



**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра будівельної механіки та гідравліки**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**для виконання розрахунково-графічних робіт**

**з освітньої компоненти**

**«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»**

**для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня  
спеціальностей**

**G19 «Будівництво та цивільна інженерія»**

**і J7 «Залізничний транспорт» будівельного факультету**

**Харків 2026**

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 26 грудня 2025 р., протокол № 5.

Методичні вказівки призначені для розв'язання розрахунково-графічних робіт із будівельної механіки для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальностей G19 «Будівництво та цивільна інженерія» і J7 «Залізничний транспорт» будівельного факультету.

Укладачі:

доценти О. В. Опанасенко,  
Є. І. Галагура,  
М. О. Ковальов

Рецензент

доц. Є. Ф. Орел

## З М І С Т

Вступ	4
1 Розрахунок багатопрогової статично визначної балки на рухоме і нерухоме навантаження	7
2 Розрахунок плоскої статично визначної ферми на рухоме і нерухоме навантаження	20
3 Розрахунок розпірної системи	29
4 Розрахунок переміщення в плоских рамах від дії зовнішніх сил	35
4.1 Розрахунок переміщення в плоских рамах від дії температури	38
4.2 Розрахунок переміщення в плоских рамах від зміщення опорних зв'язків	41
5 Розрахунок плоскої статично невизначної рами методом сил від дії зовнішнього навантаження	43
6 Розрахунок плоскої статично невизначної рами методом переміщень від дії зовнішнього навантаження	59
Список літератури	73
Додаток А Таблиця стандартних рішень	74
Додаток Б Вихідні дані для розрахунково-графічних робіт	76

## **ВСТУП**

Пропоновані методичні вказівки призначені для самостійної роботи здобувачів і містять приклади розв'язання завдань, які виконують здобувачі денної та заочної форм здобуття освіти спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія», вивчаючи будівельну механіку. Ці вказівки є продовженням і доповненням методичних рекомендацій кафедри будівельних конструкцій.

Вказівки містять довідковий матеріал, необхідний для розв'язання завдань: таблиці стандартних рішень (додаток А), вихідні дані для розрахунково-графічних робіт (додаток Б).

У цих вказівках розв'язання задач супроводжено основними теоретичними даними курсу. Однак ці вказівки не можуть замінити підручник, тому, щоб розв'язувати задачі з розумінням, треба попередньо ознайомитися з відповідним матеріалом у підручнику чи курсі лекцій.

Зміст і наповнення розрахунково-графічних робіт мають високий науково-педагогічний рівень, викладені систематично та послідовно, відображають новітні досягнення науки, техніки; забезпечують реалізацію основних принципів навчання: науковості, систематичності, послідовності, доступності викладення, наочності, ґрунтовності, зв'язку матеріалу з професійною діяльністю; відповідають вимогам освітніх програм, державних освітніх стандартів.

### **Мета і основні завдання**

Виконуючи розрахунково-графічну роботу, здобувач має отримати теоретичні знання, необхідні для розрахунків систем, які знаходяться під дією зовнішнього навантаження. Метою завдання є набуття практичних навичок побудови ліній впливу, розрахунків статично невизначних систем на дію зовнішнього навантаження.

Очікувані результати навчання:

- визначати параметри об'єктів залізничного транспорту, їхніх систем та елементів, проводячи вимірювальний експеримент з оцінюванням його результатів;

- забезпечувати надійну і безпечну експлуатацію будівельних конструкцій будівель, споруд та інженерних мереж;

- визначати і оцінювати навантаження та напружено-деформований стан ґрунтових основ і несучих конструкцій будівель (споруд), у тому числі з використанням сучасних інформаційних технологій.

### **Компетентності, що формують у здобувачів**

Уміння вирішувати завдання будівельної механіки – це основа надбання професійних компетенцій. Набуті знання, вміння, навички допомагають здобувачу виконувати поставлені перед ним професійні завдання з розрахунку споруд на зовнішні впливи. Курс має на меті сформувати і розвинути такі компетентності здобувачів:

- здатність використовувати інформаційні та комунікаційні технології;

- здатність до критичного осмислення і застосування основних теорій, методів і принципів економіки і менеджменту для раціональної організації та управління будівельним виробництвом;

- здатність проектувати будівельні конструкції, будівлі, споруди та інженерні мережі з урахуванням інженерно-технічних і ресурсозберігаючих заходів, правових, соціальних, екологічних, техніко-економічних показників, наукових та етичних аспектів, сучасних вимог нормативної документації у сфері архітектури та будівництва, охорони довкілля та безпеки праці;

- здатність застосовувати комп'ютеризовані системи проектування та спеціалізоване прикладне програмне забезпечення для розв'язання інженерних задач будівництва та цивільної інженерії;

- здатність розробляти конструктивні рішення об'єктів будівництва на базі знання номенклатури та конструктивних форм, уміння розраховувати і конструювати несучі та огорожувальні будівельні конструкції;

- розуміння вимог щодо надійності та засобів забезпечення надійності будівельних конструкцій, будівель, споруд та інженерних мереж.

### **Методи вивчення та контролю**

Методичні вказівки мають схеми завдання, приклади їх розв'язання та контрольні запитання.

Здобувачі ознайомлюються з основними завданнями освітньої компоненти «Будівельна механіка». Контрольні запитання дають змогу перевірити набуті знання. Наведено схеми самих завдань для виконання розрахунково-графічної роботи, які складаються з чотирьох задач: розрахунок статично визначної багатопрогонової балки, розрахунок плоскої статично визначної рами методом сил, розрахунок плоскої статично визначної рами методом переміщень, розрахунок статично визначної ферми. До кожної задачі наведено приклад розв'язання з поясненнями.

### **Перелік документів, які необхідно подати для захисту**

Розрахунково-графічна робота має містити розрахункові схеми та самі розрахунки задач із поясненням та остаточними результатами. У додатку подано зразок оформлення титульного аркуша. Завдання має бути оформлене відповідно до вимог [9].

# 1 РОЗРАХУНОК БАГАТОПРОГОНОВОЇ СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ БАЛКИ НА РУХОМЕ І НЕРУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

## План розв'язання задачі

1 Накреслити в масштабі схему балки (рисунок 1.1), зазначивши всі необхідні розміри і величини навантажень.

2 Побудувати схему взаємодії окремих балок.

3 Побудувати епюри моментів і поперечних сил.

4 Побудувати лінії впливу всіх опорних реакцій, поперечних сил, згинальних моментів у зазначеному на схемі перерізі І.

5 За лініями впливу визначити на другій опорі величину опорної реакції, а також величини згинального моменту та поперечної сили в перерізах І і II від заданого нерухомого навантаження. Результати порівняти з даними аналітичного розрахунку.

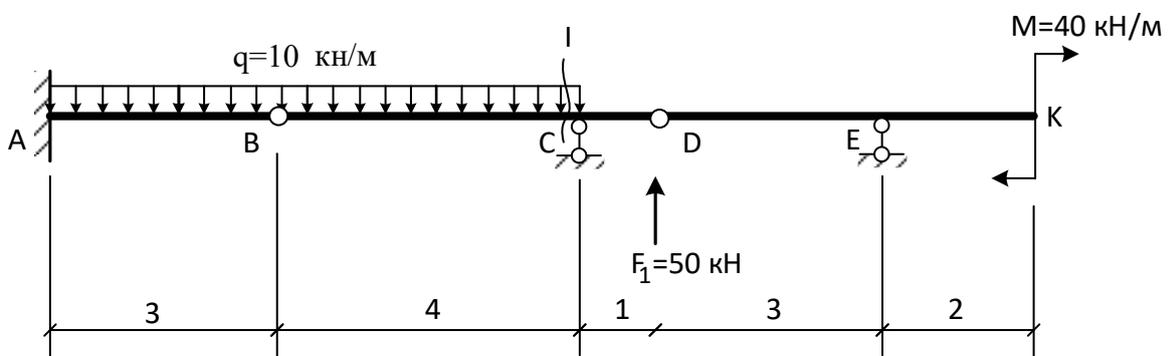


Рисунок 1.1 – Розрахункова схема

## Розв'язання

1 Побудуємо схему взаємодії окремих балок (рисунок 1.2). Балка АВ є основною, тому що вона нерухомо зв'язана з наземними опорами. Балка ВD є допоміжною, тому що одним кінцем опирається на наземну опору С, а другим – на балку АВ. Балка ДК є допоміжною, тому що одним кінцем опирається на наземну опору Т, а другим – на балку CD. Горизонтальна

нерухомість усіх балок багатопрогонової балки забезпечена однією нерухомою опорою балки АВ.

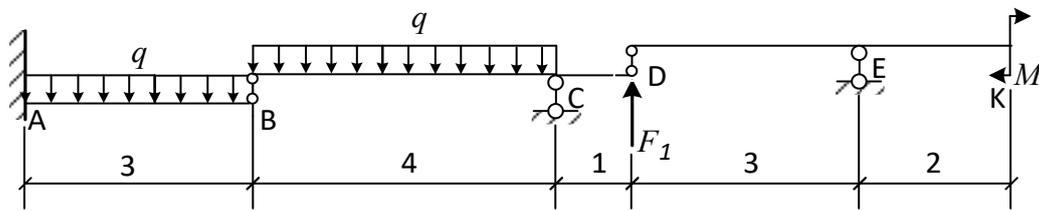


Рисунок 1.2 – Схема взаємодії окремих балок

2 Для розрахунку такої балки необхідно спочатку розрахувати балку верхнього поверху – балку DK, потім передати з неї навантаження на балку нижчого поверху BD і також її розрахувати, а потім передати навантаження на основну балку АВ та розрахувати її.

*Розрахунок балки DK (рисунок 1.3)*

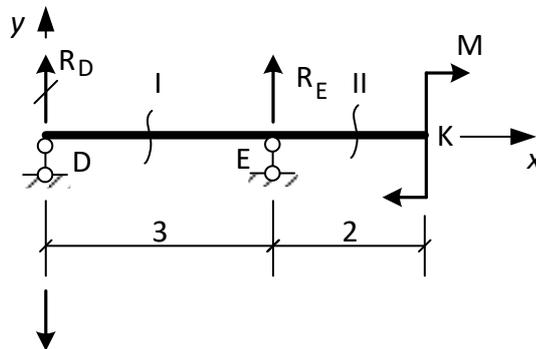


Рисунок 1.3 – Розрахункова схема балки DK

Спочатку визначимо опорні реакції. Для цього складемо рівняння рівноваги – рівняння моментів відносно опор (точок D і E), для того щоб реакції  $R_D$  і  $R_E$  визначити незалежно одну від одної:

$$\begin{aligned} \sum M_D &= 0, \\ M - R_E \cdot 3 &= 0, \\ R_E &= M/3 = 40/3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_E &= 0, \\ R_D \cdot 3 + M &= 0, \\ R_D &= -M/3 = -40/3. \end{aligned}$$

Через те що значення  $R_D$  від'ємне, для подальшого спрощення розрахунків ми змінюємо напрямок опорної реакції.

Далі будуємо епюри згинальних моментів і поперечних сил. Для цього скористаємося методом перерізів. Проведемо переріз I, відкинемо праву частину балки та знайдемо внутрішні сили:

$$0 \leq x \leq 3,$$

$$Q_I = -R_D = -40/3 = -13,33 \text{ кН},$$

$$M_I = -R_D x \Big|_0^3 \quad \begin{matrix} M = 0 \\ M = -40 \text{ кНм} \end{matrix}$$

Проведемо переріз II, відкинемо ліву частину балки та знайдемо внутрішні сили:

$$0 \leq x \leq 2,$$

$$Q_{II} = M = 0,$$

$$M_{II} = -M = -40 \text{ кНм}.$$

За отриманими значеннями побудуємо епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки DK (рисунок 1.4).

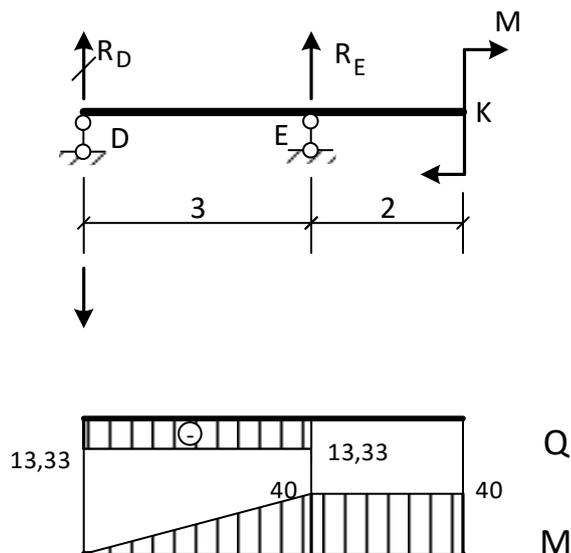


Рисунок 1.4 – Епюри згинальних моментів і поперечних сил балки DK

### Розрахунок балки BD

Для розрахунку балки нижчого поверху необхідно передати навантаження з балки, яка розташована поверхом вище. Для цього в точку D ми повинні передати опорну реакцію  $R_D$ , змінивши її напрямок на протилежний. У подальшому розрахунок балки BD аналогічний розрахунку балки DK (рисунок 1.5).

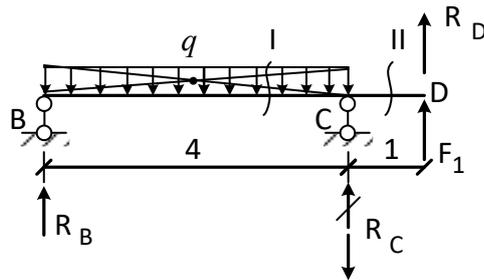


Рисунок 1.5 – Розрахункова схема балки BD

Визначаємо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0, \quad & -R_D \cdot 5 - F_1 \cdot 5 - R_C \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0, \\ R_C = & \frac{-13,33 \cdot 5 - 50 \cdot 5 + 10 \cdot 8}{4} = -59,16, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0, \quad & R_B \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - R_D \cdot 1 - F_1 \cdot 1 = 0, \\ R_B = & \frac{10 \cdot 4 \cdot 2 + 13,33 + 50}{4} = 35,83. \end{aligned}$$

Виконаємо перевірку:

$$\begin{aligned} \sum y = 0, \quad & R_B - q \cdot 4 - R_C + R_D + F_1 = 0, \\ 35,83 - 10 \cdot 4 - 59,16 + 13,33 + 50 & = 0. \end{aligned}$$

Визначимо внутрішні зусилля в перерізах I і II. Проведемо переріз I, відкинемо праву частину балки та знайдемо внутрішні сили:

$$0 \leq x \leq 4,$$

$$Q_1 = R_B - qx \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ 4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Q_1 = 35,83 \\ Q_2 = -4,17 \text{ кН} \end{array}$$

Оскільки на цій ділянці діє розподілене навантаження, то необхідно знайти екстремальне значення згинального моменту. Це значення визначаємо в точці, де еюра поперечної сили перетинає базову лінію (змінює знак і дорівнює нулю). Для цього необхідно визначити значення  $x$ , за якого поперечна сила  $Q$  буде дорівнювати нулю.

$$R_B - qx = 0,$$

$$x_0 = R_B/q = 3,583 \text{ м},$$

$$M_1 = R_B \cdot x - qx \frac{x}{2} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} M = 0 \\ M = 63,33 \text{ кНм} \end{array}$$

$$M_0 = 64,19 \text{ кНм}.$$

Проведемо переріз II, відкинемо ліву частину балки та знайдемо внутрішні сили:

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$Q_{II} = -R_D - F_1 = -63,33 \text{ кН},$$

$$M_{II} = R_D \cdot x + F_1 \cdot x = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} M_{II} = 0 \\ M_{II} = 63,33 \text{ кНм} \end{array}$$

Побудуємо еюри внутрішніх сил (рисунок 1.6).

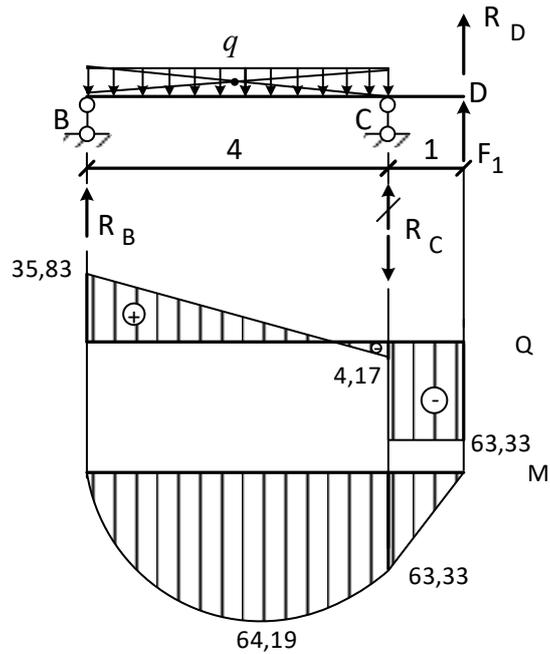


Рисунок 1.6 – Епюри згинальних моментів і поперечних сил балки DK

*Розрахунок балки АВ (рисунок 1.7)*

Для виконання розрахунку передаємо на балку АВ навантаження з балки BD.

Визначимо опорні реакції:

$$\sum y = 0, \quad -R_B - q \cdot 3 + R_A = 0,$$

$$R_A = R_B + q \cdot 3 = 35,83 + 10 \cdot 3 = 65,83,$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - q \cdot 3 \cdot 1,5 - R_B \cdot 3 = 0,$$

$$M_A = q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 = 10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 35,83 \cdot 3 = 152,49.$$

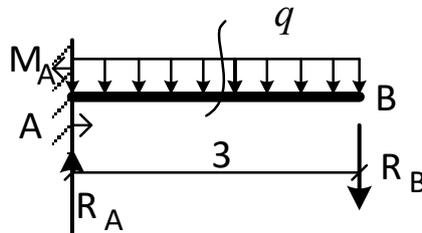


Рисунок 1.7 – Розрахункова схема балки АВ

Проведемо переріз I, відкинемо ліву частину балки та знайдемо внутрішні сили:

$$0 \leq x \leq 3,$$

$$Q = R_B + qx = \begin{cases} 0 & Q_1 = 35,83 \text{ кН} \\ 3 & Q_1 = 65,83 \text{ кН} \end{cases}$$

$$M = -R_B x - qx \frac{x}{2} = \begin{cases} 0 & M = 0 \text{ кНм} \\ 3 & M = -152,49 \text{ кНм} \end{cases}$$

Побудуємо епюри внутрішніх сил (рисунок 1.8).

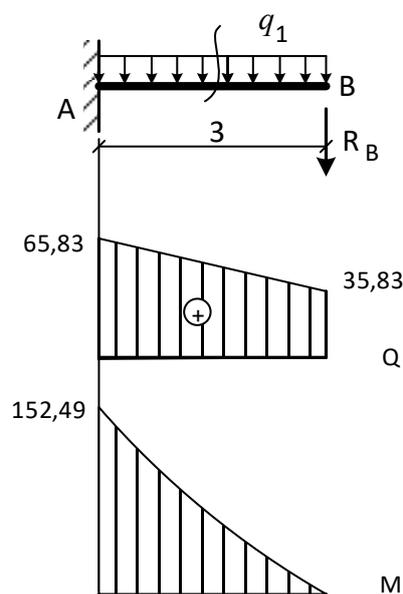


Рисунок 1.8 – Епюри згинальних моментів і поперечних сил балки АВ

*Виконаємо перевірку знайдених опорних реакцій, для цього запишемо рівняння рівноваги для всієї балки*

$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad R_a - q \cdot 7 - R_c + F_1 + R_E &= 0, \\ 65,83 - 10 \cdot 7 - 59,16 + 50 + 13,33 &= 0, \\ 129,16 - 129,16 &= 0. \end{aligned}$$

Перевірка виконана.

Побудуємо остаточну епюру згинальних моментів і поперечних сил для всієї балки (рисунок 1.9).

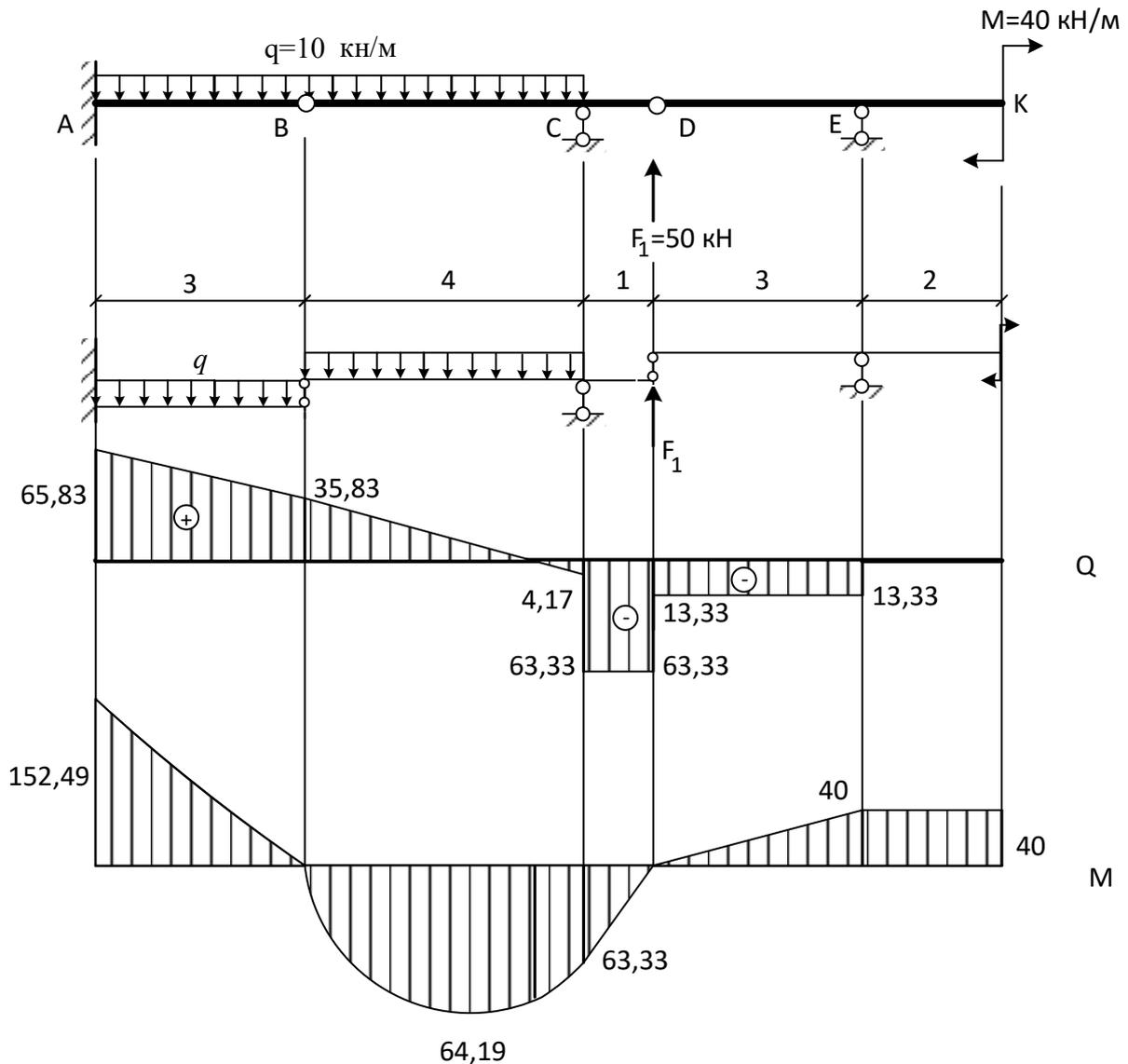


Рисунок 1.9 – Епюри згинальних моментів і поперечних сил

3 Розрахунок на рухоме навантаження багатопрогонних статично визначних балок.

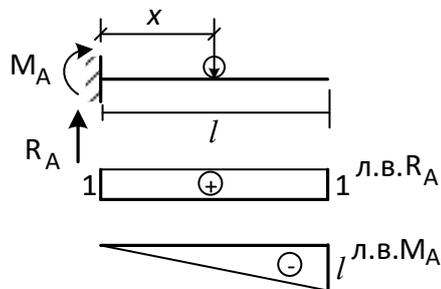
Для розрахунків на рухоме навантаження необхідно визначити найбільше (обох знаків) зусилля або переміщення в різних перерізах балки, які можуть виникнути з рухом заданого рухомого навантаження по споруді. Цей розрахунок спрощений, якщо використати лінію впливу, яка показує

зміну шуканого фактора (зусилля або переміщення в певному перерізі) із рухом по споруді одиничного вантажу постійного напрямку. За побудованими лініями впливу можна визначити розрахункові положення будь-якого заданого рухомого навантаження і дослідну величину при ньому. Будуючи лінії впливу для багатопрогової статично визначної балки, спочатку будують лінію впливу в межах однієї балки, у якій знаходиться досліджуваний переріз. При цьому балку розглядають як однопрогонову. Потім лінія впливу розповсюджується на інші балки.

Статичний спосіб побудови ліній впливу полягає в тому, що вантаж  $F = 1$  встановлюють довільно і точку його прикладення у вибраній системі координат позначають абсцисою  $x$ . Вважаючи вантаж нерухомим, визначають шукану величину. Далі в одержаному рівнянні приймають  $x$  змінним у певних можливих межах і будують відповідний графік.

Виходячи з цього, розглянемо побудову лінії впливу для однопрогової балки.

*Побудова лінії впливу для балки AB (рисунки 1.10)*



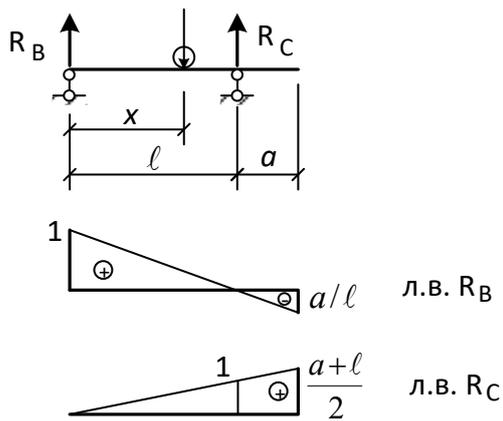
$$\sum y = 0, R_A = 1,$$

$$\sum M_A = 0, M_A + 1 \cdot x = 0,$$

$$M_A = -1 \cdot x.$$

Рисунок 1.10 – Лінії впливу балки AB

*Побудова лінії впливу для балки BD (рисунки 1.11)*



$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot \ell + 1 \cdot x = 0;$$

$$R_A = 1 \cdot \frac{x}{\ell},$$

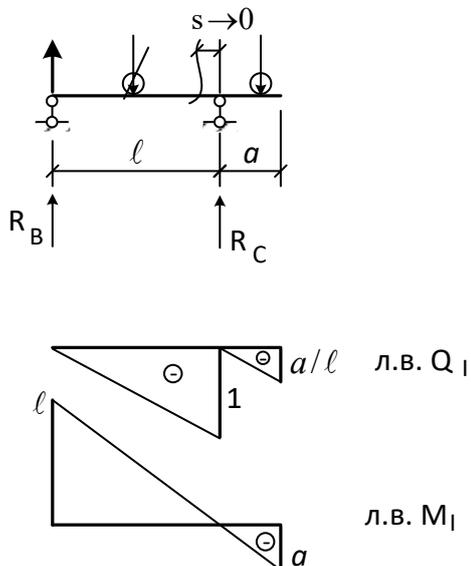
$$\sum M_C = 0, R_B \cdot \ell - 1(\ell - x) = 0,$$

$$R_B = 1 \frac{\ell - x}{\ell}.$$

Рисунок 1.11 – Лінії впливу балки BD

Будують лінію впливу для балки DK аналогічно, як і для балки BD.

Побудова лінії впливу згинального моменту і поперечної сили для перерізу I (рисунок 1.12). Для цього необхідно розглянути два положення рухомого вантажу: зліва та справа від перерізу.



Вантаж зліва

$$Q_I = -R_C,$$

$$M_I = R_C s \rightarrow 0 = 0.$$

Вантаж справа

$$Q_I = R_B,$$

$$M_I = R_B(\ell - s) = R_B \ell.$$

Рисунок 1.12 – Лінії впливу в перерізі I

Будують лінію впливу для багатопрогової балки за правилами побудови:

1) для побудови лінії впливу зусиль у перерізах або опорних зусиль розглядають однопрогонову балку, якій належать перерізи або опорні точки;

2) лінія впливу розповсюджена на всі балки, що лежать вище початкової балки;

3) лінія впливу проходить через «0» у реальних (наземних) опорах;

4) у місцях встановлення шарніра багатопрогонової балки лінія впливу має перелом.

Лінії впливу опорних реакцій за згинального моменту і поперечної сили в перерізі I показані на рисунку 1.13.

*Визначення зусиль за лініями впливу:*

$$S_i = \pm F_i y \pm q_i \omega_i \pm M_i \operatorname{tg} \phi_i,$$

де  $F_i$  та  $M_i$  – діючі зосереджені сили і моменти;

$y$  – ордината лінії впливу, розташована під силою  $F_i$ ;

$\operatorname{tg} \phi_i$  – похідна лінії впливу, яка знаходиться під зосередженим моментом  $M_i$  (тангенс кута нахилу дотичної);

$q_i$  – інтенсивність діючого рівномірно розподіленого навантаження;

$\omega_i$  – площа завантаженої ділянки лінії впливу рівномірно розподіленим навантаженням  $q_i$ .

Вважають, що зовнішнє навантаження, направлене вниз, і згинальний момент за годинникової стрілкою мають знак «+». Якщо функція лінії впливу зростає, то  $\operatorname{tg} \phi$  має знак «+».

Визначимо внутрішні зусилля в перерізі I:

$$Q_I = q \frac{1}{2} 4(-1) - F \left(-\frac{1}{4}\right) + M \left(\frac{1}{12}\right) = 10(-2) + 50/4 + 40/12 = -4,17 \text{ кН.}$$

$$M_I = -F \cdot (-1) + M \left(\frac{1}{3}\right) = -50(-1) + 40 \cdot \frac{1}{3} = 50 + 13,33 = 63,33 \text{ кН.}$$

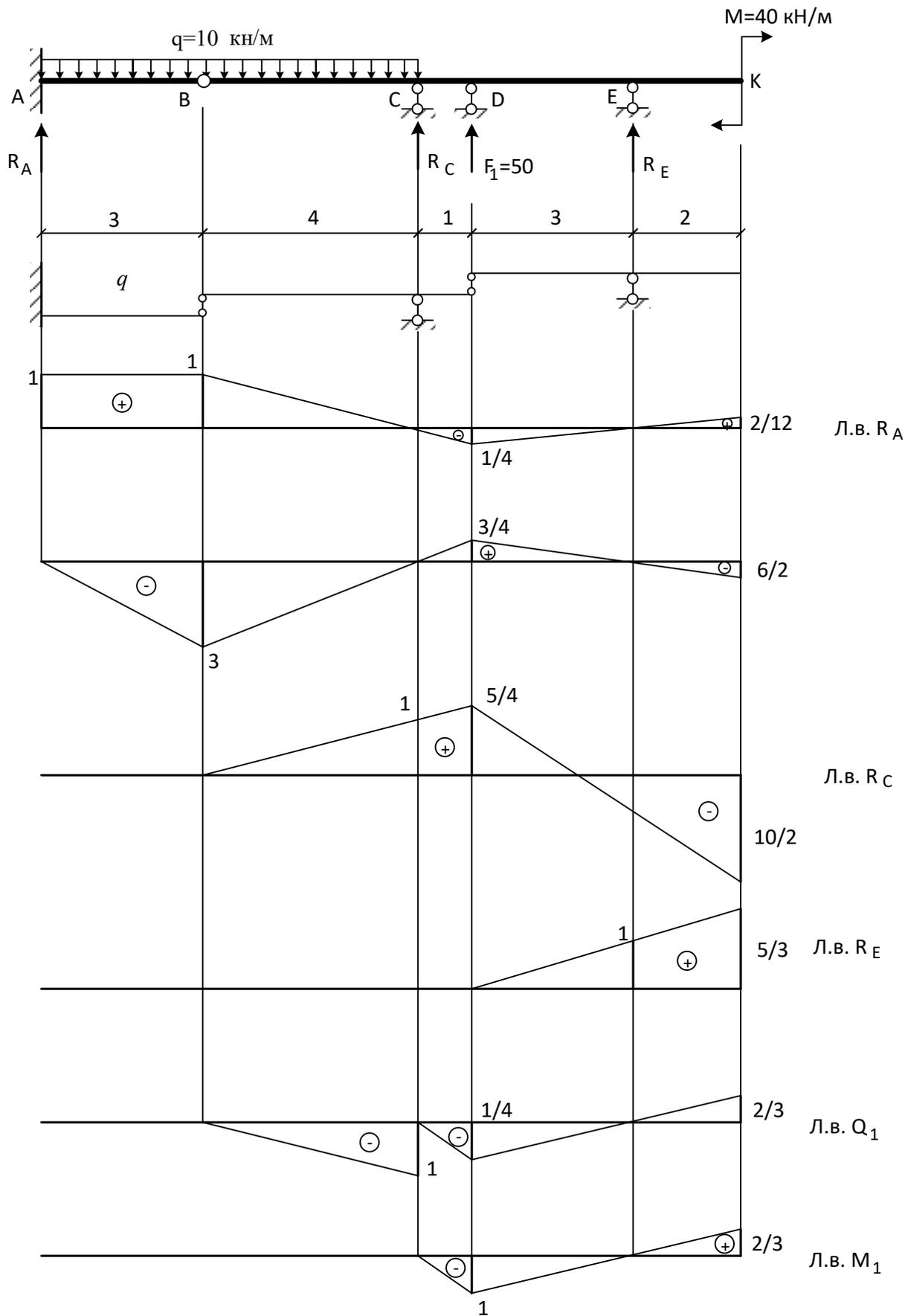


Рисунок 1.13 – Лінії впливу багатопрогенової балки

### *Запитання для самоконтролю*

1 Вкажіть на одну з переваг багатопрогонової статично визначної балки порівняно з нерозрізною.

2 Яку загальну кількість шарнірів треба ввести, щоб перетворити нерозрізну балку в статично визначну багатопрогонову балку?

3 За якою формулою розраховують кількість ступенів свободи багатопрогонової статично визначної балки?

4 Перетворюючи нерозрізну балку в багатопрогонову статично визначну балку, яким правилом постановки шарнірів не можна користуватися?

5 Для чого в розрахунках багатопрогонової статично визначної балки застосовують поперхову схему?

6 Яке твердження відносно взаємодії балок поперхової схеми є хибним?

7 Із якого поперху починають розрахунок багатопрогонової статично визначної балки?

8 Що треба зробити, щоб передати навантаження з одного поперху балки на інший?

9 Як називають балку поперхової схеми, що має два чи три опорних зв'язки?

10 Як називають балку поперхової схеми, що має один опорний зв'язок чи не має опорних зв'язків?

11 Який принцип використовують для отримання формули визначення внутрішніх сил за лініями впливу від нерухомого навантаження?

12 Яку властивість має прямолінійна ланка лінії впливу?

13 Яке навантаження називають еквівалентним?

14 Від чого залежить величина еквівалентного навантаження за трикутної лінії впливу для заданого навантаження?

- 15 Що показує ордината лінії впливу?
- 16 Яку розмірність має ордината лінії впливу згинального моменту?
- 17 Яку розмірність має ордината лінії впливу поперечної сили?
- 18 Вкажіть формулу для визначення за лінією впливу величини згинального моменту від заданої системи зосереджених сил.

## 2 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ ФЕРМИ НА РУХОМЕ І НЕРУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

*План розв'язання задачі*

- 1 Визначити зусилля в позначених стрижнях від нерухомого навантаження.
- 2 У позначених стрижнях побудувати лінії впливу.
- 3 Визначити зусилля по лініях впливу від нерухомого навантаження.
- 4 Порівняти величини зусиль, що визначені по лініях впливу, з отриманими з аналітичним розрахунком.

Розрахункова схема наведена на рисунку 2.1.

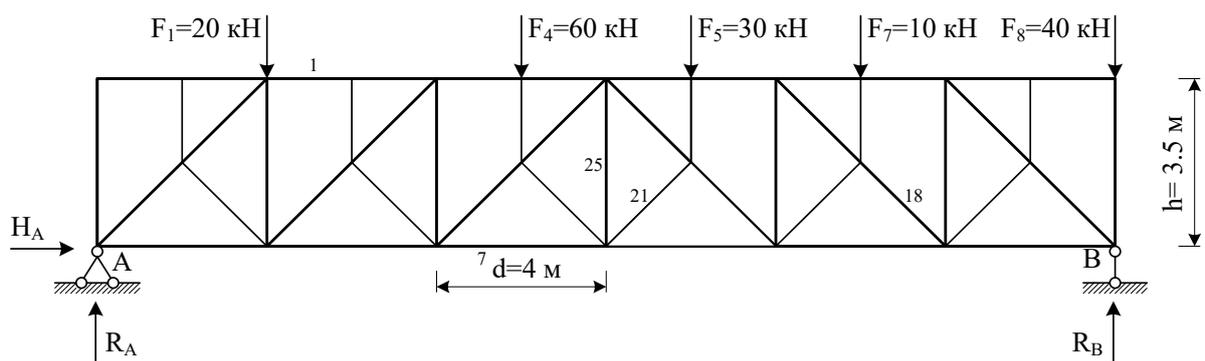


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема

*Розв'язання*

- 1 Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0,$$

$$F_1 \cdot d + F_4 \cdot 2.5d + F_5 \cdot 3.5d + F_7 \cdot 4.5d + F_8 \cdot 6d - R_B \cdot 6d = 0,$$

$$R_B = \frac{F_1 \cdot d + F_4 \cdot 2.5d + F_5 \cdot 3.5d + F_7 \cdot 4.5d + F_8 \cdot 6d}{6d} =$$

$$= \frac{20 \cdot 4 + 60 \cdot 2.5 \cdot 4 + 30 \cdot 3.5 \cdot 4 + 10 \cdot 4.5 \cdot 4 + 40 \cdot 6 \cdot 4}{6 \cdot 4} = 93.33 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$F_1 \cdot 5d + F_4 \cdot 3.5d + F_5 \cdot 2.5d + F_7 \cdot 1.5d - R_A \cdot 6d = 0,$$

$$R_A = \frac{F_1 \cdot 6d + F_4 \cdot 3.5d + F_5 \cdot 2.5d + F_7 \cdot 1.5d}{6d} =$$

$$= \frac{20 \cdot 5 \cdot 4 + 60 \cdot 3.5 \cdot 4 + 30 \cdot 2.5 \cdot 4 + 10 \cdot 1.5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = 66.67 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0, \quad \sum X = 0,$$

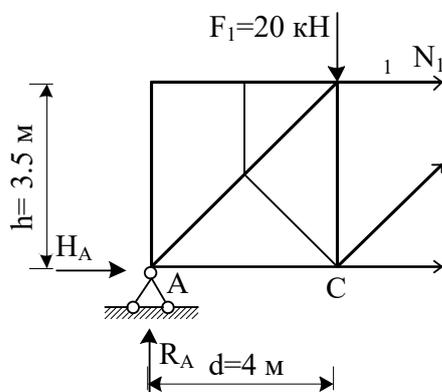
$$F_1 + F_4 + F_5 + F_7 + F_8 - R_B - R_A = 0, \quad H_A = 0,$$

$$20 + 60 + 30 + 10 + 40 -$$

$$-93.33 - 66.67 = 0.$$

2 Визначимо зусилля в позначених стрижнях.

2.1 Зусилля  $N_1$ . Для визначення зусилля скористаємося методом перерізів (рисунок 2.2). Проведемо переріз через невідомий стрижень і відкинемо праву частину ферми.



$$\sum M_C = 0, \quad N_1 \cdot h + R_A \cdot d = 0,$$

$$N_1 = -\frac{R_A \cdot d}{h} = \frac{66.67 \cdot 4}{3.5} = -76.19 \text{ кН}.$$

Рисунок 2.2 – Визначення зусиль у стрижні  $N_1$

2.2 Зусилля  $N_7$ . Для визначення зусилля скористаємося методом перерізів. Проведемо переріз через невідомий стрижень і відкинемо праву частину ферми (рисунок 2.3).

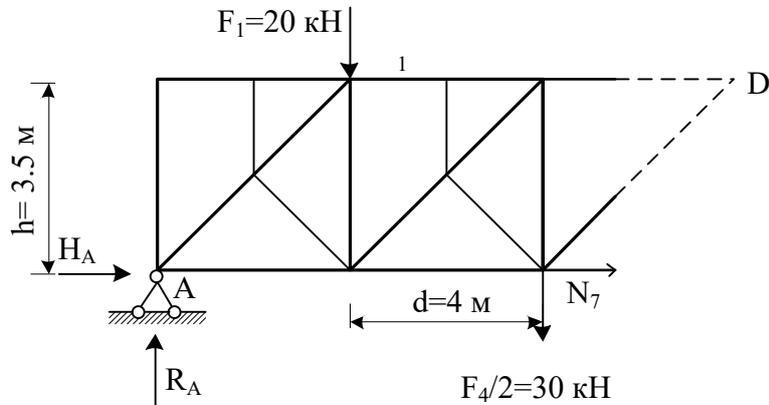


Рисунок 2.3 – Визначення зусиль у стрижні  $N_7$

$$\sum M_D = 0, \quad N_7 \cdot h - R_A \cdot 3d + F_1 \cdot 2d + \frac{F_4}{2} \cdot d = 0,$$

$$N_7 = \frac{R_A \cdot 3d - F_1 \cdot 2d - \frac{F_4}{2} \cdot d}{h} = \frac{66.67 \cdot 3 \cdot 4 - 20 \cdot 2 \cdot 4 - 30 \cdot 4}{3.5} =$$

$$= 148.58 \text{ кН.}$$

2.3 Зусилля  $N_{18}$ . Для визначення зусилля скористаємося методом перерізів. Проведемо переріз через невідомий стрижень і відкинемо ліву частину ферми (рисунок 2.4).

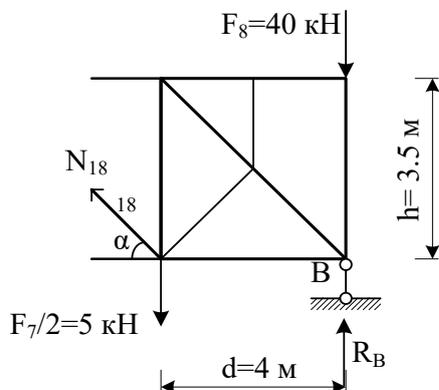


Рисунок 2.4 – Визначення зусиль у стрижні  $N_{18}$

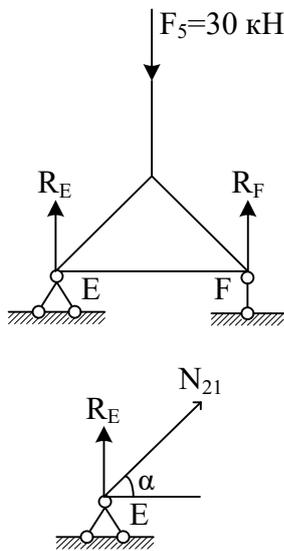
$$\sum Y = 0,$$

$$F_8 + F_7/2 - R_B - N_{18} \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_{18} = \frac{F_8 + \frac{F_7}{2} - R_B}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{40 + 5 - 93.33}{0.6586} = -73.38 \text{ кН.}$$

2.4 Зусилля  $N_{21}$ . Стрижень належить лише шпренгелю, тому розглянемо окремо шпренгель.



Для визначення зусилля  $N_{21}$  спочатку необхідно знайти опорні реакції, які в цьому випадку дорівнюють  $F_5/2 = 15$  кН.

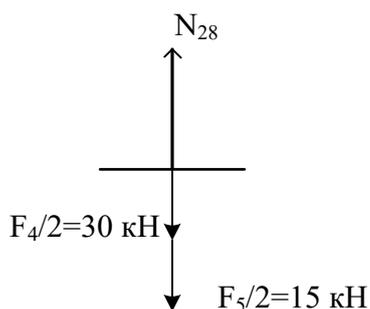
Далі виріжемо вузол E та спроектуємо всі сили на вісь Y (рисунок 2.5).

$$\sum Y = 0, \quad R_E + N_{21} \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$N_{21} = \frac{-R_E}{\sin\alpha} = \frac{-15}{0.6586} = -22.77 \text{ кН.}$$

Рисунок 2.5 – Визначення зусиль у стрижні  $N_{21}$

2.5 Зусилля  $N_{25}$ . Оскільки стрижень належить до стрижнів категорії 1, то розглянемо вузол, до якого приєднаний цей стрижень. Шпренгель відкинемо, перерозподіливши зусилля до вузлів основної ферми (рисунок 2.6).



$$\sum Y = 0, \quad \frac{F_4}{2} + \frac{F_5}{2} - N_{28} = 0,$$

$$N_{28} = \frac{F_4}{2} + \frac{F_5}{2} = \frac{60}{2} + \frac{30}{2} = 45 \text{ кН.}$$

Рисунок 2.6 – Визначення зусиль у стрижні  $N_{25}$

3 Побудуємо лінії впливу для зазначених стрижнів і визначимо зусилля в цих стрижнях по лініях впливу (рисунок 2.7).

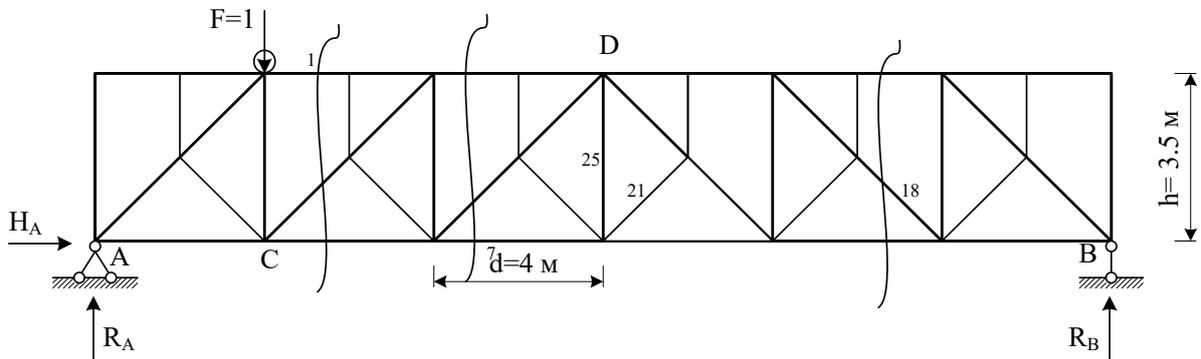


Рисунок 2.7 – Розрахункова схема для побудов ліній впливу в стрижнях

3.1 Побудова лінії впливу  $N_1$ . Для цього проведемо переріз через стрижень 1. Моментна точка С (рисунок 2.7).

Вантаж справа від панелі  
з перерізом:

$$\begin{aligned} \sum M_C^{\text{ЛіВ}} &= 0, \\ R_A \cdot d + N_1 \cdot h &= 0, \\ N_1 &= \frac{-R_A \cdot d}{h} = -1.14R_A. \end{aligned}$$

Вантаж зліва від панелі  
з перерізом:

$$\begin{aligned} \sum M_C^{\text{Прав}} &= 0, \\ R_B \cdot 5d + N_1 \cdot h &= 0, \\ N_1 &= \frac{-R_B \cdot 5d}{h} = -5.71R_B. \end{aligned}$$

3.2 Побудова лінії впливу  $N_7$ . Для цього проведемо переріз через стрижень 7. Моментна точка D (рисунок 2.7).

Вантаж справа від панелі  
з перерізом:

$$\begin{aligned} \sum M_D^{\text{ЛіВ}} &= 0, \\ R_A \cdot 3d - N_7 \cdot h &= 0, \\ N_7 &= \frac{R_A \cdot 3d}{h} = 3.42R_A. \end{aligned}$$

Вантаж зліва від панелі  
з перерізом:

$$\begin{aligned} \sum M_D^{\text{Прав}} &= 0, \\ R_B \cdot 3d - N_7 \cdot h &= 0, \\ N_7 &= \frac{R_B \cdot 3d}{h} = 3.42R_B. \end{aligned}$$

3.3 Побудова лінії впливу  $N_{18}$ . Для цього проведемо переріз через стрижень 18 (рисунок 2.7).

Вантаж справа від панелі  
з перерізом:

$$\sum Y = 0,$$

$$R_A - N_{18} \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$N_{18} = \frac{R_A}{\sin\alpha} = 1.52R_A.$$

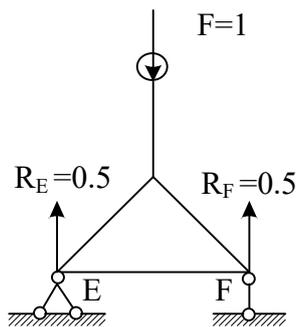
Вантаж зліва від панелі  
з перерізом:

$$\sum Y = 0,$$

$$R_B + N_{18} \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$N_{18} = \frac{-R_B}{\sin\alpha} = -1.52R_B.$$

3.4 Побудова лінії впливу  $N_{21}$ . Стрижень 21 належить шпренгелю. Тому розглянемо окремо шпренгель. Вирижемо вузол E та спроектуємо всі сили на вісь Y (рисунок 2.8, 2.9).

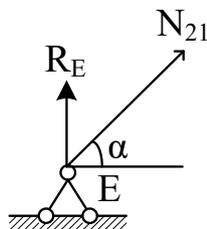


$$\sum Y = 0, \quad R_E + N_{21} \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$N_{21} = \frac{-R_E}{\sin\alpha} = \frac{-0.5}{0.6586} = -0.759.$$

Рисунок 2.8 – Розрахункова схема  
побудови лінії впливу  $N_{21}$ .

Вантаж у вузлу



$$\sum Y = 0, \quad R_E + N_{21} \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$N_{21} = 0.$$

Рисунок 2.9 – Розрахункова схема  
побудови лінії впливу  $N_{21}$ .

Вантаж поза вузлом

3.5 Побудова лінії впливу  $N_{25}$ . Стрижень 25 належить лише фермі (рисунки 2.10, 2.11). Оскільки стрижень належить до стрижнів категорії 1, то розглянемо вузол, до якого приєднаний цей стрижень. Навантаження по нижньому поясу.

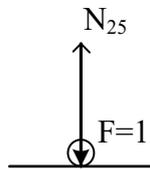


Рисунок 2.10 – Розрахункова схема побудови лінії впливу  $N_{25}$

Вантаж у вузлу  
 $\sum Y = 0, F - N_{25} = 0,$   
 $N_{25} = F = 1.$

Вантаж поза вузлом  
 $\sum Y = 0, N_{25} = 0.$

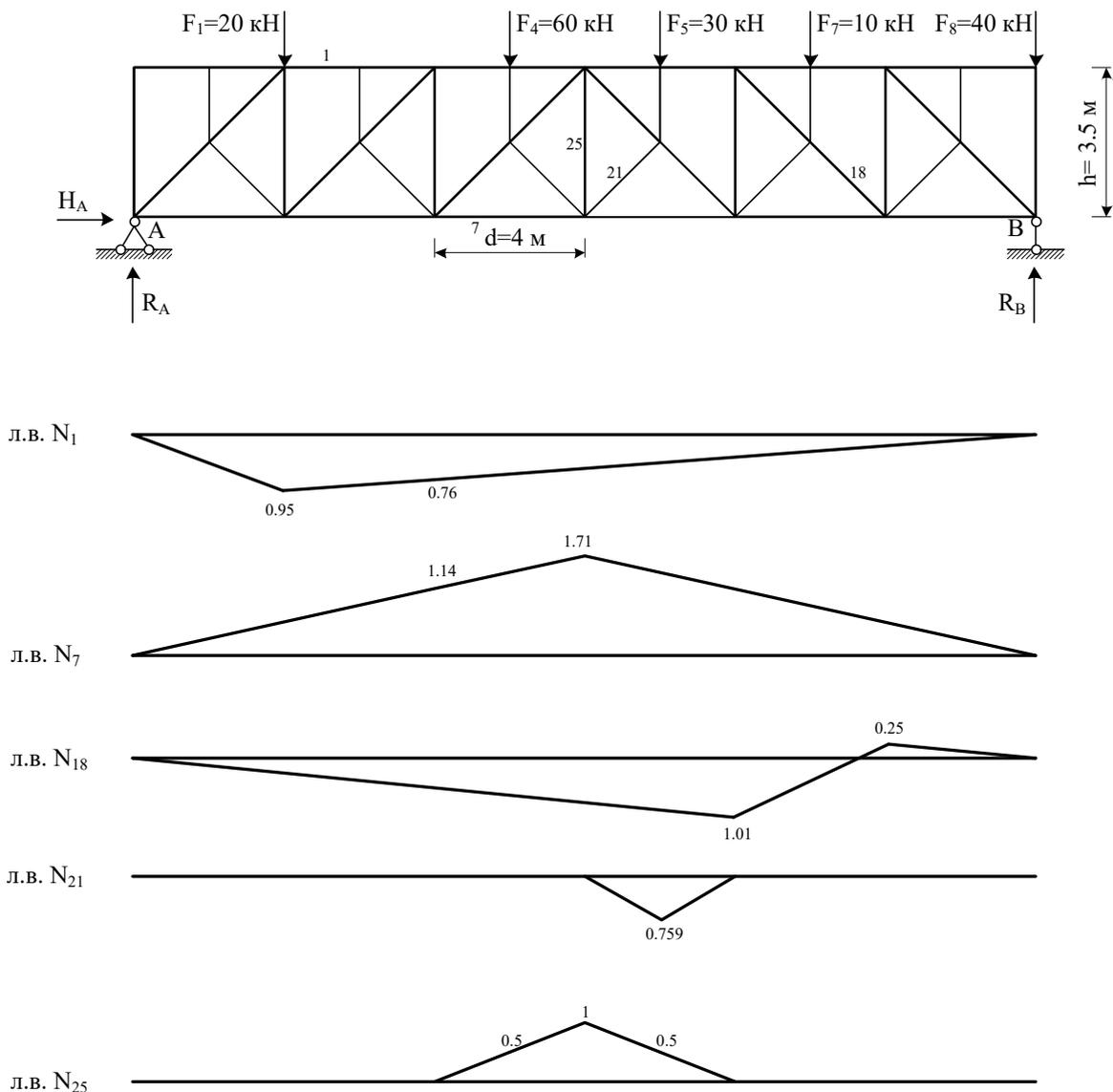


Рисунок 2.11 – Лінії впливу в стрижнях

4 Визначимо зусилля в стрижнях, завантаживши лінії впливу зовнішніми силами.

$$N_1 = F_1 \cdot (-0.95) + F_4 \cdot (-0.665) + F_5 \cdot (-0.475) + F_7 \cdot (-0.285) = \\ = 20 \cdot (-0.95) + 60 \cdot (-0.665) + 30 \cdot (-0.475) + 10 \cdot (-0.285) = -76 \text{ кН,}$$

$$N_7 = F_1 \cdot 0.57 + F_4 \cdot 1.425 + F_5 \cdot 1.425 + F_7 \cdot 0.855 = \\ = 20 \cdot 0.57 + 60 \cdot 1.425 + 30 \cdot 1.425 + 10 \cdot 0.855 = 148.2 \text{ кН,}$$

$$N_{18} = F_1 \cdot (-0.2525) + F_4 \cdot (-0.63125) + F_5 \cdot (-0.88375) + F_7 \cdot (-0.38) = \\ = 20 \cdot (-0.2525) + 60 \cdot (-0.63125) + 30 \cdot (-0.88375) + 10 \cdot (-0.38) = \\ = -73.24 \text{ кН,}$$

$$N_{21} = F_5 \cdot (-0.759) = 30 \cdot (-0.759) = -22.77 \text{ кН,}$$

$$N_{25} = F_4 \cdot 0.5 + F_5 \cdot 0.5 = 60 \cdot 0.5 + 30 \cdot 0.5 = 45 \text{ кН.}$$

#### *Запитання для самоконтролю*

1 Вкажіть формулу для визначення кількості ступенів свободи в плоских фермах.

2 Що називають фермою?

3 Як може діяти навантаження на ферму?

4 Як забезпечено вузлове передавання навантаження у фермах залізничних мостів?

5 Що таке прогін ферми?

6 Що таке панель ферми?

7 Що таке висота ферми?

8 Які стрижні ферми називають поясними?

9 Які стрижні ферми відносять до решітки?

10 Які типи решіток відносять до простих?

11 До якого типу решітки належить напіврозкісна решітка?

12 Який пояс ферми називають вантажним?

13 Чому реакції опор у фермі називають балочними?

14 Коли для визначення внутрішніх сил у фермі можна застосовувати спосіб вирізання вузла?

15 Коли для визначення внутрішніх сил у фермі можна застосовувати спосіб моментної точки?

16 Коли для визначення внутрішніх сил у фермі можна застосовувати спосіб проєкцій?

17 Вкажіть тип решітки, де застосовано способи складних і подвійних перерізів.

18 Що треба робити, щоб зменшити внутрішні сили в поясах ферми?

19 Що треба робити, щоб зменшити внутрішні сили в розкосах ферми з паралельними поясами?

20 Що називають шпренгелем?

21 Що дає застосування шпренгелів?

22 Які шпренгелі називають одноярусними?

23 Які шпренгелі називають двоярусними?

24 Скільки різновидів стрижнів мають місце у фермах з одноярусними шпренгелями?

25 Який додатковий тип стрижнів має місце у фермах із двоярусними шпренгелями?

26 Як можна визначити внутрішню силу в стрижні ферми, який належить одночасно основній фермі і шпренгелю?

27 Як можна визначити внутрішню силу в стрижні ферми, який належить шпренгелю, у випадку, коли не можна скористатися методом перерізів?

28 Чому ординати ліній впливу внутрішніх сил у стрижнях ферми між її вузлами змінюються за лінійним законом?

29 Як побудувати лінію впливу в стрижнях ферми зі шпренгельною решіткою, коли стрижень належить основній фермі?

30 Як побудувати лінію впливу в стрижнях ферми зі шпренгельною решіткою, коли стрижень належить шпренгелю?

31 Як побудувати лінію впливу в стрижнях ферми, що неоднаково працюють із їздою по верхньому і нижньому поясах ферми?

32 Що називають стрижнем ферми, який належить одночасно основній фермі і шпренгелю?

33 Що називають стрижнем ферми, який належить основній фермі?

34 Що називають стрижнем ферми, який належить шпренгелю?

35 Вкажіть формулу для визначення за лінією впливу величини поздовжньої сили від заданої системи зосереджених сил.

36 Які внутрішні зусилля виникають у перерізах стрижнів ферми з вузловим передаванням навантаження?

37 Яку деформацію зазнають стрижні ферми за вузлового передавання навантаження?

38 Як визначають зусилля у стрижнях ферми?

39 Вкажіть формулу для визначення кількості ступенів свободи в просторових фермах.

### **3 РОЗРАХУНОК РОЗПІРНОЇ СИСТЕМИ**

#### *План розв'язання задачі*

1 Від заданого навантаження визначити внутрішні зусилля в перерізі « $k$ ».

2 Побудувати лінії впливу внутрішніх зусиль у зазначеному перерізі.

3 Визначити зусилля по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти з даними, отриманими в пункті 1.

Розрахункова схема наведена на рисунку 3.1.

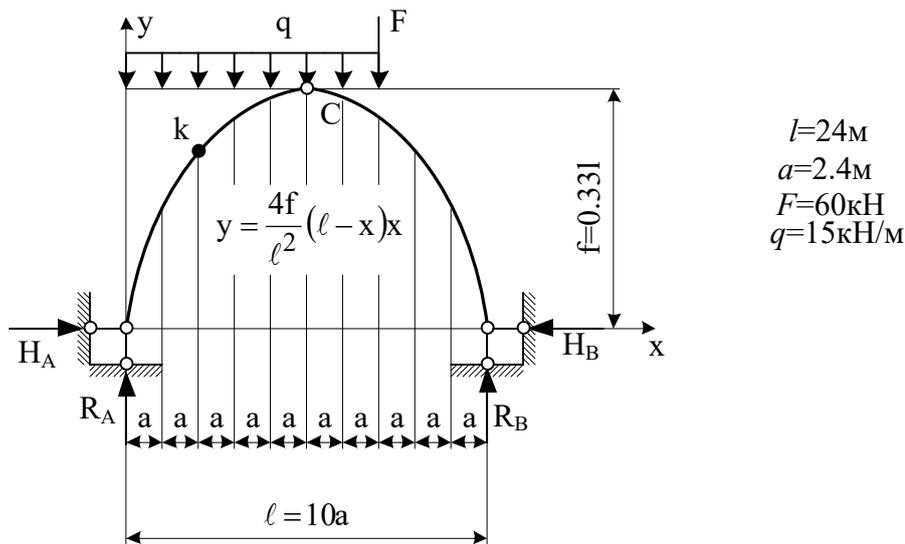


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема

*Розв'язання*

1 Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0,$$

$$F \cdot 7a + q \cdot 7a \cdot 3.5a - R_B \cdot 10a = 0,$$

$$R_B = \frac{F \cdot 7a + q \cdot 7a \cdot 3.5a}{10a} = \frac{60 \cdot 7 \cdot 2.4 + 15 \cdot 7 \cdot 2.4 \cdot 3.5 \cdot 2.4}{10 \cdot 2.4} = 130.2 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$F \cdot 3a + q \cdot 7a \cdot 6.5a - R_A \cdot 10a = 0,$$

$$R_A = \frac{F \cdot 3a + q \cdot 7a \cdot 6.5a}{10a} = \frac{60 \cdot 3 \cdot 2.4 + 15 \cdot 7 \cdot 2.4 \cdot 6.5 \cdot 2.4}{10 \cdot 2.4} = 181.8 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{\text{лів}} = 0,$$

$$H_A \cdot f + q \cdot 5a \cdot 2.5a - R_A \cdot 5a = 0,$$

$$H_A = \frac{-q \cdot 5a \cdot 2.5a + R_A \cdot 5a}{f} = \frac{-15 \cdot 5 \cdot 2.4 \cdot 2.5 \cdot 2.4 + 181.8 \cdot 5 \cdot 2.4}{0.33 \cdot 24} =$$

$$= 139.09 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0 \quad F + q \cdot 7a - R_B - R_A = 0,$$

$$\sum X = 0 \quad H_A - H_B = 0,$$

$$60 + 15 \cdot 7 \cdot 2.4 - 130.2 - 181.8 = 0,$$

$$H_B = H_A = 139.09 \text{ кН}.$$

2 Визначимо внутрішні зусилля в точці  $k$ . Для цього проведемо переріз через точку  $k$  і відкинемо праву частину розпірної системи:

- визначимо координати точки  $k$ :

$$x_k = 2a = 2 \cdot 2.4 = 4.8 \text{ м},$$

$$y_k = \frac{4f}{l^2} (l - x_k) \cdot x_k = \frac{4 \cdot 0.33 \cdot 24}{24^2} (24 - 4.8) \cdot 4.8 = 5.07 \text{ м};$$

- визначимо внутрішні зусилля:

$$M_k = R_A \cdot x_k - q \cdot x_k \cdot \frac{x_k}{2} - H_A \cdot y_k =$$

$$= 181.8 \cdot 4.8 - 15 \cdot 4.8 \cdot 2.4 - 139.09 \cdot 5.07 = -5.34 \text{ кН},$$

$$Q_k = (-q \cdot x_k + R_A) \cos \varphi - H \sin \varphi,$$

$$N_k = -((-q \cdot x_k + R_A) \sin \varphi + H \cos \varphi),$$

$$tg \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = \frac{4 \cdot 0.33 \cdot 24}{24^2} (24 - 2 \cdot 4.8) = 0.792,$$

$$\varphi = 38.38^\circ \quad \sin \varphi = 0.6209^\circ \quad \cos \varphi = 0.7839^\circ,$$

$$Q_k = (-15 \cdot 4.8 + 181.8) \cdot 0.7839 - 139.09 \cdot 0.6209 = -0.29 \text{ кН},$$

$$N_k = -((-15 \cdot 4.8 + 181.8) \cdot 0.6209 + 139.09 \cdot 0.7839) = -177.21 \text{ кН},$$

3 Побудуємо лінії впливу для внутрішніх зусиль (рисунок 3.2).

Для побудови лінії впливу розпору використовуємо формулу для розрахунку внутрішнього зусилля розпору. З цієї формули випливає:

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_B^C \frac{1}{f} = \text{л.в. } M_B^C \frac{1}{7.92}.$$

Лінію впливу моменту в перерізі  $k$  записуємо так:

$$\text{л.в. } M_k = \text{л.в. } M_B^K - \text{л.в. } H(y_k) = \text{л.в. } M_B^K - \text{л.в. } H(5.07).$$

Для побудови лінії впливу поперечної сили в перерізі  $k$  використовуємо формулу

$$\text{Л.В. } Q_k = \text{Л.В. } Q_B^K \cos \phi_k - \text{Л.В. } H \sin \phi_k = \text{Л.В. } Q_B^K \cdot 0,7839 + \text{Л.В. } H \cdot 0,6209.$$

Лінію впливу  $N_k$  у відповідності з формулою будемо будувати так:

$$\text{Л.В. } N_k = -\text{Л.В. } Q_B^K \sin \phi_k - \text{Л.В. } H \cos \phi_k = -\text{Л.В. } Q_B^K \cdot 0,6209 - \text{Л.В. } H(-0,7839).$$

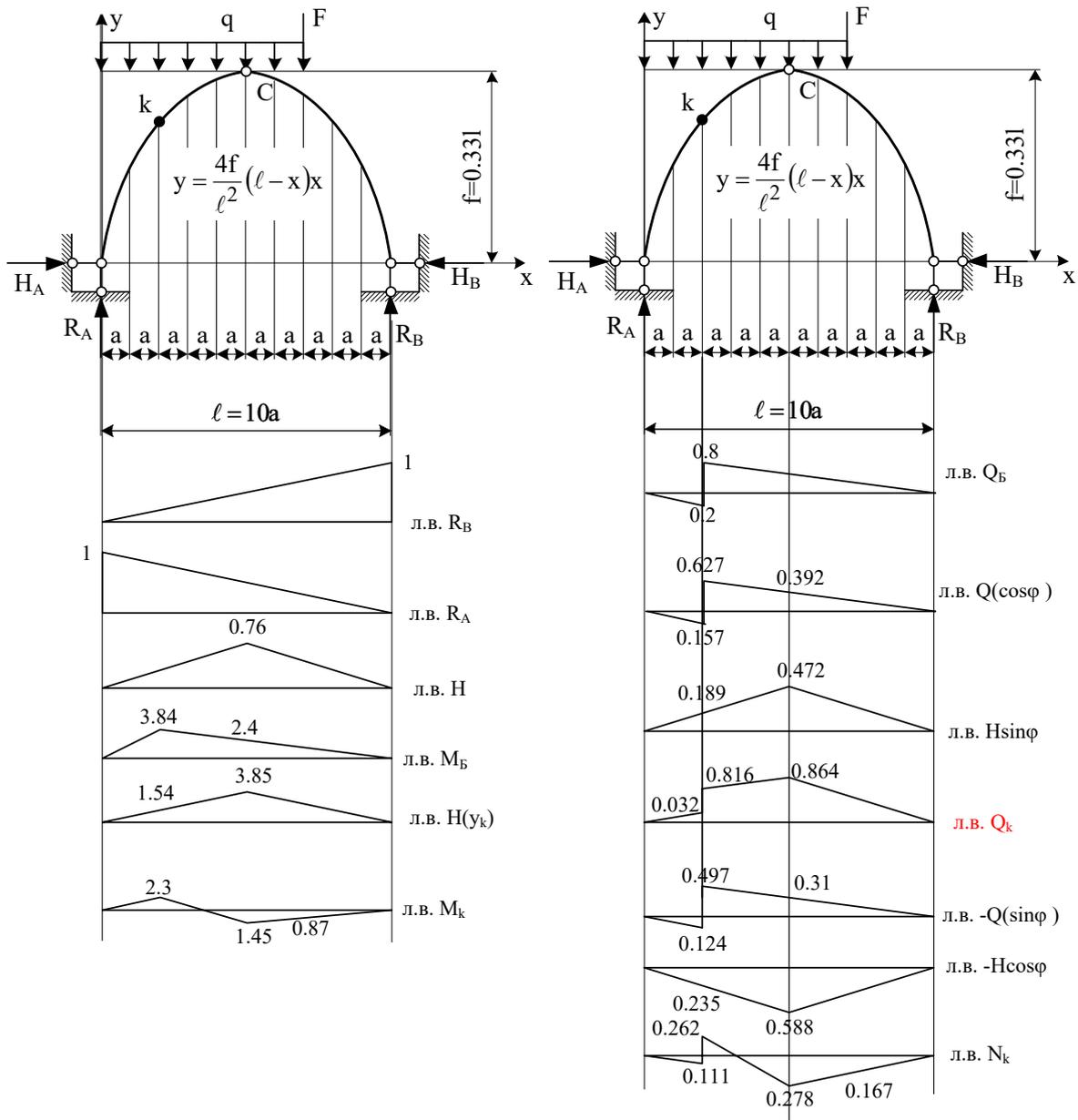


Рисунок 3.2 – Лінії впливу

4 Визначимо зусилля в стрижнях, завантаживши лінії впливу зовнішніми силами.

$$\begin{aligned}
M_k &= q \cdot (0.5 \cdot 2.32 \cdot 2 \cdot a) + q \cdot (0.5 \cdot 2.32 \cdot 1.84 \cdot a) + \\
&+ q \cdot (-0.5 \cdot 1.45 \cdot 1.16 \cdot a) + q \cdot (-0.87 \cdot 2 \cdot a) + q \cdot (-0.5 \cdot 0.58 \cdot 2 \cdot a) + \\
&+ F \cdot (-0.87) = 15 \cdot (0.5 \cdot 2.32 \cdot 2 \cdot 2.4) + 15 \cdot (0.5 \cdot 2.32 \cdot 1.84 \cdot 2.4) + \\
&+ 15 \cdot (-0.5 \cdot 1.45 \cdot 1.16 \cdot 2.4) + 15 \cdot (-0.87 \cdot 2 \cdot 2.4) + \\
&+ 15 \cdot (-0.5 \cdot 0.58 \cdot 2 \cdot 2.4) + 60 \cdot (-0.87) = -5.63 \text{ кН},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_k &= q \cdot (-0.5 \cdot 0.114 \cdot 2 \cdot a) + q \cdot (-0.735 \cdot 3a) + q \cdot (-0.5 \cdot 0.171 \cdot 3a) + \\
&+ q \cdot (-0.544 \cdot 2a) + q \cdot (-0.5 \cdot 0.362 \cdot 2 \cdot a) + F \cdot (-0.544) = \\
&= 15 \cdot (-0.5 \cdot 0.114 \cdot 2 \cdot 2.4) + 15 \cdot (-0.735 \cdot 3 \cdot 2.4) + \\
&+ 15 \cdot (-0.5 \cdot 0.171 \cdot 3 \cdot 2.4) + 15 \cdot (-0.544 \cdot 2 \cdot 2.4) + \\
&+ 15 \cdot (-0.5 \cdot 0.362 \cdot 2 \cdot 2.4) + 60 \cdot (-0.544) = -177.582 \text{ кН},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_k &= q \cdot (-0.5 \cdot 0.346 \cdot 2 \cdot a) + q \cdot (0.5 \cdot 0.438 \cdot 2.54 \cdot a) + \\
&+ q \cdot (-0.5 \cdot 0.08 \cdot 0.46 \cdot a) + q \cdot (-0.048 \cdot 2 \cdot a) + q \cdot (-0.5 \cdot 0.032 \cdot 2 \cdot a) + \\
&+ F \cdot (-0.048) = 15 \cdot (-0.5 \cdot 0.346 \cdot 2 \cdot 2.4) + 15 \cdot (0.5 \cdot 0.438 \cdot 2.54 \cdot 2.4) + \\
&+ 15 \cdot (-0.5 \cdot 0.08 \cdot 0.46 \cdot 2.4) + 15 \cdot (-0.048 \cdot 2 \cdot 2.4) + \\
&+ 15 \cdot (-0.5 \cdot 0.032 \cdot 2 \cdot 2.4) + 60 \cdot (-0.048) = -0.274 \text{ кН}.
\end{aligned}$$

### *Запитання для самоконтролю*

- 1 Які системи називають розпірними?
- 2 Яку систему називають арочною?
- 3 Яку систему називають висячою?
- 4 Як називають тришарнірну систему, у якій як диски застосовують криволінійні стрижні?
- 5 Як називають тришарнірну систему, у якій як диски застосовують ламані стрижні?
- 6 Як може діяти навантаження на арочну ферму?
- 7 Як називають тришарнірну систему, у якій як диски застосовують ферми?
- 8 Коли замість тришарнірної арки застосовують тришарнірну арку з затяжкою?

9 У якій із систем виникають більші вертикальні опорні реакції за однакового навантаження і довжини прогону?

10 Чому вертикальні реакції опор в арці називають балочними?

11 У якій із систем виникають більші поперечні сили за однакового навантаження і довжини прогону?

12 У якій із систем виникають більші згинальні моменти за однакового навантаження і довжини прогону?

13 Який обрис тришарнірної арки для заданого навантаження називають раціональним?

14 За якою формулою обчислюють величину розпору в тришарнірній арці?

15 За якою формулою обчислюють зусилля в затяжці?

16 За якою формулою обчислюють значення розпору в тришарнірній рамі з однаковими стійками?

17 Яку перевагу має тришарнірна ферма порівняно з тришарнірною аркою?

18 Як працює під навантаженням комбінована система?

19 Чому дорівнює горизонтальна проєкція внутрішньої сили в елементах гнучкої арки комбінованої системи?

20 Вкажіть формулу для визначення за лінією впливу величини згинального моменту від заданої системи зосереджених сил.

21 Яким має бути навантаження у формулі для визначення внутрішньої сили?

22 Як змінюються ординати лінії впливу між вузлами за вузлового передавання навантаження?

23 Що таке лінія впливу?

24 Яку формулу необхідно застосувати для отримання внутрішнього зусилля за лінією впливу?

25 Який пояс аочної ферми називають вантажним?

26 Що називають шпренгелем?

## 4 РОЗРАХУНОК ПЕРЕМІЩЕННЯ В ПЛОСКИХ РАМАХ ВІД ДІЇ ЗОВНІШНІХ СИЛ

*План розв'язання задачі*

У перерізі «к» рам визначити лінійні або кутові переміщення від зовнішнього навантаження, температури і зміщення опорних зв'язків (розрахункова схема наведена на рисунку 4.1).

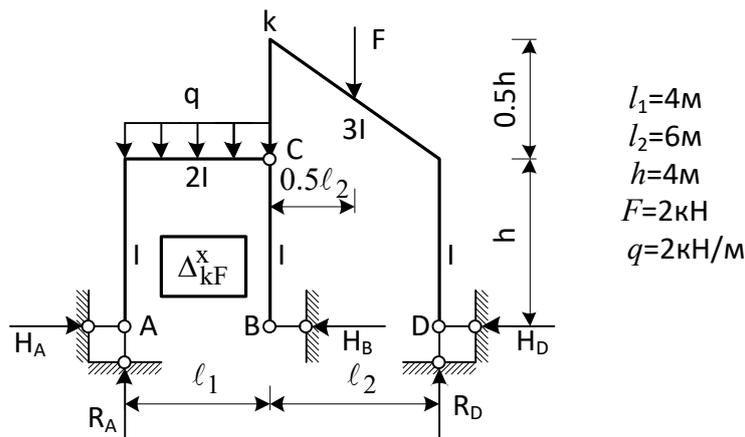


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема

*Розв'язання*

1 Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0 \quad F \cdot (l_1 + 0.5l_2) + q \cdot l_1 \cdot 0.5l_1 - R_D \cdot (l_1 + l_2) = 0,$$

$$R_D = \frac{F \cdot (l_1 + 0.5l_2) + q \cdot l_1 \cdot 0.5l_1}{l_1 + l_2} = \frac{2 \cdot (4 + 0.5 \cdot 6) + 2 \cdot 4 \cdot 2}{4 + 6} = 3 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0, \quad F \cdot 0.5l_2 + q \cdot l_1 \cdot (l_2 + 0.5l_1) - R_A \cdot (l_1 + l_2) = 0,$$

$$R_A = \frac{F \cdot 0.5l_2 + q \cdot l_1 \cdot (l_2 + 0.5l_1)}{(l_1 + l_2)} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot (6 + 0.5 \cdot 4)}{4 + 6} = 7 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{\text{пр.с}} = 0, \quad R_D \cdot l_2 - F \cdot 0.5l_2 - H_D \cdot h = 0,$$

$$H_D = \frac{R_D \cdot l_2 - F \cdot 0.5l_2}{h} = \frac{3 \cdot 6 - 2 \cdot 0.5 \cdot 6}{4} = 3 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{\text{л.с}} = 0, \quad R_A \cdot l_1 - q \cdot l_1 \cdot 0.5l_1 - H_A \cdot h = 0,$$



### 3.1 Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0,$$

$$F \cdot 1.5h - R_D \cdot (l_1 + l_2) = 0,$$

$$R_D = \frac{F \cdot 1.5h}{l_1 + l_2} = \frac{1.5 \cdot 4}{4 + 6} = 0.6 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0,$$

$$F \cdot 1.5h + R_A \cdot (l_1 + l_2) = 0,$$

$$R_A = \frac{-F \cdot 1.5h}{(l_1 + l_2)} = \frac{-1.5 \cdot 4}{4 + 6} = -0.6 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{\text{np.c}} = 0,$$

$$R_D \cdot l_2 - F \cdot 0.5h - H_D \cdot h = 0,$$

$$H_D = \frac{R_D \cdot l_2 - F \cdot 0.5h}{h} = \frac{0.6 \cdot 6 - 0.5 \cdot 4}{4} = 0.4 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{\text{H.c}} = 0,$$

$$H_B \cdot h = 0,$$

$$H_B = 0 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0,$$

$$-R_D - R_A = 0,$$

$$\sum X = 0,$$

$$H_A - H_B - H_D + F = 0,$$

$$H_A = H_B + H_D - F = -0.6 \text{ кН}.$$

### 3.2 Побудуємо епюру моментів від дії одиничної сили (рисунок 4.4).

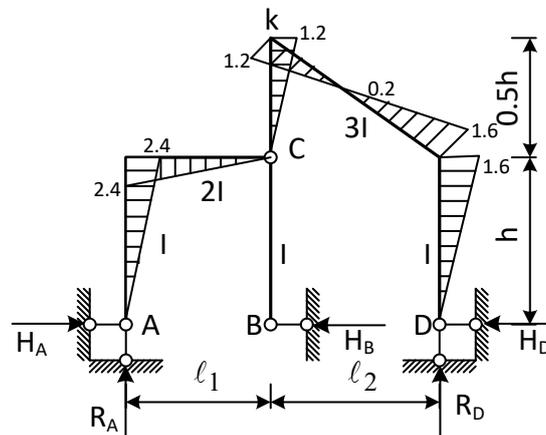


Рисунок 4.4 – Одинична епюра моментів

### 4 Визначимо переміщення, перемноживши епюри моментів:

$$\Delta_{kF}^x = \frac{4}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 6 \cdot (-1.2) + 12 \cdot (-2.4)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{12EI} (12 \cdot (-2.4) + 4 \cdot 2 \cdot (-1.2) + 0 \cdot 0) + \\
& + \frac{2}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) \cdot (-0.6) + (-6) \cdot (-1.2)) + \\
& + \frac{6.32}{18EI} ((-6) \cdot (-1.2) + 4 \cdot 6 \cdot 0.2 + 12 \cdot 1.6) + \\
& + \frac{4}{6EI} (12 \cdot 1.6 + 4 \cdot 6 \cdot 0.8 + 0 \cdot 0) = \\
& = -\frac{38.4}{EI} - \frac{12.8}{EI} + \frac{4.8}{EI} + \frac{10.95}{EI} + \frac{25.6}{EI} = -\frac{9.85}{EI}.
\end{aligned}$$

#### 4.1 Розрахунок переміщення в плоских рамах від дії температури

(рисунок 4.5)

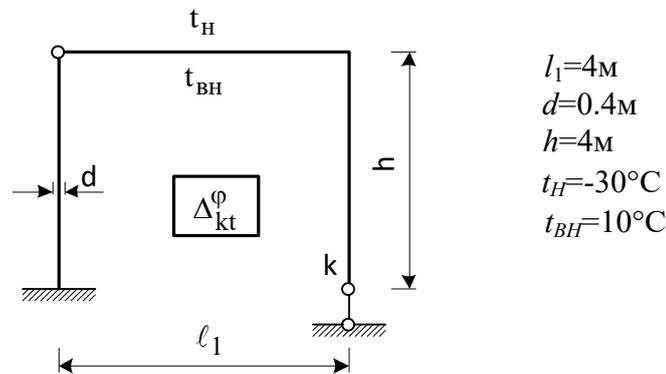


Рисунок 4.5 – Розрахункова схема

Визначимо температуру по осі елементів, що складають раму, і модуль різниці внутрішньої та зовнішньої температур:

$$t_{cp} = \frac{t_H + t_{BH}}{2} = \frac{-30 + 10}{2} = -10 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$t = |t_H - t_{BH}| = |-30 - 10| = 40 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Відповідно до завдання, прикладемо в точці k зосереджений одиничний момент M і побудуємо одиничну епюру моментів і поздовжніх сил (рисунок 4.6).

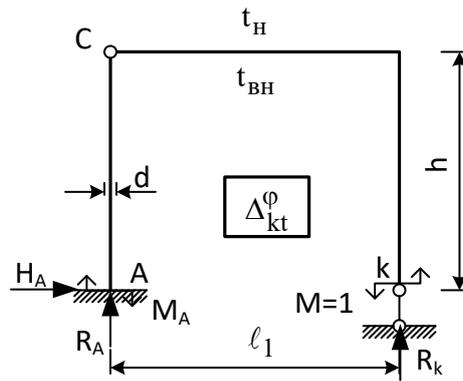


Рисунок 4.6 – Розрахункова схема для визначення опорних реакцій

Визначимо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, & & \sum M_C^{pp.c} = 0, & & \sum M_C^{H.c} = 0, \\ M - M_A = 0, & & R_k \cdot l_1 + M = 0, & & H_A \cdot h - M_A = 0, \\ M_A = M = 1 \text{ кНм}, & & R_k = -\frac{M}{l_1} = -0.25 \text{ кН}, & & H_A = \frac{M_A}{h} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ кН}, \end{aligned}$$

$$\sum Y = 0 \quad R_k + R_A = 0 \quad R_A = -R_k = 0.25 \text{ кН}.$$

Побудуємо епюру моментів і поздовжніх сил від дії одиничного моменту (рисунок 4.7).

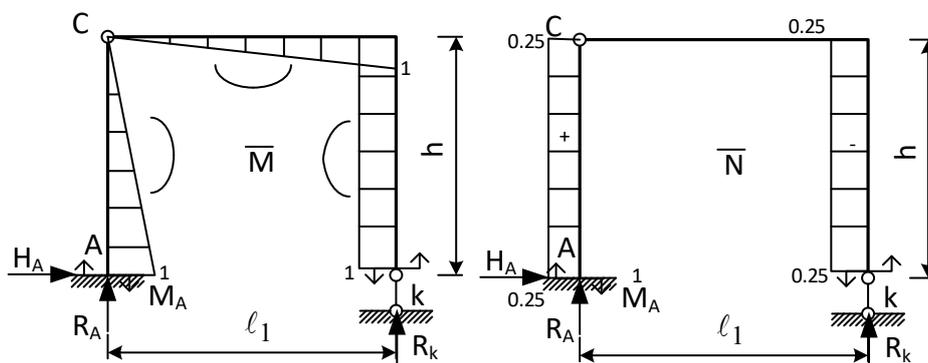


Рисунок 4.7 – Одиничні епюри моментів і поздовжніх сил

Визначимо переміщення. Для визначення переміщень від дії температури скористаємося формулою

$$\Delta_{kt} = \pm \sum \alpha t_{cp} \omega_N \pm \sum \frac{\alpha t}{h} \omega_M,$$

де  $\omega_N$ ,  $\omega_M$  – площі епюр  $N$  і  $M$  на ділянках, що розглядають.

Правила знаків перед першим і другим членами формули прийняті такі:

- перед першим членом знак «плюс» прийнято в тому випадку, якщо поздовжня сила і температура  $t$  викликають одночасно укорочення або подовження елемента. Якщо температура вкорочує (подовжує) елемент, а поздовжня сила подовжує (укорочує), то перед першим членом формули ставлять знак «мінус»;

- перед другим членом формули знак «плюс» прийнято в тому випадку, якщо температура і згинальний момент викривляють елемент, що розглядають, в один бік. Якщо в різні боки – знак «мінус».

Отже, щоб визначити будь-яке переміщення від заданого температурного впливу, необхідно до споруди прикласти узагальнену одиничну силу в задану точку  $K$  і побудувати одиничні епюри  $N_k$  і  $M_k$ . Далі переміщення визначають за формулою

$$\begin{aligned} \Delta_{kt}^{\varphi} &= -\alpha \cdot 10 \cdot 0.25 \cdot 4 + (-\alpha \cdot 10 \cdot (-0.25) \cdot 4) + \frac{\alpha \cdot 40}{0.4} (0.5 \cdot 1 \cdot 4) + \\ &+ \frac{\alpha \cdot 40}{0.4} (0.5 \cdot 1 \cdot 4) + \frac{\alpha \cdot 40}{0.4} (1 \cdot 4) = \alpha(200 + 200 + 400) = 800\alpha. \end{aligned}$$

## 4.2 Розрахунок переміщення в плоских рамах від зміщення опорних зв'язків (рисунок 4.8)

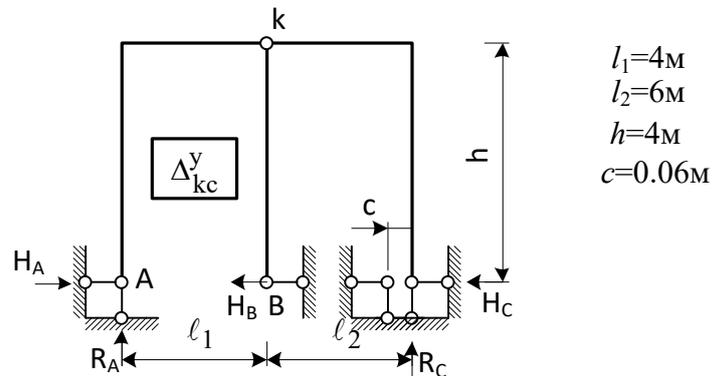


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема

Відповідно до завдання, прикладемо в точці  $k$  зосереджену одиничну силу  $F$  і визначимо опорні реакції (рисунок 4.9).

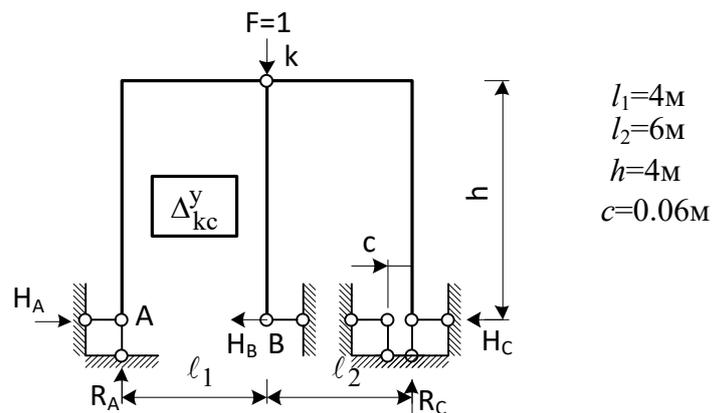


Рисунок 4.9 – Розрахункова схема для визначення опорних реакцій

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, & & \sum M_C = 0, & & \sum Y = 0, \\ F \cdot l_1 - R_C \cdot (l_1 + l_2) = 0, & & F \cdot l_2 - R_A \cdot (l_1 + l_2) = 0, & & R_C + R_A - F = 0, \\ R_C = \frac{F \cdot l_1}{l_1 + l_2} = & & R_A = \frac{F \cdot l_2}{(l_1 + l_2)} = & & \\ = \frac{1 \cdot 4}{4 + 6} = 0.4 \text{ кН}, & & = \frac{1 \cdot 6}{4 + 6} = 0.6 \text{ кН}, & & \end{aligned}$$

$$\sum M_k^{\text{пр.с}} = 0,$$

$$R_C \cdot l_2 - H_C \cdot h = 0,$$

$$H_C = \frac{R_C \cdot l_2}{h} = \frac{0.4 \cdot 6}{4} = 0.6 \text{ кН.}$$

Визначимо переміщення. Для знаходження переміщень від заданого зсуву зв'язків використовуємо формулу

$$\Delta_{kc} = -\sum_{i=1}^Y R_{ki} c_i,$$

де  $R_{ki}$  – реакція, що виникає від одиничної узагальненої сили, прикладеної в точці  $k$  за напрямком шуканого переміщення в можливому стані  $i$  зв'язку, зсув якого заданий.

Добуток  $R_{ki} c_i$  вважають додатним, якщо напрямок зсуву зв'язку і напрямок зусилля, що в ньому виникає, збігаються.

Для того щоб знайти переміщення якоїсь точки від заданого зсуву зв'язків, необхідно в точці  $k$  за напрямком шуканого переміщення прикласти одиничну силу (момент) і знайти реакції в тих зв'язках системи, що за умовою задачі переміщуються. Далі потрібно скористатися формулою

$$\Delta_{kc}^y = -H_C \cdot c = -0.6 \cdot 0.06 = -0.036 \text{ м.}$$

*Запитання для самоконтролю*

- 1 Що називають переміщенням?
- 2 Що означає перший індекс у позначенні переміщення?
- 3 Що означає другий індекс у позначенні переміщення?
- 4 Які переміщення системи називають можливими?
- 5 Яку роботу зовнішніх сил називають дійсною?
- 6 Коли роботу зовнішніх сил називають можливою?
- 7 Коли теорема Бетті про взаємність можливих робіт є дійсною?

8 Що треба прикласти в одиничному стані для визначення лінійного переміщення за методом Мора?

9 Що означає від'ємне значення переміщення, отриманого за формулою Мора?

10 Як треба брати ординату для обчислення інтеграла Мора із застосуванням правила Верещагіна?

11 У якому випадку обчислення інтеграла Мора із застосуванням правила Сімпсона-Корноухова дає його точне значення?

12 Чому не можна застосувати безпосередньо формулу Мора для визначення переміщень від дії температури?

13 Що треба прикласти в одиничному стані для визначення кутового переміщення за методом Мора?

14 Що таке пружний вантаж?

15 Як призначають фіктивну балку?

16 Від чого залежить значення коефіцієнта в інтегралі Мора?

17 Чому дорівнює степінь свободи точки на площині?

18 Що показує ордината лінії впливу?

19 Яку розмірність має ордината лінії впливу згинального моменту?

20 Що називають шпренгелем?

## **5 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ СИЛ ВІД ДІЇ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*План розв'язання задачі*

1 Визначити міру статичної невизначності.

2 Вибрати основну систему.

3 Побудувати в основній системі епюри згинальних моментів від одиничних невідомих і зовнішнього навантаження.

4 Скласти систему канонічних рівнянь.

5 Визначити коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь і перевірити правильність обчислень.

6 Розв'язати систему та перевірити правильність розрахунку.

7 Побудувати епюру згинальних моментів у заданій статично невизначній рамі і перевірити її правильність.

8 Побудувати епюри поперечних і повздовжніх сил у заданій статично невизначній рамі і перевірити їхню правильність.

Розрахункова схема наведена на рисунку 5.1.

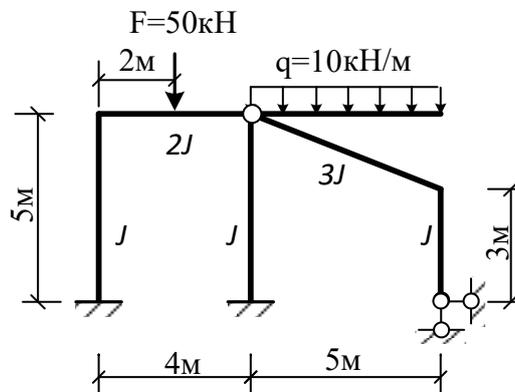


Рисунок 5.1 – Розрахункова схема статично невизначної рами

### Розв'язання

1 Визначення ступеня статичної невизначності. Ступінь статичної невизначності визначаємо виходячи з поняття замкнутого контуру (рисунок 5.2):

$$L = 3K - Ш,$$

де  $K$  – кількість замкнутих контурів;

$Ш$  – кількість простих шарнірів.

Обчислюючи кількість замкнутих контурів, урахуємо елемент «земля». У шарнірно-нерухомій опорі завжди присутні один замкнутий контур і чотири простих шарніри.

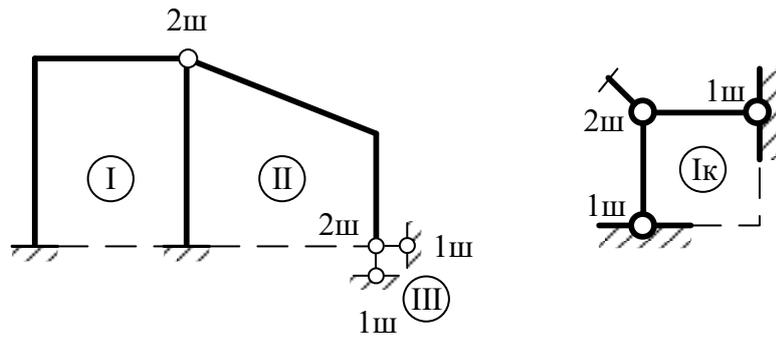


Рисунок 5.2 – Визначення ступеня статичної невизначності

$$L = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 3 - 6 = 3,$$

тобто задана рама є тричі статично невизначною системою.

2 Вибір основної системи. Основну систему отримаємо із заданої розрахункової схеми, відкидаючи умовно зайві зв'язки. Зв'язки необхідно відкидати так, щоб система залишалася геометрично незмінною. Крім того, вибираючи основну систему, необхідно дотримуватися таких умов: епюри згинальних моментів (одиничні та вантажні), побудовані в основній системі, повинні мати якомога більше нульових ділянок; кількість обчислень, пов'язаних із визначенням коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь, має бути мінімальною. Оскільки задана рама двічі статично невизначна, то відкидаємо два зв'язки і замінюємо їх невідомими реакціями  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Основну систему вибираємо з декількох можливих варіантів (рисунок 5.3).

Для подальшого розрахунку приймаємо основну систему за першим варіантом (рисунок 5.3, а).

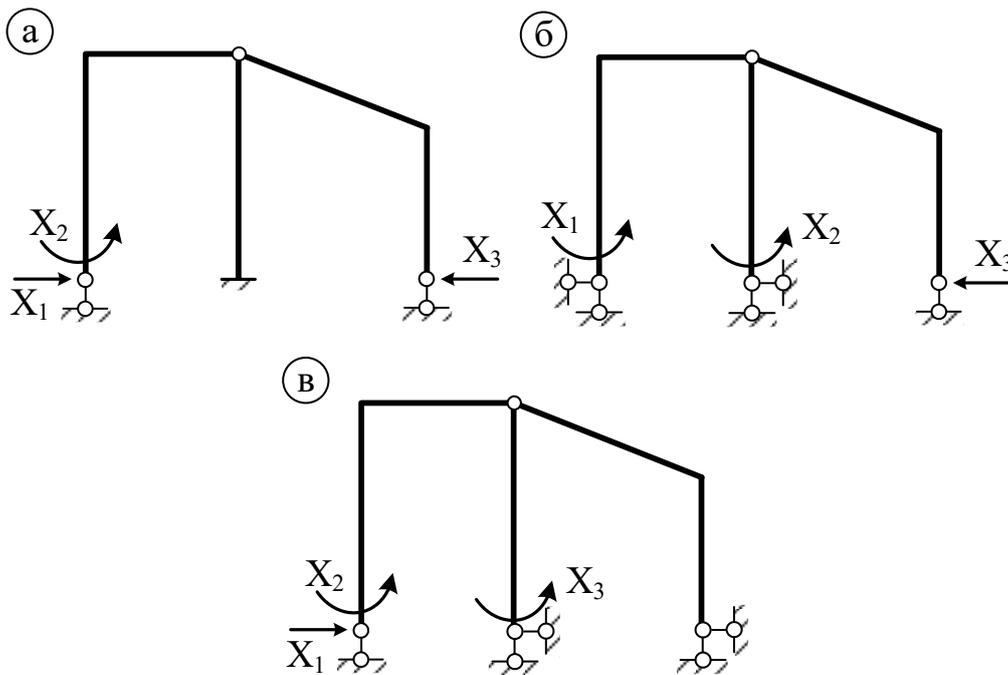


Рисунок 5.3 – Варіанти основної системи

3 Система канонічних рівнянь. Умову еквівалентності основної і заданої систем записують як систему канонічних рівнянь. Кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, отже, система складатиметься з трьох рівнянь:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0,$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь. Використаємо принцип незалежності дії сил. Будемо розглядати основну систему, що зазнає дії одного з невідомих. При цьому значення невідомого зусилля буде дорівнювати одиниці.

Ураховуючи, що рама – це конструкція, елементи якої працюють переважно на згин, обмежимося визначенням тільки згинального моменту, що виникає в характерних перерізах споруди. Значення коефіцієнтів системи визначаємо за формулою Мора

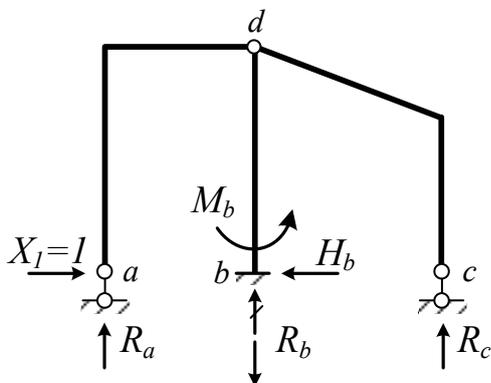
$$\delta_{ij} = \int_a^b \frac{M_i M_j ds}{EI}.$$

Слід зазначити, що коефіцієнти головної діагоналі є завжди додатними, а інші можуть бути від'ємними чи дорівнювати нулю. Обчислюємо інтеграли («перемноження» епюр згинальних моментів) з урахуванням правила Верещагіна чи Сімпсона-Корноухова:

$$\int_a^b M_i M_j ds = \omega \cdot y_0,$$

$$\int_a^b M_i M_j ds = \frac{\ell}{6EI} (M_i^n M_j^n + 4M_i^c M_j^c + M_i^n M_j^n).$$

Розрахункові схеми для побудови одиночних епюр і одиночні епюри наведені на рисунках 5.4-5.9.



$$\Sigma X = 0: H_b = 1,$$

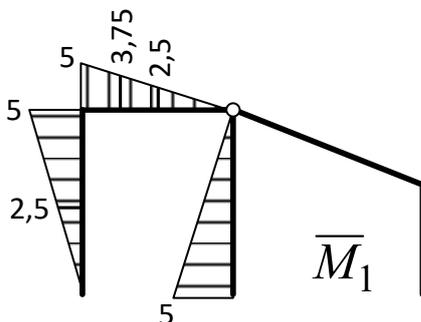
$$\Sigma M_d^{\text{пр. сил}} = 0: R_c = 0,$$

$$\Sigma M_d^{\text{л. сил}} = 0: R_a \cdot 4 - X_1 \cdot 5 = 0, R_a = \frac{5}{4},$$

$$\Sigma M_d^{\text{ниж}} = 0: -M_b + H_b \cdot 5 = 0, M_b = 5,$$

$$\Sigma M_a = 0: -M_b - R_b \cdot 4 = 0, R_b = -\frac{5}{4}.$$

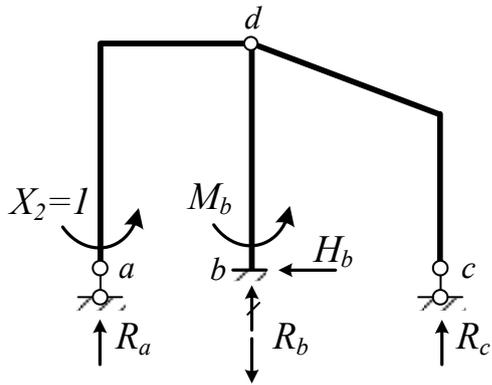
Рисунок 5.4 – Розрахункова схема для побудови одиночної епюри  $M_1$



$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{125}{3EJ} + \frac{50}{3EJ} + \frac{125}{3EJ} = \frac{100}{EJ}.$$

Рисунок 5.5 – Одиночна епюра  $M_1$



$$\Sigma X = 0: -H_b = 0,$$

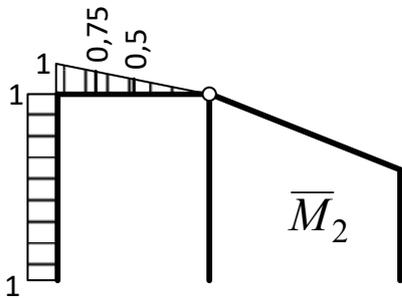
$$\Sigma M_d^{\text{пр.сил}} = 0: R_c = 0,$$

$$\Sigma M_d^{\text{ниж}} = 0: -M_b = 0,$$

$$\Sigma M_d^{\text{л}} = 0: R_a \cdot 5 - X_2 = 0, \quad R_a = \frac{1}{5},$$

$$\Sigma M_a = 0: -X_2 - R_b \cdot 5 = 0, \quad R_b = -\frac{1}{5}.$$

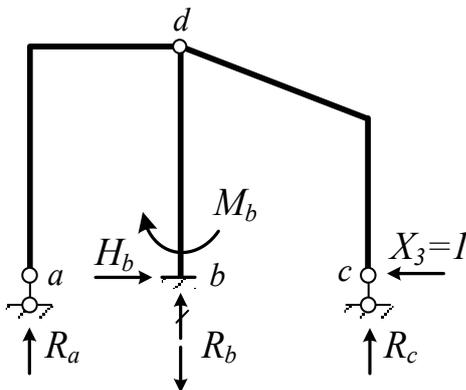
Рисунок 5.6 – Розрахункова схема для побудови одиночної епюри  $M_2$



$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 =$$

$$= \frac{5}{EJ} + \frac{4}{6EJ} = \frac{5,67}{EJ}.$$

Рисунок 5.7 – Одиночна епюра  $M_2$



$$\Sigma X = 0: H_b - X_3 = 0, \quad H_b = 1,$$

$$\Sigma M_d^{\text{л}} = 0: R_a = 0,$$

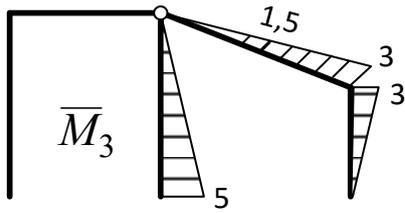
$$\Sigma M_d^{\text{пр.сил}} = 0: X_3 \cdot 5 - R_c \cdot 5 = 0, \quad R_c = 1,$$

$$\Sigma M_d^{\text{ниж}} = 0: M_b - H_b \cdot 5 = 0, \quad M_b = 5,$$

$$\Sigma M_a = 0: M_b - R_b \cdot 4 - R_c \cdot 9 = 0,$$

$$R_c = \frac{5-9}{4} = -1.$$

Рисунок 5.8 – Розрахункова схема для побудови одиночної епюри  $M_3$



$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \\ &+ \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \\ &= \frac{125}{3EJ} + \frac{9}{EJ} + \frac{\sqrt{29}}{EJ} = \frac{56,052}{EJ}. \end{aligned}$$

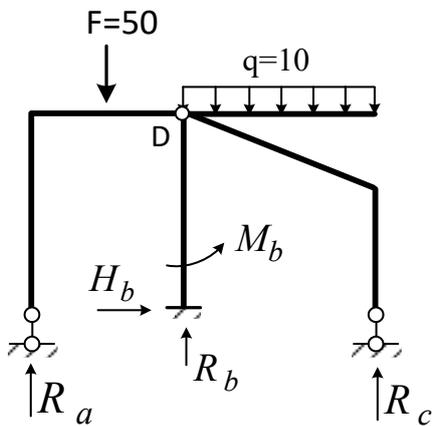
Рисунок 5.9 – Одиночна епюра  $M_3$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{12,5}{EJ} + \frac{10}{3EJ} = \frac{16,839}{EJ},$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0,$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 5 = -\frac{41,667}{EJ}.$$

Будуємо вантажну (від зовнішнього навантаження) епюру моментів (рисунок 5.10, 5.11) і визначаємо вільні члени:



$$\Sigma M_D^{\text{лєв}} = 0: R_a \cdot 4 - F \cdot 2 = 0, R_a = 25 \text{ кН},$$

$$\Sigma M_D^{\text{ниж}} = 0: M_b = 0,$$

$$\Sigma M_D^{\text{пр.сил}} = 0: q \cdot 5 \cdot 2,5 - R_c \cdot 5 = 0,$$

$$R_c = \frac{q \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = 25 \text{ кН},$$

$$\Sigma M_a = F \cdot 2 - R_b \cdot 4 + q \cdot 5 \cdot 6,5 - R_c \cdot 9 = 0,$$

$$R_b = \frac{100 + 50 \cdot 6,5 - 25 \cdot 9}{4} = 50,$$

$$\Sigma y = 0: R_a + R_b + R_c - F - q \cdot 5 = 0,$$

$$25 + 50 + 25 - 5 - 10 \cdot 5 = 0.$$

Рисунок 5.10 – Розрахункова схема для побудови вантажної епюри

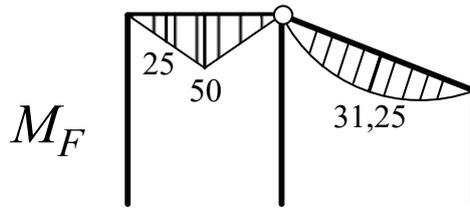


Рисунок 5.11 – Вантажна епюра

$$\Delta_{1F} = \frac{2}{6 \cdot 2EJ} (0 \cdot 5 - 4 \cdot 25 \cdot 3,75 - 2,5 \cdot 50) +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2,5 \cdot 2}{2} \left( -\frac{2}{3} \cdot 50 \right) = -\frac{83,333}{EJ} - \frac{41,667}{EJ} = -\frac{125}{EJ},$$

$$\Delta_{2F} = \frac{2}{6 \cdot 2EJ} (1 \cdot 0 - 0,75 \cdot 4 \cdot 25 - 0,5 \cdot 50) +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{0,5 \cdot 2}{2} \left( -\frac{2}{3} \cdot 50 \right) = -\frac{16,667}{EJ} - \frac{8,333}{EJ} = -\frac{25}{EJ},$$

$$\Delta_{3F} = \frac{\sqrt{29}}{6 \cdot 3EJ} (0 \cdot 0 - 4 \cdot 1,5 \cdot 31,25 - 0 \cdot 0) = -\frac{56,095}{EJ}.$$

5 Перевірка правильності визначення коефіцієнтів і вільних членів.  
Для перевірки будемо сумарну одиничну епюру моментів (рисунок 5.12):

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3.$$

У характерних точках підсумовуємо ординати епюр з урахуванням знака і відкладаємо з боку більшої ординати.

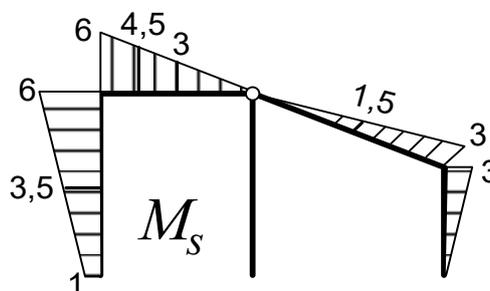


Рисунок 5.12 – Сумарна одинична епюра моментів

Виконуємо універсальну перевірку:

$$\delta_{SS} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2 \cdot (\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23}).$$

Обчислюємо ліву частину формули:

$$\begin{aligned} \delta_{SS} &= \frac{5}{6EJ} (1^2 + 4 \cdot 3,5^2 + 6^2) + \frac{1}{2EJ} \frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 6 + \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{3\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 3 + \\ &+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EJ} + \frac{71,667}{EJ} + \frac{24}{EJ} + \frac{5,385}{EJ} = \frac{110,052}{EJ}. \end{aligned}$$

Обчислюємо праву частину формули:

$$\begin{aligned} \delta_{SS} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = \\ &= \frac{100}{EJ} + \frac{15,839}{EJ} - \frac{41,667}{EJ} + \frac{15,833}{EJ} + \frac{5,667}{EJ} + 0 - \frac{41,667}{EJ} + \\ &+ 0 + \frac{56,052}{EJ} = \frac{110,051}{EJ}. \end{aligned}$$

Порівнюючи ліву і праву частини, бачимо, що рівність виконана, отже, коефіцієнти системи канонічних рівнянь визначені правильно. Якщо результати не співпали, необхідно виконати порядкову перевірку, тобто перевірити окремо коефіцієнти кожного рівняння. Проілюструємо це.

Виконаємо перевірку коефіцієнтів першого рівняння:

$$\begin{aligned} \delta_{1S} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EI} ds = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}, \\ \delta_{1S} &= \frac{5}{6EJ} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 3,5 \cdot 2,5 + 5 \cdot 6) + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 0 = \\ &= \frac{54,167}{EJ} + \frac{20}{EJ} = \frac{74,167}{EJ}, \\ \delta_{1S} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} = \frac{100}{EJ} + \frac{15,833}{EJ} - \frac{41,667}{EJ} = \frac{74,166}{EJ}. \end{aligned}$$

Рівність правої і лівої частин вказує на те, що коефіцієнти першого рівняння визначено правильно.

Аналогічно виконуємо перевірку коефіцієнтів другого і третього рівнянь:

$$\delta_{2S} = \frac{1}{EJ} \cdot 3,5 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{17,5}{EJ} + \frac{4}{EJ} = \frac{21,5}{EJ},$$

$$\delta_{2S} = \frac{15,833 + 5,667 + 0}{EJ} = \frac{21,5}{EJ},$$

$$\delta_{3S} = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{\sqrt{29} \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{\sqrt{29}}{EJ} + \frac{9}{EJ} = \frac{14,385}{EJ},$$

$$\delta_{3S} = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = -\frac{41,667}{EJ} + 0 + \frac{56,052}{EJ} = \frac{14,385}{EJ}.$$

Перевіряємо правильність обчислення вільних членів:

$$\begin{aligned} \Delta_{SF} &= \frac{2}{6 \cdot 2EJ} (6 \cdot 0 - 4 \cdot 25 \cdot 4,5 - 3 \cdot 50) + \\ &+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \left( -\frac{2}{3} \cdot 50 \right) + \frac{\sqrt{29}}{6 \cdot 3EJ} \times (0 \cdot 0 - 4 \cdot 1,5 \cdot 31,25 - 0 \cdot 0) = \\ &= -\frac{100}{EJ} - \frac{50}{EJ} - \frac{56,095}{EJ} = -\frac{206,095}{EJ}, \\ \Delta_{SF} &= \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \Delta_{3F} = -\frac{125}{EJ} - \frac{25}{EJ} - \frac{56,095}{EJ} = -\frac{206,095}{EJ}. \end{aligned}$$

Рівність правої і лівої частини вказує на те, що вільні члени системи канонічних рівнянь визначені правильно.

6 Розв'язання системи канонічних рівнянь. Розв'язуємо систему канонічних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} 100x_1 + 15,833x_2 - 41,667x_3 &= 125 \\ 15,833x_1 + 5,667x_2 + 0 \cdot x_3 &= 25 \\ -41,667x_1 + 0 \cdot x_2 + 56,052x_3 &= 56,095 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= 3,907 \\ x_2 &= -6,504. \\ x_3 &= 3,905 \end{aligned}$$

7 Будуємо епюру моментів у заданій статично невизначній системі за формулою

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + M_f.$$

Тобто необхідно підсумувати ординати виправлених одиничних і вантажної епюри моментів у характерних точках з урахуванням знака ординат (рисунки 5.13, 5.14).

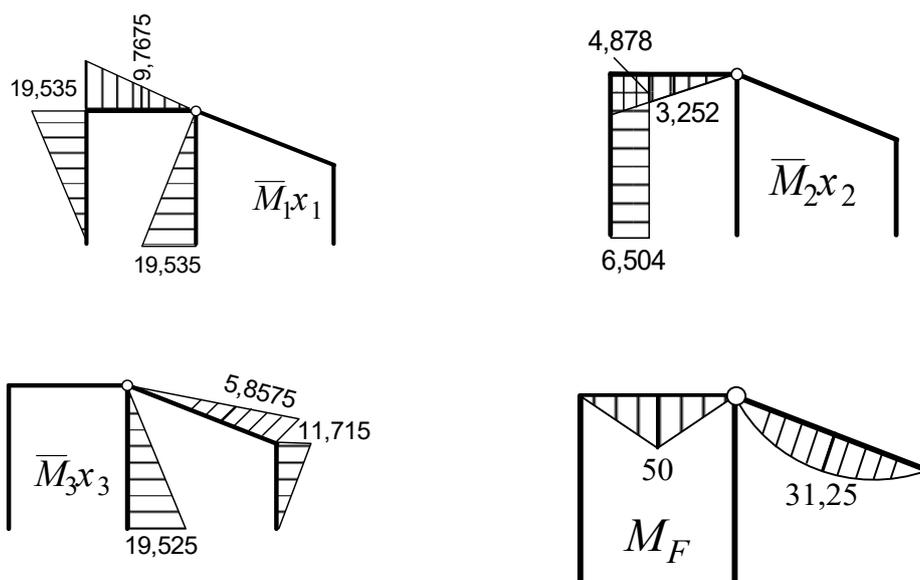


Рисунок 5.13 – Виправлені одиничні та вантажна епюри моментів

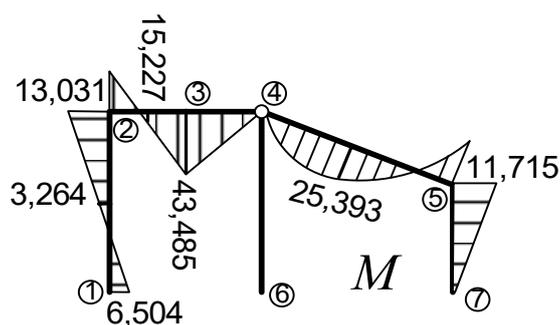


Рисунок 5.14 – Остаточна епюра моментів

Виправлені епюри ( $M_1 X_1$ ,  $M_2 X_2$ ,  $M_3 X_3$ ) отримуємо множенням ординат одиничних епюр на відповідне значення невідомих ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ).

Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо епюра моментів побудована правильно має виконуватися умова: результат перемноження остаточної епюри моментів на будь-яку з одиничних чи сумарну має дорівнювати нулю.

$$\sum \int \frac{M\bar{M}_s}{EI} ds = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta M\bar{M}_s &= \frac{5}{6EJ} (13,031 \cdot 6 + 4 \cdot 3,264 \cdot 3,5 - 1 \cdot 6,504) + \frac{2}{6 \cdot 2EJ} \times \\ &\times (13,031 \cdot 6 - 4 \cdot 4,5 \cdot 15,227 - 43,485 \cdot 3) + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 43,485 + \\ &+ \frac{\sqrt{29}}{6 \cdot 3EJ} \times (0 \cdot 0 - 4 \cdot 1,5 \cdot 25,393 + 11,715 \cdot 3) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 11,715 = \\ &= \frac{97,815 - 54,393 - 43,485 - 35,067 + 35,145}{EJ} = \frac{0,015}{EJ}. \end{aligned}$$

8 Побудова епюри поперечних сил  $Q$ . Розрахункову епюру поперечних сил (рисунок 5.15) будуюмо за допомогою епюри моментів із використанням залежності

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l},$$

де  $Q^0$  – балочна поперечна сила, поперечна сила від зовнішнього навантаження;

$M_n, M_{n-1}$  – величини згинальних моментів на кінцях розглянутої ділянки.

Кожен елемент рами розглядаємо як балку на двох опорах, завантажену опорними моментами і зовнішнім навантаженням (якщо зовнішнє навантаження на ділянці відсутнє, то  $Q^0 = 0$ ).

$$Q_{1-2} = \frac{-13,031 - 6,504}{5} = -3,906 \text{ кН},$$

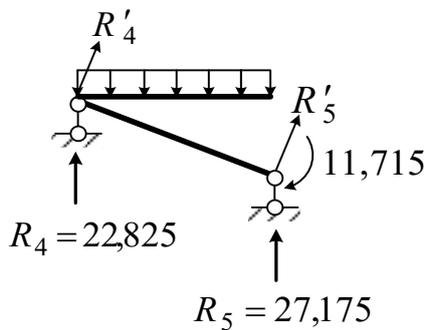
$$Q_{2-3} = \frac{43,485 + 13,031}{2} = 28,258 \text{ кН},$$

$$Q_{3-4} = \frac{0 - 43,485}{2} = 21,742 \text{ кН},$$

$$Q_{5-7} = \frac{0 - (-11,75)}{3} = 3,906 \text{ кН},$$

$$Q_4 = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_5 - M_4}{\ell} = \frac{10 \cdot 5}{2} + \frac{-11,715 - 0}{\sqrt{29}} = 22,825 \text{ кН},$$

$$Q_5 = -\frac{10 \cdot 5}{2} + \frac{-11,715 - 0}{\sqrt{29}} = -27,175 \text{ кН}.$$



$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} = 0,928, \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} = 0,371,$$

$$R' = R \cdot \cos \alpha,$$

$$R'_4 = 22,825 \cdot 0,928 = 21,182,$$

$$R'_5 = 27,175 \cdot 0,928 = 25,218,$$

$$-R_5 \cdot 5 + 11,715 + q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0, \quad R_5 = 27,313,$$

$$R_4 \cdot 5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + 11,715 = 0, \quad R_4 = 22,657,$$

$$R'_4 = 21,025, \quad R'_5 = 25,374.$$

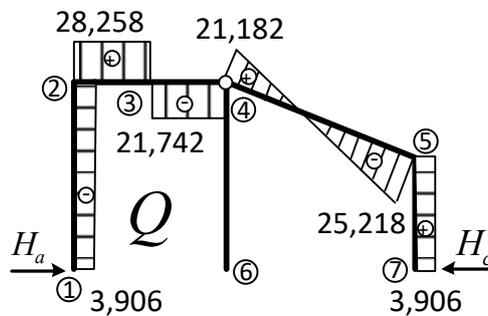
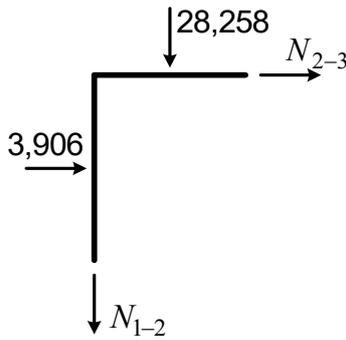


Рисунок 5.15 – Епюра поперечних сил

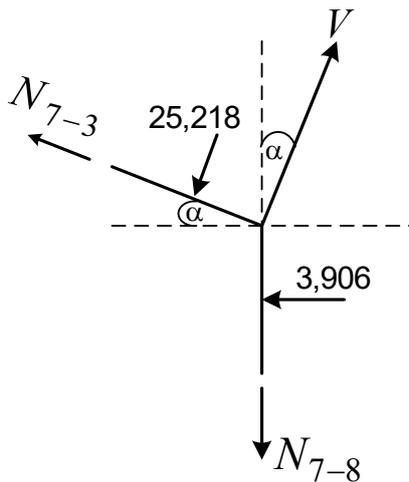
9 Побудова епюри поздовжніх сил  $N$ . Епюру поздовжніх сил (рисунок 5.16) будемо способом вирізання вузлів з епюри  $Q$  і складанням рівнянь рівноваги  $\sum Y = 0$ ,  $\sum X = 0$ .



$$\Sigma x = 0: N_{2-3} + 3,906 = 0, N_{2-3} = -3,906 \text{ кН},$$

$$\Sigma y = 0: -N_{1-2} - 28,258 = 0,$$

$$N_{1-2} = -28,258 \text{ кН}.$$



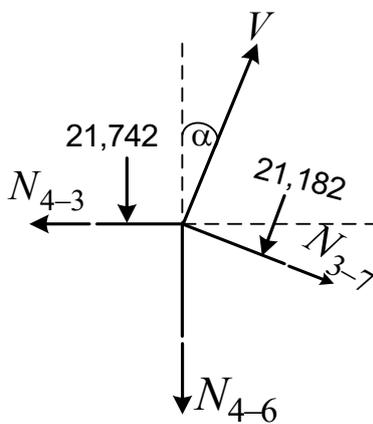
$$\Sigma x = 0: -N_{7-3} \cdot \cos \alpha - 3,906 - 25,218 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_{7-3} = \frac{-3,906 - 25,218 \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = -14,291 \text{ кН},$$

$$\Sigma V = 0:$$

$$-25,218 - N_{7-8} \cdot \cos \alpha - 3,906 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_{7-8} = \frac{-25,218 - 3,906 \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = -28,736 \text{ кН}.$$



$$\Sigma x = 0: -N_{4-3} - 21,182 \cdot \sin \alpha + N_{3-7} \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$N_{3-7} = \frac{21,182 \cdot \sin \alpha + (-3,906)}{\cos \alpha} = 4,259 \text{ кН},$$

$$\Sigma V = 0: -21,182 - N_{4-6} \cdot \cos \alpha - 21,742 \cdot \cos \alpha - N_{4-3} \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_{4-6} = \frac{-21,182 - 21,742 \cdot \cos \alpha - N_{4-3} \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= -43,006 \text{ кН}.$$

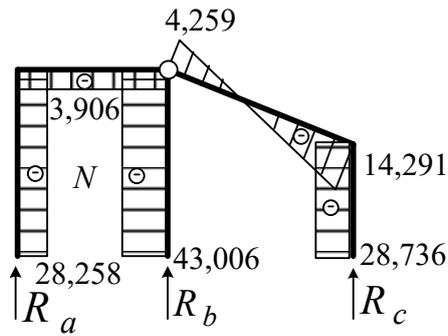


Рисунок 5.16 – Епюра поздовжніх сил

10 Перевірка правильності побудови епюр  $Q$  і  $N$ . Розглянемо рівновагу рамі під дією зовнішнього навантаження і опорних реакцій. Величини і напрямки реакцій приймаємо з епюр  $Q$  і  $N$ . Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0: \quad H_a - H_c &= 0, \quad 3,906 - 3,906 = 0, \\ \Sigma y = 0: \quad R_a + R_b + R_c - F - q \cdot 5 &= 0, \\ 28,258 + 43,006 + 28,736 - 50 - 10 \cdot 5 &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки рівняння виконані, система знаходиться в рівновазі.

#### Запитання для самоконтролю

- 1 Коли розрахунок статично невизначних систем відбувається за схемою методу сил?
- 2 За якою формулою визначають ступінь статичної невизначності рам для розрахунків методом сил?
- 3 Як отримують основну систему за методом сил?
- 4 Як обчислюють коефіцієнти канонічних рівнянь за методом сил?
- 5 Чи можна довести, що коефіцієнти системи канонічних рівнянь з однаковими індексами завжди додатні?
- 6 Як найбільш повно перевірити правильність обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь за методом сил?
- 7 Яку перевірку використовують для контролю правильності визначення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь методу сил?

8 Як перевірити правильність визначення вільних членів системи канонічних рівнянь методу сил?

9 На підставі чого найпростіше обчислити внутрішні сили в статично невизначній системі?

10 Як перевірити правильність побудови епюри згинальних моментів у статично невизначній системі?

11 За яких умов остаточно епюра моментів побудована правильно?

12 За яких умов остаточно епюра поперечних сил побудована правильно?

13 Що називають переміщенням?

14 Що означає перший індекс у позначенні переміщення?

15 Що означає другий індекс у позначенні переміщення?

16 Які переміщення системи називають можливими?

17 Яку роботу зовнішніх сил називають дійсною?

18 Коли роботу зовнішніх сил називають можливою?

19 Коли теорема Бетті про взаємність можливих робіт є дійсною?

20 Що треба прикласти в одиничному стані для визначення лінійного переміщення за методом Мора?

21 Що означає від'ємне значення переміщення, отриманого за формулою Мора?

22 Як треба брати ординату для обчислення інтеграла Мора із застосуванням правила Верещагіна?

23 У якому випадку обчислення інтеграла Мора із застосуванням правила Сімпсона-Корноухова дає його точне значення?

24 Чому не можна застосувати безпосередньо формулу Мора для визначення переміщень від дії температури?

## **6 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ ВІД ДІЇ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

### *План розв'язання задачі*

- 1 Визначити кількість невідомих.
  - 2 Вибрати основну систему.
  - 3 Побудувати в основній системі епюри згинальних моментів від одиничних невідомих і зовнішнього навантаження.
  - 4 Скласти систему канонічних рівнянь.
  - 5 Визначити коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь і перевірити правильність обчислень.
  - 6 Розв'язати систему та перевірити правильність розрахунку.
  - 7 Побудувати епюру згинальних моментів у заданій статично невизначній рамі і перевірити її правильність.
  - 8 Побудувати епюри поперечних і повздовжніх сил у заданій статично невизначній рамі і перевірити їхню правильність.
- Розрахункова схема наведена на рисунку 6.1.

### *Розв'язання*

1 Визначення ступеня кінематичної невизначності. Загальну кількість невідомих незалежних переміщень вузлів рами визначаємо за формулою

$$n = n_y + n_l,$$

де  $n_y$  – кількість можливих кутових переміщень;

$n_l$  – кількість можливих лінійних переміщень.

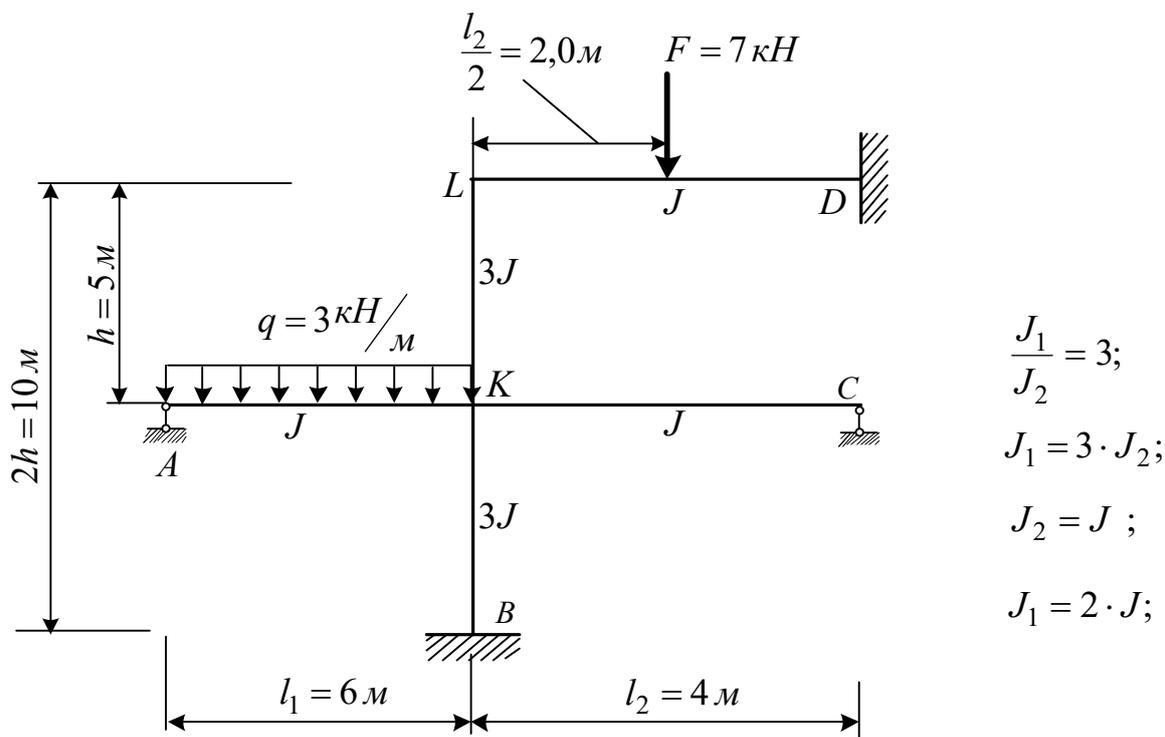


Рисунок 6.1 – Розрахункова схема статично невизначної системи

У розглянутій рамі значення  $n_y$  дорівнює кількості жорстких вузлів без урахування опорних вузлів  $n_y = 2$  (вузли  $L$  і  $K$ ).

Для визначення кількості лінійних невідомих  $n_l$  необхідно замінити задану систему шарнірно-стрижневою схемою введенням повних шарнірів у всі жорсткі вузли (точки  $L$  і  $K$ ) і опорні закріплення (точки  $B$  і  $D$ ).

Кількість лінійних переміщень вузлів системи дорівнює кількості стрижнів, які необхідно ввести в шарнірно-стрижневу схему, щоб перетворити її на геометрично незмінну. Аналізуючи шарнірно-стрижневу систему, бачимо, що вузли  $A$ ,  $C$  можуть переміщуватися по горизонталі. Щоб обмежити переміщення цих вузлів, додаємо один горизонтальний стрижень.

Загальна кількість невідомих переміщень дорівнює

$$n = n_g + n_l = 2 + 1 = 3.$$

2 Основна система методу переміщень. Основну систему (рисунок 6.2) отримуємо введенням в усі жорсткі вузли плаваючих закріплень (вузли  $L$  і  $K$ ) і постановкою додаткових стрижнів (вузол  $C$ ), що перешкоджають лінійним переміщенням вузлів.

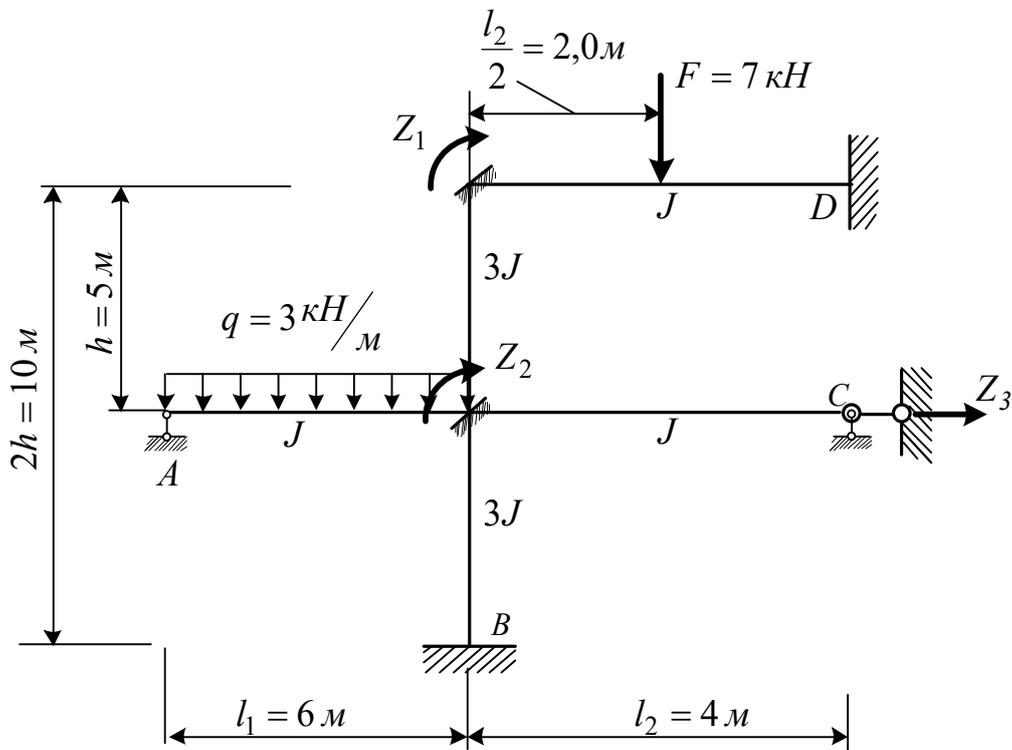


Рисунок 6.2 – Основна система методу переміщень

За основні невідомі методи переміщень приймаємо кутові ( $Z_1$ ,  $Z_2$ ) і лінійні ( $Z_3$ ) переміщення вузлів.

3 Система канонічних рівнянь. Основна система відрізняється від заданої додатковими зв'язками. У введених закріпленнях виникають реактивні моменти, у додаткових стрижнях – реактивні зусилля. Реактивні моменти і реактивні зусилля можна обернути на нуль, якщо повернути закріплення на кути, що дорівнюють дійсним поворотам вузлів, і змістити вузли так, щоб їхні лінійні переміщення дорівнювали переміщенням, що виникають у заданій системі. Математичний запис цього факту виражено

системою канонічних рівнянь. Кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих переміщень, отже, система складатиметься з трьох рівнянь:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1F} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2F} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3F} = 0.$$

4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь (рисунки 6.3-6.5). Для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь будемо одиничні від  $Z_1 = 1$ ,  $Z_2 = 1$ ,  $Z_3 = 1$  і вантажну епюру моментів. Епюри будують із використанням таблиць стандартних рішень (додаток А).

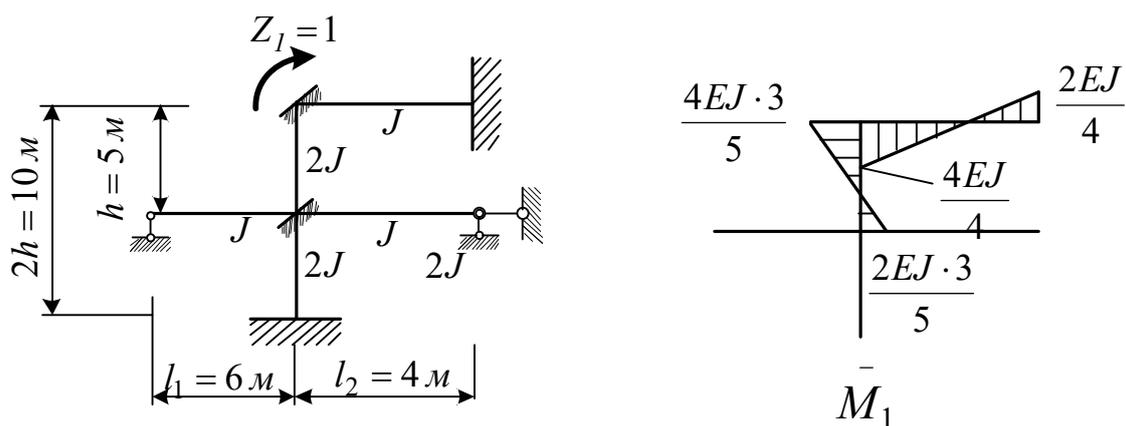


Рисунок 6.3 – Розрахункова схема та одинична епюра  $M_1$

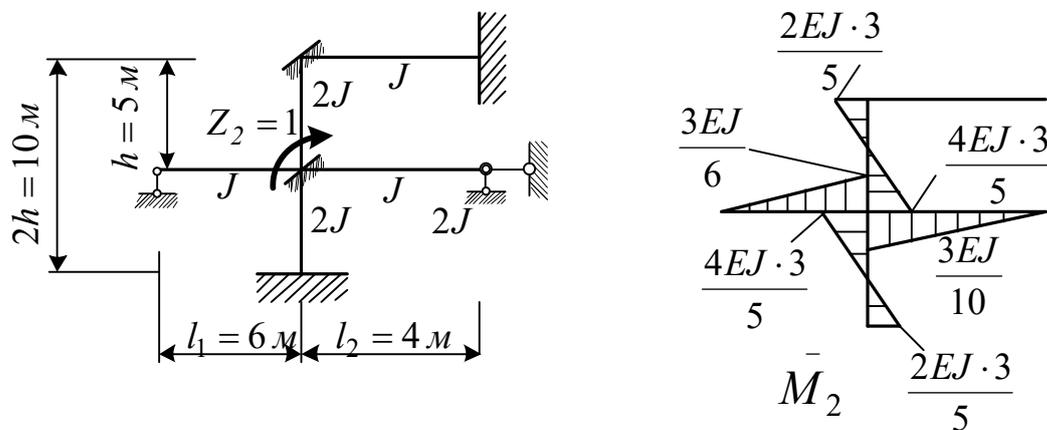


Рисунок 6.4 – Розрахункова схема та одинична епюра  $M_2$

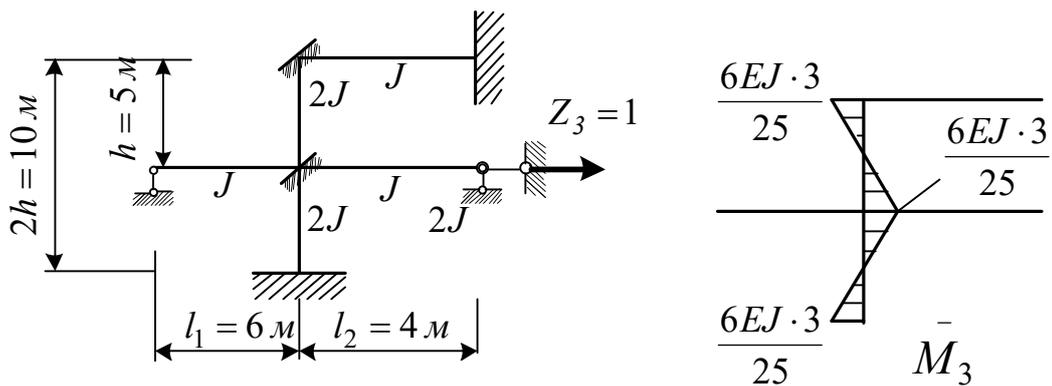
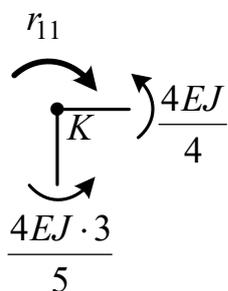


Рисунок 6.5 – Розрахункова схема та одинична епюра  $M_3$

5 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь (рисунки 6.6-6.10). Для визначення коефіцієнтів використовуємо статичний спосіб. Коефіцієнти і вільні члени, які являють собою реактивні моменти у введених закріпленнях, визначаємо вирізанням вузлів і складанням рівнянь рівноваги  $\sum M_y = 0$ .

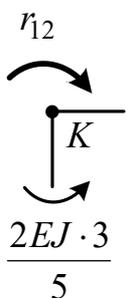


$$\sum M_K = 0;$$

$$r_{11} - \frac{4EJ}{4} - \frac{4EJ \cdot 3}{5} = 0;$$

$$r_{11} = \frac{4EJ}{4} + \frac{4EJ \cdot 3}{5} = 3,4 \cdot EJ.$$

Рисунок 6.6 – Визначення коефіцієнта  $r_{11}$

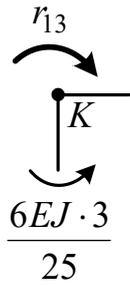


$$\sum M_K = 0;$$

$$r_{12} - \frac{2EJ \cdot 3}{5} = 0;$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{2EJ \cdot 3}{5} = 1,2EJ.$$

Рисунок 6.7 – Визначення коефіцієнта  $r_{12}$

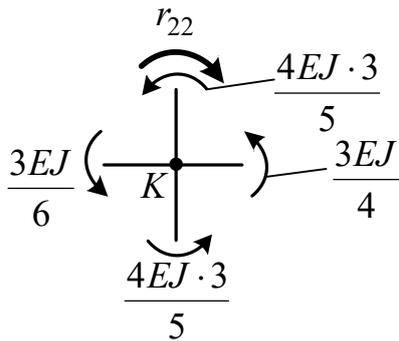


$$\Sigma M_K = 0;$$

$$r_{13} - \frac{6EJ \cdot 3}{25} = 0;$$

$$r_{13} = r_{31} = \frac{6EJ \cdot 3}{25} = 0,72 \cdot EJ.$$

Рисунок 6.8 – Визначення коефіцієнта  $r_{13}$

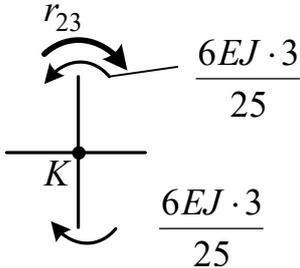


$$\Sigma M_K = 0;$$

$$r_{22} - \frac{4EJ \cdot 3}{5} - \frac{4EJ \cdot 3}{5} - \frac{3EJ}{6} - \frac{3EJ}{4} = 0;$$

$$r_{22} = \frac{4EJ \cdot 3}{5} + \frac{4EJ \cdot 3}{5} + \frac{3EJ}{6} + \frac{3EJ}{4} = 6,05 \cdot EJ.$$

Рисунок 6.9 – Визначення коефіцієнта  $r_{22}$



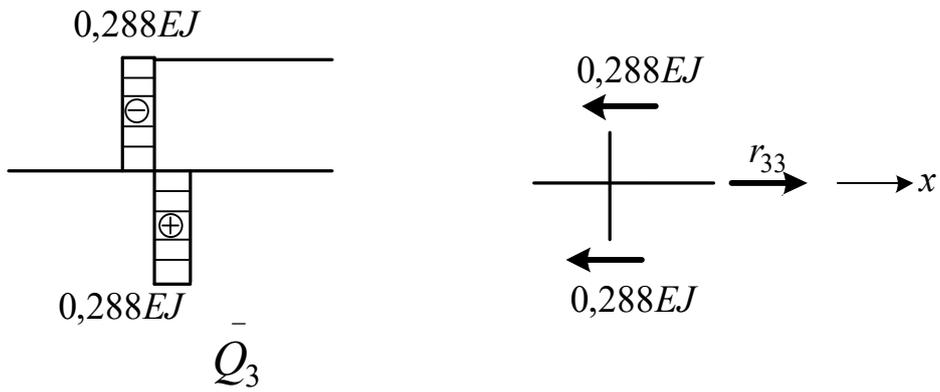
$$\Sigma M_K = 0; \quad r_{23} - \frac{6EJ \cdot 3}{25} + \frac{6EJ \cdot 3}{25} = 0;$$

$$r_{23} = r_{32} = 0.$$

Рисунок 6.10 – Визначення коефіцієнта  $r_{23}$

Коефіцієнти і вільні члени, які являють собою реактивні зусилля в додаткових стрижнях, визначаємо за допомогою рівнянь рівноваги  $\Sigma X = 0$ . Для визначення коефіцієнта  $r_{33}$  за епюрою  $\bar{M}_3$  будемо епюрою  $\bar{Q}_3$  (рисунок 6.11). Величини поперечних сил визначаємо за формулою

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l}.$$



$$\Sigma X = 0; r_{33} - 0,288EJ - 0,288EJ = 0;$$

$$r_{33} = 0,288EJ + 0,288EJ = 0,576EJ.$$

Рисунок 6.11 – Визначення коефіцієнта  $r_{33}$

Для визначення вільних членів будемо епюри згинальних моментів від зовнішнього навантаження (рисунок 6.12).

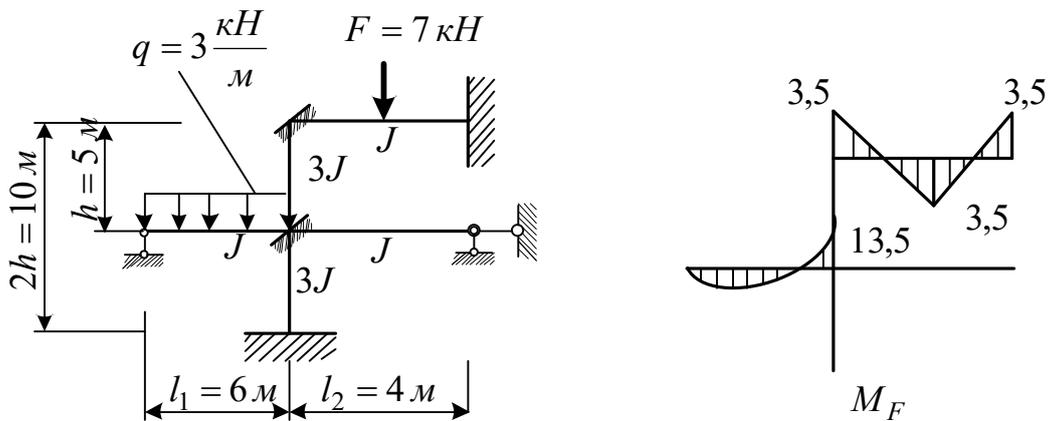
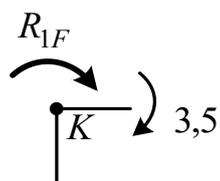
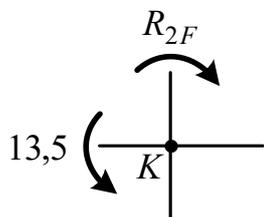


Рисунок 6.12 – Вантажна епюра моментів

Визначаємо вільні члени (рисунок 6.13).



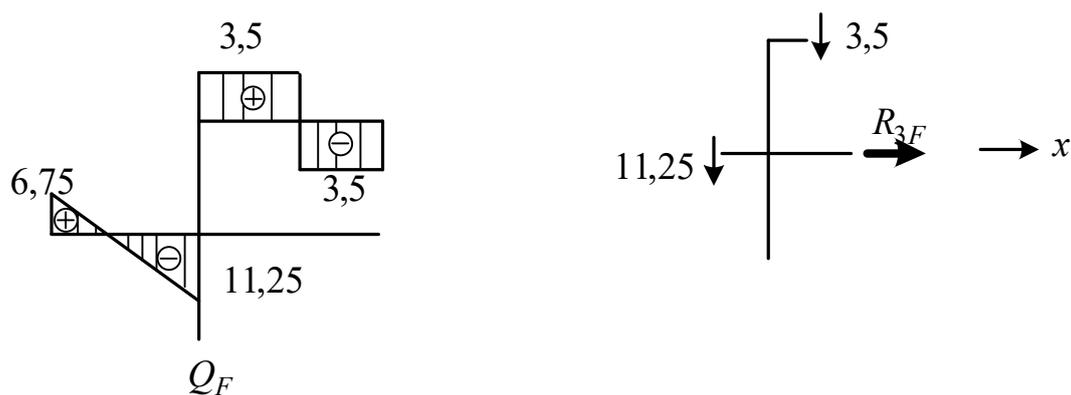
$$\Sigma M_K = 0; R_{1F} + 3,5 = 0; R_{1F} = -3,5.$$



$$\Sigma M_K = 0; R_{2F} - 13,5 = 0; R_{2F} = 13,5.$$

Рисунок 6.13 – Визначення вільних членів  $R_{1F}$  та  $R_{2F}$

Для визначення  $R_{3F}$  по епюрі  $M_F$  побудуємо епюру  $Q_F$  і за нею визначимо коефіцієнт (рисунок 6.14).



$$\Sigma X = 0; R_{3F} = 0; R_{3F} = 0$$

Рисунок 6.14 – Визначення вільного члена  $R_{3F}$

Підставляємо значення коефіцієнтів у канонічні рівняння і розв'язуємо систему трьох рівнянь із трьома невідомими:

$$3,4EJ \cdot Z_1 + 1,2EJ + 0,72EJ \cdot Z_3 - 3,5 = 0;$$

$$1,2EJ + 6,05EJ \cdot Z_2 + 0 + 13,5 = 0;$$

$$0,72EJ \cdot Z_1 + 0 + 0,576EJ \cdot Z_3 + 0 = 0.$$

Після розв'язання одержуємо

$$Z_1 = \frac{2,73}{EJ}; \quad Z_2 = -\frac{2,77}{EJ}; \quad Z_3 = -\frac{3,41}{EJ}.$$

6 Побудова епюри моментів  $M$  у заданій статично невизначній системі. Розрахункову епюру згинальних моментів будуюмо за формулою

$$M_x = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \bar{M}_3 \cdot Z_3 + M_F.$$

Остаточну епюру моментів отримуємо підсумовуванням ординат у характерних точках, одиничних виправлених і вантажної епюри моментів. Виправлені епюри (рисунки 6.15, 6.16) отримуємо множенням ординат одиничних епюр на відповідне значення невідомих ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ).

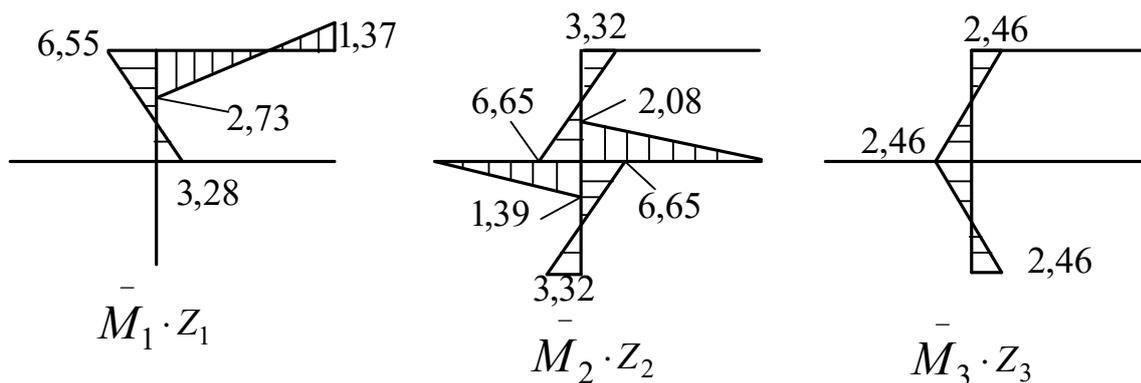


Рисунок 6.15 – Виправлені епюри моментів

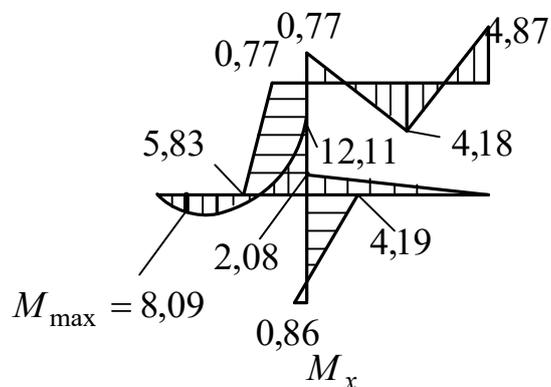


Рисунок 6.16 – Остаточна епюра моментів

7 Побудова епюри поперечних сил  $Q$ . За епюрою згинальних моментів  $M_x$  на основі диференціальної залежності між згинальними моментами і поперечними силами будуємо епюру поперечних сил  $Q_x$  (рисунок 6.17).

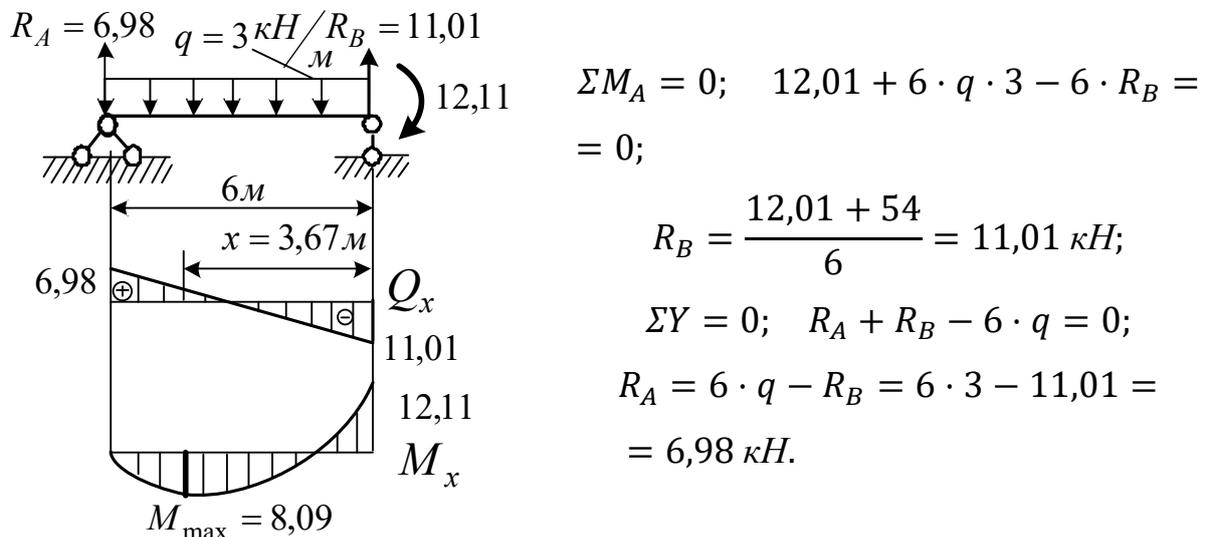


Рисунок 6.17 – Побудова епюри поперечних сил

На ділянці між вузлами, де знаходиться рівномірне навантаження, для побудови епюри поперечних сил розглянемо її як балку на двох опорах, навантажену рівномірним навантаженням і опорними моментами, які прикладені на кінцях цієї балки. Величини і напрямки моментів беремо із епюри моментів. Запишемо рівняння статички. На відстані  $x = 3,67$  м від опори  $B$  на епюрі згинальних моментів буде екстремум  $M_{\max}$ .

Остаточну епюру поперечних сил наведено на рисунку 6.18.

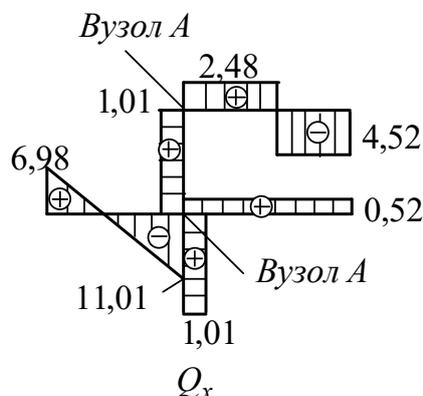


Рисунок 6.18 – Остаточна епюра поперечних сил

8 Побудова епюри поздовжніх сил  $N$  (рисунки 6.19-6.21). Епюру поздовжніх сил  $N_x$  будують на підставі епюри  $Q_x$  вирізанням вузлів із розгляданням їхньої рівноваги.

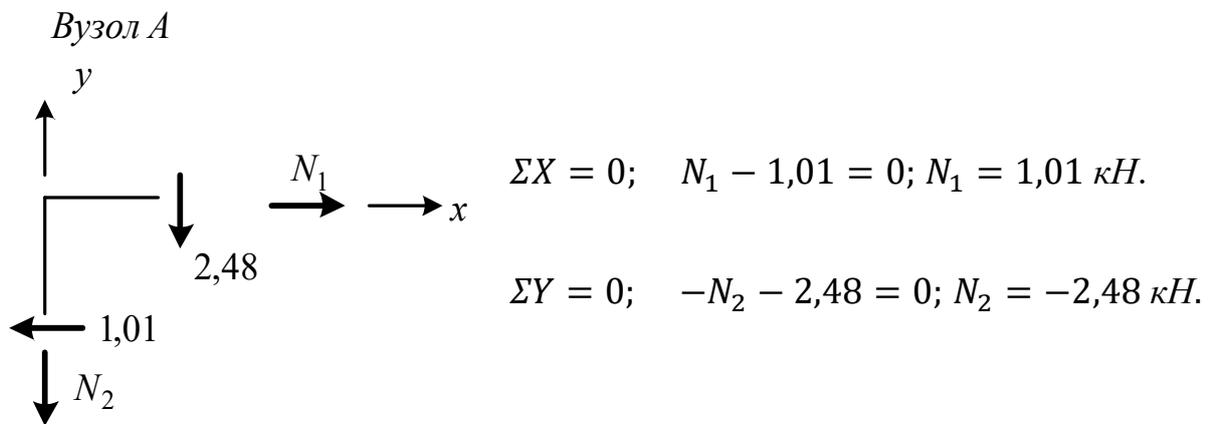


Рисунок 6.19 – Побудова епюри поздовжніх сил. Вузол А

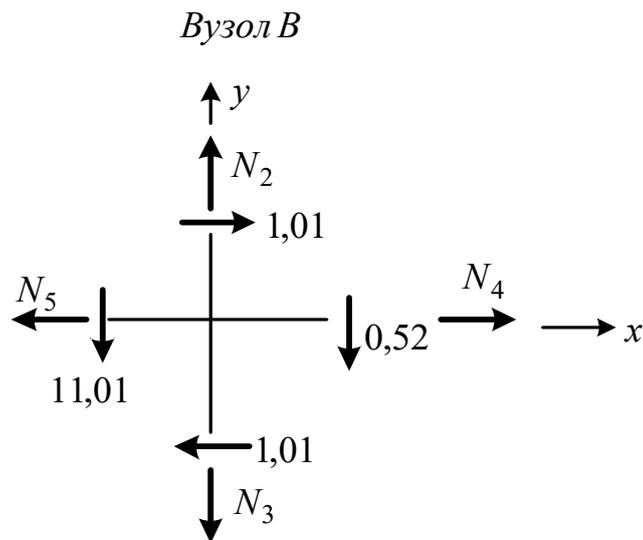


Рисунок 6.20 – Побудова епюри поздовжніх сил. Вузол В

$$\Sigma X = 0; \quad -N_5 + 1,01 - 1,01 + N_4 = 0. \quad N_5 = 0. \quad N_4 = N_5 = 0 \text{ кН.}$$

$$\Sigma Y = 0; \quad N_2 - 11,01 - 0,52 - N_3 = 0;$$

$$N_3 = -11,01 - 0,52 + N_2 = -11,01 - 0,52 - 2,48 = -14,01 \text{ кН.}$$

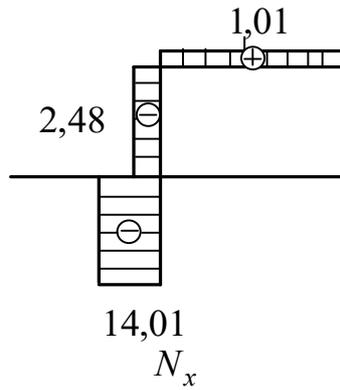


Рисунок 6.21 – Остаточна епюра поздовжніх сил

Виконуємо статичну перевірку рівноваги заданої системи. Для цього прикладемо всі активні і реактивні сили і складемо всі рівняння статички (рисунок 6.22).

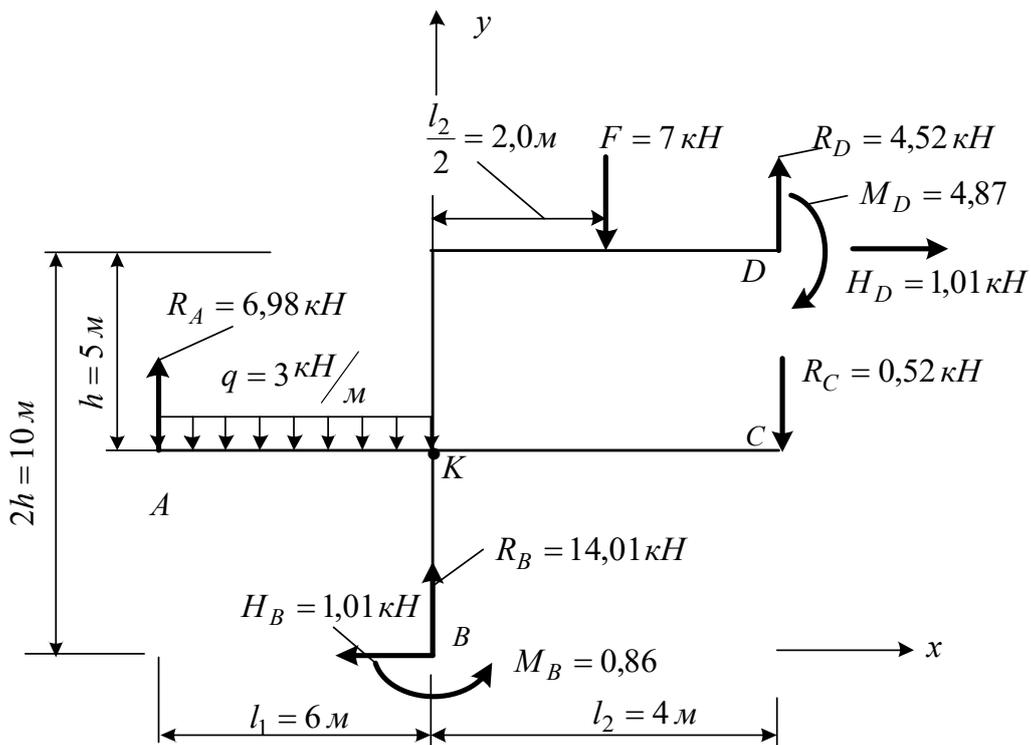


Рисунок 6.22 – Перевірка рівноваги системи

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; \quad -H_B + H_D &= -1,01 + 1,01 = 0, \\ \Sigma Y = 0; \quad R_A - q \cdot 6 + R_B - R_C + R_D - F &= \\ = 6,98 - 3 \cdot 6 + 14,01 - 0,52 + 4,52 - 7 &= -25,52 + 25,52 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_K = 0; \quad F \cdot 2,0 - q \cdot 6 \cdot 3 - M_B + M_D + H_B \cdot 5 + H_D \cdot 5 + \\ + R_A \cdot 6 + R_C \cdot 4 - R_D \cdot 4 = 7 \cdot 2,0 - 3 \cdot 6 \cdot 3 - 0,86 + 4,87 + 1,01 \cdot 5 + \\ + 1,01 \cdot 5 + 6,98 \cdot 6 + 0,52 \cdot 4 - 4,52 \cdot 4 = -72,94 + 72,93 = 0,01. \end{aligned}$$

Похибка складає  $\frac{0,01 \cdot 100}{72,94} = 0,01 \%$ , що допустимо. Задача розв'язана правильно.

### *Запитання для самоконтролю*

1 Коли розрахунок статично невизначних стрижневих систем вважають таким, що проводять за методом переміщень?

2 Які величини приймають як невідомі в методі переміщень?

3 Чому дорівнює ступінь кінематичної невизначності для заданої системи?

4 Яка з основних систем методу переміщень для наведеної статично невизначної рами є правильною?

5 Чому рівняння для визначення невідомих у методі переміщень називають канонічними?

6 Як найбільш просто обчислити значення коефіцієнтів канонічних рівнянь за методом переміщень?

7 Вкажіть правильні вирази для обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь методу переміщень.

8 На підставі якої теореми встановлена взаємність коефіцієнтів канонічних рівнянь у методі переміщень?

9 Як можна побудувати в основній системі за методом переміщень епюри згинальних моментів від одиничних значень невідомих і заданого навантаження?

10 Про що свідчить рівновага вузлів епюри згинальних моментів у рамі, отриманій у результаті розрахунку системи за методом переміщень?

11 Яка перевірка епюри згинальних моментів у рамі є найбільш повною?

12 Який підхід можливий у методі переміщень для побудови епюри поперечних сил?

13 Який вигляд має канонічне рівняння для розрахунку системи з одним ступенем кінематичної невизначності на дію температури?

14 Що можна сказати про внутрішні сили для розрахунку системи методом переміщень на дію температури?

15 Який вигляд має канонічне рівняння для розрахунку системи з одним ступенем кінематичної невизначності на задані переміщення опор?

16 Що можна сказати про невідомі методи переміщень для розрахунку системи на задані переміщення опор?

17 Що можна сказати про внутрішні сили для розрахунку системи методом переміщень на задані переміщення опор?

18 Що треба прикласти в одиничному стані для визначення лінійного переміщення за методом Мора?

19 Що означає від'ємне значення переміщення, отриманого за формулою Мора?

20 Як треба брати ординату для обчислення інтеграла Мора із застосуванням правила Верещагіна?

21 За яких умов остаточно епюра моментів побудована правильно?

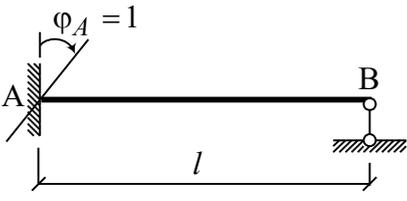
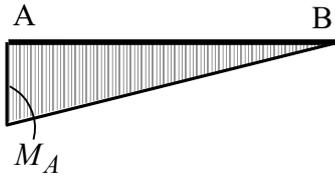
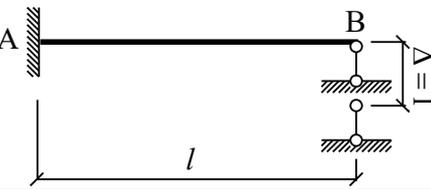
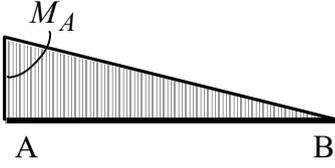
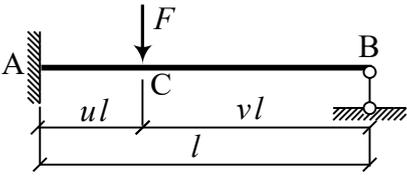
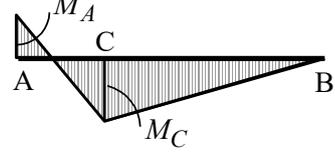
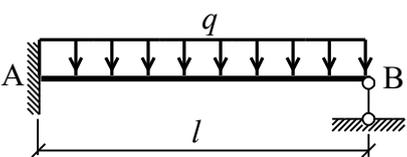
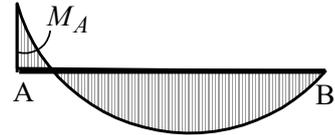
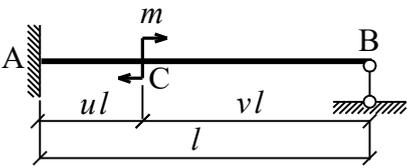
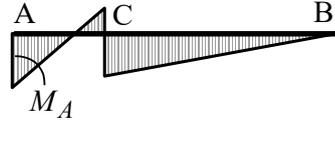
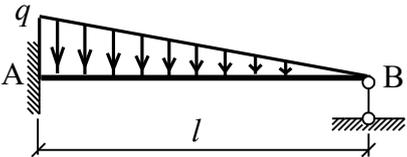
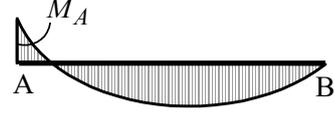
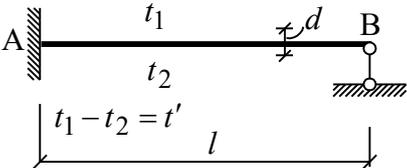
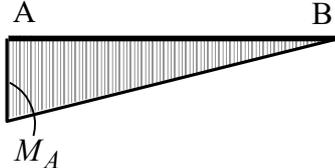
22 За яких умов остаточно епюра поперечних сил побудована правильно?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

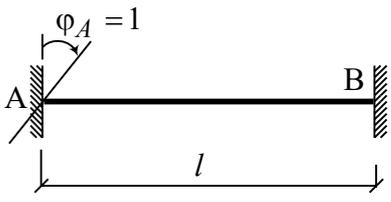
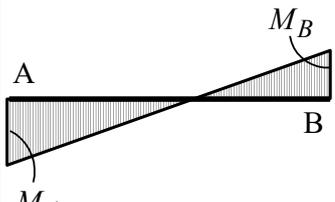
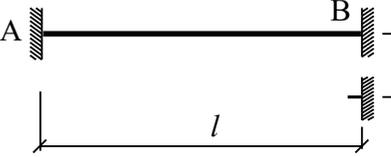
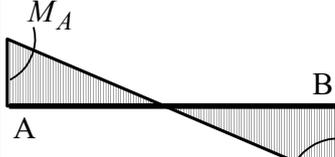
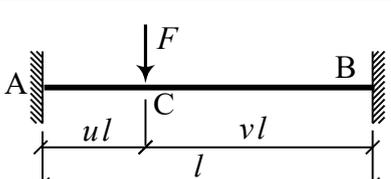
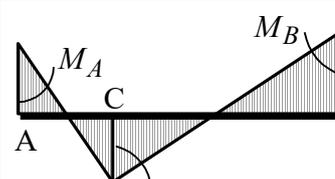
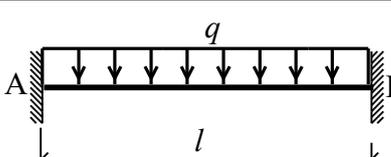
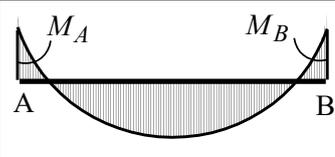
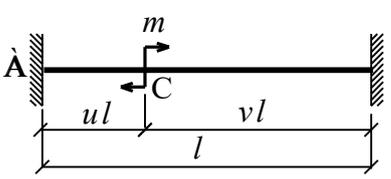
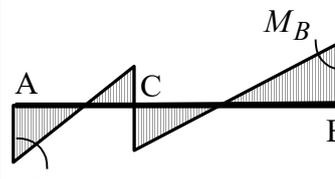
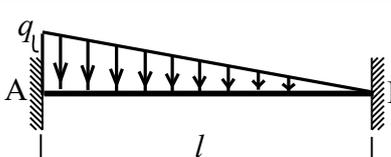
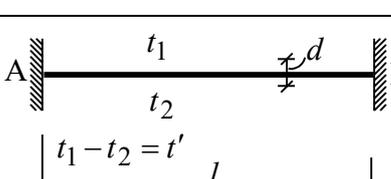
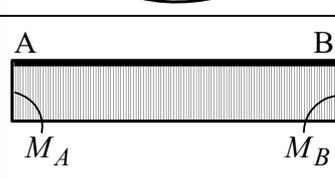
- 1 Перельман Є. Й. Будівельна механіка. Ч. 1: Основи теорії. Київ: Вища школа, 2016. 352 с.
- 2 Саврук М. П. Будівельна механіка: конспект лекцій. Львів: Видавництво НУ «ЛП», 2020. 180 с.
- 3 Сухоруков О. В. Будівельна механіка. Ч. 2: Системи з однією та кількома ступенями вільності. Київ: Арістей, 2018. 296 с.
- 4 Москаленко В. В. Теоретичні основи будівельної механіки. Харків: ХНУБА, 2019. 240 с.
- 5 Єсипенко В. А. Будівельна механіка. Теорія пружності і пластичності. Київ: КНУБА, 2014. 280 с.
- 6 Слуханов А. М. Будівельна механіка: Нелінійні задачі. Дніпро: НМетАУ, 2016. 198 с.
- 7 Батин І. П. Метод скінченних елементів у будівельній механіці. Харків: ХНУБА, 2019. 216 с.
- 8 Лабораторний практикум з опору матеріалів та будівельної механіки: навч. посіб. / Г. Л. Ватуля, Є. І. Галагурия, І. В. Калашніков, Д. Г. Петренко. Харків: УкрДУЗТ, 2020. Вид. 2-ге. 249 с.
- 9 Козар Л., Бабенко А. Студентська навчальна звітність. Загальні вимоги щодо побудови, викладення та оформлення текстової частини: метод. посіб. Вид. 2-ге, перероб. та доп. Харків: УкрДУЗТ, 2025. 64 с.

## ДОДАТОК А

### Таблиця стандартних рішень

Н о м е р	Схеми стрижнів і впливів на них	Епюри моментів	Формули
1	2	3	4
1			$M_A = \frac{3EJ}{l}$
2			$M_A = \frac{3EJ}{l^2}$
3			$M_A = \frac{Fl}{2}v(1-v^2),$ $M_C = \frac{Fl}{2}u^2v(3-u)$
4			$M_A = \frac{ql^2}{8}$
5			$M_A = \frac{m}{2}(3v^2 - 1)$
6			$M_A = \frac{ql^2}{15}$
7			$M_A = \frac{3EJat'}{2d}$

Продовження додатка А

1	2	3	4
8			$M_A = \frac{4EJ}{l},$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$
9			$M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2}$
10			$M_A = uv^2Fl,$ $M_B = u^2vFl,$ $M_C = 2u^2v^2Fl$
11			$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$
12			$M_A = mv(3u - 1),$ $M_B = mu(3v - 1)$
13			$M_A = \frac{ql^2}{20},$ $M_B = \frac{ql^2}{30}$
14			$M_A = M_B = \frac{Ejat'}{d}$

## ДОДАТОК Б

### Вихідні дані для розрахунково-графічних робіт

Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 1

Розрахунок багатопрогонової статично визначної балки

на рухоме і нерухоме навантаження

Таблиця Б.1 – Дані для розрахунку

Варіант	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$F_1$	$F_2$	$q_1$	$q_2$	$M$
	м	м	м	м	кН	кН	кН/м	кН/м	кНм
1	32	24	28	20	80	120	20	30	40
2	36	28	32	24	100	80	15	20	50
3	24	32	28	20	60	100	20	25	60
4	40	36	32	32	80	60	15	30	80
5	28	24	28	36	50	80	20	30	40
6	20	24	32	20	90	60	15	25	50
7	28	20	32	24	120	90	25	20	60
8	36	28	20	32	60	80	10	15	30
9	20	28	24	32	50	90	20	10	40
10	24	28	20	32	120	60	20	30	50
11	32	40	32	28	60	90	25	30	60
12	40	28	36	24	90	80	20	15	40
13	20	32	24	28	60	120	10	20	30
14	24	20	24	28	100	60	20	10	60
15	28	32	24	32	80	100	25	15	80
16	36	32	24	28	50	120	30	10	40
17	24	24	20	28	120	80	10	25	50
18	32	28	20	24	90	100	20	10	60

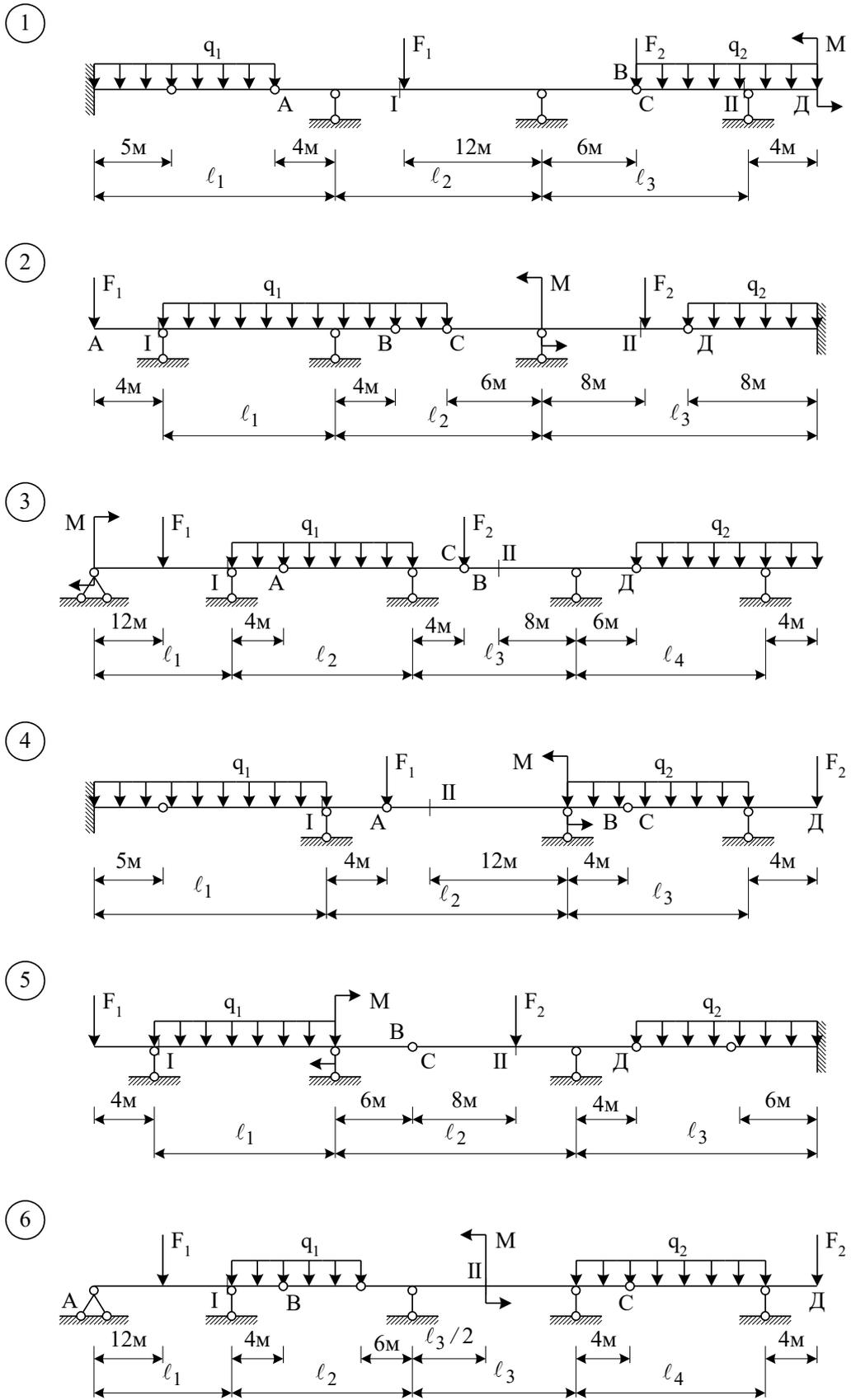
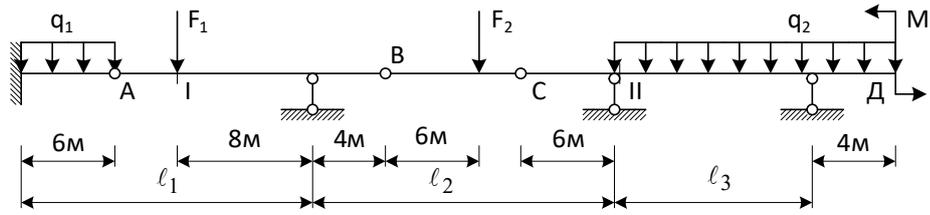
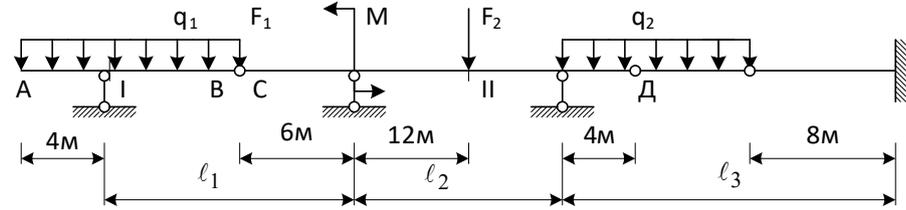


Рисунок Б.1 – Схеми багатопрогнових балок

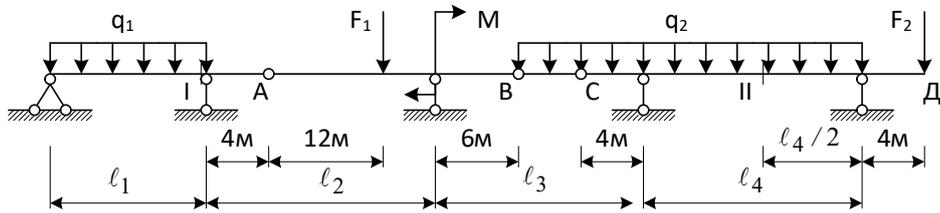
7



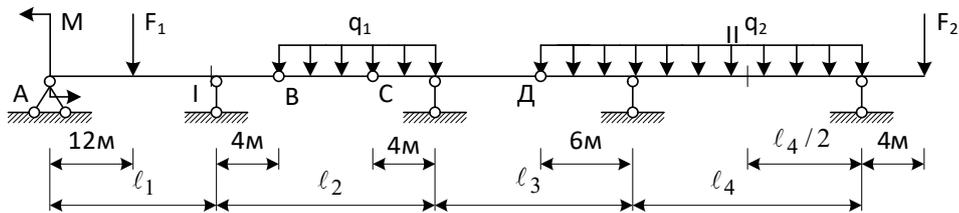
8



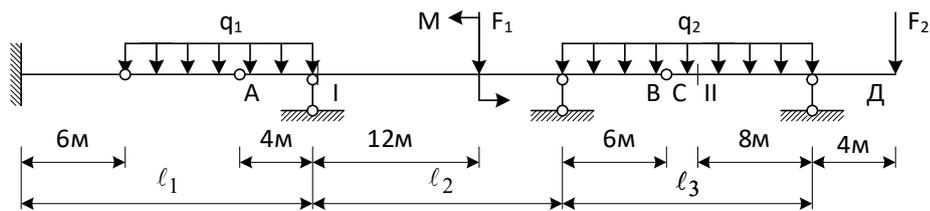
9



10



11



12

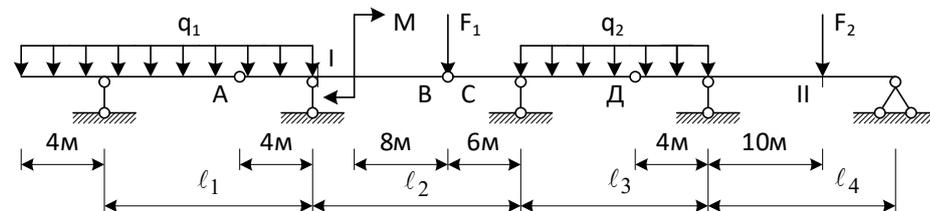
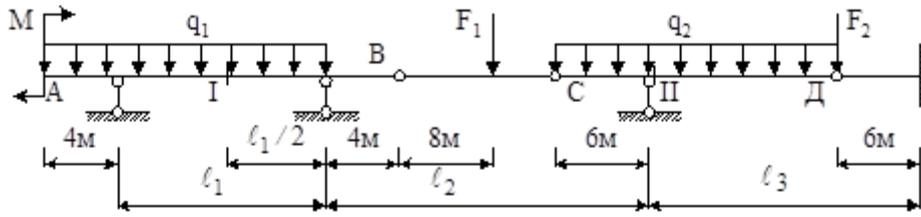
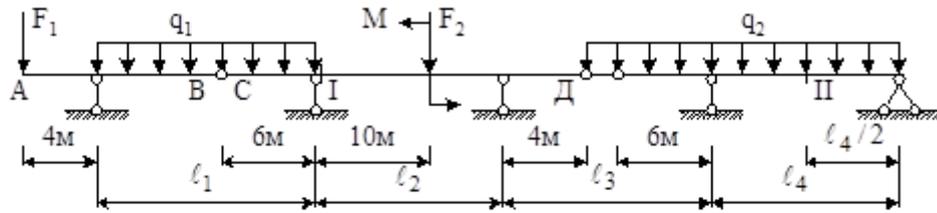


Рисунок Б.1, аркуш 2

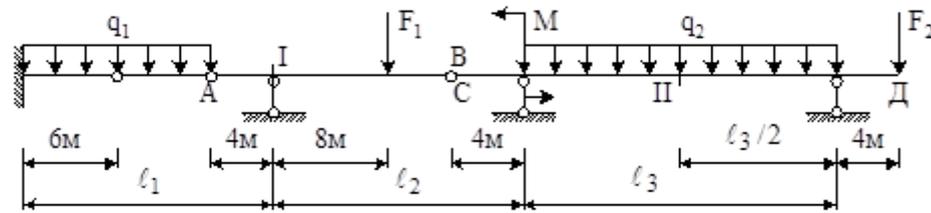
13



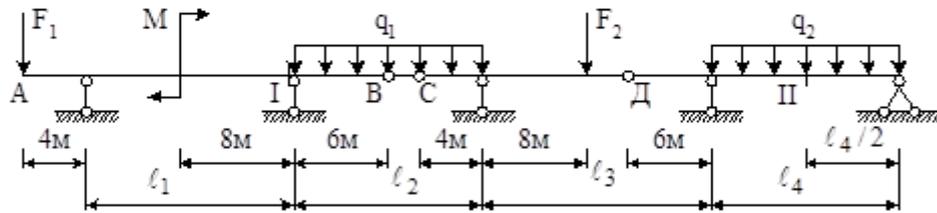
14



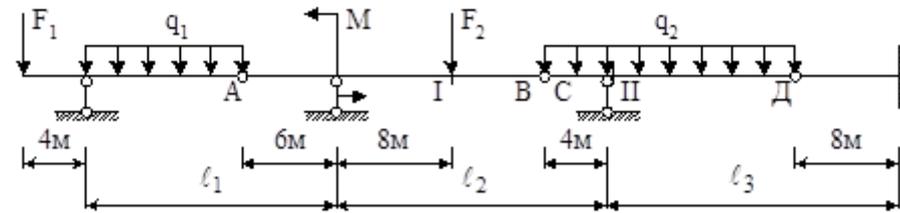
15



16



17



18

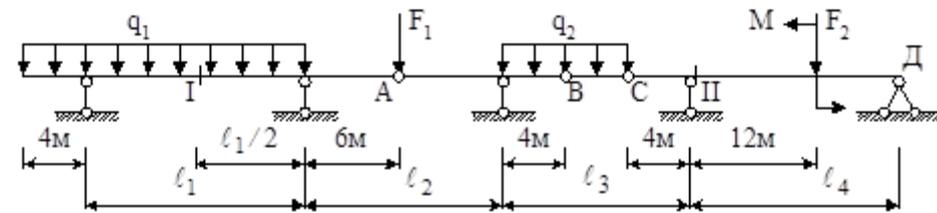


Рисунок Б.1, аркуш 3

## Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 2

## Розрахунок плоскої статично визначної ферми

на рухоме і нерухоме навантаження

Таблиця Б.2 – Дані для розрахунку

Ва- ріант	$d$	$h$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	Номери стрижнів
	м	м	кН								
1	4	4	20	-	-	60	30	-	10	40	1, 7, 18, 21, 25
2	3.5	5	-	10	20	60	-	40	-	20	3, 6, 11, 20, 24
3	5	5	30	20	-	-	60	20	-	40	2, 8, 16, 17, 23
4	8	8	40	-	40	30	-	-	20	80	5, 7, 18, 22, 26
5	4.5	6	-	50	20	40	30	-	40	-	4, 9, 12, 13, 27
6	6	7	-	30	-	-	40	10	50	90	1, 10, 15, 16, 28
7	3	4	40	20	50	-	10	-	60	-	5, 6, 17, 22, 26
8	7	7	80	-	-	50	40	20	30	-	2, 7, 18, 26, 30
9	6.5	8	70	30	-	50	80	-	-	20	3, 8, 12, 25, 28
10	4	6	-	60	-	40	-	20	50	80	4, 6, 13, 20, 23
11	7.5	8	100	-	40	-	30	60	40	-	1, 8, 14, 16, 24
12	3	5	-	10	30	20	40	-	-	50	4, 7, 11, 14, 25
13	5.5	6	90	-	60	20	-	40	50	-	3, 9, 15, 27, 30
14	7	8	60	-	40	50	-	50	-	70	5, 10, 13, 20, 27
15	3.5	7	-	30	50	-	60	20	40	-	2, 9, 14, 19, 25
16	6	6	40	60	30	40	-	-	-	60	1, 6, 17, 23, 29
17	4.5	8	60	-	-	-	40	30	20	80	4, 8, 12, 18, 24
18	4	5	40	20	-	50	-	30	-	40	3, 7, 11, 26, 28

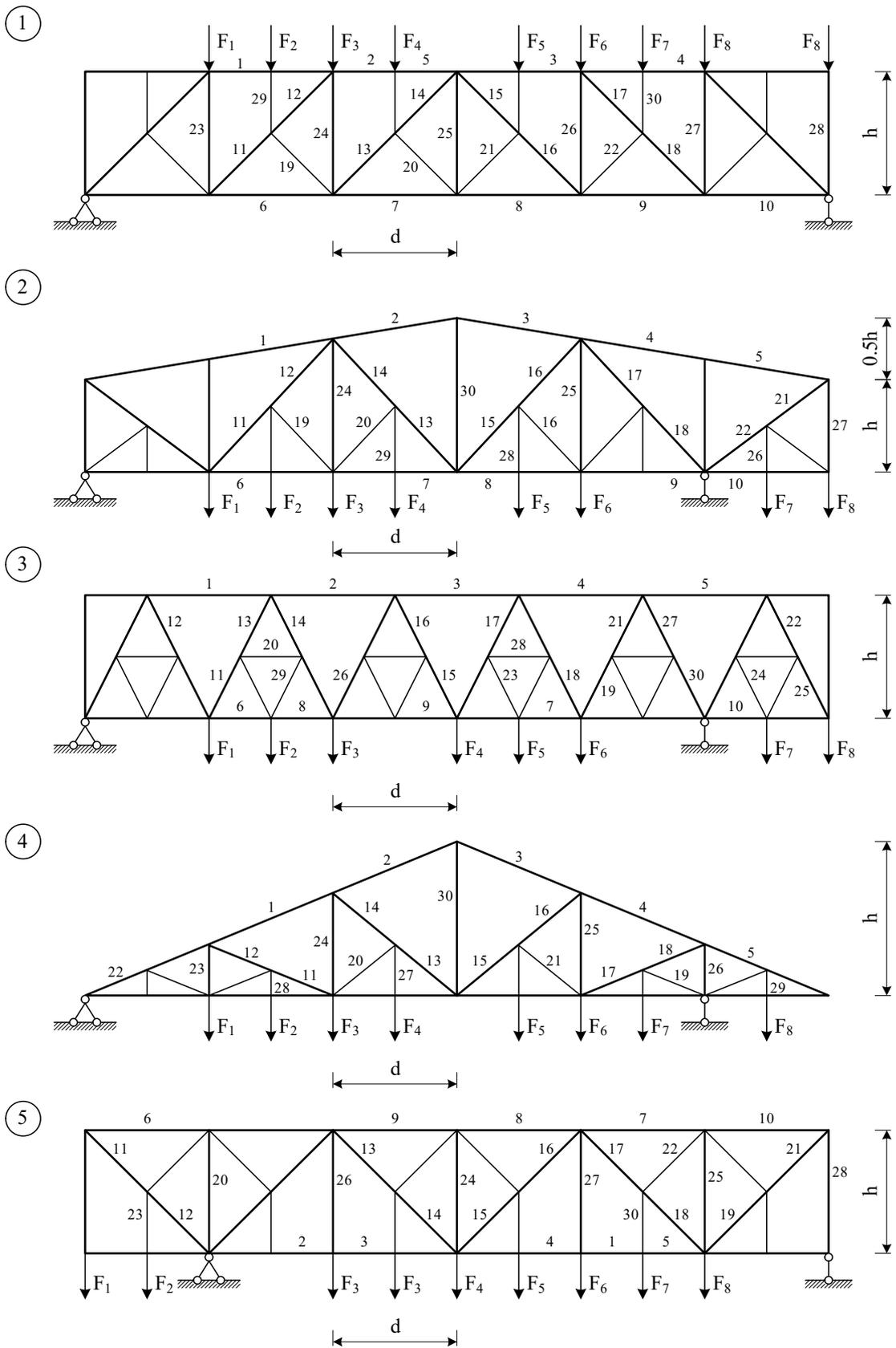


Рисунок Б.2 – Розрахункові схеми плоских ферм

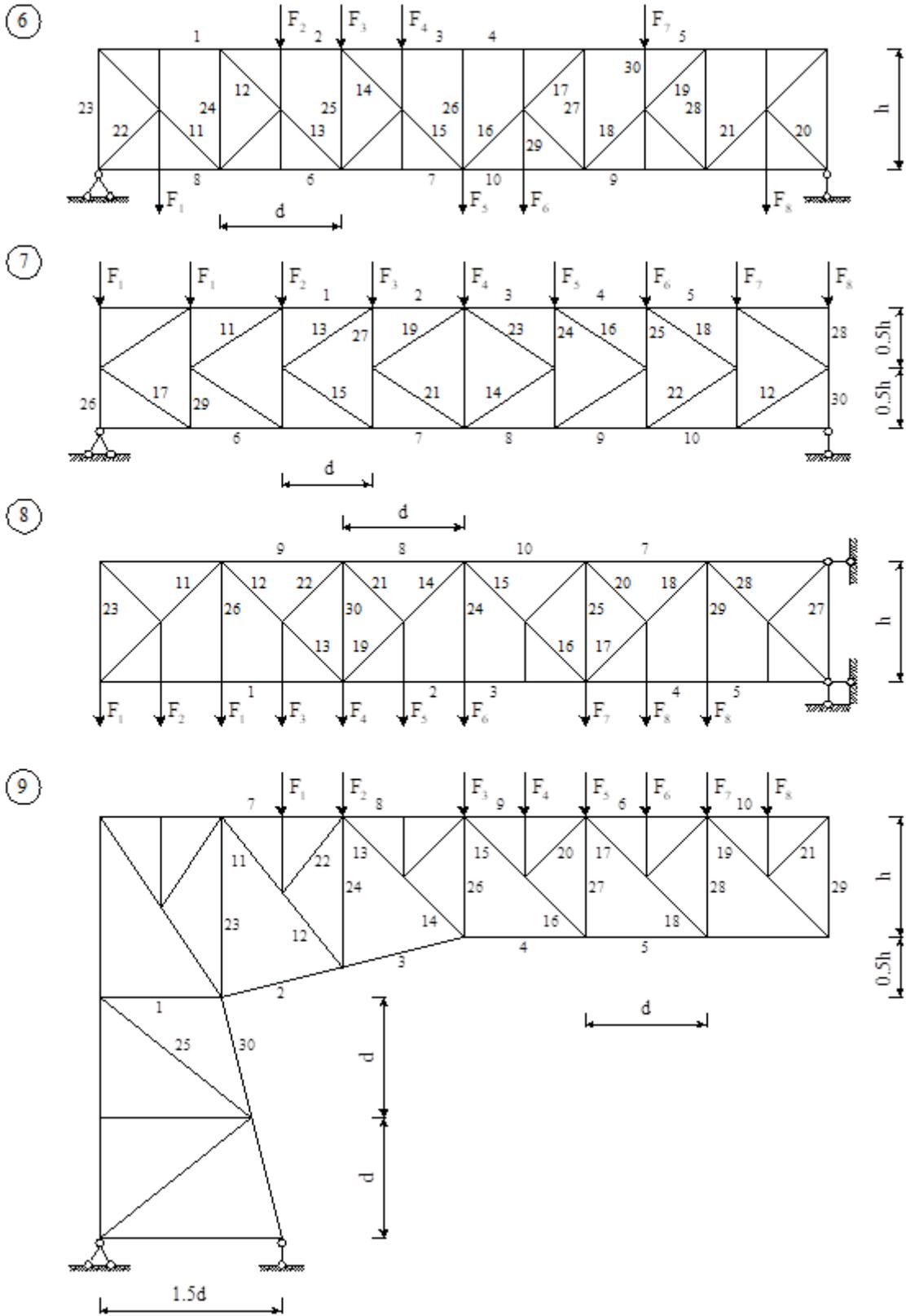


Рисунок Б.2, аркуш 2

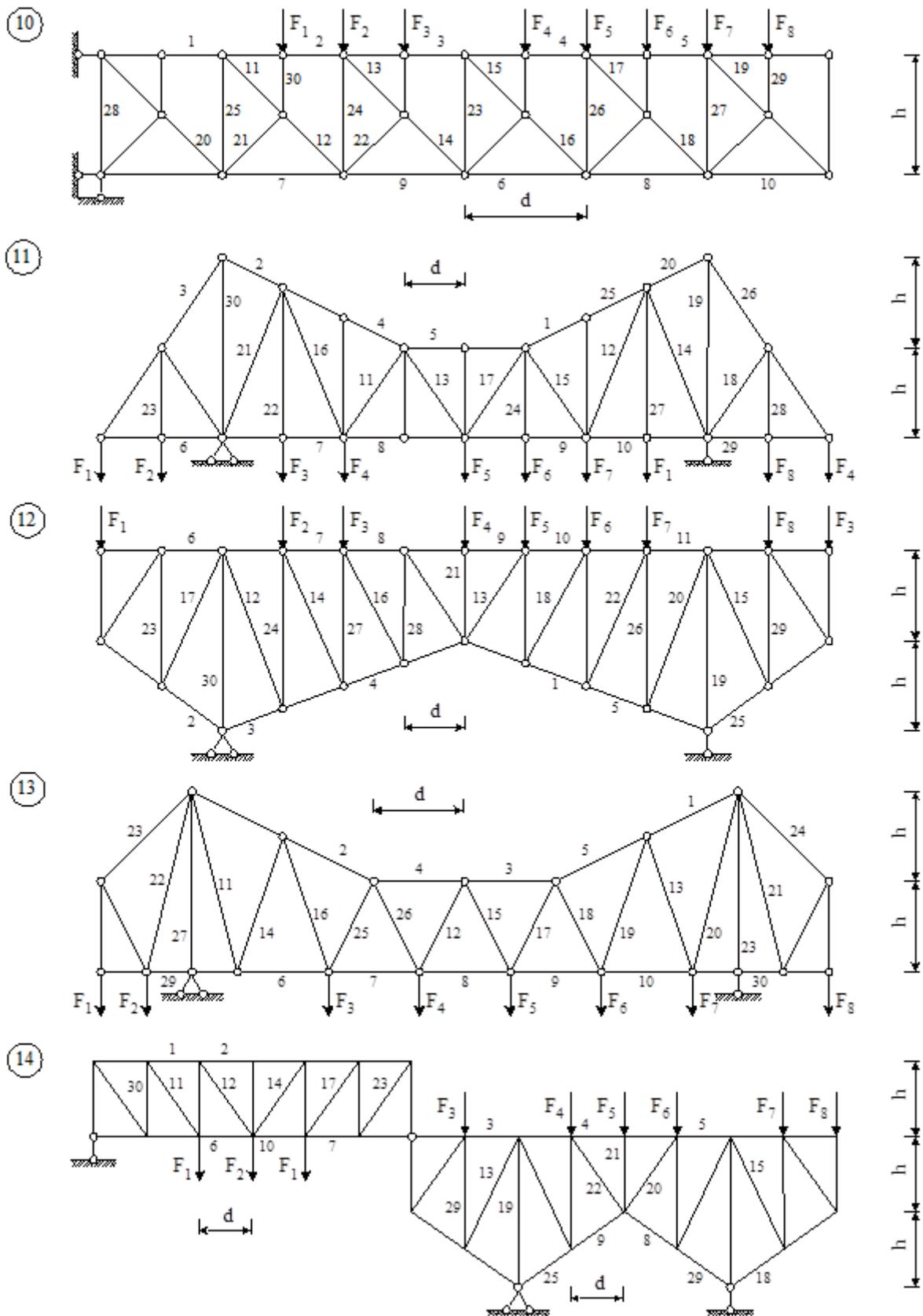
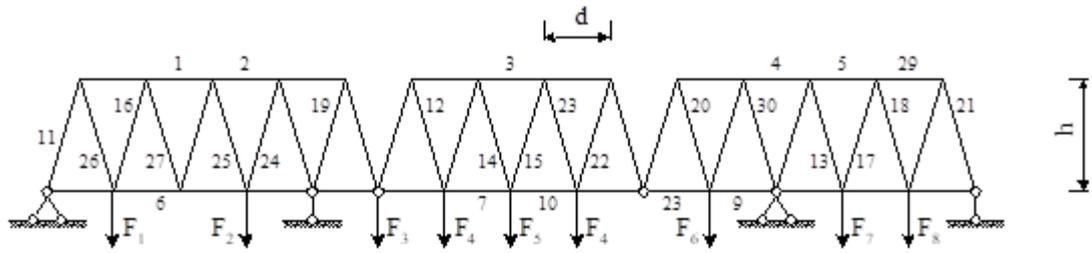
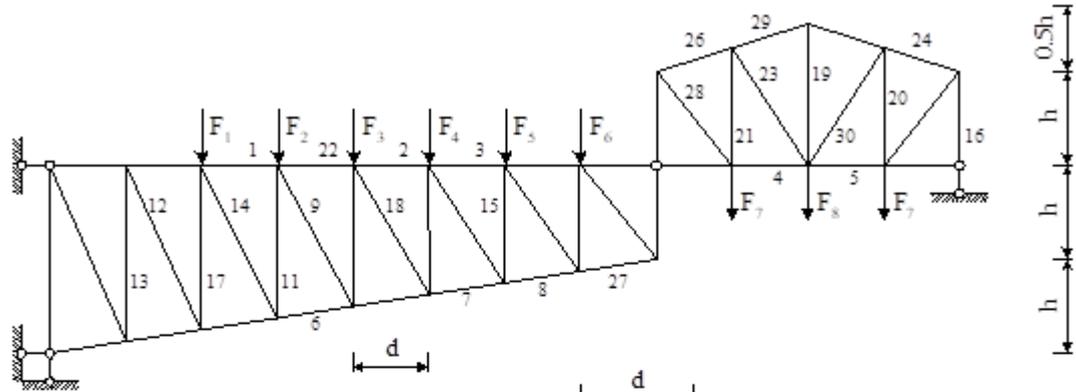


Рисунок Б.2, аркуш 3

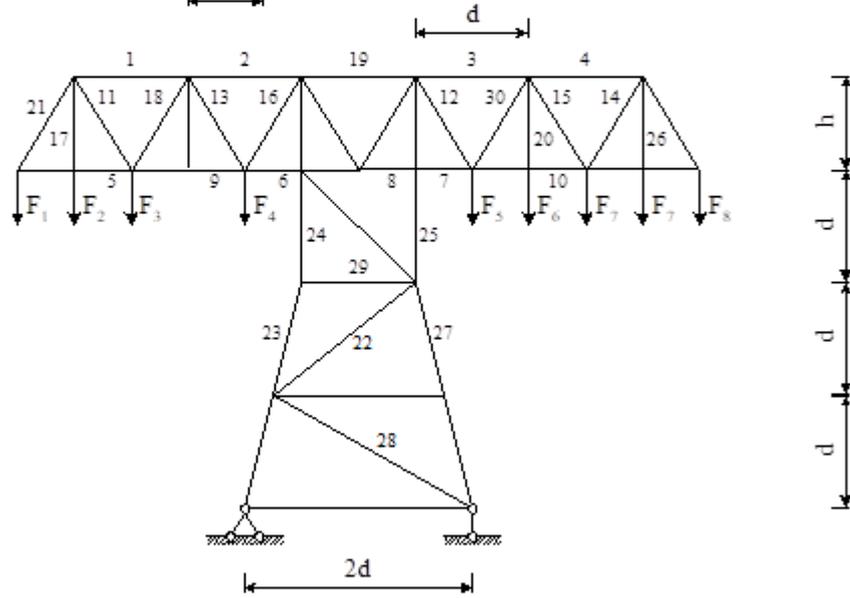
15



16



17



18

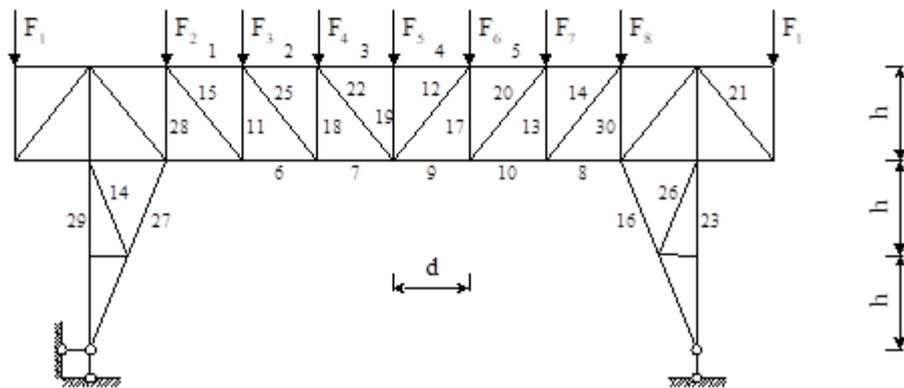


Рисунок Б.2, аркуш 4

## Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 3

## Розрахунок розпірної системи

Таблиця Б.3 – Дані для розрахунку

Варіант	$\ell$	$F$	$q$
	м	кН	кН/м
1	30	100	10
2	24	60	15
3	36	90	20
4	42	70	30
5	30	80	15
6	24	50	10
7	36	90	25
8	42	110	30
9	48	40	35
10	30	85	20
11	24	75	25
12	36	80	20
13	32	65	40
14	30	70	20
15	24	55	25
16	42	60	10
17	48	40	20
18	30	50	30

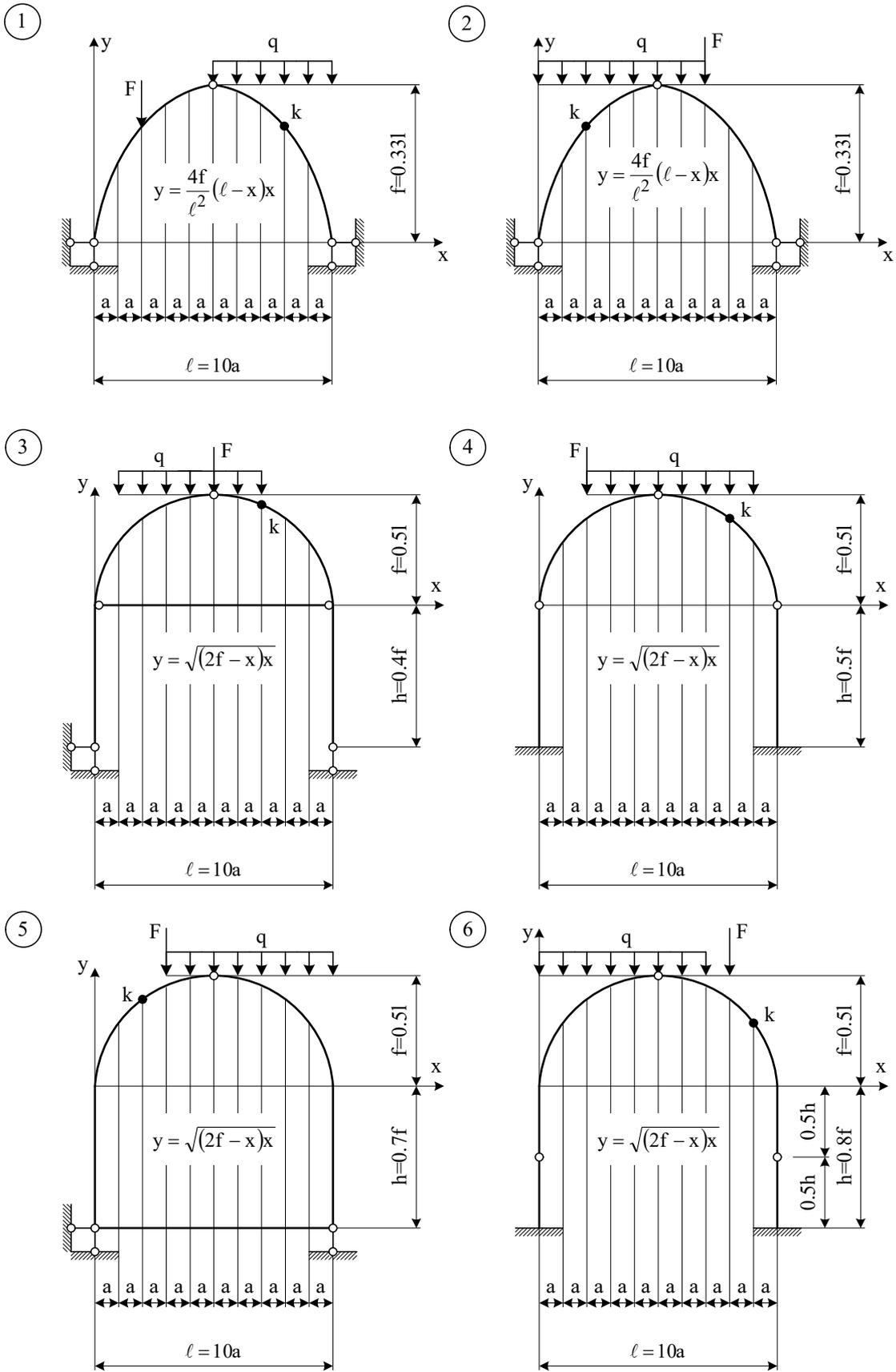
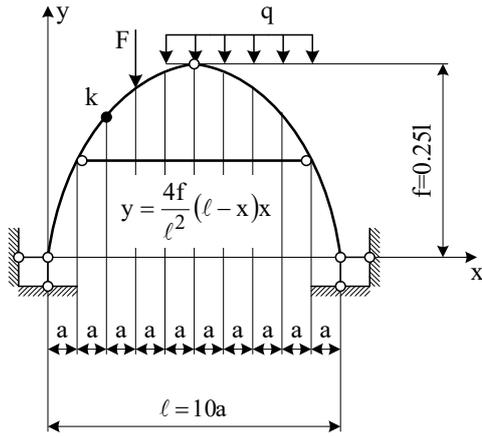
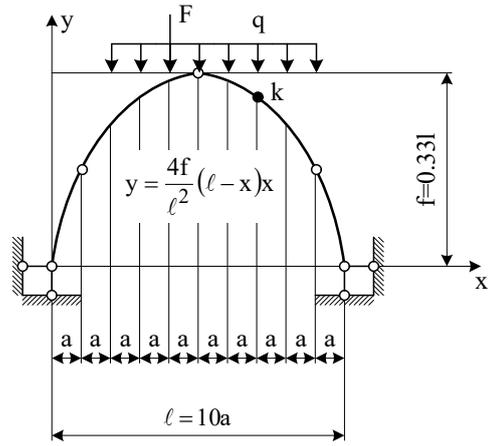


Рисунок Б.3 – Розрахункові схеми розпирних систем

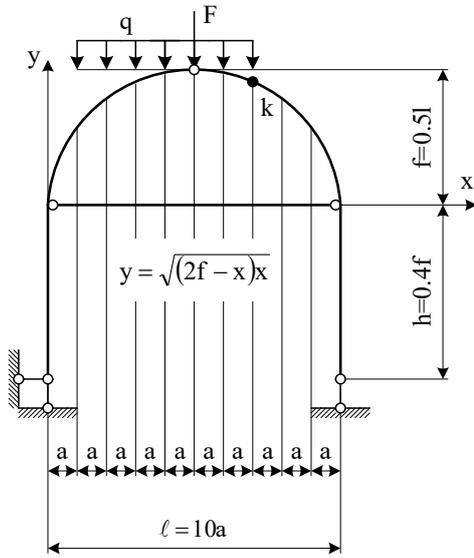
7



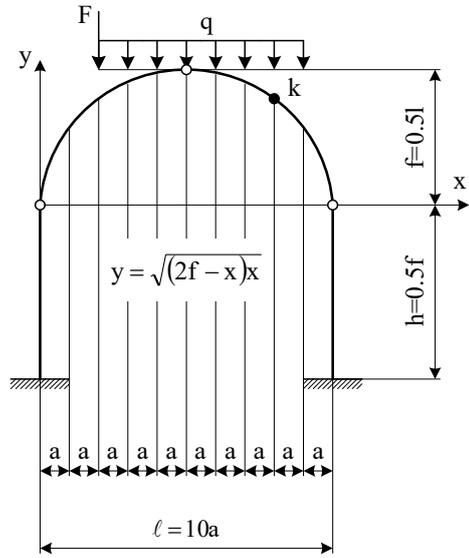
8



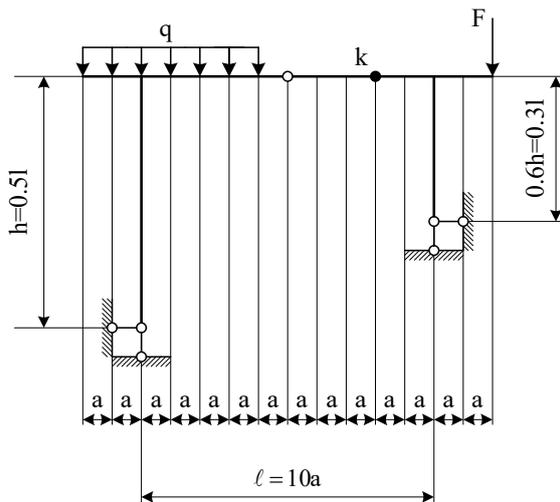
9



10



11



12

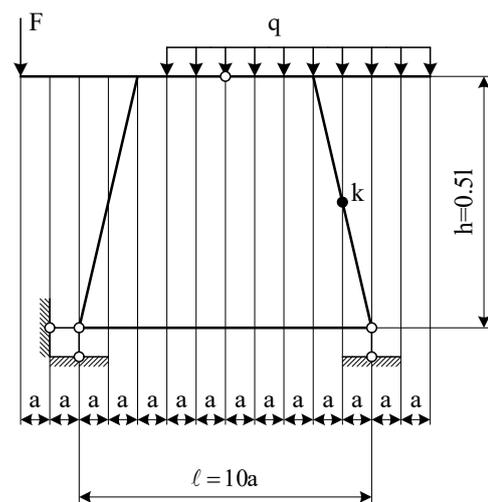
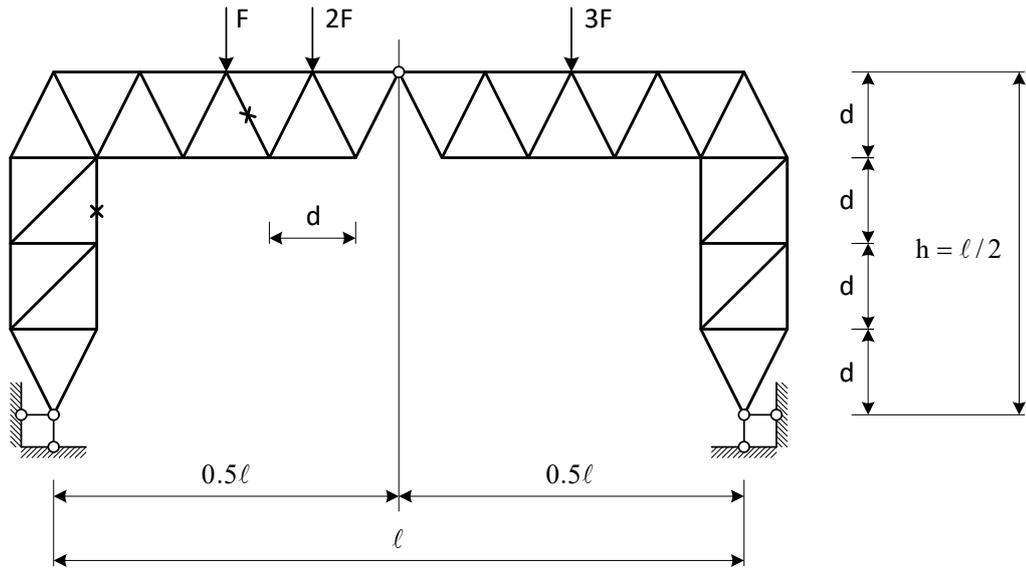
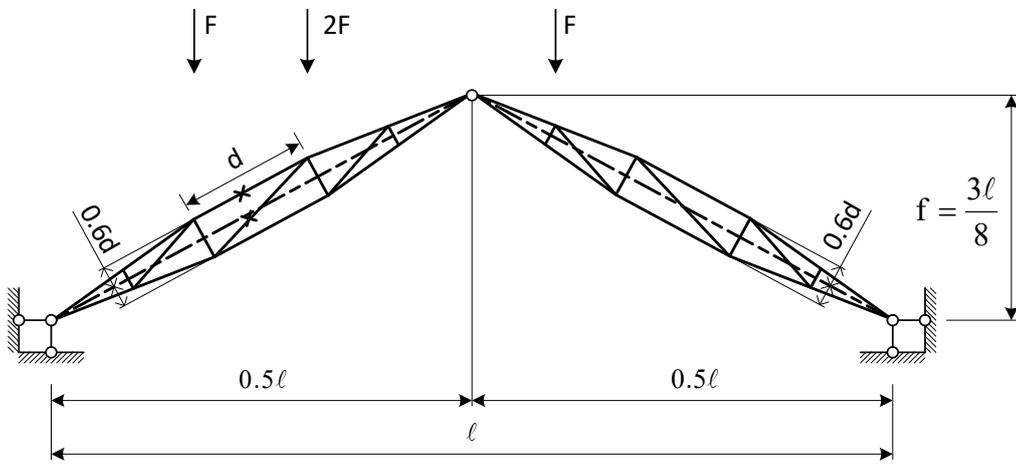


Рисунок Б.3, аркуш 2

13



14



15

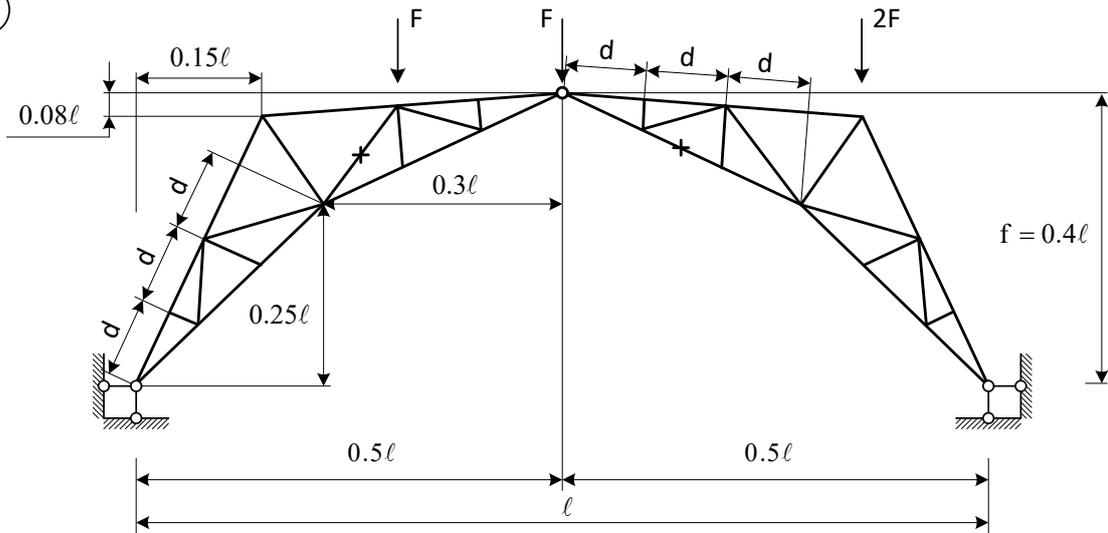


Рисунок Б.3, аркуш 3



## Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 4

### Визначення переміщень у рамах

Таблиця Б.4 – Дані для розрахунку

Варіант	$\ell_1$	$\ell_2$	$h$	$F$	$q$	$t_{en}$	$t_3$	$d$	$c$
	м	м	м	кН	кН/м	град	град	м	м
1	4	6	4	2	2	10	-30	0.4	0.06
2	6	8	6	4	2	-10	-50	0.5	0.08
3	2	4	4	6	1	15	35	0.3	0.04
4	4	8	6	10	4	20	-10	0.5	0.08
5	6	10	4	12	2	30	-10	0.8	0.1
6	12	8	6	12	2	-30	-6	0.9	0.12
7	10	12	5	10	1	12	28	0.7	0.12
8	6	12	5	12	2	25	-35	0.8	0.12
9	8	10	4	6	2	14	-16	0.7	0.1
10	6	8	4	10	2	24	-36	0.5	0.08
11	8	6	6	8	1	-14	26	0.6	0.08
12	10	6	5	8	2	5	-25	0.7	0.1
13	8	12	6	10	3	-6	14	0.9	0.12
14	6	4	4	12	2	10	-2	0.4	0.06
15	8	10	4	8	4	12	-8	0.6	0.1
16	12	6	5	10	2	18	12	0.8	0.12
17	4	8	4	12	2	-20	10	0.5	0.08
18	12	10	6	8	4	8	12	0.9	0.12

У кожному варіанті завдання наведені три розрахункові схеми рами. Для першої рами необхідно визначити переміщення від заданого зовнішнього навантаження, для другої – від заданої зміни температури, третьої – від заданого зміщення опорних в'язів.

$\Delta_{kF}^x, \Delta_{kt}^x, \Delta_{kc}^x$  – горизонтальне переміщення т. «к» відповідно зовнішнього навантаження, температури, зміщення опорних в'язів.

$\Delta_{kF}^y, \Delta_{kt}^y, \Delta_{kc}^y$  – вертикальне переміщення т. «к» відповідно зовнішнього навантаження, температури, зміщення опорних в'язів.

$\Delta_{kF}^\phi, \Delta_{kt}^\phi, \Delta_{kc}^\phi$  – кутове переміщення т. «к» відповідно зовнішнього навантаження, температури, зміщення опорних в'язів.

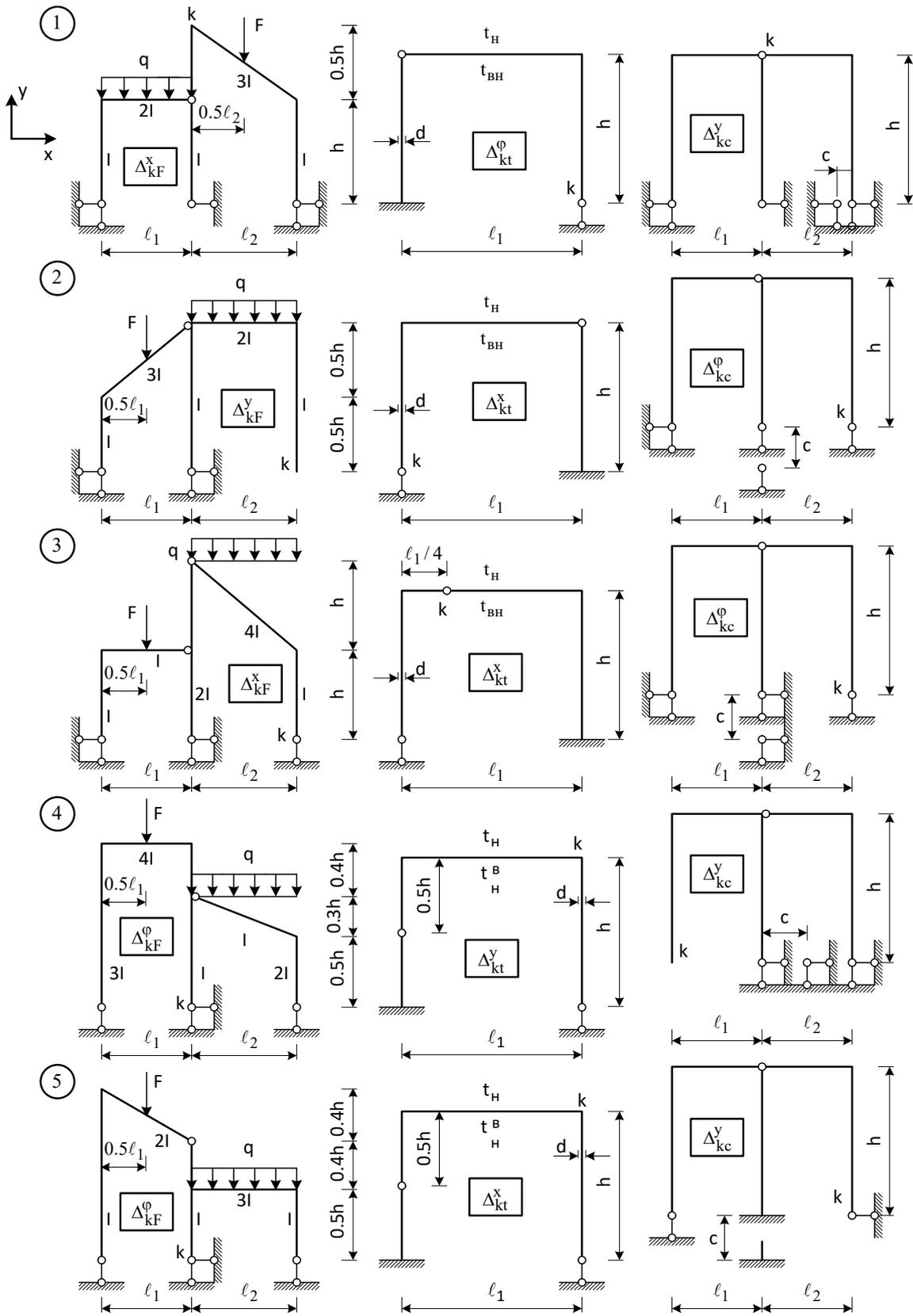


Рисунок Б.4 – Розрахункові схеми рам

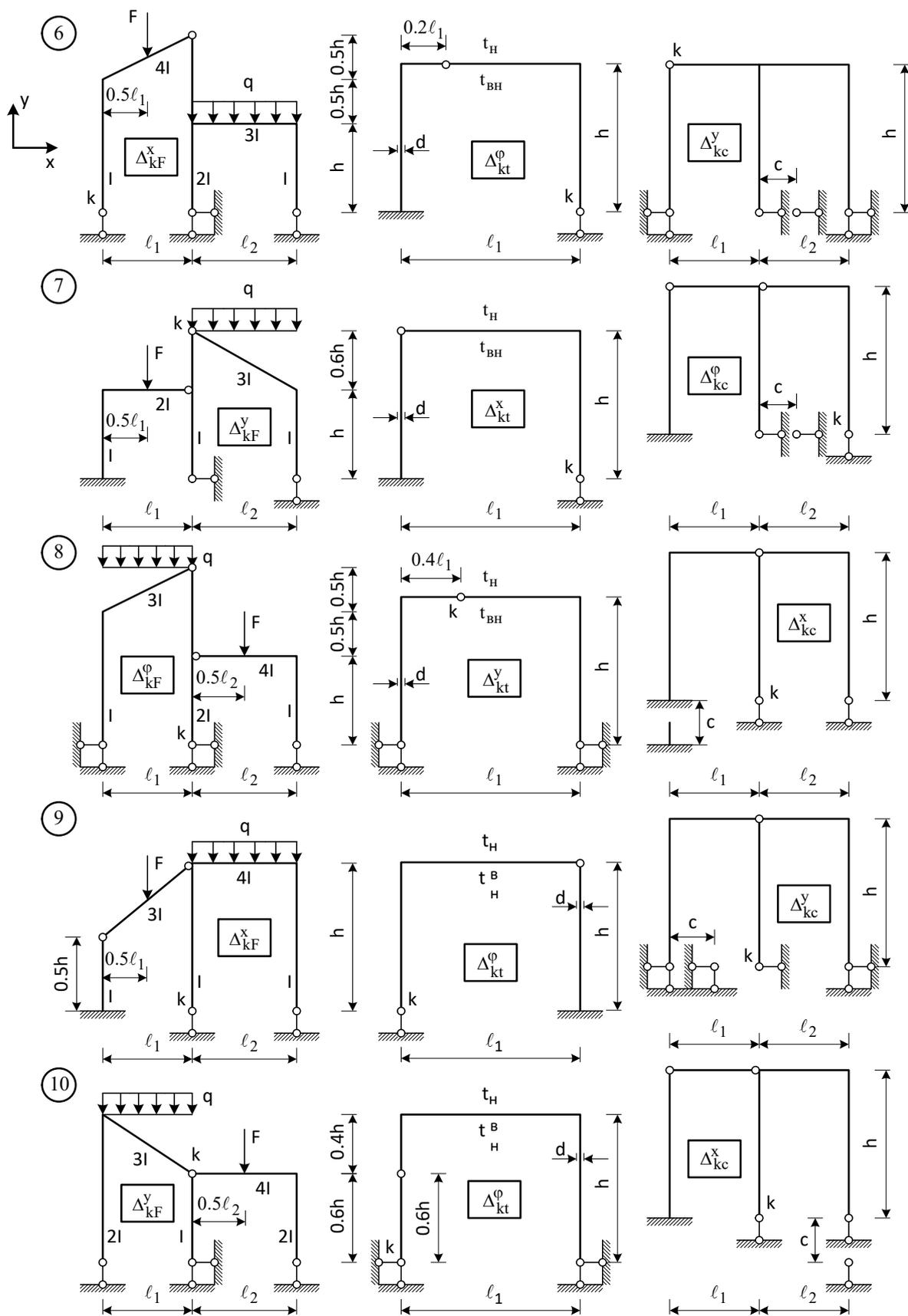


Рисунок Б.4, аркуш 2

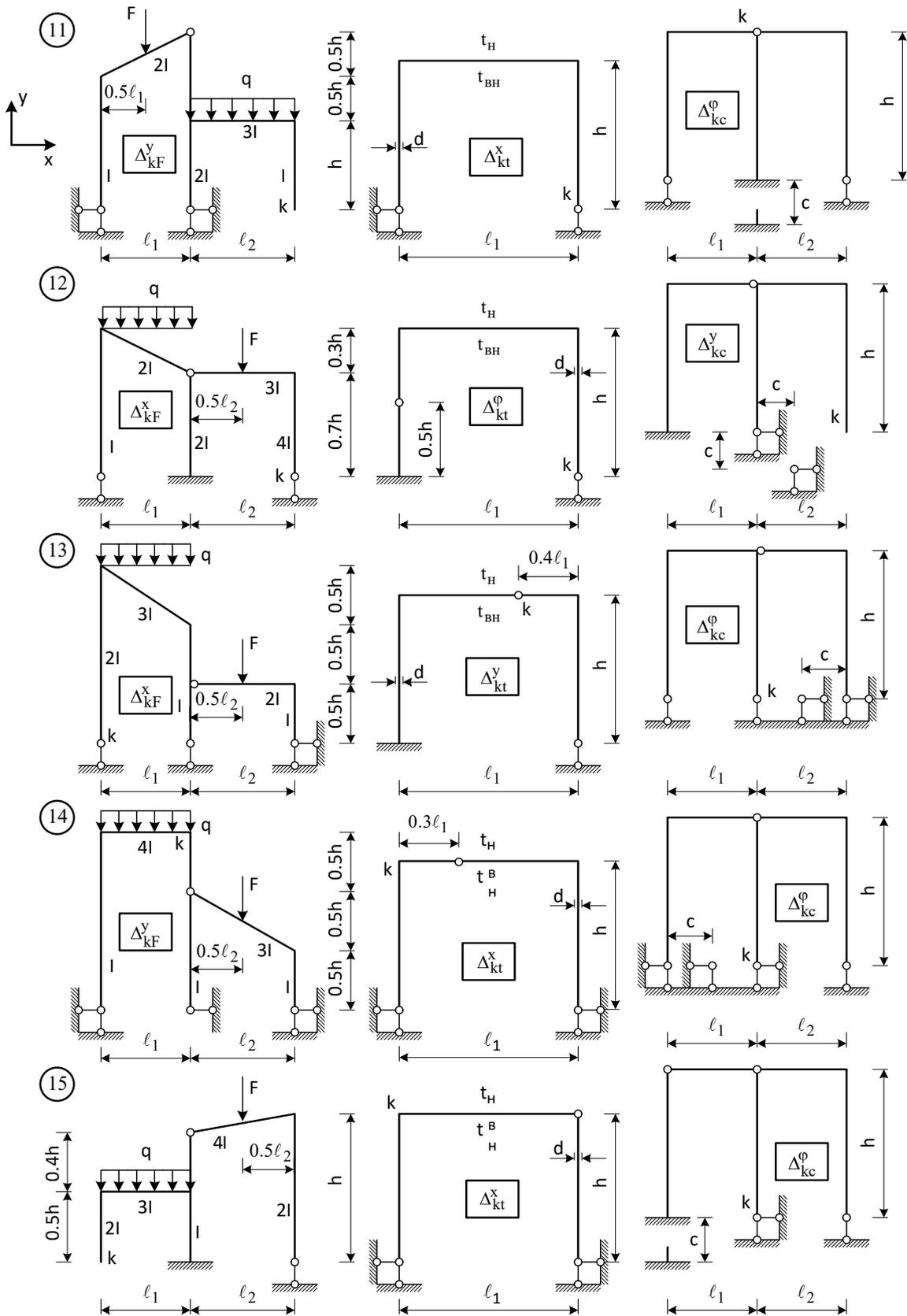


Рисунок Б.4, аркуш 3

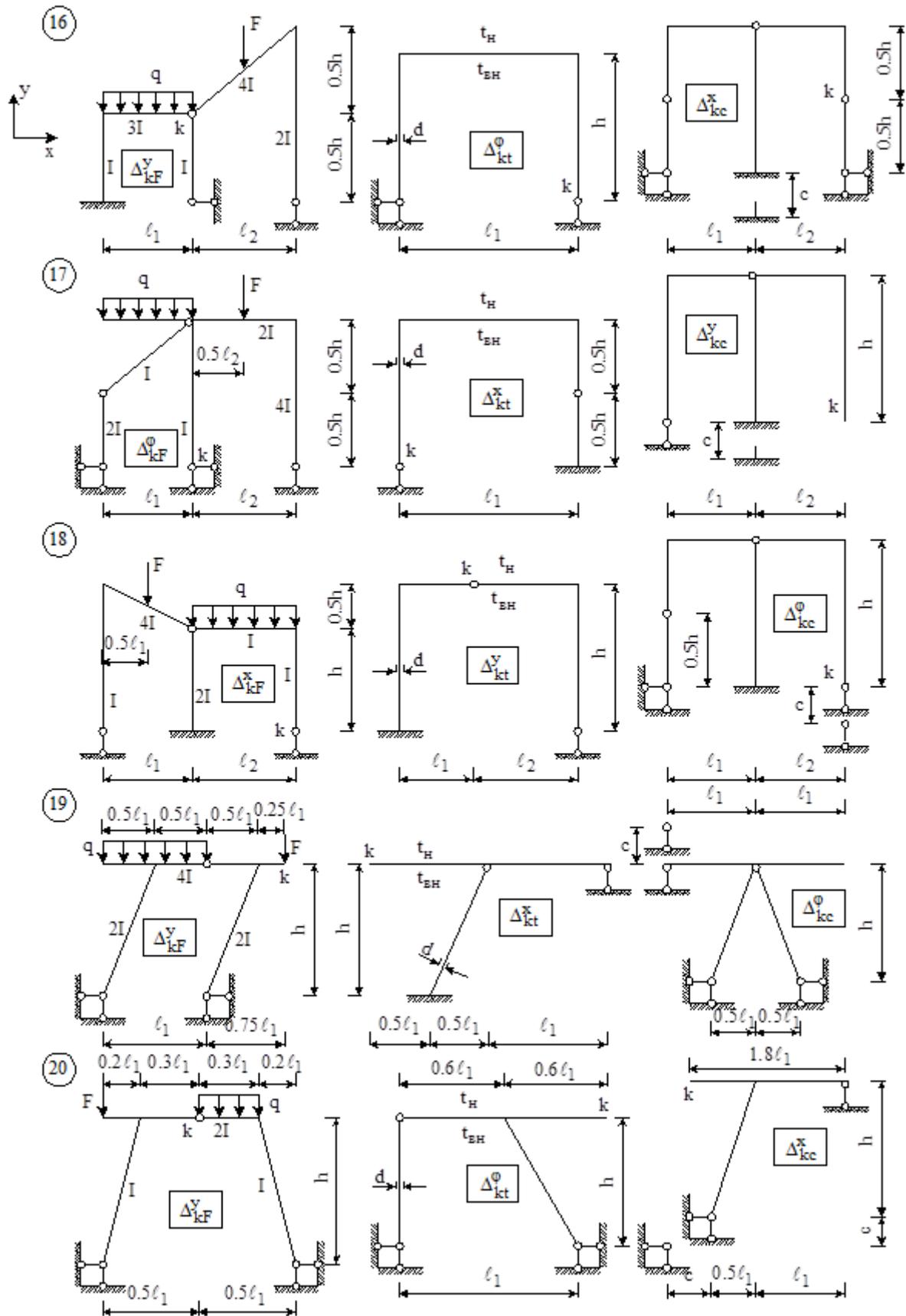


Рисунок Б.4, аркуш 4

Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 5

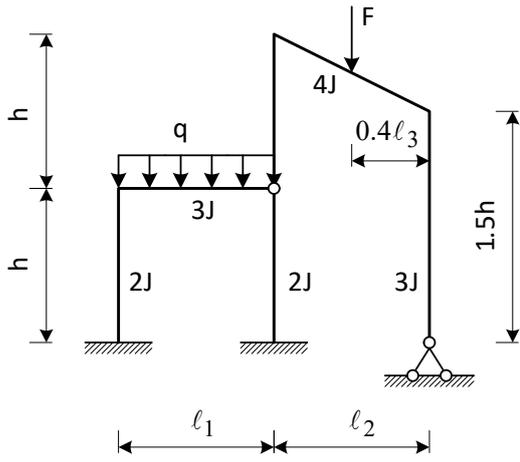
Розрахунок плоских статично невизначних рам

МЕТОДОМ СИЛ

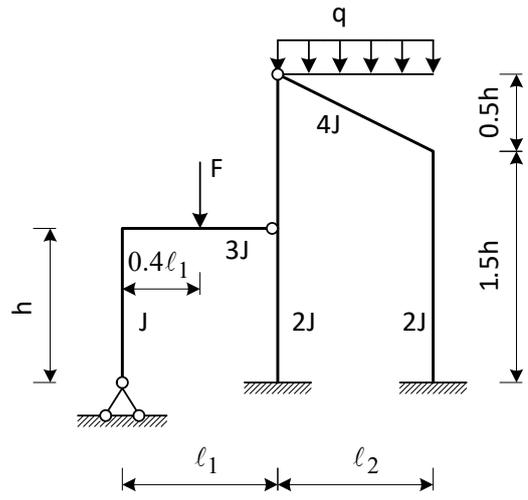
Таблиця Б.5 – Дані для розрахунку

Варіант	$\ell_1$	$\ell_2$	$h$	$F$	$q$
	м	м	м	кН	кН/м
1	10	8	6	120	15
2	8	6	5	100	20
3	6	8	4	160	30
4	10	12	6	80	20
5	6	10	4	140	25
6	12	8	6	120	20
7	10	12	5	100	10
8	6	12	5	120	15
9	8	10	4	140	20
10	6	5	4	160	20
11	8	6	4	90	10
12	10	6	5	80	20
13	8	12	6	90	15
14	5	6	4	160	25
15	8	5	4	140	15
16	12	6	5	90	20
17	5	8	4	120	10
18	12	10	6	80	15

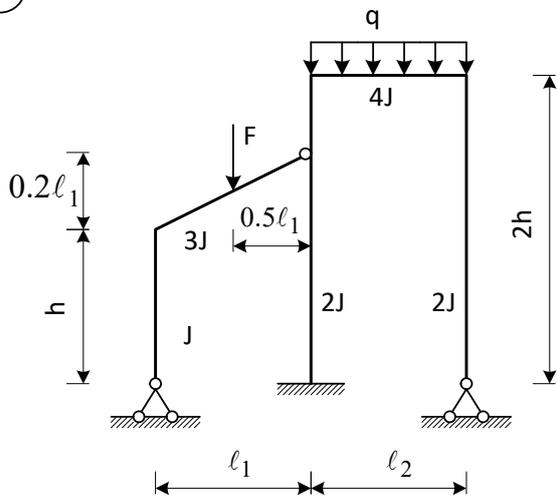
1



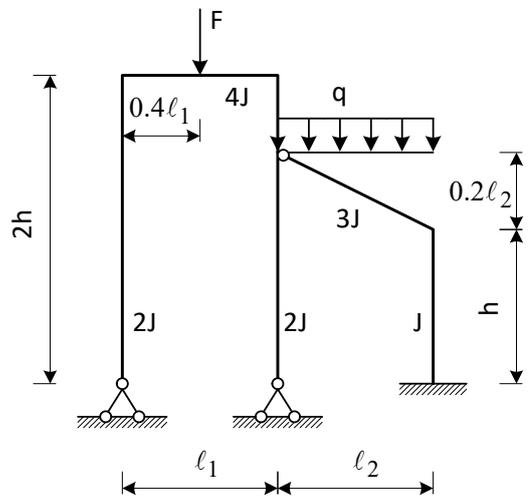
2



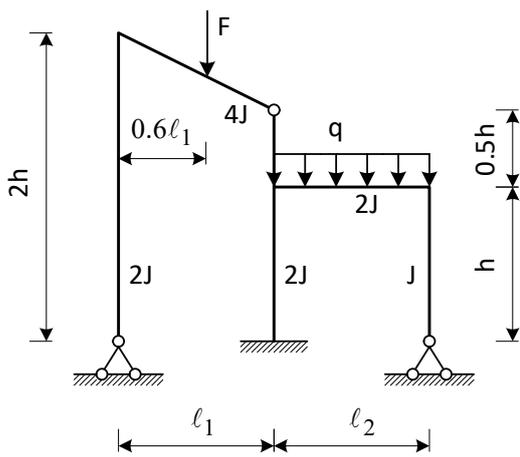
3



4



5



6

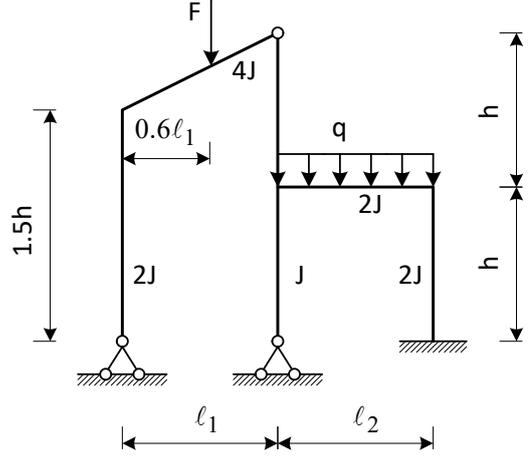


Рисунок Б.5 – Схеми статично невизначних рам

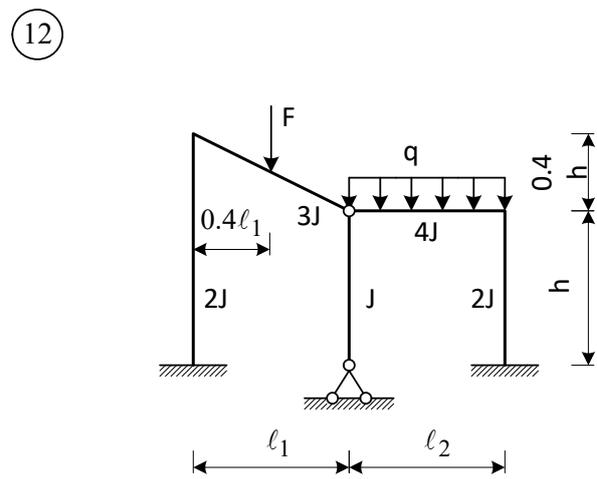
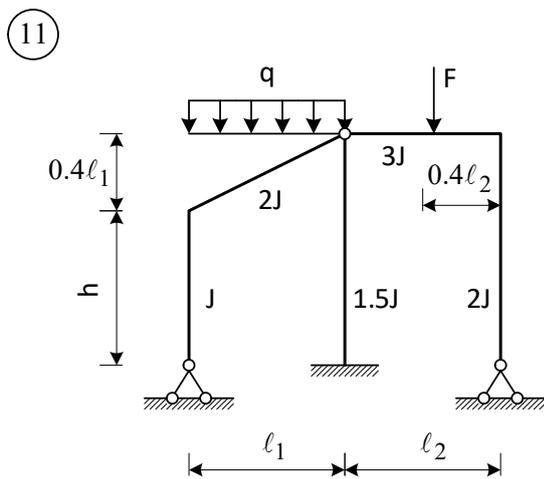
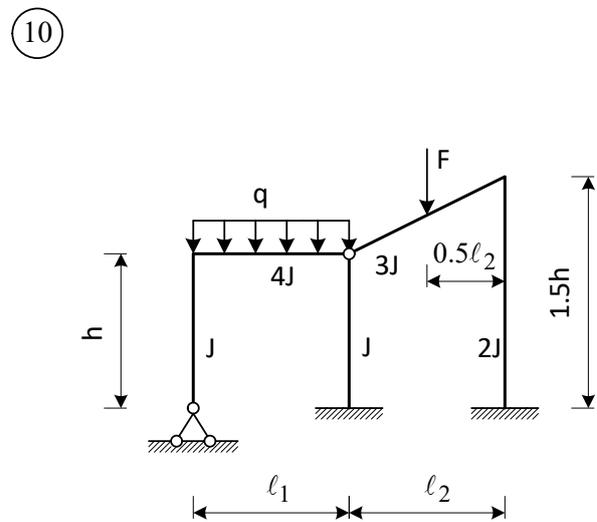
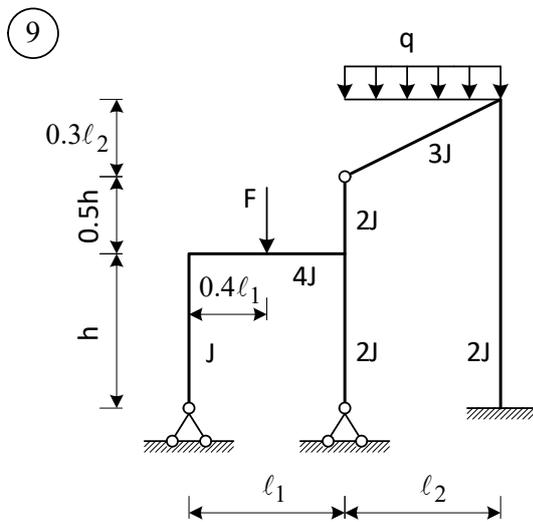
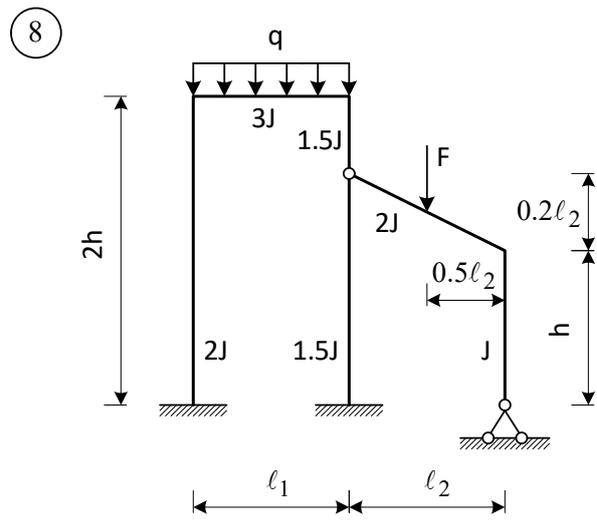
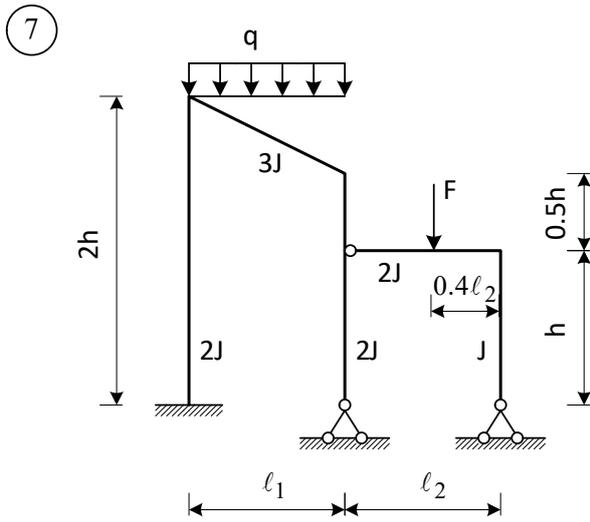
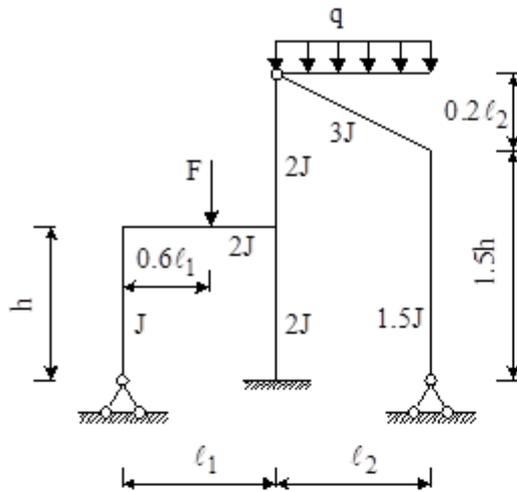
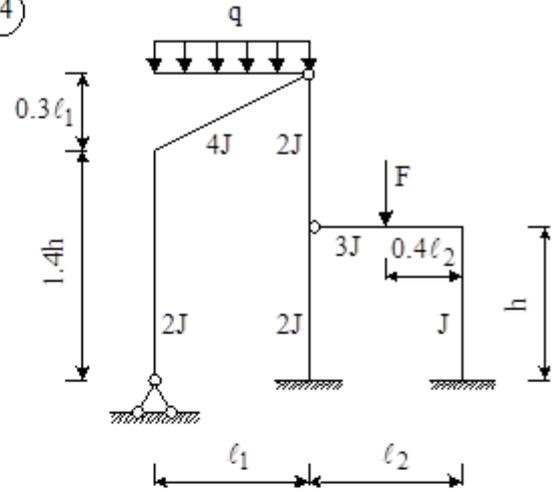


Рисунок Б.5, аркуш 2

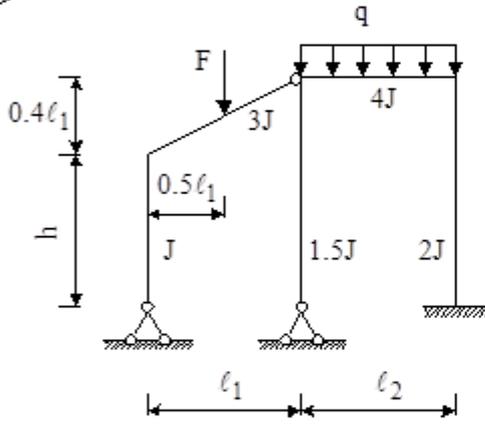
13



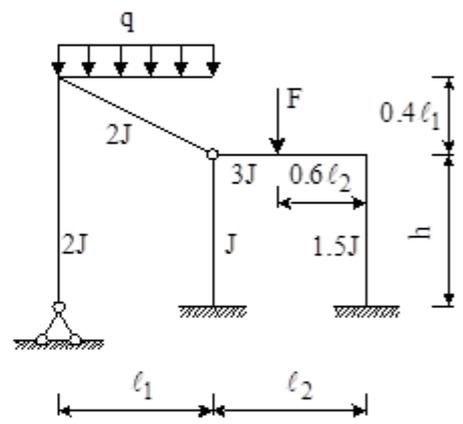
14



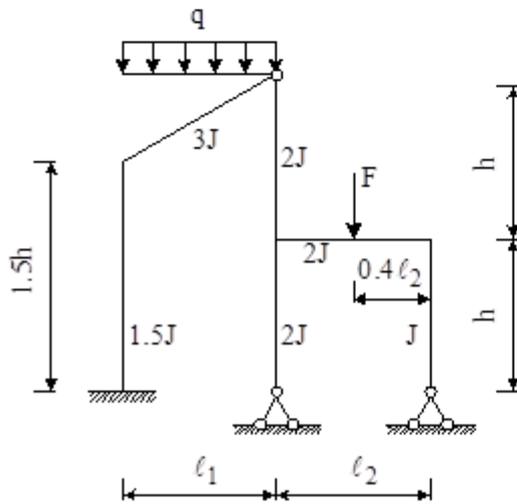
15



16



17



18

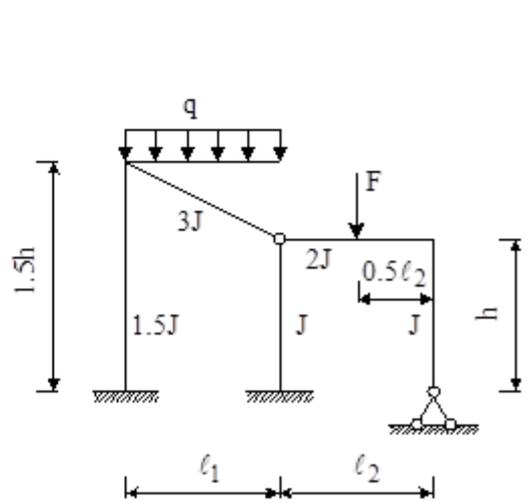


Рисунок Б.5, аркуш 3

Завдання для розрахунково-проектувальної роботи 6

Розрахунок плоских статично невизначних рам

методом переміщень

Таблиця Б.6 – Дані для розрахунку

Варіант	$\ell_1$	$\ell_2$	$h_1$	$h_2$	$F$	$S$	$q$
	м	м	м	м	кН	кН	кН/м
1	16	8	6	4	100	20	30
2	10	6	6	5	120	10	20
3	8	10	5	6	140	25	10
4	12	6	8	5	100	20	15
5	10	8	6	4	120	10	15
6	6	10	5	4	100	25	30
7	8	6	4	5	80	15	20
8	5	10	5	4	100	25	10
9	8	5	4	5	120	15	20
10	12	10	8	6	80	20	15
11	5	6	4	5	120	20	25
12	8	10	6	4	100	10	15
13	6	12	6	4	80	25	10
14	5	8	4	5	120	25	30
15	6	5	5	4	100	15	20
16	8	12	6	5	60	20	10
17	10	12	6	4	80	10	20
18	12	8	6	5	60	10	15

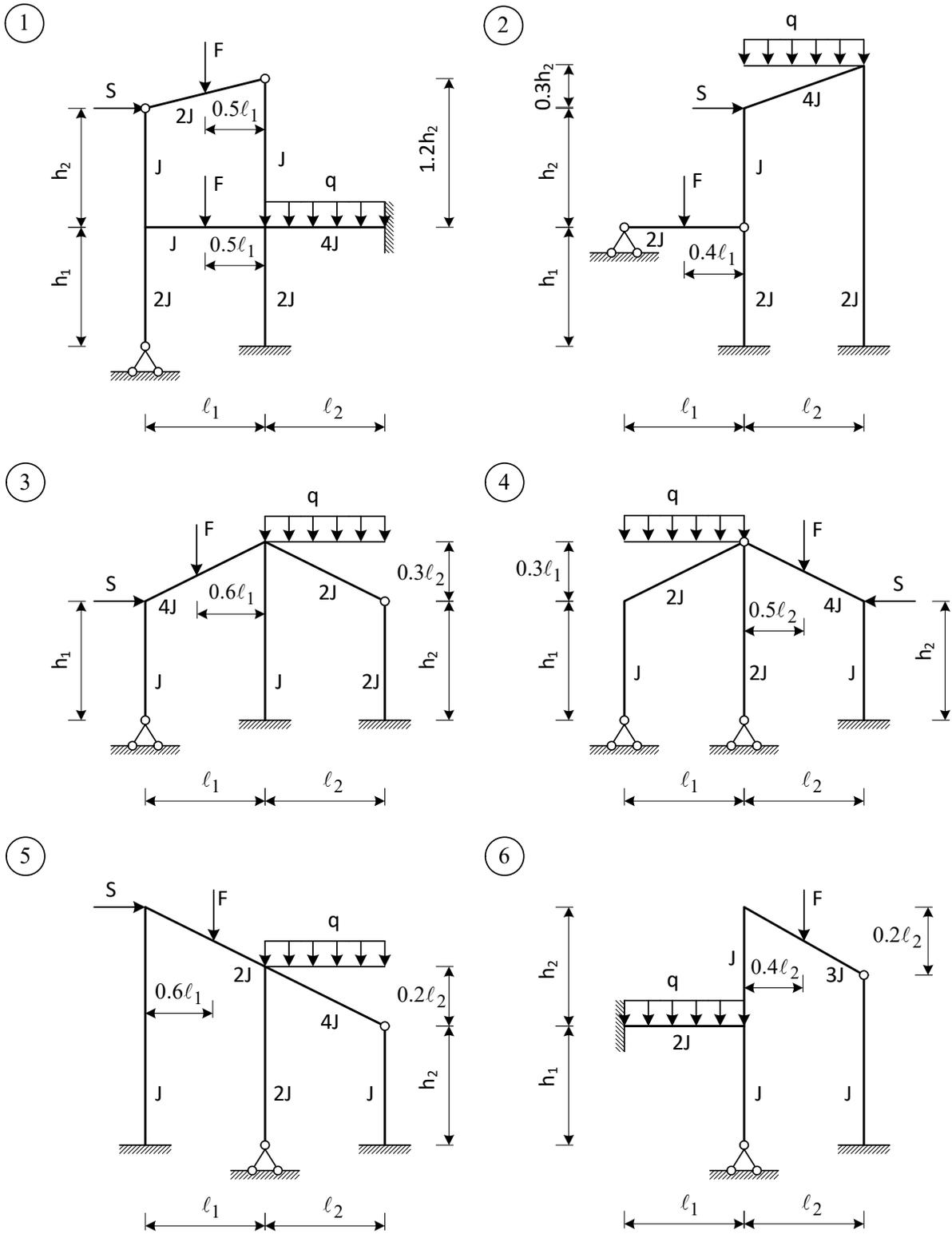


Рисунок Б.6 – Схеми статично невизначних рам

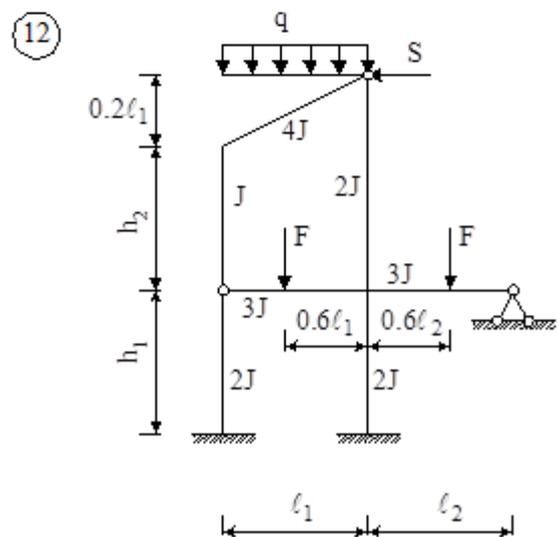
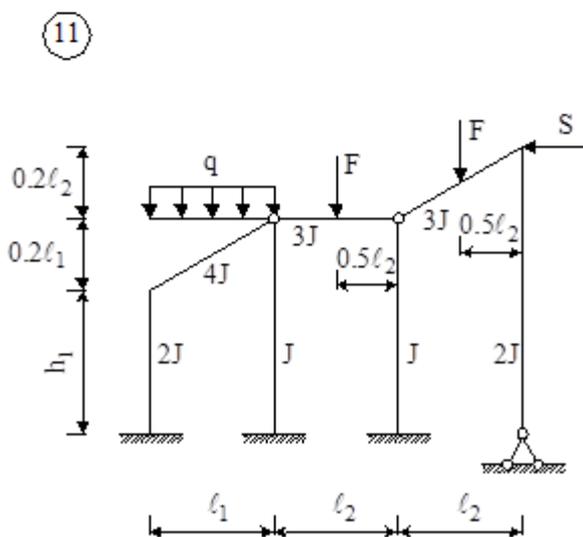
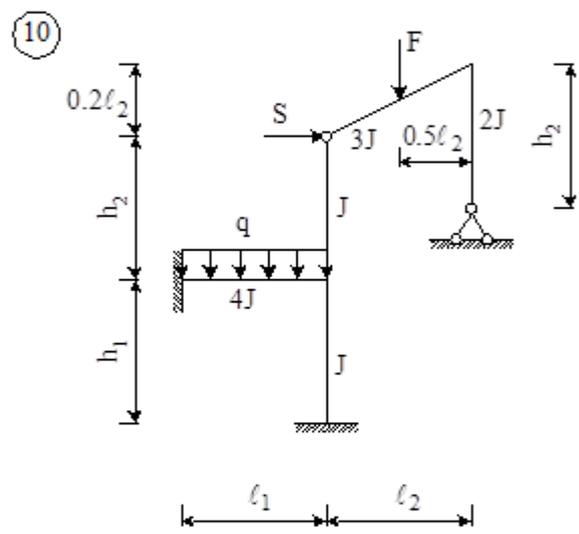
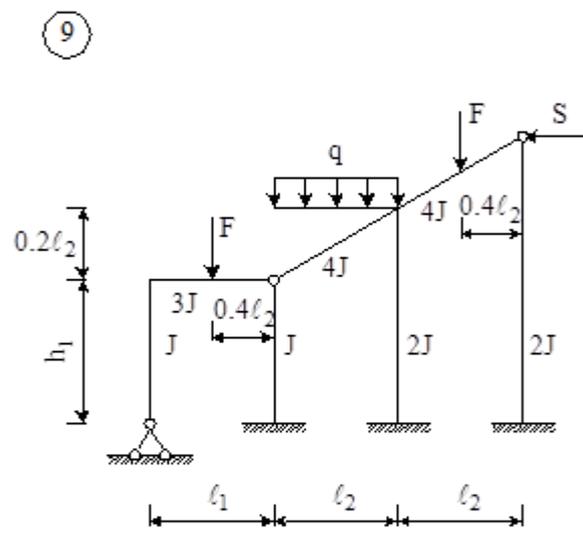
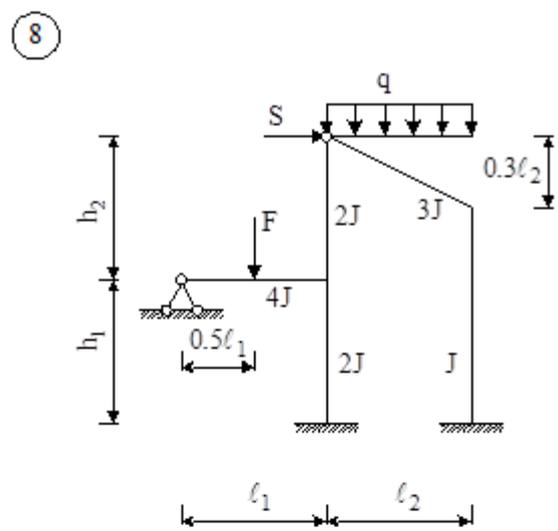
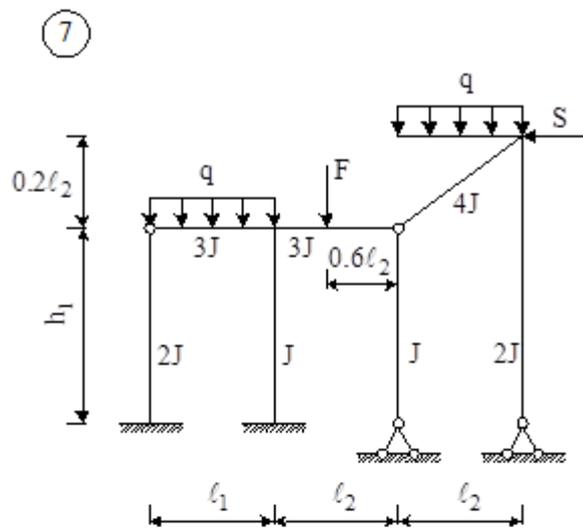


Рисунок Б.6, аркуш 2

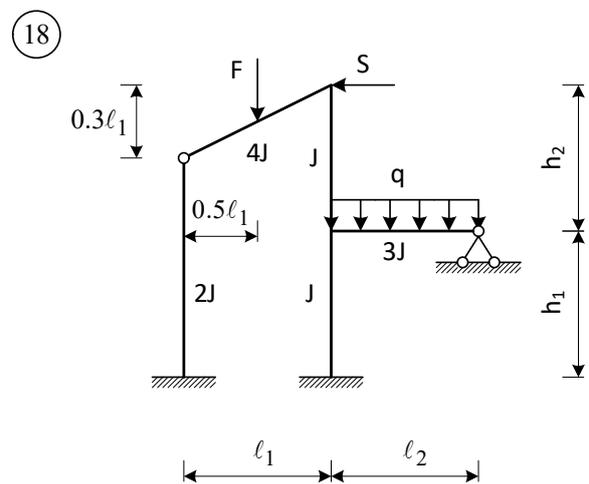
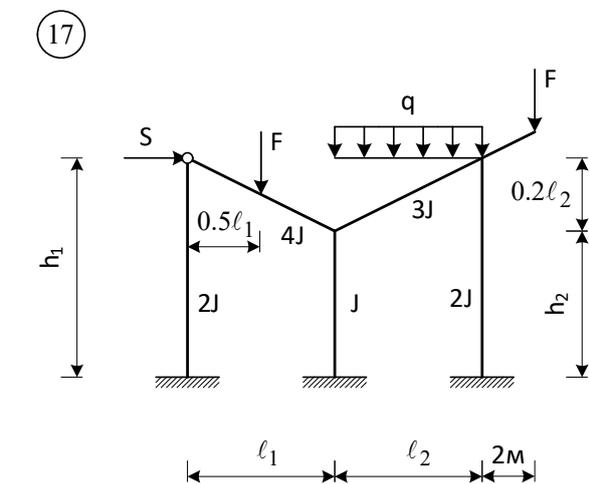
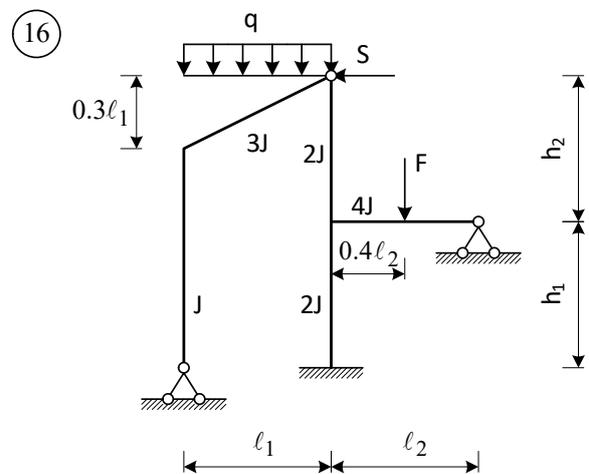
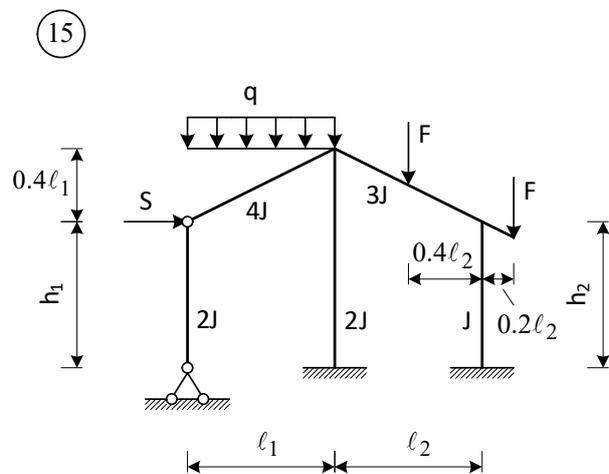
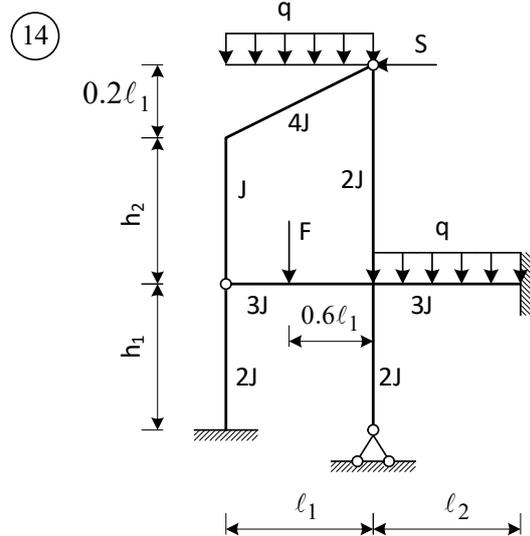
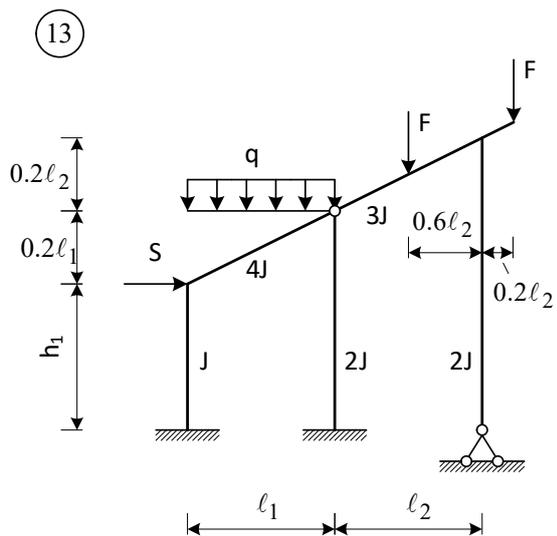


Рисунок Б.6, аркуш 3

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
для виконання розрахунково-графічних робіт

з освітньої компоненти  
«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня  
спеціальностей

G19 «Будівництво та цивільна інженерія»  
і J7 «Залізничний транспорт» будівельного факультету

Відповідальний за випуск Галагура Є. І.

Редактор Ібрагімова Н. В.

---

Підписано до друку 28.01.2026 р.  
Умовн. друк. арк. 6,0. Тираж . Замовлення № .  
Видавець та виготовлювач Український державний університет  
залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.