

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра будівельної механіки та гідравліки**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**для виконання розрахунково-графічних робіт**

**з освітньої компоненти**

**«ОПІР МАТЕРІАЛІВ»**

**для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня**

**спеціальності J7 «Залізничний транспорт»**

**механіко-енергетичного факультету**

**Частина 3**

**Харків 2026**

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 19 лютого 2026 р., протокол № 6.

Методичні вказівки для виконання розрахунково-графічних робіт складено на основі типової програми з освітньої компоненти «Опір матеріалів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності J7 «Залізничний транспорт» механіко-енергетичного факультету, освітні програми «Локомотиви та локомотивне господарство», «Високошвидкісний рухомий склад», «Автомотриси, автодрезини та спеціальні машини залізничного транспорту» (ААСМ), «Мехатроніки у вагонобудуванні», «Вагони та транспортна інженерія» (ВТІ).

Завдання наведено відповідно до робочої програми з опору матеріалів для здобувачів спеціальності J7 «Залізничний транспорт» денної та заочної (повної та прискореної) форм здобуття освіти.

Укладачі:

доценти С. Ю. Берестянська,

Л. Б. Кравців

Рецензент

доц. О. В. Лобяк

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП .....</b>	<b>4</b>
<b>МЕТА І ОСНОВНІ ЗАВДАННЯ.....</b>	<b>4</b>
<b>КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЩО ФОРМУЮТЬ У ЗДОБУВАЧІВ.....</b>	<b>5</b>
<b>МЕТОДИ ВИВЧЕННЯ ТА КОНТРОЛЮ.....</b>	<b>5</b>
<b>ПЕРЕЛІК ДОКУМЕНТІВ, ЯКІ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДЛЯ ЗАХИСТУ.....</b>	<b>6</b>
<b>ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.....</b>	<b>6</b>
<i>1 Статичний момент площі .....</i>	<i>6</i>
<i>2 Моменти інерції .....</i>	<i>7</i>
<i>3 Моменти інерції простих фігур .....</i>	<i>9</i>
<i>4 Моменти інерції відносно осей, паралельних заданим.....</i>	<i>10</i>
<i>5 Визначення моментів інерції відносно обернутих осей .....</i>	<i>11</i>
<i>6 Головні моменти інерції .....</i>	<i>11</i>
<i>7 Радіуси інерції .....</i>	<i>12</i>
<i>8 Моменти опору .....</i>	<i>12</i>
<b>ТЕСТОВІ ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ .....</b>	<b>14</b>
<b>ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ 1 (ЧАСТИНА 3).....</b>	<b>15</b>
<b>ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ З РОЗ'ЯСНЕННЯМ.....</b>	<b>17</b>
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....</b>	<b>24</b>
<b>ДОДАТОК А Сортамент прокатної сталі .....</b>	<b>25</b>
<b>ДОДАТОК Б Зразок оформлення титульного аркуша пояснювальної записки.....</b>	<b>32</b>

## ВСТУП

Методичні вказівки призначені для самостійної роботи здобувачів, які вивчають освітню компоненту «Опір матеріалів», згідно з робочими програмами спеціальності J7 «Залізничний транспорт», освітніх програм «Локомотиви та локомотивне господарство», «Високошвидкісний рухомий склад», «Автомотриси, автодрезини та спеціальні машини залізничного транспорту», «Мехатроніка у вагонобудуванні», «Вагони та транспортна інженерія» (ВТІ) денної та заочної (повної та прискореної) форм здобуття освіти.

Методичні вказівки мають високий науково-педагогічний рівень, викладені систематично та послідовно, відображають новітні досягнення науки, техніки. Забезпечують реалізацію основних принципів навчання: науковості, систематичності, послідовності і доступності викладу, наочності, ґрунтовності, зв'язку матеріалу з професійною діяльністю. Відповідають вимогам освітніх програм, державних освітніх стандартів.

## МЕТА І ОСНОВНІ ЗАВДАННЯ

Із виконанням розрахунково-графічної роботи, частина 3, здобувач має отримати теоретичні знання, які необхідні для визначення геометричних характеристик плоских перерізів. Метою завдання є набуття практичних навичок визначення центра ваги складного перерізу та головних моментів інерції.

Очікувані результати навчання:

- визначати параметри об'єктів залізничного транспорту, їхніх систем та елементів через проведення вимірювального експерименту з оцінюванням його результатів;

- знати методи та вміти використовувати засоби технічних вимірювань, технічні регламенти, стандарти, інші нормативні документи під

час технічного діагностування об'єктів залізничного транспорту, їхніх систем та елементів.

## **КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЩО ФОРМУЮТЬ У ЗДОБУВАЧІВ**

Уміння вирішувати завдання опору матеріалів – це основа надбання професійних компетенцій. Набуті знання, вміння, навички допомагають здобувачу виконувати поставлені перед ним професійні завдання. Здобувачі вищої освіти спеціальності J7 «Залізничний транспорт» першого рівня освіти (бакалавр) усіх форм здобуття освіти мають сформувати і розвинути такі компетенції:

- здатність проводити дослідження на відповідному рівні;
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність розрізняти об'єкти залізничного транспорту і їхні складові, визначати вимоги щодо їхньої конструкції, параметрів і характеристик;
- здатність проводити вимірний експеримент із визначення параметрів і характеристик об'єктів залізничного транспорту, їхніх агрегатів, систем та елементів;
- здатність аналізувати технологічні процеси виробництва та ремонту об'єктів залізничного транспорту як об'єкта управління, застосовувати експертні оцінки для вироблення управлінських рішень щодо подальшого функціонування підприємства з оцінюванням якості його продукції;
- здатність застосовувати методи і засоби технічних вимірювань, технічні регламенти, стандарти, інші нормативні документи для технічного діагностування об'єктів залізничного транспорту, їхніх систем та елементів.

## **МЕТОДИ ВИВЧЕННЯ ТА КОНТРОЛЮ**

Методичні вказівки мають теоретичну частину за темою роботи, контрольні запитання, схеми завдання, приклади їх розв'язання.

Теоретична частина містить увесь матеріал, який необхідно знати для виконання розрахунково-графічної роботи, частина 3. Здобувачі ознайомлюються з видами геометричних характеристик плоских перерізів, методами їх знаходження. Контрольні запитання допомагають перевірити набуті теоретичні знання. Наведено схеми самих завдань для виконання розрахунково-графічної роботи, частина 3. Приклад розв'язання з роз'ясненнями допомагає самостійно виконати завдання.

## **ПЕРЕЛІК ДОКУМЕНТІВ, ЯКІ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДЛЯ ЗАХИСТУ**

Розрахунково-графічна робота має містити розрахункову схему та необхідні розрахунки з поясненням та остаточними результатами. У додатку Б подано зразок оформлення титульного аркуша. Завдання має бути оформлене відповідно до вимог [6].

## **ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ**

В опорі матеріалів існують такі види геометричних характеристик плоских перерізів: статичний момент площі, моменти інерції, радіуси інерції, моменти опору.

### ***1 Статичний момент площі***

Статичний момент позначають літерою  $S$  з індексом, який вказує, відносно якої осі обчислюють статичний момент площі, і визначають як добуток цієї площі на відстань до осі, відносно якої обчислюють статичний момент (рисунок 1).

$$S_z = A \cdot y_c, \quad S_y = A \cdot z_c \quad (1)$$

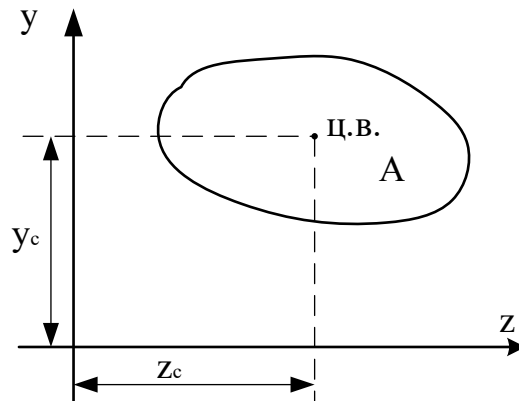


Рисунок 1 – Визначення статичного моменту площі

Статичний момент площі може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю. Розмірність статичного моменту площі –  $\text{см}^3, \text{м}^3$ .

Якщо переріз складається з декількох простих фігур, то центр ваги такого складного перерізу можна визначити за формулою

$$z_c = \frac{\sum S_y}{\sum A}, \quad y_c = \frac{\sum S_z}{\sum A}, \quad (2)$$

де в чисельнику сума статичних моментів площ відносно довільних осей, а у знаменнику загальна площа перерізу.

Якщо переріз має одну вісь симетрії, то центр ваги лежить на цій осі. Якщо переріз має дві осі симетрії, то центр ваги лежить на перетині цих осей.

## 2 Моменти інерції

Осьовий момент інерції позначають літерою  $J$  з індексом, який вказує, відносно якої осі визначають момент інерції. Осьовим моментом інерції

плоского перерізу відносно якоїсь осі називають суму добутків елементарних площ  $dA$  на квадрат відстані їх до відповідної осі (рисунок 2).

$$J_z = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A z^2 dA \quad (3)$$

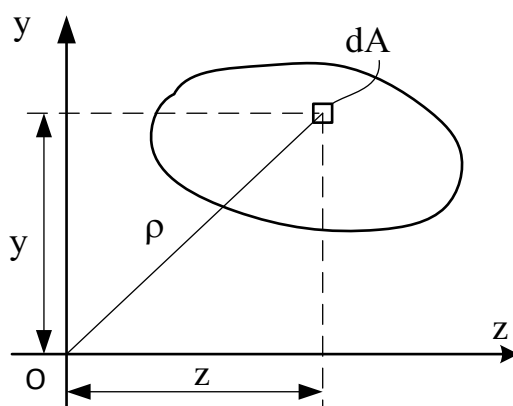


Рисунок 2 – Визначення моментів інерції

Полярний момент інерції позначають літерою  $J$  з індексом  $\rho$  і визначають як суму добутків елементарних площ  $dA$  на квадрат відстані від площі до полюса (рисунок 2).

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad (4)$$

Полярний момент інерції дорівнює сумі осьових моментів інерції:

$$J_\rho = J_z + J_y \quad (5)$$

Відцентровий момент інерції позначають літерою  $J$  з двома індексами, які вказують, відносно яких двох взаємно перпендикулярних осей визначають момент інерції, і обчислюють як суму добутків елементарних площ  $dA$  на відстані до цих осей (рисунок 2).

$$J_{zy} = \int_A z \cdot y \, dA . \quad (6)$$

Осьові та полярний моменти інерції можуть бути тільки додатними. Відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю. Усі моменти інерції мають одиниці вимірювання – см<sup>4</sup>, м<sup>4</sup>.

### 3 Моменти інерції простих фігур

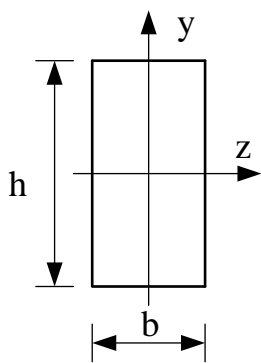


Рисунок 3

Момент інерції прямокутника (рисунок 3,) відносно осей, що проходять через його центр ваги:

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}, \quad J_{zy} = 0.$$

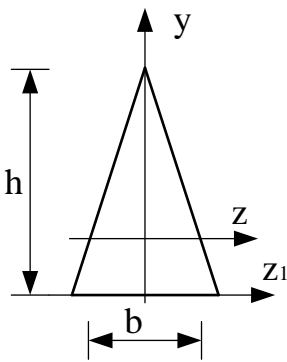


Рисунок 4

Момент інерції трикутника (рисунок 4) відносно осей, що проходять через його центр ваги та основу:

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{36}, \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{48}, \quad J_{z_1} = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad J_{zy} = 0.$$

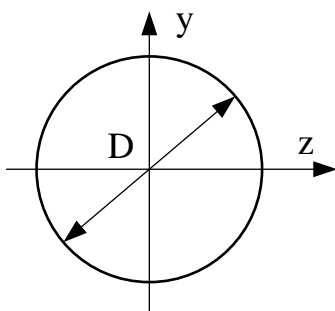


Рисунок 5

Момент інерції кола (рисунок 5) відносно осей, що проходять через його центр ваги:

$$J_z = J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64}, \quad J_\rho = \frac{\pi \cdot D^4}{32}, \quad J_{zy} = 0.$$

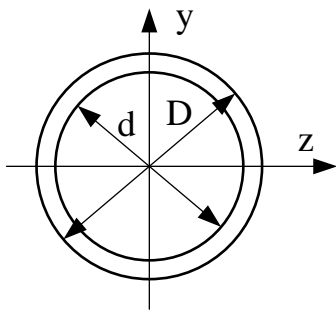


Рисунок 6

Момент інерції кільця (рисунок 6) відносно осей, що проходять через його центр ваги:

$$J_z = J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - k^4), \quad J_{zy} = 0, \quad k = \frac{d}{D}.$$

#### 4 Моменти інерції відносно осей, паралельних заданим

Припустимо, що нам відомі осьові та відцентровий моменти інерції відносно осей  $z$  і  $y$  ( $J_z, J_y, J_{zy}$ ). Необхідно знайти моменти інерції відносно осей  $z_1$  і  $y_1$ , які знаходяться на відстанях  $a$  і  $b$  відповідно (рисунок 7).

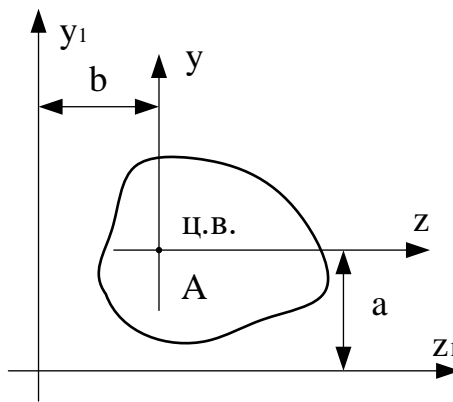


Рисунок 7 – Визначення моментів інерції відносно осей, паралельних заданим

Тоді моменти інерції відносно осей  $z_1$  та  $y_1$  визначають як

$$J_{z_1} = J_z + a^2 \cdot A, \quad J_{y_1} = J_y + b^2 \cdot A, \quad J_{z_1 y_1} = J_{zy} + a \cdot b \cdot A . \quad (7)$$

## 5 Визначення моментів інерції відносно обернутих осей

Припустимо, що нам відомі осьові та відцентровий моменти інерції відносно осей  $z$  і  $y$  ( $J_z, J_y, J_{zy}$ ). Необхідно знайти моменти інерції відносно осей  $z_\alpha$  і  $y_\alpha$ , які обернути проти годинникової стрілки на кут  $\alpha$  (рисунок 8).

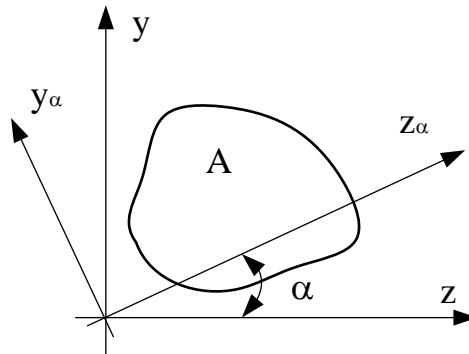


Рисунок 8 – Визначення моментів інерції відносно обернутих осей

Тоді моменти інерції відносно осей  $z_\alpha$  та  $y_\alpha$  визначають як

$$\begin{aligned} J_{z_\alpha} &= \cos^2 \alpha \cdot J_z + \sin^2 \alpha \cdot J_y - \sin 2\alpha \cdot J_{zy}, \\ J_{y_\alpha} &= \cos^2 \alpha \cdot J_y + \sin^2 \alpha \cdot J_z + \sin 2\alpha \cdot J_{zy}, \\ J_{z_\alpha y_\alpha} &= \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Обертання за годинниковою стрілкою є додатним.

## 6 Головні моменти інерції

Головними осями інерції називають осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти інерції набувають максимального і мінімального значень значення. Головними моментами

інерції називають моменти інерції відносно головних осей. Головні осі інерції – початок координат знаходиться в центрі ваги, перерізи називають головними центральними осями інерції і позначають літерами  $U$  та  $V$ .

Положення головних центральних осей інерції визначають як

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}. \quad (9)$$

А величини головних моментів інерції визначають як

$$J_{\max, \min} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}. \quad (10)$$

## **7 Радіуси інерції**

Величини моментів інерції не зміняться, якщо в підінтегральний вираз замість змінних розмірів ввести їхнє середнє значення. Літерою  $i$  позначають радіуси інерції. Одиниці вимірювання – см, м.

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}. \quad (11)$$

## **8 Моменти опору**

Моменти опору позначають літерою  $W$  з індексом, який вказує, відносно якої осі визначають момент опору. Для його визначення проводимо дотичні, паралельні осям  $z$  та  $y$  (рисунок 9).

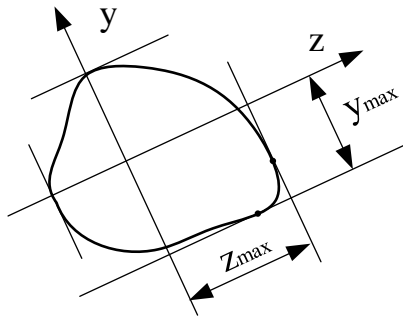


Рисунок 9 – Визначення моментів опору

Моментом опору називають абсолютне відношення осьового моменту інерції відносно цієї осі до координати, найбільш віддаленої точки перерізу від цієї осі:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}}, \quad W_y = \frac{J_y}{z_{max}} . \quad (12)$$

Одиниці вимірювання моменту опору –  $\text{см}^3$ ,  $\text{м}^3$ .

## ТЕСТОВІ ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Якими літерами позначають статичний момент площі, моменти інерції, радіус інерції, момент опору? Їхні одиниці вимірювання.

2 Як визначити статичний момент площі та центр ваги складного перерізу?

3 Які види моментів інерції бувають і як їх визначити?

4 Формули, за якими визначають моменти інерції прямокутника та кола відносно власних осей.

5 Формули, за якими визначають моменти інерції відносно осей, паралельних заданим.

6 Формули, за якими визначають моменти інерції відносно обернутих осей.

7 Що таке головні центральні осі інерції та як визначають їхнє положення?

8 Як визначають величини головних моментів інерції?

9 Як визначають радіуси інерції?

10 Як визначають момент опору?

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ 1 (ЧАСТИНА 3)

**Задача 9.** Для заданого варіанта даних і схеми складного перерізу стрижня (рисунки 10, 11) визначити положення головних центральних осей і знайти величини головних моментів інерції. Дані для розрахунків взяти з таблиці 1.

Примітка - схему перерізу в розрахунково-графічній роботі потрібно намалювати в масштабі 1:2, вказати всі необхідні для розрахунків розміри.

Таблиця 1 – Дані для розрахунку

Варіант	$b$ , см	$h$ , см	Номер двотавра	Номер швелера	Розміри нерівнобічного кутика, мм
1	42	2.4	30	14	200×125×14
2	40	1.5	27	16	180×110×12
3	45	1.2	24	20	160×100×14
4	48	1.5	20	22	140×90×8
5	45	1.8	16	24	125×80×12
6	48	2	14	27	100×63×10
7	42	2.4	27	12	200×125×12
8	40	1.8	24	14	180×110×10
9	45	2.4	20	18	160×100×12
10	42	1.5	18	20	140×90×10
11	48	2	30	22	125×80×10
12	50	1.8	22	30	90×56×10
13	45	1.6	22	16	200×125×16
14	40	2	33	18	160×100×9
15	50	2.4	36	24	100×63×8
16	45	2	22	16	200×125×11
17	40	2.4	18	20	110×70×8
18	42	1.2	20	24	100×63×8

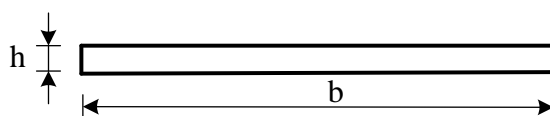


Рисунок 10 – Поперечний переріз пластини

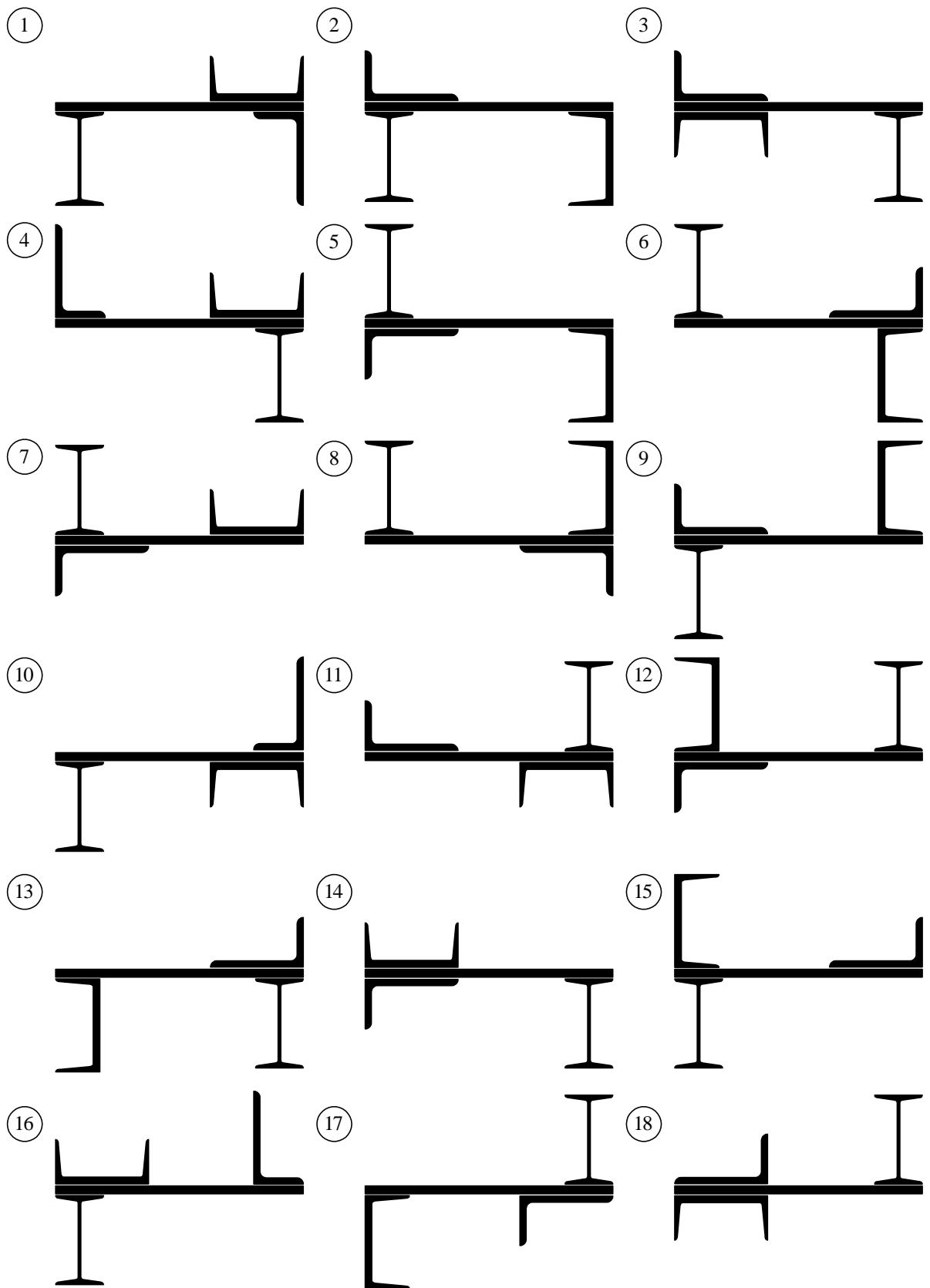


Рисунок 11 – Розрахункові схеми складного перерізу

## ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ З РОЗ'ЯСНЕННЯМ

Для заданої розрахункової схеми складного перерізу (рисунок 12) необхідно визначити положення головних центральних осей інерції та знайти величини головних моментів інерції. Дані для розрахунку: двотавр № 22, швеллер № 18, кутик  $100 \times 63 \times 8$ , смуга  $b = 44$  см,  $h = 1,6$  см.

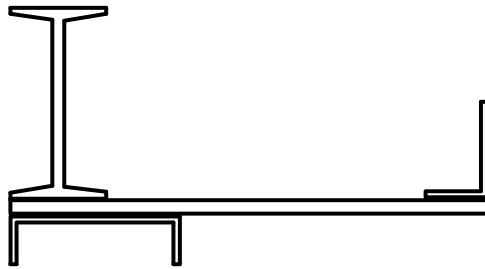
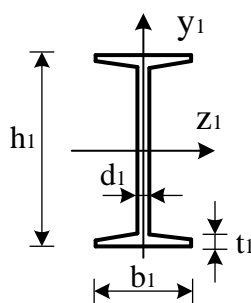


Рисунок 12 – Розрахункова схема складного перерізу

### Розв'язання

Спочатку із сортаменту (додаток А) виписуємо необхідні дані. При цьому зображуємо елементи так, як вони розташовані в сортаменті (рисунок 13-16). Позначимо двотавр номером 1, швеллер номером 2, кутик номером 3, смугу номером 4.



$$\begin{aligned} h_1 &= 22,0 \text{ см}, b_1 = 11,0 \text{ см}, d_1 = 0,54 \text{ см}, \\ t_1 &= 0,87 \text{ см}, \\ A_1 &= 30,6 \text{ см}^2, J_{z_1} = 2550 \text{ см}^4, J_{y_1} = 157 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

Рисунок 13

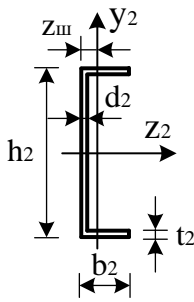


Рисунок 14

$$h_2 = 18,0 \text{ см}, b_2 = 7,0 \text{ см}, d_2 = 0,51 \text{ см},$$

$$t_2 = 0,87 \text{ см},$$

$$A_2 = 20,7 \text{ см}^2, J_{z_2} = 1090 \text{ см}^4, J_{y_2} = 86 \text{ см}^4,$$

$$z_{III} = 1,94 \text{ см}$$

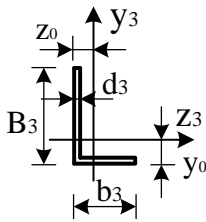


Рисунок 15

$$B_3 = 10,0 \text{ см}, b_3 = 6,3 \text{ см}, d_3 = 0,8 \text{ см},$$

$$A_3 = 12,6 \text{ см}^2, J_{z_3} = 127 \text{ см}^4, J_{y_3} = 39,2 \text{ см}^4,$$

$$z_0 = 1,50 \text{ см}, y_0 = 3,32 \text{ см}, t_3 = 0,391$$

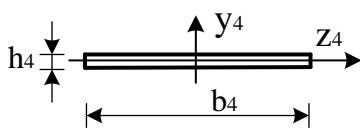


Рисунок 16

$$b_4 = 44,0 \text{ см}, h_4 = 1,6 \text{ см},$$

$$A_4 = h_4 \cdot b_4 = 44,0 \cdot 1,6 = 70,4 \text{ см}^2.$$

$$J_{z_4} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{44,00 \cdot 1,60^3}{12} = 15,02 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_4} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{1,60 \cdot 44,00^3}{12} = 11357,87 \text{ см}^4$$

Креслимо заданий переріз (рисунок 17). Проводимо осі, які проходять через центр віги кожного з елементів, і позначаємо їх. Проводимо допоміжні осі. Зручніше за все їх проводити так, щоб переріз знаходився в першій чверті, тобто по низу перерізу та по крайній лівій межі (осі  $y$  і  $z$  на рисунку 17).

Для визначення центра ваги складного перерізу необхідно знайти відстані між центром ваги кожного з елементів і допоміжною віссю  $y$  і центром ваги кожного з елементів і допоміжною віссю  $z$  на підставі зробленого креслення.

$$z_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{11,00}{2} = 5,50 \text{ см},$$

$$z_2 = \frac{h_2}{2} = \frac{18,00}{2} = 9,00 \text{ см},$$

$$z_3 = b_4 - z_0 = 44,00 - 1,50 = 42,50 \text{ см},$$

$$z_4 = \frac{b_4}{2} = \frac{44,00}{2} = 22,00 \text{ см}.$$

$$y_1 = \frac{h_1}{2} + h_4 + b_2 = \frac{22,00}{2} + 1,60 + 7,00 = 19,60 \text{ см},$$

$$y_2 = b_2 - z_{III} = 7,00 - 1,94 = 5,06 \text{ см},$$

$$y_3 = b_2 + h_4 + y_0 = 7,00 + 1,60 + 3,32 = 11,92 \text{ см},$$

$$y_4 = b_2 + \frac{h_4}{2} = 7,00 + \frac{1,60}{2} = 7,80 \text{ см}.$$

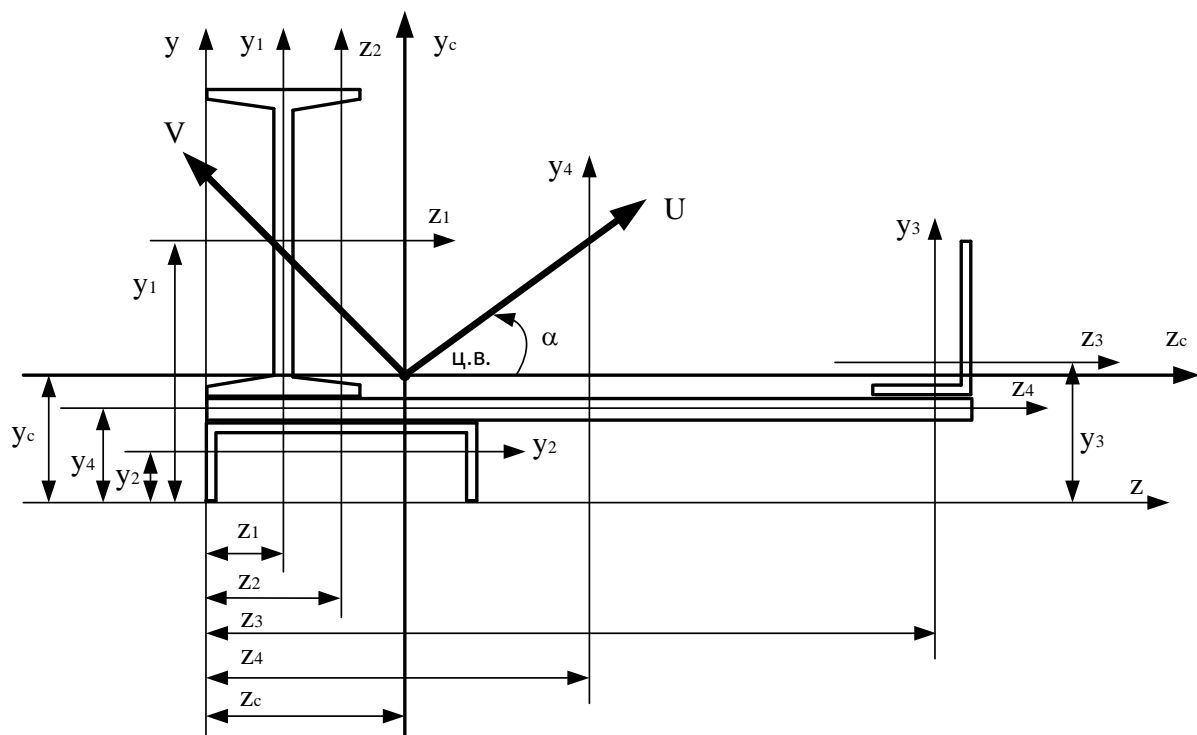


Рисунок 17 – Визначення геометричних характеристик складного перерізу

За залежністю (2) знайдемо центр ваги складного перерізу:

$$z_c = \frac{\sum S y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3 + A_4 \cdot z_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{30,60 \cdot 5,50 + 20,70 \cdot 9,00 + 12,60 \cdot 42,50 + 70,40 \cdot 22,00}{30,60 + 20,70 + 12,60 + 70,40} =$$

18,16 см;

$$y_c = \frac{\sum S_{z_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + A_4 \cdot y_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{30,60 \cdot 19,60 + 20,70 \cdot 5,06 + 12,60 \cdot 11,92 + 70,40 \cdot 7,80}{30,60 + 20,70 + 12,60 + 70,40} = 10,45 \text{ см.}$$

Відкладаємо знайдені відстані від допоміжних осей (рисунок 17).

Нам відомі моменти інерції кожного окремого елемента відносно власних осей. Знайдемо момент інерції всього перерізу відносно осей  $z_c, y_c$ . Для цього необхідно визначити відстані між осями  $z_1, z_2, z_3, z_4$  і віссю  $z_c$  та осями  $y_1, y_2, y_3, y_4$  і віссю  $y_c$ .

$$a_1 = z_1 - z_c = 5,50 - 18,16 = -12,66 \text{ см,}$$

$$a_2 = z_2 - z_c = 9,00 - 18,16 = -9,16 \text{ см,}$$

$$a_3 = z_3 - z_c = 42,50 - 18,16 = 24,34 \text{ см,}$$

$$a_4 = z_4 - z_c = 22,00 - 18,16 = 3,84 \text{ см.}$$

$$b_1 = y_1 - y_c = 19,60 - 10,45 = 9,15 \text{ см,}$$

$$b_2 = y_2 - y_c = 5,06 - 10,45 = -5,39 \text{ см,}$$

$$b_3 = y_3 - y_c = 11,92 - 10,45 = 1,47 \text{ см,}$$

$$b_4 = y_4 - y_c = 7,80 - 10,45 = -2,65 \text{ см.}$$

Осі  $z_1, z_2, z_3, z_4$  паралельні осі  $z_c$ , а осі  $y_1, y_2, y_3, y_4$  паралельні осі  $y_c$ . Тому для визначення моменту інерції складного перерізу відносно осей  $z_c$  і  $y_c$  скористаємося формулою для визначення моментів інерції відносно осей, паралельних заданим (7). У зв'язку з тим, що швелер повернуто на  $90^\circ$ , осі  $y$  і  $z$  міняємо місцями і відповідно до цього моменти інерції потрібно теж поміняти місцями.

$$J_{z_c} = \sum(J_{z_i} + a_i^2 \cdot A_i) = (J_{z_1} + a_1^2 \cdot A_1) + (J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2) + (J_{z_3} + a_3^2 \cdot A_3) + \\ + (J_{z_4} + a_4^2 \cdot A_4) = (2550 + (-12,66)^2 \cdot 30,6) + (86 + (-9,16)^2 \cdot 20,7) + \\ + (127 + 24,34^2 \cdot 12,6) + (15,02 + 3,84^2 \cdot 70,4) = 17922,08 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = \sum(J_{y_i} + b_i^2 \cdot A_i) = (J_{y_1} + b_1^2 \cdot A_1)z + (J_{z_2} + b_2^2 \cdot A_2) + (J_{y_3} + b_3^2 \cdot A_3) + \\ + (J_{y_4} + b_4^2 \cdot A_4) = (157 + 9,15^2 \cdot 30,6) + (1090 + (-5,39)^2 \cdot 20,7) + \\ + (39,2 + 1,47^2 \cdot 12,6) + (11357,87 + (-2,65)^2 \cdot 70,4) = 16328,97 \text{ см}^4,$$

$$J_{z_c y_c} = \sum(J_{z_i y_i} + a_i \cdot b_i \cdot A_i) = (J_{z_1 y_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1) + (J_{z_2 y_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2) + \\ + (J_{z_3 y_3} + a_3 \cdot b_3 \cdot A_3) + (J_{z_4 y_4} + a_4 \cdot b_4 \cdot A_4) = (0 + (-12,66) \cdot 9,15 \cdot \\ 30,6) + (0 + (-9,16) \cdot (-5,39) \cdot 20,7) + (40,52 + 24,34 \cdot 1,47 \cdot 12,6) + \\ + (0 + 3,84 \cdot (-2,65) \cdot 70,4) = -2747,71 \text{ см}^4.$$

Двотавр, швелер і смуга мають вісь симетрії, тому відцентрові моменти інерції цих елементів дорівнюють нулю. Для кутика осі  $z_3$ ,  $y_3$  не є осями симетрії. Тому відцентровий момент інерції кутика визначаємо за залежністю, яка визначає модульне значення відцентрового моменту кутика:

$$J_{z_3 y_3} = \left| \frac{J_{y_3} - J_{z_3}}{2} \operatorname{tg} 2\alpha \right| = \left| \frac{39,2 - 127}{2} \cdot 0,923 \right| = 40,52 \text{ см}^4.$$

$\operatorname{tg} 2\alpha$  визначаємо в такий спосіб. У сортаменті є значення  $\operatorname{tg} \alpha = 0,391$ .

Взявши  $\operatorname{arctg}$ , визначаємо кут  $\alpha = \operatorname{arctg} 0,391 = 21,355$ .

Тоді  $\operatorname{tg} 2 \cdot 21,355 = 0,923$ .

Знак відцентрового моменту кутика можна визначити за таблицею 2. При цьому вибираємо положення кутика, за якого він розташований у заданому перерізі.

У нашому випадку відцентровий момент кутика має бути додатним.

Визначаємо положення головних центральних осей інерції за залежністю (9):

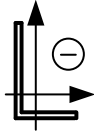
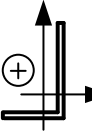
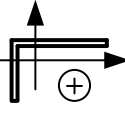
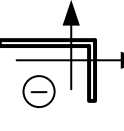
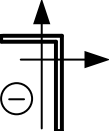
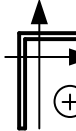
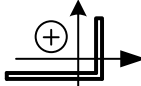
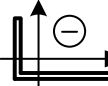
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{zcy_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-2747,71)}{17922,08 - 16328,97} = 3,449,$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg} 3,449 = 73,83^\circ, \alpha = 36,91^\circ.$$

Показуємо положення головних центральних осей перерізу на схемі.

Кут  $\alpha$  є додатний, тому осі обертаємо проти годинникової стрілки (рисунок 17).

Таблиця 2 – Визначення знака відцентрового моменту кутика

Визначаємо величини головних моментів інерції за залежністю (10):

$$J_{\max, \min} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{zcy_c}^2} = \frac{17922,08 + 16328,97}{2} \pm$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(17922,08 - 16328,97)^2 + 4 \cdot (-2747,71)^2} = 17125,52 \pm 2860,84,$$

$$J_{max} = 17125,52 + 2860,84 = 19986,36 \text{ см}^4,$$

$$J_{min} = 17125,52 - 2860,84 = 14264,68 \text{ см}^4.$$

Перевіряємо правильність розрахунків:

$$J_{z_c} + J_{y_c} = J_{max} + J_{min},$$

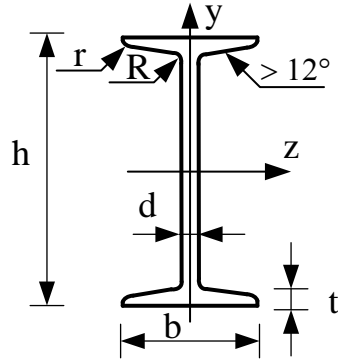
$$17922,08 + 16328,97 = 19986,36 + 14264,68,$$

$$34251,05 \approx 34251,04.$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів. Харків: УкрДАЗТ, 2011. 362 с.
- 2 Опір матеріалів: навч. посіб. / С. Ю. Берестянська, О. В. Лобяк, О. В. Опанасенко та ін. Харків: УкрДУЗТ, 2020. Ч. 1. 151 с.
- 3 Чихладзе Е. Д., Кітов Ю. П. Вибрані задачі з опору матеріалів з розв'язаннями. Харків: УкрДАЗТ, 2002. 194 с.
- 4 Веревічева М. А., Петренко Д. Г. Приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з дисципліни «Опір матеріалів». Харків: УкрДУЗТ, 2015. 128 с.
- 5 Кітов Ю. П., Веревічева М. А., Чуменко С. М. Навчальний програмний комплекс з опору матеріалів. Харків: ХарДАЗТ, 2002. 62 с.
- 6 Козар Л., Бабенко А. Студентська навчальна звітність. Загальні вимоги щодо побудови, викладення та оформлення текстової частини: метод. посіб. Вид. 2-ге, перероб. та доп. Харків: УкрДУЗТ, 2025. 66 с.

**ДОДАТОК А**  
**СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ**  
**Балки двотаврові (за ГОСТом 8239-89)**



Позначення:

$h$  – висота балки;

$b$  – ширина полиці;

$d$  – товщина стінки;

$t$  – середня товщина полиці;

$J$  – момент інерції;

$W$  – момент опору;

$i$  – радіус інерції;

$S$  – статичний момент півперерізу

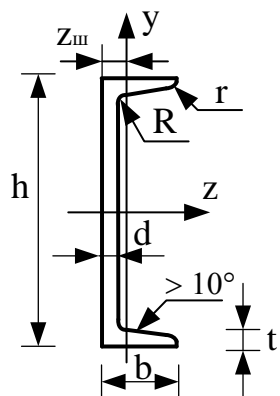
Таблиця А.1

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см <sup>2</sup>	$J_z$ , см <sup>4</sup>	$W_z$ , см <sup>3</sup>	$i_z$ , см	$S_z$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	Маса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4.5	7.2	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5.0	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

## Швелери (за ГОСТом 8240-89)



Позначення:

$h$  – висота швелера;

$b$  – ширина полиці;

$d$  – товщина стінки;

$t$  – середня товщина полиці;

$z_0$  – відстань від осі  $y$  до зовнішньої грані стінки

$J$  - момент інерції;

$W$  - момент опору;

$i$  - радіус інерції;

$S$  - статичний момент півперерізу;

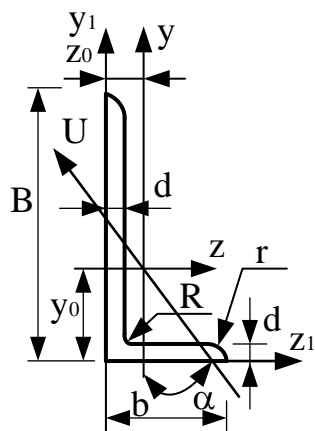
Таблиця А.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, $\text{см}^2$	$J_z$ , $\text{см}^4$	$W_z$ , $\text{см}^3$	$i_z$ , см	$S_z$ , $\text{см}^3$	$J_y$ , $\text{см}^4$	$W_y$ , $\text{см}^3$	$i_y$ , см	$z_0$ , см	Маса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2
16а	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3
18a	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

## Кутники нерівнополичні (за ГОСТом 8510-86\*)



Позначення:

$B$  - ширина більшої полиці;

$b$  - ширина меншої полиці;

$d$  - товщина стінки;

$J$  - момент інерції;

$i$  - радіус інерції;

$z_0, y_0$  - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць

Таблиця А.3

Номер профілю	Розміри, мм			Площа перерізу, см <sup>2</sup>	$J_z,$ см <sup>4</sup>	$i_z,$ см	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$i_y,$ см	$J_{u \min},$ см <sup>4</sup>	$i_{u \min},$ см <sup>4</sup>	Кут нахилу осі $u,$ $tg \alpha$	$J_{z1},$ см <sup>4</sup>	$J_{y1},$ см <sup>4</sup>	$z_0,$ см	$y_0,$ см	Маса 1 м, кг
	$B$	$b$	$d$													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2.5/1.6	25	16	3	1.16	0.7	0.78	0.22	0.44	0.13	0.3	0.392			0.42	0.86	0.91
3.2/2	32	20	3	1.49	1.52	1.01	0.46	0.55	0.28	0.43	0.382			0.49	1.08	1.17
			4	1.94	1.93	1.00	0.57	0.54	0.35	0.43	0.374			0.53	1.12	1.52
4/2.5	40	25	3	1.89	3.06	1.27	0.93	0.7	0.56	0.54	0.385			0.59	1.32	1.48
			4	2.47	3.93	1.26	1.18	0.69	0.71	0.54	0.381			0.63	1.41	1.94
			5	3.03	4.73	1.25	1.41	0.68	0.86	0.53	0.374			0.66		2.37
5/3.2	50	32	3	2.42	6.18	1.6	1.99	0.91	1.18	0.7	0.403			0.72	1.6	1.9

Продовження таблиці А.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5.6/3.6	56	36	4	3.58	11.4	1.78	3.7	1.02	2.19	0.78	0.406	23.2	6.25	0.84	1.82	2.81
			5	4.41	13.8	1.77	4.48	1.01	2.66	0.78	0.404	29.2	7.91	0.88	1.86	3.46
6.3/4	63	40	4	4.04	16.3	2.01	5.16	1.13	3.07	0.87	0.397	33.0	8.51	0.91	2.03	3.17
			5	4.98	19.9	2.00	6.26	1.12	3.72	0.86	0.396	41.4	10.8	0.95	2.08	3.91
			6	5.90	23.3	1.99	7.28	1.11	4.36	0.86	0.393	49.9	13.1	0.99	2.12	4.63
			8	7.68	29.6	1.96	9.15	1.09	5.58	0.85	0.386	66.9	17.9	1.07	2.20	6.03
7/4.5	70	45	5	5.59	27.8	2.23	9.05	1.27	5.34	0.98	0.406	56.7	15.2	1.05	2.28	4.39
7.5/5	75	50	6	7.25	40.9	2.38	14.6	1.42	8.48	1.08	0.435	83.9	25.2	1.21	2.44	5.69
			8	9.47	52.4	2.35	18.5	1.40	10.9	1.07	0.430	112	34.2	1.29	2.52	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.6	2.56	12.7	1.41	7.58	1.09	0.387	84.6	20.8	1.13	2.60	4.99
			6	7.55	49.0	2.55	14.8	1.40	8.88	1.08	0.386	102	25.2	1.17	2.65	5.92
9/5.6	90	56	5.5	7.86	65.3	2.88	19.7	1.58	11.8	1.22	0.384	132	32.2	1.26	2.92	6.17
			6	8.54	70.6	2.88	21.2	1.58	12.7	1.22	0.384	145	35.2	1.28	2.95	6.70
			8	11.18	90.9	2.85	27.1	1.56	16.3	1.21	0.380	194	47.8	1.36	3.04	8.77
10/6.3	100	63	6	9.59	98.3	3.20	30.6	1.79	18.2	1.38	0.393	198	49.9	1.42	3.23	7.53
			7	11.1	113	3.19	35.0	1.78	20.8	1.37	0.392	232	58.7	1.46	3.28	8.70
			8	12.6	127	3.18	39.2	1.77	23.4	1.36	0.391	266	67.6	1.50	3.32	9.87
			10	15.5	154	3.15	47.1	1.75	28.3	1.35	0.387	333	85.8	1.58	3.40	12.1
11/7	110	70	6.5	11.4	142	3.53	45.6	2.00	26.9	1.53	0.402	286	74.3	1.58	3.55	8.98
			8	13.9	172	3.51	54.6	1.98	32.3	1.52	0.400	353	92.3	1.64	3.61	10.9
12.5/8	125	80	7	14.1	227	4.01	73.7	2.29	43.4	1.76	0.407	452	119	1.80	4.01	11.0
			8	16.0	256	4.00	83	2.28	48.8	1.75	0.406	518	137	1.84	4.05	12.5
			10	19.7	312	3.98	100	2.26	59.3	1.74	0.404	649	173	1.92	4.14	15.5
			12	23.4	365	3.95	117	2.24	69.5	1.72	0.400	781	210	2.00	4.22	18.3

Продовження таблиці А.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
14/9	140	90	8	18.0	364	4.49	120	2.58	70.3	1.98	0.411	727	104	2.03	4.49	14.1
			10	22.2	444	4.47	146	2.56	85.5	1.96	0.409	911	245	2.12	4.58	17.5
16/10	160	100	9	22.9	606	5.15	186	2.85	110	2.20	0.391	1221	300	2.23	5.19	18.0
			10	25.3	667	5.13	204	2.84	121	2.19	0.390	1359	335	2.28	5.23	19.8
			12	30.0	784	5.11	239	2.82	142	2.18	0.388	1634	405	2.36	5.32	23.6
			14	34.7	897	5.08	272	2.80	162	2.16	0.385	1910	477	2.43	5.40	27.3
18/11	180	110	10	28.3	952	5.80	276	3.12	165	2.42	0.375	1933	444	2.44	5.88	22.2
			12	33.7	1123	5.77	324	3.10	194	2.40	0.374	2324	537	2.52	5.97	26.4
20/12.5	200	125	11	34.9	1449	6.45	446	3.58	264	2.75	0.392	2920	718	2.79	6.50	27.4
			12	37.9	1568	6.43	482	3.57	285	2.74	0.392	3189	786	2.83	6.54	29.7
			14	43.9	1801	6.41	551	3.54	327	2.73	0.390	3726	922	2.91	6.62	34.4
			16	49.8	2026	6.38	617	3.52	367	2.72	0.388	4264	1061	2.99	6.71	39.1

## ДОДАТОК Б

### Зразок оформлення титульного аркуша пояснювальної записки

Міністерство освіти та науки України

Український державний університет залізничного транспорту

Кафедра будівельної механіки та гідравліки

**Розрахунково-графічна робота №\_\_**

Схема №\_\_  
Варіант №\_\_

Виконав студент групи \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Перевірив \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Харків 20\_\_

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
для виконання розрахунково-графічних робіт  
з освітньої компоненти  
*«ОПІР МАТЕРІАЛІВ»*  
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня  
спеціальності І7 «Залізничний транспорт»  
механіко-енергетичного факультету  
Частина 3

Відповідальний за випуск Берестянська С. Ю.

Редактор Ібрагімова Н. В.

---

Підписано до друку 24.04.2026 р.  
Умовн. друк. арк. 2,0. Тираж . Замовлення № .  
Видавець та виготовлювач Український державний університет  
залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.