ISSN 2311-0872 Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка», випуск 42, 2025. С. 55-63

Оригінальна стаття
https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-06
УДК 535.326

РОЗВИТОК МЕТОДОЛОГІЇ ПЕРЕХОДУ ВІД СПЕКТРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВІДНОСНО ПРОСТОРОВОЇ ЗМІННОЇ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВІДНОСНО СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА У ПРОБЛЕМІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ ОДНОВИМІРНО-ПЕРІОДИЧНОГО ДВОШАРОВОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛА

О. В. КАЗАНКО, асистент
e-mail: a_kazanko@i.ua ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9202-8008
О. Є. ПЄНКІНА, ст. викл.
e-mail: penkina@kart.edu.ua ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-9804-6685
О. В. ГОЛОВКО, канд. техн. наук, доц.
e-mail: golovko.aleksandra1@gmail.com ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9958-3960
Український державний університет залізничного транспорту,
м. Харків, майдан Фейєрбаха, 7, Україна

Актуальність. У зв'язку із розв'язанням задачі про розсіяння електромагнітних хвиль (дифракційної задачі) на таких об'єктах як фотонні кристали (одновимірно-періодичні необмежені) важливим є дослідження дисперсійного співвідношення. Йдеться про розв'язання хвильового рівняння з подальшим застосуванням методу розділення змінних (для дифракційних структур, які розглядаються у роботі, зазначений метод розділення змінних дозволяє отримати розв'язок хвильового рівняння, котре у такому разі виявляється рівнянням з періодичними коефіцієнтами, у явному вигляді) та переходом до проблеми Штурма-Ліувілля на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Дисперсійне співвідношення дає змогу зрозуміти умови, при яких проблема Штурма-Ліувілля підлягає вирішенню та пов'язує ці умови з параметрами дифракційної задачі, і тому стає неодмінним щаблем на шляху до отримання розв'язків даного хвильового рівняння. Цей труд продовжує серію виданих раніше робіт з розвитку підходів до вивчення зазначеного дисперсійного співвідношення через розуміння поведінки розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля. Метод матриці перенесення (Transfer matrix method) для хвильового рівняння з періодичними коефіцієнтами дає змогу врахувати специфіку його розв'язання на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$, та досягти виконання складової умови, при якій проблема Штурма-Ліувілля підлягає вирішенню – умови про самоспряженість диференціального оператора в цій проблемі. Це з одного боку, а з іншого – такий метод наочно указує на місце, яке займає розв'язок спектрального рівняння у дисперсійному співвідношенні.

Мета роботи спрощення одержаного раніше рівняння, що є наслідком спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля для одновимірно-періодичного двошарового фотонного кристала. Зокрема, інтегрування деяких складових членів лінійного представлення 1-ї й 2-ї похідних від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля.

Методи. Метод розділення змінних використовується для розв'язання хвильового рівняння. Метод матриці перенесення (Transfer matrix method) для хвильового рівняння з періодичними коефіцієнтами дає змогу врахувати специфіку його розв'язання на необмеженому інтервалі $(-\infty, +\infty)$ та досягти виконання складової умови, при якій проблема Штурма-Ліувілля підлягає вирішенню – умови про самоспряженість диференціального оператора в цій проблемі. Для взяття інтеграла від окремих складових членів лінійного представлення 1-ї й 2-ї похідної від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля використовується метод інтегрування частинами.

Результати. У роботі було показано, що в ході ряду послідовних перетворень, коефіцієнт при нульовій похідній у зведеному диференціальному рівнянні (рівнянні відносно спектрального параметра, до якого здійснюється перехід – згідно з назвою роботи) підлягає спрощенню. Зокрема, було проінтегровано квадрат коефіцієнта лінійного представлення 1-ї похідної від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фотонний кристал, розсіяння електромагнітних хвиль, похідна за спектральним параметром, проблема Штурма-Ліувілля, спектральне рівняння, дисперсійне рівняння, власна функція, фотона заборонена зона, хвильове рівняння шаруватого середовища.

Як цитувати: Казанко В, Пєнкіна ОЄ, Головко ОВ. Розвиток методології переходу від спектрального рівняння відносно просторової змінної до диференціального рівняння відносно спектрального параметра у проблемі Штурма-Ліувілля для одновимірно-періодичного двошарового фотонного кристала. Вісник

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2025;42:55-63. https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-06

In cites: Kazanko OV, Penkina OE, Golovko OV. Development of a methodology for transitioning from a spectral equation with respect to a spatial variable to a differential equation with respect to a spectral parameter in the Sturm-Liouville problem for a one-dimensional periodic two-layer photonic crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series "Radiophysics and Electronics". 2025;42:55-63 (In Ukrainian). https://doi.org/10.26565/2311-0872-2025-42-06

ВСТУП

Сьогодні, як свідчить аналіз даних наукометричних порталів, фотоніка є галуззю науки та техніки, що стрімко розвивається, отже, приваблює інтерес багатьох учених, дослідників різних кваліфікаційних рівнів та напрямів, а також наукових, інститутів по цілому світі [1-2]. Важко, мабуть, уявити сучасну промисловість без усіляких електронних приладів. Проте, добре відомий емпіричний закон Мура передбачає обмеженість у можливостях накопичувати і разом із тим зменшувати електронні чіпи. Отож, подальший розвиток комп'ютерної галузі (продовження тенденції Мура) потребує значних та революційних науково-технічних рішень. Тому, опинившись на порозі виникнення кризи Мура в науковому суспільстві почали говорити про можливі й одночасно реалістичні шляхи розвитку всієї інформаційної технології. На тлі таких подій деякі наукові аналітики схилилися до думки, що найбільш реалістичною та підхожою галуззю, яка зможе подолати кризу Мура стане фотоніка, інші – передрікають стрибкоподібне зростання у розвідці комп'ютерної техніки саме за рахунок впровадження технологій на основі фотонних кристалів [3-4].

У даній роботі розглядається плоский одновимірно-періодичний двошаровий фотонний кристал необмежений вздовж періодичності (далі, *основна дифракційна структура*), для якого записується хвильове рівняння та здійснюється вихід на проблему Штурма-Ліувілля на нескінченному проміжку $(-\infty, +\infty)$. Умовам розв'язання проблеми Штурма-Ліувілля приділяється чималий розділ у теорії рівнянь з частковими похідними, яким є хвильове рівняння. Звідти відомі ключові прийоми забезпечення цих умов при розв'язанні найвідоміших рівнянь з частковими похідними. Для рівнянь з періодичними коефіцієнтами, яким виявляється хвильове рівняння, може використовуватися метод матриці перенесення (Transfer matrix method), завдяки якому стає зрозумілим складова умова розв'язання проблеми Штурма-Ліувілля – умова про самопряженість диференціального оператора у цій проблемі. Метод передбачає виведення дисперсійного рівняння, яке відіграє сполучувану роль між умовами вихідної дифракційної задачі та щойновказаною складовою умовою розв'язання проблеми Штурма-Ліувілля. Протягом досить довготривалого часу автори мали змогу теоретично та частково чисельно досліджувати функцію Z – розв'язок спектрального рівняння – як функцію спектрального параметра (окрім просторової залежності функція Z, будучи розв'язком спектрального рівняння, звісно, має залежність ще й від спектрального параметра). Ця функція Z може розглядатися як складовий член дисперсійного співвідношення для фотонного кристала (основної дифракційної структури). Метод матриці перенесення наочно показує значущість цієї функції у складі дисперсійного співвідношення. Як неодноразово зазначалося у попередніх роботах, чисельне дослідження дисперсійного рівняння розглядуваного фотонного кристала здійснювалося багатьма авторами [4-8], проте дослідження на предмет розуміння аналітичних властивостей складових членів, судячи з доступної літератури, не проводилося. Одна очевидна складність при аналізі та розв'язанні такого співвідношення виражається у багаточисельності параметрів вихідної дифракційної задачі: матеріальних, геометричних та хвильових параметрів. Інша, менш очевидна складність, пов'язана з обчисленням власних чисел спектральної проблеми Штурма-Ліувілля – розв'язанням дисперсійного співвідношення відносно спектрального параметра. А саме, ця складність полягає у близько дистанційованому розташуванні коренів (сильними осциляціями). Тут, при застосуванні чисельного апарату виникає необхідність реалізовувати табулювання з досить мілким кроком, відділення проміжків монотонності – процедура, що звісно, потребує машинного часу. Можливе виявлення емерджентних властивостей (властивості, які не притаманні окремим складовим членам рівняння, а притаманні лише кінцевому рівнянню) може суттєво посприяти кількісному розумінню зазначених проблем. На думку авторів, дослідження функції Z як функції спектрального параметра може у цілому посприяти розвитку поглядів на дисперсійне співвідношення.

У попередніх роботах були записані лінійні представлення для 1-ї, 2-ї похідних від розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром, що дало змогу перейти до лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку – *зведеного рівняння* [9]. У теперішній роботі здійснюється ряд послідовних перетворень коефіцієнта при нульовій похідній у такому зведеному рівнянні, зокрема, інтегрується квадрат функції ξ, де ξ – складовий член коефіцієнтів лінійного представлення для 1-ї й 2-ї похідної за спектральним параметром від розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля (лінійне представлення через саму функцію та свою похідну, але за просторовою зміною). Як відомо з попередніх робіт, ξ задовольняє диференціальному рівнянню, власне, це головним чином, й послугувало можливості звільнитися від знаку інтеграла у послідовному перетворенні коефіцієнтів зведеного рівняння при 0-й похідній. На думку авторів, такі перетворення сприятимуть спрощенню самого коефіцієнта, та розумінню поведінки відносно спектрального параметра, а також розумінню степені вкладу цього коефіцієнту у зведене рівняння.

Нехай $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ – спектральне рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля, L – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку, β – спектральний параметр. Метод матриці перенесення передбачає постановку іншої спектральної проблеми для квадратної матриці розміром 2×2 (матриці перенесення) [5]. Суть методу ґрунтується на побудові лінійного оператору T, що діє у двовимірному просторі розв'язків (площині розв'язків) спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ та розв'язку $Z(z-l)$ ставить у відповідність розв'язок $Z(z)$: $\mathrm{T}: Z(z-l) \to Z(z)$, l – період кристала, $z \in (-\infty, +\infty)$ – незалежна просторова змінна (лінійність оператору T перевіряється безпосередньо за визначенням). Оскільки, у кінцевовимірних просторах лінійний оператор однозначно задається деякою матрицею, то T є квадратна матриця розміром 2×2 (тобто оператор T ототожнюється з матрицею) [7-8]. Отже, маємо задачу на власні числа для квадратної матриці T: $\mathrm{T}Z = \Lambda Z$. $= \Lambda Z$ – розв'язок спектрального рівняння, Λ – спектральний параметр. Ця задача еквівалентна розв'язанню наступного квадратного рівняння відносно параметра Λ: $\det(\mathrm{T}Z - \Lambda \mathrm{I}) = 0$. Звідки маємо два (та лише два) власних числа Λ_1, Λ_2.

Нехай, далі, Λ_1, Λ_2 – власні числа матриці перенесення T, тоді для будь-якого β виконується тотожність $\Lambda_1 Z(z-l) = Z(z)$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Вище зазначалось, що із загальної теорії рівнянь у часткових похідних відомі ключові прийоми забезпечення умов, завдяки яким проблема Штурма-Ліувілля підлягає вирішенню. При застосуванні методу матриці перенесення до рівнянь з періодичними коефіцієнтами для власних чисел Λ_1, Λ_2 має виконуватись умова $\Lambda_1 \overline{\Lambda_2} = 1$ (у просторі функцій, що задовольняють цій умові диференціальний оператор Штурма-Ліувілля є самоспряженим).

ПОСТАНОВКА ДИФРАКЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Будемо розглядати дифракційну задачу для двошарового нескінченного одновимірного періодичного фотонного кристала з періодом l. Нехай ε_j, μ_j – діелектрична та магнітна проникності відповідно 1-го й другого шарів ($j = 1,\ 2$), d – розмір першого шару, $l - d$ – другого шару. Уведемо прямокутну декартову систему координат ZOY таким чином, щоб періодичність структури була направлена вздовж вісі OZ. Скалярне рівняння плоских монохроматичних Е-поляризованої хвилі (хвильове рівняння) для двовимірного середовища, заповненого даним кристалом, має наступний вигляд (модифіковане рівняння Гельмгольца):

$$\Delta_\mu u + k^2 \boldsymbol{n}^2 u = 0, \tag{1}$$

тут $\Delta_\mu = \mu \nabla \frac{1}{\mu} \nabla$ – модифікований оператор Лапласа, $u = u(z, y)$ – шукана скалярна функція, z, y $\in(-\infty, +\infty)$, $\boldsymbol{n}(z) = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – коефіцієнт заломлення – кусково-стала функція, $\varepsilon = \varepsilon(z)$ – діелектрична проникність, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-сталі:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & z \in \left(\frac{d}{2} - l + ml,\ -\frac{d}{2} + ml\right] \\ \varepsilon_2, & z \in \left(-\frac{d}{2} + ml,\ \frac{d}{2} + ml\right] \end{cases}, \quad \mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z \in \left(\frac{d}{2} - l + ml,\ -\frac{d}{2} + ml\right] \\ \mu_2, & z \in \left(-\frac{d}{2} + ml,\ \frac{d}{2} + ml\right] \end{cases},$$

m – ціле, l – період шаруватого кристала, $k = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число, ω – циклічна частота плоского монохроматичної хвилі, c – швидкість світла у порожнечі [10].

Згідно з методом розділення змінних, загальний розв'язок рівняння (1) представляється у вигляді ряду Фур'є:

$$u = \sum_{n}^{\infty} Y_{\beta_n} Z_{\beta_n}\ , \tag{2}$$

де $Y_{\beta_n} = Y_{\beta_n}(y)$ – задовольняє такому рівнянню $\ddot{Y}_{\beta_n} + \beta_n^2 Y = 0$ (звичайному лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку), та відповідно має вигляд, $Y_{\beta_n}(y) = C_{\beta_n} e^{\beta_n y} + D_{\beta_n} e^{-\beta_n y}$, C_{β_n}, D_{β_n} – довільні константи, $\{Z_{\beta_n}\}_{n=0,\pm1,\ldots}$ – повна ортогональна система функцій, причому, $Z_{\beta_n} = Z_{\beta_n}(z)$ задовольняє рівнянню $\mu(\frac{1}{\mu}\dot{Z}\dot{)} + (k^2\boldsymbol{n}^2 + \beta_n^2)Z = 0$ [8-9]. Специфіка розв'язання задачі, зокрема, виявляється у тому, що розв'язок відшукується на всій числовій осі.

Як відомо, побудова повної ортогональної системи функцій, кожен елемент якої задовольняє деякому лінійному диференціальному рівнянню 2-го поряду – проблема Штурма-Ліувілля – може здійснюватись шляхом розв'язання наступної спектральної проблеми

$$\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z, \tag{3}$$

де β – спектральний параметр, L – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку, заданий у певному функціональному просторі Гільберта H – в опорному просторі. Стосовно рівняння (1), диференціальний оператор має вигляд $\mathrm{L}Z \equiv \mu(\frac{1}{\mu}\dot{Z}\dot{)} + k^2\boldsymbol{n}^2 Z$, а у якості опорного простору H вибирається простір майже-періодичних функцій з наступним скалярним добутком (майже-періодичні функції утворюють повний простір, що й потрібно для застосування апарату рядів Фур'є та розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля):

$$(u, v) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{z_0}^{z_0+T} \frac{1}{\mu} u\bar{v}\,\mathrm{d}z \ , \tag{4}$$

де $u, v \in \mathrm{H}$, $\mu = \mu(z)$ – магнітна проникність – кусково-стала функція, $z_0 \in (-\infty, +\infty)$ – довільна точка. Скалярний добуток (4) не залежить від вибору точки z_0.

ОГЛЯД

У даній роботі продовжує розвиватися інтерес до функції Z – до розв'язку спектрального рівняння – як до функції спектрального параметра β. Раніше опубліковані роботи присвячувалися розвитку методиці визначення норми власних функцій проблеми Штурма-Ліувілля, де розбиралось ціле коло питань, пов'язаних з інтегруванням квадрата модуля власної функції проблеми Штурма-Ліувілля. Паралельно виник інтерес до 1-ї, згодом й до 2-ї похідних від такого розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром. У даній роботі знову зачіпаються питання подібні до питань з визначення норми, адже норма задається скалярним добутком, тобто інтегральним перетворенням з квадратом даної функції, яка є розв'язком неоднорідного рівняння з кусково-сталою правою частиною та обертається в нуль (за просторовою змінною) на межі розподілу середовищ кристала.

Якщо Z – розв'язок спектрального рівняння (3) – задовольняє циклічній умові $\Lambda Z(z-l) = Z(z)$ з деяким комплексним числом Λ (необов'язково з таким, що $\Lambda\bar{\Lambda} = 1$), то 1-ша, й 2-га похідні за спектральним параметром β представляються лінійно через саму функцію та свою похідну, але за просторовою змінною: $\psi = -\frac{1}{2}\dot{\xi}Z + \xi\dot{Z}$, $\varphi = -\left(\frac{1}{2}\dot{\xi}' + 2\beta\int\xi\right)Z + \xi\dot{Z}$, ξ – відома функція [4-7]. 1-а похідна визначається як розв'язок неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку (таке рівняння отримується диференціюванням спектрального рівняння за спектральним параметром: $\mathrm{L}Z = -\rho Z$ <=> $\mathrm{L}Z' = -Z - \rho Z'$ <=> $\mathrm{L}Z' + \rho Z' = -Z$):

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\psi}\dot{)} + \frac{\varsigma^2}{\mu}\psi = -2\frac{\beta}{\mu}Z,$$

тут ψ – шукана функція. Розв'язуючи, рівняння (5) маємо

$$\psi = -\frac{1}{2}\dot{\xi}Z + \xi\dot{Z} \ ,$$

тут ξ – обертається в нуль на межі розподілу шарів кристала [11]. Для знаходження 2-ї похідної маємо також лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку ($\mathrm{L}Z = -\rho Z$ <=> $\mathrm{L}Z'' + Z' + \rho Z'' = -Z'$ <=> $\mathrm{L}Z'' + Z' + \rho Z'' = -Z'$):

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\varphi}\dot{)} + \frac{\varsigma^2}{\mu}\varphi = -\frac{2}{\mu}Z' \ .$$

Функція задовольняє рівнянню для будь-якого ξ [12]. На шляху до чого розвився інтерес до визначення 1-ї, 2-ї похідної за спектральним параметром.

$$\varphi = -\left(\frac{1}{2}\dot{\xi}' + 2\beta\int\xi\right)Z + \xi\dot{Z} \ ,$$

де функція ξ є тією ж функцією, що й у 1-й похідній та виражається через наступне неоднорідне диференціальне рівняння

$$(\dot{\phi}\frac{1}{\mu}\dot{)} + 4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu}\phi = \frac{2}{\mu} \ , \tag{5}$$

тут

$$\xi = \int_{-\frac{d}{2}} \phi.$$

Врешті, у роботі [13] записується лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції Z як функції спектрального параметра β:

$$-\left(\frac{Z'}{\xi}\right)' = \ln'\xi\, Z \ . \tag{6}$$

Таким чином, прагнення розуміти поведінку розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром, виходячи з попередніх авторських робіт, приводить до лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку. Звідки виникає задача вивчати таке диференціальне рівняння. Функція ξ має досить глибоку складність, оскільки виражається як розв'язок неоднорідного рівняння (5), котрий зі своїм інтервалом задовольняє циклічним умовам на періоді. На думку авторів, розумно задатися питанням про можливість існування емерджентних властивостей такої функції ξ, тобто властивостей, які ця функція ξ виявляє на більш високих рівнях складності (властивості, які не притаманні складовим членам цієї функції).

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Запишемо похідну від коефіцієнта при 0-й похідній рівняння (6):

$$(\dot{\xi}'\xi-\dot{\xi}\xi')^{\cdot}=\ddot{\xi}'\xi+\underline{\dot{\xi}'\dot{\xi}}-\ddot{\xi}\xi'\underline{-\dot{\xi}'\dot{\xi}}=\ddot{\xi}'\xi-\ddot{\xi}\xi'.$$

Далі, скористуємося тим, що функції ξ, ξ' є розв'язки рівняння (5),

$$\ddot{\xi}'\xi-\ddot{\xi}\xi'=\left[-4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu}\xi'-\frac{4}{\mu}\xi-\frac{1}{\mu}\ddot{\xi}'\Big|_{-\frac{d}{2}}\right]\xi+\left[-4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu}\xi+\frac{2}{\mu}\left(z+\frac{d}{2}\right)-\frac{1}{\mu}\ddot{\xi}\Big|_{-\frac{d}{2}}\right]\xi'$$

$$=\underline{-4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu}\xi'\xi}-\frac{4}{\mu}\xi\xi-\frac{1}{\mu}\ddot{\xi}'\Big|_{-\frac{d}{2}}\xi\ \underline{+4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu}\xi'\xi}+\left[\frac{2}{\mu}\left(z+\frac{d}{2}\right)-\frac{1}{\mu}\ddot{\xi}\Big|_{-\frac{d}{2}}\right]\xi'$$

$$=-\frac{4}{\mu}\xi^2-\frac{1}{\mu}\ddot{\xi}'\Big|_{-\frac{d}{2}}\xi+\left[\frac{2}{\mu}\left(z+\frac{d}{2}\right)-\frac{1}{\mu}\ddot{\xi}\Big|_{-\frac{d}{2}}\right]\xi'$$

(підкреслені доданки взаємознищуються). З останнього перетворення, вирисовується потреба в інтегруванні квадрата функції ξ.

У випадку, коли шарувате середовище вироджується в суцільне однорідне середовище (матеріальні параметри є сталими: $\varepsilon_{1,2},\ \mu_{1,2}=\mathrm{const}$) для квадрата розв'язку спектрального рівняння має місце формула (взагалі кажучи, формула має місце для лінійного однорідного рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами):

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^2+\left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2=C\,, \tag{7}$$

тут κ – розв'язок спектрального рівняння, $C=\mathrm{const}$. Якщо функція κ є розв'язком спектрального рівняння (3), то похідна від цієї функції $\dot{\kappa}$ також є розв'язком даного рівняння (взагалі кажучи, такі розв'язки не обов'язково мають бути лінійно незалежні). Тож, записуючи визначник Вронського для функцій κ, $\dot{\kappa}$ у випадку суцільного середовища, приходимо до вище записаного співвідношення – (7). Остання формула може бути перенесена на шарувате середовище у припущеннях, що за просторовою змінною розв'язок κ обертається в нуль на межі розподілу середовищ кристала. Ці міркування покладено в основу перетворень коефіцієнта зведеного рівняння при 0-й похідній у рівнянні (5). Проінтегруємо (6):

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^2+\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2=C(z+\frac{d}{2})\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z}.$$

Далі, інтегруємо частинами,

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^2d\tau=\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\ d\tau=\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\,d\frac{1}{\mu}\kappa=$$

$$=\frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z}-\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\frac{1}{\mu}\kappa(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa})^{\cdot}dt=\frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z}+\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\frac{1}{\mu}\frac{\varsigma^2}{\mu}\kappa^2\,dt=\frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z}+\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2dt\,.$$

Повертаючись до (6) маємо,

$$\frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z}+2\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2dt=C\,(z+\frac{d}{2})\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z}\iff 2\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2dt=C\left(z+\frac{d}{2}\right)\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z}-\frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z}.$$

Отже, отримали вираз для інтеграла, подібний до інтеграла від квадрата функції κ. Перенесемо ці міркування на функцію ξ. Проінтегруємо рівняння (5) :

$$\frac{1}{\mu}\dot{\phi} - \frac{1}{\mu}\dot{\phi}\Big|_{-\frac{d}{2}} + 4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu}\int_{-\frac{d}{2}} \phi = -\frac{2}{\mu}\left(z + \frac{d}{2}\right) => \frac{1}{\mu}\ddot{\xi} - \frac{1}{\mu}\ddot{\xi}\Big|_{-\frac{d}{2}} + 4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu} = -\frac{2}{\mu}\left(z + \frac{d}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\dot{\phi}' - \frac{1}{\mu}\dot{\phi}'\Big|_{-\frac{d}{2}} + 4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu}\int_{-\frac{d}{2}} \phi' = -\frac{4}{\mu}\int_{-\frac{d}{2}} \phi => \frac{1}{\mu}\ddot{\xi}' - \frac{1}{\mu}\ddot{\xi}'\Big|_{-\frac{d}{2}} + 4\frac{\varsigma_\rho^2}{\mu}\xi' = -\frac{4}{\mu}\xi\,,$$

або

$$\ddot{\xi}' = \frac{1}{\mu}\ddot{\xi}'\Big|_{-\frac{d}{2}}\mu - 4\varsigma_\rho^2\xi' + 4\xi <=> \ddot{\xi}'\xi = \frac{1}{\mu}\ddot{\xi}'\Big|_{-\frac{d}{2}}\mu\xi - 4\varsigma_\rho^2\xi'\xi - 4\xi^2.$$

Це перетворення наштовхнуло на думку, що ці розв'язки задовольняють лінійному однорідному рівнянню виду (5). Спроби виписати похідні від останнього представлення дали змогу зробити висновок про можливість інтегрувати квадрат, але за умови, що розв'язок обертається в нуль на межі розподілу шарів кристала. Хвильове рівняння для одновимірно-періодичного двошарового фотонного кристала є лінійним диференціальним рівнянням у часткових похідних 2-го порядку з кусково-сталим коефіцієнтом та може розв'язуватися методом розділення змінних [14-17]. Запишемо 1-шу похідну:

$$\frac{1}{\mu}\left(\xi\frac{1}{\mu}\dot{\xi}\right)^{\cdot} = \frac{1}{\mu}\times\ \dot{\xi}\frac{1}{\mu}\dot{\xi} + \xi\left(\frac{1}{\mu}\dot{\xi}\right)^{\cdot} = \left(\frac{1}{\mu}\dot{\xi}\right)^2 + \frac{1}{\mu}\xi\left(-\frac{\varsigma^2}{\mu}\xi + \frac{2}{\mu}\right) = \left(\frac{1}{\mu}\dot{\xi}\right)^2 - \left(\frac{\varsigma}{\mu}\xi\right)^2 + \frac{2}{\mu^2}\xi\,.$$

Далі, інтегруємо обидві частини останнього перетворення,

$$\frac{1}{\mu}\left(\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^{\cdot} - \frac{1}{\mu}\left(\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^{\cdot}\Big|_{-\frac{d}{2}} + 4\frac{\varsigma^2}{\mu}\int_{-\frac{d}{2}} \kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa} = 0$$

$$<=> \left(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^2 - \left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2 = \frac{1}{\mu}\left(\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^{\cdot}\Big|_{-\frac{d}{2}} <=> \left(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2 = C\,.$$

Зрозуміло, що якщо функція κ обертається в нуль на межі розподілу шарів кристала, то ця функція κ задовольняє спектральному рівнянню (3), справді,

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^2 dt = \int_{-\frac{d}{2}}^{z}\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\ dt = \int_{-\frac{d}{2}}^{z}\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\, d\frac{1}{\mu}\kappa =$$

$$= \frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z} - \int_{-\frac{d}{2}}^{z}\frac{1}{\mu}\kappa\left(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^{\cdot} dt = \frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z} + \int_{-\frac{d}{2}}\frac{1}{\mu}\frac{\varsigma^2}{\mu}\kappa^2\, dt = \frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z} + \int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2 dt\,.$$

Тобто, записуємо (інтегруємо частинами)

$$\left(\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\varsigma}{\mu}\kappa\right)^2 = C <=> \frac{1}{\mu}\kappa\frac{1}{\mu}\dot{\kappa}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{z} + 2\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\left(\frac{\varsigma^2}{\mu}\kappa\right)^2 dt = \left(z + \frac{d}{2}\right).$$

Отже , стає зрозумілим, що умова про обертання в нуль функції κ (так й функції ξ) на межі розділу шарів основного фотонного кристала [17-18] дає змогу інтегрувати квадрат цієї функції (мається схожість з обчисленням норми) та, врешті, спростити член при 0-й похідній у зведеному диференціальному рівнянні відносно спектрального параметра β – (6).

ВИСНОВКИ

Дослідження та спроби розвивати підходи до вивчення дисперсійного співвідношення для плоского двошарового одновимірно-періодичного фотонного кристала (основної дифракційної структури) представляється важливою задачею, оскільки останнє встановлює зв'язок між умовами розв'язання проблеми Штурма-Ліувілля (точніше, складовою умовою розв'язання – умову про самоспряженість диференціального оператора) та параметрами дифракційної задачі [19-22]. Як неодноразово зауважувалось у теперішній та попередніх авторських роботах чисельне дослідження дисперсійного рівняння здійснювалося багатьма авторами. Втім, на противагу щойно зазначеним трудам роботам, автори даної роботи вдаються до спроб зрозуміти можливі властивості цього дисперсійного рівняння через розуміння поведінки розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля як функції спектрального параметра. Попередні авторські роботи присвячувалися пошукам 1-ї, 2-ї похідних й урешті привели до лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку відносно спектрального параметра – (6).

Змога записати рівняння для досліджуваного об'єкта може привести до розгалуження напрямів його вивчення. З метою спрощення зведеного рівняння автори теперішньої роботи перетворюють коефіцієнт при 0-й похідній у цьому рівнянні – рівнянні відносно спектрального параметра, яке отримане при переході від диференціального рівняння у проблемі Штурма-Ліувілля (відносно незалежної просторової змінної). Ключовим аспектом, для здійснення зазначеного перетворення стає рівність нулю 1-го коефіцієнту лінійного представлення 1-ї похідної на межі розділу шарів основного кристала. Спрощення коефіцієнту при 0-й похідній є кроком до виявлення властивостей розв'язку рівняння відносно спектрального параметра, які у кінцевому рахунку дають уявлення про характер розподілу заборонних та дозволених зон у діапазоні частотного хвильового числа, а також оцінку власних чисел проблеми Штурма-Ліувілля для магніто-діелектричного одновимірно-періодичного двошарового фотонного кристала.

КОНФЛІКТ ИНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кожем'яко ВП, Іванов ОА, Іванов ІА. Перспективи застосування фотонних кристалів у сучасних системах обробки даних //Наукові праці ВНТУ, № 4, Інформаційні технології та комп'ютерна техніка 2012 р.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals – Journal of Modern Optics, vol. 41, № 2., 505 – 513 p.
3. Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W. J., and Youngs I. and Troschylo O. S. Absorbing properties of a negative permittivity layer placed on a reflecting grating // Prog.Electromagn. Res. – 2006. – Vol. PIER 64. – P. 135-148.
4. Brovenko A., Melezhik P. N., Poyedinchuk A. Y., Yashina N. P., and Granet G. Surface resonances of metal stripe grating on the plane boundary of metamaterial //Prog. Electromagn. Res. – 2006. – Vol. PIER 63. – P. 209-222.
5. A. Shmat'ko, A. V. Kazanko, V. N. Mizernik, E. N. Odarenko, V. A. Yampol'skii, T. N. Rokshanova. «Proc. 8th Int. Conf.» Exterordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials. Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162 p.
6. G. V. Morozov, D. W. L. Sprung. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal. A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
7. G. N. Pandey, K. B. Thapa, S. K. Srivastava, S. P. Ojha «*Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials*» – Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 2, 15–36, 2008
8. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
9. Самойленко А М Перестюк М О, Парасюк ІО. Диференціальні рівняння: підручних для студентів матем. Спец-ей, пособие, 2-ге видання – Київ: Либідь, 2003 – 301 с.
10. Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. (2021). Норма власних функцій одновимірного фотонного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка», 35, 91-99.
11. Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного шаруватого середовища. //Експериментальні та теоретичні дослідження у сучасних науках.: Збірник наукових праць "Логос" (ΛΌΓΟΣ) з матеріалами наук.-практ. конференції. Краків, Польша: Європейська наукова платформа; 2019. 36-42 с.
12. Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по повздовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. Збірник наукових праць "Логос" (ΛΌΓΟΣ); 2020. 126-130 с.
13. Казанко ОВ & Пєнкіна, ОЄ. (2021). Аналіз складових членів дисперсійного рівняння у задачі про дифракцію плоского монохроматичного коливання у двовимірному необмеженому двошаровому середовищі з метаматеріалом / О. В. Казанко, О. Є. Пєнкіна //Збірник наукових праць "Грааль науки". – 2021. – № 6. - С. 210-216.
14. Маркович БМ. Рівняння математичної фізики: навчальний посібник – Львів: Видавництво політехніки, 2010 – 384 с.
15. Eastham M. S. P. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
16. S. Winkler, W. Magnus. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.
17. Yakubovich V. A. and Starzhinskii V. M., Linear Differential Equations with Periodic Coefficients (Wiley, New York) 1975.

18. Казанко О. В, Пєнкіна О. Є. Аналіз та методологія визначення норми власних функцій як граничний перехід у скалярному добутку в спектральній проблемі Штурма-Ліувілля для фотонного одновимірного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2023; вип. 39, с. 41-50.
19. G. Guida Introduction to photonic band gap materials – Progress In Electromagnetics Research, PIER 41, 1–20, 2003.
20. Gaughan Richard «Researchers Create Tunable Photonic Bandgap Crystal.» – Photonics Spectra, 2000, Jan. Vol. 34, №1.
21. G. N. Pandey, K. B. Thapa, S. K. Srivastava, S. P. Ojha Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials – Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 2, 15–36, 2008
22. Sprung D. W. L., Wu H. and Martorell J., Am. J. Phys., 61 (1993) 1118.

REFERENCES

1. Kozhemyako V.P., Ivanov O.A., Ivanov IA. Primary stalling of photonic crystals in modern average statistical data processing // Science of work of VNTU, No. 4, Information technologies and computer technology, 2012.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals – Journal of Modern Optics, vol. 41, № 2., 505 – 513 p.
3. Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W. J., and Youngs I. and Troschylo O. S. Absorbing properties of a negative permittivity layer placed on a reflecting grating // Prog.Electromagn. Res. – 2006. – Vol. PIER 64. – P. 135-148.
4. Brovenko A., Melezhik P. N., Poyedinchuk A. Y., Yashina N. P., and Granet G. Surface resonances of metal stripe grating on the plane boundary of metamaterial //Prog. Electromagn. Res. – 2006. – Vol. PIER 63. – P. 209-222.
5. A. Shmat'ko, A. V. Kazanko, V. N. Mizernik, E. N. Odarenko, V. A. Yampol'skii, T. N. Rokshanova. «Proc. 8th Int. Conf.» *Exterordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials*. Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162 p.
6. GV. Morozov, DWL. Sprung. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal. A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
7. G. N. Pandey, K. B. Thapa, S. K. Srivastava, S. P. Ojha «*Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials*» – Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 2, 15–36, 2008
8. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons, 1987 – 616 p.
9. Samoilenko AM Perestyuk M O, Parasyuk IO. Differential equations: handy for students of mathematics. Special, manual, 2nd edition - Kiev: Libid, 2003 - 301 p.
10. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating dispersion equation in a diffraction problem for unlimited two-dimension media" // Experimental and theoretical reserches in a modern science Experimental and theoretical research in modern sciences. Collection of scientific papers ΛΌΓΟΣ, Krakiv , Polska: European Science Platform 2019, 36-42 pp.
11. Kazanko O. V., Penkina O. Y. "To differentiating shear solutions of wave equations by longitudinal wave number in a diffraction problem for unlimited band media with metamaterials" Collection of scientific papers ΛΌΓΟΣ, 2020. 126-130 pp.
12. Kazanko OV, Penkina OE. Norm of iegnfunction of one-dimension photonic crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2021;35:91-99. (In Ukrainian). https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08
13. Kazanko OV & Penkina, OЄ. (2021). Analysis of the storage terms of the dispersion level in the problem of diffraction of planar monochromatic collocation in a two-dimensional unbounded two-spherical medium with metamaterial / O. V. Kazanko, O. E. Penkina // Collection of scientific works "The Grail of Science". – 2021. – No. 6. - P. 210-216.
14. Markovich BM. History of mathematical physics: a basic textbook – Lviv: Department of Polytechnics, 2010 - 384 p.
15. Eastham MSP. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
16. S. Winkler, W. Magnus. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.
17. Yakubovich V. A. and Starzhinskii V. M., Linear Differential Equations with Periodic Coefficients (Wiley, New York) 1975.
18. Kazanko OV & Penkina, OЄ. Analysis and methodology for determining the norm of eigenfunctions as a limit transition in the scalar product in the Sturm-Liouville spectral problem for a photonic one-dimensional

crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2023; 39, 41-50pp (In Ukrainian).
19. G. Guida Introduction to photonic band gap materials – Progress In Electromagnetics Research, PIER 41, 1–20, 2003.
20. Gaughan Richard «Researchers Create Tunable Photonic Bandgap Crystal.» – Photonics Spectra, 2000, Jan. Vol. 34, №1.
21. G. N. Pandey, K. B. Thapa, S. K. Srivastava, S. P. Ojha Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials – Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 2, 15–36, 2008
22. Sprung D. W. L., Wu H. and Martorell J., Am. J. Phys., 61 (1993) 1118.

Стаття надійшла до редакції: 19 лютого 2025 р.
Рекомендовано до друку: 14 травня 2025 р.

DEVELOPMENT OF A METHODOLOGY FOR TRANSITIONING FROM A SPECTRAL EQUATION WITH RESPECT TO A SPATIAL VARIABLE TO A DIFFERENTIAL EQUATION WITH RESPECT TO A SPECTRAL PARAMETER IN THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL PERIODIC TWO-LAYER PHOTONIC CRYSTAL

O. V. KAZANKO, O. E. PENKINA, O. V. GOLOVKO
Ukrainian State University of Railway Transport, Department of Computer Engineering and Control Systems, Kharkiv, Feuerbach Square, 7, Ukraine

Relevance. In connection with solving the problem of scattering of electromagnetic waves (diffraction problem) on objects such as photonic crystals (one-dimensional periodic unbounded), it is important to study the dispersion relation. This involves solving the wave equation with subsequent application of the separation of variables method (For the diffraction structures considered in the paper, the specified method of separation of variables allows obtaining a solution to the wave equation, which in this case turns out to be an equation with periodic coefficients, in the explicit form) and transition to the Sturm-Liouville problem on an unbounded interval $(-\infty, +\infty)$. The dispersion relation allows us to understand the conditions under which the Sturm-Liouville problem can be solved and connects these conditions with the parameters of the diffraction problem, and therefore becomes an indispensable step on the way to obtaining solutions to this wave equation. This work continues a series of previously published works on the development of approaches to studying the specified dispersion relation through understanding the behavior of the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem. The transfer matrix method for a wave equation with periodic coefficients makes it possible to take into account the specifics of its solution on an unlimited interval $(-\infty, +\infty)$, and to achieve the fulfillment of a component condition under which the Sturm-Liouville problem is solvable – the condition of self-adjointness of the differential operator in this problem. This is on the one hand, and on the other hand, such a method clearly indicates the place occupied by the solution of the spectral equation in the dispersion relation.
The aim of the work is to simplify the previously obtained equation, which is a consequence of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem for a one-dimensional periodic two-layer photonic crystal. In particular, to integrate some of the constituent terms of the linear representation of the 1st and 2nd derivatives of the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem.
Methods. The separation of variables method is used to solve the wave equation. The transfer matrix method for a wave equation with periodic coefficients makes it possible to take into account the specifics of its solution on an unlimited interval $(-\infty, +\infty)$ and achieve the fulfillment of a component condition under which the Sturm-Liouville problem is solvable – the condition of self-adjointness of the differential operator in this problem. To take the integral of the individual component terms of the linear representation of the 1st and 2nd derivatives of the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem, the method of integration by parts is used.
Results. The work showed that in the course of a series of successive transformations, the coefficient at zero derivative in the reduced differential equation (the equation relative to the spectral parameter to which the transition is made – according to the title of the work) is subject to simplification. In particular, the square of the coefficient of the linear representation of the 1st derivative of the solution of the spectral equation in the Sturm-Liouville problem was integrated.
KEYWORDS: photonic crystal, scattering of electromagnetic waves, derivative with respect to the spectral parameter, Sturm-Liouville problem, spectral equation, dispersion equation, eigenfunction, photon band gap, wave equation of a layered medium.

The article was received by the editors: February 19 2025
The article is recommended for printing: May 14 2025