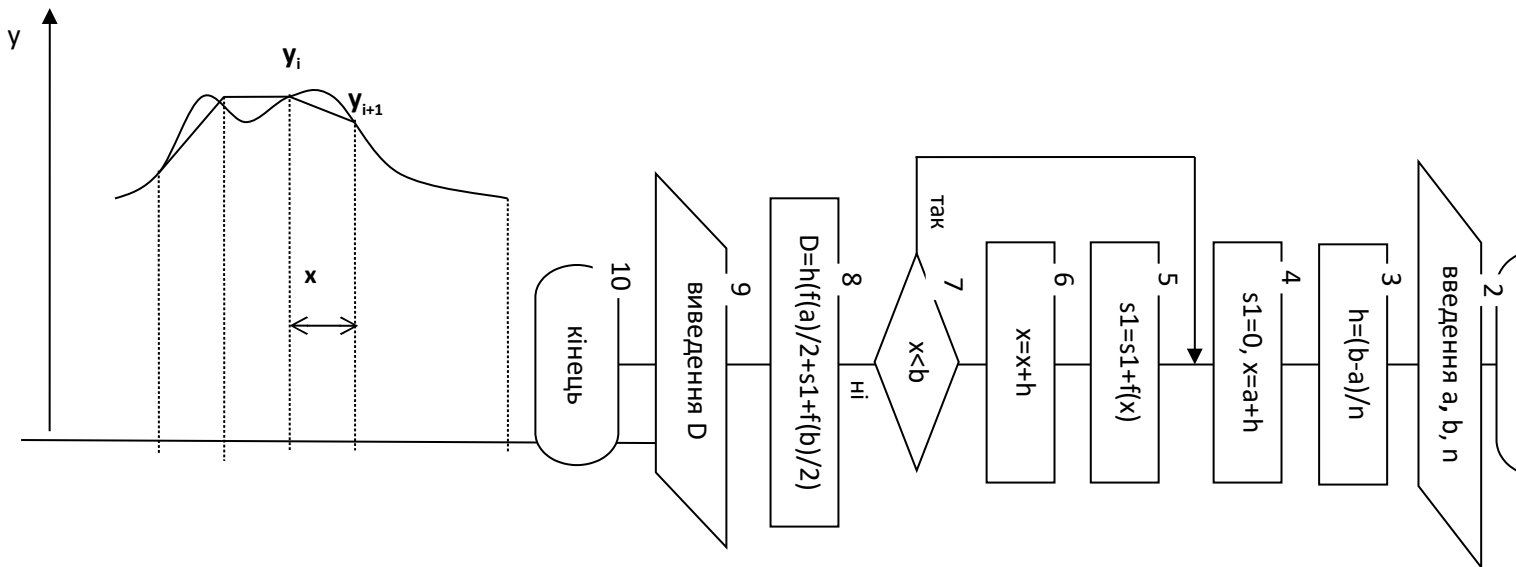


Рисунок 5.4 – Геометрична інтерпретація і схема алгоритму методу трапецій

### 5.4 Метод Сімпсона

Крива підінтегральної функції апроксимується відрізками квадратичних парабол, проведених через кінці кожних трьох сусідніх значень функції:

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2); f(x_2), f(x_3), f(x_4); \dots \dots f(x_{n-2}), f(x_{n-1}), f(x_n).$$

При цьому весь проміжок інтегрування розбиваємо на парну кількість відрізків  $n \in [x_i-h, x_i+h]$  і площу криволінійної трапеції наближено заміняємо сумою  $n/2$  площин під параболою.

$$f(x) = \phi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad \text{при } x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad . \quad (5.7)$$

Коефіцієнти квадратних тричленів (4.12) можуть бути знайдені з умов рівності багаточлена в точках  $x_i$  відповідним табличним даним  $y_i = f(x_i)$ . У якості  $\phi_i(x)$  можна прийняти інтерполяційний багаточлен Лагранжа другого степеня (рисунок 5.5), що проходить через точки з координатами  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$  та  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ :

$$P_2(x) = \phi_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} y_{i+1} \quad .$$

Елементарна площа  $S_i$  може бути обчислена за допомогою визначеного інтеграла. З огляду на рівності  $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$  одержуємо

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x) dx \approx \frac{1}{2h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [(x-x_i)(x-x_{i+1})y_{i-1} - 2(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})y_i + (x-x_{i-1})(x-x_i)y_{i+1}] dx = \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \quad .$$

Провівши такі обчислення для кожного елементарного відрізка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , підсумуємо отримані вирази:

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Даний вираз для  $S$  приймається як значення визначеного інтеграла.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$$

$$S1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}$$

$$S2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4S_1 + 2S_2 + y_n] = \frac{h}{3} [f(a) + 4S_1 + 2S_2 + f(b)] \quad . \quad (5.8)$$

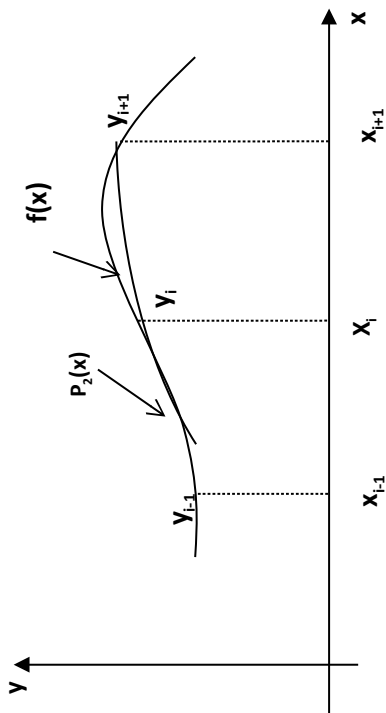
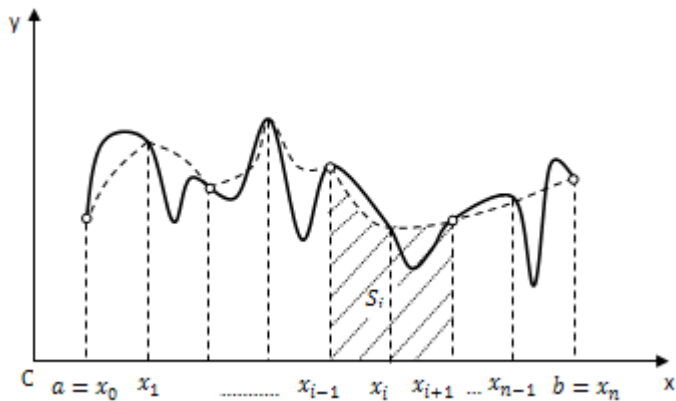
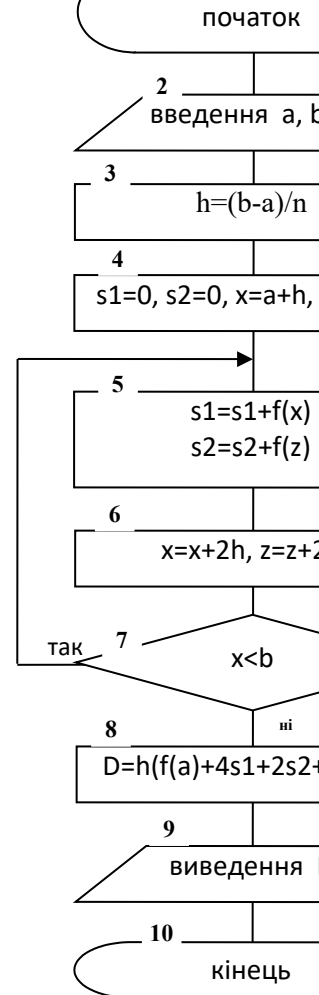


Рисунок 5.5 – Геометрична інтерпретація і схема алгоритму методу Сімпсона

## 5.5 Похибки методів

*Априорна похибка* (5.1) обчислення чисельного значення інтегралу залежить від кроку розбиття, і її можна записати у



вигляді  $R = O(h^k)$ . У випадку змінного кроку можна прийняти  $h = \max_{1 \leq i \leq n} (h_i)$ .

Формули головних членів похибки для розглянутих методів:

• лівих і правих прямокутників –

$$R_o = \frac{b-a}{2} h f'(\xi), \text{ де } a \leq \xi \leq b ;$$

• середніх прямокутників –  $R_o = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi), \text{ де } a \leq \xi \leq b ;$

• трапецій –  $R_o = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \text{ де } a \leq \xi \leq b ;$

• Сімпсона –  $R_o = \frac{b-a}{180} h^4 f^{IV}(\xi), \text{ де } a \leq \xi \leq b$ .

Аналізуючи дані формули, можна зробити висновок, що найточнішим із цих методів є метод Сімпсона, а точність методу трапецій у два рази менше від точності методу середніх прямокутників.

*Апостеріорну похибку* можна знайти вже після обчислення числового значення інтеграла

$$R_o = \frac{I_h - I_{kh}}{k^P - 1},$$

де  $I_h$  – наближене значення інтеграла, отримане з кроком  $h$ ;

$I_{kh}$  – наближене значення інтеграла, отримане з кроком  $kh$ ;

$P$  – порядок точності.

## Приклад 1

Частота вільних коливань кузова у випадку несиметричної пружної характеристики ресор для напіввагона 12-7023 (порожній стан) визначається за формулою [12]

$$p^2 = \frac{5}{2m_k} \int_{-A_0}^{A_0} F(z-\delta) z^3 dz, \quad ,$$

де  $m_k$  – маса кузова;

$A_0$  – напіврозмах коливань;

$\delta$  – зміщення центра коливань від початку координат;  
 $F(z)=cz+F_0$  – характеристика відновлюючої сили.

Обчислити визначений інтеграл за методом лівих прямокутників і знайти частоту коливань.

Кількість точок обчислення функції  $n=100000$ .

В алгоритмі (рисунки 5.6, 5.7) введені такі позначення:

$$dt = \delta; \quad F(z - \delta) = F(z - dt) = c(z - dt) + F_0; \quad f(z) = (c(z - dt) + F_0) z^3.$$

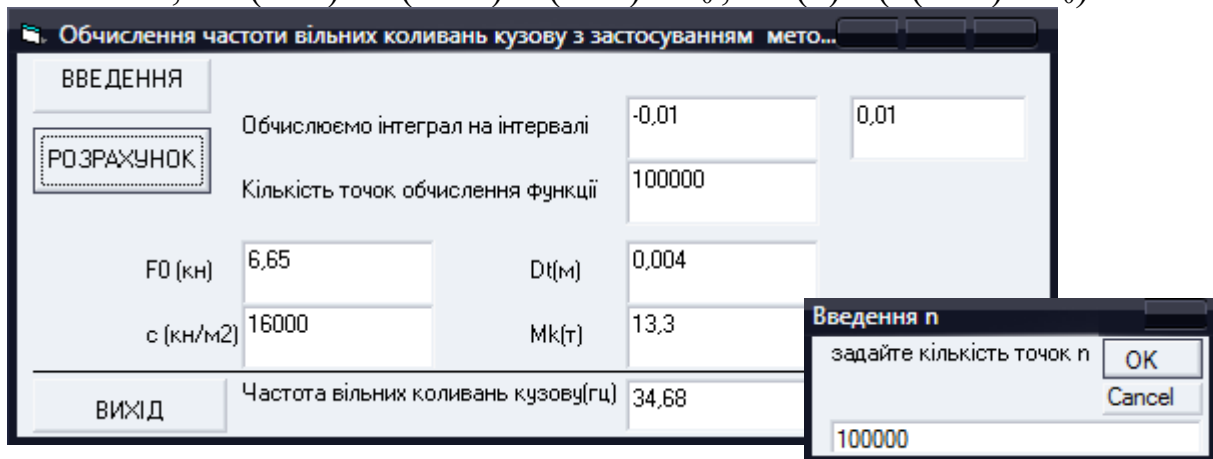
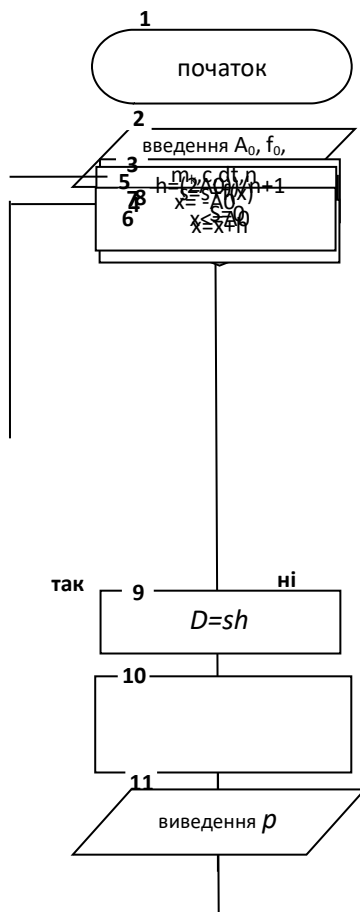


Рисунок 5.6 – Форма VB6-проекту, що реалізує приклад 1



```

Private Sub CmdПРЯМ_Click()
    h = 2 * a0 / n
    For x = -a0 To a0 Step h
        s = s + f(x)
    Next x
    d = s * h
    p = Sqr(5 * d / (2 * mk * a0 ^ 5))
    TxtПРЯМ.Text = Format(p, "#####.##")
End Sub

Function f(x)
    f = (c * (x - dt) + f0) * x ^ 3
End Function

```

Рисунок 5.7 – Схема алгоритму та фрагмент програмного коду прикладу 1

$$p = \sqrt{\frac{5}{2 m_k A_0^5} D}$$

## **Контрольні запитання**

- 1 Чим визначений інтеграл з геометричної точки зору?
- 2 Наведіть формулу чисельного обчислення визначеного інтеграла за методом лівих прямокутників.
- 3 Наведіть формулу числового обчислення визначеного інтеграла за методом трапецій.
- 4 Наведіть формулу числового обчислення визначеного інтеграла за методом Сімпсона.
- 5 На чому засновані методи Ньютона-Котеса?
- 6 Чи є пропорційною точність обчислення інтеграла за методом трапецій?
- 7 Запишіть формулу головного члена похибки для методу правих прямокутників.
- 8 Які існують різновиди методу прямокутників для числового обчислення визначеного інтеграла?
- 9 Що таке апріорна оцінка похибки числового обчислення визначеного інтеграла?
- 10 Що таке апостеріорна оцінка похибки числового обчислення визначеного інтеграла?

## **6 МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРОЦЕСІВ. ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

### **6.1 Диференціальні рівняння, їх типи та форми запису**

Особливістю дослідження динаміки складних механічних систем є те, що вони включають у себе велику кількість елементів, які мають між собою як в'язкопружні, так і кінематичні

зв'язки. Динамічна поведінка таких об'єктів описується багатовимірною системою, що включає диференціальні рівняння. Розв'язуючи систему рівнянь, можна отримати значення цільових функцій на кожному кроці оптимізаційного процесу [4].

**Динамічний процес** — це зміна стану системи в часі, що прийнято називати рухом системи. Система, на поведження якої не можуть впливати випадкові фактори, називається **детермінованою**. Стан системи описується набором змінних — фазових координат, які залежно від природи системи можуть відображувати різні фізичні величини: швидкість, прискорення, струм, напругу, температуру, концентрацію і т. д. Динамічні властивості різних природних і технічних систем такі, що рух у них відбувається за однаковими законами і описується однією і тією самою математичною моделлю. Такою моделлю є звичайні диференціальні рівняння (ЗДР). За їх допомогою досліджуються перехідні процеси в радіотехнічних колах, кінетика хімічних реакцій, динаміка біологічних популяцій, рух космічних об'єктів, моделі економічного розвитку та ін.

У ЗДР  $n$ -го порядку як невідомі величини входять функція  $y(x)$  і її перші  $n$  похідні за аргументом  $x$ :

$$F(x, y, y^{\dot{}}, y^{\ddot{}}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad . \quad (6.1)$$

Рівняння 1-го і 2-го порядку

$$F(x, y, y^{\dot{}}) = 0 \quad ; \quad (6.2)$$

$$F(x, y, y^{\dot{}}, y^{\ddot{}}) = 0 \quad .$$

У ряді випадків у рівняннях вигляду формули (6.1) вдається виразити старшу похідну в явному вигляді (нормальна форма Коші), наприклад, для формули (6.2):

$$y^{\dot{}} = f(x, y) \quad ; \quad (6.3)$$

$$y^{\ddot{}} = f(x, y, y^{\dot{}}) \quad .$$



Надалі будемо розглядати рівняння вигляду формули (6.3).

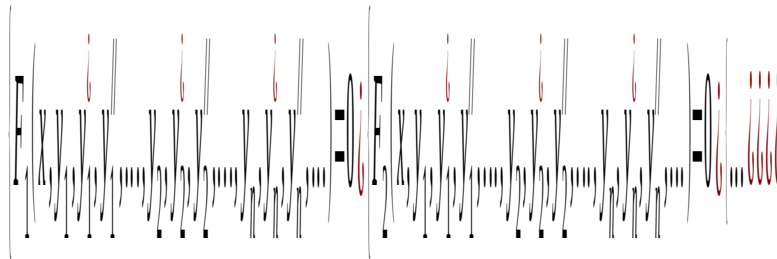
З теорії ЗДР відомо, що рівняння (6.1) еквівалентно системі рівнянь 1-го порядку.

Наприклад, рівняння  $Z'' = f(x, Z, Z')$  можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{aligned} Y_1' &= f(x, Y_1, Y_2) ; \\ Y_2' &= Y_1 . \end{aligned}$$

де  $Y_1 = Z_1; Y_2 = Z_2$

У загальному випадку система ЗДР має вигляд



де  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — змінні системи;

$x$  — аргумент, тобто величина, від якої залежать змінні системи (найчастіше такою величиною є час).

Рівняння вищих порядків на практиці зустрічаються рідко. Як правило, доводиться мати справу з системою ЗДР першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

або навіть із випадком, коли  $n = 1$ , тобто в системі є одна змінна, а перехідний процес описується одним ЗДР.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.4)$$

Щоб мати уявлення про поведінку системи, необхідно знайти функцію  $y(x)$ , тобто розв'язати ЗДР або систему ЗДР.

ЗДР мають незліченну безліч розв'язків, які об'єднані назвою загальний розв'язок (рисунок 6.1).

Загальний розв'язок  $y=y(x)$   
(сімейство кривих, що відрізняються початковими умовами)

$y(x_0) = y_0$  – окремий розв'язок

Рисунок 6.1 – Геометричне подання розв'язку ЗДР

Для того щоб знайти єдиний розв'язок, потрібні додаткові умови, які він повинен задовольняти. Залежно від виду таких умов розрізняють три типи задач, для яких доведені існування і єдиність розв'язків.

Перший тип — це *задача Коші* або *задача з початковими умовами*. Для таких задач, крім вихідного рівняння (6.4), у деякій точці  $x$  повинні бути задані початкові умови, тобто значення функції  $y(x)$  та її похідних

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{1,0}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \quad .$$

До другого типу належать так називані *граничні або крайові задачі*, у яких додаткові умови задаються у вигляді функціональних співвідношень між шуканими розв'язками.

Третій тип — це *задачі на власні значення*. У них, крім шуканої функції  $y(x)$  і її похідних, до рівняння входять додаткові невідомі параметри, які називають власними значеннями.

Для розв'язання рівняння (6.4) потрібно інтегрувати функцію  $f(x,y)$ , тобто знайти

$$y(x) = \int f(x, y(x)) dx + c, \quad \text{якщо} \quad y = y_0,$$

де  $c$  — довільна константа.

## 6.2 Методи розв'язання ЗДР

Методи звичайних диференціальних рівнянь можна розбити на групи: *аналітичні, наближені і числові*.

*Аналітичні методи* дозволяють отримати розв'язок у вигляді формули шляхом аналітичних перетворень. При цьому є можливість досліджувати аналітичним способом властивості загального розв'язку і отримувати з нього окремі розв'язки. Такі методи розвинені для ряду рівнянь першого порядку (з роздільними змінними, однорідні, лінійні), а також для деякого типу рівнянь вищих порядків (наприклад, лінійних з постійними коефіцієнтами).

*Наближені методи* засновані на різних спрощеннях самих рівнянь шляхом обґрунтованого відкидання (нехтування) деяких членів, що містяться в них.

У деяких випадках спочатку знаходять точний розв'язок спрощеної задачі, а потім наближено обчислюють поправки, обумовлені малими членами, відкинутими на першому етапі. На цьому засновані методи теорії збурень.

Інший підхід пов'язаний з поданням про розв'язок у вигляді розкладання за малим параметром, який міститься в задачі. До даної групи належать асимптотичні методи, за допомогою яких отримують розв'язки, що описують деяку граничну картину даного явища.

*Числові методи*. До числового розв'язку диференціальних рівнянь доводиться звертатися, коли не вдається отримати аналітичний розв'язок і застосування наближених методів також виявляється складним.

Наприклад, зовні просте рівняння не має елементарного аналітичного розв'язку і може бути розв'язано тільки числово. Зараз числові методи є основним інструментом при дослідженні більшості науково-технічних завдань. У їх основі лежать досить прості ідеї, які призводять до нескладних математичних співвідношень. Проте практичне застосування цих співвідношень пов'язано з необхідністю проведення великого обсягу обчислювальної роботи, тому числові методи особливо ефективні в поєднанні з використанням сучасних комп'ютерів.

Найбільш поширеним і універсальним підходом до числового розв'язання диференціальних рівнянь є метод кінцевих різниць. Суть цього підходу полягає в тому, що область безперервної зміни незалежної змінної (аргументу) замінюється дискретною безліччю точок, званих вузлами. Ці вузли утворюють розрахункову сітку. Шукана функція неперервного аргументу наближено замінюється функцією дискретного аргументу на заданій сітці. Ця функція називається сітковою. Вихідне диференціальне рівняння замінюється різницевою співвідношенням відносно сіткової функції. При цьому похідні, що входять у рівняння, замінюються різницевими відношеннями. Така заміна диференціального рівняння різницевою називається апроксимацією на сітці. Розв'язок рівняння зводиться до відшукування значень сіткової функції у вузлах сітки.

### 6.3 Числове розв'язання задачі Коші

При використанні числових методів розв'язання ЗДР визначається не сама функція  $y(x)$  (первісна) в аналітичному вигляді, а приблизно обчислюються її окремі значення

$y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) в заданих точках на  $[x_0, x_k]$ .

В основу чисельних методів покладена така процедура:

1 Задаються початкові умови  $x_0; y_0$  – інтервал зміни аргументу  $x$ .

2 Точки, у яких обчислюються значення  $y(x)$ , знаходяться таким способом:  $[x_0, x_k]$  розбивається на кінцеву кількість відрізків рівної довжини. Значення  $x_0, x_1, \dots, x_k$  і є заданими точками. Відстань між сусідніми точками  $h$  (довжина відрізка) називається кроком інтегрування (рисунок 6.2).

Значення  $y(x)$  у точках  $x_0, x_1, \dots, x_k$  обчислюються за допомогою формули розкладання функції в ряд Тейлора

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^3}{3!} y_i''' + \dots \quad (6.5)$$

де  $y_i, y_i', y_i'', \dots$  – значення  $y$  та її похідних в  $i$ -й точці;  
 $y_{i+1}$  – значення  $y$  в наступній,  $(i+1)$ -й, точці.

Значення  $y(x)$  у кожній наступній точці обчислюється виходячи зі значення  $y(x)$  і її похідних у попередній точці за допомогою рекурентних співвідношень.

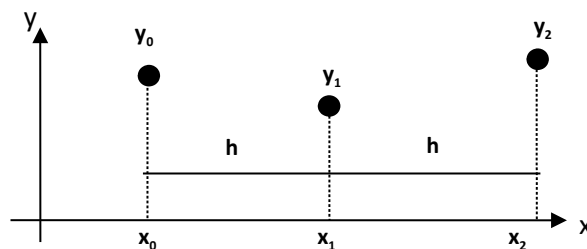


Рисунок 6.2 – Розбиття інтервалу інтегрування на відрізки

Існує безліч методів обчислення  $y(x)$ . Вони відрізняються один від одного способом обчислення збільшення  $y$ . Методи, у яких для обчислення наближеного розв'язку у черговому  $i$ -му вузлі необхідно додатково розв'язати деякі рівняння (лінійні або нелінійні), називаються *неявними методами*.

На противагу цьому методи, у яких наближений розв'язок у черговому  $i$ -му вузлі явно виражається через попередні значення, називаються *явними методами*.

При цьому якщо для обчислення використовується тільки одне попереднє значення, то метод називається *однокроковим*, а якщо кілька попередніх значень – *багатокроковим*.

Будемо розглядати методи, які передбачають обчислення  $(i+1)$ -го значення  $y$  з  $i$  попередніми (явна різницєва схема). Для обчислення  $y_{i+1}$  використовуватимемо лише одне знайдене на попередньому кроці значення  $y_i$ .

## 6.4 Метод Ейлера

У формулі розкладання функції в ряд Тейлора (6.5) всі члени ряду, які містять похідні другого порядку й вище, відкидаються через їхню малість (за рахунок цього обчислення є наближеним), і формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'_i \quad \text{або} \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (6.6)$$

Для системи двох рівнянь формула (6.6) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i); \\ z_{i+1} &= z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i). \end{aligned}$$

Розглянемо геометричний зміст методу Ейлера. У геометричній інтерпретації (рисунок 6.3)  $f(x_i, y_i) = y'_i = \operatorname{tg} \alpha_i$ . Тоді формула (6.6) набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h \operatorname{tg} \alpha_i,$$

де  $\operatorname{tg} \alpha_i$  — тангенс кута нахилу дотичної до шуканої функції  $y(x)$  в початковій точці кожного кроку.

За рахунок спрощення формули (6.5)  $y(x)$  на кожному відрізку інтервалу інтегрування заміняється рівнянням прямої лінії, дотичної до кривої  $y(x)$  на початку відрізка, тобто застосовується кусково-лінійна апроксимація.

У результаті вся шукана функція  $y(x)$  на інтервалі  $[a, b]$  апроксимується ламаною, кожен відрізок якої на кроці  $h$  лінійно апроксимує шукану функцію. Тому метод Ейлера отримав ще назву *методу ламаних*.

Нахил дотичної в межах кожного кроку вважається постійним і дорівнює значенню похідної в початковій точці кроку  $x_i$ . Насправді похідна, а отже, і тангенс кута нахилу дотичної до кривої  $y(x)$  в межах кожного кроку змінюється. Тому в точці  $x_i + h$

нахил дотичної не повинен дорівнювати нахилу в точці  $x_i$ . Отже, на кожному кроці вноситься похибка.

Перший відрізок ламаної дійсно належить до шуканої інтегральної кривої  $y(x)$  в точці  $(x_0, y_0)$ . На наступних кроках дотичні проводяться з точок  $(x_l, y_l)$ , підрахованих з похибкою. У результаті з кожним кроком похибки накопичуються.

Основний недолік методу Ейлера — систематичне накопичення похибок. Тому метод Ейлера рекомендується застосовувати для розв'язання диференціальних рівнянь при малих значеннях кроку.

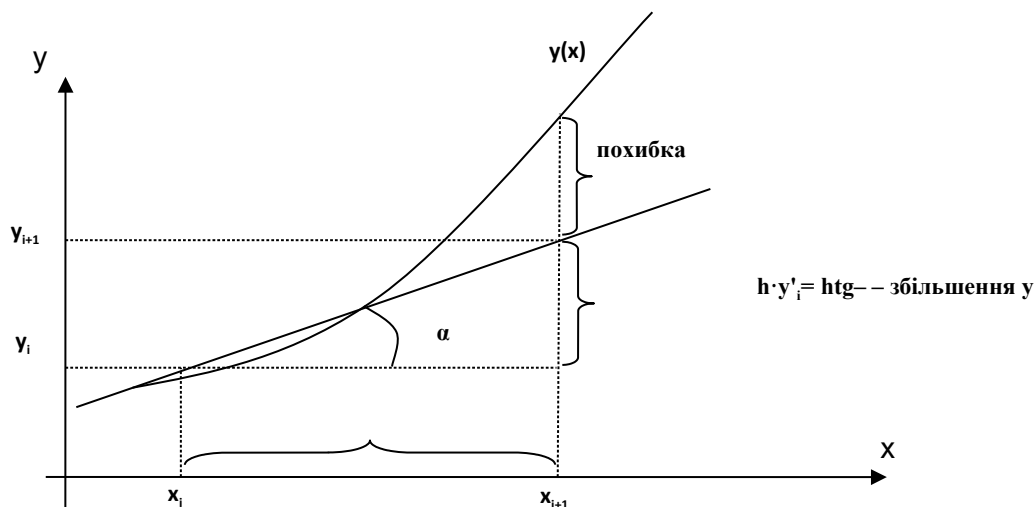


Рисунок 6.3 – Геометрична інтерпретація наближеного розв'язку ЗДР

Похибка методу має порядок  $h^2$ . Для підвищення точності потрібно зменшити  $h$ , але при цьому збільшується обсяг обчислень.

#### *Метод Ейлера з проміжним виведенням результатів*

У більшості інженерних завдань здійснюється обчислення функції  $y(x)$  з малим кроком, а виведення значень – із більшим кроком, зручним для побудови графіка цієї функції.

У таких випадках можна ввести параметр (назвемо його, наприклад,  $m$ ) і використати його для здійснення виведення кожного  $m$ -го обчисленого значення (рисунок 6.4). Алгоритм реалізації методу Ейлера для ЗДР наведений на рисунку 6.5, методу Ейлера з проміжним виведенням результатів для ЗДР — на рисунку 6.6, методу Ейлера для системи ЗДР — на рисунку 6.7.

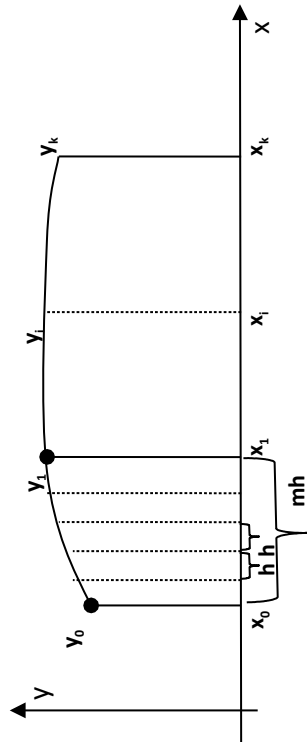


Рисунок 6.4 – Ілюстрація методу Ейлера для ЗДР із проміжним виведенням результатів

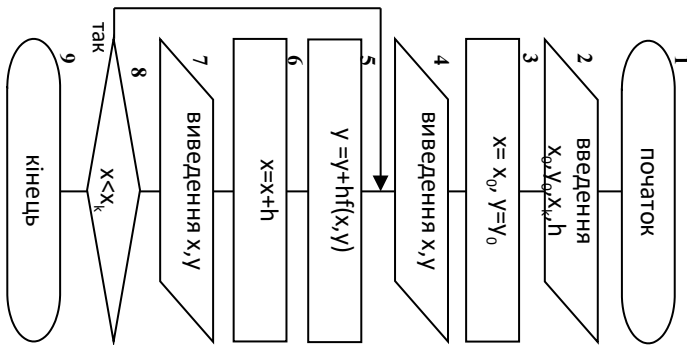


Рисунок 6.5 – Схема алгоритму методу Ейлера для ЗДР

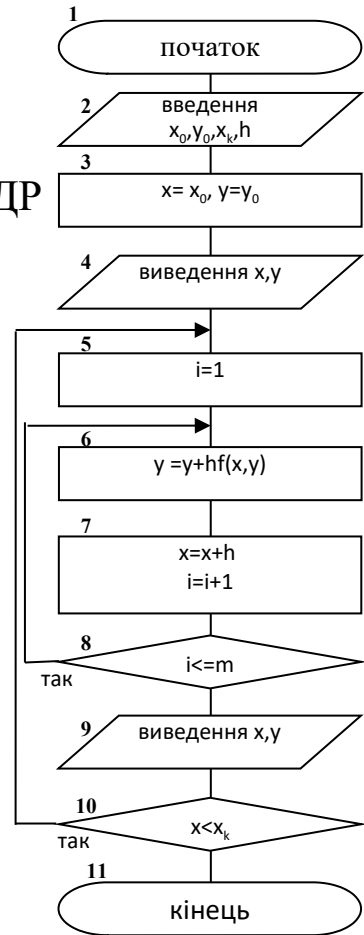


Рисунок 6.6 – Схема алгоритму методу Ейлера для ЗДР

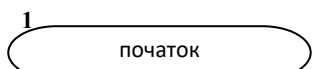




Рисунок 5.5. Алгоритм методу Ейлера для



точним і розповсюдженням. У ньому для правої частини  $f(x, y)$  використовується сімейство функцій порядку точності, що дає можливість при меншому обсязі обчислень більш точно обчислити збільшення  $y$  на кожній кроці.

Найбільш використовується в обчислювальній практиці модифікація цього методу 4-го порядку на кожному кроці передбачає обчислення правої частини рівняння в чотирьох сусідніх точках. На кожному кроці інтегрування шукана функція  $y(x)$  апроксимується рядом Тейлора (6.5), що містить члени ряду з  $h^4$ :

$$y(x_i+h) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + \dots$$

У результаті похибка на кожному кроці має порядок  $h^5$ .

Для збереження членів ряду, що містять  $h^2$ ,  $h^3$ ,  $h^4$  необхідно визначити другу  $y''$ , третю  $y'''$  і четверту  $y^{(4)}$  похідні функції  $y(x)$ . Ці похідні апроксимуємо розділеними різницями другого, третього і четвертого порядків відповідно.

Збільшення функції  $y(x)$  для переходу від  $(x_i, y_i)$  до  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  визначається як усереднене значення збільшень  $y$  у цих точках.

Уточнення досягається за рахунок спеціального підбору координат. Розрахункові формули

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \quad (6.7)$$

де  $i=1, 2, \dots, n$  ;

$$k_1 = hf(x_i, y_i);$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right);$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

Для системи двох рівнянь формули (6.7)

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6,$$

$$z_{i+1} = z_i + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6,$$

$$l_1 = hf_2(x_i, y_i, z_i);$$

$$l_2 = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right);$$

$$l_3 = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right);$$

$$l_4 = hf_2(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$

де  $i=1, 2, \dots, n-1$ .

Схема алгоритму методу Рунге-Кутта для ЗДР наведена на рисунку 6.8, методу Рунге-Кутта для системи ЗДР – на рисунку 6.9.

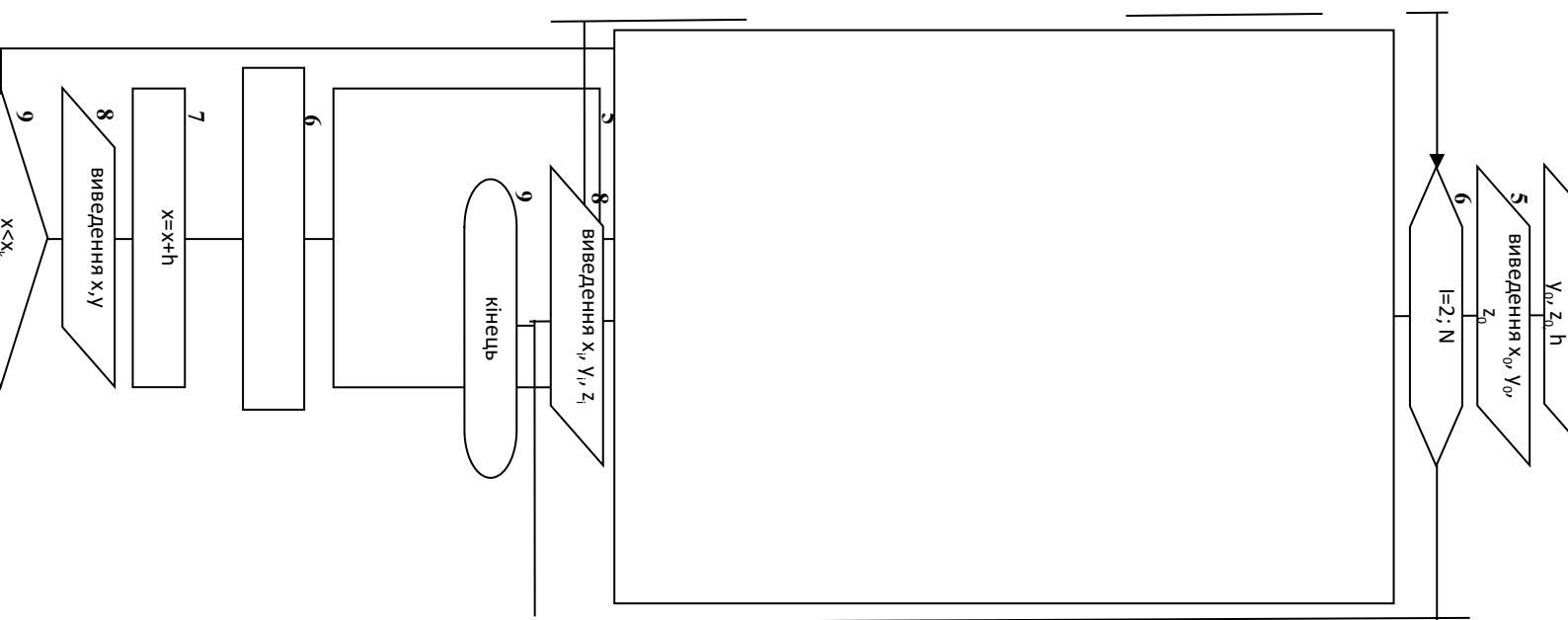


Рисунок 6.8 – Схема алгоритму методу Рунге-Кутта для ЗДР



## 6.6 Вибір кроку інтегрування і контроль за точністю обчислень

Досі ми не обговорювали питання вибору кроку інтегрування, адже саме від величини кроку залежить точність одержуваного розв'язку і час, що витрачається на його отримання. З наведених раніше міркувань про порядок точності методів розв'язування ЗДР можна зробити загальний висновок про те, що для підвищення точності слід брати менший крок.

Однак на практиці ситуація не настільки однозначна. Зменшення кроку інтегрування призводить до збільшення часу обчислень. І що більш важливо, занадто малі значення кроку можуть призвести не до підвищення точності, а, навпаки, до збільшення похибки через накопичення обчислювальної помилки. У той же час вибір занадто великого кроку інтегрування може призвести не тільки до великої похибки, але і до отримання абсолютно неправильного результату. Тому вибір кроку – це завжди певний компроміс між точністю і часом.

Одним з можливих критеріїв точності може служити порівняння наближених результатів у кожному вузлі, отриманих при різних кроках інтегрування, наприклад  $h$  і  $\frac{h}{2}$ .

$$\frac{y_{i+1}(\frac{h}{2}) - y_{i+1}(h)}{y_{i+1}(\frac{h}{2})}$$

Якщо величина  $\frac{y_{i+1}(\frac{h}{2}) - y_{i+1}(h)}{y_{i+1}(\frac{h}{2})}$  порівнянна з заданою похибкою обчислень, то крок можна збільшити, в іншому випадку, коли зазначена величина занадто велика, значення кроку слід зменшити.

Використовуючи цю оцінку, можна побудувати методи з автоматичним вибором кроку і контролем точності протягом всього часу обчислень. Такі алгоритми називають *адаптивними*, тобто підстроюються під умови конкретної задачі.

### Приклад 2

Розглядаються коливання механічної системи, зображеної на рисунку 6.10, без урахування сил опору гасників, якщо вона

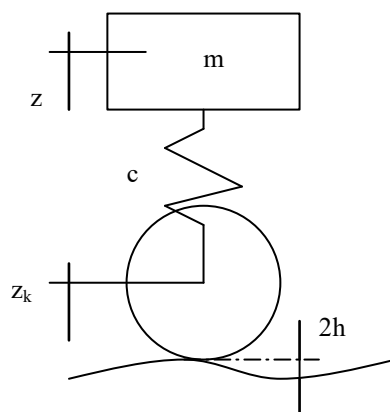
рухається зі швидкістю  $v$  по непружному косинусоїдальному безстиківому рейковому шляху з демпфіруванням [9].

Нехай коливання в системі описуються диференціальним рівнянням

$$100 \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \cdot \frac{d}{dt} x(t) + 101 \cdot x(t) = 50 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$$

при початкових умовах

$$x(0)=0 \quad \frac{d}{dt} x(0)=1$$



Введемо позначення:

Рисунок 6.10 – Кінематична схема механічної системи

$$x_0(t)=x(t) \quad x_1(t)=\frac{d}{dt} x_0(t)$$

Тоді диференціальне рівняння другого порядку можна подати у вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_0(t) &= x_1(t) \\ \frac{d}{dt} x_1(t) &= \frac{1}{100} \left( 50 \cos\left(\frac{t}{4}\right) - 10 x_1(t) - 101 x_0(t) \right) \end{aligned}$$

Числові розв'язки системи диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта отримано з початковими умовами  $x_0(0)=0 \quad x_1(0)=1 \quad t \in [0, 10]$   $N=1500$  — кількість кроків для розрахунків.

У результаті застосування методу Рунге-Кутта 4-го порядку отримано розв'язок, що містить моменти часу та відповідні їм значення функції (рисунок 6.11).

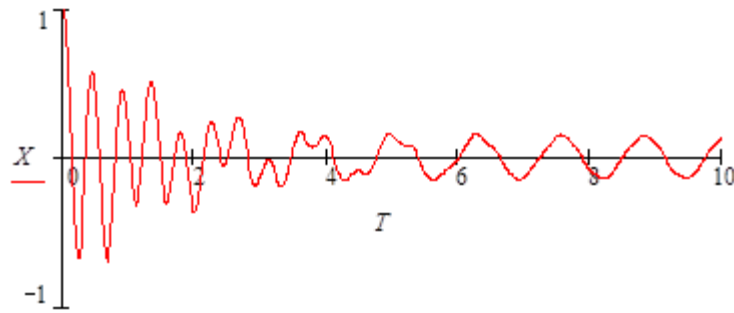


Рисунок 6.11 – Результати числового розв’язку задачі прикладу 2

### Контрольні запитання

1 Чим викликана похибка зрізання при обчисленні похідної за формулами числового диференціювання?

2 Наведіть формулу числового розв’язку методом Ейлера задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1 порядку.

3 У яких випадках застосовуються формули числового диференціювання? Яка система має називатися динамічною?

4 Яка математична модель описує перехідні процеси?

5 У якому вигляді ми отримуємо числовий розв’язок диференціального рівняння?

6 Що описують фазові координати?

7 Наведіть формули для обчислення коефіцієнтів у методі Рунге-Кутта 4-го порядку.

8 Як називаються методи, у яких наближений розв’язок у черговому вузлі явно виражається через попередні значення?

9 Який порядок локальної похибки має метод Ейлера?

10 Поясніть, за рахунок чого метод Рунге-Кутта точніший за метод Ейлера.

## 7 ОСНОВИ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ

### 7.1 Оптимізація. Основні визначення

З кожним роком зростає роль оптимізаційних розрахунків у проектній інженерній практиці. Пов'язано це з удосконаленням комп'ютерної техніки, яка дозволяє на сучасному етапі розглядати проектні завдання великої розмірності, більш складні математичні моделі, що найповніше описують реальні об'єкти і процеси. Важливим завданням при проектуванні складних механічних систем є розрахунок оптимальних параметрів їхніх елементів з метою зниження динамічного навантаження.

Споконвіку люди, приступаючи до здійснення заходів, замислювалися над їх можливими наслідками і приймали рішення, вибираючи так чи інакше залежні від них параметри — способи організації заходів. Але, як правило, рішення приймалися без спеціального математичного аналізу, просто на основі досвіду і здорового глузду [3, 10].

При плануванні доводиться спиратися на велику кількість даних, що належать не стільки до минулого досвіду, скільки до передбачуваного майбутнього. Вибране рішення повинно по можливості гарантувати відсутність помилок, пов'язаних з неточним прогнозуванням, і бути досить ефективним для широкого кола умов. Для обґрунтування такого рішення приводиться в дію складна система математичних розрахунків.

У процесі проектування зазвичай ставиться завдання визначення найкращих, у певному сенсі, структури або значень параметрів об'єктів. Таке завдання називається *оптимізаційним*.

Функція, що дозволяє кількісно порівняти два альтернативних рішення завдання оптимізації, називається *цільовою*.

Прикладами цільових функцій, які часто зустрічаються в інженерній практиці, є вартість, вага, міцність, габарити, ККД тощо.

Якщо оптимізація пов'язана з розрахунком оптимальних значень параметрів, то вона називається *параметричною оптимізацією*. Завдання вибору оптимальної структури при заданих параметрах об'єкта є *структурною оптимізацією*.

*Оптимізація* — знаходження екстремуму цільової функції в деякій області скінченно-вимірного векторного простору, обмеженій набором лінійних/нелінійних рівностей/нерівностей.

*Сенс обмежень* полягає в тому, що змінні оптимізації можуть набувати не будь-яких значень, а тільки таких, для яких виконується система обмежень.

З математичної точки зору, цільова функція описує деяку  $(n+1)$ -вимірну поверхню (рисунок 7.1), значення якої визначається проектними параметрами  $F = F(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ .

Незалежно від типу розв'язуваної задачі, для пошуку екстремуму можна користуватися одним і тим самим алгоритмом, тобто задачу мінімізації можна легко перетворити в задачу на знаходження *Max*, змінивши знак цільової функції на зворотний (рисунок 7.2).

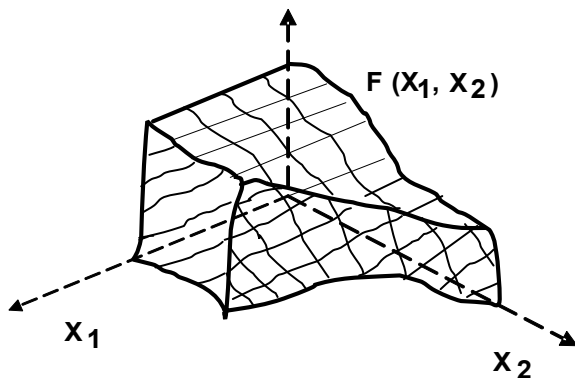


Рисунок 7.1 – Приклад двовимірної цільової функції

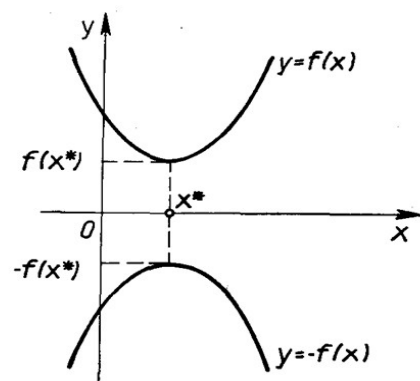


Рисунок 7.2 – *Min/Max* цільової функції

*Математична модель оптимізації* може бути сформульована так: мінімізувати або максимізувати цільову функцію  $Q$

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{Min (Max)},$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – змінні оптимізації, при виконанні обмежень-рівностей

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

...



$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

або нерівностей

$$a_1 \leq g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1;$$

$$a_2 \leq g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2;$$

...

$$a_m \leq g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m.$$

Зазначимо, що  $m$  – довільне число і при цьому  $m < n$ .

Методи оптимізації дозволяють вибрати найкращий варіант системи (виробу) з усіх можливих. Звичайно це процес чи послідовність операцій, які дозволяють отримати уточнений розв'язок.

У більшості завдань, особливо тих, що потребують негайного вирішення (у режимі реального часу), основним критерієм застосовності того або іншого методу є час, що витрачається на розрахунки.

*Локальний оптимум* — найбільше/найменше значення цільової функції порівняно з її значеннями в точках її найближчого оточення.

*Глобальний оптимум* — найбільше/найменше значення цільової функції для всього простору проектування. Саме йому відповідають значення параметрів, які шукає конструктор (рисунок 7.3).

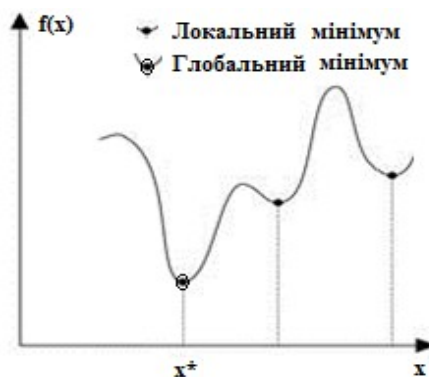


Рисунок 7.3 – Локальний і глобальний мінімуми цільової функції

## 7.2 Класифікація задач оптимізації

1 За критерієм розмірності допустимої множини параметрів розрізняють завдання *одновимірної* (одно параметричної,  $n=1$ ) і *багатовимірної* (багатопараметричної,  $n \geq 2$ ) оптимізації.

2 За критерієм наявності або відсутності обмежень на допустиму множину параметрів існують завдання умовної і безумовної оптимізації. За цією ознакою розрізняють як одновимірні, так і багатовимірні завдання.

3 За кількістю локальних екстремумів — *одноекстремальні* (один мінімум або максимум) і *багатоекстремальні* завдання оптимізації.

4 За кількістю цільових функцій, які оптимізуються, — *однокритеріальні* та *багатокритеріальні* завдання оптимізації.

5 За характером обмежень — *детермінована* і *стохастична* оптимізації. Якщо множина допустимих значень включає випадкові компоненти, то має місце завдання *стохастичного* програмування.

6 За видом цільової функції та обмежень розрізняють *лінійне* і *нелінійне* програмування. Завдання лінійного програмування містить лінійну цільову функцію, обмеження в ньому також лінійні. При порушенні лінійності має місце *нелінійне* завдання оптимізації.

7 За типом параметрів завдання оптимізації розрізняють *безперервні*, *дискретні* та *цілочислові* завдання оптимізації.

8 За наявності чи відсутності залежності від часу значень змінних параметрів системи та управляючих впливів — *статичні* та *динамічні* завдання оптимізації.

### ***Багатокритеріальна оптимізація***

На практиці, як правило, доводиться оптимізувати конструкцію (виробничий процес) за кількома критеріями. При цьому часто виявляється, що ці критерії є суперечливими. Наприклад, потрібно спроектувати транспортний засіб, прагнучи задовольнити вимогу мінімальної вартості і вимогу максимальної безпеки пасажирів. Збільшення безпеки, як правило, буде вимагати додаткових витрат. Такі завдання називаються завданнями *багатокритеріальної оптимізації*. Існують різні *підходи* до їх вирішення.

Одним з них є побудова єдиної цільової функції, найпростішим варіантом якої є *середнє арифметичне* декількох критеріїв  $f_i(x)$

$$F(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{n}$$

Іншим підходом є введення деякої «ваги»  $a_i$  до кожного критерію, яка б урахувала його значущість:-

$$F(x) = \frac{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)}{n}$$

При використанні середньозваженої цільової функції можна отримати «оптимальне» рішення, різко поліпшивши якийсь один критерій і «проваливши» інші.

Можна істотно поліпшити останню конструкцію, побудувавши деяке «функціональне середнє» з окремих критеріїв:

$$F(x) = \bar{\Phi}(f_1(x), \dots, f_n(x))$$

При такому осередненні постановник завдання (інженер) змушений сам визначати важливість різних критеріїв, тобто виступати в ролі експерта. Остаточне рішення (оптимальна конструкція) буде багато в чому залежати від кваліфікації експерта [6].

Нижче наводиться *огляд математичних методів вирішення оптимізаційних завдань* і приклади їх використання. Відзначимо, що більш детально розглянуто методи, які застосовуються в лабораторних роботах курсу [5].

Відомими та дослідженими є такі *методи*:

- класичний аналіз;
- невизначені множники Лагранжа;
- варіаційне числення;
- динамічне програмування;
- принцип максимуму;
- лінійне програмування;
- нелінійне програмування;
- геометричне програмування.

Специфічною особливістю методів вирішення оптимізаційних завдань (за винятком методів нелінійного програмування) є те, що до деякого етапу оптимізаційне завдання вирішують аналітично, тобто знаходять певні аналітичні вирази,

наприклад системи диференціальних рівнянь, звідки вже відшуковують оптимальне рішення [1].

На відміну від зазначених методів, при використанні методів нелінійного програмування застосовують інформацію, яку одержують при обчисленні критерію оптимальності, зміна якого служить оцінкою ефективності тієї або іншої дії.

*Методи безумовної оптимізації*, які використовуються на окремих етапах роботи алгоритмів нелінійної оптимізації, можна розділити на дві великі групи:

- методи, що використовують тільки значення цільової функції;
- методи, що використовують похідні цільової функції.

Методи першої групи часто називають прямими методами, а другої – градієнтними. До методів прямого пошуку належать метод пошуку за зразком (метод Хука-Дживса) і метод деформованого багатогранника (метод Нелдера-Міда). До градієнтних методів належать метод найшвидшого спуску, метод спряжених градієнтів (Флетчера-Рівса) і метод спряжених напрямків (Девідона-Флетчера-Пауелла).

*Методи дослідження функцій класичного аналізу* являють собою найбільш відомі методи вирішення нескладних оптимізаційних завдань, які відомі з курсу математичного аналізу. Звичайною сферою використання даних методів є задачі з заданим аналітичним виразом критерію оптимальності, що дозволяє знайти не дуже складний аналітичний вираз для похідних. Отримані прирівнюванням до нуля похідні рівняння, що визначають екстремальні рішення завдання, вкрай рідко вдається розв'язати аналітичним шляхом. Тому, як правило, застосовуються числові методи, які реалізують на ЕОМ. Додаткові труднощі при вирішенні такого завдання методами дослідження функцій класичного аналізу виникають внаслідок того, що система рівнянь, яка отримується в результаті їх застосування, забезпечує лише необхідні умови оптимальності. Тому всі розв'язки даної системи повинні бути перевірені на достатність. У результаті такої перевірки спочатку відкидають такі, що не визначають екстремальні значення критерію оптимальності. Потім серед тих, що залишилися, вибирають ті, яке задовольняють умови оптимізаційного завдання, тобто

найбільшим або найменшим значенням критерію оптимальності залежно від постановки завдання.

**Метод множників Лагранжа** застосовують для вирішення завдань такого самого класу складності, що і при використанні звичайних методів дослідження функцій, але за наявності обмежень-рівностей на незалежні змінні. До вимоги можливості отримання аналітичних виразів для похідних від критерію оптимальності при цьому додається аналогічна вимога щодо аналітичного вигляду обмежень-рівностей. В основному при використанні методу множників Лагранжа доводиться вирішувати ті самі завдання, що і без обмежень. Деяке ускладнення виникає лише від введення додаткових невизначених множників, внаслідок чого порядок системи рівнянь, розв'язуваної для знаходження екстремумів критерію оптимальності, відповідно підвищується на кількість обмежень. Щодо іншого, процедура пошуку рішень і перевірки їх на оптимальність відповідає процедурі вирішення завдань без обмежень. Множники Лагранжа можна застосовувати для вирішення завдань оптимізації об'єктів на основі рівнянь з частинними похідними і завдання динамічної оптимізації. При цьому замість розв'язання системи кінцевих рівнянь для знаходження оптимуму необхідно інтегрувати систему диференціальних рівнянь.

Слід зазначити, що множники Лагранжа використовують також у якості допоміжного засобу при вирішенні спеціальними методами завдань інших класів з обмеженнями типу рівностей, наприклад у варіаційному численні і динамічному програмуванні.

**Методи варіаційного числення** зазвичай використовують для вирішення завдань, у яких критерії оптимальності подаються у вигляді функціоналів і рішеннями яких служать функції. Такі завдання виникають зазвичай при статичній оптимізації процесів з розподіленими параметрами або в завданнях динамічної оптимізації. Варіаційні методи дозволяють звести вирішення оптимального завдання до інтегрування системи диференціальних рівнянь Ейлера, кожне з яких є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку з граничними умовами, заданими на обох кінцях інтервалу інтегрування. Кількість рівнянь зазначеної системи при цьому дорівнює кількості функцій, що визначаються

при вирішенні завдання. Кожну функцію знаходять у результаті інтегрування одержуваної системи.

**Динамічне програмування** служить ефективним методом вирішення завдань оптимізації дискретних багатостадійних процесів, для яких критерій оптимальності визначається як адитивна функція критеріїв оптимальності окремих стадій. Без особливих труднощів зазначений метод можна поширити на випадок, коли критерій оптимальності задано в іншій формі, однак при цьому збільшується розмірність окремих стадій. По суті метод динамічного програмування являє собою алгоритм визначення оптимальної стратегії управління на всіх стадіях процесу. При цьому закон управління на кожній стадії знаходять шляхом вирішення часткових завдань оптимізації послідовно для всіх стадій процесу за допомогою методів дослідження функцій класичного аналізу або методів нелінійного програмування. Результати звичайно не можуть бути виражені в аналітичній формі, а мають табличний вигляд.

**Принцип максимуму** застосовують для вирішення завдань оптимізації процесів, що описуються системами диференціальних рівнянь. Перевагою математичного апарату принципу максимуму є те, що рішення може визначатися у вигляді розривних функцій. Знаходження оптимального рішення зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь процесу і спряженої системи для допоміжних функцій при граничних умовах, заданих на обох кінцях інтервалу інтегрування, тобто до розв'язання крайової задачі. На область існування змінних можуть бути накладені обмеження.

**Лінійне програмування** являє собою математичний апарат, розроблений для вирішення оптимізаційних завдань з лінійними критеріями оптимальності та лінійними обмеженнями на область визначення змінних. Такі завдання зазвичай зустрічаються при оптимальному плануванні виробництва з обмеженою кількістю ресурсів, при визначенні оптимального плану перевезень (транспортні задачі) та ін. Для вирішення великого кола завдань лінійного програмування є практично універсальний алгоритм — **симплекс-метод**, що дозволяє за кінцеву кількість ітерацій знаходити оптимальне рішення переважної більшості завдань.

Тип використовуваних обмежень (рівності або нерівності) не позначається на можливості застосування зазначеного алгоритму.

Додаткової перевірки на оптимальність для отримуваних рішень не потрібно.

**Методи нелінійного програмування** застосовують для вирішення оптимізаційних завдань з нелінійними цільовими функціями. На незалежні змінні можуть бути накладені обмеження також у вигляді нелінійних співвідношень, що мають вигляд рівностей або нерівностей. По суті методи нелінійного програмування використовують, якщо жоден з перерахованих вище методів не дозволяє скільки-небудь просунутись у вирішенні оптимізаційного завдання.

Під назвою «методи нелінійного програмування» об'єднується велика група числових методів, більшість з яких пристосовані для вирішення оптимізаційних завдань відповідного класу. Вибір того чи іншого методу обумовлений складністю обчислення критерію оптимальності і складністю обмежуючих умов, необхідною точністю рішення, потужністю наявної ЕОМ та ін.

Ряд методів нелінійного програмування практично постійно використовується в поєднанні з іншими методами оптимізації, як, наприклад, метод сканування в динамічному програмуванні. Крім того, ці методи служать основою побудови систем автоматичної оптимізації – оптимізаторів, які безпосередньо застосовуються для керування виробничими процесами.

**Геометричне програмування** – метод вирішення одного спеціального класу завдань нелінійного програмування, у яких критерії оптимальності та обмеження задаються у вигляді позиномів – виразів, що являють собою суму добутоків тригонометричних функцій від незалежних змінних. З подібними завданнями іноді доводиться стикатися в проектуванні. Крім того, деякі завдання нелінійного програмування іноді можна звести до такого подання, використовуючи апроксимацію цільових функцій і обмежень.

Як правило, *не можна рекомендувати один який-небудь метод для вирішення всіх без винятку завдань*, що виникають на практиці. Одні методи в цьому відношенні є більш загальними, інші — менше. Нарешті, цілу групу методів (методи дослідження функцій класичного аналізу, метод множників Лагранжа, методи нелінійного програмування) на певних етапах вирішення оптимізаційних завдань можна застосовувати в поєднанні з іншими

методами, наприклад динамічним програмуванням або принципом максимуму.

Зазначимо також, що деякі методи спеціально розроблені для вирішення оптимізаційних завдань з математичними моделями певного виду. Так, математичний апарат лінійного програмування, спеціально створений для вирішення завдань з лінійними критеріями оптимальності та лінійними обмеженнями на змінні, дозволяє вирішувати більшість завдань, сформульованих у такій постановці. Так само і геометричне програмування призначене для вирішення оптимізаційних завдань, у яких критерій оптимальності та обмеження представлені позинамами. Динамічне програмування добре пристосоване для вирішення завдань оптимізації багатостадійних процесів, особливо тих, у яких стан кожної стадії характеризується відносно невеликою кількістю змінних стану.

Найкращим шляхом при виборі методу оптимізації, найбільш придатного для вирішення відповідного завдання, слід визнати дослідження можливостей і досвіду застосування різних методів оптимізації.

Важливою характеристикою будь-якого оптимізаційного завдання є його вимірність, що дорівнює кількості змінних, необхідних для однозначного визначення стану об'єкта, що оптимізується. Як правило, вирішення завдань високої розмірності пов'язано з необхідністю виконання великого обсягу обчислень.

### **7.3 Метод «Золотого перерізу»**

Із усього різноманіття відносно «швидких» методів зупинимося на методі «Золотого перерізу», основні ідеї якого знайшли застосування в багатьох предметних сферах.

Цей метод передбачає розподіл інтервалу пошуку оптимуму точками, координати яких обчислюються за певним законом; обчислення значень цільової функції  $Q(x)$  в них; порівняння цих значень між собою і відкидання тієї частини інтервалу, на якій відсутній оптимум. При цьому не потрібно безперервності  $Q(x)$ , досить, щоб вона була унімодальною.



Функція, задана на інтервалі  $[a, b]$  називається *унімодальною*, якщо існує одна точка  $x^*$  мінімуму  $Q(x)$

$$Q(x^*) = \text{MIN } Q(x) \text{ } a \leq x \leq b$$

і якщо для будь-яких двох точок  $x_1, x_2 \in [a, b]$  виконуються співвідношення:

- для всіх точок, розташованих лівіше від точки мінімуму (рисунок 7.4, а),

$$x_1 < x_2 < x^* \Rightarrow Q(x_1) > Q(x_2);$$

- для всіх точок, розташованих правіше від точки мінімуму (рисунок 7.4, б),

$$x_2 > x_1 > x^* \Rightarrow Q(x_1) < Q(x_2).$$

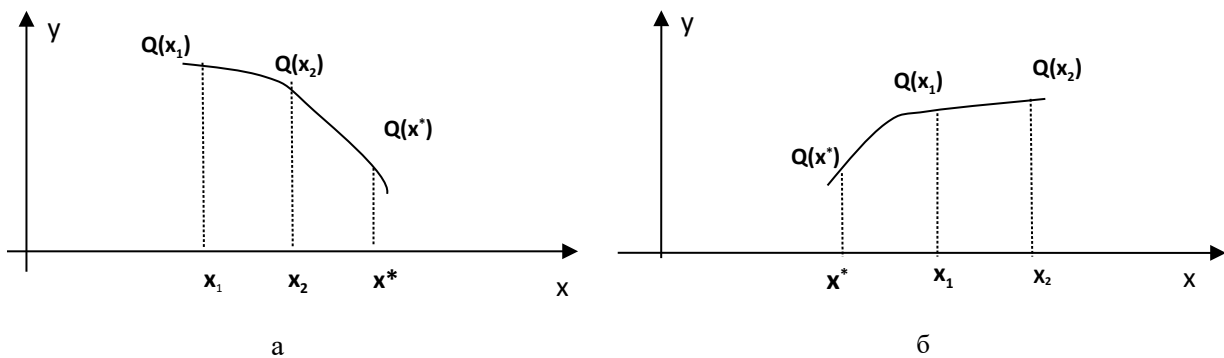


Рисунок 7.4 – Умови унімодальності функції

Нехай відомо, що  $Q(x)$  унімодальна на інтервалі  $[a, b]$ . Тоді за будь-якими двома значеннями  $Q(x_1)$  і  $Q(x_2)$  можна вказати інтервал, у якому перебуває точка  $x^*$ , що мінімізує  $Q(x)$ . Цей інтервал має довжину, меншу за довжину попереднього (рисунок 7.5). Для визначеності шукатимемо *Min*.

Нехай для визначеності  $x_1 < x_2$ . Можливі варіанти, наведені на рисунку 7.5.

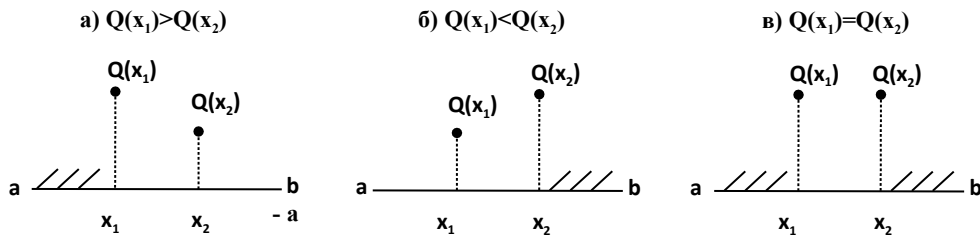


Рисунок 7.5 – Геометрична інтерпретація розбиття інтервалу пошуку мінімуму функції

Можливі такі випадки:

а) відкинути інтервал  $[a, x_1]$  ;

б) відкинути інтервал  $[x_2, b]$  ;

в) відкинути інтервали  $[a, x_1]$  і  $[x_2, b]$  , бо на цих інтервалах не може перебувати  $x^*$ , виходячи з припущення про унімодальність  $Q(x)$ .

При заданій кількості обчислень  $Q(x)$  оптимальною є стратегія, що приводить до найменшого інтервалу невизначеності (інтервалу, на якому перебуває  $Min$ ).

На кожній ітерації будемо ділити інтервал  $[a, b]$  точкою  $x_1$  на дві частини так, щоб відношення довжини всього інтервалу до його більшої частини дорівнювало відношенню більшої частини до меншої частини (рисунок 7.6).

$$b-a \cdot \frac{b-x_1}{x_1-a} = \frac{b-x_1}{x_1-a} \cdot x_1 - a \quad \text{або} \quad \frac{Z}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_2} .$$

Із цього співвідношення  $Z_1^2 = Z \cdot Z_2$ . З врахуванням того, що  $Z = Z_1 + Z_2$ , підставимо  $Z$  з останнього виразу в попередній і поділимо на  $Z_1^2$ . Одержимо

$$\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 + \frac{Z_2}{Z_1} - 1 = 0 .$$

$$\tau = \frac{Z_2}{Z_1} = 0.618034 .$$

Для додатного кореня

Це відношення називається «Золотим перерізом».

Зазначимо, що

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n-1}}{v_n} = 0.618034 ;$$

$$v_1 = 1 , \quad v_{n+1} = v_n + v_{n-1} .$$

За допомогою цієї формули можна легко визначити чергові значення послідовності  $\{v_n\}$ : числа: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Ця послідовність чисел називається *числами Фібоначчі*.

«Золотий переріз» створюють дві точки: точка  $x_1 = (b-a)\tau$  і точка  $x_2$ , розташована симетрично точці  $x_1$  відносно середини відрізка  $[a, b]$ .

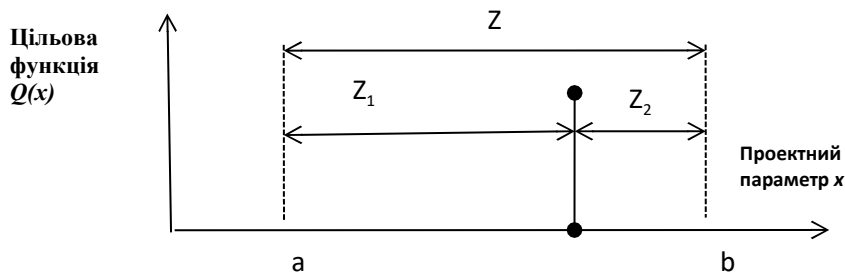


Рисунок 7.6 – Геометрична інтерпретація методу «Золотого перерізу»

Алгоритм методу «Золотого перерізу»:

- 1 Визначаємо значення точок  $x_1, x_2$ .
- 2 Обчислюємо значення  $Q(x_1), Q(x_2)$ .
- 3 Якщо  $Q(x_1) \leq Q(x_2)$ , то для подальшого розгляду залишаємо  $[a, x_2]$ , що еквівалентно перенесенню точки  $b$  в точку  $x_2$ .
- 4 Якщо  $Q(x_1) > Q(x_2)$ , то для подальшого розгляду залишаємо  $[x_1, b]$ , що еквівалентно перенесенню точки  $a$  в точку  $x_1$ .

Процес розподілу триває доки довжина інтервалу невизначеності не стане менше заданої точності  $\varepsilon$ . На кожному кроці довжина нового інтервалу невизначеності приблизно встановлює 0.618034 довжини старого інтервалу (рисунок 7.7).

## 7.4 Метод випадкового пошуку Монте-Карло

*Метод Монте-Карло* (МК) — числовий метод вирішення математичних завдань за допомогою моделювання випадкових величин.

Особливістю методу МК є проста структура обчислювального алгоритму. Як правило, складається програма для одного випадкового випробування. Випробування повторюється  $N$  разів, причому кожен дослід не залежить від всіх інших. Результати усереднюються. Похибка обчислень, як правило, пропорційна  $\sqrt{D/N}$ , де  $D$  – деяка постійна,  $N$  – кількість випробувань.

Точність визначення характеристик зростає зі збільшенням обсягу статистичного експерименту, і в цьому сенсі метод МК відносять до методів послідовних наближень.

Як ми говорили раніше, у всіх інших чисельних методах існує накопичення помилок за рахунок похибок округлення.

Суть методу для вирішення завдань одновимірної оптимізації зводиться до того, що в області пошуку оптимального значення відповідно до заданої щільності розподілу генеруються випадкові точки  $X_1, X_2, \dots$ . Для кожного значення  $X_i$  обчислюється значення функції, яка підлягає оптимізації із запам'ятовуванням мінімуму для  $X_i$ . Схема алгоритму наведена на рисунку 7.8.

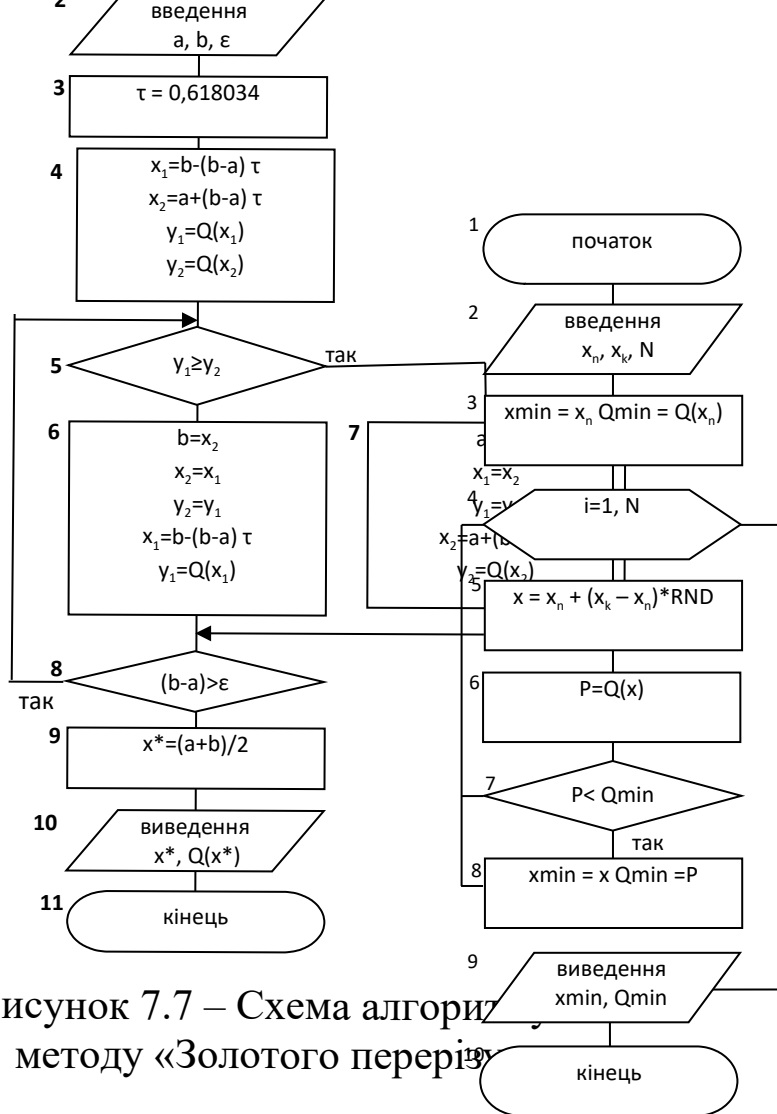


Рисунок 7.7 – Схема алгоритму методу «Золотого перерізу»

Рисунок 7.8 – Схема алгоритму методу випадкового пошуку Монте-Карло

Отримання псевдовипадкового числа з рівномірним законом розподілу в діапазоні від  $a$  до  $b$  здійснюється за допомогою функції  $RND$ . При цьому використовується формула  $X = a + (b - a) RND$ .

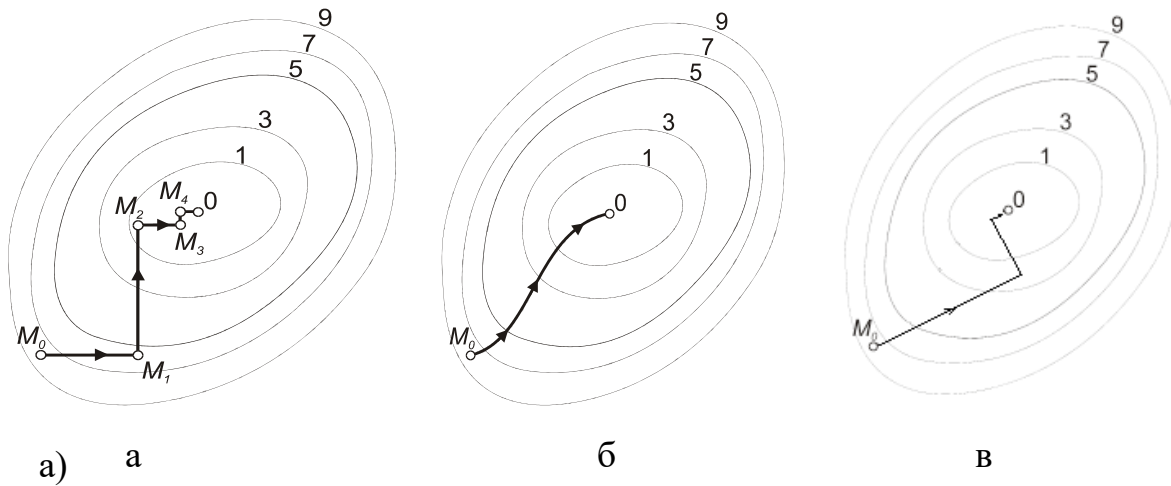
### 7.5 Методи багатовимірного пошуку

Це методи для цільових функцій декількох змінних (проектних параметрів). Обсяг обчислень, необхідний для звуження інтервалу невизначеності в багатовимірному просторі, є статичною функцією, показник якої дорівнює вимірності простору.

*Метод покоординатного підйому/спуску*

Логічним розвитком методики одновимірного пошуку для багатовимірного простору є послідовна зміна кожного проектного параметра доти, поки не буде досягнутий максимум/мінімум цільової функції. По завершенню цієї процедури для всіх змінних можна повернутися до першої і подивитися, чи можна ще більш удосконалити рішення (рисунок 7.9).

Цей метод, названий методом покоординатного підйому/спуску, не завжди дозволяє знайти оптимальне рішення. Його не застосовують у випадку, якщо лінії рівня мають точки зламу. Незважаючи на це, метод часто використовують на першій стадії вирішення завдання, застосовуючи далі більш складні методи. До достоїнств методу слід віднести можливість використання простих алгоритмів одновимірного пошуку, таких, як метод «Золотого перерізу».



а) а) покоординатний; б) градієнтний; в) східчастий найшвидший  
 Рисунок 7.9 — Ілюстрація методів багатовимірного пошуку для функції двох змінних

Нехай потрібно знайти найменше значення цільової функції  $Q(M) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Через  $M$  позначимо точку  $n$ -вимірного простору з координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Виберемо початкову точку  $M_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  і розглянемо функцію  $Q(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  як функцію однієї змінної  $x_1$ , тобто при фіксованих значеннях  $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ .

Змінюючи першу змінну, будемо рухатися від початкової точки  $x_1 = x_1^{(0)}$ , у бік спадання функції, поки не дійдемо до її мінімуму при  $x_1 = x_1^{(1)}$ , після якого вона починає зростати. Точку з координатами  $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  позначимо  $M_1$ , при цьому  $Q(M_1) \leq Q(M_0)$ .

Далі при фіксованих значеннях  $x_1 = x_1^{(1)}, x_3 = x_3^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$  розглянемо  $Q(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  як функцію однієї змінної  $x_2$ .

Змінюючи  $x_2$ , будемо знов рухатися від початкової точки  $x_2 = x_2^{(0)}$  у бік спадання функції, поки не дійдемо до її мінімуму при  $x_2 = x_2^{(1)}$ . Точку з координатами  $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(0)})$  позначимо  $M_2$ , при цьому  $Q(M_2) \leq Q(M_1)$ .

Проведемо таку саму мінімізацію цільової функції по змінних  $x_3, x_4, \dots, x_n$ .

Дійшовши до змінної  $x_n$ , знову повернемося до  $x_1$  і продовжимо процес.

Ця процедура цілком виправдовує назву методу. За її допомогою ми побудуємо послідовність точок  $M_0, M_1, M_2, \dots$ , якій відповідає монотонна послідовність значень функції  $Q(M_0) \geq Q(M_1) \geq Q(M_2) \geq \dots$ . Обриваючи її на деякому кроці  $k$ ,

можна наближено прийняти значення функції  $Q(M_k)$  за її найменше значення в розглянутій області.

Умовою закінчення алгоритму може бути, наприклад,  $|M_{k+1} - M_k| < \xi$ , де  $\xi$  – задана точність або здійснення заданої кількості ітерацій  $k$ .

На рисунку 7.9 зображені лінії рівня функції двох змінних. Вздовж цих ліній функція зберігає постійні значення – 1, 3, 5, 7, 9. Показано траєкторію пошуку її найменшого значення, яке досягається в точці 0.

Схема алгоритму методу покоординатного спуску наведена на рисунку 7.10.

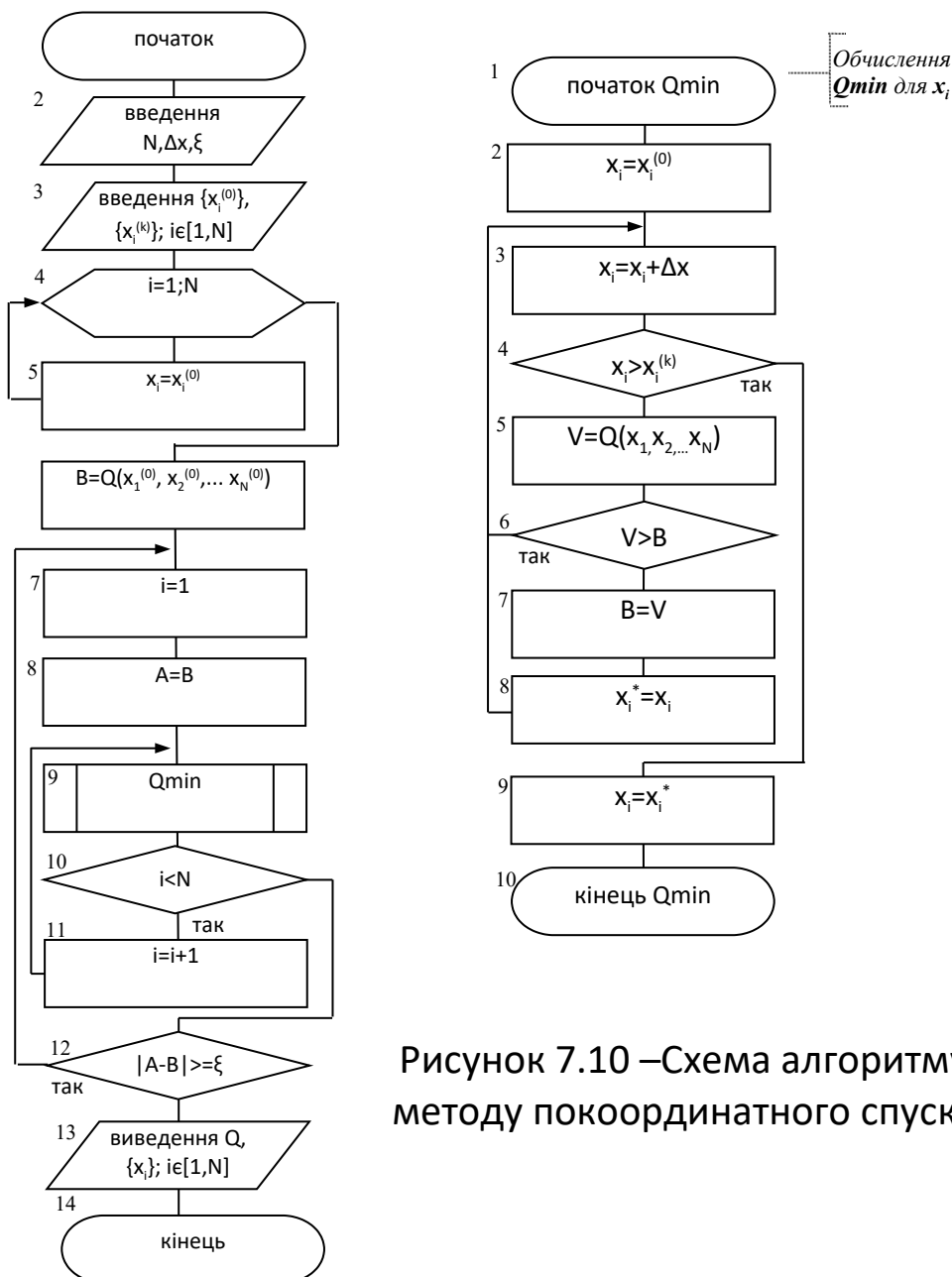


Рисунок 7.10 –Схема алгоритму методу покоординатного спуску



*Градiєнтні методи.* У багатьох алгоритмах багатовимірної оптимізації використовується інформація про градієнти.

*Проілюструємо це на простому прикладі. Уявімо, що альпіністу з зав'язаними очима необхідно добратися до вершини «унімодальної» гори. Навіть нічого не бачачи, він може це зробити, якщо весь час буде рухатися нагору. Хоча будь-яка стежка, що веде нагору, врешті-решт приведе його до вершини, найкоротшою з них буде найкрутіша, якщо правда, альпініст не нашттовхнеться на вертикальний обрив, який доведеться обходити (математичним еквівалентом обриву на поверхні, утвореній цільовою функцією, є ті її місця, де поставлені умовні обмеження).*

Метод оптимізації, в основу якого покладена ідея руху по найкрутішій стежці, називається методом градієнтного підйому/спуску.

Вектор градієнта перпендикулярний до лінії рівня і вказує напрямом до нової точки в просторі проектування. Напрямок цього вектора є напрямком найшвидшого зростання функції в даній точці.

Протилежний йому напрям, який часто називають антиградієнтним, являє собою напрям найбільш швидкого спадання функції.

Отриману інформацію про напрям градієнта можна використовувати для побудови алгоритму пошуку (рисунк 7.9, б).

Візьмемо початкову точку  $M_0$ , обчислимо в ній градієнт розглянутої функції і зробимо вибраний крок у зворотному напрямку. Отримаємо точку  $M_1$ , у якій значення функції буде менше від початкового.

У новій точці повторимо процедуру. Продовжуючи цей процес, ми будемо рухатися в бік спадання функції. При цьому спеціальний вибір напрямку руху на кожному кроці робить просування до мінімуму більш швидким, ніж у методі покоординатного спуску.

Визначити кожну  $i$ -ту координату вектора  $M=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на  $k$ -му кроці можна за формулою

$$x_i^{k+1} = x_i^k - h * (\partial Q(x) / \partial x_i),$$

де  $h$  – величина кроку пошуку.

Якщо  $Q(M_k) < Q(M_{k+1})$ , то обчислюється градієнт у точці  $M_k$  і здійснюється крок тієї самої величини  $h$ .

Якщо  $Q(M_k) > Q(M_{k+1})$ , то це означає, що ми проскочили  $Min$  і необхідно зменшити крок.

Якщо ж після зменшення кроку до заданої межі  $h_{min}$  значення  $Q(M_k) = Q(M_{k+1})$ , то вважаємо, що точка  $M_k$  знаходиться поблизу екстремальної точки, і приймаємо

$$M^* = M_k.$$

Метод градієнтного спуску вимагає обчислення градієнта цільової функції на кожному кроці. Якщо вона задана аналітично, то це, як правило, не проблема: для частинних похідних, що визначають градієнт, можна отримати явні формули. В іншому випадку похідні в потрібних точках доводиться обчислювати наближено, замінюючи їх відповідними різницевиими відношеннями.

$$\frac{\partial Q(M)}{\partial x_i} = [Q(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - Q(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)] / \Delta x_i.$$

Схема алгоритму градієнтного методу наведена на рисунку 7.11.

*Східчастий найшвидший спуск/підйом*

Обчислення градієнта на кожному кроці, що дозволяє весь час рухатися в напрямку найбільш швидкого зменшення/збільшення цільової функції, може в той же час сповільнити обчислювальний процес. Справа в тому, що обчислення градієнта – зазвичай набагато складніша операція, ніж обчислення самої функції. Тому часто користуються модифікацією градієнтного методу, який отримав назву методу найшвидшого спуску.

Цей метод є різновидом градієнтного методу. Відміна від класичного підходу полягає в тому, що після обчислення градієнта в  $M_k$  здійснюється перехід до точок  $M_{k+1}, M_{k+2}, \dots, M_{k+m}$

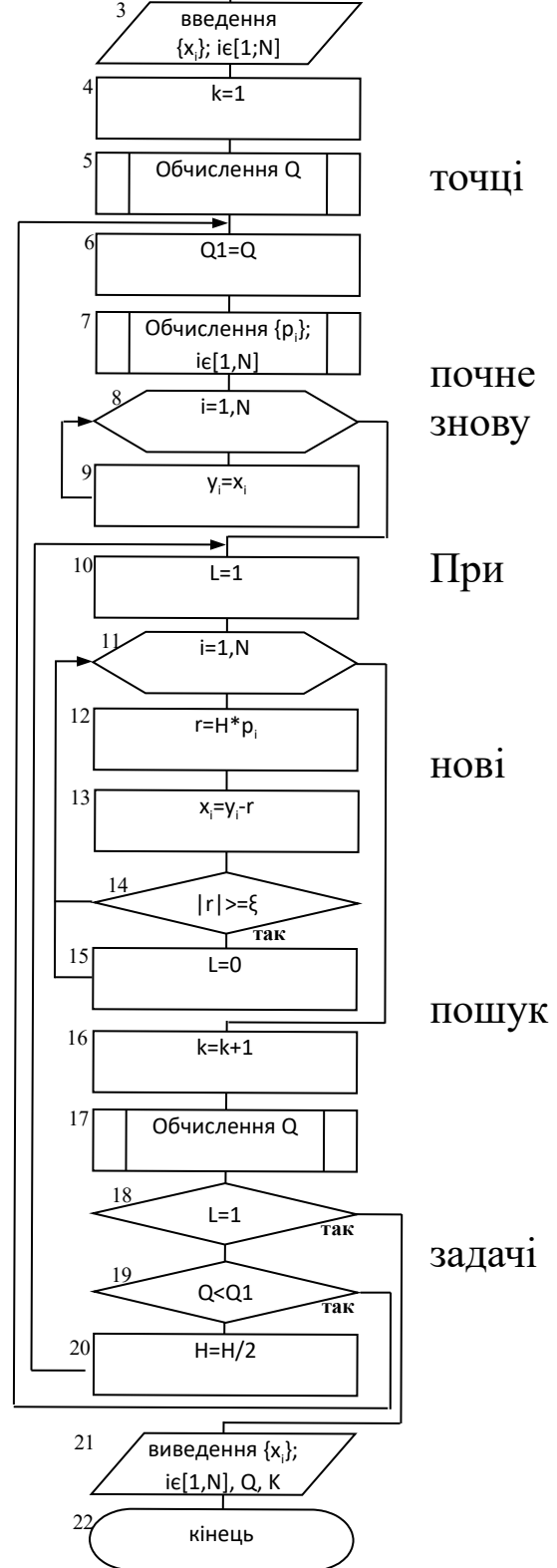


без обчислення градієнтів в кожній до тих пір, поки значення  $Q(M)$  спадає. Отримавши одновимірний оптимум у напрямку антиградієнта, як тільки  $Q(M)$  зростати, необхідно в цій точці обчислити значення градієнта і продовжити рух у новому напрямку і т. д. (рисунок 7.9, в). цьому градієнт обчислюється набагато рідше, тільки при зміні напрямів руху.

Практика породжує все нові і нові задачі оптимізації, причому їх складність зростає. Потрібні нові математичні моделі і методи, які враховують наявність багатьох критеріїв, проводять глобальний оптимуму. Іншими словами, математичний апарат оптимізації постійно розвивається.

Реальні прикладні оптимізації складні. Методи оптимізації не завжди справляються з вирішенням

реальних завдань без допомоги людини. Немає поки такої теорії, яка врахувала б будь-які особливості функцій, що описують постановку завдання. Слід віддавати перевагу таким методам, якими простіше управляти в процесі пошуку оптимуму.



### Приклад 3

Розглянемо оптимізаційне завдання для функції однієї змінної. Проведемо дослідження класичним методом і методом випадкового пошуку Монте-Карло. Порівняємо результати.

Визначити *точки локальних і глобальних екстремумів функції*

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad [11].$$

Знаходимо *першу похідну*  $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ .

Обчислюємо *корені рівняння*  $f'(x) = 0$  :

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0$$

Отримаємо *дві стаціонарні точки*  
 Рисунок 7.11 – Схема алгоритму методу градієнтного спуску  
 $x_{(1)} = 1$   $x_{(2)} = -1$ .

Визначаємо *характер* стаціонарних точок. Знаходимо *другу похідну*  $f''(x) = 0$  :

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Обчислюємо *значення*  $f''(x)$  *в точці*  $x_{(1)}$  :

$$f''(1) = \frac{2(1-3)}{(1+1)^3} = -\frac{4}{8} = -0,5 < 0$$

отже  $x=1$  є *точкою локального максимуму*.

Обчислюємо *значення*  $f''(x)$  *в точці*  $x_{(2)}$  :

$$f''(-1) = \frac{-2(1-3)}{(1+1)^3} = \frac{4}{8} = 0,5 > 0$$

отже  $x=-1$  є *точкою локального мінімуму*.

Обчислюємо *граничні значення*  $f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{\infty \cdot 1} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{-\infty \cdot 1} .$$

$$V = \max\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = 0 \neq +\infty$$

Оскільки  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  , то  $f(x)$  має кінцевий *глобальний максимум*.

$$W = \min\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = 0 \neq -\infty$$

Оскільки  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  , то  $f(x)$  має кінцевий *глобальний мінімум*.

Обчислюємо значення  $f(x)$  в точках локальних екстремумів:

$$f(1) = \frac{1}{1+1^2} = 0,5 \quad f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -0,5$$

Визначаємо точку глобального мінімуму  $f(x)$  :

$$\min f(x) = \min\{f(-1), W\} = \min\{-0,5, 0\} = -0,5 = f(-1)$$

Таким чином, точка  $x = -1$  є *точкою глобального мінімуму*  $f(x)$  .

Визначаємо точку глобального максимуму  $f(x)$  :

$$\max f(x) = \max\{f(1), V\} = \max\{0,5, 0\} = 0,5 = f(1)$$

Таким чином, точка  $x = 1$  є *точкою глобального максимуму*  $f(x)$  .

Побудуємо в Excel графік функції  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  на  $[-2, 2]$  (рисунок 7.12).

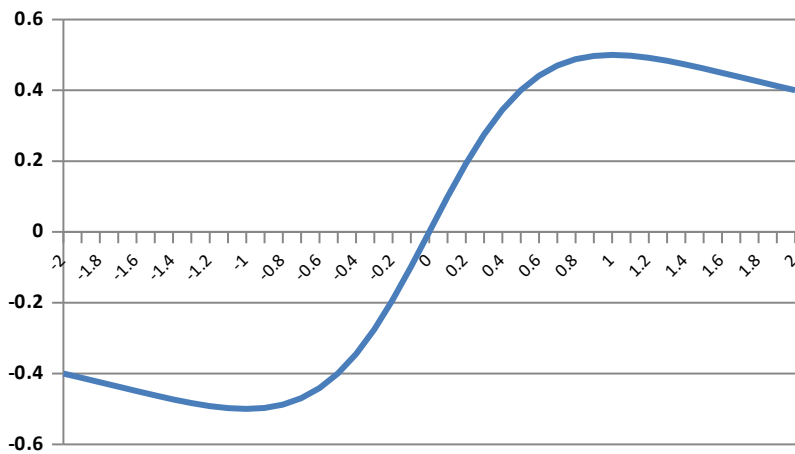


Рисунок 7.12 — Графік функції  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Проведемо ряд експериментів з відповідним проектом, змінюючи кількість випадкових випробувань у кожному. Починаємо з  $n=10$  і збільшуємо цей параметр кожного разу в 10 разів. На сьомому кроці значення мінімуму, максимуму та відповідних аргументів повністю співпадають з результатами, отриманими з використанням методу класичного аналізу (рисунок 7.13).

n	qmin	xmin	qmax	xmax
10	-0,492671237385429	-0,841750144958496	0,499559326221898	1,04289436340332
100	-0,499856218692747	-1,02427458763123	0,498906194045221	1,06844663619995
1000	-0,499999997135384	-1,00010704994202	0,499998113370674	1,00275087356567
10000	-0,499999995412356	-0,999353408813477	0,49999999960082	1,00001263618469
100000	-0,49999999991118	-1,00000596046448	0,49999999975612	0,999968767166138
1000000	-0,49999999999488	-1,00000143051147	0,49999999997954	0,999997138977051
10000000	-0,5	-1	0,5	1

Рисунок 7.13 — Результати експериментів для прикладу 3 з різною кількістю випадкових випробувань

### Контрольні запитання

1 Що називається оптимізацією?

- 2 Наведіть математичну модель оптимізації в загальному вигляді.
- 3 Що є ознакою багатокритеріальної задачі оптимізації?
- 4 Назвіть основні етапи процесу знаходження мінімуму функції методу «Золотого перерізу».
- 5 Дайте визначення унімодальної функції.
- 6 Для яких функцій можна гарантувати застосовність методу «Золотого перерізу»?
- 7 Для чого потрібна цільова функція в завданнях оптимізації?
- 8 Які методами оптимізації називаються прямими?
- 9 Які дані необхідно мати при будь-якому способі завдання функції для обчислення екстремуму?
- 10 Запишіть співвідношення «Золотого перерізу» відрізка  $[a,b]$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Вербилов, А. Ф. Методы оптимизации параметров при решении задач динамики сложных механических систем [Текст] / А. Ф. Вербилов, В. В. Ковалев // Ползуновский вестник. – Барнаул : Алтайский государственный технический университет, 2009. – № 1-2. – С. 174-178.

2 Математичні методи та моделі в розрахунках на ЕОМ [Текст] : навч. посібник / М. І. Данько, В. С. Меркулов, В. О. Гончаров [та ін.] за ред. М. І. Данька. — Харків : УкрДАЗТ, 2008. – 174 с.

3 Математичні методи і моделі: комп'ютерне моделювання [Текст] : підручник / Н. М. Завгородня, С. В. Панченко, С. Є. Бантюков, В. С. Меркулов. — Харків : УкрДАЗТ, 2012. – 186 с.

4 Меркулов, В. С. Математичні моделі на ЕОМ [Текст] : конспект лекцій / В. С. Меркулов, І. Г. Бізюк. – Харків : УкрДУЗТ, 2017. – Ч. 1 – 62 с.

5 Меркулов, В. С. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисциплін «Математичне моделювання на ЕОМ», «Математичні методи та моделі в розрахунках на ЕОМ» [Текст] / В. С. Меркулов, В. Г. Пчолін, О. В. Казанко. – Харків : УкрДАЗТ, 2010. – 102 с.

6 Реклейтис, Г. Оптимизация в технике [Текст]: в 2-х кн. : пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Регдел. – М. : Мир, 1986. – Кн.1-2.

7 Турчак, Л. И. Основы численных методов [Текст] / Л. И. Турчак. – М. : Наука, 1987. — 320 с.

8 Филиппенко, І. Г. Конспект лекцій з курсу «Математичні методи і моделі в розрахунках на ЕОМ: Методи оптимізації» [Текст] / І. Г. Филиппенко, В. О. Гончаров, В. С. Меркулов. – Харків : УкрДАЗТ, 2004. – Ч 2. – 38 с.

9 Шевченко, В. В. Автоматизація проектування та ремонту вагонів [Текст] : навч. посібник / В. В. Шевченко, В. В. Бондаренко. – Харків : УкрДАЗТ, 2008. – 179 с.

10 Шуп Т. Е. Прикладные и численные методы в физике и технике [Текст] : пер. с англ. / Т. Е. Шуп. – М. : Высш. шк., 1990. — 255 с.



11 Харчистов, Б. Ф. Методы оптимизации [Текст] : учеб. пособие / Б. Ф. Харчистов. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2004. – 140 с.

12 Черняк, Г. Ю. Основы динаміки вагонів [Текст] : навч. посібник / Г. Ю. Черняк, Ю. В. Дьомін; за ред. Ю. В. Дьоміна. – К. : КУЕТТ, 2003. – 270 с.