

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

Кафедра фізики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з дисципліни
„ФІЗИКА”

Частина 1
МЕХАНІКА

Харків – 2017

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри фізики 3 листопада 2016 р., протокол № 2.

Розглянуто методи розв'язання задач з механіки: розділи «Кінематика», «Динаміка», «Закони збереження» та «Динаміка обертального руху». Наведено задачі для самостійного розв'язання.

Методичні вказівки призначено для студентів усіх спеціальностей, що вивчають курс „Фізика”, денної та заочної форм навчання.

Укладачі:

доц. Н. В. Глейзер,
студ. А. І. Беркутова

Рецензент

доц. В. Ю. Гресь

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з дисципліни
„ФІЗИКА”

Частина 1
МЕХАНІКА

Відповідальний за випуск Глейзер Н. В.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 28.03.17 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друкарк. 2,75. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ТЕМА 1. Кінематика матеріальної точки

Після розгляду даної теми студент повинен **знати поняття та визначення:** механічний рух, основна задача механіки, тіло відліку, система відліку, матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, траєкторія, шлях, переміщення, середня шляхова швидкість, середня швидкість переміщення, миттєва швидкість, середнє прискорення, миттєве прискорення, нормальне прискорення, тангенціальне прискорення, прямолінійний рівномірний рух, рівнозмінний рух, вільне падіння.

Студент повинен **вміти** за наведеними даними та довідковими даними додатків А і Б обчислювати пройдений шлях і модуль переміщення, значення координат, швидкості, прискорення в даний момент часу та їхні середні значення; записувати рівняння для координат, пройденого шляху, проекцій переміщення, швидкості та прискорення для даного виду руху; за наведеними рівняннями будувати графіки залежності від часу координат, шляху, проекцій переміщення, швидкості, прискорення для даного виду руху; за наявним графіком проводити аналіз руху, визначати його основні характеристики.

Основні формули

Модуль переміщення тіла

$$\Delta r = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2 + \Delta r_z^2},$$

де $\Delta r_x, \Delta r_y, \Delta r_z$ – проекції переміщення на координатні осі.

Середня шляхова швидкість

$$v_{\text{сер}} = \frac{S}{\Delta t}.$$

Середня швидкість переміщення

$$\vec{v}_{\text{сеп}} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}.$$

Миттєва швидкість

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Проекції миттєвої швидкості на координатні осі

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль миттєвої швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Середнє прискорення

$$\vec{a}_{\text{сеп}} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}.$$

Миттєве прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Проекції миттєвого прискорення на координатні осі

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Нормальне прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Тангенціальне прискорення

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Залежність координати і швидкості тіла від часу при прямолінійному рівномірному русі

$$x = x_0 + v_x t; \quad v_x = \text{const}.$$

Залежність координати, швидкості та прискорення тіла від часу при прямолінійному рівнозмінному русі

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad v_x = v_{0x} + a_x t; \quad a_x = \text{const}.$$

Формули, які описують вільне падіння, рух тіла, кинутого вертикально вниз, рух тіла, кинутого вертикально вгору, рух тіла, кинутого горизонтально, рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, дивитися в додатку В.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Автомобіль проїхав 120 км за 2 год, а потім, повернувши на кут 120° відносно початкового напрямку свого руху, проїхав ще 240 км за 3 год. Визначити середню шляхову швидкість та середню швидкість переміщення автомобіля.

Дано:

$$S_1 = 120 \text{ км}$$

$$t_1 = 2 \text{ год}$$

$$S_2 = 240 \text{ км}$$

$$t_2 = 3 \text{ год}$$

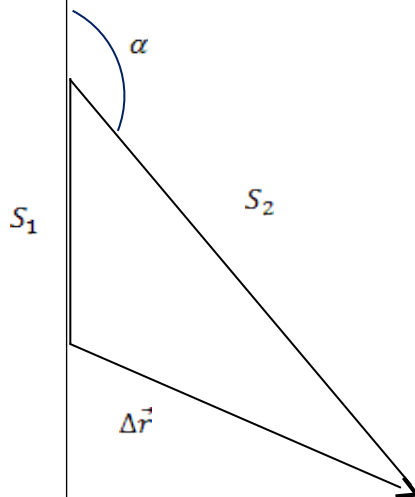
$$\alpha = 120^\circ$$

$$v_s - ?$$

$$v_{\text{сер}} - ?$$

Розв'язання:

Схематично покажемо на рисунку траєкторію руху тіла.



Шлях, пройдений автомобілем, $S = S_1 + S_2$.

Час руху тіла $\Delta t = t_1 + t_2$.

Середня шляхова швидкість, таким чином, дорівнює

$$v_s = \frac{S}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$$

Модуль переміщення тіла знайдемо за теоремою косинусів:

$$\Delta r = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\alpha}$$

Модуль середньої швидкості переміщення

$$v_{сер} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\alpha}}{t_1 + t_2}$$

Підставивши числові дані, отримаємо

$$v_S = \frac{120+240}{2+3} = \frac{360}{5} = 72 \left(\frac{\text{км}}{\text{год}}\right);$$

$$v_{сер} = \frac{\sqrt{120^2 + 360^2 + 2 \cdot 120 \cdot 360 \cdot \cos 120^\circ}}{2+3} = 63,5 \left(\frac{\text{км}}{\text{год}}\right).$$

Відповідь: $72 \frac{\text{км}}{\text{год}}$; $63,5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Задача 2. Одну третину шляху тіло пройшло зі швидкістю $12 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а решту шляху – зі швидкістю $17 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. визначити середню швидкість тіла на всьому шляху.

Дано:

$$S_1 = \frac{S}{3}$$

$$S_2 = \frac{2S}{3}$$

$$v_1 = 12 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$v_2 = 17 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$v_{сер} - ?$$

Розв'язання:

Середня шляхова швидкість

$$v_{сер} = \frac{S}{\Delta t}$$

Час, що витрачає тіло:

- на проходження першої ділянки шляху

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{S}{3v_1};$$

- на проходження другої

$$t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{2S}{3v_2}.$$

Загальний час руху

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{3v_1} + \frac{2S}{3v_2} = \frac{S}{3} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} \right).$$

Отже середня швидкість

$$v_{сер} = \frac{S}{\frac{S}{3} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} \right)} = \frac{3v_1v_2}{v_2 + 2v_1}.$$

$$v_{сер} = \frac{3 \cdot 12 \cdot 17}{17 + 2 \cdot 12} = 14,9 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Відповідь: $14,9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 3. Рух тіла задано рівнянням $x(t) = 2t^3 + 0,5t^2 - 4t + 12$. Визначити швидкість тіла в той момент часу, коли прискорення дорівнює нулю.

Дано:
 $x(t) = 2t^3 + 0,5t^2 - 4t + 12$

v — ?

Розв'язання:
Миттєва швидкість тіла

$$v_x = \frac{dx}{dt};$$

$$v_x(t) = 6t^2 - t - 4.$$

Прискорення тіла

$$a_x = \frac{dv}{dt};$$

$$a_x(t) = 12t - 1.$$

Коли прискорення дорівнює нулю,

$$12t - 1 = 0;$$

$$t = \frac{1}{12} \text{ с.}$$

У цей момент часу швидкість тіла

$$v_x = 6 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{12} - 4 = -4,04 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Відповідь: $-4,04 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 4. Рух тіла задано рівняннями $x(t) = 2t + 6$,
 $y(t) = t^2 - 4$. Визначити швидкість тіла в момент часу 2 с.

Дано:

$$x(t) = 2t + 6$$

$$y(t) = t^2 - 4$$

$$t = 2 \text{ с}$$

Розв'язання:

Проекції швидкості тіла на координатні

осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt};$$

v — ?

$$v_y = \frac{dy}{dt};$$

$$v_x(t) = 2;$$

$$v_y(t) = 2t.$$

У момент часу $t = 2c$: $v_x = 2 \frac{м}{с}$; $v_y = 4 \frac{м}{с}$.

Модуль швидкості тіла

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47 \left(\frac{м}{с}\right).$$

Відповідь: $4,47 \frac{м}{с}$.

Задача 5. Нормальне прискорення тіла дорівнює $12 \frac{м}{с^2}$, а тангенціальне $16 \frac{м}{с^2}$. Чому дорівнює модуль повного прискорення тіла? Який вектор утворює вектор повного прискорення з вектором швидкості?

Дано:

$$a_n = 12 \frac{м}{с^2}$$

$$a_\tau = 16 \frac{м}{с^2}$$

$a - ?$

$\alpha - ?$

Розв'язання:

Модуль повного прискорення тіла

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2};$$

$$a = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Напрямок швидкості тіла співпадає з напрямком тангенціального прискорення по дотичній до траєкторії в даній точці. Отже

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{a_n}{a_\tau} \right);$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{12}{16} \right) = 36,9^\circ.$$

Відповідь: $20 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; 36,9^\circ$.

Задача 6. Тіло починає рух рівноприскорено з прискоренням $2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Який шлях проходить тіло за п'ять секунд?

<p>Дано: $a = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ $t_1 = 4 \text{с}$ $t_2 = 5 \text{с}$</p>	<p>Розв'язання: Рівняння руху тіла під час рівноприскореного руху</p> $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$
<p>$S = ?$</p>	<p>Шлях, пройдений тілом,</p> $S = x_2 - x_1.$ <p>Координата тіла в момент часу t_1</p> $x_1 = x_0 + v_{0x}t_1 + \frac{a_x t_1^2}{2}.$

Координата тіла в момент часу t_2

$$x_2 = x_0 + v_{0x}t_2 + \frac{a_x t_2^2}{2}$$

$$\begin{aligned} S &= x_0 + v_{0x}t_2 + \frac{a_x t_2^2}{2} - x_0 - v_{0x}t_1 - \frac{a_x t_1^2}{2} = \\ &= v_{0x}(t_2 - t_1) + \frac{a_x}{2}(t_2^2 - t_1^2) \end{aligned}$$

За умови задачі $v_0 = 0$, отже

$$S = \frac{a_x}{2}(t_2^2 - t_1^2)$$

$$S = \frac{2}{2}(5^2 - 4^2) = 9(\text{м})$$

Відповідь: 9 м.

Задача 7. Тіло, що вільно падає, за останню секунду проходить третину всього шляху. З якої висоти впало тіло?

Дано:

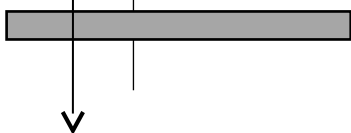
$$S = \frac{1}{3}h$$

$$\Delta t = 1\text{с}$$

l

y_1

y_2



Розв'язання:

у

Рівняння руху тіла під час вільного падіння

$$y(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Шлях, який проходить тіло за останню секунду

$$S = y_2 - y_1 = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g}{2}(t_2^2 - t_1^2).$$

У точці y_2 час t_2 дорівнює часу падіння $t_{\text{пад}}$. Тоді $t_1 = t_{\text{пад}} - \Delta t$. Отже

$$\begin{aligned} S &= \frac{g}{2} \left(t_{\text{пад}}^2 - (t_{\text{пад}} - \Delta t)^2 \right) = \\ &= \frac{g}{2} \left(t_{\text{пад}}^2 - t_{\text{пад}}^2 + 2t_{\text{пад}}\Delta t - (\Delta t)^2 \right) = \frac{g}{2} (2t_{\text{пад}}\Delta t - (\Delta t)^2) \end{aligned}$$

За умови $S = \frac{h}{3}$. Висота, з якої падає тіло,

$$h = \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2}.$$

Отже

$$\begin{aligned} \frac{gt_{\text{пад}}^2}{6} &= \frac{g}{2} (2t_{\text{пад}}\Delta t - (\Delta t)^2); \\ t_{\text{пад}}^2 - 6t_{\text{пад}} + 3(\Delta t)^2 &= 0; \\ D &= 36 - 4 \cdot 3(\Delta t)^2 = 36 - 12 = 24, \\ t_{\text{пад}1} &= \frac{6 + \sqrt{24}}{2} = 5,45(\text{с}); \end{aligned}$$

$$t_{\text{пад2}} = \frac{6 - \sqrt{24}}{2} = 0,55(\text{с}) \quad - \text{ не задовольняє умову задачі,}$$

оскільки цей інтервал часу менше 1 с.

Тоді висота, з якої впало тіло,

$$h = \frac{9,8 \cdot 5,45^2}{2} = 145,5(\text{м}).$$

Відповідь: 145,5 м.

Задача 8. Два тіла кинули одночасно з висоти 10 м: одне горизонтально зі швидкістю $15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, друге вертикально вгору зі швидкістю $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначити відстань між тілами через 4 с.

Дано:

$$v_{01} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

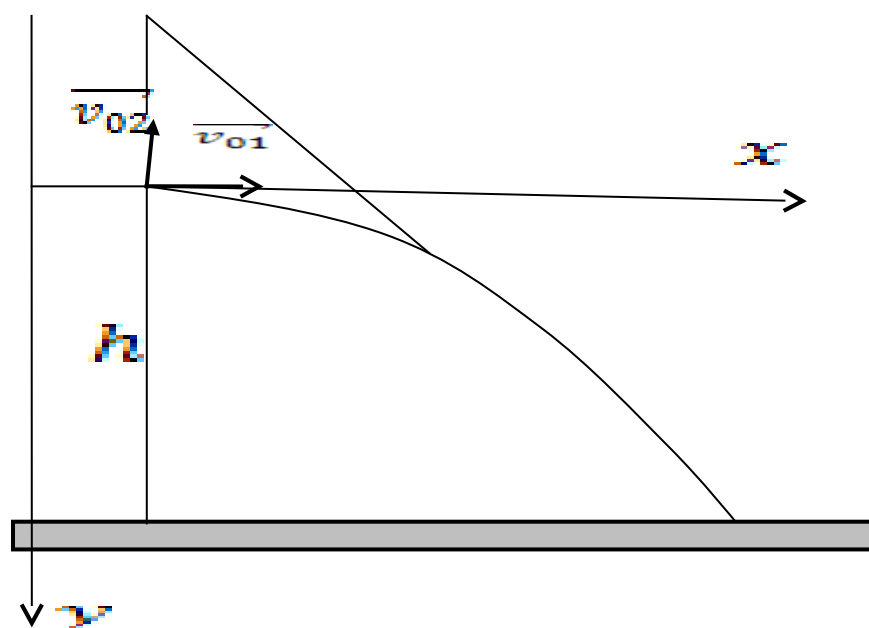
$$v_{02} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$h = 20\text{м}$$

$$t = 4\text{с}$$

$$S - ?$$

Розв'язання:



Для тіла, кинутого горизонтально, координати тіла залежать від часу відповідно до рівнянь

$$x_1 = v_{01}t;$$

$$y_1 = \frac{gt^2}{2};$$

$$x_2 = 0;$$

$$y_2 = -v_{02}t + \frac{gt^2}{2}.$$

Відстань між тілами

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$S = \sqrt{(0 - v_{01}t)^2 + \left(-v_{02}t + \frac{gt^2}{2} - \frac{gt^2}{2}\right)^2};$$

$$S = t\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2};$$

$$S = 4\sqrt{15^2 + 10^2} = 72,1(\text{м}).$$

Відповідь: 72,1 м.

Задача 9. Тіло кинуте горизонтально з висоти 20 м зі швидкістю 10 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Який вектор утворює вектор швидкості з горизонтом в момент часу 1 с?

Дано:

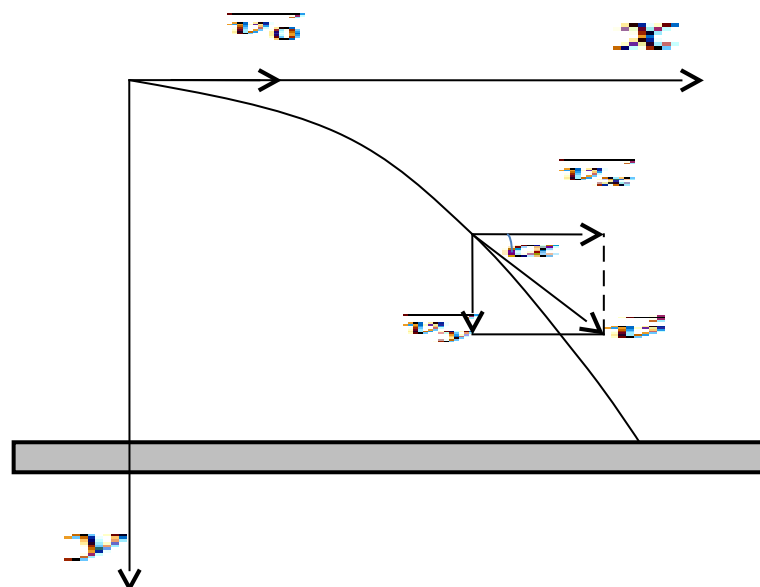
$$h = 20\text{м}$$

$$v_0 = 10\text{м/с}$$

$$t = 1\text{с}$$

$$\alpha - ?$$

Розв'язання:



Проекції швидкості тіла, кинутого горизонтально,

$$v_x = v_0;$$

$$v_y = gt.$$

Кут, який утворює вектор швидкості з горизонтом можна знайти за умовою:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{gt}{v_0} \right).$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{9,8 \cdot 1}{10} \right) = 44,4^\circ.$$

Відповідь: $44,4^\circ$.

Задача 10. Тіло кинуте під кутом 30° зі швидкістю $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Визначити нормальне і тангенціальне прискорення тіла в момент часу 1 с. Який радіус кривини траєкторії в даній точці?

Дано:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$t = 1 \text{ с}$$

Розв'язання:

Тангенціальне прискорення тіла

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

a_n —?

a_τ —?

R —?

Проекції швидкості тіла на координатні осі

$$v_x = v_0 \cos \alpha,$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

Модуль швидкості тіла

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2};$$

$$\begin{aligned} a_\tau &= \frac{d}{dt} \left(\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}} \cdot 2(v_0 \sin \alpha - gt) \cdot (-g) \\ &= - \frac{g(v_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}}. \end{aligned}$$

Повне прискорення тіла $\vec{a} = \vec{g}$, отже

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = \frac{g v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}}.$$

$$a_\tau = - \frac{9,8(10 \sin 30^\circ - 9,8 \cdot 1)}{\sqrt{10^2 \cos^2 30^\circ + (10 \sin 30^\circ - 9,8 \cdot 1)^2}} = 4,75 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right);$$

$$a_n = \frac{9,8 \cdot 10 \cos 30^\circ}{\sqrt{10^2 \cos^2 30^\circ + (10 \sin 30^\circ - 9,8 \cdot 1)^2}} = 7,42 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

З іншого боку, нормальне прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

Звідси радіус кривини траєкторії

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}{a_n}$$

$$R = \frac{10^2 \cos^2 30^\circ + (10 \sin 30^\circ - 9,8 \cdot 1)^2}{7,42} = 13,2(\text{м}).$$

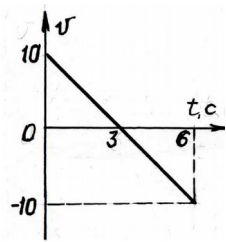
Відповідь: 13,2 м.

Задачі для самостійного розв'язання

1 Рух тіла задано рівнянням $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 0,14 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $D = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{с}^3}$. У який момент часу прискорення тіла дорівнюватиме $1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$? Знайти середнє прискорення за цей проміжок часу.

2 Залежність пройденого шляху від часу задано рівнянням $s = 6 - 3t + 3t^2$. Побудувати графік залежності шляху, швидкості та прискорення від часу в інтервалі від 0 до 5 с.

3 За графіком швидкості тіла записати кінематичне рівняння його руху. Початкова координата тіла 10 м. Розрахувати довжину шляху, пройденого тілом за 6 с.



4 Два автомобілі рухаються назустріч один одному: один зі швидкістю $36 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ та прискоренням $0,3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, а другий зі швидкістю $54 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ та прискоренням $0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через який час вони зустрінуться та який шлях пройде до зустрічі кожен з автомобілів, якщо початкова відстань між ними 250 м?

5 Рух тіла задано рівняннями $x = 4t^2 - 5t + 12$ та $y = 2t^3 - 7t^2 + 3t$. Визначити швидкість тіла в момент 4 с.

6 Рух тіла задано рівнянням $x = t^3 - 5t^2 + 6$. Визначити середню швидкість і середнє прискорення тіла за сьому секунду.

7 Три чверті шляху автомобіль проходить зі швидкістю $50 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а решту шляху зі швидкістю $70 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка середня швидкість автомобіля на всьому шляху?

8 Першу третину часу руху тіло рухалося зі швидкістю $12 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а залишок часу – зі швидкістю $15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначити середню швидкість тіла на всьому шляху.

9 Потяг проїхав 120 км на північ зі швидкістю $60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, потім повернув на захід та пройшов 160 км за 2 год. Яка середня шляхова швидкість та середня швидкість переміщення?

10 Якої швидкості набуває потяг за 10 с, якщо, рухаючись рівноприскорено зі стану спокою, він за 5 с проходить 10 м?

11 Тіло рухається рівноприскорено з прискоренням $5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Який шлях проходить тіло за восьму секунду?

12 Рухаючись рівноприскорено зі стану спокою, тіло пройшовши відстань 16 м, має швидкість $8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Яку швидкість воно матиме, пройшовши шлях 36 м?

13 Тіло вільно падає з висоти 90 м. За який час тіло пройде перший та останній метри свого шляху.

14 За останню секунду тіло, що вільно падає, пройшло десяту частину всього шляху. З якої висоти впало тіло?

15 З даху падають одна за одною дві краплі. Через 2 с після початку руху другої краплі відстань між ними становила 25 м. На скільки раніше почала рух перша крапля?

16 Тіло, кинуте горизонтально зі швидкістю $15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, впало на землю через 4 с. З якої висоти впало тіло? Яка дальність польоту? Чому дорівнює переміщення тіла?

17 Камінь, кинутий горизонтально, впав на землю через 5 с на відстані 5 м по горизонталі від місця кидка. З якою швидкістю його кинули? Який кут утворить вектор швидкості з горизонтом в момент падіння на землю?

18 Тіло кинуто під кутом 30° до горизонту. Знайти нормальне та тангенціальне прискорення тіла в початковий момент часу.

19 У якій точці траєкторії тіла, кинутого під кутом до горизонту, його нормальне прискорення буде максимальним? Опір повітря не враховувати.

20 Тіло кинуто зі швидкістю $20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ під кутом 60° до горизонту. Розрахувати радіус кривини траєкторії у вищій точці.

ТЕМА 2. Динаміка

Після розгляду даної теми студент повинен **знати поняття, визначення та закони:** динаміка, інерція, інерціальні системи відліку, неінерціальні системи відліку, перший закон Ньютона, сила, принцип незалежності сил, рівнодійна, інертність, маса, другий закон Ньютона, третій закон Ньютона, імпульс тіла, другий закон Ньютона в імпульсній формі, вага тіла.

Студент повинен **вміти** виконувати схематичний рисунок, на якому вказані вектори всіх сил, що діють на тіло, скласти основне рівняння динаміки для випадку, що описується в даній задачі, знаходити характеристики руху тіла, застосовуючи основне рівняння динаміки та допоміжні рівняння.

Основні формули

Рівнодійна сил, прикладених до тіла,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Другий закон Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Імпульс тіла

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Другий закон Ньютона в імпульсній формі

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Третій закон Ньютона

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Закон всесвітнього тяжіння

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Сила тяжіння

$$F = mg.$$

Вага тіла

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

Закон Гука

$$F = -kx.$$

Сила тертя

$$F = \mu N.$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Тіло масою 500 г рухається за законом $x = 2t^3 + 3t - 6$. Визначити силу, яка діє на тіло в момент часу 1 с.

Дано:
 $m = 500\text{г} = 0,5\text{кг}$
 $x = 2t^3 + 3t - 6$
 $t = 1\text{с}$

$F - ?$

Розв'язання:

За другим законом Ньютона,

$$a_x = \frac{F_x}{m}.$$

Звідси проекція сили на вісь x

$$F_x = ma_x.$$

Прискорення тіла

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$a_x = 12t.$$

У момент часу 1 с $a_x = 12 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Тоді $F_x = 0,5 \cdot 12 = 6(\text{Н})$.

Модуль сили $F = 6\text{Н}$.

Відповідь: 6 Н.

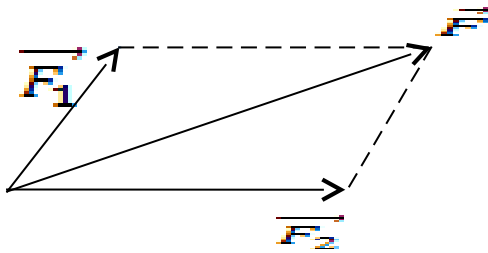
Задача 2. На тіло масою 400 г діють сили 20 Н і 50 Н, кут між напрямками яких становить 60° . Визначити величину прискорення тіла.

Дано:
 $m = 400\text{г} = 0,4$

кг
 $F_1 = 20\text{Н}$
 $F_2 = 50\text{Н}$
 $\alpha = 60^\circ$

$a - ?$

Розв'язання:



Напрямок рівнодійної сил, прикладених до тіла, знайдемо побудовою за правилом паралелограма.

Модуль рівнодійної за теоремою косинусів

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Отже прискорення тіла

$$a = \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\alpha}}{m};$$

$$a = \frac{\sqrt{20^2 + 50^2 - 2 \cdot 20 \cdot 50 \cos 60^\circ}}{0,4} = 109 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

Відповідь: $109 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 3. На сталюму тросі закріплено вантаж масою 200 кг. З яким прискоренням можна піднімати цей вантаж, якщо трос витримує максимальне навантаження 2 кН?

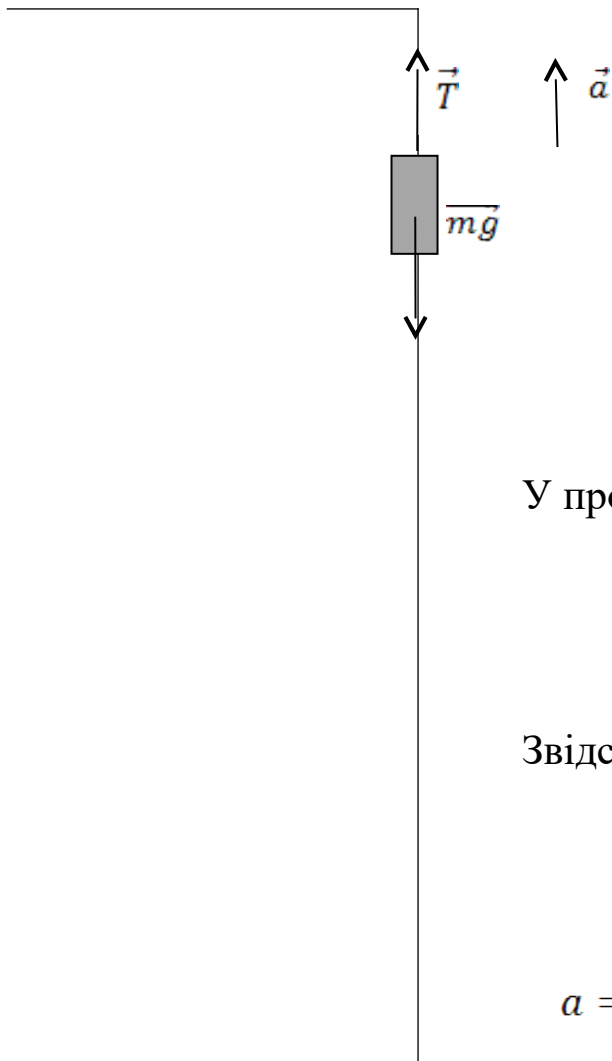
Дано:
 $m = 200\text{кг}$
 $F = 2\text{кН} = 2 \cdot 10^3\text{Н}$
 $a - ?$

у

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки для тягарця

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$



У проекціях на координатну вісь Oy

$$ma = -mg + T;$$

Звідси прискорення тіла

$$a = \frac{T}{m} - g;$$

$$a = \frac{2 \cdot 10^3}{200} - 9,8 = 0,2 \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right).$$

Відповідь: $0,2 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$.

Задача 4. Вагон масою 20 т рухається зі швидкістю $54 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Вагон зупиняється, пройшовши відстань 600 м. Визначити коефіцієнт тертя вагона об рейки.

Дано:

$$m = 20\text{т}$$

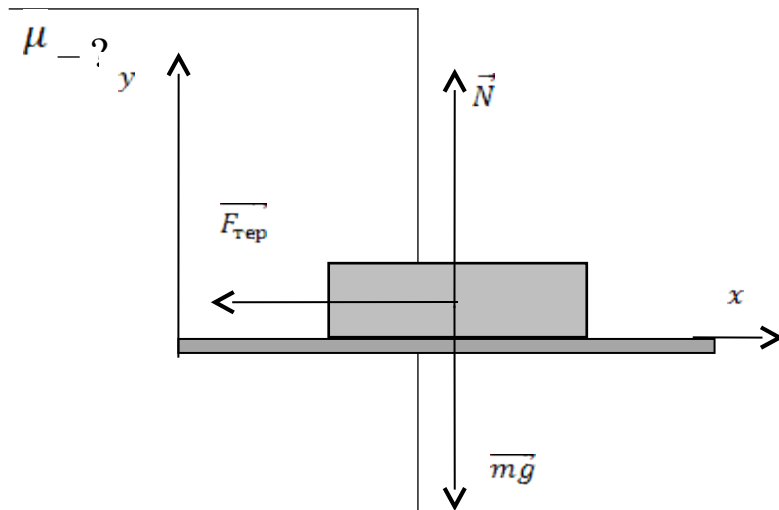
$$v_0 = 54 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 15 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

$$S = 600\text{м}$$

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки для вагона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}};$$



У проекціях на координатні осі

$$Ox: ma_x = -F_{\text{тер}}; \quad (2.1)$$

$$Oy: 0 = -mg + N. \quad (2.2)$$

Сила тертя $F_{\text{тер}} = \mu N$.

З виразу (2.2) $N = mg$, тоді

$F_{\text{тер}} = \mu mg$. Отже вираз (2.1) набуде вигляду

$$ma_x = -\mu mg. \quad (2.3)$$

Вважаючи рух тіла рівноприскореним, запишемо рівняння для швидкості та пройденого шляху:

$$v_x = v_{0x} + a_x t;$$

$$S = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

За умови $v_x = 0$, тоді $v_{0x} + a_x t = 0$,

звідси $t = -\frac{v_{0x}}{a_x}$. Отже

$$S = v_{0x} \left(-\frac{v_{0x}}{a_x}\right) + \frac{a_x}{2} \left(-\frac{v_{0x}}{a_x}\right)^2 = -\frac{v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Проекція прискорення тіла

$$a_x = -\frac{v_{0x}^2}{2S}.$$

Тоді вираз (2.3) набуде вигляду

$$-m \frac{v_{0x}^2}{2S} = -\mu mg;$$

$$\frac{v_{0x}^2}{2S} = \mu g.$$

Звідси коефіцієнт тертя

$$\mu = \frac{v_{0x}^2}{2gS}.$$

$$\mu = \frac{15^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 600} = 0,019.$$

Відповідь: 0,019.

Задача 5. Два тягарці масами 2 кг та 3 кг закріплені на нитці, що перекинута через нерухомий невагомий блок. Визначити прискорення, з яким рухаються тіла.

Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

$$m_2 = 3 \text{ кг}$$

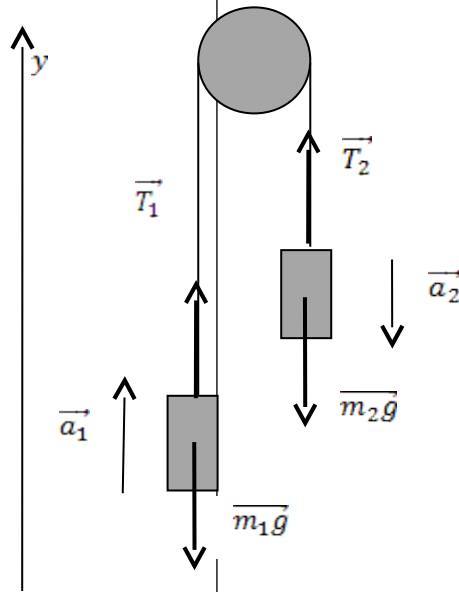
$a = ?$

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки для тягарців

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1;$$

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2.$$



У проєкціях на координатну вісь Oy

$$m_1 a_1 = -m_1 g + T_1;$$

$$-m_2 a_2 = -m_2 g + T_2.$$

Оскільки блок нерухомий і невагомий, то

$$a_1 = a_2 = a;$$

$$T_1 = T_2 = T.$$

Отже

$$m_1 a = -m_1 g + T; \quad (2.4)$$

$$-m_2 a = -m_2 g + T. \quad (2.5)$$

Віднімаючи вираз (2.5) від виразу (2.4), отримаємо

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1).$$

Звідси прискорення

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

$$a = \frac{9,8(3 - 2)}{3 + 2} = 1,96 \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right).$$

Відповідь: $1,96 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$.

Задача 6. Тіло масою 500 г рухається під впливом сили 12 Н вгору по похилій площині з кутом нахилу 30° . Коефіцієнт тертя тіла о площину 0,1. Визначити прискорення тіла.

Дано:

$$m = 500 \text{ г} = 0,5 \text{ кг}$$

$$F_{\text{тяги}} = 12 \text{ Н}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

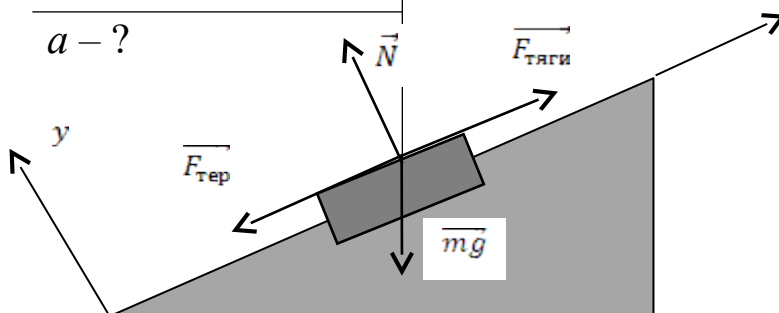
$$\mu = 0,1$$

$$a = ?$$

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки для тіла:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + \vec{F}_{\text{тяги}},$$



У проекціях на координатні осі

$$Ox: ma = F_{\text{тяги}} - F_{\text{тер}} - mg \sin \alpha; \quad (2.6)$$

$$Oy: 0 = N - mg \cos \alpha. \quad (2.7)$$

Сила тертя $F_{\text{тер}} = \mu N$.

Сила реакції опори з виразу (2.7)

$N = mg \cos \alpha$, тоді $F_{\text{тер}} = \mu g \cos \alpha$. Тепер

вираз (2.6) має вигляд

$$= F_{\text{тяги}} - mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Звідси прискорення тіла

$$a = \frac{F_{\text{тяги}}}{m} - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha);$$

$$a = \frac{12}{0,5} - 9,8(\sin 30^\circ + 0,1 \cos 30^\circ) = 0,25 \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right).$$

Відповідь: $0,25 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$.

Задача 7. Автомобіль масою 2 т проходить опуклий міст, радіус кривини якого 40 м, зі швидкістю $54 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Визначити вагу автомобіля у верхній точці мосту.

Дано:

$$m = 2\text{т} = 2 \cdot 10^3 \text{кг}$$

$$R = 40\text{м}$$

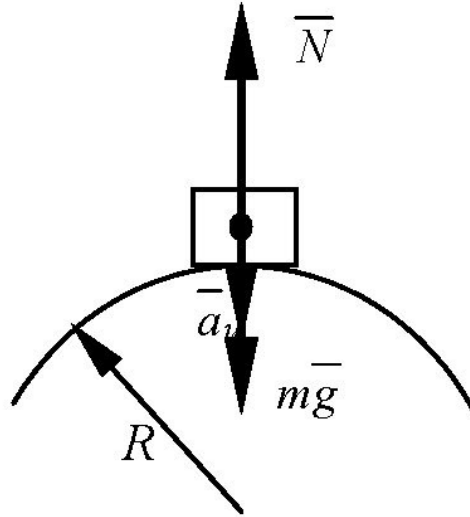
$$v = 54 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$P = ?$

Розв'язання:

Запишемо рівняння динаміки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$



У проекціях на вісь Oy

$$ma = -N + mg$$

Тіло має доцентрове прискорення

$$a_{\text{доц}} = \frac{v^2}{R}$$

Тоді

$$m \frac{v^2}{R} = -N + mg$$

Звідси

$$N = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right)$$

За третім законом Ньютона

$$|\vec{N}| = |\vec{P}|,$$

Тому вага тіла

$$P = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right)$$

$$P = 2 \cdot 10^3 \left(9,8 - \frac{15^2}{40} \right) = 8,35 \cdot 10^3 (H)$$

Відповідь: $8,35 \cdot 10^3$ Н.

Задача 8. З якою швидкістю дрезина може виконувати поворот радіусом 100 м, якщо відстань між колесами дрезини 1,5 м, а одна з рейок вище другої на 5 см?

Дано:

$$R = 100 \text{ м}$$

$$l = 1,5 \text{ м}$$

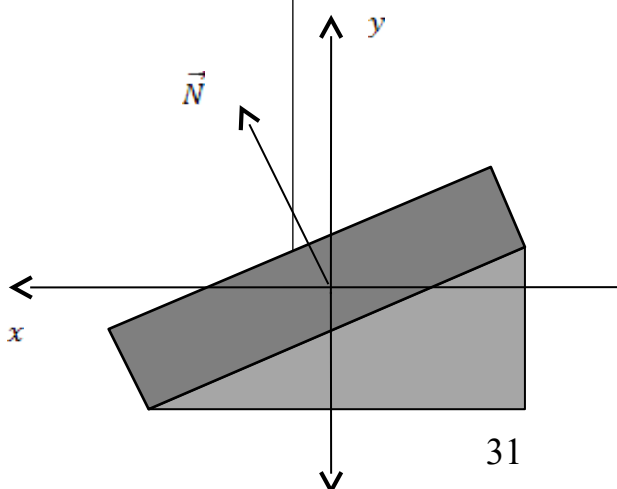
$$h = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$$

$$v - ?$$

Розв'язання:

Для дрезини основне рівняння динаміки має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N},$$



\overline{mg}

У проекціях на осі координат

$$Ox: ma = N \sin \alpha; \quad (2.8)$$

$$Oy: 0 = N \cos \alpha - mg. \quad (2.9)$$

Дрезина має доцентрове прискорення

$$a_{\text{доц}} = \frac{v^2}{R};$$

Тоді вираз (2.8) набуде вигляду

$$m \frac{v^2}{R} = N \sin \alpha.$$

З виразу (2.9) маємо $N = \frac{mg}{\cos \alpha}$. Отже

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{mg}{\cos \alpha} \sin \alpha = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\frac{v^2}{R} = g \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Отримуємо швидкість дрезини

$$v = \sqrt{gR \cdot \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l};$$

$$v = \sqrt{\frac{gRh}{l}};$$

$$v = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 100 \cdot 0,05}{1,5}} = 1,14 \left(\frac{\text{М}}{\text{с}}\right).$$

Відповідь: $1,14 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.

Задача 9. На якій висоті над поверхнею Землі повинен знаходитися космічний корабель, щоб сили притягання з боку Землі та Місяця були врівноважені?

Дано:
 $F_3 = F_M$

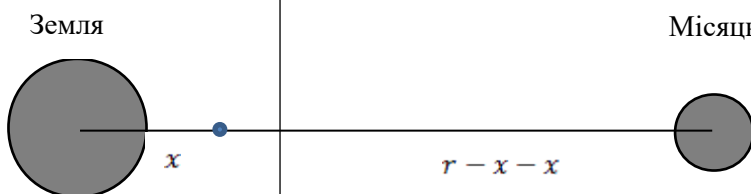
$h - ?$

Розв'язання:

На корабель діють сили притягання з боку Землі та Місяця, які визначаються за законом всесвітнього тяжіння

$$F_3 = G \frac{m_3 m}{x^2};$$

$$F_M = G \frac{m_M m}{(r-x)^2}.$$



За умови ці сили дорівнюють

$$G \frac{m_3 m}{x^2} = G \frac{m_M m}{(r-x)^2};$$

$$m_3 (r-x)^2 = m_M x^2;$$

$$r^2 - 2rx + x^2 = \frac{m_M}{m_3} x^2;$$

$$\left(\frac{m_M}{m_3} - 1\right) x^2 + 2rx - r^2 = 0 ;$$

$$D = 4r^2 + 4r^2 \left(\frac{m_M}{m_3} - 1\right) = 4r^2 \frac{m_M}{m_3} ;$$

$$x_1 = \frac{-2r + 2r \sqrt{\frac{m_M}{m_3}}}{\left(\frac{m_M}{m_3} - 1\right)} = \frac{r}{\sqrt{\frac{m_M}{m_3} + 1}} ;$$

$$x_2 = \frac{-2r - 2r \sqrt{\frac{m_M}{m_3}}}{\left(\frac{m_M}{m_3} - 1\right)} = -\frac{r}{\sqrt{\frac{m_M}{m_3} - 1}} \quad \text{— не задовольняє}$$

умову задачі.

Висота над поверхнею Землі

$$h = x_1 - R = \frac{r}{\sqrt{\frac{m_M}{m_3} + 1}} - R$$

$$h = \frac{3,84 \cdot 10^8}{\sqrt{\frac{7,4 \cdot 10^{22}}{6 \cdot 10^{24}} + 1}} - 6,4 \cdot 10^6 = 3,39 \cdot 10^8 \text{ (м)}$$

Відповідь: $3,39 \cdot 10^8$ м.

Задача 10. М'яч масою 300 г, що летить зі швидкістю $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, абсолютно пружно вдаряється об стіну. У момент удару швидкість м'яча спрямована під кутом 60° до перпендикуляра до її поверхні. Визначити середню силу удару, якщо він триває 0,01 с.

Дано:
 $m = 300 \text{ г} = 0,3 \text{ кг}$

Розв'язання:
 Другий закон Ньютона в імпульсній

$$v_0 = 10 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\Delta t = 0,01 \text{с}$$

$$F_x - ?$$

формі

$$\vec{F} = \frac{\vec{\Delta p}}{\Delta t}$$

Зміна імпульсу тіла

$$\vec{\Delta p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

x

У проекціях на вісь Ox

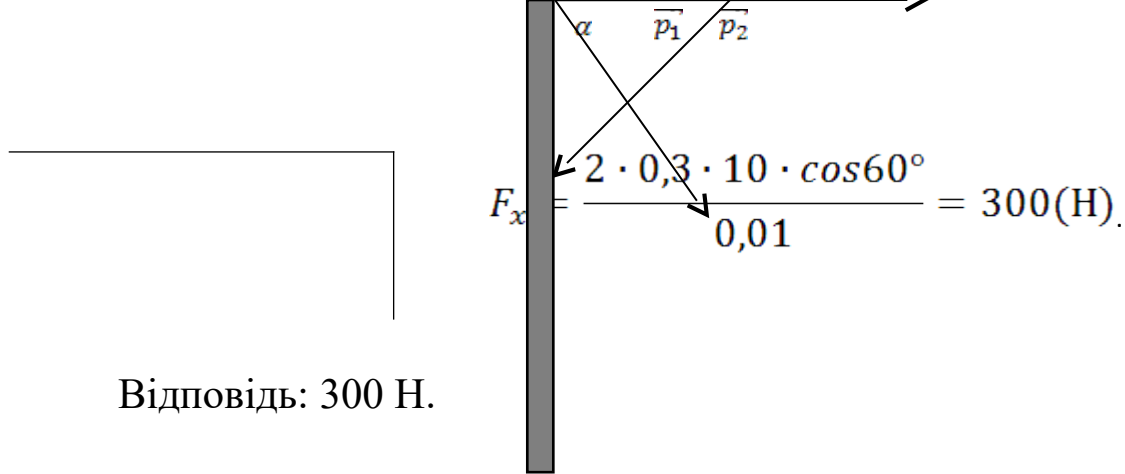
$$\begin{aligned} \Delta p_x &= m(v_2 \cos \alpha + v_1 \cos \alpha) = \\ &= m(v_2 + v_1) \cos \alpha \end{aligned}$$

Оскільки удар абсолютно пружний, модуль швидкості тіла залишається незмінним, тому

$$\Delta p_x = 2m v \cos \alpha$$

Тоді проекція сили

$$F_x = \frac{2m v \cos \alpha}{\Delta t} ;$$



Відповідь: 300 Н.

Задачі для самостійного розв'язання

1 Тіло масою 200 г рухається за законом $x = 6 - 2t + 5t^2 - t^3$. Знайти силу, яка діє на тіло наприкінці третьої секунди руху.

2 Сила F надає тілу масою m_1 прискорення $a_1 = 2 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$, а тілу масою m_2 прискорення $a_2 = 3 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$. Яке прискорення отримають обидва тіла під дією тієї самої сили, якщо їх об'єднати?

3 Потяг масою 6000 т за 10 с зменшує свою швидкість від $72 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ до $36 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Визначити гальмівну силу.

4 Кулька, яка летить зі швидкістю $20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ перпендикулярно до стінки, пружно відбивається від неї. Знайти імпульс сили, отриманий стінкою під час удару.

5 На брусок масою 2 кг діє сила 10 Н, спрямована під кутом 60° до горизонту. З яким прискоренням рухається брусок по горизонтальній поверхні, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,1?

6 Два тіла масами 1 кг та 2 кг з'єднані ниткою, перекинutoю через нерухомий невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються тіла та силу натягу нитки.

7 Два тягарці масами 500 г та 600 г зв'язані ниткою, яка перекинута через нерухомий невагомий блок. На більший тягарець поклали додатковий вантаж 100 г. З яким прискоренням будуть рухатися тягарці? З якою силою додатковий вантаж тисне на більший тягарець?

8 Тіла масами 200 г, 250 г і 300 г зв'язані нитками в ланцюг, що має змогу рухатися по гладкій поверхні. До меншого тіла прикладена в горизонтальному напрямку сила 20 Н. З яким прискоренням будуть рухатися тіла? Знайти сили натягу ниток.

9 Тіло ковзає по похилій площині, що утворює кут 45° з горизонтом. На шляху 36,4 см тіло набуває швидкість $2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Знайти коефіцієнт тертя тіла о площину.

10 Невагомий блок закріплений у вершині похилої площини, що утворює з горизонтом кут 30° . Дві гирі масами 1 кг з'єднані ниткою, перекинutoю через блок. Знайти прискорення, з яким рухаються гирі. Тертям у блоці та гирі з похилою площиною знехтувати.

11 Ящик, зісковзуючи по похилій площині з кутом нахилу 30° , набуває в кінці площини швидкість $8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ при коефіцієнті тертя 0,2. Визначити висоту похилої площини.

12 У кабіні ліфта встановлені пружинні терези, на яких підвішено тіло масою 1 кг. Якими будуть покази терезів, якщо ліфт: а) рухається вгору з прискоренням $4,9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; б) рухається вниз з прискоренням $1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$?

13 З якою швидкістю проходить гойдалка нижню точку траєкторії, якщо вага людини масою 50 кг в цій точці становить 100 Н? Довжина підвісу гойдалки 2,5 м.

14 Середня відстань між центрами Землі та Місяця становить приблизно 384000 км. У якій точці відрізка Земля-Місяць сила гравітаційної взаємодії космічного корабля, який летить від Землі до Місяця, з обома космічними тілами буде однаковою? Маса Місяця в 81 раз менше маси Землі.

15 У скільки разів зменшиться лінійна швидкість руху штучного супутника Землі, якщо він переходить з орбіти, яка відповідає висоті 200 км над поверхнею Землі, на орбіту, що знаходиться на висоті 500 км?

16 З якою швидкістю може рухатися автомобіль на повороті радіусом 100 м, якщо коефіцієнт тертя між поверхнею дороги та шинами автомобіля дорівнює 0,5?

17 Визначити радіус заокруглення трамвайної колії шириною 1 м, якщо зовнішня рейка розміщена на 2,5 см вище $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ внутрішньої. Трамвай проходить заокруглення зі швидкістю 18 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

18 Шосе має віраж з нахилом 10° та радіусом кривини 125 м. На яку максимальну швидкість розраховано віраж?

19 Увігнутий міст, радіус кривизни якого 80 м, витримує максимальне навантаження 40 т. З якою швидкістю може рухатися по ньому автомобіль масою 30 т, щоб він не зруйнувався?

20 Конічний маятник, довжина підвісу якого 1,15 м, обертається з періодом 2 с. Визначити кут, який утворює підвіс з вертикаллю.

ТЕМА 3. Закони збереження в механіці

Після вивчення даної теми студент повинен **знати основні поняття, закони та визначення**: система тіл, замкнена система, центр мас системи, імпульс системи, закон збереження імпульсу, механічна робота, потужність, силове поле, потенціальне силове поле, консервативні сили, основна властивість потенціального силового поля, потенціальна енергія, теорема про потенціальну енергію, кінетична енергія, теорема про кінетичну енергію, повна механічна енергія, дисипативні сили, закон збереження повної механічної енергії, закон збереження енергії в системі з дисипативними силами.

Студент повинен **вміти** обчислювати положення центра мас, знаходити імпульс системи тіл, обчислювати роботу різних сил, застосовуючи як прямі формули для обчислень, так і відповідні теореми, знаходити значення кінетичної та потенціальної енергії.

Основні формули

Положення центра мас системи

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m} .$$

Імпульс системи тіл

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i .$$

Механічна робота

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r} .$$

Робота сили тяжіння

$$A = mgh_1 - mgh_2 .$$

Робота сили пружності

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} .$$

Потужність

$$P = \frac{dA}{dt} ;$$

$$P = \vec{F} \vec{v} = Fv \cos \alpha .$$

Потенціальна енергія тіла в гравітаційному силовому полі

$$W_p = mgh ;$$

Потенціальна енергія тіла на пружині

$$W_p = \frac{kx^2}{2} .$$

Теорема про потенціальну енергію

$$A_k = W_{p1} - W_{p2} .$$

Зв'язок сили та потенціальної енергії

$$\vec{F} = -gradW_p .$$

Кінетична енергія

$$W_k = \frac{mv^2}{2} .$$

Теорема про кінетичну енергію

$$A = W_{k2} - W_{k1} .$$

Повна механічна енергія

$$W = W_k + W_p .$$

Закон збереження енергії в системі з дисипативними силами

$$A_d = W_2 - W_1 .$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Людина масою 60 кг біжить зі швидкістю 9 год

назустріч візку масою 80 кг, що рухається зі швидкістю 3 $\frac{м}{с}$, і застрибує на нього. З якою швидкістю і в якому напрямку буде рухатися людина на візку?

Дано:

$$m_1 = 60 \text{ кг}$$

$$v_1 = 9 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

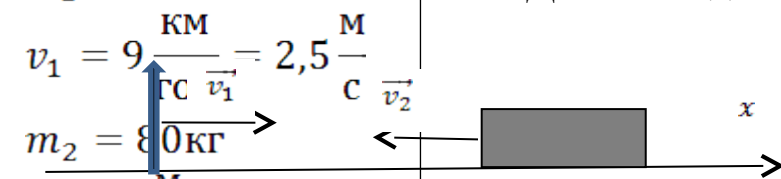
$$m_2 = 80 \text{ кг}$$

$$v_2 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

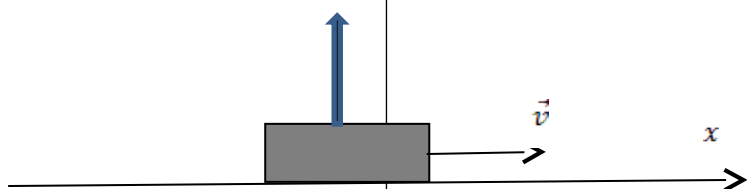
$$v - ?$$

Розв'язання:

До взаємодії



Після взаємодії



Імпульс системи до взаємодії

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2; \text{ імпульс системи після}$$

$$\text{взаємодії } \vec{p}' = (m_1 + m_2) \vec{v}.$$

Закон збереження імпульсу

$$\vec{p} = \vec{p}';$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}.$$

У проекціях на вісь Ox

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_x.$$

Звідси проекція загальної швидкості людини та візка

$$v_x = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_x = \frac{60 \cdot 2,5 - 80 \cdot 3}{60 + 80} = -0,64 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

Оскільки проекція швидкості від'ємна, результуюча швидкість спрямована в напрямку початкового руху візка.

Відповідь: $-0,64 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2. Потенціальна енергія тіла визначається виразом

$$W_p = 2x + 8y^2 + z^3$$

. Визначити роботу, яку здійснюють сили

даного силового поля під час переміщення тіла з точки (0; 1; 2) в точку (-2; -1; 0). Яка сила діє на тіло в початковій і кінцевій точках?

Дано:

$$W_p = 2x + 8y^2 + z^3$$

A —?

F_1 —?

F_2 —?

Розв'язання:

За теоремою про потенціальну енергію,

$$A = W_{p1} - W_{p2}$$

Потенціальна енергія в початковій точці

$$W_{p1} = 2 \cdot 0 + 8 \cdot 1^2 + 2^3 = 16(\text{Дж}).$$

Потенціальна енергія в кінцевій точці

$$W_{p2} = 2 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1)^2 + 0^3 = 4(\text{Дж}).$$

Отже робота сил поля

$$A = 16 - 4 = 12(\text{Дж}).$$

Сила, яка діє на частинку, пов'язана з потенціальною енергією співвідношенням

$$\vec{F} = -\text{grad}W_p;$$

Отже проєкції вектора сили на координатні осі

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -2;$$

$$F_y = -16y;$$

$$F_z = -3z^2;$$

Тоді в початковій точці

$$F_x = -2(\text{Н}); F_y = -16 \cdot 1 = -16(\text{Н});$$

$$F_z = -3 \cdot 2^2 = -12(\text{Н}).$$

У кінцевій точці

$$F_x = -2(\text{Н}); F_y = -16 \cdot (-1) = 16(\text{Н});$$

$$F_z = -3 \cdot 0^2 = 0.$$

Модуль сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

$$F_1 = \sqrt{(-2)^2 + (-16)^2 + (-12)^2} = 20,1(\text{Н})$$

$$F_2 = \sqrt{(-2)^2 + 16^2 + 0^2} = 16,1(\text{Н});$$

Відповідь: 12 Дж; 20,1 Н; 16,1 Н.

Задача 3. Тіло масою 200 г кинуто вертикально вгору зі швидкістю $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначити його кінетичну та потенціальну енергію через 1 с.

Дано:

$$v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$m = 200\text{г} = 0,2\text{кг}$$

$W_k - ?$

$W_p - ?$

Розв'язання:

У початковій точці кінетична енергія тіла

$$W_{k0} = \frac{mv_0^2}{2};$$

$$W_{k0} = \frac{0,2 \cdot 10^2}{2} = 10(\text{Дж})$$

Візьмемо за початок відліку висоти точку, з якої кинули тіло, тоді потенціальна енергія тіла в початковій точці дорівнює нулю: $W_{p0} = 0$.

У кінцевій точці $W_k = \frac{mv^2}{2}$.

Швидкість тіла, кинутого вертикально вгору, залежить від часу за законом

$$v = v_0 - gt$$

Тоді $W_k = \frac{m(v_0 - gt)^2}{2}$.

$$W_k = \frac{0,2(10-9,8 \cdot 1)^2}{2} = 0,004(\text{Дж})$$

За законом збереження енергії,

$$W_{k0} + W_{p0} = W_k + W_p$$

Потенціальна енергія в кінцевій точці

$$W_p = W_{k0} + W_{p0} - W_k;$$

$$W_p = 10 + 0 - 0,004 = 9,996(\text{Дж})$$

Відповідь: 0,004 Дж; 9,996 Дж.

Задача 4. Під дією сили 12 Н пружина стиснута на 3 см. Яку роботу слід здійснити, щоб стиснути пружину ще на 2 см?

Дано:

$$F = 12\text{Н}$$

$$x_1 = 3\text{см} = 0,03\text{м}$$

$$\Delta x = 2\text{см} = 0,02\text{м}$$

А-?

Розв'язання:

За законом Гука, $F = -kx$.

Звідси коефіцієнт жорсткості пружини

$$k = \left| -\frac{F}{x_1} \right|$$

$$k = \left| -\frac{12}{0,03} \right| = 400 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right)$$

Кінцева довжина пружини

$$x_2 = x_1 + \Delta x;$$

$$x_2 = 0,03 + 0,02 = 0,05(\text{м})$$

Робота сили пружності

$$A_{\text{п}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

Робота зовнішніх сил

$$A = -A_{\text{п}} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2);$$

$$A = \frac{400}{2}(0,05^2 - 0,03^2) = 0,32(\text{Дж}).$$

Відповідь: 0,32 Дж.

Задача 5. За який час підйомний кран потужністю 5 кВт піднімає вантаж масою 2 т на висоту 10 м?

Відповідь: 39,2 с.

Задача 6. Під час піднімання мармурової статуї з озера глибиною 10 м була здійснена робота 34 Дж. Яка маса статуї?

Густина мармуру $2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Дано:

$$A = 34 \text{кДж} = 34 \cdot 10^3 \text{Дж}$$

$$h = 10 \text{м}$$

$$\rho_{\text{м}} = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\rho_{\text{в}} = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$m - ?$$

Розв'язання:

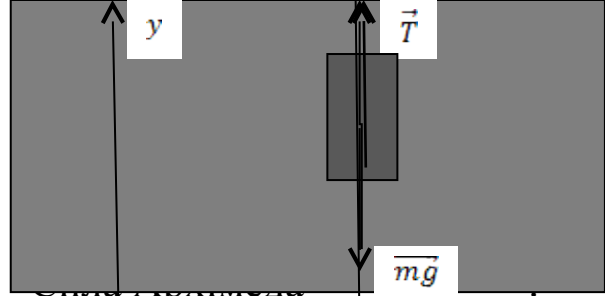
Вважаючи піднімання статуї рівномірним, запишемо основне рівняння динаміки:

$$\vec{m\vec{g}} + \vec{F}_{\text{тяги}} + \vec{F}_A = 0.$$

\vec{F}_A

У проекціях на вісь Oy

$$-mg + F_{\text{тяги}} + F_A = 0.$$



Об'єм тіла $V = \frac{m}{\rho_M}$, тоді

$$F_A = \rho_B g \frac{m}{\rho_M}$$

Отже $F_{\text{ТЯГИ}} = mg \left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_M}\right)$

Робота сили тяги

$$A = F_{\text{ТЯГИ}} h = mgh \left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_M}\right)$$

Звідси маса статуї

$$m = \frac{A}{gh \left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_M}\right)}$$

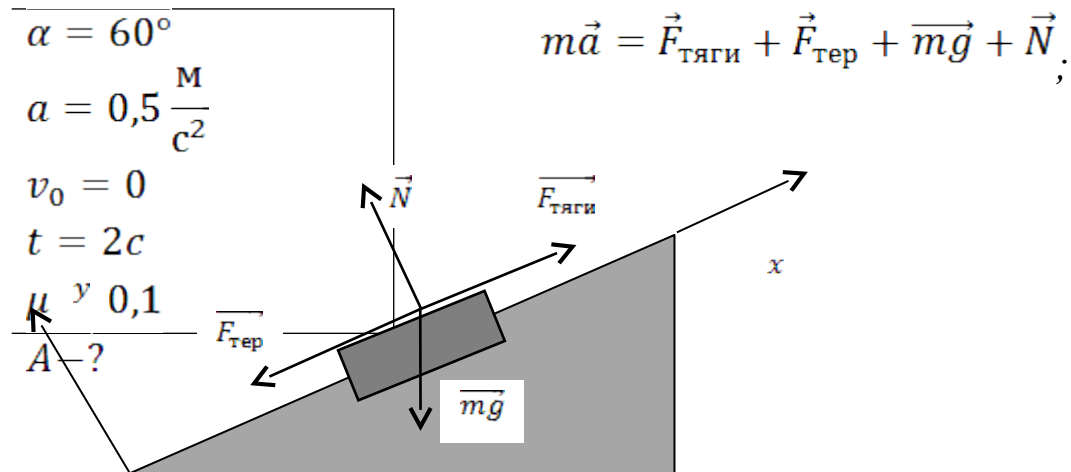
$$m = \frac{34 \cdot 10^3}{9,8 \cdot 10 \cdot \left(1 - \frac{1000}{2700}\right)} = 551(\text{кг})$$

Відповідь: 551 кг.

Задача 7. Тіло масою 5 кг рухається по похилій площині з кутом нахилу 60° з постійним прискоренням $0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Яку роботу здійснює сила тяги за перші 2 с руху, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,1.

Дано:
 $m = 5\text{кг}$

Розв'язання:
Основне рівняння динаміки



У проєкціях на координатні осі

$$Ox: \quad ma = F_{\text{тяги}} - F_{\text{тер}} - mg\sin\alpha; \quad (3.1)$$

$$Oy: \quad 0 = N - mg\cos\alpha. \quad (3.2)$$

Сила тертя $F_{\text{тер}} = \mu N$.

З виразу (3.2) $N = mg\cos\alpha$, тоді

$$F_{\text{тер}} = \mu mg\cos\alpha.$$

Тепер вираз (3.1) набуде вигляду

$$ma = F_{\text{тяги}} - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

Звідси сила тяги

$$F_{\text{тяги}} = m(a + g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)).$$

Під час рівноприскореного руху шлях, пройдений тілом,

$$S = \frac{at^2}{2}.$$

Робота сили тяги

$$A = F_{\text{тяги}} \cdot S,$$

$$A = \frac{mat^2}{2} (a + g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha));$$

$$A = \frac{5 \cdot 0,5 \cdot 2^2}{2} \times \left(0,5 + 9,8 \left(0,1 \cdot 0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 47,4 (\text{Дж})$$

Відповідь: 47,4 Дж.

Задача 8. Тіло масою 8 кг зісковзує з похилої площини висотою 60 см і має біля її основи швидкість $2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Яку роботу здійснює сила опору руху?

Дано:

$$m = 8 \text{ кг}$$

$$v = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$h = 60 \text{ см} = 0,6 \text{ м}$$

$A_{\text{оп}} - ?$

Розв'язання:

Закон збереження енергії в системі з дисипативними силами

$$A_{\text{оп}} = W_2 - W_1.$$

Механічна енергія тіла в початковій точці $W_1 = W_{k1} + W_{p1}$.

Вважаючи початкову швидкість тіла рівною нулю, маємо $W_{k1} = 0$;

потенціальна енергія тіла $W_{p1} = mgh$,

тоді $W_1 = mgh$.

Механічна енергія тіла в кінцевій точці $W_2 = W_{k2} + W_{p2}$. Кінетична

енергія в кінцевій точці $W_{k2} = \frac{mv^2}{2}$;

потенціальна енергія в кінцевій точці

$W_{p2} = 0$. Тоді

$$W_{p2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Робота дисипативних сил

$$A_{\text{оп}} = \frac{mv^2}{2} - mgh = m \left(\frac{v^2}{2} - gh \right);$$

$$A_{\text{оп}} = 8 \left(\frac{2^2}{2} - 9,8 \cdot 0,6 \right) = -31,04 (\text{Дж}).$$

Відповідь: -31,04 Дж.

Задача 9. Камінь масою 2 кг падає протягом 4 с і в момент падіння має швидкість $16 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Початкова швидкість каменя дорівнює нулю. Яку роботу виконує сила опору повітря?

Дано:

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$v_0 = 0$$

$$t = 4 \text{ с}$$

$$v = 16 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$A_{\text{оп}} = ?$$

Розв'язання:

Швидкість тіла змінюється за законом

$$v = v_0 + at = at.$$

Звідси прискорення тіла

$$a = \frac{v}{t}.$$

Висота, з якої падає камінь,

$$h = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2}.$$

Кінетична енергія в початковій
точці $W_{k1} = \frac{mv_0^2}{2} = 0$; потенціальна

енергія в початковій точці

$$W_{p1} = mgh = \frac{mgvt}{2}. \text{ Повна механічна}$$

енергія каменя в початковій точці

$$W_1 = W_{k1} + W_{p1} = \frac{mgvt}{2}.$$

Кінетична енергія в кінцевій точці

$$W_{k2} = \frac{mv^2}{2}; \text{ потенціальна енергія в}$$

кінцевій точці $W_{p2} = 0$. Повна

механічна енергія каменя в кінцевій

$$\text{точці } W_2 = W_{k2} + W_{p2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Робота сили опору

$$A_{\text{оп}} = W_2 - W_1;$$

$$A_{\text{оп}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgvt}{2} = \frac{mv}{2}(v - gt);$$

$$A_{\text{оп}} = \frac{2 \cdot 16}{2} (16 - 9,8 \cdot 4) = 371,2 (\text{Дж}).$$

Відповідь: 371,2 Дж.

Задача 10. Тіло масою 400 г, що рухається зі швидкістю $6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, зіткнулося з нерухомим тілом такої самої маси. Яка кількість теплоти виділяється під час абсолютно непружного удару?

Дано:

$$m = 400 \text{г} = 0,4 \text{кг}$$

$$v_1 = 6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$v_2 = 0$$

$Q = ?$

Розв'язання:

Кількість теплоти, що виділяється під час непружного удару,

$$Q = W_{k1} - W_{k2}.$$

Кінетична енергія системи до взаємодії

$$W_{k1} = \frac{mv_1^2}{2}.$$

За законом збереження імпульсу,

$$m\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v} = 2m\vec{v}.$$

У скалярній формі

$$mv_1 = 2mv.$$

Швидкість тіла після взаємодії

$$v = \frac{v_1}{2}.$$

Тоді кінетична енергія після взаємодії

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{8}.$$

Кількість теплоти, яка виділяється під час удару,

$$Q = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_1^2}{8} = \frac{3mv_1^2}{8}.$$

$$Q = \frac{3 \cdot 0,4 \cdot 6^2}{8} = 5,4(\text{Дж}).$$

Відповідь: 5,4 Дж.

Задачі для самостійного розв'язання

1 Куля масою 200 г, що рухається горизонтально зі швидкістю $4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, стикається з нерухомою кулею масою 400 г. Удар прямий, пружний, центральний. Визначити швидкості куль після удару.

2 Людина масою 80 кг біжить зі швидкістю $6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ назустріч візку масою 150 кг, що рухається зі швидкістю $2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначити швидкість візка, якщо людина застрибне на нього.

3 Гармати масою 5 т вилітає снаряд масою 100 кг. Кінетична енергія снаряда дорівнює 7,5 МДж. Яка кінетична енергія гармати, що отримана нею внаслідок віддачі?

4 На яку відстань переміститься м'яч масою 500 г за 5 с, якщо в початковий момент йому був наданий імпульс $400 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$?

5 Хлопчик масою 50 кг стоїть на льоду та кидає камінь масою 1 кг зі швидкістю $12 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. На яку відстань відкотиться хлопчик по льоду, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,01?

6 Визначити роботу, яка виконується під час рівномірного піднімання вантажу масою 10 кг вздовж похилої площини на відстань 5 м, якщо площина утворює з горизонтом кут 30° , а коефіцієнт тертя дорівнює 0,1.

7 Яку роботу слід здійснити, щоб пружину, стиснуту на 4 см, стиснути ще на 2 см?

8 Камінь об'ємом $0,2 \text{ м}^3$ піднімають з дна ріки глибиною 6 м. Яка робота при цьому виконується? Густина каменя $2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

9 Тіло кинуто вертикально вгору зі швидкістю $20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. На якій висоті кінетична енергія тіла дорівнює потенціальній?

10 З якою швидкістю слід кинути вниз м'яч, щоб він підстрибнув на п'ять метрів вище висоти, з якої його кинули?

11 Потенціальна енергія тіла задана рівнянням $W_p = \frac{A}{r^2}$, де $A = \text{const}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Знайти компоненти вектора сили F_x, F_y, F_z , що діє на тіло.

12 Знайти вектор сили, що діє на тіло, якщо його потенціальна енергія задана рівнянням $W_p = x \cdot \ln y + y^2 e^x$.

13 Якої висоти досягне тіло масою 500 г, що кинуто вертикально вгору зі швидкістю $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, якщо середня сила опору руху становить 0,5 Н?

14 Яку горизонтальну швидкість слід надати кулі, що висить на довгій нерозтяжній нитці, щоб вона відхилилася на 60° від вертикалі?

15 Вагон масою 16 т рухається зі швидкістю $0,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ і налітає на пружинний буфер. Вагон зупиняється, стиснувши пружину на 8 см. Знайти загальну жорсткість пружини.

16 Визначити ККД похилої площини з кутом нахилу 20° , якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,1.

17 З башти висотою 25 м горизонтально кидають камінь масою 100 г зі швидкістю $15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Знайти кінетичну та потенціальну енергію каменя через 1 с після початку руху.

18 Тіло, кинуте вертикально вгору, впало на землю через 4 с після початку руху. Визначити кінетичну та потенціальну енергію тіла у верхній точці.

19 Тіло масою 5 кг співударяється з нерухомим тілом масою 2,5 кг. Після абсолютно непружного удару кінетична енергія системи становить 5 Дж. Знайти кінетичну енергію першого тіла до удару.

20 Куля, що летить горизонтально, потрапляє в маятник, підвішений на невагомому жорсткому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі 5 г, маса маятника 500 г, швидкість кулі $500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. На якій відстані від точки підвісу слід закріпити маятник, щоб він від удару кулі піднявся до верхньої точки кола?

ТЕМА 4. Обертальний рух твердого тіла

Після вивчення даної теми студент повинен **знати основні поняття, закони та визначення**: кутове переміщення, кутова швидкість, кутове прискорення, момент імпульсу, момент сили, плече сили, момент інерції, теорема Штейнера.

Студент повинен **вміти** обчислювати кінематичні характеристики обертального руху, визначати напрямок моменту імпульсу, визначати напрямок моменту сили, знаходити плече сили, обчислювати момент інерції тіла відносно заданої осі.

Основні формули

Кутове переміщення

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}].$$

Кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Кутове прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Момент імпульсу

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}].$$

Модуль моменту імпульсу

$$L = rps \sin \alpha.$$

Момент сили

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Модуль моменту сили

$$M = rF \sin \alpha = Fd.$$

Момент інерції матеріальної точки

$$I = mr^2.$$

Момент інерції твердого тіла

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 .$$

Теорема Штейнера

$$I = I_0 + md^2 .$$

Рівняння моментів

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} .$$

Зв'язок моменту імпульсу та кутової швидкості

$$\vec{L} = I\vec{\omega} .$$

Основне рівняння динаміки обертального руху

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} .$$

Аналогія між формулами, що описують поступальний та обертальний рух, наведена в додатку Г.

Формули для обчислення моментів інерції тіл правильної геометричної форми наведені в додатку Д.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Матеріальна точка обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = 6t^2 + 8t - 12$. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення точки в момент часу 2 с. Знайти для того самого моменту часу нормальне і тангенціальне прискорення точок, що знаходяться на відстані 20 см від осі обертання.

Дано:

$$\varphi = 6t^2 + 8t - 12$$

$$t = 2\text{с}$$

$$r = 20\text{см} = 0,2\text{м}$$

$$\omega \quad \varepsilon - ?$$

Розв'язання:

Кутова швидкість точки

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\omega = 12t + 8;$$

$$\omega(2) = 12 \cdot 2 + 8 = 32 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

Кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt};$$

$$\varepsilon = 12 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right).$$

Тангенціальне прискорення

$$a_{\tau} = \varepsilon r;$$

$$a_{\tau} = 12 \cdot 0,2 = 2,4 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

Нормальне прискорення

$$a_n = \omega^2 r;$$

$$a_n = 32^2 \cdot 0,2 = 204,8 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

Відповідь: $32 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $12 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, $2,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $204,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 2. Визначити радіус колеса, що обертається навколо своєї осі, якщо відомо, що лінійна швидкість точки на його ободі у 2,5 разу більша за лінійну швидкість точки, що знаходиться ближче на 3 см до осі колеса.

Дано:

$$v_1 = v$$

$$v_2 = 2,5v$$

$$\Delta r = 3\text{см} = 0,03\text{м}$$

$$r - ?$$

Розв'язання:

Лінійна швидкість точок

$$v = \omega r$$

Всі точки колеса мають однакову кутову швидкість, тому

$$v_1 = \omega r_1;$$

$$v_2 = \omega r_2.$$

Отже

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega r_1}{\omega r_2} = \frac{r_1}{r_2};$$

$$\frac{v}{2,5v} = \frac{r - \Delta r}{r};$$

$$2,5(r - \Delta r) = r;$$

$$2,5r - 2,5\Delta r = r;$$

$$1,5r = 2,5\Delta r;$$

$$r = \frac{2,5\Delta r}{1,5};$$

$$r = \frac{2,5 \cdot 0,03}{1,5} = 0,05(\text{м}).$$

Відповідь: 0,05 м.

Задача 3. Однорідний стрижень довжиною 1 м та масою 1 кг закріплений на осі, яка перпендикулярна до стрижня. Визначити момент інерції стрижня, якщо вісь проходить через

точку, яка знаходиться на відстані 40 см від одного з кінців стрижня.

Дано:

$$l = 1\text{ м}$$

$$m = 1\text{ кг}$$

$$d = 40_{\text{см}} = 0,4\text{ м}$$

$$I = ?$$

Розв'язання:

За теоремою Штейнера

$$I = I_0 + ma^2.$$

Момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через центр мас,

$$I = \frac{ml^2}{12}.$$

Відстань між центром мас і віссю обертання

$$a = \frac{l}{2} - d.$$

Тоді

$$I = \frac{ml^2}{12} + m(l - d)^2 = m \left(\frac{l^2}{12} + (l - d)^2 \right).$$

$$I = 1 \left(\frac{1}{12} + (1 - 0,4)^2 \right) \approx 0,44 (\text{кг} \cdot \text{м}^2).$$

Відповідь: $0,44 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Задача 4. Визначити момент сили, який слід прикласти до валу, що обертається з частотою 12 об/с, щоб він зупинився протягом 8с. Діаметр валу 30см. Масу валу (6кг) вважати рівномірно розподіленою по ободу.

Дано:

$$\nu_0 = 12\text{ с}^{-1}$$

$$\nu = 0$$

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки обертального руху

$$t = 8\text{с}$$

$$m = 6\text{кг}$$

$$d = 30_{\text{см}=0,3\text{м}}$$

$$M = ?$$

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

Звідси момент сили

$$M = I\varepsilon$$

Момент інерції вала

$$I = \frac{mR^2}{2} = \frac{md^2}{8}$$

Вважаючи рух вала рівносповільненим, визначимо кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi v - 2\pi v_0}{t} = \frac{2\pi(v - v_0)}{t}$$

Тоді момент сили

$$M = \frac{2\pi m d^2 (v - v_0)}{8t}$$

$$M = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 0,09(0 - 12)}{8 \cdot 0,3} = -17 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$$

Відповідь: $-17 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Задача 5. Однорідний циліндр маси m та радіуса R починає обертатися без тертя навколо горизонтальної осі під впливом ваги тягарця P , закріпленого на тонкій нитці, що намотана на

циліндр. Визначити залежність кута повороту циліндра від часу $\varphi(t)$, вважаючи, що при $t = 0$ $\varphi_0 = 0$.

Дано:

m

R

P

$\omega_0 = 0$

$\varphi_0 = 0$

$\varphi(t) - ?$

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки
обертального руху

$$\varepsilon = \frac{M}{I}.$$

Момент сили, що викликає обертання,

$$M = PR.$$

Момент інерції вала

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Тоді кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{2PR}{mR^2} = \frac{2P}{mR}.$$

Рівняння обертання циліндра

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\varphi = \frac{2P}{mR} t.$$

Відповідь: $\varphi = \frac{2P}{mR} t$.

Задача 6. Нитка, до кінців якої прив'язані тягарці масами 50 г та 60 г, перекинута через блок діаметром 4 см. Визначити момент інерції блока, якщо під впливом тягарців він набув прискорення $1,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Дано:

$$m_1 = 0,05 \text{ кг}$$

$$m_2 = 0,06 \text{ кг}$$

$$d = 4 \text{ см} = 0,04 \text{ м}$$

$$\varepsilon = 1,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$I - ?$

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки обертального руху

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

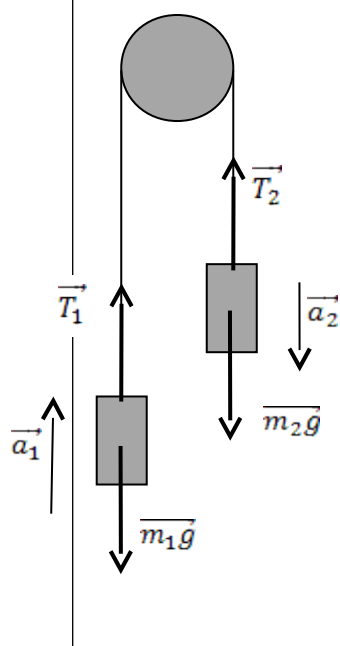
Момент сили, що викликає обертання,

$$M = T_2 R - T_1 R = (T_2 - T_1) R$$

Основні рівняння динаміки тягарців

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{m}_1 \vec{g} + \vec{T}_1;$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{m}_2 \vec{g} + \vec{T}_2.$$



У проекціях на вісь Oy :

$$\begin{aligned}m_1 a_1 &= -m_1 g + T_1; \\ -m_2 a_2 &= -m_2 g + T_2.\end{aligned}$$

Звідси сили натягу нитки

$$\begin{aligned}T_1 &= m_1 a_1 + m_1 g = m_1 (a_1 + g); \\ T_2 &= -m_2 a_2 + m_2 g = m_2 (g - a_2).\end{aligned}$$

Прискорення тягарців однакові та дорівнюють

$$a_1 = a_2 = a = \varepsilon R.$$

\Rightarrow

$$T_1 = m_1 (g + \varepsilon R);$$

$$T_2 = m_2 (g - \varepsilon R).$$

Отже обертальний момент

$$M = m_2 (g - \varepsilon R) - m_1 (g + \varepsilon R).$$

Момент інерції блока

$$I = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{m_2 (g - \varepsilon R) - m_1 (g + \varepsilon R)}{\varepsilon}.$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{0,06(9,8 - 1,5 \cdot 0,02) - 0,05(9,8 + 1,5 \cdot 0,02)}{1,5} = \\ &= 0,063(\text{кг} \cdot \text{м}^2)\end{aligned}$$

Відповідь: $0,063 \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Задача 7. За 5 с під впливом деякого моменту сили тіло набуло моменту імпульсу $10 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$. Визначити величину моменту сили, якщо рівняння руху має вигляд $\varphi(t) = 0,2t^2$.

Дано:

$$t = 5\text{с}$$

$$L = 10 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$$

$$\varphi(t) = 0,2t^2$$

$M - ?$

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки
обертального руху

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

Момент сили, що викликає обертання,

$$M = I\varepsilon$$

Момент імпульсу тіла

$$L = I\omega$$

Тоді момент інерції тіла

$$I = \frac{L}{\omega}$$

Кутова швидкість

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0,4t;$$

Кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0,4$$

Тоді момент сили

$$M = \frac{L}{\omega} \varepsilon = \frac{L}{0,4t} \cdot 0,4 = \frac{L}{t}$$

$$M = \frac{10}{5} = 2(\text{Н} \cdot \text{м}).$$

Відповідь: $2 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Задача 8. Кінетична енергія маховика, що виконує $20 \frac{\text{об}}{\text{с}}$, дорівнює 15 Дж . За який час обертальний момент $200 \text{ Н} \cdot \text{м}$ збільшить кутову швидкість маховика в три рази?

Дано: $\omega = 20 \frac{\text{об}}{\text{с}}$
 $W_k = 15 \text{ Дж}$
 $\omega_1 = \omega$
 $\omega_2 = 3\omega$
 $M = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$
 $t - ?$

Розв'язання:

Основне рівняння динаміки обертального руху

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

Кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{3\omega - \omega}{t} = \frac{2\omega}{t} = \frac{2 \cdot 2\pi\nu}{t} = \frac{4\pi\nu}{t}$$

Кінетична енергія тіла на початку обертання

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{4\pi^2\nu^2 I}{2} = 2\pi^2\nu^2 I$$

Звідси момент інерції тіла

$$I = \frac{W_k}{2\pi^2 v^2}.$$

Отже

$$\frac{4\pi v}{t} = \frac{2\pi^2 v^2 M}{W_k}$$

\Rightarrow

$$t = \frac{2W_k}{\pi v M};$$

$$t = \frac{2 \cdot 15}{3,14 \cdot 20 \cdot 200} = 2,4 \cdot 10^{-3} (c).$$

Відповідь: $2,4 \cdot 10^{-3} c$.

Задача 9. Визначити швидкість поступального руху суцільного циліндра, який скотився з похилої площини висотою 20 см.

Дано:

$$h = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$v - ?$

Розв'язання:

За законом збереження енергії,

$$W_p = W_k.$$

Потенціальна енергія циліндра

$$W_p = mgh.$$

Кінетична енергія циліндра

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Кутова та лінійна швидкості пов'язані співвідношенням

$$v = \omega R.$$

Тоді кутова швидкість

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

Момент інерції циліндра

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Тоді

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3mv^2}{2}.$$

Тоді закон збереження енергії можна записати як

$$mgh = \frac{3mv^2}{2};$$

$$gh = \frac{3v^2}{2}.$$

Лінійна швидкість циліндра

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gh};$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 9,8 \cdot 0,2} = 1,14 \left(\frac{\text{М}}{\text{с}}\right).$$

Відповідь: $1,14 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.

Задача 10. Платформа у вигляді диска обертається навколо вертикальної осі з частотою 14 хв^{-1} . На краю платформи стоїть людина. Коли людина переходить до центра платформи, частота зростає до 25 хв^{-1} . Маса людини 70 кг . Визначити масу платформи. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

Дано:

$$v_1 = 14 \text{ хв}^{-1}$$

$$v_2 = 25 \text{ хв}^{-1}$$

$$m_{\text{л}} = 70 \text{ кг}$$

$$m_{\text{п}} - ?$$

Розв'язання:

Закон збереження моменту імпульсу

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2.$$

Кутова швидкість пов'язана з частотою:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Момент інерції системи на початку спостереження

$$I_1 = I_{\text{п}} + I_{\text{л}}.$$

Момент інерції платформи $I_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}R^2}{2}$.

Момент інерції людини $I_{\text{л}} = m_{\text{л}}R^2$.

Отже $I_1 = \frac{m_{\text{п}}R^2}{2} + m_{\text{л}}R^2$.

Момент інерції наприкінці спостереження

$$I_2 = I_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}R^2}{2}.$$

Отже закон збереження моменту імпульсу набуває вигляду

$$\left(\frac{m_{\text{п}}R^2}{2} + m_{\text{л}}R^2\right) 2\pi v_1 = \frac{m_{\text{п}}R^2}{2} 2\pi v_2;$$

$$\left(\frac{m_{\text{п}}}{2} + m_{\text{л}}\right) v_1 = \frac{m_{\text{п}}}{2} v_2;$$

$$\frac{m_{\text{п}}}{2} (v_2 - v_1) = m_{\text{л}}v_1;$$

Звідси маса платформи

$$m_{\text{п}} = \frac{2m_{\text{л}}v_1}{v_2 - v_1}.$$

$$m_{\text{п}} = \frac{2 \cdot 70 \cdot 14}{25 - 14} = 178(\text{кг}).$$

Відповідь: 178 кг.

Задачі для самостійного розв'язання

1 Сферичне тіло масою 1 кг і радіусом 0,1 м приводиться в обертання навколо осі, яка проходить через його центр. При цьому кут повороту залежить від часу за законом $\varphi = \omega t^2$, де $\omega = 0,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Знайти кінетичну енергію тіла через 10 с після початку руху.

2 Матеріальна точка рухається по колу за законом: $\varphi(t) = 1 - 12t + t^3$. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення точки в момент часу 4 с.

3 Точка рухається по колу радіусом 10 см з постійним тангенціальним прискоренням. Знайти нормальне прискорення точки через 20 с після початку руху, якщо відомо, що наприкінці п'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки дорівнює $10 \frac{\text{см}}{\text{с}}$.

4 Вентилятор обертається зі швидкістю, що відповідає 900 об
хв. Після вимкнення двигуна вентилятор виконав до зупинки 75 обертів. Скільки часу пройшло від вимкнення вентилятора до його повної зупинки?

5 На барабан радіусом 0,5 м намотаний шнур, до якого прив'язаний тягарець масою 10 кг. Знайти момент інерції барабана, якщо відомо, що тягарець рухається з прискоренням $2,04 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

6 Циліндричний вал масою 80 кг і радіусом 4 см обертається з частотою $9 \frac{\text{об}}{\text{с}}$. У момент $t=0$ до поверхні вала притиснули гальмівну колодку з силою 30 Н. Коефіцієнт тертя колодки $\mu = 0,31$. Знайти час, за який вал повністю зупиниться.

7 Визначити момент інерції кулі масою 10 г і радіусом 2 см відносно осі, дотичної до її поверхні.

8 Маховик, момент інерції якого $60 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, обертається з кутовою швидкістю $30 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Знайти момент сил тертя, під впливом яких маховик зупиниться через 20 с після вимкнення двигуна.

9 Однорідний стрижень довжиною 1 м підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. Яку найменшу швидкість слід надати нижньому кінцю стрижня, щоб від зробив повний оберт навколо осі?

10 Сферичне тіло масою 1 кг і радіусом 20 см котиться по горизонтальній поверхні зі швидкістю $2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Знайти кінетичну енергію тіла.

11 Розрахувати момент інерції обруча масою 2 кг і діаметром 60 см відносно осі, яка перпендикулярна до обруча та проходить через точку на його ободі.

12 До ободу диска масою 5 кг прикладена дотична сила 20 Н. Яку кінетичну енергію буде мати диск через 5 с після початку руху?

13 До обода однорідного диска діаметром 25 см прикладена дотична сила 5 Н. Знайти масу диска, якщо відомо, що він обертається з кутовим прискоренням $4 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

14 Олівець, який поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову та лінійну швидкість буде мати наприкінці падіння верхній кінець олівця? Довжина олівця 15 см.

15 Знайти момент інерції та момент імпульсу земної кулі відносно осі обертання.

16 Мідна куля радіусом 10 см обертається з частотою $2 \frac{\text{об}}{\text{с}}$ навколо осі, яка проходить через його центр. Яку роботу слід здійснити, щоб збільшити її кутову швидкість вдвічі?

17 Обруч і диск однакової маси котяться без проковзування з однаковою швидкістю. Кінетична енергія обруча дорівнює 4 Дж. Знайти кінетичну енергію диска.

18 Однорідний циліндр масою 2 кг обертається без тертя навколо горизонтальної осі під впливом ваги тягарця, закріпленого на легкій нитці, що намотана на циліндр. Маса тягарця 1 кг. Записати залежність кута повороту циліндра від часу $\varphi(t)$, якщо при $t=0$ кут $\varphi_0=0$.

19 Колесо, яке обертається рівносповільнено, зменшило свою швидкість від $40 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ до $30 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Момент інерції колеса $2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Знайти роботу сил гальмування.

20 Визначити момент інерції диска масою 2 кг і діаметром 40 см відносно осі, що перпендикулярна до його площини та проходить на відстані 70 см від його центра.

ДОДАТОК А

Відомості про Сонце, Землю та Місяць

Радіус Сонця	$6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$
Маса Сонця	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Середній радіус Землі	$6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$
Маса Землі	$5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Прискорення вільного падіння на поверхні Землі	$9,806 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Середня відстань від Землі до Сонця	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Радіус Місяця	$1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$
Маса Місяця	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Прискорення вільного падіння на поверхні Місяця	$1,623 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Середня відстань від Землі до Місяця	$3,844 \cdot 10^8 \text{ м}$
Період обертання місяця навколо Землі	27 діб 7 год 43 хв

ДОДАТОК Б

Густина речовини $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$

Тверді тіла

Алюміній	2700	Олово	7300
Бетон	2300	Оргскло	1200
Граніт	2600	Скло	2500
Дуб (сухий)	700	Свинець	11300
Корок	240	Сталь, залізо	7800
Латунь	8500	Сосна (суха)	400
Лід	900	Цегла	1800
Мармур	2700	Цинк	7100
Мідь	8900	Чавун	7000

Рідини

Бензин	700	Масло	900
Вода прісна	1000	Нафта	800
Вода морська	1030	Ртуть	13600
Гас	800	Спирт	800

Гази за нормальних умов

Азот	1,25	Кисень	1,43
Водень	0,09	Повітря	1,29
Вуглекислий газ	1,98	Природний газ	0,8

ДОДАТОК В

Рух тіла під впливом сили тяжіння

Вільне падіння	Тіло, кинуте вертикально вгору	Тіло, кинуте горизонтально	Тіло, кинуте під кутом до горизонту
$a_y = g$	$a_y = g$	$a_x = 0,$ $a_y = g$	$a_x = 0,$ $a_y = g$
$v_y = gt$	$v_y = v_0 - gt$	$v_x = v_0,$ $v_y = gt$	$v_x = v_0 \cos \alpha,$ $v_y = v_0 \sin \alpha + gt$
$y = \frac{gt^2}{2}$	$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$	$x = v_0 t,$ $y = \frac{gt^2}{2}$	$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$ $y = v_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{gt^2}{2}$
$h = \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2}$	$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$	$h = \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2}$	$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$
$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	$t_{\text{під}} = \frac{v_0}{g},$ $t_p = \frac{2v_0}{g}$	$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	$t_{\text{під}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$ $t_p = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$
		$l = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$	$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

ДОДАТОК Г

Порівняльна таблиця поступального та обертального руху

Поступальний рух	Обертальний рух
Радіус-вектор \vec{r}	$\vec{\varphi}$
Швидкість тіла $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Кутова швидкість $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Прямолінійний рівномірний рух $v_x = const,$ $x = x_0 + v_x t$	Рівномірне обертання $\omega = const,$ $\varphi = \varphi_0 + \omega t$
Прискорення тіла $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	Кутове прискорення $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
Прямолінійний рівноприскорений рух $a_x = const,$ $v_x = v_{0x} + a_x t,$ $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	Рівноприскорене обертання $\varepsilon = const,$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$
Маса тіла m	Момент інерції тіла I
Сила \vec{F}	Момент сили \vec{M}
Другий закон Ньютона $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	Основне рівняння динаміки обертального руху $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$
Імпульс тіла $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент імпульсу $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Другий закон Ньютона в імпульсній формі $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Рівняння моментів $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

ДОДАТОК Д

Моменти інерції деяких тіл

Тіло	Вісь	Момент інерції
Тонкий стрижень масою m та довжиною l	Перпендикулярна до стрижня і проходить через його середину	$\frac{ml^2}{12}$
Тонкий стрижень масою m та довжиною l	Перпендикулярна до стрижня і проходить через його кінець	$\frac{ml^2}{3}$
Тонка труба чи кільце масою m та радіусом r	Співпадає з віссю труби	mr^2
Круглий диск чи суцільний циліндр масою m та радіусом r	Перпендикулярна до площини диска і проходить через його центр	$\frac{mr^2}{2}$
Круглий циліндр масою m та радіусом r	Перпендикулярна до осі циліндра і проходить через його середину	$m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)$
Куля масою m та радіусом r	Співпадає з діаметром	$\frac{2}{5}mr^2$

